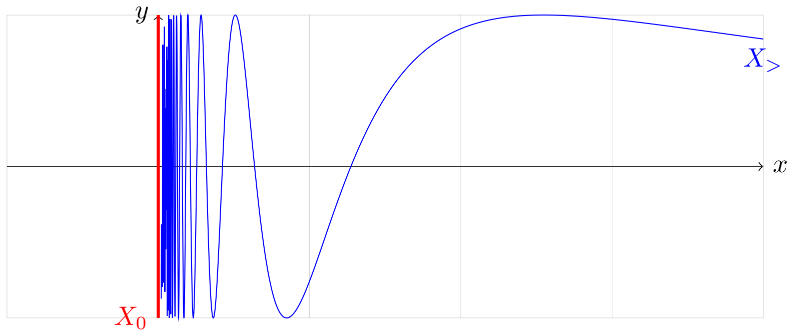
Corrigé de l'exercice 10 du TD n°4

Exercice 10. Soit $X := \{(x, \sin(\frac{1}{x}))\}_{x\in]0,\infty[} \cup \{(0,y)\}_{y\in[-1,1]} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Montrer que X est connexe.

b) Soit $f = (f_1, f_2) : [0,1] \to X$ une application telle que f_1 soit continue, $f_1(0) = 0$ et $f_1(1) > 0$. Soit $t_0 = \sup f_1^{-1}(0)$. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ $f_2([t_0, t_0 + \alpha]) = [-1, 1]$. En déduire que f n'est pas continue et que X n'est pas connexe par arcs.

Solution. Cet exercice illustre la différence entre connexité et connexité par arcs. Un dessin est plus que jamais indispensable.



L'idée intuitive est que la partie X n'est pas connexe par arcs, « parce que se promener le long de la sinusoïde prend un temps infini » (cet énoncé n'est en rien rigoureux). Mais pourquoi est-il connexe ? parce que la sinusoïde touche « à la limite » l'axe vertical (il va de soi que la sinusoïde est disjointe du segment vertical)...

a) Sans indication, j'accorde volontiers que la question est délicate. Le topologue pioche alors dans sa boîte à outils, qui peut venir du cours, ou d'autres exercices faits.

On pourrait se casser la tête en termes de topologie (ou métrique) induite, mais le plus simple est sans doute de réfléchir à X. Il est défini comme union de deux ensembles disjoints : le segment vertical $X_0 = \{(0,y)\}_{y\in[-1,1]}$ et la sinusoïde $X_> = \{(x, \sin(\frac{1}{x}))\}_{x\in]0,\infty[}$.

Et l'on pose les questions de routine en topologie : ces sous-ensembles sont-ils ouverts dans le plan ? fermés ? connexes ? Il est clair que X_0 est fermé et connexe par arcs. Et $X_>$? Il est déjà connexe par arcs. Mais il n'est pas fermé. Un peu de réflexion supplémentaire, et l'on comprend qu'en fait $\overline{X_>} = X_> \cup X_0 = X$.

Il est clair que $\overline{X_>} \subseteq X$; pour la réciproque, fixons un point $(0,y) \in X_0$ et montrons qu'il est limite d'une suite de points de $X_>$. Comme $-1 \le y \le 1$, on peut écrire $y = \sin\theta$ pour un $\theta > 0$. On considère alors la suite $x_n = \frac{1}{\theta + 2\pi n}$. Il est clair que $x_n > 0$, et que $\sin\frac{1}{x_n} = y$. La suite de points $(x_n, \sin\frac{1}{x_n})$ est donc à valeurs dans $X_>$; elle tend bien vers $(0,y)$.

On a donc $X = \overline{X_>}$. L'adhérence d'un connexe par arcs serait-elle connexe par arcs ? Non, bien sûr, puisque la deuxième question demande de montrer que X n'est pas connexe par arcs. Mais avec connexe ? Le lemme suivant est classique ; sans le connaître, la question est difficile (de difficulté normale en le connaissant).

Lemme. *L'adhérence d'une partie connexe est connexe.*

Démonstration. On utilise l'exercice 13, qui caractérise ainsi les espaces connexes : C est connexe ssi toute fonction continue de C dans $\{0,1\}$ discret est constante. Supposons qu'on a une partie connexe $A \subseteq X$ d'un espace, et montrons que $\overline{A}$ est encore connexe. Pour cela, soit $f : \overline{A} \to \{0,1\}$ une fonction continue (on veut montrer que f est constante).

Or $f_A : A \to \{0,1\}$ est continue et A est connexe, donc $f_{|A}$ est constante (disons 0 sur A). Comme tout $b \in \overline{A}$ est limite d'une suite de points $a_n \to b$, avec $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$, on a par continuité de f en b : $f(b) = \lim f(a_n) = \lim 0 = 0$. Donc $f = 0$ sur $\overline{A}$ entier : cet ensemble est bien connexe. □

Remarque. Cette démonstration ne vaut que dans le cadre métrique (caractérisation séquentielle de l'adhérence). Elle s'adapte sans difficulté supplémentaire, mais sans intérêt supplémentaire non plus, au cadre topologique abstrait.

Pour en revenir à la question, $X_>$ est connexe par arcs, donc connexe. Son adhérence X est donc connexe.

b) Cette question est plus intuitive qu'il n'y paraît : on se donne un chemin qui va d'un point du segment X_0 à un point de la sinusoïde $X_>$, et l'on veut montrer que ce chemin ne peut pas être continu « parce que c'est trop long ». Mais la méthode est décevante, dans le sens où l'on ramène tout à des considérations sur les parties connexes de $\mathbb{R}$. C'est pourtant ce qu'il y a de plus sûr ($\mathbb{R}$ étant le seul espace dont on connaît à fond les connexes). Cela nécessite de travailler en coordonnées : $f = (f_1, f_2)$.

L'idée n'est pas si mystérieuse : on part du segment vertical pour aller sur la sinusoïde, soit. Mais dans ce cas il y a peut-être un « premier moment » où l'on est sur la sinusoïde ? Impossible de formaliser cette idée. Y aurait-il plutôt un « dernier moment » où l'on est encore sur le segment ?

Soit $t_0 = \sup f_1^{-1}(\{0\})$. C'est bien défini car 0 est atteint par f_1, donc $f_1^{-1}(\{0\})$ est non-vide, et f_1 est définie sur $[0, 1]$, donc $f_1^{-1}(\{0\})$ est majoré par 1. On a donc une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$; son sup existe.

Pour $\alpha > 0$, que se passe-t-il entre t_0 et $t_0 + \alpha$? la variable $x = f_1(t)$ a sans doute un petit peu bougé vers la droite ; cela suffit à faire se balader $y = f_2(t)$ une infinité de fois de haut en bas et de bas en haut. Reste à formaliser cela.

Comme f_1 est continue, $I_1 = f_1([t_0, t_0 + \alpha])$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$: c'est donc un intervalle. Il contient $f_1(t_0) = 0$ et $f_1(t_0 + \alpha) > 0$ (car $t_0 + \alpha \notin f_1^{-1}(\{0\})$, par définition du sup). Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[0, \varepsilon] \subseteq I_1$.

Que dire alors de $f_2([t_0, t_0 + \alpha])$? C'est une partie de $[-1, 1]$; on veut montrer qu'on a égalité. Comme il n'est pas supposé que f_2 soit continue (on va montrer le contraire ; à mon avis une démonstration par l'absurde serait ici mieux indiquée, mais ce n'est pas l'énoncé...), on ne peut pas utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. Nous procédons directement.

Soit $y \in [-1, 1]$ à atteindre. Soit $\theta = \arcsin y$. La suite

$$a_n = \frac{1}{\theta + 2\pi n}$$

tend vers 0, donc pour un n assez grand on a $a_n \in [0, \varepsilon] \subseteq I_1 = f_1([t_0, t_0 + \alpha])$. Soit $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ tel que $f_1(t) = a_n$. Alors $f_2(t) = \sin \frac{1}{f_1(t)} = \sin \frac{1}{a_n} = y$. En conclusion, $y \in f_2([t_0, t_0 + \alpha])$. On a donc $f_2([t_0, t_0 + \alpha]) = [-1, 1]$.

La fonction f_2 doit ainsi envoyer des intervalles arbitrairement courts dans un intervalle de longueur fixée ; on sent qu'elle ne peut pas être continue. Supposons qu'elle le soit. Alors l'image de tout intervalle est un intervalle (on connaît les parties connexes de $\mathbb{R}$). Soit $y_0 = f_2(t_0)$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que sur $[t_0, t_0 + \alpha]$, $|f_2(t_0) - f_2(t)| < \frac{1}{2}$. Notamment, l'intervalle $f_2([t_0, t_0 + \alpha])$ est de longueur ≤ 1, alors qu'on a montré que c'était $[-1, 1]$! C'est une contradiction. La fonction coordonnée f_2 n'est pas continue, et le chemin f non plus.

Il n'existe pas de chemin continu joignant un point de X_0 à un point de $X_>$: X n'est donc pas connexe par arcs.