TD n°8. L'inversion locale et les fonctions implicites

1 Difféomorphismes

Exercice 1. *Difféomorphisme ou non ?*

a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$.

b) $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{it}$.

c) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$.

d) Un isomorphisme linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie.

e) Un isomorphisme linéaire entre espaces de Banach.

Exercice 2. *Coordonnées polaires* (dessins conseillés).
Soit l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \longmapsto \quad (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{cases}$$

a) Φ est-elle un difféomorphisme ?

b) Calculer la différentielle $D\Phi(r, \theta)$ pour tous r et θ, et montrer qu'elle est inversible dès que $r \neq 0$.

c) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, Ω_α désigne l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi + \alpha, \pi + \alpha[$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\Phi_{|\Omega_\alpha} : \Omega_\alpha \to \Phi(\Omega_\alpha)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$. On dit alors que $\Phi_{|\Omega_\alpha}$ est un *difféomorphisme sur son image*.

d) Expliquer alors pourquoi l'expression *difféomorphisme local* rend particulièrement bien compte des propriétés de Φ.

Exercice 3. Soit E un espace de Banach. $\mathcal{L}(E)$ est muni de la norme subordonnée à celle de E et $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ de la norme définie par

$$\forall\, u, v \in \mathcal{L}(E) \quad \|(u, v)\| = \max(\|u\|, \|v\|).$$

a) Montrer que $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E), (u, v) \mapsto u \circ v$ est une application bilinéaire continue.

b) Montrer qu'elle est différentiable et calculer sa différentielle. En déduire qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

c) Montrer que la boule ouverte $B(\mathrm{Id}_E, 1)$ dans $\mathcal{L}(E)$ est en fait incluse dans $\mathcal{GL}(E)$.
Indication : $(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots) = 1$ *si* $|x| < 1$.

d) En déduire que $\mathcal{GL}(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.

e) Montrer que l'application $\mathrm{Inv} : \mathcal{GL}(E) \to \mathcal{GL}(E), g \mapsto g^{-1}$ est différentiable et calculer sa différentielle. *Indication :* $\mathrm{Inv}(g) \circ g = \mathrm{Id}_E$.

f) En déduire que Inv est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2 Inversion locale

Exercice 4. Soient E un espace de Banach, U un voisinage ouvert de 0 dans E et $\Psi : U \to \mathcal{L}(E)$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $\Psi(0) = \mathrm{Id}_E$.

a) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 contenu dans U, dont l'image $\Psi(V)$ soit contenue dans $\mathcal{GL}(E)$.

b) Montrer que l'application $x \mapsto \Psi(x) \cdot x$ est un difféomorphisme au voisinage de 0.

Exercice 5. *Difféomorphisme local ou global.*
Soit $f : \Omega \to F$ un application de classe $\mathcal{C}^1$, où E et F sont des espaces de Banach, et Ω un ouvert de E. Pour tout $x \in \Omega$, la différentielle $Df(x)$ est supposée inversible.

a) Montrer que l'image $f(\Omega)$ est ouverte dans F et que f est un difféomorphisme local, autrement dit, que tout point x de Ω admet un voisinage ouvert U tel que $f : U \to f(U)$ soit un difféomorphisme.

b) Si, de plus, f est injective, montrer que f est un difféomorphisme sur son image. Ainsi, un difféomorphisme local injectif est un difféomorphisme global.

c) Dans les deux derniers cas, si f est de classe $\mathcal{C}^k$, montrer alors que f est un difféomorphisme respectivement local ou global de classe $\mathcal{C}^k$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f est injective et qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous x et h de $\mathbb{R}^n$,

$$\|Df(x) \cdot h\| \geq \delta \|h\|.$$

a) Montrer que, pour tout x, la différentielle $Df(x)$ est inversible et que $\|(Df(x))^{-1}\| \leq \frac{1}{\delta}$.

b) Montrer que f est ouverte (c'est-à-dire, pour tout ouvert V de $\mathbb{R}^n$, $f(V)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$).

c) Conclure que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7. Soit $F : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ qui à X associe X^2.

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $DF(X)$ pour tout X de $M_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il existe une fonction différentiable G, définie dans un voisinage V de la matrice identité I_n telle que $G(X)^2 = X$, pour tout $X \in V$.

c) On suppose que $n = 2$. Soit $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $DF(X) \cdot J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 8. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $\phi = f - Id$.

a) On suppose que $\|D\phi(x)\| < 1$ pour tout $x \in E$. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E sur son image.

b) Soit $g : E \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que g est k-lipschitzienne si, et seulement si, $\|Dg(x)\| \leq k$ pour tout $x \in E$.

c) On suppose que ϕ est k-lipschitzienne avec $k < 1$. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E dans lui-même.
Indication : appliquer le théorème du point fixe à une fonction convenablement choisie.

d) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $|g'(t)| \leq k < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que les applications

$$f(x, y) = (x + g(y), y + g(x)) \quad \text{et} \quad h(x, y) = (y + g(x), x + g(y))$$

définissent des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Exercice 9. *Prérequis d'analyse complexe.*
Le plan $\mathbb{R}^2$ est identifié à $\mathbb{C}$ de sorte $(1, i)$ en est la base canonique.

a) Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, vérifier que l'application $z \mapsto \alpha z + \beta \overline{z}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire et écrire sa matrice représentative dans la base $(1, i)$.

b) Inversement, montrer que toute application $\mathbb{R}$-linéaire $\ell : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est de la forme précédente, et exprimer α et β en fonction des coefficients de la matrice représentative de ℓ.

c) Calculer le déterminant de ℓ en fonction de α et β. À quelle condition, sur α et β, ℓ est-elle inversible ?

Exercice 10. *Une preuve du théorème de d'Alembert.*
Soit P un polynôme à coefficients complexes que l'on voit comme une application $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dite polynomiale.

a) Un *point singulier* de P est un élément z de $\mathbb{C}$ vérifiant $P'(z) = 0$; Z désigne l'ensemble des points singuliers de P. Dorénavant, P est supposé non constant. Montrer que Z est fini et que $P : \mathbb{C} \backslash Z \to \mathbb{C}$ est un difféomorphisme local.

b) Une *valeur singulière* de P est l'image par P d'un point singulier de P ; W désigne l'ensemble des valeurs singulières de P. Montrer que W est fini et que l'application appelée *degré*

$$d : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus W & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ w & \longmapsto & \operatorname{card}(P^{-1}(w)) \end{array} \right.$$

est localement constante, i.e. toute valeur non singulière w admet un voisinage ouvert U, sur lequel d est constante.

c) En déduire que l'application degré est constante et non nulle.
Indication : $\mathbb{C} \setminus W$ est connexe (par arcs) et, pour tout entier n, $d^{-1}(\{n\})$ est ouvert.

d) Conclure. *Indication : distinguer les cas où* 0 *est une valeur singulière ou non.*

Exercice 11. *Théorème d'invariance du domaine de Brouwer : « si f est un homéomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ alors $n = p$. »*
La démonstration de cet énoncé d'apparence anodine fut l'une des motivations initiales de la Topologie algébrique. *Cette discipline étudie les invariants, de nature algébrique, associés aux espaces topologiques. Par exemple, d'après ce théorème, si un espace métrique est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors la dimension n est un invariant algébrique.*
Démontrer ce théorème lorsque

a) f est une application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$,

b) f est un difféomporphisme.

3 Fonctions implicites

Exercice 12. Montrer que le système d'équation

$$\begin{cases} x \;+y \;+z \;+t \;=0 \\ x^2+y^2+z^2+t \;=2 \\ x^3+y^3+z^3+t^2=0 \end{cases}$$

a une unique solution $(x, y, z) = f(t)$ proche de $(0, -1, 1)$, pour t assez petit. Déterminer la dérivée de f en 0.

Exercice 13. Montrer que l'ensemble

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0\}$$

est, au voisinage de $(0, 1)$, le graphe d'une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\psi(0) = 1$. Donner le développement limité de ψ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 14. Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$.

a) Etant donné $(a_0, b_0, c_0, X_0) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P_0(X_0) = 0$, où $P_0(X) = X^3 + a_0X^2 + b_0X + c_0$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un voisinage ouvert U de (a_0, b_0, c_0) et une application $X : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, tels que

$$X(a_0, b_0, c_0) = X_0 \quad \text{et} \quad P(X(a, b, c)) = 0 \quad \forall (a, b, c) \in U.$$

b) Soit $\Omega = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, P(X) \text{ a trois racines réelles distinctes}\}$

   i) Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

   ii) Montrer que $\Theta : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $(a, b, c) \mapsto (x, y, z)$ où $x < y < z$ sont les racines (distinctes) de P est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

4 Pour aller plus loin...

Exercice 15. Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ définie au voisinage de 0 et $a > 0$. On pose $E_a = \mathcal{C}^0([-a, a]; \mathbb{R}^n)$ muni de la norme de la convergence uniforme notée $\|\cdot\|_a$.

a) On définit $F : E_a \to E_a$ par

$$F(x)(t) = x(t) - \int_0^t f(x(u))\,\mathrm{d}u$$

au voisinage de 0. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$. On pourrra introduire $L_x(h)(t)$ donné par

$$L_x(h)(t) = \int_0^t Df(x(u)) \cdot h(u)\,\mathrm{d}u$$

et majorer

$$\|F(x + h) - F(x) - h + L_x(u)\|_a.$$

b) En déduire que, pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et a assez petits, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

possède une solution et une seule sur $[-a,a]$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$. On pourra introduire

$$y_{x_0}(t) = \begin{cases} x_0 \quad \text{si} \quad |t| \leq \alpha \\ x_0 - (t-\alpha)f(0) \text{ si } \alpha < t \leq a \\ x_0 - (t+\alpha)f(0) \text{ si } -a \leq t < -\alpha, \end{cases}$$

pour α et x_0 assez petits.

Exercice 16. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ prolongeable par continuité à la frontière ∂U de U, sur laquelle on suppose qu'elle ne s'annule pas. On suppose que 0 est une valeur régulière de f, c'est-à-dire que $Df(x)$ est inversible en tout x tel que $f(x) = 0$.

a) Montrer que $f^{-1}(0)$ est une partie finie de U.

b) Montrer qu'il existe un voisinage de 0 constitué de valeurs régulières de f.

c) Montrer que le degré topologique de f en y,

$$\sum_{f(x)=y} \text{signe}(\det Df(x))$$

est constant au voisinage de 0.

5 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ sont identifiés de manière usuelle, où les entiers n et p vérifient $0 \leq p \leq n$.

Exercice 17. *Prérequis de calcul matriciel.*

a) Soit A une matrice de $M_{p,n}(\mathbb{R})$ de rang p, i.e. une application linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ surjective. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que BP soit la projection canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_p) \end{array}.$$

b) Soit B une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p, i.e. une application linéaire $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ injective. Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que QB soit l'inclusion canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_p, 0 \ldots, 0) \end{array}.$$

Exercice 18. Une partie M de $\mathbb{R}^n$ est une *sous-variété* de $\mathbb{R}^n$ de dimension p si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes.

a) Définition locale par redressement :
Pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $f : U \to V$ tels que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

b) Définition locale par fonction implicite :
Pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une application $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$ soit surjective et que $U \cap M = f^{-1}(0)$.

c) Définition locale par graphe :
Pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$, un automorphisme linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ et une application $g : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $A(U \cap M)$ soit le graphe de de la fonction g.

d) Définition locale par paramétrage :
Pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et une application $f : V \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $f(0) = x$, $Df(0) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ soit injective, et f soit un difféomorphisme de V sur $U \cap M$.

Montrer que ces propriétés sont bien équivalentes.
Indication : démontrer les implications dans l'ordre et s'inspirer de l'exercice précédent pour b)⇒c) et d)⇒a).