TD n°1. Relations d'équivalence

1 Relations d'équivalence

Rappel. Soit X un ensemble. Une relation d'équivalence sur X est une relation binaire $\mathcal{R}$ qui est :
– réflexive : $\forall x \in X,\ x\mathcal{R}x$
– symétrique : $\forall (x,y) \in X^2,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
– transitive : $\forall (x,y,z) \in X^3,\ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Exercice 1. Les relations suivantes sont-elles symétriques ? réflexives ? transitives ?

a) sur $\mathbb{R}$, l'égalité
b) sur $\mathbb{R}$, l'ordre strict $<$
c) sur $\mathbb{R}$, l'ordre $\leq$
d) sur $\mathbb{R}$, la relation "avoir le même carré"
e) sur $\mathbb{R}$, la relation "avoir le même sinus"
f) sur l'ensemble des droites du plan, le parallélisme
g) sur l'ensemble des droites du plan, l'orthogonalité

Exercice 2. Soient X un ensemble, et $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux relations d'équivalence sur X. Montrer que la relation $\mathcal{R}'$ définie par :

$$x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}_1 y \wedge x\mathcal{R}_2 y)$$

est encore une relation d'équivalence.

2 Classes d'équivalence

Rappel. Soient X un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. Si $x \in X$, la classe d'équivalence de x est $[x] = \{y \in X : x\mathcal{R}y\}$. On dit que x est un représentant de $[x]$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. Montrer que pour tout $x \in X$, $x \in [x]$. Montrer que pour $(x,y) \in X^2$:

$$x \in [y] \Leftrightarrow y \in [x] \Leftrightarrow [x] = [y] \Leftrightarrow [x] \cap [y] \neq \emptyset$$

Exercice 4. Sur $\mathbb{C}$, soit la relation définie par :

$$z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence et décrire les classes d'équivalence.

Exercice 5 (relations d'équivalences et partitions)**.** Soit X un ensemble. On rappelle qu'une partition de X est un ensemble Π de sous-ensembles de X tel que :
– $\emptyset \notin \Pi$;
– $\forall (A,B) \in \Pi^2,\ A \cap B = \emptyset$;
– $\forall x \in X\ \exists A \in \Pi,\ x \in A$.

a) Donner des exemples.
b) Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. Pour $x \in X$, on note $[x]$ sa classe d'équivalence. Montrer que l'ensemble $E = \{[x] : x \in X\}$ est une partition de X.
c) Soit Π une partition de X. Montrer que la relation suivante : "x et y sont dans le même élément de Π" est une relation d'équivalence.
d) En déduire qu'il y a une bijection entre l'ensemble des relations d'équivalence sur X et l'ensemble des partitions de X.

Exercice 6. Soient X, Y deux ensembles non vides et $f : X \to Y$ une fonction surjective. Pour $y \in Y$, soit $X_y = \{x \in X : f(x) = y\}$. Montrer que $\{X_y : y \in Y\}$ forme une partition de X. Décrire la relation d'équivalence associée.

3 Relations compatibles ou pas

Exercice 7. Soit $n > 0$ un entier. Soit sur $\mathbb{Z}$ la relation $\cong_n$:

$$a \cong_n b \quad \Leftrightarrow \quad n|a-b$$

On parle d'égalité modulo n, aussi notée $a = b \mod n$ ou $a = b[n]$.

a) Montrer que $\cong_n$ est une relation d'équivalence.

b) Combien l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\cong_n$ a-t-il d'éléments ? Donner un système de représentants.

c) Montrer que $\cong_n$ est compatible avec l'addition et la multiplication de $\mathbb{Z}$.

d) On étend $\cong_n$ à une relation sur $\mathbb{R}$ en posant $a \cong_n b \Leftrightarrow (a-b) \in n\mathbb{Z}$. Montrer que l'on définit bien ainsi une relation d'équivalence ; est-elle compatible avec l'addition et le produit de $\mathbb{R}$?

4 Ensemble quotient

Rappel. Soient X un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. L'ensemble quotient est $X/\mathcal{R} = \{[x] : x \in X\}$. La projection canonique est la fonction :

$$\pi : \begin{array}{ccc} X & \to & X/\mathcal{R} \\ x & \mapsto & [x] \end{array}$$

Exercice 8. Soient X, Y deux ensembles non vides et $f : X \to Y$ une fonction. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. Soit $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la projection canonique. On suppose que f est compatible avec $\mathcal{R}$, c'est-à-dire qu'on a la propriété :

$$\forall (x,y) \in X^2,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x) = f(y)$$

Montrer qu'il existe une unique fonction $g : X/\mathcal{R} \to Y$ telle que $f = g \circ \pi$.
Indication : on définira à la main $g([x]) = f(x)$. Il faut vérifier que cela a un sens, puis que g convient.

5 Exemples de groupes

Exercice 9. Parmi ces ensembles, lesquels sont des groupes pour les lois de composition associées ?

- $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \times)$, $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$.

Exercice 10. Soit ABC un triangle équilatéral du plan.

a) Déterminer l'ensemble des isométries qui laissent invariant ABC.

b) Montrer que c'est un groupe pour la loi $\circ$.

c) Faire de même avec un carré.

Exercice 11. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des groupes pour la multiplication de matrices ?

a) $M_n(\mathbb{K})$ (l'ensemble des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{K}$).

b) $GL_n(\mathbb{K})$ (l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles sur $\mathbb{K}$).

c) $SL_n(\mathbb{K})$ (l'ensemble des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{K}$ de déterminant 1).

d) L'ensemble des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{K}$ de déterminant -1. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans cette question).

e) $O_n(\mathbb{K})$ (l'ensemble des matrices $n \times n$ orthogonales sur $\mathbb{K}$).