TD n°3. Morphismes, Sous-groupes normaux, Groupes quotients

1 Morphismes de groupes

Exercice 1. Traduire en termes d'homomorphismes de groupes les propriétés usuelles suivantes :

a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
b) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$
c) $|zz'| = |z||z'|$
d) $(xy)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$
e) $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$
f) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

Exercice 2. Déterminer tous les homomorphismes de groupe de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, les injectifs et les surjectifs.

Exercice 3.

a) Montrer que les groupes $\mathbb{R}^\times = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ et $\mathbb{C}^\times = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$ ne sont pas isomorphes.
b) Montrer que les groupes $\mathbb{R}_+ = (\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$ sont isomorphes.
c) Qu'en est-il de $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_{>0}, \times)$? (étudier $f(1/n)$ pour f un morphisme de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}_{>0}, \times)$.)

Exercice 4. Soit G un groupe.

a) Montrer que l'ensemble des automorphismes de G est un groupe pour la composition, noté $\mathrm{Aut}(G)$.
b) Soit $g \in G$ fixé. Montrer que l'application $\varphi_g : x \mapsto gxg^{-1}$ définit un automorphisme de G, appelé *conjugaison par g*, ou *automorphisme intérieur associé à g*.
c) Montrer que $\Phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ qui à $g \in G$ associe φ_g est un morphisme de groupes et trouver $\ker \Phi$.
d) Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_+)$ et $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.

2 Sous-groupes distingués

Exercice 5.

a) Calculer la décomposition de S_3 en translatés à gauche de $\langle(12)\rangle$, puis en translatés à droite. Observation ? Même question avec $\langle(123)\rangle$.
b) Traduire en terminologie moderne l'extrait suivant :

> *En d'autres termes, quand un groupe G en contient un autre H, le groupe G peut se partager en groupes, que l'on obtient chacun en opérant sur les permutations de H une même substitution ; en sorte que $G = H + HS + HS' + \ldots.$ Et aussi il peut se décomposer en groupes qui ont tous les mêmes substitutions, en sorte que $G = H + TH + TH + \ldots.$ Ces deux genres de décomposition ne coïncident pas ordinairement. Quand ils coïncident, la décomposition est dite* propre.
>
> *É. Galois,* Lettre à A. Chevalier

c) Montrer qu'un sous-groupe d'indice 2 est toujours distingué.
(On verra plus tard qu'un sous-groupe d'indice le plus petit facteur premier de $|G|$ est distingué).

Exercice 6.

a) Montrer que le noyau d'un morphisme de groupes est distingué. Est-ce vrai pour l'image ?
b) L'image directe d'un sous-groupe distingué est-elle distinguée ? L'image réciproque ?
c) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est-il distingué dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$? $O_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$? $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ dans $O_n(\mathbb{R})$?

Exercice 7 (produit de Frobenius)**.** On rappelle que pour deux sous-ensembles quelconques X et Y d'un groupe G, on note $X \cdot Y$ l'ensemble $\{x \cdot y : (x, y) \in X \times Y\}$. Soient H, K deux sous-groupes de G.

a) Calculer le cardinal de l'ensemble $H \cdot K$.
b) Montrer que $H \cdot K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \cdot K = K \cdot H$.
c) En déduire que si H ou K est distingué, alors $H \cdot K$ est un sous-groupe.
d) Trouver un exemple où $H \cdot K$ est un sous-groupe de G, mais ni H ni K n'est distingué.

Exercice 8.

a) Montrer que le centre $Z(G) = \{x \in G, \forall y \in G, xy = yx\}$ d'un groupe G est distingué dans G.

b) Montrer que le dérivé $D(G) = \langle \{xyx^{-1}y^{-1}, (x,y) \in G^2\} \rangle$ est un sous-groupe distingué de G.

c) Déterminer le centre et le groupe dérivé de S_3, du groupe des quaternions $\mathbb{H}$.

d) Même question pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, le groupe $B_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures, le groupe $U_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires avec des 1 sur la diagonale.

Exercice 9. Soit $H \leq G$ un sous-groupe. Les *conjugués* de H sont les sous-groupes xHx^{-1}, pour $x \in G$. Montrer que ce sont des sous-groupes et que leur intersection est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 10 (normalisateur et centralisateur)**.** Soient G un groupe et $A \subseteq G$ une partie non vide. Soient $N_G(A) = \{g \in G : gAg^{-1} = A\}$ (le *normalisateur* de A dans G) et $C_G(A) = \{g \in G : \forall a \in A,\ gag^{-1} = a\}$ (le *centralisateur* de A dans G). Montrer que ce sont des sous-groupes de G et que $C_G(A) \triangleleft N_G(A)$.

Exercice 11 (sous-groupes caractéristiques)**.** Un sous-groupe H d'un groupe G est dit caractéristique si pour tout $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, $\alpha(H) = H$ (voir l'Exercice 4). On note cela $H \blacktriangleleft G$.

a) Montrer que le centre $Z(G)$, le dérivé $D(G)$ sont caractéristiques.

b) Montrer que si $H \blacktriangleleft G$, alors $H \triangleleft G$. Donner un contre-exemple à la réciproque.

c) Montrer que si $K \blacktriangleleft H \blacktriangleleft G$, alors $K \blacktriangleleft G$. Montrer que c'est faux avec des $\triangleleft$.

d) Montrer que si $K \blacktriangleleft H \triangleleft G$, alors $K \triangleleft G$. A-t-on $K \blacktriangleleft G$?

e) On suppose $K \blacktriangleleft G$ et $K \leq H$. A-t-on $K \blacktriangleleft H$?

3 Groupe quotient

Exercice 12.

a) Soit $K = \{0, a, b, a+b\}$ le groupe de Klein ; déterminer $K/\langle a \rangle$, et $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Observation ?

b) Montrer que tous les sous-groupes du groupe des quaternions sont distingués et calculer les quotients.

c) Montrer que le groupe quotient de $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$; montrer aussi que $\mathbb{R}^\times/\mathbb{R}_{>0} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

d) Déterminer $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

e) Notations de l'Ex. 8 (4). Montrer que $U_2(\mathbb{R})$ est distingué dans $B_2(\mathbb{R})$ et déterminer $B_2(\mathbb{R})/U_2(\mathbb{R})$.

Exercice 13.

a) Montrer que si $\varphi : G \to A$ est un morphisme de G dans un groupe abélien A, alors $D(G) \leq \ker \varphi$.

b) Montrer que si $D(G) \leq H \leq G$, alors $H \triangleleft G$. Donner un contre-exemple non-trivial à la réciproque.

c) Montrer que $G/D(G)$ est abélien (on appelle parfois ce quotient de G l'*abélianisé* de G).

d) Déterminer l'abélianisé de S_3, du groupe des quaternions $\mathbb{H}$, du groupe libre à n générateurs F_n.

Exercice 14. Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Soit H un sous-groupe distingué de G. On suppose $H \leq \ker f$. Montrer que f induit un morphisme de groupes $\bar{f} : G/H \to G'$. Montrer la réciproque : s'il existe un morphisme $\bar{f} : G/H \to G'$ tel que $\bar{f} \circ \pi = f$, alors $H \leq \ker f$.

4 Pour aller plus loin. . .

Exercice 15 (générateurs et relations)**.**

a) Soient G un groupe et $R \subseteq G$ un sous-ensemble. Montrer qu'il existe un plus petit sous-groupe *distingué* de G contenant R, appelé *clôture normale* de R et noté $\triangleleft R \triangleright$.

b) Une *présentation* d'un groupe G est formée d'un ensemble de générateurs S et d'un ensemble de relations R (les $w_i \in R$ sont des mots en les $s_i \in S$, c'est-à-dire des éléments du groupe libre F_S sur S) tels que $G \simeq F_S/\triangleleft R \triangleright$. On note alors $G \simeq \langle S|R \rangle$.
Déterminer $\langle a|\emptyset \rangle$, $\langle a, b|ab = ba \rangle$, $\langle a, b|a^2 = b^2 = 1 \rangle$. Déterminer une présentation de S_3.

c) Un groupe est dit finiment engendré si S peut être pris fini. Montrer que deux systèmes minimaux de générateurs peuvent être de cardinalité différente.

d) Montrer que tout quotient d'un groupe finiment engendré est finiment engendré. Montrer que c'est faux avec un sous-groupe.

Remarque : Un groupe est dit finiment présenté si S et R peuvent être pris finis. Il existe des groupes finiment engendrés qui ne sont pas finiment présentés (mais c'est difficile à montrer).