TD n°4. Groupe symétrique

1 Décomposition en cycles, en transpositions ; conjugaison et signature.

Exercice 1. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathcal{S}_3$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{S}_4$ le groupe symétrique sur 4 éléments. Faire la liste de tous ses éléments. Soit $\mathcal{A}_4$ le noyau de la signature $\varepsilon : \mathcal{S}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Rappeler pourquoi c'est un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_4$. Combien $\mathcal{A}_4$ a-t-il d'éléments ? En faire la liste. Montrer que l'ensemble des $x \in \mathcal{A}_4$ tels que $x^2 = Id$ forme un sous-groupe de $\mathcal{A}_4$.
Faire la liste de tous les sous-groupes de $\mathcal{S}_4$.

Rappel. La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur k, que l'on note $(a_1\ a_2 \dots a_k)$.

Exercice 3. a) Décomposer en produits de cycles à supports disjoints la permutation donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Décomposer en produit de cycles à supports disjoints (1238)(432)(15)(7326)(174).

c) Soit la permutation de $\{1, \dots, 12\}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 9 & 8 & 11 & 7 & 3 & 2 & 6 & 12 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer σ^{2012}.

d) Quelle est la signature d'un cycle de longueur p ? En déduire la signature des permutations ci-dessus.

e) Montrer que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ se décompose de façon unique (à l'ordre près) en produit de cycles à supports disjoints.

Exercice 4. a) Si $\tau \in \mathcal{S}_n$, montrer que $\tau(a_1, a_2, \dots, a_k)\tau^{-1} = (\tau(a_1)\ \tau(a_2) \dots \tau(a_k))$. En déduire que deux cycles de même ordre sont toujours conjugués.

b) En déduire que le nombre de classes de conjugaison de $\mathcal{S}_n$ est égal au nombre de partitions de l'entier n.

Exercice 5. Soit E un ensemble à n élements et $E' \subset E$. Montrer que l'ensemble des permutations de E qui laissent fixe chaque élément de E' est un sous-groupe de $S(E)$. Montrer que l'ensemble des permutations de E qui laissent E' invariant est un sous-groupe de $S(E)$. À quoi sont isomorphes chacun de ces sous-groupes ?

Exercice 6. Que peut-on dire d'un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_n$ qui contient une transposition ?

2 Groupe alterné

Exercice 7. Soit n un entier. On note $\mathcal{A}_n$, et on appelle groupe alterné le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ formé des permutations paires ; autrement dit, le noyau de la signature $\varepsilon : \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

a) Montrer que $\mathcal{A}_n$ est engendré par l'ensemble des 3-cycles de $\mathcal{S}_n$.

b) Montrer que pour $n \geq 3$, $\mathcal{A}_n$ est engendré par l'ensemble des 3-cycles.

c) En déduire que $\mathcal{A}_n$ est, pour tout n, stable par tout automorphisme de $\mathcal{S}_n$ ($\mathcal{A}_n$ est donc un sous-groupe caractéristique de $\mathcal{S}_n$).

Exercice 8. Les deux questions sont sans rapport.

a) Montrer que $\mathcal{S}_n$ s'injecte dans $\mathcal{A}_{n+2}$.

b) Soient $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ fixant au moins deux éléments. Montrer que si σ et τ sont conjugués dans $\mathcal{S}_n$, ils le sont par un élément de $\mathcal{A}_n$.

Exercice 9. Montrer qu'une permutation d'ordre 10 dans $\mathcal{S}_8$ est toujours impaire.

Exercice 10. Soit $p \geq 5$ un nombre premier et H un sous-groupe de S_p tel que $[S_p : H] < p$.

a) Soit σ un cycle de longueur p. Montrer que si $\sigma \notin H$, alors les classes $H, \sigma H, \ldots, \sigma^{p-1}H$ sont distinctes. En déduire que H contient tous les cycles de longueur p.

b) Montrer que tout 3-cycle est un produit de deux p-cycles. En déduire que $H = \mathcal{A}_p$ ou $H = \mathcal{S}_p$.

c) Montrer que $\mathcal{S}_5$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 30 ou 40.

3 Pour aller plus loin

Exercice 11 (automorphismes de $\mathcal{S}_n$)**.** On dit qu'un automorphisme $\varphi : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ est intérieur s'il existe un élément g de $\mathcal{S}_n$ tel que pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on ait :

$$\varphi(\sigma) = g\sigma g^{-1}$$

a) Si σ est un élément du groupe $\mathcal{S}_n$, on note $c(\sigma)$ son centralisateur, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}_n$ qui commutent avec σ. Montrer que $c(\sigma)$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

b) Montrer que si σ est un élément de $\mathcal{S}_n$ et φ un automorphisme de $\mathcal{S}_n$, alors $c(\varphi(\sigma)) = \varphi(c(\sigma))$.

c) Quels sont les éléments de $\mathcal{S}_{10}$ qui commutent avec la permutation $(1, 2, 3)(4, 5, 6, 7)$? Quel est le nombre de ces éléments ?

d) Plus généralement, soit σ un élément de $\mathcal{S}_n$. On suppose que $n = k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n$ où les k_i sont des entiers de $\{0...n\}$ et que σ est produit de k_1 cycles d'ordre 1, k_2 cycles d'ordre 2, ..., k_n cycles d'ordre n, tous ces cycles étant disjoints. Montrer que le cardinal de $c(\sigma)$ est

$$|c(\sigma)| = \prod_{i=1}^{n} (k_i!) i^{k_i}$$

e) En utilisant les questions précédentes, montrer que si n est différent de 6, un automorphisme de $\mathcal{S}_n$ transforme les transpositions en transpositions.

f) On suppose maintenant $n \neq 6$. Soit φ un automorphisme de $\mathcal{S}_n$. Pour tout $i \geq 2$ on note τ_i la transposition $(1, i)$. Montrer qu'il existe des entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ avec $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = \{1, \ldots, n\}$ tels que pour tout $i \geq 2$ on ait $\varphi(\tau_i) = (\alpha_1, \alpha_i)$.

g) En déduire que tout automorphisme de $\mathcal{S}_n$, pour $n \neq 6$, est intérieur.