TD n°6. Groupes abéliens finis

Exercice 1. Soit m et n deux entiers et

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

définie par $f(x) = (x + m\mathbb{Z}, x + n\mathbb{Z})$.

a) Montrer que f est un morphisme de groupes et déterminer son noyau.

b) Montrer que f est surjective si et seulement si m et n sont premiers entre eux.

c) En déduire que, si m et n sont premiers entre eux, les groupes $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Exercice 2. Les groupes $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 3. Soit $G = \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

a) Pour tout nombre premier p, déterminer la composante p-primaire de G, c'est-à-dire le sous-groupe de G formé des éléments d'ordre une puissance de p.

b) En déduire les facteurs invariants de G.

Exercice 4. Déterminer, à isomorphisme près, les groupes abéliens d'ordre 8 et 72. On explicitera leurs facteurs invariants.

Exercice 5. Combien existe-t-il, à isomorphisme près, de groupes abéliens d'ordre 10^6 ?

Exercice 6. Soit K un corps (commutatif) fini de cardinal n.

a) Soit $m = \inf\{p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in K^*, x^p = e\}$. Combien le polynôme $X^m - 1$ possède-t-il de racines distinctes ? En déduire que $m = n - 1$.

b) Montrer que le groupe multiplicatif K^* est cyclique.

Exercice 7. Soit m et n deux entiers naturels non nuls.

a) Montrer qu'il existe un isomorphisme de groupes entre $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et $\{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, mx = \overline{0}\}$.

b) On note d le pgcd de m et n. Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$, montrer que $m\alpha \in n\mathbb{Z}$ si et seulement si n/d divise α. En déduire que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Exercice 8. Soit p un nombre premier. Un groupe abélien G a pour invariants p^3, p^2. Combien contient-il de sous-groupes d'ordre p^2 ?