TD n°8. Utilisation des théorèmes de Sylow pour montrer qu'un groupe G fini n'est pas simple

Rappel. On rappelle qu'un groupe G est *simple* s'il n'a pas de sous-groupe distingué non trivial (c'est à dire, différent de lui même et de $\{e_G\}$).

Exercice 1. La première méthode est de prouver que le nombre n_p de p-sous-groupes de Sylow vaut 1 et ceci en utilisant les deux remarques suivantes :
a) $n_p \equiv 1 \mod p$.
b) $n_p||G|$ et plus précisément, si $|G| = p^\alpha m$ avec $\text{pgcd}(m,p) = 1$, alors $n_p|m$.

Soient p et q deux nombres premiers.

a) Prouver qu'un groupe d'ordre $n = p^\alpha q$ avec $p > q$ n'est pas simple (exemples : $n = 18$, 54, 50...)
b) Prouver qu'un groupe d'ordre $n = p^\alpha q^\beta$ avec $p^\alpha < q + 1$ n'est pas simple (exemples : $n = 20$, 28, 44...)
c) Prouver qu'un groupe d'ordre $n = p^\alpha q^\beta$ lorsque aucun des p^i, $i \leq \alpha$ n'est congru à 1 modulo q, n'est pas simple (exemples : $n = 40$, 45...)

Exercice 2. Lorsque cette méthode échoue, on peut parfois s'en tirer en dénombrant pour un p premier le nombre d'éléments qui sont dans le p-Sylow et en constatant qu'il reste peu de chose en dehors.
Prouver qu'un groupe d'ordre $n = 12$, 30, 56 n'est pas simple.

Exercice 3. Si G a n_p sous-groupes de p-Sylow, comme ceux-ci forment une orbite, on a un homomorphisme dont le noyau peut fournir un sous-groupe distingué non trivial, par exemple, si $|G| > n_p!$ ou même si $|G|$ ne divise pas $n_p!$.
Prouver qu'un groupe d'ordre $n = 12$, 24, 36 et 48 n'est pas simple.

Exercice 4. Soit G un groupe d'ordre p^α.

a) Rappeler comment est définie l'action de G sur lui-même par conjugaison.
b) Ecrire l'équation aux classes pour cette action, et montrer que p divise le cardinal d'un orbite.
c) En déduire que le centre de G n'est pas réduit à $\{e_G\}$, puis que G n'est pas simple.

Exercice 5. Montrer qu'un groupe non banal (*i.e*, les groupes d'ordre p, premier) d'ordre $n < 60$ n'est pas simple.

Exercice 6. Soit G un groupe, S un 2-sous-groupe de Sylow. On suppose S cyclique et $|G| > 2$. Montrer que G n'est pas simple. En particulier, si G et simple et G est pair alors $4||G|$. (Idée : on peut faire opérer G sur G par translation et considérer la signature ϵ de la permutation induite sur G par le générateur s de S. On voit que $\epsilon(s) = -1$ d'où un homomorphisme non-trivial dans $\{-1, 1\}$.
Montrer qu'un groupe d'ordre 90 n'est pas simple. Reprendre l'exercice précédent pour $n \leq 100$, $n \neq 60$.

Exercice 7. On suppose qu'il existe un groupe simple G de cardinal 90.

a) Trouvez le nombre d'éléments d'ordre 5 de G.
b) Trouvez le nombre de 3-sous-groupes de Sylow de G.
c) Soient T et S deux 3-sous-groupes de Sylow de G. On va montrer que $T \cap S = \{e_G\}$. Supposons qu'il existe $h \in T \cap S$ tel que $h \neq e_G$. Considérons le sous-groupe de G $Z(h) = \{g \in G : gh = hg\}$ (le centralisateur de h).
   i) Montrez que $T, S \subset Z(h)$ (il n'est pas nécessaire de redémontrer qu'un groupe de cardinal $9 = 3^2$ est commutatif).

   ii) Montrez qu'un groupe de cardinal 18 ou 45 ne contient pas deux sous-groupes d'ordre 9 distincts.
   iii) Montrez que si $Z(h) = G$, alors G n'est pas simple.
   iv) Déduisez en que $T \cap S = \{e_G\}$.

d) Estimez le nombre d'éléments de G d'ordre divisant 9.

e) Conclure qu'il n'existe pas de groupe simple de cardinal 90.

Exercice 8. On rappelle que $\mathcal{A}_n$ est simple si et seulement si $n = 3$ ou $n \geq 5$. On rappelle également qu'un sous-groupe d'indice 2 est distingué (*cf. feuille de TD 4*). On veut montrer que $\mathcal{S}_6$ ne contient pas de sous-groupe simple d'indice 4. Soit H un tel sous-groupe.

a) Montrer que H n'est pas inclu dans $\mathcal{A}_6$.

b) Montrer que $H\mathcal{A}_6 = \mathcal{S}_6$, puis, en considérant le morphisme produit de $H \times \mathcal{A}_6$ dans $\mathcal{S}_6$, que $H \cap \mathcal{A}_6$ est d'indice 2 dans H. Conclure.

Exercice 9. On suppose qu'il existe un groupe simple G d'ordre 180.

a) Montrer que G contient 36 5-Sylow.

b) Montrer que G contient 10 3-Sylow, puis que deux 3-Sylow distincts ne peuvent pas contenir un même élément $g \neq e_G$.

c) Conclure

Exercice 10. On suppose qu'il existe un groupe simple G d'ordre 252.

a) Trouver le nombre d'éléments d'ordre 7 de G.

b) Montrer que deux 3-Sylow distincts de G ne peuvent pas contenir un même élément $g \neq e_G$.

c) Estimer le nombre de 3-Sylow de G et conclure

Exercice 11. Soit G un groupe et H_p un p-Sylow de G. On suppose qu'il existe un sous- groupe K distinct de H_p et de G tel que $H_p \subset K$, $H_p \lhd K$ et $K \lhd G$. Montrer que $H_p \lhd G$.
En utilisant A_4 sous-groupe des permutations paires de S_4 donner un exemple de groupe G contenant deux sous-groupes H et K tels que $H \lhd K$, $K \lhd G$ mais H n'est pas distingué dans G.