TD n°9. Théorèmes d'isomorphisme ; A_n

1 Théorèmes d'isomorphisme

Exercice 1. Illustrer les théorèmes d'isomorphisme dans A_4 et dans $\mathbb{H}$.

Exercice 2. Soit G un groupe fini qui est produit direct de sous-groupes $H_1 \times H_2$, où les ordres de H_1 et H_2 sont premiers entre eux.

a) Soit $K \leq G$ un sous-groupe. En notant $K_i = K \cap H_i$, montrer que $K = K_1 \times K_2$.

b) Trouver un contre-exemple si les ordres de H_1 et H_2 ne sont pas premiers entre eux.

c) Énoncer et démontrer un résultat analogue pour un produit direct $H_1 \times \cdots \times H_n$.

Exercice 3. Soient G un groupe et $H, K \lhd G$ deux sous-groupes distingués.

a) Montrer que $H \cap K$ est distingué dans G, et que $G/(H \cap K)$ s'injecte dans $G/H \times G/K$.
On considérera la fonction canonique $G \to G/H \times G/K$.

b) On suppose que l'indice de H est premier avec celui de K. Montrer que $G/(H \cap K) \simeq G/H \times G/K$.
On calculera $|G/(H \cap K)|$ de deux façons différentes avec la multiplicativité de l'indice.

c) Énoncer et démontrer un résultat similaire avec n sous-groupes distingués.

Exercice 4 (groupe engendré par des commutateurs)**.** Soient G un groupe ; H, K deux sous-groupes. On définit $[H, K] = \langle [h, k] : (h, k) \in H \times K \rangle$.

a) Montrer que H et K normalisent $[H, K]$; c'est-à-dire que H et K sont dans $N_G([H, K])$.

b) Montrer que si H est distingué dans G, alors $[H, K]$ est inclus dans H.

c) Application. On suppose H et K distingués dans G et $H \cap K = 1$. Montrer que les éléments de H commutent avec les éléments de K, et qu'en particulier $H \cdot K \simeq H \times K$.

d) Soit G fini d'ordre mn ayant deux sous-groupes distingués H et K d'ordre m et n, respectivement, avec m et n premiers entre eux. Montrer que $G \simeq H \times K$.

2 A_5

Exercice 5.

a) Montrer qu'un groupe d'ordre p^n (p premier, $n > 1$) n'est pas simple.

b) Soient p, q premiers tels que $q > p^m$. Montrer qu'un groupe d'ordre $p^m \cdot q^n$ n'est pas simple.

c) Montrer qu'un groupe d'ordre $2^n \cdot 3$ n'est pas simple.

d) S'assurer qu'on vient de traiter tous les nombres < 60 à l'exception de : 30, 36, 42, 45, 56.

e) Évacuer chacun des cas restants.

f) Traduire en terminologie moderne l'extrait suivant :

> *Le plus petit nombre de permutations que puisse avoir un groupe indécomposable quand ce nombre n'est pas premier est* 5.4.3.
>
> É. Galois, *Lettre à A. Chevalier*

Si vous connaissez la définition de la résolubilité, il est clair que tout groupe d'ordre < 60 est résoluble.

Exercice 6 (simplicité de A_5 : version brutale)**.**

a) Montrer que les éléments d'ordre 2 sont conjugués dans A_5.

b) Montrer que si H contient un 5-cycle, il les contient tous.

c) En déduire que A_5 est simple.

Exercice 7 (simplicité de A_5 : version bête)**.**

a) Montrer qu'il existe dans A_5 deux éléments non-conjugués qui sont pourtant conjugués dans S_5.

b) Déterminer les classes de conjugaison de A_5.

c) En déduire, grâce au théorème de Lagrange, que A_5 est simple.

Exercice 8 (simplicité de A_5 : version soft)**.** On admet qu'il suffit de montrer que $D(A_5) = A_5$.

a) En utilisant le fait que le dérivé est caractéristique, montrer que si $D(A_5)$ contient un élément de type cyclique τ, il contient tous les éléments de type τ.
b) Montrer que $D(A_5)$ contient un 3-cycle. On calculera $[(12)(34), (12)(35)]$.
c) Montrer que $D(A_5)$ contient un 5-cycle. On calculera $[(12)(34), (13)(25)]$.
d) Montrer que $D(A_5)$ contient une bi-transposition. On calculera cette fois $[(123), (124)]$.
e) Déterminer le nombre de 3-cycles, de 5-cycles, de bi-transpositions. En déduire $D(A_5) = A_5$.

Exercice 9. Soit G un groupe simple de cardinal 60. On va montrer que G est isomorphe à A_5.

a) Montrer que le nombre de 5-sous-groupes de Sylow de G est 6.
b) Montrer que le nombre de 3-sous-groupes de Sylow de G est 4 ou 10.
c) Montrer que ce nombre est 10 (sinon construire un morphisme $G \to S_4$).
d) Trouver le nombre d'éléments d'ordre 2, de 2-sous-groupes de Sylow, et conclure.

3 A_n

Exercice 10 (simplicité de A_n : version brutale)**.** Soient $n \geq 5$ et H un sous-groupe distingué non-trivial de A_n. Soient $\sigma \in H \setminus \{1\}$ et $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\sigma(i) \neq i$. Soit $j = \sigma(i)$.

a) Soient $k \notin \{i, j, \sigma(j)\}$ et $\tau = (ikj)$. Montrer que $\rho = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$ est dans H. Montrer que le cardinal du support de ρ est ≤ 5, mais que $\rho \neq 1$.
b) Soit $S \subseteq \{1, \dots n\}$ un ensemble à 5 éléments contenant le support de ρ. Grâce à l'inclusion canonique $\iota : A_S \hookrightarrow A_n$, montrer que $H = A_n$.
c) Montrer que les seuls sous-groupes distingués de S_n sont $\{1\}$, A_n, et S_n.

Exercice 11 (simplicité de A_n : version truande)**.**

a) Montrer que A_n contient tous les 3-cycles.
b) Montrer que A_n est engendré par les 3-cycles $(12k)$ pour $k > 2$.
Soit $\{1\} < H \lhd A_n$ un sous-groupe distingué non-trivial.
c) Montrer que si H contient un 3-cycle, il les contient tous.
d) Montrer que H contient un 3-cycle et conclure.

4 Pour aller plus loin...

Les A_n ne forment qu'une des grandes familles de groupes simples finis ; il y a aussi les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, qui ne sont pas bien compliqués ; il y a également certains groupes de matrices sur des corps finis ; il y enfin 26 exceptions, les « groupes sporadiques », dont le plus grand est d'ordre :

$$808017424794512875886459904961710757005754368000000000$$

Mais parlons de groupes de matrices.

Exercice 12. Soit $\mathbb{K}$ un corps.

a) Calculer $|\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})|$.
b) Montrer que $Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}))$ est isomorphe au groupe des racines n^{emes} de l'unité de $\mathbb{K}$.
c) On appelle transvection toute matrice g non diagonale telle que $g - I_n$ soit de rang 1. Montrer que les transvections engendrent $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, et que si $n \geq 3$, elles sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.
d) Soit $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})/Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}))$. On peut montrer (hors-programme) que la plupart du temps, $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{K})$ est simple. Montrer que ce n'est pas vrai pour $n = 2$ et $\mathbb{K}$ d'ordre 2 ou 3.

Exercice 13.

a) Montrer qu'aucun groupe d'ordre $60 < n < 168$ n'est simple.
b) Montrer que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$ est d'ordre 168.
c) Montrer que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$ est simple. On pourra raisonner sur ses 7-sous-groupes de Sylow.
d) Soit G simple d'ordre 168. Montrer que $G \simeq \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$. (Grâce aux sous-groupes de Sylow, trouver une injection $G \hookrightarrow S_8$, et montrer que deux sous-groupes simples de S_8 d'ordre 168 sont conjugués.)
e) En déduire $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_7)$. Trouver une démonstration directe.