TD n°10. Suites de composition ; Résolubilité, nilpotence

1 Suites de composition

Exercice 1. Donner des suites de composition pour $S_3, D_4, \mathbb{H}, A_4, S_4, S_5$.

2 Commutateurs

On rappelle que le commutateur de $a, b \in G$ est $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$; que pour $H, K \leq G$, on note $[H,K] = \langle \{[h,k] : (h,k) \in H \times K\} \rangle$.

Exercice 2.

a) Montrer que a et b commutent si et seulement si $[a,b] = 1$.

b) Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrer que $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$.

c) Montrer que l'inverse d'un commutateur est un commutateur (faux pour un produit).

d) Montrer que $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})] = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, mais que $-I_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ n'est pas un commutateur. (Un produit de commutateurs n'est donc pas toujours un commutateur ; attention à l'étape d'engendrement dans la définition du dérivé.)

e) Montrer la formule : $[ab, c] = a[b,c]a^{-1} \cdot [a,c]$, puis l'identité de Hall :

$$b[a,[b^{-1},c]]b^{-1} \cdot c[b,[c^{-1},a]]c^{-1} \cdot a[c,[a^{-1},b]]a^{-1} = 1$$

f) Application : Soient $H, K, L \leq G$ des sous-groupes et $N \lhd G$ un sous-groupe distingué. On suppose $[H,[K,L]] \leq N$ et $[K,[L,H]] \leq N$. Montrer que $[L,[H,K]] \leq N$.

3 Résolubilité

Exercice 3. Soit G un groupe fini. Montrer l'équivalence entre les propriétés :

- G a une suite de sous-groupes $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_n = 1$ normaux les uns dans les autres, à quotients G_i/G_{i+1} cycliques.
- G a une suite de sous-groupes $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_n = 1$ normaux dans G, à quotients G_i/G_{i+1} abéliens.
- G a une suite de sous-groupes $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_n = 1$ caractéristiques dans G, à quotients G_i/G_{i+1} abéliens.
- Il existe n tel que $D^n(G) = 1$.

On dit alors que G est résoluble. La *classe de résolubilité* de G est le plus petit tel n.
Donner un exemple de groupe résoluble qui n'admet pas de suite caractéristique à quotients cycliques.

Exercice 4.

a) Montrer que $S_3, \mathbb{H}$, le groupe B des matrices triangulaires supérieures, sont résolubles et déterminer leur classe.

b) Soit $H \leq G$. Montrer que si G est résoluble de classe n, alors H l'est aussi, de classe $\leq n$.

c) Soit $H \lhd G$. Montrer que G est résoluble ssi H et G/H le sont, et estimer les classes de résolubilité.

d) Montrer que tout groupe d'ordre < 60 est résoluble. En déduire qu'il suffit de montrer que $D(A_5) = A_5$ pour garantir sa simplicité.

e) Donner un exemple de groupe non simple tel que $D(G) = G$.

La résolubilité joue un rôle prépondérant en théorie de Galois : elle vient directement de là.

4 Nilpotence

Exercice 5.

a) On note $\Gamma^0 = G$ et $\Gamma^{i+1} = [G, \Gamma^i(G)]$. Montrer que les Γ^i sont caractéristiques dans G (ce sont les termes de la « série centrale descendante »).

b) On note $Z_1 = Z(G)$ le centre du groupe G et $Z_{i+1}(G)$ défini par $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z\left(G/Z_i(G)\right)$. Montrer que les Z_i sont caractéristiques dans G (ils forment la « série centrale ascendante »).

c) Montrer que $Z_n(G) = G$ ssi $\Gamma^n(G) = 1$. On dit alors que G est nilpotent de classe $\leq n$.

Exercice 6.

a) Montrer que $\mathbb{H}$, D_4 sont nilpotents. Montrer que le groupe U des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale est nilpotent, et déterminer sa classe.

b) Calculer la série centrale ascendante et la série centrale descendante de A_4. Observation ?

c) Soit $H \leq G$. Montrer que si G est nilpotent de classe n, alors H l'est aussi, de classe $\leq n$.

d) Montrer que si G est nilpotent, alors G est résoluble. Montrer que la réciproque est fausse.

e) Soit $H \triangleleft G$. Montrer que si G est nilpotent, alors H et G/H sont nilpotents. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 7. Soit G un groupe nilpotent (fini ou non).

a) Soit $H < G$. Montrer que $H < N_G(H)$ (considérer i maximal tel que $Z_i(G) \leq H$).

b) Soit $N \triangleleft G$. Montrer que $N \cap Z(G) \neq 1$ (considérer i maximal tel que $N \cap Z_i(G) = 1$).

c) Fournir des démonstrations des deux derniers points avec la série centrale descendante.

Exercice 8.

a) Montrer que tout p-groupe *fini* est nilpotent (on pensera au centre).

b) Montrer que c'est faux pour un p-groupe infini. On pourra songer à une extension de $\mathbb{Z}_{2^\infty}$ par l'automorphisme d'inversion.

(En fait, il existe même des p-groupes infinis simples.)

c) Montrer qu'un groupe fini est nilpotent ss'il est le produit direct de ses sous-groupes de Sylow.

Il est important de retenir que les groupes nilpotents finis sont moralement presque abéliens, avec une théorie de structure bien comprise. Ce n'est pas le cas des groupes résolubles (« non classifiables »).

5 Pour aller plus loin...

Exercice 9. Soit G un groupe nilpotent infini de type fini. On montre que $Z(G)$ est infini.

a) Soit $x \in G$. Montrer que $\varphi(y) = [x, y]$ définit un morphisme $\varphi : Z_2 \to Z$.

b) Supposant Z fini, montrer que Z_2 est fini.

c) Trouver une contradiction par récurrence.

Exercice 10 (sous-groupe de Fitting)**.** Soit G un groupe fini.

a) Montrer que le produit de deux sous-groupes distingués nilpotents est distingué nilpotent.

b) En déduire l'existence d'un plus grand sous-groupe distingué nilpotent, appelé *sous-groupe de Fitting* de G et noté $F(G)$.

c) Soit K_p l'intersection des p-sous-groupes de Sylow de G. Montrer que $F(G) = \prod_p K_p$.