Correction du TD n°3.

Exercice 11 (sous-groupes caractéristiques)**.** Un sous-groupe H d'un groupe G est dit caractéristique si pour tout $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, $\alpha(H) = H$ (voir l'Exercice 4). On note cela $H \blacktriangleleft G$.

a) Montrer que le centre $Z(G)$, le dérivé $D(G)$ sont caractéristiques.

b) Montrer que si $H \blacktriangleleft G$, alors $H \triangleleft G$. Donner un contre-exemple à la réciproque.

c) Montrer que si $K \blacktriangleleft H \blacktriangleleft G$, alors $K \blacktriangleleft G$. Montrer que c'est faux avec des $\triangleleft$.

d) Montrer que si $K \blacktriangleleft H \triangleleft G$, alors $K \triangleleft G$. A-t-on $K \blacktriangleleft G$?

e) On suppose $K \blacktriangleleft G$ et $K \leq H$. A-t-on $K \blacktriangleleft H$?

Solution.

a) – Le centre est caractéristique :
En effet soient $z \in Z(G)$ et $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. On montre que $\alpha(z) \in Z(G)$. Si $y \in G$ est quelconque, il existe $x \in G$ tel que $y = \alpha(x)$ (car α est surjectif). Comme $z \in Z(G)$, on a $xz = zx$. Appliquant le morphisme α, on trouve $\alpha(x)\alpha(z) = \alpha(z)\alpha(x)$, c'est-à-dire que $\alpha(z)$ commute avec y. Comme y est arbitraire, on a bien $\alpha(z) \in Z(G)$, et $Z(G)$ est donc caractéristique dans G.

– Le dérivé est caractéristique :
Appelons commutateur tout élément de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ (souvent noté $[x, y]$). Soit C l'ensemble des commutateurs de G. Par définition, $D(G)$ est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs : $D(G) = \langle C\rangle$.
Soient alors $z = xyx^{-1}y^{-1} \in C$ un commutateur et $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. On a $\alpha(z) = \alpha(xyx^{-1}z^{-1}) = \alpha(x)\alpha(y)\alpha(x)^{-1}\alpha(y)^{-1}$ (commode à noter $[\alpha(x), \alpha(y)]$), et c'est encore un commutateur. Donc si $z \in C$, alors $\alpha(z) \in C \subseteq \langle C\rangle = D(G)$. Ceci signifie que $\alpha(C) \subseteq D(G)$. Comme α est un morphisme, on a $\alpha(D(G)) \leq D(G)$; $D(G)$ est donc caractéristique dans G.

b) Il est clair que si $H \blacktriangleleft G$, alors $H \triangleleft G$. En effet, si H est caractéristique dans G, alors il est stable par *tout* automorphisme de G. En particulier, pour tout $g \in G$, H est stable par l'automorphisme de conjugaison $\varphi_g : x \mapsto gxg^{-1}$. Ceci signifie que pour tout $g \in G$, $gHg^{-1} = H$, et c'est la définition de $H \triangleleft G$.

La réciproque est pourtant fausse. Partons du groupe de Klein $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 = \{0, a, b, a + b\}$. Il est abélien, donc tout sous-groupe est distingué. Pourtant il existe un automorphisme de G qui échange a et b. Donc $\langle a\rangle \triangleleft G$, mais il n'est pourtant pas caractéristique.

c) On suppose $K \blacktriangleleft H \blacktriangleleft G$; montrons $K \blacktriangleleft G$.

Soit en effet $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ un automorphisme de G ; on veut montrer que $\alpha(K) = K$. Or comme H est caractéristique dans G, on a déjà $\alpha(H) = H$. α se restreint donc en un automorphisme de H (classiquement noté $\alpha_{|H} \in \mathrm{Aut}(H)$). Comme K est caractéristique dans H, on a $\alpha_{|H}(K) = K$. Mais comme on a juste pris une restriction, c'est aussi $\alpha(K) = K$, ce qui signifie que K est caractéristique dans G.

Cette propriété de « transitivité » n'est pourtant pas vraie avec des sous-groupes distingués. Voici un contre-exemple (le lecteur doit faire les calculs). On considère $G = A_4$, qui contient $H = \{\mathrm{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, qui contient $K = \langle(12)(34)\rangle = \{\mathrm{Id}, (12)(34)\}$. Observons que $K \triangleleft H \triangleleft G$. Pourtant, on peut voir que K n'est pas distingué dans G, par exemple en conjuguant par $(123) \in G$.

d) On suppose à présent $K \blacktriangleleft H \triangleleft G$; montrons $K \triangleleft G$.

C'est un peu comme précédemment. Soit $g \in G$; on veut montrer que $gKg^{-1} = K$, ou en termes plus abstraits que $\varphi_g(K) = K$ pour l'automorphisme de conjugaison par g. Or $H \triangleleft G$, donc H est stable par φ_g ; φ_g se restreint donc à H en un automorphisme $\beta \in \mathrm{Aut}(H)$.

> Attention, β n'est pas forcément un automorphisme « intérieur » à H, dans le sens qu'il n'existe pas forcément de $h \in H$ tel que $\beta = \varphi_h$. C'est précisément pour cela que « la distinction n'est pas transitive ».

Comme K est *caractéristique* dans H, on a quand même $\beta(K) = K$, c'est-à-dire que $\varphi_g(K) = K$: K est donc distingué dans G.

C'est en revanche faux avec « caractéristique » : je peux ne pas me fouler, et prendre n'importe quel sous-groupe H distingué non caractéristique (cela existe, on l'a vu). Puis je prends $K = H$. . ..

e) Plus technique ; faux. L'idée intuitive est que la structure $H < G$ peut être moins rigide, et posséder beaucoup plus d'automorphismes (en particulier, certains automorphismes de H ne se prolongeront pas en automorphismes de G).

C'est le cas, par exemple, de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Son centre est $K = \{\lambda \mathrm{Id} : \lambda \in \mathbb{C}^\times\}$; on sait que $K \blacktriangleleft G$. Mais aussi $K < H = \{\text{matrices diagonales}\}$. On voit que $H = K \oplus K_2$, où $K_2 \simeq K$, et qu'il existe des automorphismes de H échangeant K et K_2. (Ne vous inquiétez pas, il m'a fallu 15 minutes pour trouver cela.)

Naturellement, la propriété suggérée serait vraie en remplaçant partout « caractéristique » par « distingué ».

Exercice 14. Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Soit H un sous-groupe distingué de G. On suppose $H \leq \ker f$. Montrer que f induit un morphisme de groupes $\bar{f} : G/H \to G'$. Montrer la réciproque : s'il existe un morphisme $\bar{f} : G/H \to G'$ tel que $\bar{f} \circ \pi = f$, alors $H \leq \ker f$.

Solution. On désire construire un morphisme de groupes $\bar{f} : G/H \to G'$ en lien avec la question. Quelle doit être l'image d'une classe $c \in G/H$? Si $g \in c$, on doit certainement avoir $\bar{f} = f(g)$; on voit mal ce qu'on peut faire d'autre.

Soit donc $\bar{f} : G/H \to G'$ qui à une classe $c \in G/H$ associe $f(g)$ pour n'importe quel $g \in c$.

- C'est bien défini car si $g_1, g_2 \in c$, on a $g_1^{-1} g_2 \in H \leq \ker f$, donc $f(g_1^{-1} g_2) = 1$ et $f(g_1) = f(g_2)$. En clair, notre construction de $\bar{f}(c)$ ne dépend pas du représentant choisi dans c : $\bar{f}$ est bien définie.
- Il reste à montrer que $\bar{f}$ est un morphisme de groupes. En effet, soient $c_1, c_2 \in G/H$ deux classes et $g_1 \in c_1, g_2 \in c_2$ des représentants. On a :

$$\bar{f}(c_1) \cdot \bar{f}(c_2) = f(g_1) \cdot f(g_2) = f(g_1 g_2)$$

  Mais d'autre part, $c_1 \cdot c_2 = g_1 H \cdot g_2 H = g_1 g_2 \cdot H$, donc $g_1 g_2 \in c_1 c_2$. En particulier, $\bar{f}(c_1 \cdot c_2) = f(g_1 g_2)$. En conclusion :

$$\bar{f}(c_1) \cdot \bar{f}(c_2) = \bar{f}(c_1 \cdot c_2)$$

  et $\bar{f}$ est un morphisme de groupes.

Réciproque. On suppose qu'il existe un morphisme $\bar{f} : G/H \to G'$ tel que $\bar{f} \circ \pi = f$. Montrons que $H \leq \ker f$.

C'est en fait immédiat. Si $h \in H$, alors $\pi(h) = \bar{1}$ (classe de h modulo H). Donc $f(h) = (\bar{f} \circ \pi)(h) = \bar{f}(\bar{1}) = 1$ car $\bar{f}$ est un morphisme de groupes.