Université Pierre & Marie Curie — Master 1 de mathématiques
MM232 (Logique pour mathématiciens) — Printemps 2013

Devoir à la maison n°1

À rendre le 14 février.

Le but de ce DM est de montrer que les symboles $\wedge, \vee, \leftrightarrow, \exists$ sont superflus, et que l'on aurait pu tout faire sans *en gardant le même calcul des déductions*.
Remarque. Les arbres de déduction sont assez pénibles à réaliser en LaTeX, et je ne conseille pas de rendre un DM tapé. Si vous voulez néanmoins tenter l'expérience, j'utilise personnellement le paquet `proof`.

0 Notations

Un langage du premier ordre $\mathcal{L}$ est fixé. Notons Form l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules, et Form$'$ *l'ensemble des formules qui n'utilisent que* $\neg, \rightarrow, \forall$.
À une formule $\varphi \in \text{Form}$ nous associons sa traduction $\varphi' \in \text{Form}'$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl}
(R(t_1, \ldots, t_n))' & := & R(t_1, \ldots, t_n) \text{ (formule atomique);} \\
(\neg\psi)' & := & \neg\psi'; \\
(\psi \rightarrow \chi)' & := & (\psi' \rightarrow \chi'); \\
(\psi \wedge \chi)' & := & \neg(\psi' \rightarrow \neg\chi'); \\
(\psi \vee \chi)' & := & (\neg\psi' \rightarrow \chi'); \\
(\psi \leftrightarrow \chi)' & := & \neg((\psi' \rightarrow \chi') \rightarrow \neg(\chi' \rightarrow \psi')); \\
(\forall x\ \psi)' & := & \forall x\ \psi'; \\
(\exists x\ \psi)' & := & \neg\forall x\ \neg\psi'.
\end{array}$$

Noter que pour φ une formule quelconque, φ' est bien définie et appartient à Form$'$.
Si Σ est un ensemble de formules, on note $\Sigma' = \{\varphi' : \varphi \in \Sigma\}$.

1 Aspect sémantique

On définit une nouvelle notion de satisfaction $\mathcal{M}[s] \models' f$ (pour une $\mathcal{L}$-structure avec assignation $\mathcal{M}[s]$ et une formule $f \in \text{Form}'$) comme suit :

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{M}[s] \models' R(t_1, \ldots, t_n) & \text{:si} & (s(t_1), \ldots, s(t_n)) \in R^{\mathcal{M}} \text{ (formule atomique);} \\
\mathcal{M}[s] \models' (\neg f) & \text{:si} & \mathcal{M}[s] \not\models' f; \\
\mathcal{M}[s] \models' (f \rightarrow g) & \text{:si} & \mathcal{M}[s] \not\models' f \text{ ou } \mathcal{M}[s] \models' g; \\
\mathcal{M}[s] \models' (\forall x\ f) & \text{:si} & \text{pour chaque assignation } s' : \mathcal{V} \rightarrow M \text{ telle que} \\
 & & s'_{|\mathcal{V}\setminus\{x\}} = s_{|\mathcal{V}\setminus\{x\}}, \text{ on a } \mathcal{M}[s'] \models' f.
\end{array}$$

Pour S un sous-ensemble de Form$'$ et $f \in \text{Form}'$, on peut alors définir $S \models' f$ par la condition que chaque $\models'$-modèle de S est un $\models'$-modèle de f.

a) Montrer par récurrence sur φ que pour $\varphi \in \text{Form}$, $\mathcal{M}[s] \models \varphi$ ssi $\mathcal{M}[s] \models' \varphi'$. 4pts
b) En déduire que $\Sigma \models \varphi$ ssi $\Sigma' \models' \varphi'$. 2pts

Du point de vue sémantique, on peut bien se passer des symboles $\wedge, \vee, \leftrightarrow, \exists$. Venons-en au point de vue déductif.

2 Aspect déductif

c) Montrer par récurrence sur φ que $\{\varphi\} \vdash \varphi'$ et $\{\varphi'\} \vdash \varphi$. On pourra dans la récurrence ne traiter que les cas de $\neg, \wedge, \rightarrow, \forall, \exists$ ($\vee$ et $\leftrightarrow$ étant similaires à $\wedge$). 6pts

Ce dernier résultat ne suffit pas ; on veut montrer qu'on peut se passer des *règles de déduction* associées aux symboles superflus.

On définit alors pour Σ un ensemble de formules quelconque et $\varphi \in \text{Form}$: $\Sigma \vdash' \varphi$ s'il existe une déduction *utilisant seulement les règles de l'égalité, l'axiome, l'affaiblissement,* $\neg_i, \neg_e, \rightarrow_i, \rightarrow_e, \forall_i, \forall_e$.

d) Démontrer que $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash \varphi$ ssi $\vdash \psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow (\ldots(\psi_n \rightarrow \varphi)\ldots)$, et que la même équivalence est vraie pour $\vdash'$. 2pts

e) En déduire que si $\Sigma' \vdash' \varphi'$, alors $\Sigma \vdash \varphi$. 2pts

f) Montrer la réciproque, par récurrence sur la déduction. 6pts

Cette question est plus longue. On pourra omettre le cas de $\vee$ et $\leftrightarrow$, pour se concentrer sur $\wedge$ et $\exists$.