Devoir à la maison n°2

Exercice 1.

a) (2pts) Soient $\underline{m}$ et $\underline{n}$ deux uplets de $\mathcal{M}^k$. On suppose qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}, A)$ tel que $\sigma(\underline{m}) = \underline{n}$. Montrer que $\underline{m}$ et $\underline{n}$ ont même type sur A.

b) (2pts) En déduire que si X est A-définissable et $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}, A)$, on a $\sigma(X) = X$ en tant qu'ensemble.

c) (2pts) Montrer par un exemple que même dans ce cas, σ ne fixe pas forcément X point-par-point.

d) (2pts) Déduire de (b) que $\mathbb{R}$ n'est pas définissable dans l'anneau $\mathbb{C}$, même avec paramètres (indication : permuter une base de transcendance).

Solution.

a) Rappelons que tout automorphisme est élémentaire. En particulier, pour $\varphi(\underline{x}, \underline{a})$ une formule à paramètres dans A, on a $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m}, \underline{a})$ ssi $\mathcal{M} \models \varphi(\sigma(\underline{m}), \sigma(\underline{a}))$. Comme en outre σ fixe A point-à-point, on a $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m}, \underline{a})$ ssi $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{n}, \underline{a})$. Ceci signifie bien que $\underline{m}$ et $\underline{n}$ ont (dans $\mathcal{M}$) même type sur A.

b) Application immédiate. Si $\varphi(\underline{x}, \underline{a})$ est une formule définissant X (paramètres dans A), alors pour tout uplet $\underline{m} \in M$, $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m}, \underline{a})$ ssi $\mathcal{M} \models \varphi(\sigma(\underline{m}), \underline{a})$. Il suit que $\underline{m} \in X$ ssi $\sigma(\underline{m}) \in X$. Comme σ est bijectif, ceci démontre bien $\sigma(X) = X$.

c) Exemple minimal : la structure à deux éléments a et b, dans le langage de l'égalité, et sa bijection non-triviale $a \leftrightsquigarrow b$. On prend $X = \mathcal{M}$ et $A = \emptyset$.

d) Supposons $\mathbb{R}$ définissable dans l'anneau $\mathbb{C}$, par une formule $\varphi(x, \underline{a})$. On prend alors deux éléments r, s de $\mathbb{R}$ algébriquement indépendants au-dessus de $\mathbb{Q}(\underline{a})$. L'isomorphisme partiel de corps induit par l'échange $r \leftrightsquigarrow is$ et la condition $\underline{a} \mapsto \underline{a}$ s'étend en un automorphisme du corps $\mathbb{C}$ envoyant $r \in \mathbb{R}$ sur $is \notin \mathbb{R}$: contradiction.

   Cet argument requiert bien sûr que le degré de transcendance de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}(\underline{a})$ reste au moins deux ; c'est vrai car le degré de $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ est $2^{\aleph_0}$!

Exercice 2 (un lemme de prolongement)**.** Soient $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ un morphisme partiel élémentaire.

a) (2pts) Montrer par un exemple que σ peut ne pas avoir de prolongement global élémentaire à $\mathcal{M}$.

   On va montrer en revanche qu'il existe une extension élémentaire $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ et un isomorphisme global (donc élémentaire) $\tau : \mathcal{N} \simeq \mathcal{N}$ étendant σ.

b) Commençons dans cette question par construire une extension élémentaire $\mathcal{M}_1 \succeq \mathcal{M}$ et un morphisme *partiel* élémentaire $\sigma_1 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_1$ tel que :
   – σ_1 étend σ ;
   – $M \subseteq \mathrm{dom}\sigma_1$.
   On considère pour cela le langage $\mathcal{L}_M = \mathcal{L} \cup \{c_m : m \in M\}$ (avec de nouvelles constantes), et même $\hat{\mathcal{L}} := \mathcal{L}_M \cup \{c'_m : m \in M\}$ (encore de nouvelles constantes).
   On forme alors la $\hat{\mathcal{L}}$-théorie :

$$\hat{T} = \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \cup \{\varphi(c'_{\underline{m}}, \sigma(c_{\underline{a}})) : \mathcal{M} \models \varphi(c_{\underline{m}}, c_{\underline{a}}), \underline{a} \in \mathrm{dom}\sigma\}$$

   i) (2pts) Montrer que $\hat{T}$ est cohérente. On pourra interpréter un fragment fini dans $\mathcal{M}$.

   ii) (2pts) Soit $\mathcal{M}_1$ un modèle de $\hat{T}$. Montrer que (au sens de $\mathcal{L}$), $\mathcal{M}$ s'injecte élémentairement dans $\mathcal{M}_1$.

   iii) (2pts) Montrer que si l'on pose $\sigma_1(m) := (c'_m)^{\mathcal{M}_1}$, on obtient un $\mathcal{L}$-morphisme partiel élémentaire $\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_1$ étendant σ.

c) (2pts) La construction précédente ne donne encore qu'un morphisme partiel. Itérer la construction pour produire $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ et un isomorphisme global $\tau : \mathcal{N} \simeq \mathcal{N}$ étendant σ. (On fera attention à la surjectivité !)

Solution. Faute de frappe dans l'énoncé : il fallait lire

$$\hat{T} = \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \cup \{\varphi(c'_{\underline{m}}, c_{\sigma(\underline{a})}) : \mathcal{M} \models \varphi(c_{\underline{m}}, c_{\underline{a}}), \underline{a} \in \mathrm{dom}\sigma\}$$

L'énoncé proposé n'avait pas de sens, dans la mesure où σ ne fait pas partie du langage.

a) On considère la fonction $\mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ qui à n associe $n-1$, pour $\mathbb{N}$ vu comme ensemble sans structure (purement égalitaire). C'est clairement un morphisme partiel élémentaire. Mais si on l'étend en 0, on perdra l'injectivité.

b)
   i) Montrons que la $\hat{\mathcal{L}}$-théorie $\hat{T}$ est cohérente. Soit $\hat{T}_0 \subset \hat{T}$ un fragment fini. Quitte à prendre une conjonction, on peut supposer que $\hat{T}_0$ consiste en deux formules : $\varphi(c_{\underline{m}})$ (où $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m})$) et $\psi(c'_{\underline{m}}, c_{\sigma(\underline{a})})$ (où $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m}, \underline{a})$). Nous affirmons que $\mathcal{M}$ peut être équipée d'une $\hat{\mathcal{L}}$-structure satisfaisant $\hat{T}_0$.
   Nous interprétons bien sûr $c_{\underline{m}}$ par $\underline{m}$ et $c_{\sigma(\underline{a})}$ par $\sigma(\underline{a})$. Pour interpréter $c'_{\underline{m}}$ on remarque que $\mathcal{M} \models \exists \underline{x} \psi(\underline{x}, \underline{a})$, donc par élémentarité de σ, $\mathcal{M} \models \exists \underline{x} \psi(\underline{x}, \sigma(\underline{a}))$. Soit $\underline{m}'$ un uplet convenant. On interprète alors $c'_{\underline{m}}$ par $\underline{m}'$. Cette interprétation fait bien de $\mathcal{M}$ un modèle de $\hat{T}_0$.
   Le fragment fini $\hat{T}_0$ pris arbitrairement est satisfaisable ; il suit, par compacité, que $\hat{T}$ est cohérente.

   ii) On considère la fonction $\alpha : M \to M_1$ qui à m associe $\alpha(m) = c_m^{\mathcal{M}_1}$; soit $M_0 \subseteq M_1$ son image. Si $\varphi(\underline{m})$ est une formule à paramètres dans M telle que $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m})$, alors $\varphi(c_{\underline{m}}) \in \hat{T}$ et donc $\mathcal{M}_1 \models \varphi(c_{\underline{m}})$. La réciproque est vraie par complétude de la $\mathcal{L}_M$-théorie $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M)$. Ainsi a-t-on $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m})$ ssi $\mathcal{M}_1 \models \varphi(\alpha(\underline{m}))$. Il suit que α est un plongement élémentaire, et que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}_0 \preceq \mathcal{M}_1$.
   Nous assimilons dorénavant $\mathcal{M}_0$ à $\mathcal{M}$.

   iii) On pose $\sigma_1(m) = (c'_m)^{\mathcal{M}_1}$. Notons que σ_1 étend bien σ : en effet, si $a \in \mathrm{dom}\sigma$, alors $\mathcal{M} \models c_a = c_a$, donc la formule $c'_a = c_{\sigma(a)}$ est dans $\hat{T}$. Il suit que $\mathcal{M}_1 \models (c'_a)^{\mathcal{M}_1} = (c_{\sigma(a)})^{\mathcal{M}_1}$, i.e. $\sigma_1(a) = \sigma(a)$ dans $\mathcal{M}_1$.
   Soit à présent $\varphi(\underline{m}, \underline{a})$ une formule à paramètres dans M (en toute rigueur, son image dans $\mathcal{M}_1$) ; on suppose $\mathcal{M}_1 \models \varphi(\underline{m}, \underline{a})$. Par élémentaire inclusion, $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m}, \underline{a})$. Par construction, $\varphi(c'_{\underline{m}}, c_{\sigma(\underline{a})})$ est dans $\hat{T}$, donc $\mathcal{M}_1 \models \varphi(c'_{\underline{m}}, c_{\sigma(\underline{a})})$. Mais $\mathcal{M}_1$ interprète $c'_{\underline{m}}$ en $\sigma_1(\underline{m})$ et $c_{\sigma(\underline{a})}$ en $\sigma(\underline{a})$: ainsi $\mathcal{M}_1 \models \varphi(\sigma_1(\underline{m}), \sigma(\underline{a}))$. Puisque σ_1 étend σ, on a ce qu'on voulait.

c) Il est tentant d'itérer, mais on n'aura pas la surjectivité si l'on s'y prend trop naïvement. On procède alors comme suit.
   – On part de $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$ et $\sigma_0 = \sigma$.
   – On passe de $2i$ à $2i+1$ en appliquant la construction de b) à $\sigma_{2i} : \mathcal{M}_{2i} \to \mathcal{M}_{2i}$, obtenant une extension élémentaire $\mathcal{M}_{2i+1} \succeq \mathcal{M}_{2i}$ et un prolongement partiel élémentaire σ_{2i+1} défini (au moins) sur M_{2i+1}.
   – On passe de $2i+1$ à $2i+2$ en appliquant la construction de b) à $\sigma_{2i+1}^{-1} : \mathcal{M}_{2i+1} \to \mathcal{M}_{2i+1}$, obtenant une extension élémentaire $\mathcal{M}_{2i+2} \succeq \mathcal{M}_{2i+1}$ et un prolongement partiel élémentaire σ_{2i+2}^{-1} défini (au moins) sur M_{2i+2}.

   On prend enfin $\mathcal{N} = \bigcup_n \mathcal{M}_n$ et $\tau = \bigcup_n \sigma_n$. On sait alors que $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$. J'affirme que τ est un automorphisme : c'est une fonction comme union de fonctions se prolongeant les unes les autres ; il est clair que c'est un morphisme. Si $n \in \mathcal{N}$, alors il existe i tel que $n \in M_{2i}$, donc $n \in \mathrm{dom}\sigma_{2i+1} \subseteq \mathrm{dom}\tau$. Il existe également j tel que $n \in M_{2j+1}$, donc $n \in \mathrm{im}\sigma_{2j+2} \subseteq \mathrm{im}\tau$.

Exercice 3 (une réciproque de 1 (a)).

a) (2pts) Donner une structure et deux éléments satisfaisant les mêmes formules, mais tels qu'il n'y ait pas d'automorphisme envoyant l'un sur l'autre.

b) (2pts) Soient $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $\underline{m}, \underline{n} \in M^k$ ayant même type sur A. Grâce à l'exercice 2, montrer qu'il existe $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ et $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathcal{N}, A)$ tels que $\sigma(\underline{m}) = \underline{n}$.

c) Question hors-barême : montrer qu'il existe $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ tel que si $\underline{m}, \underline{n} \in M^k$ ont même type sur A, alors il existe $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathcal{N}, A)$ tels que $\sigma(\underline{m}) = \underline{n}$. Sauriez-vous le faire avec $\underline{m}, \underline{n} \in N^k$?

Solution.

a) On considère $\mathcal{M} = \mathbb{Z}_g \sqcup_< \mathbb{Z}_d$ en tant qu'ordre, et 0_g et 0_d avec des notations évidentes.

Alors 0_g et 0_d ont même type. On peut l'admettre (licite), procéder par va-et-vient finitaire (hors-programme), ou raisonner comme suit. On prend une extension élémentaire ω-saturée $\mathcal{M}^* \succeq \mathcal{M}$; celle-ci est de la forme $\sqcup_{(I,<)}\mathbb{Z}_i$, où $(I, <)$ est un ordre linéaire dense sans extrémités dont $g < d$ sont des éléments. Dans $(I, <)$ on envoie g sur d ; ceci induit un automorphisme de $\mathcal{M}^*$ envoyant 0_g sur 0_d, qui y ont donc même type. Il suit qu'ils avaient aussi même type dans $\mathcal{M}$. C'est très élégant mais un peu abstrait ; il n'était pas demandé de justifier pourquoi 0_g et 0_d ont même type.

Je dis qu'il n'existe pas d'automorphisme de $\mathcal{M}$ envoyant 0_g sur 0_d. En effet un tel automorphisme enverrait 1_g sur 1_d, puis par récurrence n_g sur n_d pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notamment, 0_d ne peut avoir d'image par injectivité ; contradiction.

b) Si $\underline{m}$ et $\underline{n}$ ont même type sur A, alors la fonction σ qui fixe A et envoie $\underline{m}$ sur $\underline{n}$ est un morphisme partiel élémentaire. Notamment, il existe une extension élémentaire $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ et $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathcal{N})$ étendant σ ; τ fixe A et envoie $\underline{m}$ sur $\underline{n}$.

c) Je suis la ligne adoptée par certains, qui permet avec élégance de court-circuiter l'induction ordinale attendue (la question était hors-barême à cause de cette récurrence).

Commençons par évacuer A en l'incorporant au langage ; nous n'en parlerons plus. On considère l'ensemble $R = \{(\underline{m}, \underline{n}) \in M^{2k} : \mathrm{tp}(\underline{m}) = \mathrm{tp}(\underline{n})\}$. Pour chaque paire $p = (\underline{m}, \underline{n})$ de R, on ajoute un symbole de fonction σ_p au langage $\mathcal{L}_M$, obtenant $\hat{\mathcal{L}}$. On considère alors la $\hat{\mathcal{L}}$-théorie :

$$\begin{aligned}\hat{T} = \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) &\cup \{\varphi(\underline{x}) \leftrightarrow \varphi(\sigma_p(\underline{x})) : \varphi \in \mathcal{L}, p \in R\}\\ &\cup \{\forall y \exists x\ y = \sigma_p(x) : p \in R\} \cup \{\sigma_p(\underline{m}) = \underline{n} : p = (\underline{m}, \underline{n}) \in R\}\end{aligned}$$

Cette théorie signifie que sur une base qui est extension élémentaire de $\mathcal{M}$, les σ_p sont des automorphismes élémentaires, et que notant $p = (\underline{m}, \underline{n})$, σ_p envoie $\underline{m}$ sur $\underline{n}$.

J'affirme que cette théorie est cohérente. En effet un fragment fini ne mentionne qu'un nombre fini de σ_p ; le problème est ainsi de trouver une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ où quelques uplets de même type sont conjugués. C'est possible par itération finie de b).

Par compacité, $\hat{T}$ est cohérente ; un modèle est une extension $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ telle que si $p = (\underline{m}, \underline{n}) \in R$, alors $\sigma_p^{\mathcal{N}}$ est un automorphisme de $\mathcal{N}$ envoyant $\underline{m}$ sur $\underline{n}$.

Je répète que ceci peut aussi bien se régler par induction transfinie ; un jour vient où cette technique ne fait pas plus peur que l'induction finie.

Exercice 4 (une réciproque de 1 (b))**.**

a) (2pts) Montrer par un exemple que X peut être invariant sous $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}, A)$ mais pas A-définissable.

b) (4pts) Soit à présent $X \subseteq M^k$ un sous-ensemble. On aimerait supposer que X « reste invariant dans les extensions élémentaires ». Le problème est que X n'étant pas définissable a priori, ceci n'a aucun sens.

On introduit alors un nouveau symbole de relation R, et l'on pose $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{R\}$. On fait de $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}'$-structure en posant : $R^{\mathcal{M}'} := X$ (bref, on introduit un nouveau symbole dont l'interprétation est X). L'hypothèse est alors la suivante :

supposons que pour toute $\mathcal{L}'$-structure $\mathcal{N}' \succeq \mathcal{M}'$, $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathcal{N}, A)$ fixe $R^{\mathcal{N}}$.

Montrer qu'alors X est $\mathcal{L}$-définissable sur A dans $\mathcal{M}$.

Indication : considérer deux nouvelles constantes $\underline{a}$ et $\underline{b}$, et la $\mathcal{L}'$-théorie :

$$\hat{T} = \mathrm{Th}(\mathcal{M}', M) \cup \{R(\underline{a})\} \cup \{\neg R(\underline{b})\} \cup \{\varphi(\underline{a}) \leftrightarrow \varphi(\underline{b}) : \varphi(\underline{x}) \text{ une } \mathcal{L}_A\text{-formule}\}$$

Solution.

a) On rappelle que l'anneau $\mathbb{R}$ n'a pas d'automorphisme non-trivial. Notamment, tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est invariant sous $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}/\emptyset)$.

b) Pour toute cette question, nous commençons par supprimer l'ensemble de paramètres A en passant de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{L}_A$, désormais noté $\mathcal{L}$. L'hypothèse est ainsi que dans toute $\mathcal{L}'$-extension élémentaire $\mathcal{N}' \succeq \mathcal{M}'$, $\mathrm{Aut}(\mathcal{N})$ fixe $R^{\mathcal{N}'}$. On va montrer que X est $\mathcal{L}$-définissable dans $\mathcal{M}$.

   Montrons d'abord que $\hat{T}$ est incohérente. Si elle était cohérente, on aurait un modèle $\mathcal{N}' \models \hat{T}$; nous noterons $\mathcal{N}$ la $\mathcal{L}$-structure sous-jacente. Alors $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$. Notons encore $\underline{a}$ et $\underline{b}$ l'interprétation de ces symboles de constantes dans $\mathcal{N}'$; alors $\underline{a}$ et $\underline{b}$ ont, par construction, même $\mathcal{L}$-type dans $\mathcal{N}$. En adaptant l'exercice 2, on construit une $\mathcal{L}'$-extension élémentaire $\mathcal{P}' \succeq \mathcal{N}'$ et un $\mathcal{L}$-automorphisme de $\mathcal{P}$ envoyant $\underline{a}$ sur $\underline{b}$. Contradiction.

   Il suit que $\hat{T}$ est incohérente à un niveau fini. Il existe donc des $\mathcal{L}$-formules $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ telles que $\mathrm{Th}(\mathcal{M}', M) \cup \{R(\underline{a})\} \cup \{\neg R(\underline{b})\} \cup \{\varphi_i(\underline{a}) \leftrightarrow \varphi_i(\underline{b}) : i = 1 \ldots n\}$ est incohérente.

   Comme dans le théorème sur les ensembles d'élimination, on voit alors que R est combinaison booléenne des φ_i. Cet argument vous paraît trop brutal ? en voici l'implémentation sans recours topologique. Pour $\underline{a} \in X$, on considère la formule :

$$\psi_{\underline{a}} : \quad \left(\bigwedge_{i : \mathcal{M} \models \varphi_i(\underline{a})} \varphi_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{j : \mathcal{M} \models \neg\varphi_j(\underline{a})} \neg\varphi_j \right)$$

   Notons que quand $\underline{a}$ varie dans X, les formules $\psi_{\underline{a}}$ sont en nombre fini (car les φ_i le sont). On forme alors :

$$\chi : \quad \bigvee_{\underline{a} \in X} \psi_{\underline{a}}$$

   Comme les $\psi_{\underline{a}}$ sont en nombre fini, cette formule a bien un sens. Et je dis enfin que χ définit X dans $\mathcal{M}$. En effet, si $\underline{a} \in X$, alors il est clair que $\mathcal{M} \models \chi(\underline{a})$. Si réciproquement $\mathcal{M} \models \chi(\underline{m})$, alors il existe un uplet $\underline{a} \in X$ tel que $\mathcal{M} \models \psi_{\underline{a}}(\underline{m})$. Notamment $\underline{m}$ vérifie exactement les mêmes φ_i que $\underline{a}$. Par incohérence de $\hat{T}$, on ne peut avoir $\neg R(\underline{m})$, si bien que $\mathcal{M}' \models R(\underline{m})$. Mais l'interprétation de R dans $\mathcal{M}'$ est X, donc $\underline{m} \in X$, ce qu'on voulait.