Sembra utile riflettere sugli esercizi seguenti prima che comincino le lezioni.

Esercizio 0.1. Sia G un gruppo.

1. Verificare che G agisce su se stesso per moltiplicazione a sinistra. Dedurne che $\mathrm{Sym}(|G|)$ contiene un sottogruppo G_s isomorfo a G (teorema di Cayley).

2. Sia G_d ottenuto in modo simile con la moltiplicazione a destra. Dimostrare che $C_{\mathrm{Sym}(|G|)}(G_s) = G_d$ e vice-versa.

Esercizio 0.2. Sia G un gruppo finito che agisce sul insieme finito X. Per ogni $g \in G$ si denota per $\chi_X(g)$ il numero di elementi di X fissati per g, cioè $\chi_X(g) = \#\{x \in X : g \cdot x = x\}$.

1. Dimostrare che il numero di orbiti nell'azione di G su X uguale:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_X(g)$$

   (Si potrà calcolare il cardinale di $\{(g,x) \in G \times X : g \cdot x\}$ in due modi.)

2. Si ricorda che l'azione di G è detta k-transitiva se, nell'azione di G sul insieme $X^{[k]}$ delle k-tuple di elementi diversi, c'è una sola orbita. Dimostrare che G è k-transitivo sse:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_X(g)(\chi_X(g) - 1) \dots (\chi_X(g) - k + 1) = 1$$

Esercizio 0.3. Si ricorda che ogni elemento del gruppo simmetrico $S_n = \mathrm{Sym}(n)$ si può decomporre in modo unico come prodotto di cicli indipendenti.

1. Dimostrare che due elementi di S_n sono coniugati sse la loro decomposizione da luogo a cicli della stessa lunghezza.

2. Dedurne che il numero di classi di coniugo in S_n uguale il numero di partizioni di n, cioè $\#\{(\lambda_1, \dots, \lambda_d) : \lambda_1 \geq \dots \lambda_d \geq 0 \text{ e } \lambda_1 + \dots + \lambda_d = n\}$.

Esercizio 0.4. Sia $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un sottogruppo finito di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. Dimostrare che ogni elemento di G è diagonalizzabile.

2. Si suppone G abeliano. Dimostrare che c'è una base di $\mathbb{C}^n$ nella quale tutti gli elementi di G sono diagonali.

3. Si suppone G risolubile. Dimostrare che c'è una base di $\mathbb{C}^n$ nella quale tutti gli elementi di G sono trigonali superiori.

Esercizio 0.5. Dimostrare che il gruppo delle isometrie di un quadrato è generato dalla rotazione di angolo $\frac{\pi}{2}$ e da una qualunque riflessione. Scrivere le classi di coniugo.