Esercizi da fare dopo la prima settimana.

Esercizio 1.1. Sia G un gruppo finito. Dimostrare che la rappresentazione regolare sinistra è isomorfa alla rappresentazione regolare destra.

Esercizio 1.2. Verificare che se (V, ρ) è la rappresentazione di permutazione associata all' azione di G sul insieme X, allora il carattere $\chi_\rho(g)$ uguale il numero di punti fissi di g su X. Dedurne il carattere della rappresentazione regolare.

Esercizio 1.3. Sia G un gruppo finito.

1. Dimostrare che ogni rappresentazione irriducibile è necessariamente di grado finito.

2. Si suppone G abeliano. Dimostrare che ogni rappresentazione irriducibile è di grado 1.

3. Riflettere al converso.

Esercizio 1.4. Si ricorda che la rappresentazione di permutazione "naturale" di S_3 non è irriducibile, perché contiene una copia della rappresentazione banale. Costruirne un complemento invariante con i due metodi dati per dimostrare il teorema di Maschke.

Esercizio 1.5.

1. Determinare tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo diedrale $D_{2\cdot 4}$ (ossia detto: del quadrato).

2. Costruire la tavola dei caratteri e verificare le relazioni d'ortogonalità.

3. Stessa analisi per il gruppo alterno A_4, e per il gruppo dei quaternioni $\mathbb{H}$.

Esercizio 1.6. Si definiscono in modo ovvio le rappresentazioni su un campo $\mathbb{F}$ qualunque. Siano (V_1, ρ_1) e (V_2, ρ_2) due rappresentazioni irriducibili *non isomorfe*.

1. Verificare che il gruppo additivo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[G]}(V_1, V_2)$ dei morfismi (funzioni $\mathbb{F}$-lineari che sono morfismi di rappresentazioni) è ridotto a 0.

2. Verificare che l'annello $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G]}(V_1) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[G]}(V_1, V_1)$ è in effetti un corpo (non necessariamente commutativo).

3. Dimostrare che se V_1 ha grado finito, allora $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G]}(V_1)$ è una $\mathbb{F}$-algebra di dimensione finita.

4. Quando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ritrovare il lemma di Schur. Che succede se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$?

Esercizio 1.7. Si ricorda che le funzioni di classe sul gruppo finito G sono le funzioni $f : G \to \mathbb{C}$ invarianti sotto coniugio, cioè t.c. valga sempre $f(g^{-1}hg) = f(h)$.

1. Costruire una base dello spazio vettoriale $\mathcal{F}$ ch'esse formano.

2. Verificare che $\langle f_1 | f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g)$ definisce un prodotto hermitiano su $\mathcal{F}$.

Esercizio 1.8. Prendere qualsiasi teorema sugli spazi euclidiani (spazi reali di dimensione finita muniti d'un proddoto scalare), formularne un analogo negli spazi hermitiani, e dimostrarlo.