

Travaux Antérieurs à 2003

Alberto Arabia*

§ 1. Cohomologie équivariante (1985-2003)	1
1.1. Cohomologie singulière équivariante	1
1.2. Cohomologie de de Rham équivariante	3
1.3. Cohomologie de de Rham équivariante des variétés de drapeaux (1985–1989)	4
1.4. Anneau de cohomologie singulière T -équivariante des variétés de Schubert (1989)	9
1.5. Classes d’Euler équivariantes et singularités (1998)	18
1.6. Critères de lissité rationnelle et algébrique (1998)	20
1.7. Critères de lissité (rationnelle) des variétés de Schubert (1998)	20
1.8. Critères de lissité des variétés de représentations d’un carquois (2003)	21
§ 2. Équivalence de Green et objets quasi-projectifs (1998)	21
§ 3. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes (2001)	22
3.1. Relèvements algébriques	22
3.2. Relèvements faiblement complets très lisses	25
3.3. Critère d’affinité des schémas \dagger -adiques	25
§ 4. Références bibliographiques	26

§ 1. Cohomologie équivariante (1985-2003)

Mes contributions en cohomologie équivariante concernent les trois thèmes suivants :

- Interprétation des opérateurs de Bernstein-Gelfand-Gelfand et des polynômes de Schubert en cohomologie de de Rham équivariante des variétés de drapeaux.
- Détermination explicite de l’anneau de cohomologie T -équivariante à coefficients entiers des sous-variétés de Schubert des variétés de drapeaux des groupes de Kač-Moody. Interprétation des opérateurs de Demazure et de Bernstein-Gelfand-Gelfand.
- Introduction de la classe d’Euler équivariante en un point fixe isolé (pas nécessairement lisse) d’une variété algébrique complexe munie de l’action d’un tore.
- Etude du rapport entre la classe d’Euler équivariante en un point isolé et la lissité rationnelle au voisinage de ce point. La classe d’Euler équivariante généralisée d’un point fixe isolé d’une variété algébrique complexe est représentée par une fraction rationnelle à un nombre fini de variables et coefficients rationnels. Je donne quelques critères de lissités algébrique et rationnelle en termes de ces classes. Dans le cas des variétés de Schubert, les descriptions explicites des classes d’Euler équivariantes généralisées que j’avais données dans ma thèse rendent ces critères de lissité effectifs.

La suite décrit avec beaucoup plus de précisions chacun de ces sujets.

1.1 Cohomologie singulière équivariante

Soit G un groupe topologique. Un « G -espace (à droite, à gauche)» est un espace topologique muni d’une action continue de G (à droite, à gauche). Un «*fibré principal de groupe G* » est

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l’Université Paris 7 – Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 6^e étage, bureau 6D15, 75013 Paris.
Adresse électronique : arabia@math.jussieu.fr

un G -espace à droite \mathbb{E} sur lequel G opère librement ; le quotient $\mathbb{B} := \mathbb{E}/G$ est la «base du fibré principal». Un «espace universel pour G », est un fibré principal $\mathbb{E}G$, topologiquement contractile, sur lequel G opère librement (il en existe toujours d'après Milnor [Mil]) ; sa base $\mathbb{B}G$ est un «espace classifiant pour G ». Cette terminologie provient de la théorie des fibrés principaux. Un fibré universel pour G possède la propriété fondamentale suivante. *Pour tout fibré principal \mathbb{E} de groupe G et base \mathbb{B} , il existe une application continue $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}G$, unique à homotopie près, telle que $\mathbb{E} \simeq f^{-1}\mathbb{E}G$:*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E} \simeq f^{-1}\mathbb{E}G & \dashrightarrow & \mathbb{E}G & & \\ \downarrow G & & \downarrow G & & \downarrow G \\ \mathbb{B} & \xrightarrow{f} & \mathbb{B}G & & \end{array}$$

L'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de \mathbb{B} vers $\mathbb{B}G$ paramètre ainsi les classes d'isomorphie de fibrés principaux de groupe G et base \mathbb{B} , ce qui justifie d'appeler «classifiant» l'espace $\mathbb{B}G$.

Une conséquence de cette propriété universelle est que deux espaces classifiants pour G sont toujours homotopiquement équivalents et leurs cohomologies sont canoniquement isomorphes. Plus généralement, pour tout fibré principal \mathbb{E} de groupe G et base \mathbb{B} , le homomorphisme $H^*(f) : H^*(\mathbb{B}G) \rightarrow H^*(\mathbb{B})$ est canonique, c'est le «homomorphisme caractéristique de \mathbb{E} », il sera noté :

$$\gamma_{\mathbb{E}}^G : H^*(\mathbb{B}G) \rightarrow H^*(\mathbb{B}).$$

L'image de $\gamma_{\mathbb{E}}^G$ est la «sous-algèbre caractéristique de \mathbb{E} dans $H^*(\mathbb{B})$ », ses éléments sont les «classes caractéristiques de \mathbb{E} ».

Pour tout G -espace X , l'action «diagonale» de G sur $\mathbb{E}G \times X$, *i.e.* l'action définie par $(m, x) \cdot g := (mg, g^{-1}x)$, fait de $\mathbb{E}G \times X$ un fibré principal de groupe G ; la classe d'homotopie de sa base X_G (notée et aussi $\mathbb{E}G \times_G X$) est indépendante du choix du fibré universel $\mathbb{E}G$. Lorsque X est le G -espace réduit à un point \bullet , on a $\bullet_G = \mathbb{B}G$. Enfin, pour toute application continue G -équivariante entre G -espaces $f : X \rightarrow Y$, l'application $f_G : X_G \rightarrow Y_G$ définie par $f_G(\overline{(m, x)}) := \overline{(m, f(x))}$ est continue. On a des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ c_X \downarrow & \oplus & \downarrow c_Y \\ \bullet & \xrightarrow{\text{id}} & \bullet \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} X_G & \xrightarrow{f_G} & Y_G \\ c_{X,G} \downarrow & \oplus & \downarrow c_{Y,G} \\ \bullet_G & \xrightarrow{\text{id}} & \bullet_G \end{array}$$

La correspondance $X \rightsquigarrow X_G$, $f \rightsquigarrow f_G$ est fonctorielle de la catégorie $\mathcal{Toph}_{\bullet}(G)$ des G -espaces (basés sur un point), où les morphismes sont les applications continues G -équivariantes, vers la catégorie $\mathcal{Toph}_{\bullet_G}$ des espaces topologiques basés sur \bullet_G .

La «cohomologie (singulière) G -équivariante à coefficients dans un anneau A » est, par définition, la cohomologie singulière de X_G à coefficients dans A , *i.e.*

$$\boxed{H_G^*(X; A) := H^*(X_G; A)}$$

La cohomologie G -équivariante est un foncteur contravariant de $\mathcal{Toph}_{\bullet}(G)$ vers la catégorie des H_G^* -algèbres ; où H_G^* est une notation abrégée pour $H_G^*(\bullet; A)$.

Remarques

- Lorsque $\mathbf{G} = \{1\}$, on a trivialement $H_{\{1\}}^*(\mathbf{X}; \mathbf{A}) = H^*(\mathbf{X}; \mathbf{A})$. Plus généralement, la projection $p_2 : \mathbb{E} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$, $p_2(m, x) = x$, induit une surjection $\mathbf{X}_{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G} \backslash \mathbf{X}$ d'où l'homomorphisme canonique $H^*(\mathbf{G} \backslash \mathbf{X}; \mathbf{A}) \rightarrow H_{\mathbf{G}}^*(\mathbf{X}; \mathbf{A})$ qui relie la cohomologie ordinaire de l'espace $\mathbf{G} \backslash \mathbf{X}$ des \mathbf{G} -orbites de \mathbf{X} à la cohomologie \mathbf{G} -équivariante de \mathbf{X} . Ce morphisme est bijectif lorsque \mathbf{G} opère librement sur \mathbf{X} .
- Pour tout \mathbf{G} -espace \mathbf{X} , le morphisme structural de la $H_{\mathbf{G}}^*$ -algèbre $H_{\mathbf{G}}^*(\mathbf{X}; \mathbf{A})$ est l'homomorphisme caractéristique $\gamma_{\mathbb{E}\mathbf{G} \times \mathbf{X}}^{\mathbf{G}} : H^*(\mathbb{B}\mathbf{G}; \mathbf{A}) \rightarrow H^*(\mathbb{E}\mathbf{G} \times_{\mathbf{G}} \mathbf{X}; \mathbf{A})$.

1.1.1 Restriction de groupes en cohomologie équivariante. Un fibré universel $\mathbb{E}\mathbf{G}$ pour \mathbf{G} est également universel pour tout sous-groupe \mathbf{G}' de \mathbf{G} . En particulier, pour tout \mathbf{G} -espace \mathbf{X} , on a une surjection canonique $\mathbb{E}\mathbf{G} \times_{\mathbf{G}'} \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{E}\mathbf{G} \times_{\mathbf{G}} \mathbf{X}$ induisant l'«homomorphisme de restriction» entre les cohomologies équivariantes $H_{\mathbf{G}'}^*(\mathbf{X}; \mathbf{A}) \rightarrow H_{\mathbf{G}}^*(\mathbf{X}; \mathbf{A})$

1.2 Cohomologie de de Rham équivariante

Lorsque \mathbf{G} est un groupe de Lie agissant différentiablement sur une variété différentielle \mathbf{M} , on a la notion de la «cohomologie de de Rham \mathbf{G} -équivariante de \mathbf{M} » définie par les méthodes décrites par Henri Cartan dans [Crt].

Soient $S(\mathfrak{g}^*)$ l'algèbre des polynômes sur \mathfrak{g} à coefficients complexes et $(\Omega^*(\mathbf{M}), d)$ le complexe des formes différentielles sur \mathbf{M} à valeurs dans \mathbb{C} . Le produit tensoriel $S(\mathfrak{g}^*) \otimes_{\mathbb{C}} \Omega^*(\mathbf{M})$ est l'algèbre des formes différentielles $\mu(Y) \in \Omega^*(\mathbf{M})$, dépendant polynomialement de $Y \in \mathfrak{g}$; elle est munie d'une graduation en posant $\deg(P \otimes \mu) = 2d(P) + d(\mu)$, pour $P \in S(\mathfrak{g}^*)$ et $\mu \in \Omega^*(\mathbf{M})$ homogènes de degrés $d(P)$ et $d(\mu)$ respectivement.

L'application $\delta_{\mathbf{G}} : S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^*(\mathbf{M}) \rightarrow S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^*(\mathbf{M})$, définie par :

$$\delta_{\mathbf{G}}(\mu)(Y) = d(\mu(Y)) + 2\pi i c_Y \mu(Y), \quad \text{pour chaque } Y \in \mathfrak{g},$$

où c_Y désigne la contraction par le champ de vecteurs associé à l'action infinitésimale de Y sur \mathbf{M} , est une antiderivation de degré +1 qui commute à l'action de \mathbf{G} sur $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^*(\mathbf{M})$ induite par l'action coadjointe sur $S(\mathfrak{g}^*)$ et par images inverses sur $\Omega^*(\mathbf{M})$. La restriction de $\delta_{\mathbf{G}}$ à la sous-algèbre des \mathbf{G} -invariants :

$$\Omega_{\mathbf{G}}^*(\mathbf{M}) := [S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^*(\mathbf{M})]^{\mathbf{G}},$$

c'est-à-dire à la sous-algèbre des formes différentielles $\mu(Y)$ vérifiant :

$$g \cdot (\mu(Y)) = \mu(\text{ad}(g)(Y)), \quad \text{pour tous } g \in \mathbf{G} \text{ et } Y \in \mathfrak{g},$$

vérifie $\delta_{\mathbf{G}}^2 = 0$ puisque $\delta_{\mathbf{G}}^2(\mu(Y)) = 2\pi i L_Y(\mu(Y))$, où L_Y désigne la dérivée de Lie. Le couple $(\Omega_{\mathbf{G}}^*(\mathbf{M}); \delta_{\mathbf{G}})$ est une algèbre différentielle graduée, c'est l'«algèbre des formes différentielles \mathbf{G} -équivariantes de \mathbf{M} », sa cohomologie $H_{DR, \mathbf{K}}^*(\mathbf{M}; \mathbb{C})$, est l'«algèbre de cohomologie de de Rham \mathbf{G} -équivariante de \mathbf{M} ».

Les propriétés suivantes découlent aussitôt des définitions :

- $H_{DR, \mathbf{G}}^*(\bullet; \mathbb{C}) = S(\mathfrak{g}^*)^{\mathbf{G}}$.

- La structure de $H_{DR,G}^*(\bullet; \mathbb{C})$ -module de $H_{DR,G}^*(M; \mathbb{C})$ est celle induite par la structure de $S(\mathfrak{g}^*)^G$ -module de $\Omega_G^*(M)$.
- $H_{DR,G}^*(M; \mathbb{C}) = S(\mathfrak{g}^*)^G \otimes_{\mathbb{C}} H_{DR}(M; \mathbb{C})$, lorsque G opère trivialement sur M .
- $H_{DR,\{1\}}^*(M; \mathbb{C}) = H_{DR}(M; \mathbb{C})$.

Remarque. Lorsque G est compact, l'identification classique pour une variété différentiable entre sa cohomologie de de Rham et sa cohomologie singulière (à coefficients complexes) se généralise au contexte équivariant à l'aide des méthodes de [Crt]; on a donc un isomorphisme canonique

$$H_G^*(M; \mathbb{C}) \simeq H_{DR,G}^*(M; \mathbb{C}),$$

et en particulier $H_G^*(\bullet; \mathbb{C}) \simeq S(\mathfrak{g}^*)^G$.

1.2.1 Restriction de groupes en cohomologie de de Rham équivariante. Soit G' un sous-groupe fermé du groupe de Lie G . La restriction des fonctions polynomiales sur \mathfrak{g} à \mathfrak{g}' induit un morphisme de complexes: $(\Omega_G^*(X), \delta_G) \rightarrow (\Omega_{G'}^*(X), \delta_{G'})$ qui donne lieu à l'«homomorphisme de restriction de groupes en cohomologie de de Rham équivariante» $\rho_{G'}^G : H_{DR,G}^*(X) \rightarrow H_{DR,G'}^*(X)$ correspondant, modulo l'isomorphisme de la remarque précédente, à l'homomorphisme de restriction de groupes en cohomologie singulière équivariante de la section 1.1.1.

Lorsque $G' = \{1\}$, on a $S(\mathfrak{g}') = \mathbb{C}$ et la restriction de $S(\mathfrak{g}^*)$ à $S(\mathfrak{g}'^*)$ coïncide avec le morphisme d'évaluation à l'origine $P \mapsto P(0)$, pour cette raison on notera ' v_0 ' ce qu'on aurait dû noter $\rho_{\{1\}}^G$.

1.3 Cohomologie de de Rham équivariante des variétés de drapeaux (1985–1989)

Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe, d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Soient K un sous-groupe compact maximal de G , d'algèbre de Lie \mathfrak{k} et σ l'involution associée. Soient H un sous-groupe de Cartan de G , σ -invariant, d'algèbre de Lie \mathfrak{h} et B un sous-groupe de Borel de G contenant H , on note Δ_+ et Σ respectivement les systèmes de racines positives et simples correspondants à ces choix. Soient $T = K \cap H$, tore maximal de K d'algèbre de Lie \mathfrak{t} , de normalisateur $T' = N_K(T)$, et $W = T'/T$ le groupe de Weyl muni de l'ordre de Bruhat-Ehresmann ' \preceq ' défini par Σ . On note $X = G/B = K/T$ la «variété des drapeaux de G », elle est munie de l'action naturelle de K (et donc de T et T') à gauche. L'ensemble X^T des points fixes de X sous l'action de T est $T'/T = W$.

Dans [A₁, A₀], on généralise les constructions et théorèmes de l'article de Bernstein-Gelfand-Gelfand [BGG], qui concerne la cohomologie ordinaire de X , au contexte de la cohomologie de de Rham équivariante de X .

1.3.1 La famille des formes linéaires \mathcal{L}_w . La décomposition $X = \coprod_{w \in W} X_w$, où $X_w = BwB/B$ est une «cellule de Schubert»: espace affine isomorphe à $\mathbb{C}^{\ell(w)}$, munit X d'une structure de CW-complexe où toutes les cellules sont de dimension paire. L'adhérence \overline{X}_w d'une cellule X_w définit le «cycle de Schubert» $\sigma_w \in H_{2\ell(w)}(X; \mathbb{Z})$ et la famille $\{\sigma_w\}_{w \in W}$ est une base (homogène) du \mathbb{Z} -module $H^*(X; \mathbb{Z})$.

Les formes \mathbb{C} -linéaires

$$\begin{aligned} H_{DR}^{2\ell(w)}(\mathbf{X}; \mathbb{C}) &\xrightarrow{\langle \sigma_w, - \rangle} \mathbb{C} \\ \mu &\longmapsto \int_{\mathbf{X}_w} \mu|_{\mathbf{X}_w} \end{aligned}$$

jouent un rôle central dans [BGG] et leurs analogues en cohomologie de de Rham équivariante sont les formes $S(\mathfrak{t}^*)$ -linéaires notées \mathcal{L}_w :

$$\begin{aligned} H_{DR,T}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C}) &\xrightarrow[\langle \sigma_w, - \rangle]{\mathcal{L}_w} H_{DR,T}^{*-2\ell(w)}(\bullet; \mathbb{C}) \subseteq S(\mathfrak{t}^*) \\ \mu(Y) &\longmapsto \int_{\mathbf{X}_w} \mu(Y)|_{\mathbf{X}_w} \end{aligned}$$

1.3.2 Homomorphisme de Chern-Weil en cohomologie équivariante. L'autre ingrédient fondamental dans [BGG] est l'homomorphisme de Chern-Weil qui réalise $H_{DR}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C})$ comme quotient de l'anneau $S(\mathfrak{t}^*)$. On rappelle à continuation sa définition habituelle et sa généralisation en cohomologie équivariante.

Soit θ une connexion \mathbf{K} -invariante de la fibration principale $\pi : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}/\mathbf{T} = \mathbf{X}$, de dérivée covariante ∇ et courbure $\nabla(\theta)$. Pour tout $P \in S(\mathfrak{t}^*)$ le cocycle $P(-\nabla(\theta)/2\pi i) \in \Omega^*(\mathbf{K})$ provient de \mathbf{X} , *i.e.* est de la forme $\pi^*\mu$ pour un (unique) cocycle $\mu \in \Omega^*(\mathbf{X})$. On note $\bar{P}(-\nabla(\theta)/2\pi i) \in H_{DR}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C})$ la classe de cohomologie déterminée par μ . L'application :

$$\begin{aligned} S(\mathfrak{t}^*) &\xrightarrow{\mathcal{C}_\theta} H_{DR}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C}) \\ P &\longmapsto \bar{P}(-\nabla(\theta)/2\pi i), \end{aligned}$$

est un homomorphisme indépendant de la connexion θ choisie; c'est l'«*homomorphisme de Chern-Weil*».

Nicole Berline et Michèle Vergne généralisent cette construction au contexte équivariant en faisant intervenir l'application moment $\mathbf{K} \ni k \mapsto \theta(Y_{\mathbf{K}})(k) \in \mathfrak{t}$, où $Y_{\mathbf{K}}$ désigne le champ de vecteurs associé à l'action infinitésimale à gauche de $Y \in \mathfrak{k}$ sur \mathbf{K} . Elles remarquent que pour $P \in S(\mathfrak{t}^*)$ et $Y \in \mathfrak{k}$, la forme différentielle $P(-J_Y - \nabla(\theta)/2\pi i) \in \Omega^*(\mathbf{K})$ est de la forme $\pi^*(\mu(Y))$, où $\mu(Y)$ est un cocycle du complexe $(\Omega_{\mathbf{K}}^*(\mathbf{X}), \delta_{\mathbf{K}})$. Notons $\bar{P}(-J_Y - \nabla(\theta)/2\pi i)$ la classe de cohomologie de de Rham \mathbf{K} -équivariante de \mathbf{X} déterminée par $\mu(Y)$. Comme dans le cas classique, l'application :

$$\begin{aligned} S(\mathfrak{t}^*) &\xrightarrow{\mathcal{C}_{\theta_{\mathbf{K}}}} H_{DR,\mathbf{K}}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C}) \\ P &\longmapsto \bar{P}(-J_Y - \nabla(\theta)/2\pi i), \end{aligned}$$

est un homomorphisme indépendant de la connexion choisie ([BV]); c'est l'«*homomorphisme de Chern-Weil en cohomologie \mathbf{K} -équivariante*».

Pour tout sous-groupe fermé $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$, le même procédé donne lieu à l'homomorphisme de Chern-Weil en cohomologie \mathbf{K}' -équivariante $\mathcal{C}_{\theta_{\mathbf{K}'}} : S(\mathfrak{t}^*) \rightarrow H_{DR,\mathbf{K}'}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C})$; il coïncide avec la composée

$$\begin{array}{ccc} S(\mathfrak{t}^*) &\xrightarrow{\mathcal{C}_{\theta_{\mathbf{K}}}} H_{DR,\mathbf{K}}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C}) &\xrightarrow{\rho_{\mathbf{K}'}} H_{DR,\mathbf{K}'}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C}) \\ &\searrow \mathcal{C}_{\theta_{\mathbf{K}'}} \swarrow &\uparrow \\ & & \end{array}$$

En particulier, $\mathcal{C}\mathfrak{h}$ et $\mathcal{C}\mathfrak{h}_K$ sont reliés par $v_0 : H_{DR,K}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C}) \rightarrow H_{DR}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C})$ et le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccccc} S(\mathfrak{t}^*) & \xrightarrow{\mathcal{C}\mathfrak{h}_K} & H_{DR,K}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C}) \ni \mu(Y) & & \\ \parallel & \oplus & \downarrow v_0 & & \downarrow \\ S(\mathfrak{t}^*) & \xrightarrow{\mathcal{C}\mathfrak{h}} & H_{DR}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C}) \ni \mu(0) & & \end{array}$$

1.3.3 Le programme de $[A_1, A_0]$. Les éléments introduits dans les paragraphes précédents se retrouvent rassemblés dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} S(\mathfrak{t}^*) & \xrightarrow{\mathcal{C}\mathfrak{h}_K} & H_{DR,K}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\rho_T^K} & H_{DR,T}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\langle \sigma_w, - \rangle} & S(\mathfrak{t}^*) \ni P(Y) \\ \parallel & \oplus & \downarrow v_0 & \oplus & \downarrow v_0 & \oplus & \downarrow v_0 \\ S(\mathfrak{t}^*) & \xrightarrow{\mathcal{C}\mathfrak{h}} & H_{DR}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C}) & \xlongequal{\quad} & H_{DR}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\langle \sigma_w, - \rangle} & \mathbb{C} \ni P(0), \end{array} \quad (\mathcal{D})$$

où la deuxième ligne, qui représente le cas classique (non équivariant) a été étudiée par Bernstein-Gelfand-Gelfand ([BGG]). L'objet principal de leur travail est la détermination d'une famille de polynômes $\{P^w\}_{w \in W} \subseteq S(\mathfrak{t}^*)$, les «*polynômes de Schubert*», réalisant la base duale de la base des cycles de Schubert via l'homomorphisme de Chern-Weil $\mathcal{C}\mathfrak{h}$ dont on connaissait la surjectivité et le noyau depuis la thèse de A. Borel ([B₀]). Les polynômes de Schubert vérifient :

$$\langle \sigma_v, \mathcal{C}\mathfrak{h}(P^w) \rangle = \delta_v^w, \quad \text{pour tous } v, w \in W.$$

Le but de $[A_1, A_0]$ est l'étude du diagramme (\mathcal{D}) dans sa globalité en portant un intérêt particulier à la ligne équivariante où les généralisations équivariantes des définitions et théorèmes de [BGG] sont traitées. Le passage du cas équivariant au cas classique se fait à l'aide du résultat suivant :

Proposition ([A₀]). *Soit K un groupe de Lie compact et connexe, d'algèbre de Lie \mathfrak{k} opérant à gauche sur une variété M dont la cohomologie rationnelle est nulle en degrés impaires. L'homomorphisme :*

$$\begin{array}{ccc} H_{DR,K}^*(M; \mathbb{C}) & \xrightarrow{v_0} & H_{DR}^*(M; \mathbb{C}) \\ \mu(Y) & \longmapsto & \mu(0), \end{array}$$

est alors surjectif et $\ker(v_0) = S(\mathfrak{t}^*)_0^K \cdot H_{DR,K}^*(M; \mathbb{C})$, où $S(\mathfrak{t}^*)_0^K$ est l'idéal de $S(\mathfrak{t}^*)_0^K$ des polynômes s'annulant à l'origine.

Nous passons maintenant en revue les propriétés les plus remarquables des morphismes de la première ligne du diagramme (\mathcal{D}) dans les trois sections suivantes.

1.3.4 Homomorphisme $\mathcal{C}\mathfrak{h}_K$. A la différence du cas classique, cet homomorphisme est bijectif. A ce sujet, les méthodes de [Crt] appliquées à la définition de Berline-Vergne permettent de démontrer le résultat général suivant qui couvre le cas des groupes de Lie compacts.

Proposition ([A₀]). *Soit G un groupe de Lie, H un sous-groupe fermé de G , d'algèbre de Lie \mathfrak{h} . On suppose que le fibré principal $G \rightarrow G/H$ admet une connexion G -invariante θ , de*

dérivée covariante ∇ et courbure $\nabla(\theta)$. Alors l'homomorphisme de Chern-Weil équivariant

$$\begin{array}{ccc} S(\mathfrak{h}^*)^{\mathbf{H}} & \xrightarrow{\mathcal{C}\mathfrak{h}\mathcal{G}} & H_{DR,\mathbf{G}}^*(\mathbf{G}/\mathbf{H}; \mathbb{C}) \\ P & \longmapsto & \bar{P}(-J_Y - \nabla(\theta)/2\pi i), \end{array}$$

est un isomorphisme indépendant de la connexion choisie.

1.3.5 Morphisme de restriction de K à T en cohomologies de de Rham équivariante. Soit M une variété différentiable munie d'une action à gauche de K . Le morphisme de restriction de groupes ρ_T^K se factorise à travers $H_{DR,T'}^*(M; \mathbb{C})$ en $\rho_T^K = \rho_T^{T'} \circ \rho_{T'}^K$:

$$\begin{array}{ccccc} H_{DR,K}^*(M; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\rho_{T'}^K} & H_{DR,T'}^*(M; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\rho_T^{T'}} & H_{DR,T}^*(M; \mathbb{C}) \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\rho_T^K} & & \uparrow \end{array}$$

Les méthodes de [Crt] permettent de démontrer que $\rho_{T'}^K$ est bijectif ($[A_0]$) ⁽¹⁾, et le $\rho_T^{T'}$ s'identifie, par ailleurs, à l'inclusion $H_{DR,T}^*(M; \mathbb{C})^{\mathbf{W}} \subseteq H_{DR,T}^*(M; \mathbb{C})$ dans la mesure où $\Omega_{T'}^*(M)$ est homotope à $\Omega_T^*(M)^{\mathbf{W}}$ et donc $H_{DR,T'}^*(M; \mathbb{C}) = H_{DR,T}^*(M; \mathbb{C})^{\mathbf{W}}$.

1.3.6 Applications \mathcal{L}_w et opérateurs de Bernstein-Gelfand-Gelfand. Le théorème suivant, résultat principal de $[A_0, A_1]$, répond à une question de Michèle Vergne à propos des applications \mathcal{L}_w .

Théorème ($[A_0, A_1]$)

a) Soient $\alpha \in \Sigma$, $r_\alpha \in \mathbf{W}$ la réflexion associée à α et $w \in \mathbf{W}$. On suppose que $r_\alpha w > w$ avec, alors :

$$\boxed{\mathcal{L}_{r_\alpha w} = A_\alpha \circ \mathcal{L}_w}$$

où A_α est l'opérateur agissant sur $S(\mathfrak{t}^*)$ défini dans [BGG] par :

$$A_\alpha(P) = \frac{r_\alpha \cdot P - P}{\alpha}, \quad \text{pour tout } P \in S(\mathfrak{t}^*).$$

b) Si $r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_\ell}$ est une décomposition réduite de w , alors :

$$\boxed{\mathcal{L}_w \circ \mathcal{C}\mathfrak{h}\mathcal{T} = A_{\alpha_1} \circ \cdots \circ A_{\alpha_\ell}}$$

L'assertion (b) de ce théorème explique très simplement le résultat, démontré dans [BGG] par des méthodes combinatoires, qui établit l'égalité entre les composées

$$A_{\alpha_1} \circ \cdots \circ A_{\alpha_\ell} = A_{\alpha'_1} \circ \cdots \circ A_{\alpha'_\ell}$$

lorsque $r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_\ell}$ et $r_{\alpha'_1} \cdots r_{\alpha'_\ell}$ sont des décompositions réduites d'un même $w \in \mathbf{W}$, ce qui justifie de noter A_w ces composées. Notons $A_e = \text{id}_{S(\mathfrak{t}^*)}$. Les éléments de la famille $\{A_w\}_{w \in \mathbf{W}}$ sont les «opérateurs de Bernstein-Gelfand-Gelfand». Les égalités encadrées du théorème précédent

¹ Lorsque M est réduite à un point, on retrouve l'isomorphisme de Chevalley $S(\mathfrak{t}^*)^{\mathbf{K}} = H_{\mathbf{K}}^*(\bullet; \mathbb{C}) \simeq H_{T'}^*(\bullet; \mathbb{C}) = S(\mathfrak{t}^*)^{\mathbf{W}}$, bien connu en théorie des groupes.

admettent donc la réécriture :

$$\boxed{\mathcal{L}_w = A_w \circ \mathcal{L}_e \text{ et } \mathcal{L}_w \circ \mathcal{Ch}_T = A_w} \quad \text{pour tout } w \in \mathbf{W}.$$

1.3.7 L'opérateur A_s . Soit s l'élément de plus grande longueur de \mathbf{W} . Pour tout $P \in S(\mathfrak{t}^*)$, on a : $A_s(P) = \mathcal{L}_s \circ \mathcal{Ch}_T(P)$ d'après l'assertion (b) du théorème précédent. Mais \mathcal{L}_s est l'intégrale sur la variété différentiable et compacte \mathbf{X} et s'explique à l'aide de la formule de localisation de Berline-Vergne ([BV]) en une somme finie ([A₀]) :

$$\boxed{A_s(P) = \frac{\sum_{w \in \mathbf{W}} (-1)^{\ell(w)} w \cdot P}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} -\alpha} = \sum_{w \in \mathbf{W}} w \left(\frac{P}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} -\alpha} \right)}$$

1.3.8 Polynômes de Schubert. La famille $\{P^w\}_{w \in \mathbf{W}} \subseteq S(\mathfrak{t}^*)$ des «*polynômes de Schubert*» est définie dans [BGG] par :

$$\begin{cases} P^s := \frac{\prod_{\alpha \in \Delta_+} -\alpha}{|\mathbf{W}|}, \\ P^w = A_{w^{-1}s}(P^s), \quad \text{pour tout } w \in \mathbf{W}. \end{cases}$$

où $P^e = A_s(P^s) = 1$, d'après 1.3.7. La proposition suivante, transposition au contexte équivariant de résultat principal de [BGG], devient un corollaire immédiat du théorème 1.3.6.

Proposition ([BGG]). *Pour tous $v, w \in \mathbf{W}$, on a :*

$$\mathcal{L}_v(\mathcal{Ch}_T(P^w)) = A_v(P^w) = \begin{cases} P^{wv^{-1}} & \text{lorsque } \ell(wv^{-1}) = \ell(w) - \ell(v), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier :

$$\langle \sigma_v, \mathcal{Ch}(P^w) \rangle = \langle \sigma_v, \mathcal{Ch}_T(P^w) \rangle(0) = A_v(P^w)(0) = P^{wv^{-1}}(0) = \delta_v^w.$$

Remarque. La famille des polynômes de Schubert $\{P^w\}_{w \in \mathbf{W}}$ qui réalise la base de $H_{DR}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C})$ duale de la base des cycles de Schubert de $H_*(\mathbf{X}; \mathbb{Z})$, n'est pas unique dans la mesure où le morphisme de Chern-weyl $\mathcal{Ch} : S(\mathfrak{t}^*) \rightarrow H_{DR}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C})$ à un noyau non trivial égal à $S(\mathfrak{t}^*) \cdot S(\mathfrak{t}^*)_0^{\mathbf{W}}$. La proposition précédente montre que cette famille est une base de $H_{DR, \mathbf{K}}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C})$, pour sa structure de $S(\mathfrak{t}^*)^{\mathbf{K}}$ -module. Le fait que $H_{DR, \mathbf{K}}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C})$ est un $S(\mathfrak{t}^*)^{\mathbf{K}}$ -module libre de rang $|\mathbf{W}|$, se traduit modulo l'isomorphisme $\mathcal{Ch}_{\mathbf{K}} : S(\mathfrak{t}^*) \xrightarrow{\sim} H_{DR, \mathbf{K}}^*(\mathbf{X}; \mathbb{C})$, par le théorème bien connu qui affirme que $S(\mathfrak{t}^*)$ est un $S(\mathfrak{t}^*)^{\mathbf{W}}$ -module libre de rang $|\mathbf{W}|$.

1.3.9 A propos de l'anneau des coefficients. Les résultats de [A₀, A₁] sont aussi vrais en cohomologie rationnelle où il convient de remplacer $H_{DR, \mathbf{K}}$ par $H_{T^v}(\bullet; \mathbb{Q})$ et $S(\mathfrak{t}^*)$ par $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{R}(\mathbf{T})$, où $\mathcal{R}(\mathbf{T}) (\sim \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{\dim T}])$ désigne l'anneau des représentations de dimension finie de \mathbf{T} , canoniquement isomorphe à $H^*(\mathcal{BT}; \mathbb{Z})$ (cf. 1.4.1). Le cas des coefficients entiers mérite quelques commentaires. Le diagramme (\mathcal{D}) garde un sens en cohomologie entière, en effet, les applications $\langle \sigma_w, _ \rangle$ et \mathcal{L}_w sont définies sur \mathbb{Z} (les opérateurs A_w laissent stable $\mathcal{R}(\mathbf{T})$) et les homomorphismes de Chern-Weil $\mathcal{Ch}_{\mathbf{K}}$ et \mathcal{Ch} peuvent être remplacés par les homomorphismes

caractéristiques des T -espaces à droite $\mathbb{E}K \times_K K$ ($\sim \mathbb{E}K$) et K respectivement :

$$\begin{cases} \gamma_{\mathbb{E}K}^T : \mathcal{R}(T) = H^*(\mathbb{B}T; \mathbb{Z}) \rightarrow H_K^*(X; \mathbb{Z}) \\ \gamma_K^T : \mathcal{R}(T) = H^*(\mathbb{B}T; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Mais si le morphisme $\gamma_{\mathbb{E}K}^T$ est toujours bijectif, le morphisme γ_K^T n'est plus nécessairement surjectif et on ne peut plus espérer paramétrer la base duale de la base des cycles de Schubert à l'aide des éléments de $\mathcal{R}(T)$. Il est d'autre part clair que le conoyau de γ_K^T est un \mathbb{Z} -module de torsion et que les points fermés de son support sont précisément les nombres premiers que l'on doit inverser pour donner un sens au polynôme de Schubert P^s . La torsion de $\text{coker}(\gamma_K^T)$ a été étudiée par ailleurs par M. Demazure dans [Dem₁] et A. Borel dans [B₁].

1.3.10 Transformée de Fourier de la mesure de Liouville. Une autre application suggérée par Michèle Vergne du lien qui relie l'intégration sur les cycles de Schubert et les opérateurs A_w est donnée dans [A₁]. Soit f une forme réelle sur \mathfrak{k} nulle sur \mathfrak{t}^\perp , telle que $-if$ soit dominante régulière, c'est-à-dire $-if(h_\alpha) > 0$ pour toute coracine h_α . L'orbite $K \cdot f$ de f dans la représentation coadjointe de K dans \mathfrak{k}^* , est munie d'une forme symplectique K -invariante canonique σ_f qui est la forme fondamentale d'une structure kählérienne sur $K \cdot f$. D'autre part, l'identification $K \cdot f = K/T = X$ permet de poser $(K \cdot f)_w := X_w$, et les couples $((K \cdot f)_w, \sigma_f)$ sont des variétés complexes symplectiques. Notons $\widehat{\sigma}_f^w$ la transformée de Fourier de leur mesure de Liouville ([BV]). On a alors pour tout $Y \in \mathfrak{t}$ ([A₁]) :

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_f^w(Y) &= \int_{(K \cdot f)_w} e^{i\langle Y, x \rangle} e^{\sigma_f(x)} = \int_{(K \cdot f)_w} e^{if(-J_Y - \frac{w}{2\pi i})} = \\ &= \mathcal{L}_w \mathcal{C}h_T(e^{if}) = A_w(e^{if})(Y) \end{aligned}$$

où le terme de droite fait apparaître le prolongement naturel de l'action de A_w à l'algèbre des fonctions entières sur \mathfrak{t} . Dans le cas particulier où $w = s$, on retrouve la formule d'Harish-Chandra ([Hrs]) (cf. 1.3.7) :

$$\int_{K \cdot f} e^{i\langle Y, x \rangle} e^{\sigma_f(x)} = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{if(w^{-1}Y)}}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} -\alpha}.$$

1.4 Anneau de cohomologie singulière T -équivariante des variétés de Schubert (1989)

1.4.1 Cohomologie singulière T -équivariante. L'objet de [A₁, A₀] était l'étude des anneaux de cohomologie de de Rham K -équivariante et ordinaire de K/T , ou, ce qui revient au même, des anneaux de cohomologie singulière K -équivariante et ordinaire de K/T à coefficients dans \mathbb{Q} . Dans ces travaux l'homomorphisme de Chern-Weil joue un rôle fondamental dans la mesure où il réalise ces anneaux comme quotients de l'algèbre $S(\mathfrak{t}^*)$ (resp. $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{R}(T)$). Mais cette propriété cesse d'être vérifiée dans le cas des cohomologies T -équivariante et ordinaire à coefficients entiers. L'article [A₃], qui s'intéresse à cette situation, fait alors appel au théorème de localisation de Borel-Atiyah-Segal qui permet de réaliser $H_T^*(X; \mathbb{Z})$ plutôt comme sous-anneau d'un anneau de structure très simple. Les paragraphes suivant expliquent les bases de la mé-

thode utilisée dans [A₃] qui mène la détermination de la loi multiplicative de $H_T^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z})$ et plus généralement de $H_T^*(\overline{\mathbf{X}}_w; \mathbb{Z})$, pour tout $w \in \mathbf{W}$.

1.4.2 L’anneau $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ et le théorème de localisation. La cohomologie singulière \mathbf{T} -équivariante possède quelques propriétés qui la rendent particulièrement agréable. Tout d’abord, l’isomorphisme $S(\mathfrak{t}^*) \simeq H_{DR, \mathbf{T}}^*(\bullet, \mathbb{C}) = H_{\mathbf{T}}^*(\bullet; \mathbb{C})$ (cf. 1.2) résulte par changement de base d’un isomorphisme à coefficients entiers $ch : \mathcal{R}(\mathbf{T}) \xrightarrow{\cong} H_{\mathbf{T}}^*(\bullet; \mathbb{Z})$, où $\mathcal{R}(\mathbf{T}) \simeq \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{T})}]$ désigne l’anneau des représentations de dimension finie de \mathbf{T} . Le morphisme ch fait correspondre à une représentation irréductible complexe \mathbb{C}_λ de \mathbf{T} de poids λ , la première classe de Chern du fibré en droites $\mathcal{E}\mathbf{T} \otimes_{\mathbf{T}} \mathbb{C}_\lambda \rightarrow \mathcal{B}\mathbf{T}$. Ensuite, on a une propriété considérablement plus intéressante qui relève du fait que pour tout sous-groupe fermé $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{T}$ tel que $\dim \mathbf{H} < \dim \mathbf{T}$, le morphisme de restriction de groupe $H_{\mathbf{T}}^*(\bullet; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\mathbf{H}}^*(\bullet; \mathbb{Z})$ a un noyau non trivial, autrement dit, $H_{\mathbf{H}}^*(\bullet; \mathbb{Z})$ est un $H_{\mathbf{T}}^*(\bullet; \mathbb{Z})$ -module de torsion. La propriété en question connue sous le nom de «*théorème de localisation*», est la suivante.

Théorème ([B-al, AS]). *Soit \mathbf{Y} un \mathbf{T} -espace de dimension cohomologique finie, notons $\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}$ le sous-espace des points fixes de \mathbf{Y} sous l’action de \mathbf{T} . Alors, les noyau et conoyau de l’homomorphisme de restriction aux points fixes $H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}; \mathbb{Z})$ sont des $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ -modules de torsion. Autrement dit, le morphisme :*

$$\mathcal{Q}(\mathbf{T}) \otimes_{\mathcal{R}(\mathbf{T})} H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z}) \xrightarrow[\text{aux points fixes}]{\text{restriction}} \mathcal{Q}(\mathbf{T}) \otimes_{\mathcal{R}(\mathbf{T})} H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}; \mathbb{Z})$$

où $\mathcal{Q}(\mathbf{T})$ désigne le corps de fractions de $\mathcal{R}(\mathbf{T})$, est un isomorphisme.

En particulier, lorsque $\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}$ est discret, on a :

$$\mathcal{Q}(\mathbf{T}) \otimes_{\mathcal{R}(\mathbf{T})} H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{Q}(\mathbf{T}) \otimes_{\mathcal{R}(\mathbf{T})} H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}; \mathbb{Z}) = \text{App}(\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}; \mathcal{Q}(\mathbf{T}))$$

où $\text{App}(\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}; \mathcal{Q}(\mathbf{T}))$ désigne l’algèbre des applications de $\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}$ à valeurs dans $\mathcal{Q}(\mathbf{T})$.

1.4.3 Détermination de l’anneau de cohomologie (\mathbf{T} -équivariante) entière. Le théorème de localisation s’avère très utile lorsque le \mathbf{T} -espace \mathbf{Y} est compact, que $\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}$ est fini et que \mathbf{Y} admet une décomposition en CW-complexe dont les cellules sont \mathbf{T} -stables, de dimension paire et possèdent un unique point fixe. Pour chaque $w \in \mathbf{Y}^{\mathbf{T}}$, on note alors \mathbf{Y}_w la cellule contenant w ; on a $\mathbf{Y} = \coprod_{w \in \mathbf{Y}^{\mathbf{T}}} \mathbf{Y}_w$. Ces conditions sont vérifiées notamment dans le cas des variétés de Schubert et des variétés de Bott-Samelson. Dans ces cas :

D-1) $H^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z})$ est un \mathbb{Z} -module libre de rang $|\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}|$.

D-2) $H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z})$ est un $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ -module libre de rang $|\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}|$.

D-3) L’homomorphisme de restriction aux points fixes $\Theta : H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}; \mathbb{Z})$ est *injectif* de conoyau de $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ -torsion (théorème de localisation); il identifie donc $H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}; \mathbb{Z})$ à une certaine sous-algèbre de $\text{App}(\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))$.

D-4) L’accouplement naturel $\langle -, - \rangle : H_d(\mathbf{Y}; \mathbb{Z}) \otimes H^d(\mathbf{Y}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$, entre les groupes d’homologie et cohomologie entières de \mathbf{Y} de même degré d , s’étend à la cohomologie équivariante

$$\langle -, - \rangle : H_d(\mathbf{Y}; \mathbb{Z}) \otimes H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\mathbf{T}}^{*-d}(\bullet; \mathbb{Z}).$$

On note $\mathcal{L}_\sigma : H_T^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{T})$ la forme $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ -linéaire définie par un élément homogène $\sigma \in H_*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z})$.

Pour toute base homogène $\{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ de $H_*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z})$, la famille $\{\mathcal{L}_{\sigma_1}, \dots, \mathcal{L}_{\sigma_s}\}$ est une base du $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ -module $\text{Hom}_{\mathcal{R}(\mathbf{T})}(H_T^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z}), \mathcal{R}(\mathbf{T}))$. Les formes linéaires \mathcal{L}_σ se prolongent de manière unique, d'après le théorème de localisation, en des formes $\mathcal{Q}(\mathbf{T})$ -linéaires $L_\sigma : \text{App}(\mathbf{Y}^T; \mathcal{Q}(\mathbf{T})) \rightarrow \mathcal{Q}(\mathbf{T})$.

$$\begin{array}{ccc} H_T^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\Theta} & H_T^*(\mathbf{Y}^T; \mathbb{Z}) = \text{App}(\mathbf{Y}^T; \mathcal{R}(\mathbf{T})) \subseteq \text{App}(\mathbf{Y}^T; \mathcal{Q}(\mathbf{T})) \\ \mathcal{L}_\sigma \downarrow & & \downarrow L_\sigma \\ \mathcal{R}(\mathbf{T}) & \xleftarrow{\quad \subseteq \quad} & \mathcal{Q}(\mathbf{T}) \end{array}$$

$\mathcal{L}_\sigma(\mu) = L_\sigma(\Theta(\mu))$, pour tout $\mu \in H_T^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z})$.

Proposition ([A₃]). *L'image de Θ est la sous-algèbre de $\text{App}(\mathbf{Y}^T; \mathcal{R}(\mathbf{T}))$ des éléments f vérifiant :*

$$L_\sigma(f) \in \mathcal{R}(\mathbf{T})$$

pour tout $\sigma \in H_*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z})$, ou, ce qui revient au même, pour tout σ dans une base (homogène) de $H_*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z})$.

D-5) L'ensemble \mathbf{Y}^T est muni d'un ordre partiel ' \preceq ' en posant $u \preceq w$ lorsque $u \in \overline{\mathbf{Y}}_w$. Pour chaque $w \in \mathbf{Y}^T$, l'adhérence $\overline{\mathbf{Y}}_w$ est \mathbf{T} -stable et définit le cycle $\sigma_w \in H_{\dim \mathbf{Y}_w}(\mathbf{Y}; \mathbb{Z})$ et la famille $\{\sigma_w\}_{w \in \mathbf{Y}^T}$ est une base de \mathbb{Z} -module de $H_*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z})$. Pour chaque $w \in \mathbf{Y}^T$, la forme linéaire L_{σ_w} , notée désormais L_w , se factorise à travers le morphisme de restriction

$$\text{App}(\mathbf{Y}^T; \mathcal{R}(\mathbf{T})) \xrightarrow[\text{de } \mathbf{Y}^T \text{ à } \overline{\mathbf{Y}}_w^T]{\text{restriction}} \text{App}(\overline{\mathbf{Y}}_w^T; \mathcal{R}(\mathbf{T})) \subseteq \text{App}(\overline{\mathbf{Y}}_w^T; \mathcal{Q}(\mathbf{T}))$$

où $\overline{\mathbf{Y}}_w^T = \{u \in \mathbf{Y}^T \mid u \preceq w\}$.

Pour chaque $u \preceq w$, notons $\lambda_u : \text{App}(\overline{\mathbf{Y}}_w^T; \mathcal{Q}(\mathbf{T})) \rightarrow \mathcal{Q}(\mathbf{T})$ l'évaluation au point u , i.e. $\lambda_u(f) = f(u)$. La famille $\{\lambda_u\}_{u \preceq w}$ est une base de l'espace des formes $\mathcal{Q}(\mathbf{T})$ -linéaires sur $\text{App}(\overline{\mathbf{Y}}_w^T; \mathcal{Q}(\mathbf{T}))$ de sorte que pour chaque $w \in \mathbf{Y}^T$ donné, il existe une unique famille $\{q_w^u\}_{u \preceq w} \subseteq \mathcal{Q}(\mathbf{T})$, telle que, pour tout $f \in \text{App}(\mathbf{Y}^T; \mathcal{Q}(\mathbf{T}))$,

$$L_w(f) = \sum_{u \preceq w} q_w^u \lambda_u(f) = \sum_{u \preceq w} q_w^u f(u)$$

Soit Q la matrice dont les lignes et colonnes sont indexées par les éléments de \mathbf{Y}^T et dans laquelle le coefficient $Q_{w,u}$ en ligne w et colonne u est

$$Q_{w,u} = \begin{cases} q_w^u & \text{lorsque } u \preceq w, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

D-6) La matrice Q est inversible d'inverse notée $R := Q^{-1}$.

Théorème. *Pour $w \in \mathbf{Y}^T$, soit $\tilde{P}^w : \mathbf{Y}^T \rightarrow \mathcal{Q}(\mathbf{T})$ l'application donnée par la colonne d'indice w de la matrice R , i.e.*

$$\tilde{P}^w(u) = R_{u,w}$$

Alors

- a) Pour tous $u, w \in \mathbf{Y}^T$, on a $L_u(\tilde{P}^w) = \delta_u^w$ et la famille $\{\Theta^{-1}(\tilde{P}^w)\}_{w \in \mathbf{W}}$ est duale de la base $\{\sigma_w\}_{w \in \mathbf{Y}^T}$ de $H_*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z})$.
- b) La famille $\{\tilde{P}^w\}_{w \in \mathbf{Y}^T}$ est une base du $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ -module $\Theta(H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z}))$; en particulier, les coefficients de la matrice R appartiennent à $\mathcal{R}(\mathbf{T})$.
- c) Pour tous $u, w_1, w_2 \in \mathbf{Y}^T$, le coefficient du produit $\tilde{P}^{w_1} \tilde{P}^{w_2}$ en \tilde{P}^u est donné par la formule :

$$L_u(\tilde{P}^{w_1} \tilde{P}^{w_2}) = \sum_{v \preceq u} q_u^v \tilde{P}^{w_1}(v) \tilde{P}^{w_2}(v) = \sum_{v \preceq u} q_u^v R_{v, w_1} R_{v, w_2}$$

- d) Soient $A_{\mathbf{Y}}$ l'ensemble des variables $\{A_w\}_{w \in \mathbf{Y}^T}$ et $I_{\mathbf{Y}}$ l'idéal de l'anneau des polynômes $\mathbb{Z}[A_{\mathbf{Y}}]$ engendré par les relations

$$\mathcal{R}(w_1, w_2) := A_{w_1} A_{w_2} - \sum_{u \in \mathbf{Y}^T} L_u(\tilde{P}^{w_1} \tilde{P}^{w_2}) A_u$$

L'homomorphisme de $\mathbb{Z}[A_{\mathbf{Y}}]$ vers $H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z})$ qui associe $A_w \mapsto \tilde{P}^w$ induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}[A_{\mathbf{Y}}]/I_{\mathbf{Y}}$ sur $H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z})$.

L'anneau de cohomologie \mathbf{T} -équivariante de \mathbf{Y} est donc entièrement déterminé par la connaissance de la famille des fractions rationnelles $\{q_w^u\}_{u \preceq w} \subseteq \mathcal{Q}(\mathbf{T})$.

Remarque. La matrice Q est, dans notre convention, triangulaire inférieure, de même donc que la matrice R . Les applications \tilde{P}^w sont par conséquent, nulles partout sauf au point w , lorsque w est maximal pour l'ordre ' \preceq ', en particulier lorsque la cellule \mathbf{Y}_w est de dimension maximum.

D-7) On a un isomorphisme $H^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathcal{R}(\mathbf{T})} H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z})$ (suite spectrale d'Eilenberg-Moore) et le cup produit de la cohomologie ordinaire $H^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z})$ découle de celui de $H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Z})$.

1.4.4 Opérateurs de Demazure \mathcal{D}_w . La démarche décrite dans la section précédente est appliquée dans [A₃] pour déterminer l'algèbre $H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z})$, où $\mathbf{X} = \mathbf{G}/\mathbf{B}$ est la variété des drapeaux d'un groupe \mathbf{G} de Kač-Moody (en particulier, d'un groupe semi-simple complexe)⁽²⁾. Une partie important du travail concerne les applications \mathcal{L}_w de (1.4.3 (4)), cas particuliers d'une opération plus générale abordée en appendice de [A₃]. Cette opération est l'opération π_* d'«intégration sur les fibres» pour une fibration \mathbf{T} -équivariante $\pi : M \rightarrow N$ dont la fibre F admet une structure de CW-complexe fini orienté mais où la base N n'est pas supposée de dimension cohomologique finie. L'intégration sur les fibres définit un morphisme de $H_{\mathbf{T}}^*(N)$ -modules $\pi_* : H_{\mathbf{T}}^*(M) \rightarrow H_{\mathbf{T}}^{*-\dim(F)}(N)$, qui intervient dans la généralisation au contexte équivariant des opérateurs cohomologiques $\{\mathcal{D}_w\}_{w \in \mathbf{W}}$ de Demazure, eux mêmes intimement liés aux applications \mathcal{L}_w . Dans la suite on décrit la version équivariante de ces opérateurs.

² Comme dans le cas des groupes semi-simples complexes, la variété de drapeaux \mathbf{X} d'un groupe de Kač-Moody admet une décomposition cellulaire \mathbf{T} -stable dont les cellules sont de dimension paire et contiennent un unique point fixe identifié à un élément du groupe de Weyl \mathbf{W} . En contrepartie, \mathbf{X} peut ne pas être de dimension cohomologique finie, cela se produit exactement lorsque \mathbf{W} est infini. Dans ces cas, \mathbf{X} est néanmoins limite inductive de \mathbf{T} -espaces conformes aux hypothèses de 1.4.3 et la démarche en question s'applique moyennant de petites précautions.

Considérons $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ muni de la structure produit de \mathbf{G} -espaces à gauche. Pour chaque $w \in \mathbf{W}$, notons \mathcal{J}_w l'adhérence de l'orbite $\mathbf{G} \cdot (e, w)$. Les projections canoniques $p_1, p_2 : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ sont \mathbf{G} -équivariantes et leurs restrictions à \mathcal{J}_w sont des fibrations de base \mathbf{X} de fibres isomorphes aux variétés de Schubert $\bar{\mathbf{X}}_w$ et $\bar{\mathbf{X}}_{w^{-1}}$ respectivement. On définit l'opérateur

$$\mathcal{D}_w : H_T^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_T^{*-2\ell(w)}(\mathbf{X}; \mathbb{Z})$$

par $\mathcal{D}_w := p_{1*} \circ p_2^*$; c'est un opérateur $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ -linéaire homogène de degré $-2\ell(w)$.

Notons $\text{App}_b(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))$ l'algèbre des applications $f : \mathbf{W} \rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{T})$ de degrés bornés ⁽³⁾, *i.e.* telles qu'il existe $N_f \in \mathbb{N}$ vérifiant $\deg(f(w)) < N_f$ pour tout $w \in \mathbf{W}$. L'homomorphisme de restriction $\Theta : H_T^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_T^*(\mathbf{W}; \mathbb{Z}) = \text{App}_b(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))$ est injectif de conoyau de $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ -torsion ((3)). Les opérateurs \mathcal{D}_w se prolongent donc de manière unique en des opérateurs \tilde{A}_w agissant sur $\text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{Q}(\mathbf{T}))$.

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbf{X}}_w & & \mathbf{X} \\ & \searrow^{p_2} & \nearrow \\ & \mathcal{J}_w & \\ & \nearrow_{p_1} & \searrow \\ \bar{\mathbf{X}}_{w^{-1}} & & \mathbf{X} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & H_T^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\Theta} \text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{Q}(\mathbf{T})) \\ & \swarrow^{p_2^*} \quad \downarrow \mathcal{D}_w & \downarrow \tilde{A}_w \\ H_T^*(\mathcal{J}_w; \mathbb{Z}) & & \text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{Q}(\mathbf{T})) \\ & \searrow_{p_{1*}} & \swarrow_{\Theta} \\ & H_T^{*-2\ell(w)}(\mathbf{X}; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\Theta} \text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{Q}(\mathbf{T})) \end{array}$$

Le théorème suivant donne les propriétés fondamentales des opérateurs \mathcal{D}_w et précise leurs liens avec les applications \mathcal{L}_w et L_w (*cf.* (4)).

1.4.4-1. Théorème ([A₃]). Soient $w, w_1, w_2 \in \mathbf{W}$, alors

a) $\mathcal{D}_{w_1} \circ \mathcal{D}_{w_2} = \begin{cases} \mathcal{D}_{w_1 w_2} & \text{lorsque } \ell(w_1 w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

b) $\mathcal{D}_w = \mathcal{D}_{r_{\alpha_1}} \circ \cdots \circ \mathcal{D}_{r_{\alpha_\ell}}$, pour toute décomposition réduite $r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_\ell}$ de w .

c) Pour $w \in \mathbf{W}$, soit \tilde{A}_w l'opérateur sur $\text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{Q}(\mathbf{T}))$ vérifiant $\Theta \circ \mathcal{D}_w = \tilde{A}_w \circ \Theta$.

i) Pour chaque $\alpha \in \Pi$, l'opérateur \tilde{A}_{r_α} fait correspondre à $f \in \text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{Q}(\mathbf{T}))$ l'application

$$\mathbf{W} \ni w \longmapsto \tilde{A}_{r_\alpha}(f)(w) := \frac{f(wr_\alpha) - f(w)}{w \cdot \alpha}.$$

ii) $\tilde{A}_{r_{\alpha_1}} \circ \cdots \circ \tilde{A}_{r_{\alpha_\ell}} = \begin{cases} \tilde{A}_{r_{\alpha_1 \cdots r_{\alpha_\ell}}} & \text{lorsque } r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_\ell} \text{ est une expression réduite;} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$

d) $\mathcal{L}_w = \mathcal{L}_e \circ \mathcal{D}_w = L_w \circ \Theta = L_e \circ \tilde{A}_w \circ \Theta$.

Le théorème suivant, corollaire de l'assertion (d) ci-dessus, traduit la proposition de ((4)) qui décrit $H_T^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z})$ comme sous-algèbre de $\text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))$.

³ Condition toujours satisfaite lorsque \mathbf{G} est un groupe semi-simple complexe; \mathbf{W} étant alors fini.

1.4.4-2. Théorème ([A₃]). *Le morphisme $\Theta : H_T^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{App}_b(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))$ établit un isomorphisme entre $H_T^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z})$ et l'ensemble des applications f de $\text{App}_b(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))$ satisfaisant à l'une quelconque des deux conditions suivantes :*

A-a) $\tilde{A}_w(f)(e) \in \mathcal{R}(\mathbf{T})$, pour tout w dans \mathbf{W} , où e désigne l'élément neutre de \mathbf{W} ;

A-b) $\tilde{A}_w(f) \in \text{App}_b(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))$, pour tout w dans \mathbf{W} .

En particulier, $\text{im}(\Theta)$ est la plus grande partie de $\text{App}_b(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))$ stable sous l'action des opérateurs \tilde{A}_{r_α} .

1.4.5 Base duale de la base des cycles de Schubert. Comme expliqué en ((5)), les applications L_w se décomposent suivant des sommes finies :

$$L_w(f) = \sum_{u \preceq w} q_w^u f(u), \quad \text{pour } f \in \text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{Q}(\mathbf{T})).$$

avec $\{q_w^u\} \subseteq \mathcal{Q}(\mathbf{T})$ uniquement déterminé. Dans le cas des variétés de drapeaux, des descriptions explicites de ces fractions sont obtenues à l'aide de désingularisations des variétés de Schubert par des variétés de Bott-Samelson. On a :

Théorème ([A₃, A₀]). *Soit $r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_\ell}$ une décomposition réduite de w . Pour chaque $i = 1, \dots, \ell$, notons ε_i l'un des éléments de $\{1, r_{\alpha_i}\} \subseteq \mathbf{W}$. Alors :*

$$q_w^u = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell)} \frac{1}{\prod_{j=1}^{\ell} -\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_j(\alpha_j)}$$

où la sommation est indexée par les ℓ -uplets $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell)$ vérifiant $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\ell = u$.

Les coefficients de la matrice $Q = \llbracket q_w^u \rrbracket_{w,u}$ sont donc connus dans le cas des variétés de drapeaux. La colonne d'indice $u = s$ de Q est nulle sauf sur la dernière ligne $w = s$ où l'on trouve le coefficient :

$$q_s^s = \frac{1}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha}.$$

Ceci étant, la base duale de la base des cycles de Schubert se lit dans les colonnes de la matrice inverse $R = Q^{-1}$ (cf. (5)). Pour $w \in \mathbf{W}$, notons $\tilde{P}^w \in \text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))$ l'application donnée par la colonne d'indice w de R , i.e. $\tilde{P}^w : u \mapsto R_{u,w}$. On a :

$$\tilde{P}^s(u) = \begin{cases} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha & \text{lorsque } u = s, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad \text{et } \tilde{P}^e(u) = 1, \text{ pour tout } u \text{ } ^{(4)}.$$

Le théorème suivant, corollaire des théorèmes 1 et 2 de 1.4.4, est l'analogie exact du théorème de [BGG] concernant les polynômes de Schubert (cf. 1.3.8), il s'en distingue sur deux points qui nous semblent essentiels. Premièrement : les polynômes $P^w \in S(\mathfrak{t}^*)$ sont remplacés par des applications $\tilde{P}^w : \mathbf{W} \rightarrow S(\mathfrak{t}^*)$, et deuxièmement : nous nous intéressons maintenant à la cohomologie à coefficients *entiers* plutôt que rationnels.

⁴Inutile pour la suite (cf. 1.5.2-2).

Théorème. La famille $\{\tilde{P}^w\}_{w \in \mathbf{W}}$ d'applications de \mathbf{W} à valeurs dans $\mathcal{R}(\mathbf{T})$, caractérisée par les égalités :

$$L_u(\tilde{P}^w) = \delta_u^w, \quad \text{pour tous } u, w \in \mathbf{W},$$

est stable sous l'action des opérateurs \tilde{A}_v . Pour tous $v, w \in \mathbf{W}$, on a :

$$\tilde{A}_v(\tilde{P}^w) = \begin{cases} \tilde{P}^{wv^{-1}} & \text{lorsque } \ell(wv^{-1}) = \ell(w) - \ell(v), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier :

$$\boxed{\tilde{P}^w = \tilde{A}_{w^{-1}s}(\tilde{P}^s)}$$

1.4.6 Structure de \mathbf{W} -module de $\text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))$. L'action diagonale du groupe de Weyl sur $\mathbb{E}\mathbf{K} \times_T \mathbf{X}$, donnée par $w \cdot (m, x) = (mw^{-1}, wx)$, induit une action sur $H_T^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z})$. En faisant opérer \mathbf{W} sur $\text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))$ par l'action

$$(w \cdot f)(u) = w \cdot (f(w^{-1}u)),$$

l'application $\Theta : H_T^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))$ est un morphisme de \mathbf{W} -modules et l'image de la composée Ξ des homomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}(\mathbf{T}) & \xrightarrow[\simeq]{\gamma_{\mathbb{E}\mathbf{K}}^T} & H_{\mathbf{K}}^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho_{\mathbf{T}}^{\mathbf{K}}} & H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\Theta} & \text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T})) \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\Xi} & & & & \uparrow \end{array}$$

est contenue dans $\text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))^{\mathbf{W}}$.

Or, $f \in \text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))^{\mathbf{W}}$, si et seulement si, $f(w) = w(f(e))$, pour tout $w \in \mathbf{W}$, autrement dit, une application invariante est entièrement déterminée par sa valeur au point $e \in \mathbf{W}$. Comme d'autre part $L_e \circ \Xi = \text{id}_{\mathcal{R}(\mathbf{T})}$, l'homomorphisme Ξ est injectif et son image est la sous-algèbre $\text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))^{\mathbf{W}}$. On a donc des identifications

$$\boxed{\mathcal{R}(\mathbf{T}) \xrightarrow[\gamma_{\mathbb{E}\mathbf{K}}^T]{=} H_{\mathbf{K}}^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow[\rho_{\mathbf{T}}^{\mathbf{K}}]{=} H_{\mathbf{T}}^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z})^{\mathbf{W}} \xrightarrow[\Theta]{\subseteq} \text{App}_b(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))}$$

et l'égalité, pour tout $w \in \mathbf{W}$,

$$\boxed{\Xi \circ A_w = \tilde{A}_w \circ \Xi}$$

qui montre que \tilde{A}_w prolonge l'opérateur A_w de Bernstein-Gelfand-Gelfand défini dans 1.3.6.

La proposition suivante explique maintenant le lien entre les familles

$$\{P^w\}_{w \in \mathbf{W}} \subseteq \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}(\mathbf{T}) \quad \text{et} \quad \{\tilde{P}^w\}_{w \in \mathbf{W}} \subseteq \text{App}_b(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))$$

Elle montre que d'un point de vue heuristique, P^w correspond, via l'homomorphisme de Chern-Weil $\mathcal{C}\mathbf{h}_{\mathbf{T}}$, au symétrisé de \tilde{P}^w sous l'action de \mathbf{W} .

Proposition. Pour tout $w \in \mathbf{W}$, on a :

$$P^w = \left(\frac{1}{|\mathbf{W}|} \sum_{u \in \mathbf{W}} u \cdot \tilde{P}^w \right)(e) = \frac{1}{|\mathbf{W}|} \sum_{u \in \mathbf{W}} u(\tilde{P}^w(u^{-1})).$$

Par exemple (cf. 1.3.8) :

$$P^s = \frac{1}{|\mathbf{W}|} \sum_{u \in \mathbf{W}} u(\tilde{P}^s(u^{-1})) = \frac{s(\prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha)}{|\mathbf{W}|} = \frac{\prod_{\alpha \in \Delta_+} -\alpha}{|\mathbf{W}|}.$$

1.4.7 Explicitation des opérateurs \tilde{A}_w . L'action du groupe de Weyl s'avère également très utile pour la description des opérateurs \tilde{A}_w . La proposition suivante est conséquence immédiate du fait que ces opérateurs sont \mathbf{W} -équivariants (il suffit de le vérifier pour les \tilde{A}_{r_α} ce qui est très simple).

Proposition ([A₃]). Pour $w \in \mathbf{W}$ et $f \in \text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{D}(\mathbf{T}))$ on a :

$$\boxed{\tilde{A}_w(f)(v) = v(L_w(v^{-1} \cdot f)) = \sum_{u \preceq w} v(q_w^u) f(vu)} \quad \text{pour tout } v \in \mathbf{W}.$$

1.4.8 La matrice R et le cup produit de $H_T^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z})$. Les remarques de 1.4.6 et la proposition précédente interviennent dans une jolie description des coefficients de la matrice $R = Q^{-1}$. En effet :

$$\begin{aligned} \delta_v^u = L_v(\tilde{P}^u) &= \sum_a q_v^a \tilde{P}^u(a) = \sum_a q_v^a (\tilde{A}_{u^{-1}s}(\tilde{P}^s))(a) \\ &= \sum_a q_v^a \left(\sum_b a(q_{u^{-1}s}^b) \tilde{P}^s(ab) \right) \\ &= \sum_a q_v^a a(q_{u^{-1}s}^{a^{-1}}) \tilde{P}^s(s) \end{aligned}$$

et le coefficient de la matrice R en ligne v et colonne w vaut ⁽⁵⁾ :

$$R_{v,w} = v(q_{w^{-1}s}^{v^{-1}}) (\prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha).$$

En appliquant le théorème de ((6)) le cup produit de $H_T^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z})$ devient explicite.

Théorème. Pour tous $w_1, w_2 \in \mathbf{W}$, on a

$$\boxed{\tilde{P}^{w_1} \tilde{P}^{w_2} = (\prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha)^2 \sum_{u \in \mathbf{W}} \left(\sum_{v \in \mathbf{W}} q_u^v v(q_{w_1^{-1}s}^{v^{-1}}) v(q_{w_2^{-1}s}^{v^{-1}}) \right) \tilde{P}^u}$$

où l'on convient que $q_u^v = 0$ pour tous $v \not\preceq u$.

1.4.9 Le cup produit de $H_T^*(\overline{\mathbf{X}}_\varpi; \mathbb{Z})$. Fixons un élément $\varpi \in \mathbf{W}$. Tout ce qui a été dit à propos de $H_T^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z})$ s'applique à $H_T^*(\overline{\mathbf{X}}_\varpi; \mathbb{Z})$ à de petites modifications près.

- 1) Les éléments de la base $\{\tilde{P}_\varpi^w\}_{w \preceq \varpi}$ de $H_T^*(\overline{\mathbf{X}})$, duale de la base $\{\sigma_w\}_{w \preceq \varpi}$ de cycles de Schubert de $\overline{\mathbf{X}}_\varpi$, sont les restriction des applications \tilde{P}^w de 1.4.5 à l'ensemble $\{u \mid u \preceq \varpi\}$.
- 2) Le cup produit de $H_T^*(\overline{\mathbf{X}}_\varpi; \mathbb{Z})$ est donné par la même formule du théorème 1.4.8 dans laquelle les indices w_1, w_2, u, v parcourent maintenant l'ensemble $\{u \mid u \preceq \varpi\}$.

⁵ Je remercie Alain Lascoux de m'avoir fait part de ces égalités qu'il avait observées en 1986 dans le cas des variétés de drapeaux des groupes $\text{SL}(n; \mathbb{C})$.

1.4.10 Liens avec l'article de Kostant-Kumar [KK₁]. Notons $\mathbb{Z}[\mathbf{W}]$ la \mathbb{Z} -algèbre de \mathbf{W} . On munit $\mathcal{Q}[\mathbf{W}] = \mathbb{Z}[\mathbf{W}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{Q}(\mathbf{T})$ de la structure d'algèbre donnée par le produit

$$(\delta_w \otimes Q_1) \cdot (\delta_v \otimes Q_2) = \delta_{wv} \otimes (v^{-1} \cdot Q_1) Q_2.$$

Kostant et Kumar s'intéressent au $\mathcal{Q}(\mathbf{T})$ -module à gauche $\Omega = \text{Hom}_{\mathcal{Q}(\mathbf{T})}^{\delta}(\mathcal{Q}[\mathbf{W}], \mathcal{Q}(\mathbf{T}))$ des homomorphismes de $\mathcal{Q}(\mathbf{T})$ -modules à droite sur lequel ils font opérer $\mathcal{Q}[\mathbf{W}]$ par la formule

$$(a \cdot \psi)(b) = \psi(a^t \cdot b), \quad \text{pour tous } a, b \in \mathcal{Q}[\mathbf{W}], \psi \in \Omega,$$

où $a \mapsto a^t$ est l'anti-automorphisme de $\mathcal{Q}[\mathbf{W}]$ donné par $(\delta_w \otimes Q)^t = \delta_{w^{-1}} \otimes w \cdot Q$. Or, Ω est canoniquement isomorphe à $\text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{Q}(\mathbf{T}))$ et l'action de \tilde{A}_{α} sur ce dernier correspond alors à l'action de l'élément $x_{\alpha} \in \mathcal{Q}[\mathbf{W}]$ défini par Kostant-Kumar :

$$x_{\alpha} := -(\delta_{r_{\alpha}} + \delta_e) \otimes \alpha^{-1}.$$

Grâce à cette observation simple, la proposition suivante, démontrée par des méthodes combinatoires dans [KK₁], apparaît comme corollaire immédiat du théorème 1.4.4-1-(b).

Proposition. Soient $r_{\alpha_i}, r_{\beta_i}$ des réflexions simples.

- a) Lorsque $\ell(r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_{\ell}}) = \ell$, on a $x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_{\ell}} = x_{\beta_1} \cdots x_{\beta_{\ell}}$, pour toute décomposition réduite $r_{\beta_1} \cdots r_{\beta_{\ell}}$ de $r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_{\ell}}$.
- b) Lorsque $\ell(r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_{\ell}}) < \ell$, on a $x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_{\ell}} = 0$.

Pour chaque $w \in \mathbf{W}$, Kostant-Kumar notent x_w l'élément de $\mathcal{Q}[\mathbf{W}]$, défini d'après l'assertion (a), à l'aide d'une décomposition réduite quelconque $r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_{\ell}}$ de w . L'action de x_w sur Ω correspond donc exactement à l'action de \tilde{A}_w sur $\text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{Q}(\mathbf{T}))$. Les opérateurs x_w , considérés pour la première fois dans la note [KK₁], apparaissent ainsi comme les localisations des opérateurs de Demazure \mathcal{D}_w en cohomologie équivariante.

1.4.11 Sous-module Λ et cohomologie T -équivariante de \mathbf{X} . Un objet important de [KK₁] est la partie $\Lambda \subseteq \Omega$ définie comme l'ensemble des $h \in \Omega$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- a) $h(x_w^t) \in \mathcal{R}(\mathbf{T})$, pour tout $w \in \mathbf{W}$;
- b) $h(x_w^t) = 0$ pour presque tout $w \in \mathbf{W}$.

On reconnaît dans (a) la condition (A-b) du théorème 1.4.4-2 qui caractérise l'image du morphisme de restriction aux points fixes $\Theta : H_T^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_T^*(\mathbf{W}; \mathcal{R}(\mathbf{T}))$. Par conséquent, $\Lambda = H_T^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z})$ et le théorème suivant est immédiat.

Théorème ([KK₁]). On munit Ω de la structure d'algèbre de $\text{App}(\mathbf{W}; \mathcal{Q}(\mathbf{T}))$.

- 1) Λ est une $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ -sous-algèbre de Ω ;
- 2) Λ est un $\mathcal{R}(\mathbf{T})$ -module libre admettant une base $\{\xi^w\}_{w \in \mathbf{W}}$ vérifiant $\xi^w(x_v^t) = \delta_v^w$, pour tous $v, w \in \mathbf{W}$.
- 3) Λ est stable sous l'action des $x_w \in \mathcal{Q}[\mathbf{W}]$;
- 4) L'application $\theta : \Lambda \otimes_{\mathcal{R}(\mathbf{T})} \mathbb{Z} \rightarrow H^*(\mathbf{X}; \mathbb{Z})$ définie par $\theta(\xi^w \otimes 1) = \mu^w$, où μ^w est la classe de cohomologie duale du cycle de Schubert σ_w , est un isomorphisme d'algèbres graduées.

Remarque. L'identification faite dans [A₃] entre l'algèbre Λ et la cohomologie T -équivariante de \mathbf{X} est à la base de l'article [KK₂] consacré à la K -théorie T -équivariante de \mathbf{X} .

1.5 Classes d'Euler équivariantes et singularités (1998)

1.5.1 Classes d'Euler équivariantes. Revenons sur l'expression des fractions rationnelles q_w^u de la section 1.4.5 :

$$q_w^u = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell)} \frac{1}{\prod_{j=1}^{\ell} -\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_j(\alpha_j)}, \quad \text{pour tous } u \preccurlyeq w \in \mathbf{W}.$$

Ce qui nous intéresse dans ces expressions maintenant, c'est la fait qu'il s'agit d'une somme finie d'inverses de produits de $\ell(w)$ poids de T . Il est *a priori* très surprenant que le résultat final d'une telle somme, qui comporte la plupart du temps beaucoup de termes additifs, puisse être l'inverse d'un seul produit de $\ell(w)$ poids. C'est pourtant bien ce que l'on constate lorsque $\overline{\mathbf{X}}_w = \mathbf{X}$, autrement dit, lorsque où $w = s$ (l'élément de plus grande longueur de \mathbf{W}). Dans ce cas, la formule localisation de Berline-Vergne donne :

$$q_s^u = (-1)^{\ell(u)} \frac{1}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} -\alpha}, \quad \text{pour tout } u \in \mathbf{W}.$$

La raison de cette simplification est intimement liée au fait que $\overline{\mathbf{X}}_s$ est une variété lisse. En effet, dans ce cas, $1/q_s^u$ correspond à la classe d'Euler T -équivariante du plongement $\{u\} \subseteq \mathbf{X}$ dont je rappelle à continuation l'idée générale de la construction.

Pour fixer les idées, donnons-nous une variété algébrique complexe \mathbf{Y} de dimension d munie de la topologie transcendante et orientée par sa structure complexe. Un point $y \in \mathbf{Y}$ est dit «rationnellement lisse dans \mathbf{Y} » s'il existe un voisinage $U_y \subseteq \mathbf{Y}$ tel que, pour tout $z \in U_y$:

$$H_z^i(\mathbf{Y}; \mathbb{Q}) = 0 \text{ si } i \neq 2d, \quad \text{et} \quad H_z^{2d}(\mathbf{Y}; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}.$$

Lorsque tout $y \in \mathbf{Y}$ est rationnellement lisse dans \mathbf{Y} , on dit que \mathbf{Y} est «rationnellement lisse».

Supposons \mathbf{Y} munie d'une action de T à gauche (action continue pour la topologie transcendante suffit). Pour tout point fixe $y \in \mathbf{Y}^T$ rationnellement lisse dans \mathbf{Y} , le morphisme de Thom-Gysin : $\int_{\mathbf{Y}} : H_{T,y}^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Q})[2d] \cong H_T^*(\{y\}; \mathbb{Q})$ est bien défini et c'est un isomorphisme. Notons $\Phi_{y,\mathbf{Y}}$ son inverse, puis $\tau(y, \mathbf{Y}) = \Phi_{y,\mathbf{Y}}(1)$ la «classe de Thom».

$$\begin{array}{ccc} \tau(y, \mathbf{Y}) \in H_{T,y}^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\text{restriction de } \mathbf{Y} \text{ à } \{y\}} & H_T^*(\{y\}; \mathbb{Q}) \ni \text{Eu}_T(y, \mathbf{Y}) \\ \uparrow \Phi_{y,\mathbf{Y}} & \uparrow \cong \int_{\mathbf{Y}} & \uparrow \text{m}(\text{Eu}(y, \mathbf{Y})) \\ 1 \in H_T^*(\{y\}; \mathbb{Q})[-2d] & & \end{array}$$

La «classe d'Euler équivariante de y dans \mathbf{Y} » est l'élément de $H_T^{2\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{Y}}(\{y\}; \mathbb{Q})$ défini par la restriction de la classe de Thom au point y , *i.e.*

$$\text{Eu}_T(y, \mathbf{Y}) := \tau(y, \mathbf{Y})|_y,$$

L'identification canonique entre $H_T^*(\{y\}; \mathbb{Q})$ et $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}(T)$ réalise la classe d'Euler équivariante d'un point fixe rationnellement lisse comme un polynôme homogène de degré $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{Y}$ à

coefficients dans \mathbb{Q} . On a par construction

$$\mu|_y = \text{Eu}_T(y, \mathbf{Y}) \int_{\mathbf{Y}} \mu, \quad \text{pour tout } \mu \in H_{T,y}^*(\mathbf{Y}).$$

En particulier, lorsque $\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{X}}_s$, on a $q_s^u = 1/\text{Eu}_T(u, \mathbf{X})$, pour tout $u \in \mathbf{W}$.

1.5.2 Classes d'Euler équivariantes généralisées. Lorsque y n'est pas rationnellement lisse dans \mathbf{Y} , l'application $\int_{\mathbf{Y}} : H_{T,y}^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Q}) \rightarrow H_T^*(\{y\}; \mathbb{Q})$ n'est pas nécessairement surjective ou injective et le formalisme précédent ne s'applique plus tel quel. Maintenant, *si y est isolé dans \mathbf{Y}^T* , le théorème de localisation permet de prouver que $\int_{\mathbf{Y}}$ est néanmoins bijective modulo $\mathcal{R}(T)$ -torsion, de même par ailleurs que la restriction $H_{T,y}^*(\mathbf{Y}; \mathbb{Q}) \rightarrow H_T^*(\{y\}; \mathbb{Q})$. Il s'ensuit que pour tout élément *sans torsion* $\mu \in H_{T,y}^*(\mathbf{Y})$, la fraction $\mu|_y^{-1} \int_{\mathbf{Y}} \mu \in \mathcal{Q}(T)$, est *non nulle et ne dépend pas du choix d'un tel μ* , d'où la définition suivante.

Définition ([A₄]). Soit \mathbf{Y} une variété algébrique complexe munie d'une action de T continue pour la topologie transcendante. Pour tout point $y \in \mathbf{Y}^T$ *isolé*, la fraction rationnelle :

$$\text{Eu}_T(y, \mathbf{Y}) := \frac{\mu|_y}{\int_{\mathbf{Y}} \mu} \in \mathcal{Q}(T)$$

où μ est un élément sans torsion arbitrairement choisi dans $H_{T,y}^*(\mathbf{Y})$, est appelée la «*classe d'Euler T -équivariante (généralisée) de y dans T* ». Lorsque $\text{Eu}_T(y, \mathbf{Y}) \in \mathbb{Q} \otimes \mathcal{R}(T)$ on dit que cette classe est «*polynomiale*».

Il est clair que lorsque $y \in \mathbf{Y}^T$ est rationnellement lisse dans \mathbf{Y} , la classe d'Euler équivariante généralisée est polynomiale et coïncide avec la classe d'Euler équivariante classique.

Avec cette définition l'égalité dans la proposition suivante, connue sous le nom de «*formule de localisation*» dans le contexte différentiable est toujours vérifiée lorsque \mathbf{Y}^T est discret, *même si \mathbf{Y} est singulière*.

1.5.2-1. Proposition ([A₄]). Les données étant comme ci-dessus,

$$\int_{\mathbf{Y}} \mu = \sum_{y \in \mathbf{Y}^T} \frac{\mu|_y}{\text{Eu}_T(y, \mathbf{Y})}, \quad \text{pour tout } \mu \in H_{T,c}^*(\mathbf{Y}, \mathbb{Q}).$$

En particulier, si \mathbf{Y} est compacte connexe de dimension strictement positive

$$0 = \sum_{y \in \mathbf{Y}^T} \frac{1}{\text{Eu}_T(y, \mathbf{Y})}.$$

1.5.2-2. Exemple. Dans le cas où $\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{X}}_w$, on a

$$\begin{cases} q_w^u = 1/\text{Eu}_T(u, \overline{\mathbf{X}}_w) & \text{pour tout } u \preceq w. \\ 0 = \sum_{u \preceq w} q_w^u & \text{lorsque } w \neq e. \end{cases}$$

Et la fraction q_w^u est l'inverse d'un polynôme homogène de degré $\ell(w)$ lorsque u est rationnellement lisse dans la variété de Schubert $\overline{\mathbf{X}}_w$.

1.6 Critères de lissité rationnelle et algébrique (1998)

Dans [A₄] on introduit le formalisme du morphisme de Thom-Gysin équivariant dans la catégorie de \mathbf{T} -pseudovariétés dans le but d'étudier les propriétés des classes d'Euler équivariantes généralisées liées à la géométrie des espaces sous-jacents. On obtient alors des conditions assurant l'équivalence, pour un point fixe isolé y d'une variété algébrique \mathbf{Y} munie d'une action de \mathbf{T} , entre le fait d'être rationnellement lisse et le fait d'avoir une classe d'Euler équivariante polynomiale. L'un des principaux résultats de ce travail est le critère de lissité suivant.

Théorème ([A₄]). Soit $\mathbf{T} := (\mathbb{S}^1)^r \subseteq (\mathbb{C}^*)^r =: \mathbf{H}$. On considère une représentation linéaire algébrique de \mathbf{H} dans \mathbb{C}^n à poids dans un même demi-espace ouvert, de multiplicité 1 et deux-à-deux non colinéaires. Soit \mathbf{Y} un fermé de Zariski dans \mathbb{C}^n , équidimensionnel et \mathbf{H} -stable. Soit $\mathbb{E}_{\mathbf{Y}}$ le \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^n engendré par les droites vectorielles \mathbf{H} -stables contenues dans \mathbf{Y} . Notons $d_{\mathbf{Y}} := \dim_{\mathbb{C}}(\mathbf{Y})$, $d_{\mathbb{E}} := \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{E}_{\mathbf{Y}})$ et $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{d_{\mathbb{E}}}\}$ la liste des poids de \mathbf{T} dans $\mathbb{E}_{\mathbf{Y}}$.

a) Alors :

$$\frac{1}{\text{Eu}_{\mathbf{T}}(0, \mathbf{Y})} = (-1)^{d_{\mathbb{E}}} \frac{P}{\alpha_1 \cdots \alpha_{d_{\mathbb{E}}}}, \quad \text{avec } P \in H_{\mathbf{T}}^{2(d_{\mathbb{E}} - d_{\mathbf{Y}})}.$$

De plus : $P = 1$, si et seulement si, 0 est algébriquement lisse dans \mathbf{Y} .

b) Supposons qu'il existe un plongement $j : \mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathbf{H}$ tel que les poids α_i restreints à \mathbb{C}^* soient strictement positifs et tel que le quotient $(\mathbf{Y} \setminus \{0\})/j(\mathbb{C}^*)$ soit rationnellement lisse et sans cohomologie rationnelle en degrés impairs. Alors :

$$\frac{1}{\text{Eu}_{\mathbf{T}}(0, \mathbf{Y})} = (-1)^{d_{\mathbb{E}}} \frac{P}{\alpha_1 \cdots \alpha_{d_{\mathbb{E}}}}, \quad \text{avec } P \in H_{\mathbf{T}}^{2(d_{\mathbb{E}} - d_{\mathbf{Y}}) \setminus \{0\}} \text{ sans facteur linéaire.}$$

De plus : P est scalaire, si et seulement si, 0 est rationnellement lisse dans \mathbf{Y} .

1.7 Critères de lissité (rationnelle) des variétés de Schubert (1998)

Dans le cas des variétés de Schubert, la démarche de Kazhdan-Lusztig de l'appendice de [KL] conduit à une situation où l'on peut appliquer directement le critère 1.6-(b) pour démontrer le théorème suivant.

Théorème ([A₄]). Soient $v \preceq w \in \mathbf{W}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- Le point v est rationnellement lisse dans $\overline{\mathbf{X}}_w$.
- $\text{Eu}_{\mathbf{T}}(y, \overline{\mathbf{X}}_w)$ est polynomiale, pour tout $y \in \mathbf{W}$ vérifiant $v \preceq y \prec w$.

Les méthodes de [A₄] redémontrent les critères de lissité précédemment connus suivants.

Théorème. Soient $v \preceq w \in \mathbf{W}$.

On note $\mathbf{S}(v, w)$ l'ensemble des réflexions $r \in \mathbf{W}$ vérifiant $rv \preceq w$, et $\mathfrak{s}(v, w)$ le produit des racines $\gamma \in v\Delta_-$ telles que $r_{\gamma} \in \mathbf{S}(v, w)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- Le point v est rationnellement lisse dans $\overline{\mathbf{X}}(w)$.
- $\text{Card}(\mathbf{S}(y, w)) = \ell(w)$, pour tout $y \in \mathbf{W}$ vérifiant $v \preceq y \prec w$. ([Cr1])
- $\text{Eu}_{\mathbf{T}}(y, \overline{\mathbf{X}}(w)) = \star \mathfrak{s}(y, w)$, pour tout $y \in \mathbf{W}$ vérifiant $v \preceq y \prec w$, ([Kum])
où \star est un scalaire non nul.

De même que :

- d) Le point v est algébriquement lisse dans $\overline{\mathbf{X}}(w)$.
 e) $\text{Eu}_{\mathcal{T}}(v, \overline{\mathbf{X}}(w)) = (-1)^{\text{Card}(S(v,w))} \mathfrak{s}(v, w)$, ([Kum], [Bri₂])

1.8 Critères de lissité des variétés de représentations d'un carquois (2003)

Dans les années 2000-2002 un certain nombre de travaux s'intéressaient à la lissité rationnelle des variétés des représentations de carquois, notamment ceux de Robert Bédard, Ralf Schiffler et Philippe Caldéro ([BS,CS]). Leur principal résultat était l'équivalence entre «*lissité rationnelle*» et «*lissité algébrique*» pour les variétés des représentations d'un carquois **de type Dynkin**. Leur approche était combinatoire et reposait sur l'interprétation de Lusztig ([L₁,L₂]) des coefficients des matrices de changement de base entre la base canonique et les bases de Poincaré-Birkhoff-Witt de la partie positive \mathbf{U}^+ d'une algèbre enveloppante quantique \mathbf{U} , en termes de cohomologie d'intersection locale des clôtures de Zariski des orbites de représentations de carquois.

Dans cette problématique, j'ai pu rapidement comprendre qu'un certain tore agissait sur l'espace de représentations d'un carquois avec des poids de multiplicité un dans un même demi-espace ouvert de l'espace de poids, laissant stable chaque variété de représentations. Mon critère de lissité ([A₄]) pouvait de lors être appliqué donnait alors une version beaucoup plus générale de l'équivalence de Bédard-Schiffler-Caldéro dans la note [A₇]. Au delà de cette généralité élargie du résultat, il me paraît important de souligner que ma preuve tient en une note de quatre pages contrairement aux précédentes nécessitant plus de cent pages.

Soit \mathcal{Q} un carquois fini d'ensemble de sommets \mathcal{S} et de flèches \mathcal{F} , tel que :

- \mathcal{Q} -i) Il existe au plus une flèche de \mathcal{F} reliant deux sommets de \mathcal{Q} .
 \mathcal{Q} -ii) Il existe une injection $\iota : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\iota(\text{source}(f)) < \iota(\text{but}(f))$ pour tout $f \in \mathcal{F}$.
 Dans ce cas, on peut supposer que $\iota(\mathcal{S})$ est l'intervalle $[1, n]$ où $n = \#\mathcal{S}$. On identifie alors \mathcal{S} à l'intervalle $[1, n]$ et \mathcal{F} à un sous-ensemble de $[1, n]^2$, on note ' $i \rightarrow j$ ' pour $(i, j) \in \mathcal{F}$.

1.8-1. Remarques. La condition \mathcal{Q} -(ii) est équivalente à « \mathcal{Q} est sans circuit orienté» . Les conditions \mathcal{Q} -(i,ii), clairement vérifiées par les carquois de type Dynkin, sont aussi vérifiées par des carquois admettant une infinité de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables. Les conditions en question sont donc beaucoup moins contraignantes pour un carquois que celle d'être de type Dynkin.

Je démontre alors

Théorème [A₇]. Pour une variété de représentations $\overline{\mathcal{O}}$ d'un carquois \mathcal{Q} vérifiant les conditions \mathcal{Q} -(i,ii), les assertions suivantes sont équivalentes

- $\overline{\mathcal{O}}$ est rationnellement lisse, • $\overline{\mathcal{O}}$ est algébriquement lisse, • $\overline{\mathcal{O}}$ est un espace affine.

§2. Équivalence de Green et objets quasi-projectifs (1998)

Dans certains travaux de Marie-France Vignéras apparaît la notion de module presque-projectif. On appelle ainsi un module \mathcal{Q} admettant une présentation projective $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$

telle que $\ker(\pi)$ est stable sous l'action des endomorphismes de \mathcal{P} . Notons $E_{\mathcal{Q}} = \text{End}(\mathcal{Q})$ et $\text{Mod}^{\delta}(E_{\mathcal{Q}})$ la catégorie des $E_{\mathcal{Q}}$ -modules à droite. Les modules presque-projectifs sont importants dans la mesure où ils vérifient l'«équivalence de Green» énoncée dans le théorème suivant.

Théorème. *Soit \mathcal{Q} un \mathbf{A} -module de type fini presque-projectif.*

Le foncteur $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathcal{Q}, -) : \text{Mod}(\mathbf{A}) \rightsquigarrow \text{Mod}^{\delta}(E_{\mathcal{Q}})$ induit une bijection entre les classes d'isomorphie des \mathbf{A} -modules simples \mathcal{S} tels que $\text{Hom}(\mathcal{Q}, \mathcal{S}) \neq 0$ et les classes d'isomorphie des $E_{\mathcal{Q}}$ -modules à droite simples.

L'appendice de l'article [Vig] était destiné dans un premier temps à la démonstration d'un certain nombre d'équivalences de catégories liées aux modules presque-projectifs dans le cadre abstrait des catégories abéliennes. Cette recherche nous a permis de dégager une notion plus générale que la presque-projectivité : la «quasi-projectivité», vraiment au cœur des équivalences. Dans le cas d'une catégorie de modules sur un anneau \mathbf{A} , un module \mathcal{Q} est quasi-projectif lorsque pour toute surjection $\nu : \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$, le morphisme

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{Q} \\ & \swarrow \nu & \downarrow \\ \mathcal{Q} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{N} \end{array}$$

induit $\nu_* : E_{\mathcal{Q}} = \text{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$ est aussi surjectif.

Un module presque-projectif est quasi-projectif et le théorème ci-dessus est démontré dans [A₅] pour tout module quasi-projectif de type fini. De plus, on donne une caractérisation des quasi-projectifs en termes d'une équivalence de catégories significative dans la théorie des représentations modulaires.

Théorème ([A₅]). *Soit \mathcal{Q} un \mathbf{A} -module de type fini sans \mathcal{Q} -torsion. Il y a équivalence entre :*

- a) \mathcal{Q} est quasi-projectif.
- b) $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathcal{Q}, -) : \mathcal{C}'_{\mathcal{Q}} \rightsquigarrow \text{Mod}^{\delta}(E_{\mathcal{Q}})$ est une équivalence de catégories, où $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}}$ désigne la sous-catégorie pleine des \mathbf{A} -modules sans \mathcal{Q} -torsion, quotients de sommes directes de \mathcal{Q} .

Où un \mathbf{A} -module \mathcal{M} est dit «sans \mathcal{Q} -torsion» lorsque $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}) \neq 0$ pour tout sous-module non nul $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$.

§ 3. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes (2001)

3.1 Relèvements algébriques

Dans [A₆] j'étudie les problèmes de relèvements évoqués dans la section précédente en eux-mêmes. J'y montre par exemple que l'utilisation du théorème d'approximation d'Artin (théorème d'existence non effectif) pour le relèvement au niveau \dagger -adique des morphismes n'est pas nécessaire, ce qui représente une simplification considérable dans la théorie de Monsky-Washnitzer. On généralise aussi de manière uniforme les théorèmes de relèvement connus jusqu'à présent ; le cas le plus surprenant étant la propriété (R-i) qui est démontrée *sans aucune restriction* sur le couple (\mathbf{R}, \mathbf{I}) , autrement dit :

3.1-1. Théorème ([A₆]). *Pour tout anneau \mathbf{R} , tout idéal $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$ et toute $\overline{\mathbf{R}}$ -algèbre lisse $\overline{\mathbf{A}}$, il existe une \mathbf{R} -algèbre lisse dont la réduction modulo \mathbf{I} est isomorphe à $\overline{\mathbf{A}}$.*

Pour démontrer cette généralisation, j'utilise l'idée, sous-jacente dans la thèse de Elkik ([E]), de construire des relèvements lisses pour les $\overline{\mathbf{R}}$ -algèbres lisses à l'aide de relèvements projectifs

de $\overline{\mathbf{R}}$ -modules projectifs de type fini. Or, étant donné une \mathbf{R} -algèbre \mathbf{B} et un $\overline{\mathbf{B}}$ -module projectif $\overline{\mathbf{M}}$, le module $\overline{\mathbf{M}}$ n'est pas toujours la réduction modulo \mathbf{I} d'un \mathbf{B} -module projectif, cela est pourtant possible au voisinage étale de \mathbf{I} dans \mathbf{B} près ⁽⁶⁾, ce qui me suffit pour faire marcher l'idée de Elkik moyennant quelques vérifications techniques. Plus précisément, je démontre :

3.1-2. Théorème ([A₆]). *Pour tout anneau \mathbf{R} , tout idéal $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$, toute \mathbf{R} -algèbre de type fini \mathbf{B} et toute présentation libre et finie d'un $\overline{\mathbf{B}}$ -module projectif de type fini $\overline{\mathbf{M}}$:*

$$\overline{\mathbf{B}}^p \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\mathbf{B}}^q \xrightarrow{\overline{\Pi}} \overline{\mathbf{M}} \rightarrow \mathbf{0}, \quad (\diamond)$$

il existe une \mathbf{B} -algèbre \mathbf{B}_ε intersection complète et voisinage étale de \mathbf{I} dans \mathbf{B} , un \mathbf{B}_ε -module projectif de type fini \mathbf{M}_ε , et une présentation libre et finie de \mathbf{M}_ε :

$$\mathbf{B}_\varepsilon^p \xrightarrow{L} \mathbf{B}_\varepsilon^q \xrightarrow{\Pi} \mathbf{M}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{0},$$

de réduction modulo \mathbf{I} isomorphe à (\diamond) .

Quant à la propriété (R-ii), elle est vraie toujours sans hypothèse supplémentaire sur le couple (\mathbf{R}, \mathbf{I}) , mais uniquement au voisinage étale près :

3.1-3. Théorème ([A₆]). *Étant donné un morphisme de $\overline{\mathbf{R}}$ -algèbres $\overline{h} : \overline{\mathbf{A}} \rightarrow \overline{\mathbf{B}}$, et des relèvements $p_A : \mathbf{A} \rightarrow \overline{\mathbf{A}}$ et $p_B : \mathbf{B} \rightarrow \overline{\mathbf{B}}$, où \mathbf{A} est lisse, il existe une \mathbf{B} -algèbre \mathbf{B}_ε intersection complète et voisinage étale de \mathbf{I} dans \mathbf{B} , et un morphisme de \mathbf{R} -algèbres $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}_\varepsilon$ qui relève \overline{h} . En d'autres termes, on a un diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \overset{h}{\dashrightarrow} & \mathbf{B}_\varepsilon \xleftarrow{\varepsilon} \mathbf{B} \\ p_A \downarrow & & \searrow p_{B_\varepsilon} \quad \downarrow p_B \\ \overline{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\overline{h}} & \overline{\mathbf{B}} \end{array}$$

où $\varepsilon : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_\varepsilon$ désigne l'homomorphisme structural et où p_{B_ε} est l'homomorphisme induit par ε à partir de p_B .

La propriété (R-iii) est prouvée dans [MW] à partir d'une propriété d'homotopie également généralisée dans [A₆]. On rappelle que deux morphismes de \mathbf{R} -algèbres $u_0, u_1 : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ sont dits «homotopes» lorsqu'il existe un morphisme de \mathbf{R} -algèbres $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}[T]$ tel que $u_0(a) = h(a)(0)$ et $u_1(a) = h(a)(1)$. Le théorème suivant donne une idée assez précise de l'ambiguïté des relèvements des morphismes par l'existence d'une homotopie au voisinage étale près.

3.1-4. Théorème ([A₆]). *Soient \mathbf{A} une \mathbf{R} -algèbre lisse et $u_0, u_1 : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ deux morphismes de \mathbf{R} -algèbres dont les réductions modulo \mathbf{I} sont homotopes (par exemple égales). Il existe alors une $\mathbf{B}[T]$ -algèbre $\mathbf{B}[T]_\varepsilon$, intersection complète et voisinage étale de \mathbf{I} , de (T) et de $(1 - T)$ dans $\mathbf{B}[T]$, et un morphisme de \mathbf{R} -algèbres $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}[T]_\varepsilon$ tels que $p_{i,\varepsilon} \circ h = u_i$. En d'autres*

⁶On appelle «voisinage étale de \mathbf{I} dans \mathbf{B} » toute \mathbf{B} -algèbre \mathbf{B}_ε , étale sur \mathbf{B} et telle que la réduction modulo \mathbf{I} du morphisme structural $\varepsilon : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_\varepsilon$ est un isomorphisme.

termes, on a un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{B}[T] \xleftarrow{\varepsilon} \mathbf{B}[T] & \begin{array}{c} T \\ \downarrow p_0 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} T \\ \downarrow p_1 \\ 1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \nearrow h \\ A \end{array} & \begin{array}{c} \searrow p_{0,\varepsilon} \\ \searrow p_{1,\varepsilon} \\ \downarrow p_0 \\ \downarrow p_1 \end{array} & \\
 & \xrightarrow[u_1]{u_0} \mathbf{B} &
 \end{array}$$

où l'on note $\varepsilon : \mathbf{B}[T] \rightarrow \mathbf{B}[T]_\varepsilon$ l'homomorphisme structural et $p_{0,\varepsilon}, p_{1,\varepsilon} : \mathbf{B}[T]_\varepsilon \rightarrow \mathbf{B}$ les morphismes de $\mathbf{B}[T]$ -algèbres induits par ε à partir de p_0 et p_1 respectivement.

Les deux derniers théorèmes sont en fait des corollaires d'un théorème technique général, analogue algébrique de la propriété par laquelle Monsky-Washnitzer définissent les algèbres faiblement complètes très lisses, j'y reviendrai dans 3.2.

3.1-5. Théorème. Soit \mathbf{A} une \mathbf{R} -algèbre lisse et donnons-nous :

- Une paire d'homomorphismes de \mathbf{R} -algèbres $\mathbf{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{C} \xleftarrow{p} \mathbf{B}$, où p est surjectif de noyau noté \mathbf{K} ($\mathbf{K} = \mathbf{B}$ compris).
- Un homomorphisme de $\overline{\mathbf{R}}$ -algèbres $\overline{\mathbf{A}} \xrightarrow{\overline{h}} \overline{\mathbf{B}}$ vérifiant $\overline{\varphi} = \overline{p} \circ \overline{h}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{B} & \overline{\mathbf{A}} \xrightarrow{\overline{h}} \overline{\mathbf{B}} \\
 \searrow \varphi & \downarrow p & \searrow \overline{\varphi} \\
 \mathbf{C} & & \mathbf{C}
 \end{array}$$

Alors :

a) Pour chaque entier strictement positif n , il existe une **application** $\eta_n : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } p_{\mathbf{B}} \circ \eta_n = \overline{h} \circ p_{\mathbf{A}}, \\ \text{(ii) } p \circ \eta_n = \varphi, \\ \text{(iii) } \nu_n \circ \eta_n \text{ est un homomorphisme de } \mathbf{R}\text{-algèbres.} \end{array} \right. \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{\exists \eta_n} & \mathbf{B} \\ p_{\mathbf{A}} \downarrow & & \downarrow p_{\mathbf{B}} \\ \overline{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\overline{h}} & \overline{\mathbf{B}} \end{array}$$

où $\nu_n : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}/((\mathbf{I} \cdot \mathbf{B}) \cap \mathbf{K})^n$ désigne la surjection canonique.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{B} & \overline{\mathbf{A}} \xrightarrow{\overline{h}} \overline{\mathbf{B}} \\
 \searrow \varphi & \downarrow p & \searrow \overline{\varphi} \\
 \mathbf{C} & & \mathbf{C}
 \end{array}
 \quad + \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \xrightarrow{\exists \eta_n} & \mathbf{B} \\
 \searrow \varphi & \downarrow p & \downarrow p \\
 \mathbf{C} & & \mathbf{C}
 \end{array}
 \xrightarrow{\nu_n}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{B} & & \\
 \downarrow & & \\
 ((\mathbf{I} \cdot \mathbf{B}) \cap \mathbf{K})^n & &
 \end{array}$$

(L'homomorphisme p_n est celui induit par p .)

b) Il existe un voisinage étale \mathbf{B}_ε de $\mathbf{I} \cdot \mathbf{K}$ dans \mathbf{B} , intersection complète sur \mathbf{B} , dont on note $\varepsilon : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_\varepsilon$ l'homomorphisme structural et $p_\varepsilon : \mathbf{B}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{C}$ l'homomorphisme induit par p , et il existe un homomorphisme de \mathbf{R} -algèbres $h_\varepsilon : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}_\varepsilon$ tels que $\overline{h}_\varepsilon = \overline{\varepsilon} \circ \overline{h}$ et $\varphi = p_\varepsilon \circ h_\varepsilon$. En d'autres termes, on a un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{B} & \overline{\mathbf{A}} \xrightarrow{\overline{h}} \overline{\mathbf{B}} \\
 \searrow \varphi & \downarrow p & \searrow \overline{\varphi} \\
 \mathbf{C} & & \mathbf{C}
 \end{array}
 \quad + \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \xrightarrow{\exists h_\varepsilon} & \mathbf{B}_\varepsilon \xleftarrow{\varepsilon} \mathbf{B} \\
 \searrow \varphi & \downarrow p_\varepsilon & \downarrow p \\
 \mathbf{C} & & \mathbf{C}
 \end{array}$$

3.2 Relèvements faiblement complets très lisses

Les résultats de la section précédente concernent l'aspect «algébrique» du problème des relèvements dans la mesure où les algèbres lisses sur $\bar{\mathbf{R}}$ sont relevées en des algèbres lisses sur \mathbf{R} donc de type fini sur \mathbf{R} . Dans la définition de la cohomologie de Monsky-Washnitzer, on doit encore appliquer le foncteur de complétion faible qui nous fera ressortir du cadre des algèbres de type fini. À ce sujet, il est important de souligner que si $\varepsilon : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_\varepsilon$ est un voisinage étale de \mathbf{I} dans \mathbf{B} , la complétion faible $\varepsilon^\dagger : \mathbf{B}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}_\varepsilon^\dagger$ est un isomorphisme, ce qui permet de simplifier les résultats de la section précédente. En particulier, le théorème 3.1-5 s'énonce maintenant de la manière suivante.

3.2-1. Proposition. *Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ trois algèbres sur \mathbf{R} où \mathbf{A} est lisse sur \mathbf{R} . Pour toute paire de morphismes de \mathbf{R} -algèbres $\mathbf{B}^\dagger \xrightarrow{p} \mathbf{C} \xleftarrow{\varphi} \mathbf{A}^\dagger$, où p est surjectif (de noyau arbitraire), et pour chaque morphisme de $\bar{\mathbf{R}}$ -algèbres $\bar{\mathbf{A}} \xrightarrow{\bar{h}} \bar{\mathbf{B}}$ vérifiant $\bar{\varphi} = \bar{p} \circ \bar{h}$, il existe un relèvement $h : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$ de \bar{h} , tel que $\varphi = p \circ h$.*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{A}^\dagger & & \mathbf{B}^\dagger \\
 \searrow \varphi & & \downarrow p \\
 & & \mathbf{C}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{ccc}
 \bar{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\bar{h}} & \bar{\mathbf{B}} \\
 \searrow \bar{\varphi} & & \downarrow \bar{p} \\
 & & \bar{\mathbf{C}}
 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{A}^\dagger & \xrightarrow{\exists h} & \mathbf{B}^\dagger \\
 \searrow \varphi & & \downarrow p \\
 & & \mathbf{C}
 \end{array}$$

Or, c'est très précisément par cette propriété de \mathbf{A}^\dagger que Monsky-Washnitzer définissent les relèvements «faiblement complets très lisses». L'existence de tels relèvements est établie dans [MW] pour une classe de $\bar{\mathbf{R}}$ -algèbres lisses restreinte, et l'existence en toute généralité y est énoncée de manière conjecturale. Le théorème suivant, simple paraphrase de la proposition 3.2-1, établit cette conjecture moyennant le théorème 3.1-1.

3.2-2. Théorème ([A₆]). *Soient \mathbf{R} un anneau noethérien et $\bar{\mathbf{A}}$ une $\bar{\mathbf{R}}$ -algèbre lisse. Pour tout relèvement \mathbf{A} lisse sur \mathbf{R} de $\bar{\mathbf{A}}$, l'algèbre \mathbf{A}^\dagger est un relèvement faiblement complet très lisse de $\bar{\mathbf{A}}$.*

3.3 Critère d'affinité des schémas \dagger -adiques

On se donne un anneau commutatif noethérien \mathbf{R} et un idéal $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$. On note $\bar{\mathbf{R}} := \mathbf{R}/\mathbf{I}$. Pour tout schéma affine lisse $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ au-dessus de $\bar{\mathbf{R}}$, et toute \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} lisse sur \mathbf{R} , relèvement de $\bar{\mathbf{A}} := \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ et de complétion \mathbf{I} -adique faible notée \mathcal{A}^\dagger , Meredith associe un espace annelé $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathcal{A}^\dagger})$ au-dessus du même espace topologique \mathbf{X} (cf. [Mer]) que nous appelons *schéma \dagger -adique affine-lisse*. Un *schéma \dagger -adique lisse* est alors défini comme étant un espace annelé localement isomorphe à un *schéma \dagger -adique affine-lisse*.

Cela dit, pour tout schéma \dagger -adique lisse $(\mathbf{X}; \mathcal{O}^\dagger)$, soit $\bar{\mathcal{O}}^\dagger$ le faisceau sur \mathbf{X} associé au préfaisceau qui fait correspondre à l'ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, l'algèbre $\Gamma(U; \mathcal{O}^\dagger) \otimes_{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{R}}$. L'espace annelé $(\mathbf{X}; \bar{\mathcal{O}}^\dagger)$ est alors un schéma; on l'appelle *réduction (modulo \mathbf{I}) de $(\mathbf{X}; \mathcal{O}^\dagger)$* .

S'il est aisé de voir que la réduction d'un schéma \dagger -adique affine-lisse est un schéma affine lisse, la question réciproque, posée déjà par Meredith dans [Mer], est restée ouverte depuis. J'ai apporté une réponse positive à cette question, plus précisément, je démontre :

Théorème d'affinité lisse (2.1.8 [A₁₇])

- a) Pour tout ouvert affine $U \subseteq \mathbf{X}$ d'un schéma \dagger -adique lisse $(\mathbf{X}; \mathcal{O}^\dagger)$, le sous-espace annelé $(U; \mathcal{O}^\dagger|_U)$ est un schéma \dagger -adique affine-lisse.
- b) Pour tout ouvert affine $U \subseteq \mathbf{X}$ d'un schéma \dagger -adique lisse $(\mathbf{X}; \mathcal{O}^\dagger)$, le morphisme de \mathbf{R} -algèbres $\alpha(U) : \Gamma(U; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est un relèvement f.c.t.f. très lisse.
- c) Un schéma \dagger -adique lisse et de réduction affine est affine-lisse.

§ 4. Références bibliographiques

- [Art] M. ARTIN. On the solutions of analytique equations; *Invent. Math.* **5** pp. 277–291 (1968).
- [AS] M.F. ATIYAH, G. SEGAL. “*Equivariant cohomology and localization*”; Lecture notes, Warwick (1965).
- [BS] R. BÉDARD, R. SCHIFFLER. Rational smoothness of varieties of representations for quivers of type A; *Representation Theory* **7**, 481–548 (2003).
- [BV] N. BERLINE, M. VERGNE. Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante; *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 295 (1982), no. 9, 539–541. Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes; *Duke Math. J.* 50 (1983), no. 2, 539–549. Fourier transforms of orbits of the coadjoint representation; *Representation theory of reductive groups* (Park City, Utah, 1982), 53–67, *Progr. Math.*, 40, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1983).
- [BGG] I.N. BERNŠTEĪN, I.M. GEL'FAND, S.I. GEL'FAND. Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P ; *Uspehi Mat. Nauk* 28 (1973), no. 3(171), 3–26.
- [Ber] P. BERTHELOT. “*Cohomologie cristalline des schémas de car. $p > 0$* ”; *Lecture Notes in Mathematics* **407**, Springer-Verlag (1974)
- [B₀] A. BOREL. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts; *Ann. of Math. (2)* **57**, 115–207 (1953).
- [B₁] A. BOREL. Sous-groupes commutatifs et torsion des groupes de Lie compacts connexes; *Tôhoku Math. J. (2)* **13**, 216–240 (1961).
- [B-al] A. BOREL & AL. “*Seminar on transformation groups*”; *Annals of Mathematics Studies*, No. 46 Princeton University Press, Princeton, N.J. (1960).
- [BoMc₁] BORHO, MACPHERSON. Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés nilpotentes; *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 292, no. 15, 707–710 (1981).
- [Bri₂] M. BRION. Equivariant Chow groups for torus actions; *Birkhäuser. Transformation groups*, Vol 2, n^o 3, 1–43 (1997).
- [Bri₂] M. BRION. Rational smoothness and fixed points of torus actions; *Transformation Groups* **4**, 127–156 (1999).
- [Br] J.-L. BRYLINSKI. Equivariant intersection cohomology; *Kazhdan-Lusztig theory and related topics* (Chicago, IL, 1989), 5–32, *Contemp. Math.*, 139, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [Crl] J.B. CARRELL. The Bruhat graph of a Coxeter group, a conjecture of Deodhar, and rational smoothness of Schubert varieties; *Algebraic groups and their generalizations: classical methods*. University Park, PA, (1991), 53–61. *Proc. Sympos. Pure Math.* **56**, Part 1 (1994).
- [Crt] H. CARTAN. Notions d'algèbre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie; La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal; *Colloque de topologie (espaces fibrés)*, Bruxelles, 1950, pp. 15–27 et 57–71. Georges Thone, Liège; Masson et Cie., Paris, 1951.

- [CS] PH. CALDÉRO, R. SCHIFFLER. Rational smoothness of varieties of representations for quivers of Dynkin type; Prépublication <http://arxiv.org/abs/math.RT/0305149>.
- [Del] P. DELIGNE. La conjecture de Weil. I; Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 43 (1974), 273–307.
- [Dem₁] M. DEMAZURE. Invariants symétriques entiers des groupes de Weyl et torsion; Invent. Math. 21, 287–301, (1973).
- [Dem₂] M. DEMAZURE. Une nouvelle formule des caractères; Bull. Sci. Math. (2) 98 (1974), no. 3, 163–172.
- [Deo] V.V. DEODHAR. Local Poincaré duality and nonsingularity of Schubert varieties; Comm. Algebra 13, no. 6, 1379–1388, (1985).
- [DH] J.J. DUISTERMAAT, G.J. HECKMAN. On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space; Invent. Math. 69 (1982), no. 2, 259–268. Addendum to: On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space; Invent. Math. 72 (1983), no. 1, 153–158.
- [Dw] B. DWORK. On the rationality of the zeta function of an algebraic variety; Amer. J. Math. 82, 631–648 (1960).
- [EGA₁] GROTHENDIECK, DIEUDONNÉ. “*Éléments de géométrie algébrique-I*”; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 166. Springer-Verlag (1971)/
- [E] R. ELKIK. Solutions d’équations à coefficients dans un anneau hensélien; Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure, quatrième série, tome 6, pp. 553–604 (1973).
- [G₁] A. GROTHENDIECK. Géométrie formelle et géométrie algébrique; Séminaire Bourbaki, exposé **182** (Mai 1959).
- [G₂] A. GROTHENDIECK. Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L ; Séminaire Bourbaki, Vol. 9, Exp. No. 279 (1965), 41–55, Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [G₃] A. GROTHENDIECK. Crystals and the de Rham cohomology of schemes; Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas pp. 306–358 North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris (1968).
- [Hrs] HARISH-CHANDRA. Differential operators on a semisimple Lie algebra; Amer. J. Math. 79, 87–120 (1957).
- [Har] R. HARTSHORNE. “*Algebraic geometry*”; Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1977).
- [KM] N.M. KATZ, W. MESSING. Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields; Invent. Math. 23 (1974), 73–77.
- [KL] D. KAZHDAN, G. LUSZTIG. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras; Invent. Math. 53, no. 2, 165–184 (1979).
- [KK₁] B. KOSTANT, S. KUMAR. The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 83, no. 6, 1543–1545 (1986). The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G ; Adv. in Math. 62, no. 3, 187–237 (1986).
- [KK₂] B. KOSTANT, S. KUMAR. T -equivariant K -theory of generalized flag varieties; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 84, no. 13, 4351–4354 (1987). — J. Differential Geom. 32, no. 2, 549–603 (1990).
- [Kle] S.L. KLEIMAN. Algebraic cycles and the Weil conjectures; Dans “Dix exposés sur la cohomologie des schémas”, pp. 359–386. North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, (1968).
- [Kum] S. KUMAR. A connexion of equivariant K -theory with the singularity of Schubert varieties; prépublication (1986–87). The nil-Hecke ring and singularity of Schubert varieties; in “Lie Theory and geometry (in honor of Bertram Kostant)”. Progress in Math. **123**, Birkhäuser, 497–507 (1994). The nil-Hecke ring and singularity of Schubert varieties.; Inventiones Mathematicae **123**, n^o 3, 471–506 (1996).

- [LS] V. LAKSHMIBAI, C.S. SESHADRI. Singular locus of a Schubert variety; Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 11, no. 2, 363–366 (1984).
- [L₁] G. LUSZTIG. Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras; J. Amer. Math. Soc. 3, 257–296 (1990).
- [L₂] G. LUSZTIG. Canonical bases arising from quantized enveloping algebras; J. Amer. Math. Soc. 3, 447–498 (1990).
- [Meb] Z. MEBKHOUT. Sur le théorème de finitude de la cohomologie p -adique d’une variété affine non singulière.; Amer. J. Math. 119, no. 5, 1027–1081 (1997).
- [M-N₁] Z. MEBKHOUT, L. NARVAEZ. Sur les coefficients de de Rham-Grothendieck des variétés algébriques; in p -adic Analysis, Lecture Notes in Math. **1454**, pp. 267–309, (1990).
- [M-N₂] Z. MEBKHOUT, L. NARVAEZ. La théorie du polynôme de Bernstein-Sato pour les algèbres de Tate et de Dwork-Monsky-Washnitzer; Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **24**, 227–256, (1991).
- [Mer] D. MEREDITH. Weak formal schemes; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).
- [Mil] J. MILNOR. Construction of universal bundles. II; Ann. of Math. (2) 63, 430–436 (1956).
- [Mon] P. MONSKY. Formal cohomology. III. Fixed point theorems.; Ann. of Math. (2) 93, 315–343 (1971).
- [MW] P. MONSKY, G. WASHNITZER. Formal cohomology: I; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217 (1968).
- [Ser] J.-P. SERRE. Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique zéro; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **47**, pp. 108–109 (1961).
- [SGA] “*Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*”; Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61. Lecture Notes in Mathematics **224**. Springer-Verlag (1971).
- [Vig] M.-F. VIGNÉRAS. Induced R -representations of p -adic reductive groups; Selecta Mathematica 4 (1998), pp. 549–623.
- [vdP] M. VAN DER PUT. The cohomology of Monsky and Washnitzer; Société Mathématique de France. Deuxième série, Mémoire n^o 23, pp. 33–60 (1986).