# Recherches après 2002

Mardi 5 août 2018

Alberto Arabia*

C'est vers l'année 2002 que je m'intéresse et commence à obtenir des résultats dans un sujet alors nouveau pour moi : *la cohomologie de de Rham p-adique*, devenu mon thème principal de recherches jusqu'en 2013 date à laquelle j'incorpore à mes recherches le sujet des espaces de configuration généralisés.

La cohomologie de de Rham $p$-adique d'une variété *affine non singulière* a été introduite par Monsky et Washnitzer en 1964 ([$\mathrm{MW}_0$]) comme voie de recherche d'une théorie cohomologique permettant de démontrer les conjectures de Weil. La théorie a bien permis à ces auteurs, d'établir assez rapidement la partie des conjectures qui se réduisent au cas des variétés affines (rationalité et factorisation $p$-adique de la fonction Zéta [$\mathrm{MW}_1$,$\mathrm{MW}_2$,$\mathrm{Mo}_1$]), mais n'a pas permis d'aller au delà. Cette limitation a été une sérieuse obstruction au développement de la théorie (*cf.* aussi [$\mathrm{Mo}_2$,Mer]) et les publications sur le sujet se sont taries assez rapidement dans les années 70, en raison très probablement du succès de la preuve par Deligne en 1974 ([Del]) de la totalité des conjectures de Weil, à l'aide de la cohomologie étale de Grothendieck.

Dans l'année 2001, Mebkhout me fait part de son désir depuis long temps de reprendre les travaux de Monsky-Washnitzer dans le but de trouver une définition générale, *i.e.* non limitée aux variétés affines, de la cohomologie de de Rham $p$-adique. C'est ainsi que j'entreprends l'année suivante une analyse approfondie des fondements de cette théorie dans le but de prolonger *fonctoriellement* les définitions de Monsky-Washnitzer, de la catégorie des schémas affines lisses sur un corps de caractéristique positive vers celle de tous les schémas lisses et de tous leurs morphismes, et ce de manière intrinsèque, *i.e.* sans artifices techniques imposant des restrictions *a priori* aux variétés (p.e. admettre une compactification). Dans ce travail, j'ai dû régler bien de questions restées ouvertes dans les travaux de Monsky-Washnitzer et de Meredith d'avant 1980, mais aussi aller bien plus loin en apportant de nouvelles idées me permettant de transcender la distinction local/global. C'est en 2004 que je découvre et réalise l'intérêt du faisceau $\mathscr{G}_{\mathscr{X}}$ d'automorphismes dont la réduction modulo $p$ est l'identité, d'un schéma faiblement complet $\mathscr{X}$ très lisse sur $\mathbb{Z}_p$, notamment en dégageant ce qui est devenu la propriété clef de ce faisceau : le fait qu'il est naturellement contenu dans le faisceau des opérateurs différentiels $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}$, bien connu dans la théorie depuis le congrès de Trento de 1989 ([M-$\mathrm{N}_1$]). Cette propriété remarquable a des conséquences simples surprenantes, même dans le cas affine où elle permet de monter de manière presque tautologique que l'action cohomologique d'un morphisme entre variétés affines faiblement complètes ne dépend que de sa réduction modulo $p$, et ceci sans avoir besoin du théorème d'homotopie classique ([$\mathrm{MW}_1$]). Mais, c'est probablement dans le passage du local au global que le faisceau $\mathscr{G}_{\mathscr{X}}$ s'est montré le plus fertile en nouveautés, car il à permis de dégager la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathrm{sp}}$-Mod des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}$-modules ***spéciaux***, intrinsèquement associée à un schéma faiblement complet très lisse $\mathscr{X}$ et dont la classe d'équivalente ne dépend que de sa réduction modulo $p$, autrement dit, si $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ ont même réduction modulo $p$, on a $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathrm{sp}}\text{-Mod} \cong \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathrm{sp}}\text{-Mod}$ de manière canonique.

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
Bâtiment Sophie Germain, bureau 608, Case 7012, 75205. Paris Cedex 13, France.
Adresse électronique : alberto.arabia@imj-prg.fr

La catégorie $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},sp}$-Mod est abélienne et possède suffisamment d'objets injectifs et plats. Le passage du local au global est la généralisation, maintenant évidente, de l'idée de Trento (*loc.cit.*) : on introduit le complexe de faisceaux $\mathbb{R}Hom_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathrm{sp}}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}}, \mathscr{O}_{\mathscr{X}} \otimes \mathbb{Q}_q)$ $(*)$ sur l'espace topologique $\boldsymbol{X} := \mathscr{X} \bmod p$, où il convient d'insister sur le fait que l'on dérive dans la catégorie des modules spéciaux, et non pas dans $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-Mod, ce qui ne marche pas. Le complexe $(*)$ est alors *canonique dans* $D_{\mathbb{Q}_q}(\boldsymbol{X})$, *catégorie dérivée des faisceaux de* $\mathbb{Q}_q$*-espaces vectoriels sur* $\boldsymbol{X}$, sa cohomologie est la cohomologie de de Rham $p$-adique. Dans le cas général, *i.e.* lorsque $\boldsymbol{X}$ n'admet pas de relèvement faiblement complet très lisse global, on est naturellement amené à considérer le site $\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ de tous les relèvements faiblement complets très lisses des ouverts de $\boldsymbol{X}$. Ce site donne lieu à un topos annelé $(\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}, \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}})$ muni du faisceau des opérateurs différentiels $\mathscr{D}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$ et de la catégorie des modules spéciaux $\mathscr{D}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}},\mathrm{sp}}$-Mod. L'objet

$$\mathbb{R}Hom_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}},\mathrm{sp}}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}, \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_q)$$

est alors *aussi*, et ceci est remarquable, un complexe canonique dans $D_{\mathbb{Q}_q}(\boldsymbol{X})$, sa cohomologie est le candidat désigné pour la cohomologie de de Rham $p$-adique, c'est le point de départ de la nouvelle définition de la cohomologie de de Rham $p$-adique, elle prolonge fonctoriellement toutes les définitions précédentes.

Une longue étude sur ce prolongement fonctoriel a alors été développée en collaboration avec Mebkhout, jusqu'en 2007. Les opérations cohomologiques pour la cohomologie de de Rham $p$-adique pour un morphisme de variétés algébriques non singulières, étaient de lors définies *sans aucune hypothèse restrictive sur le morphisme*.

Les deux articles [AM$_1$,AM$_2$], soumis en juillet 2007, rendent compte des principaux résultats de ces recherches. Le premier (194 pages) a été publié dans les Annales de l'Institut Fourier tome 60 (2010), paru en janvier 2011. Une copie des articles est jointe à ce rapport (*cf.* aussi mes prépublications [A$_{11}$,A$_{15}$,A$_{16}$], où les ingrédients fondamentaux de la nouvelle approche font leur apparition pour la première fois dès 2004).

Parmi les retombées de ces recherches, citons les résultats suivants valables pour les variétés algébriques lisses, **affines, projectives ou non**, sur un corps de caractéristique positive :

- *L'existence d'une suite spectrale de "Čech-de Rham" reliant les cohomologies de de Rham $p$-adique locales et globale. En particulier,* **la finitude des nombres de Betti $p$-adiques locaux ([Meb]) implique aussitôt la finitude des nombres de Betti $p$-adiques globaux.**
- **Opérations cohomologiques.** *Associées aux morphismes des variétés, les images inverses et directes pour les $\mathscr{D}^{\dagger}$-modules spéciaux (cf. 1.6.7) sont définies sans restrictions sur le morphisme. Ces opérations sont à la base de la fonctorialité de la cohomologie de de Rham $p$-adique.*
- **Fonctorialité de la cohomologie $p$-adique**. *En particulier,* **l'action du Frobenius sur les groupes de cohomologie en résulte, que le Frobenius admette ou non des relèvements globaux !**
- *La suite exacte longue de Gysin pour la cohomologie de de Rham $p$-adique pour tout couple de variétés lisses.*

- **La factorisation de la fonction Zéta en termes des polynômes caractéristiques de l'action du Frobenius sur la cohomologie de de Rham $p$-adique.**

Tous ces résultats sont nouveaux, ce sont des conséquences très importantes de notre recherche, le dernier, en particulier, est un résultat test qui valide nos méthodes. Cette factorisation de la fonction Zéta n'était précédemment connue que dans le cas affine par Monsky [$\mathrm{Mo}_1$] complété par le théorème de finitude de Mebkhout [Meb], et dans le cas projectif par Berthelot à l'aide de la cohomologie cristalline [Ber].

Les travaux [$\mathrm{AM}_1$,$\mathrm{AM}_2$] contiennent beaucoup de questions ouvertes sur lesquelles on continue de travailler (*cf.* 2 Programme de Recherches).

Depuis 2008, j'ai donné des conférences sur ces sujets notamment à

- L'IMJ-Paris 7 (2008),
- Université de Séville (Espagne) "*Conference on $\mathscr{D}$-modules*" (2009),
- Luminy (France) "*Finite groups : local methods and representations*" (2009),
- Université de Strasbourg, Séminaire de géométrie arithmétique (2010),
- Université de Tufts, Medford, Mass. Etats Unis (2010),
- Université de Caen, Séminaire de Théorie des nombres (2011),

Nous avons assuré avec Mebkhout pendant plusieurs années, un cours spécialisé de M2 intitulé "*Introduction à la cohomologie de de Rham p-adique*" dans le but de faire travailler des étudiants sur ces sujets. Les étudiants disposaient alors de notes détaillées de cours que je rédigeais à leur intention (*cf.* [$\mathrm{A}_5$,$\mathrm{A}_8$,$\mathrm{A}_{15}$,$\mathrm{A}_{16}$,$\mathrm{A}_{17}$]). Parmi mes étudiants de M2, j'ai eu :

- Akila Hafian : *Théorème de comparaison entre cohomologies de de Rham analytique et algébrique d'une variété algébrique complexe non singulière*, d'après Grothendieck.
- Matthieu Rambaud : *Dégénérescence de la suite spectrale de Hodge-de Rham*, d'après Deligne-Illusie.

Comme application de cette théorie, j'ai démontré en juin 2011, un nouveau théorème de points fixes de Lefschetz pour les variétés ouvertes.

**Théorème (2.3).** *Soit $\boldsymbol{X}$ un schéma lisse séparé de type fini sur un corps fini $\boldsymbol{k}$. Soit $\theta : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ un automorphisme d'ordre fini $\ell$, relativement premier à $q := |\boldsymbol{k}|$. Alors*

$$\chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})) = \chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{X}^\theta/\boldsymbol{K})) \ .$$

*où $\boldsymbol{X}^\theta$ désigne la sous-variété des points fixes de $\boldsymbol{X}$ sous l'action de $\theta$, et où $\chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{K}))$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de la cohomologie de de Rham $p$-adique de $\boldsymbol{Y}$,* i.e. $\chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{K})) := \sum_k (-1)^k \operatorname{tr}_{\boldsymbol{K}} \left(\theta : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{K}) \to H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{K})\right)$.

———————— × ————————

Par la suite, et malgré l'abondance des questions liées à la cohomologie de de Rham $p$-adique que nous pouvions désormais aborder grâce à nos méthodes, un nombre important de difficultés à continuer dans ce secteur de recherches m'ont poussé à me diversifier. C'est ainsi que depuis 2013, je me suis intéressé aux espaces de configuration généralisés dont je viens juste de terminer l'étude importante [$\mathrm{A}_{20}$] et dont je parlerai davantage dans la section 4. Voici un résumé de ce travail

The generalized configuration spaces associated to a topological space $\boldsymbol{X}$ are the subspaces $\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m := \{(x_1,\dots,x_m)\in \boldsymbol{X}^m \mid \#\{x_1,\dots,x_m\}\leqslant \ell\}$ and $\Delta_\ell\boldsymbol{X}^m := \Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m \setminus \Delta_{\leqslant\ell-1}$. They are equipped with the action of the symmetric group $S_m$ permuting coordinates. When $\boldsymbol{X}$ has no interior cohomology (i.e. is $i$-acyclic) I was able to compute explicitly the character formula of $S_m$ acting on the cohomology of these spaces, and if $\boldsymbol{X}$ is furthermore a connected and oriented pseudomanifold of dimension $\geqslant 2$ I generalize Church's representation stability theorem to the case of the families $\{\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{X}^m\}_m$ and $\{\Delta_{\ell-a}\boldsymbol{X}^m\}_m$. I show that, for fixed $a,i\in\mathbb{N}$, the families of representations $\{S_m : H^i(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$ are monotone and stationary for $m\geqslant 4i+4a$, if $d_{\boldsymbol{X}}=2$, and for $m\geqslant 2i+4a$, if $d_{\boldsymbol{X}}\geqslant 3$. The corresponding families of characters and Betti numbers are (hence) polynomial and the families of integers $\{\mathrm{Betti}_i(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m/S_m)\}_m$ are constant within the same range of integers $m$. We further show that the family $\{\mathrm{Betti}_i(\Delta_m\boldsymbol{X}^m/S_m)\}_m$ is constant for $m\geqslant 2i$, if $d_{\boldsymbol{X}}=2$, and for $m\geqslant i$, if $d_{\boldsymbol{X}}\geqslant 3$. As a consequence, complex algebraic varieties whether they are smooth on not verify these generalizations of Church's stability theorems.

———————×———————

Voici le sommaire de ce rapport de recherches



## §1. Cohomologie $p$-adique (2002–2010)

### 1.1 Bref rappel sur les conjectures de Weil

Soit $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique définie sur un corps fini $k=\mathbb{F}_q$ et soit $\overline{\boldsymbol{X}}$ la variété algébrique définie par $\boldsymbol{X}$ sur la clôture algébrique $\bar{k}$ de $k$. Pour chaque $r\in\mathbb{N}$, on note $N_r$ le nombre de points de $\overline{\boldsymbol{X}}$ à coordonnées dans $\mathbb{F}_{q^r}\subseteq \bar{k}$. La fonction Zéta de $\boldsymbol{X}$ est définie par :

$$Z(\boldsymbol{X};t) := \exp\Big(\sum\nolimits_{r\geq 1} N_r \frac{t^r}{r}\Big).$$

Vers la fin des années 40, André Weil énonce un certain nombre de conjectures à propos de $Z(\boldsymbol{X};t)$ qu'il vérifie dans des cas particuliers. La première, la «rationalité de la fonction Zéta», affirme que :

$Z(\boldsymbol{X};t)$ est le quotient de deux polynômes à coefficients entiers

et la plus profonde : l'«analogue de l'hypothèse de Riemann», dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est non singulière, projective, de dimension $n$ sur $\mathbb{F}_q$, donne des précisions à propos de la factorisation du numérateur et du dénominateur de $Z(\boldsymbol{X};t)$. La conjecture dit qu'il est possible d'écrire

$$Z(\boldsymbol{X};t)=\frac{P_1(t)\,P_3(t)\cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\,P_2(t)\cdots\cdots\cdots P_{2n}(t)}$$

avec

$$\begin{cases} P_0(t)=1-t\,; \\ P_i(t)=\prod_j(1-\alpha_{i,j}\,t)\in\mathbb{Z}[t]\,, \quad \text{pour } 0<i<2n\,; \\ P_{2n}(t)=1-q^n\,t; \end{cases}$$

où les nombres complexes $\alpha_{i,j}$ sont des entiers algébriques et vérifient $|\alpha_{i,j}|=q^{i/2}$.

De plus, Weil indique une voie de démonstration de ses conjectures basée sur l'existence d'une théorie cohomologique à coefficients dans un corps de caractéristique nulle, dans laquelle la formule des points fixes de Lefschetz est valable. Dans ce cas, le degré du polynôme $P_i$ correspond exactement au $i$-ième nombre de Betti de $\boldsymbol{X}$ pour cette cohomologie.

Sans entrer dans les détails historiques des progrès successifs dans les démonstrations des conjectures de Weil (*cf.* [Har] p. 449), signalons que la première preuve générale de la rationalité de la fonction Zéta est due à Dwork ([Dw], 1960) par des méthodes d'analyse $p$-adique. La plupart des autres travaux sur le sujet sont plutôt centrés dans la recherche de théories cohomologiques à coefficients dans un corps de caractéristique nulle donnant des nombres de Betti tels que prédits par la conjecture. Parmi ces théories, la cohomologie $\ell$-adique ($\ell\neq p$), introduite par Grothendieck en 1958, a effectivement permis de démontrer les conjectures de Weil : la rationalité de la fonction Zéta en 1965 (Grothendieck [$G_2$]), et le reste des conjectures en 1974 (Deligne [Del]). La cohomologie de Monsky-Washnitzer introduite en 1968 à les mêmes ambitions (cette fois pour $\ell=p$) et donne une preuve de la rationalité et de la factorisation $p$-adique de la fonction Zéta d'une variété affine en 1971 (Monsky [$Mo_1$]). Mais si ce premier résultat est d'un très bon augure, la théorie demeure insuffisante pour la partie des conjectures qui concernent les variétés projectives dans la mesure où la cohomologie de Monsky-Washnitzer est définie uniquement pour certaines variétés affines. Ce qui manque c'est une définition fonctorielle d'une cohomologie de de Rham $p$-adique pour une variété non singulière (affine ou non) qui soit canoniquement isomorphe à la cohomologie de Monsky-Washnitzer dans le cas affine. On y reviendra dans 1.6.

### 1.2 Rappel sur la cohomologie de Monsky-Washnitzer des algèbres lisses

En géométrie algébrique on associe fonctoriellement à une algèbre son complexe de de Rham, mais la cohomologie de ce complexe est un module sur l'anneau de base et dans les cas des algèbres sur un corps fini, la cohomologie de de Rham est de torsion sur $\mathbb{Z}$, ce qui l'exclut de la démarche proposée par Weil. Inspirés par les travaux de Grothendieck, Monsky-Washnitzer proposent alors d'associer à une algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}$ sur $\mathbb{F}_p$ une certaine sous-algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ du complété séparé $p$-adique $\widehat{\boldsymbol{A}}$ d'une algèbre $\boldsymbol{A}$ «lisse» sur $\mathbb{Z}_p$ dont la réduction modulo $p$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{A}}$. On savait depuis Grothendieck que la classe d'isomorphie des algèbres $\widehat{\boldsymbol{A}}$ était indépendante du «relèvement» $\boldsymbol{A}$ choisi, mais la cohomologie de de Rham de $\widehat{\boldsymbol{A}}$ ne donnant pas le bons nombres de Betti même sur des exemples très simples, Monsky-Washnitzer proposent la sous-algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger \subseteq \widehat{\boldsymbol{A}}$ qui relève toujours $\overline{\boldsymbol{A}}$ et qui non seulement est dans une classe d'isomorphie indépendante du relèvement $\boldsymbol{A}$, mais qui en plus corrige le défaut des nombres de Betti. L'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ est la «complétion $p$-adique faible» de $\boldsymbol{A}$.

**1.2.1 Complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible.** Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau nœthérien et $\boldsymbol{I}$ un idéal dans $\boldsymbol{R}$. Notons $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$. Par réduction modulo $\boldsymbol{I}$, on fait correspondre à une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, la $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}} := \overline{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ et à un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$ le morphisme $\overline{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}}_1 \to \overline{\boldsymbol{A}}_2$ donné par $\overline{\alpha}(x \otimes a) := x \otimes \alpha(a)$. Un «*relèvement d'une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}$*» est alors la donnée d'un morphisme surjectif de $\boldsymbol{R}$-algèbres $p_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \to \overline{\boldsymbol{A}}$ dont la réduction $\overline{p}_{\boldsymbol{A}}$ est bijective. La notion de relèvement des morphismes de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres est analogue.

Dans [G$_1$,SGA], Grothendieck introduit la notion de «*morphisme lisse*» dans la catégorie des schémas. Version relative de la notion de variété non singulière sur un corps, c'est une propriété stable par composition et par changement de base et donne lieu, dans le cas affine, à la notion d'«algèbre lisse sur un anneau» qui remplacera dans la suite l'expression "variété affine non singulière" des sections précédentes. La réduction modulo $\boldsymbol{I}$ d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse est une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse.

Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, on note $\widehat{\boldsymbol{A}}$ l'algèbre complétée séparée de $\boldsymbol{A}$ pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique, *i.e.* $\widehat{\boldsymbol{A}} := \varprojlim_m \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^m \cdot \boldsymbol{A}$. Le corps de fractions de $\widehat{\boldsymbol{R}}$ est noté $\boldsymbol{K}$.

Dans [MW$_1$], Monsky et Washnitzer associent à une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, la sous-algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ de $\widehat{\boldsymbol{A}}$ des éléments $z$ pouvant s'exprimer comme une somme infinie :

$$z = \sum_{j \geqslant 0} p_j(x_1, \ldots, x_n) \tag{$*$}$$

où l'entier $n$ et les éléments $x_1, \ldots, x_n$ sont indépendants de $j$, et dans laquelle :

$$\begin{cases} \bullet\ x_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{A}\,; \\ \bullet\ p_j \in \boldsymbol{I}^j \cdot \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n], \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}\,; \\ \bullet\ \text{l'ensemble } \{\frac{\deg p_j}{j+1}\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ est borné.} \end{cases}$$

L'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ est «la complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible de $\boldsymbol{A}$» ([1]). De manière analogue, on fait correspondre à tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme $\alpha^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ et la correspondance $(\_)^\dagger$ est fonctorielle.

L'idée d'une cohomologie de de Rham $\boldsymbol{I}$-adique à coefficients dans $\boldsymbol{K}$ est alors la suivante. Soit $\overline{\boldsymbol{A}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse pour laquelle il existe un relèvement $\boldsymbol{A}$, lisse sur $\boldsymbol{R}$. Soit $\Omega^1_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}^\dagger}$ le module universel des différentielles relatives de $\boldsymbol{A}^\dagger$ sur $\boldsymbol{R}^\dagger$ et posons

$$\widetilde{\Omega}^1(\boldsymbol{A}^\dagger; \boldsymbol{K}) := \frac{\Omega^1_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}^\dagger}}{\overline{0}} \otimes_{\boldsymbol{R}^\dagger} \boldsymbol{K}\,,$$

[1] Dans le cas particulier où $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$, on a $\boldsymbol{R}^\dagger = \widehat{\boldsymbol{R}}$. On démontre que $(\boldsymbol{A}^\dagger)^\dagger = \boldsymbol{A}^\dagger$ et une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ est dite «faiblement complète» lorsque $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^\dagger$.

où $\bar{0}$ désigne l'adhérence de 0 pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. Le complexe de de Rham $\Omega^*(\widehat{\boldsymbol{A}};\widehat{\boldsymbol{R}})$ induit une différentielle canonique sur le module gradué

$$\widetilde{\Omega}^*(\boldsymbol{A}^\dagger;\boldsymbol{K}) := \textstyle\bigwedge_{\boldsymbol{K}}^* \widetilde{\Omega}^1(\boldsymbol{A}^\dagger;\boldsymbol{K}) \qquad (*)$$

dont la cohomologie est le candidat proposé par Monsky-Washnitzer pour la «*cohomologie de de Rham $\boldsymbol{I}$-adique de $\overline{\boldsymbol{A}}$*», notée $H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{K})$.

Ensuite, pour tout morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses $\bar{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}}_1 \to \overline{\boldsymbol{A}}_2$ pour lequel il existe des relèvements $\boldsymbol{A}_i$ lisses sur $\boldsymbol{R}$ des $\overline{\boldsymbol{A}}_i$ et un relèvement $\alpha : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$ de $\bar{\alpha}$, on fait correspondre le morphisme induit $H^*_{DR}(\alpha^\dagger) : H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}_1/\boldsymbol{K}) \to H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}_2/\boldsymbol{K})$.

On voit déjà dans cette description hâtive quelques-unes des difficultés principales des fondements de cette cohomologie liées à l'existence et à l'ambiguïté des relèvements.

R-i) Il faut que chaque algèbre lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ admette un relèvement lisse sur $\boldsymbol{R}$.

R-ii) Il faut que pour tout morphisme entre deux $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses $\bar{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}}_1 \to \overline{\boldsymbol{A}}_2$ il existe des relèvements $\boldsymbol{A}_i$ lisses sur $\boldsymbol{R}$ des $\overline{\boldsymbol{A}}_i$ et un relèvement $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ de $\bar{\alpha}$.

R-iii) Il faut que les cohomologies de de Rham $\boldsymbol{I}$-adiques définies à l'aide de deux relèvements soient canoniquement isomorphes, ou, ce qui revient au même, que le morphisme

$$H^*_{DR}(\alpha^\dagger) : H^*\big(\widetilde{\Omega}^*(\boldsymbol{A}_1^\dagger;\boldsymbol{K})\big) \to H^*\big(\widetilde{\Omega}^*(\boldsymbol{A}_2^\dagger;\boldsymbol{K})\big)$$

soit indépendant du relèvement $\alpha$ de $\bar{\alpha}$ de (R-ii).

Il s'agit là des conditions nécessaires et suffisantes pour que les cohomologies des différents complexes $\widetilde{\Omega}^*(\boldsymbol{A}_1^\dagger;\boldsymbol{K})$ déterminent un objet canoniquement associé à $\overline{\boldsymbol{A}}$, à savoir $H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{K})$, et pour que la correspondance

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{A}} \rightsquigarrow H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{K}), \\ \mathrm{Homom}_{\overline{\boldsymbol{R}}}(\overline{\boldsymbol{A}}_1, \overline{\boldsymbol{A}}_2) \ni \bar{\alpha} \rightsquigarrow H^*_{DR}(\alpha^\dagger) \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}\big(H^*_{DR}\big(\overline{\boldsymbol{A}}_1/\boldsymbol{K}\big), H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}_2/\boldsymbol{K})\big) \end{cases}$$

soit fonctorielle.

Aucune de ces trois propriétés n'est facile à vérifier.

**(R-i) et (R-ii).** A la fin des années 50, Grothendieck démontre ces propriétés pour $\boldsymbol{R}$ nœthérien et $\boldsymbol{I}$ nilpotent ([$G_1$] et [SGA] III 6.10), il prouve également que deux relèvements lisses d'une même $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse sont isomorphes bien que non canoniquement. Dans [$MW_1$], Monsky et Washnitzer remarquent que ces propriétés sont intimement liées à l'existence d'un type particulier de relèvement des $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses qu'ils qualifient des «*faiblement complets très lisses*». C'est un point que l'article [$MW_1$] ne règle pas en dehors du cas, pour l'essentiel, où $\overline{\boldsymbol{A}}$ est une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre *intersection complète lisse*, ce qui suffisait pour les applications que les auteurs avaient en vue ([2]). Une généralisation importante du résultat de Grothendieck apparaît dans la thèse de Renée Elkik (1973), où la propriété (R-i) est prouvée pour tout couple $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ nœthérien hensélien, mais la question (R-ii) n'y est pas abordée et sera prouvée ultérieurement à l'aide du théorème «d'approximation d'Artin» ([Art]), en déformant un type particulier de relèvements

[2] La rationalité de la fonction Zéta est une propriété locale et toute algèbre lisse est localement intersection complète.

introduit également par Grothendieck (*loc.cit.*) : les relèvements formels $\alpha^\infty : \boldsymbol{A}_1^\infty \to \boldsymbol{A}_2^\infty$ (*cf.* [vdP] 1986).

Au delà du cas affine, Grothendieck démontre que toute courbe lisse sur le corps résiduel $\overline{\boldsymbol{R}}$ d'un anneau nœthérien local complet $\boldsymbol{R}$, admet un relèvement en une courbe lisse sur $\boldsymbol{R}$ ([G₁]) et J.-P. Serre donne des exemples de schémas projectifs lisses sur $\mathbb{F}_p$ n'admettant pas de relèvements lisses en caractéristique nulle ([Ser]), ce qui, soit dit en passant, interdit la généralisation de la construction de Monsky-Washnitzer telle quelle au delà du cas affine.

**(R-iii).** Elle admet une réponse positive lorsque $\boldsymbol{R}$ est un anneau de valuation discrète de caractéristique nulle et que $\boldsymbol{I}$ est son idéal maximal ([3]). C'est le théorème d'homotopie de Monsky-Washnitzer ([MW₁]).

En définitive, tous les problèmes de relèvement sont réglés dans le cas d'un couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ de valuation discrète de caractéristique nulle, en particulier pour le couple $(\mathbb{Z}_p, (p))$. La construction de Monsky-Washnitzer fournit donc bien une théorie cohomologique à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ sur la catégorie des variétés algébriques ***affines*** lisses sur $\mathbb{F}_p$.

### 1.3 Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes (2001)

**1.3.1 Relèvements algébriques.** Dans [A₉] j'étudie les problèmes de relèvements évoqués dans la section précédente en eux-mêmes. J'y montre par exemple que l'utilisation du théorème d'approximation d'Artin (théorème d'existence non effectif) pour le relèvement au niveau †-adique des morphismes n'est pas nécessaire, ce qui représente une simplification considérable dans la théorie de Monsky-Washnitzer. On généralise aussi de manière uniforme les théorèmes de relèvement connus jusqu'à présent ; le cas le plus surprenant étant la propriété (R-i) qui est démontrée *sans aucune restriction* sur le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$, autrement dit :

**1.3.1-1. Théorème ([A₉]).** *Pour tout anneau $\boldsymbol{R}$, tout idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ et toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$, il existe une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{A}}$.*

Pour démontrer cette généralisation, j'utilise l'idée, sous-jacente dans la thèse de Elkik ([E]), de construire des relèvements lisses pour les $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses à l'aide de relèvements projectifs de $\overline{\boldsymbol{R}}$-modules projectifs de type fini. Or, étant donnés une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ et un $\overline{\boldsymbol{B}}$-module projectif $\overline{\boldsymbol{M}}$, le module $\overline{\boldsymbol{M}}$ n'est pas toujours la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ d'un $\boldsymbol{B}$-module projectif, cela est pourtant possible au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$ près ([4]), ce qui me suffit pour faire marcher l'idée de Elkik moyennant quelques vérifications techniques. Plus précisément, je démontre :

**1.3.1-2. Théorème ([A₉]).** *Pour tout anneau $\boldsymbol{R}$, tout idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$, toute $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{B}$ et toute présentation libre et finie d'un $\overline{\boldsymbol{B}}$- module projectif de type fini $\overline{\boldsymbol{M}}$ :*

$$\overline{\boldsymbol{B}}^p \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{B}}^q \xrightarrow{\overline{\Pi}} \overline{\boldsymbol{M}} \to \boldsymbol{0}\,, \qquad (\diamond)$$

[3] Cas particulier de couple hensélien nœthérien.

[4] On appelle « *voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$* » toute $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$, **étale** sur $\boldsymbol{B}$ et telle que la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ du morphisme structural $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ est un isomorphisme.

*il existe une $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, un $\boldsymbol{B}_\varepsilon$-module projectif de type fini $\boldsymbol{M}_\varepsilon$, et une présentation libre et finie de $\boldsymbol{M}_\varepsilon$ :*

$$\boldsymbol{B}_\varepsilon^p \xrightarrow{L} \boldsymbol{B}_\varepsilon^q \xrightarrow{\Pi} \boldsymbol{M}_\varepsilon \to \boldsymbol{0}\,,$$

*de réduction modulo $\boldsymbol{I}$ isomorphe à $(\diamond)$.*

Quant à la propriété (R-ii), elle est vraie toujours sans hypothèse supplémentaire sur le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$, mais uniquement au voisinage étale près :

**1.3.1-3. Théorème ([A$_9$]).** *Étant donnés un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, et des relèvements $p_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ et $p_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, il existe une $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ qui relève $\overline{h}$. En d'autres termes, on a un diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{A}}"'] & \boldsymbol{B}_\varepsilon \arrow[dr, two heads, "p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}"'] & \boldsymbol{B} \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{B}}"] \\
\overline{\boldsymbol{A}} \arrow[rr, "\overline{h}"] & & \overline{\boldsymbol{B}}
\end{tikzcd}$$

*où $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ désigne l'homomorphisme structural et où $p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}$ est l'homomorphisme induit par $\varepsilon$ à partir de $p_{\boldsymbol{B}}$.*

La propriété (R-iii) est prouvée dans [MW$_1$] à partir d'une propriété d'homotopie également généralisée dans [A$_9$]. On rappelle que deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ sont dits «*homotopes*» lorsqu'il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]$ tel que $u_0(a) = h(a)(0)$ et $u_1(a) = h(a)(1)$. Le théorème suivant donne une idée assez précise de l'ambiguïté des relèvements des morphismes par l'existence d'une homotopie au voisinage étale près.

**1.3.1-4. Théorème ([A$_9$]).** *Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres dont les réductions modulo $\boldsymbol{I}$ sont homotopes (par exemple égales). Il existe alors une $\boldsymbol{B}[T]$-algèbre $\boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$, intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$, de $(T)$ et de $(1-T)$ dans $\boldsymbol{B}[T]$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ tels que $p_{i,\varepsilon} \circ h = u_i$. En d'autres termes, on a un diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon \arrow[dr, two heads, "p_{0,\varepsilon}", "p_{1,\varepsilon}"'] & \boldsymbol{B}[T] \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, two heads, "p_0"', "p_1"] & T \arrow[d, mapsto, "p_0"'] & T \arrow[d, mapsto, "p_1"] \\
\boldsymbol{A} \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[rr, "u_0", "u_1"'] & & \boldsymbol{B} & 0 & 1
\end{tikzcd}$$

*où l'on note $\varepsilon : \boldsymbol{B}[T] \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ l'homomorphisme structural et $p_{0,\varepsilon}, p_{1,\varepsilon} : \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon \to \boldsymbol{B}$ les morphismes de $\boldsymbol{B}[T]$-algèbres induits par $\varepsilon$ à partir de $p_0$ et $p_1$ respectivement.*

Les deux derniers théorèmes sont en fait des corollaires d'un théorème technique général, analogue *algébrique* de la propriété par laquelle Monsky-Washnitzer définissent les *algèbres faiblement complètes très lisses*, j'y reviendrai dans 1.3.2.

**1.3.1-5. Théorème.** *Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et donnons-nous :*

- *Une paire d'homomorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{C} \overset{p}{\twoheadleftarrow} \boldsymbol{B}$, où $p$ est surjectif de noyau noté $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}$ compris).*
- *Un homomorphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\bar{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ vérifiant $\bar{\varphi} = \bar{p} \circ \bar{h}$.*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} \quad + \quad \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[dr, "\bar{\varphi}"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\bar{p}"] \\ & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd}$$

*Alors :*

a) *Pour chaque entier strictement positif $n$, il existe une* **application** $\eta_n : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *telle que :*

$$\begin{cases} \text{(i) } p_{\boldsymbol{B}} \circ \eta_n = \bar{h} \circ p_{\boldsymbol{A}}\,, \\ \text{(ii) } p \circ \eta_n = \varphi\,, \\ \text{(iii) } \nu_n \circ \eta_n \text{ est un homomorphisme de } \boldsymbol{R}\text{-algèbres.} \end{cases} \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "\exists\,\eta_n"] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{A}}"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{B}}"] \\ \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\bar{h}"] & \overline{\boldsymbol{B}} \end{tikzcd}$$

*où $\nu_n : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}/((\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K})^n$ désigne la surjection canonique.*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} \quad + \quad \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[dr, "\bar{\varphi}"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\bar{p}"] \\ & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "\exists\,\eta_n"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[r, two heads, "\nu_n"] \arrow[d, two heads, "p"] & \dfrac{\boldsymbol{B}}{((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K})^n} \arrow[dl, two heads, "p_n"] \\ & \boldsymbol{C} & \end{tikzcd}$$

*(L'homomorphisme $p_n$ est celui induit par $p$.)*

b) *Il existe un voisinage étale $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{K}$ dans $\boldsymbol{B}$, intersection complète sur $\boldsymbol{B}$, dont on note $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ l'homomorphisme structural et $p_\varepsilon : \boldsymbol{B}_\varepsilon \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}$ l'homomorphisme induit par $p$, et il existe un homomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_\varepsilon : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ tels que $\bar{h}_\varepsilon = \bar{\varepsilon} \circ \bar{h}$ et $\varphi = p_\varepsilon \circ h_\varepsilon$. En d'autres termes, on a un diagramme :*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} \quad + \quad \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[dr, "\bar{\varphi}"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\bar{p}"] \\ & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "\exists\,h_\varepsilon"] \arrow[rr, dotted, bend left, "\bar{h}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B}_\varepsilon \arrow[d, two heads, "p_\varepsilon"] & \boldsymbol{B} \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[dl, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} & \end{tikzcd}$$

**1.3.2 Relèvements faiblement complets très lisses.** Les résultats de la section précédente concernent l'aspect «algébrique» du problème des relèvements dans la mesure où les algèbres lisses sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ sont relevées en des algèbres lisses sur $\boldsymbol{R}$ donc de type fini sur $\boldsymbol{R}$. Dans la définition de la cohomologie de Monsky-Washnitzer, on doit encore appliquer le foncteur de complétion faible qui nous fera ressortir du cadre des algèbres de type fini. A ce sujet, il est important de souligner que si $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ est un voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, la complétion faible $\varepsilon^\dagger : \boldsymbol{B}^\dagger \to \boldsymbol{B}_\varepsilon^\dagger$ est un isomorphisme, ce qui permet de simplifier les résultats de la section précédente. En particulier, le théorème 1.3.1-5 s'énonce maintenant de la manière suivante.

**1.3.2-1. Proposition.** *Soient $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ trois algèbres sur $\boldsymbol{R}$ où $\boldsymbol{A}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$. Pour toute paire de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{B}^\dagger \overset{p}{\twoheadrightarrow} \boldsymbol{C} \xleftarrow{\varphi} \boldsymbol{A}^\dagger$, où $p$ est surjectif (de noyau arbitraire), et pour chaque morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\bar{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ vérifiant $\bar{\varphi} = \bar{p} \circ \bar{h}$, il existe un relèvement*

*$h:\boldsymbol{A}^\dagger\to\boldsymbol{B}^\dagger$ de $\bar h$, tel que $\varphi=p\circ h$.*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A}^\dagger \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B}^\dagger \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} + \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\bar h"] \arrow[dr, "\bar\varphi"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\bar p"] \\ & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} \boldsymbol{A}^\dagger \arrow[r, dashed, "\exists\, h"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B}^\dagger \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd}$$

Or, c'est très précisément par cette propriété de $\boldsymbol{A}^\dagger$ que Monsky-Washnitzer définissent les relèvements «faiblement complets très lisses». L'existence de tels relèvements est établie dans [$\mathrm{MW}_1$] pour une classe de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses restreinte, et l'existence en toute généralité y est énoncée de manière conjecturale. Le théorème suivant, simple paraphrase de la proposition 1.3.2-1, établit cette conjecture moyennant le théorème 1.3.1-1.

**1.3.2-2. Théorème ([$\mathbf{A_9}$]).** *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau nœthérien et $\overline{\boldsymbol{A}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse. Pour tout relèvement $\boldsymbol{A}$ lisse sur $\boldsymbol{R}$ de $\overline{\boldsymbol{A}}$, l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ est un relèvement faiblement complet très lisse de $\overline{\boldsymbol{A}}$.*

### 1.4 Critère d'affinité des schémas †-adiques (2005)

On se donne un anneau commutatif nœthérien $\boldsymbol{R}$ et un idéal $\boldsymbol{I}\subseteq\boldsymbol{R}$. On note $\overline{\boldsymbol{R}}:=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$. Pour tout schéma affine lisse $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ au-dessus de $\overline{\boldsymbol{R}}$, et toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ lisse sur $\boldsymbol{R}$, relèvement de $\overline{\boldsymbol{A}}:=\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ et de complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible notée $\mathscr{A}^\dagger$, Meredith associe un espace annelé $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{A}^\dagger})$ au-dessus du même espace topologique $\boldsymbol{X}$ (*cf.* [Mer]) que nous appelons *schéma †-adique affine-lisse*. Un *schéma †-adique lisse* est alors défini comme étant un espace annelé localement isomorphe à un *schéma †-adique affine-lisse.*

Cela dit, pour tout schéma †-adique lisse $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}^\dagger)$, soit $\overline{\mathscr{O}^\dagger}$ le faisceau sur $\boldsymbol{X}$ associé au préfaisceau qui fait correspondre à l'ouvert $U\subseteq\boldsymbol{X}$, l'algèbre $\Gamma(U;\mathscr{O}^\dagger)\otimes_{\boldsymbol{R}}\overline{\boldsymbol{R}}$. L'espace annelé $(\boldsymbol{X};\overline{\mathscr{O}^\dagger})$ est alors un schéma ; on l'appelle *réduction (modulo $\boldsymbol{I}$) de $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}^\dagger)$.*

S'il est aisé de voir que la réduction d'un schéma †-adique affine-lisse est un schéma affine lisse, la question réciproque, posée déjà par Meredith dans [Mer], est restée ouverte depuis. J'ai apporté une réponse positive à cette question, plus précisément, je démontre :

**Théorème d'affinité lisse (2.1.8 [$\mathbf{A_{15}}$])**

a) *Pour tout ouvert affine $U\subseteq\boldsymbol{X}$ d'un schéma †-adique lisse $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}^\dagger)$, le sous-espace annelé $(U;\mathscr{O}^\dagger|_U)$ est un schéma †-adique affine-lisse.*
b) *Pour tout ouvert affine $U\subseteq\boldsymbol{X}$ d'un schéma †-adique lisse $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}^\dagger)$, le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha(U):\Gamma(U;\mathscr{O}^\dagger)\to\Gamma(U;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ est un relèvement f.c.t.f. très lisse.*
c) *Un schéma †-adique lisse et de réduction affine est affine-lisse.*

### 1.5 Existence de produits fibrés dans la catégorie des schémas †-adiques (2006)

Dans [Mer] Meredith défini un schéma †-adique comme l'espace annelé obtenu par recollement de schémas †-adiques affines de type fini. Je démontre ([$\mathrm{A}_{16}$]) qu'un schéma †-adique est un espace *localement* annelé au sens de [$\mathrm{EGA}_1$]. La catégorie $\mathbf{Sch}^\dagger(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ des schémas †-adiques est alors la sous-catégorie pleine de la catégorie **Loc-ann** des espaces localement annelés (*loc.cit.*).

On note $\mathbf{Aff}^\dagger(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch}^\dagger(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ dont les objets sont les schémas †-adiques affines. Dans mon article [A$_{16}$] je réponds à un certain nombre de questions naturelles concernant ces catégories. On y démontre :

a) *La catégorie* $\mathbf{Aff}^\dagger(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *est équivalente à la catégorie* $\mathbf{Alg}^\dagger_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *des algèbres faiblement complètes de type fini. En particulier, La catégorie* $\mathbf{Aff}^\dagger(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *possède des produits fibrés.*

b) *La catégorie des schémas †-adiques localement de type fini possède des produits fibrés.*

Le passage de (a) à (b) exige de généraliser le théorème d'affinité lisse rappelé dans la section précédente au résultat plus général suivant :

**Théorème d'affinité générale (2.4.10 [A$_{16}$])** *Pour un schéma †-adique localement de type fini, il y a équivalence entre : «être de réduction affine» et «être †-adique affine de type fini.»*

Ce théorème est corollaire du théorème d'affinité lisse mais ne le redémontre pas.

**Remarque.** Les résultats de 1.4 et 1.5 sont fondamentaux dans la justification de la définition du site des relèvements affines très lisses $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ (§1.6.1) comme **généralisation ou recollement** de **tous** les schémas formels de Meredith (§1.6.4) au-dessus des ouverts affines de $\overline{\boldsymbol{X}}$.

### 1.6 Globalisation de la cohomologie de Monsky-Washnitzer (2002-2010)

Comme il a déjà été indiqué à la fin de la section 1.1, on cherchait une définition **fonctorielle** de la cohomologie de de Rham $p$-adique sur les variétés non singulières sur $\mathbb{F}_p$, **affines ou non**, redonnant la cohomologie de Monsky-Washnitzer dans le cas affine. La question se pose plus généralement sur la catégorie des schémas lisses séparés sur l'anneau $\overline{\boldsymbol{R}}$ où il est naturel de considérer le «site ($\boldsymbol{I}$-adique) infinitésimal d'un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$» que nous introduisons à continuation.

**1.6.1 La catégorie $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.** A tout schéma $\boldsymbol{X}$, séparé et lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$, de faisceau structural $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$, on associe une catégorie $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ définie comme suit :

- Un objet $\mathscr{U}$ de $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres

$$p_{\mathscr{U}} : \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger \twoheadrightarrow \Gamma(\overline{\mathscr{U}};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$$

avec :

$$\begin{cases} \overline{\mathscr{U}} & : \text{ouvert affine de } \boldsymbol{X}\,; \\ \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger & : \boldsymbol{R}\text{-algèbre faiblement complète très lisse}\,; \\ p_{\mathscr{U}} & : \text{relèvement de } \boldsymbol{R}\text{-algèbre.} \end{cases}$$

- Pour toute paire d'objets $\mathscr{V}$ et $\mathscr{U}$ de $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, telle que $\overline{\mathscr{V}}\subseteq\overline{\mathscr{U}}$, un élément $\Phi\in\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V},\mathscr{U})$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger \to \boldsymbol{A}(\mathscr{V})^\dagger$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger & \xrightarrow{\ \phi\ } & \boldsymbol{A}(\mathscr{V})^\dagger \\ {\scriptstyle p_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_V} \\ \Gamma(\overline{\mathscr{U}};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\ \rho\ } & \Gamma(\overline{\mathscr{V}};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \end{array}$$

où $\rho$ désigne le morphisme de restriction canonique, est commutatif.

- On pose : $\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V},\mathscr{U}) = \varnothing$, lorsque $\mathscr{V}$ et $\mathscr{U}$ sont tels que $\overline{\mathscr{V}} \not\subseteq \overline{\mathscr{U}}$.

**1.6.2 Topologie de Grothendieck sur $X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$.** Une « *topologie de Grothendieck* » sur une catégorie $\mathscr{C}$ avec produits fibrés est la donnée de familles de morphismes $\{\Phi_{\mathfrak{a}} : O_{\mathfrak{a}} \to O\}$, appelées « *recouvrements (de $\mathscr{C}$)* », tels que :

a) Pour tout objet $O$ de $\mathscr{C}$ et tout $\Phi \in \mathrm{Iso}_{\mathscr{C}}(O)$, $\{\Phi : O \to O\}$ est un recouvrement.
b) Pour tout recouvrement $\{\Phi_{\mathfrak{a}} : O_{\mathfrak{a}} \to O\}$ et tous recouvrements $\{\Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : O_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \to O_{\mathfrak{a}}\}$, la famille des morphismes composés $\{\Phi_{\mathfrak{a}} \circ \Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : O_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \to O\}$ est un recouvrement.
c) Pour tout recouvrement $\{\Phi_{\mathfrak{a}} : O_{\mathfrak{a}} \to O\}$ et tout morphisme $\Phi' : O' \to O$, la famille de morphismes $\{\Phi_{\mathfrak{a}} \times_O \Phi' : O_{\mathfrak{a}} \times_O O' \to O'\}$ est un recouvrement.

Dans le cas de la catégorie $X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$, on définit un « *recouvrement* » comme la donnée d'un objet $\mathscr{U}$ et d'une famille $\mathscr{R} = \{\Phi_{\mathfrak{a}} : \mathscr{U}_{\mathfrak{a}} \to \mathscr{U}\}$ de morphismes, tels que la famille $\{\overline{\mathscr{U}_{\mathfrak{a}}}\}$ des ouverts affines correspondants aux $\mathscr{U}_{\mathfrak{a}}$ est un recouvrement dans $X$ de l'ouvert $U$ correspondant à $\mathscr{U}$.

**Proposition ([A$_{11}$]).** *La catégorie $X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$, munie de ces recouvrements, est une topologie de Grothendieck.*

Le « site infinitésimal du schéma $X$ » est alors la donnée de la catégorie $X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ et de la classe de recouvrements 'affines' $\mathrm{Rec}(X^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$.

**1.6.3 Le faisceau $\mathscr{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$.** Le foncteur de la catégorie $X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ vers la catégorie des $R$-algèbres faiblement complètes très lisses, qui fait correspondre à $\mathscr{U}$ l'algèbre $A(\mathscr{U})^{\dagger}$ et à un morphisme $\Phi : \mathscr{V} \to \mathscr{U}$ le morphisme de $R$-algèbres $\phi : A(\mathscr{U})^{\dagger} \to A(\mathscr{V})^{\dagger}$ associé, définit le préfaisceau « *structural* » de $X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ noté $\mathscr{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$.

**Théorème ([A$_{11}$]).** *Le préfaisceau $\mathscr{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$ est un faisceau sur le site $X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$.*

**1.6.4 Sous-sites de Meredith.** Il convient de rappeler la notion de schéma formel faible affine introduite par Meredith ([Mer], *cf.* §3 [A$_{11}$]) et associé à un relèvement faiblement complet très lisse $A^{\dagger}$ de $\overline{A} := \Gamma(\overline{X}; \mathscr{O}_{\overline{X}})$. Il s'agit de l'espace annelé de base $\overline{X}$ (affine lisse sur $\overline{R}$) de faisceaux d'algèbres $\mathscr{O}^{\dagger}_{\overline{X}}$ engendré par le préfaisceau d'algèbres dont les sections au-dessus d'un ouvert principal $D(\overline{f})$ coïncident avec l'algèbre $((A^{\dagger})_f)^{\dagger}$. Je démontre le résultat suivant conjecturé dans [Mer]

**Proposition 3.2.16 [A$_{11}$].** *Soit $A$ une $R$-algèbre de type fini ou f.c.t.f.. Notons $\rho : \mathscr{O}^{\dagger}_{X} \to \mathscr{O}_{\overline{X}}$ le morphisme de faisceaux induit par le relèvement $\rho(\overline{X}) : A^{\dagger} \to \overline{A}$. Alors,*
a) *Le morphisme $\rho(\overline{U}) : \mathscr{O}^{\dagger}_{X}(\overline{U}) \to \mathscr{O}_{\overline{X}}(\overline{U})$ est un relèvement quel que soit $\overline{U} \subseteq \overline{X}$.*
*De plus, si $A^{\dagger}$ est très lisse et $\overline{U} \subseteq \overline{X}$ est un ouvert **affine**, on a :*
b) *$\mathscr{O}^{\dagger}_{X}(\overline{U})$ est f.c.t.f. très lisse.*
c) *L'espace annelé $(\overline{U}; \mathscr{O}^{\dagger}_{X}|_{\overline{U}})$ est canoniquement isomorphe au schéma de Meredith associé à l'algèbre $\mathscr{O}^{\dagger}_{X}(\overline{U})$.*

Ainsi, pour chaque $\mathscr{U} \in X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ on va considérer le schéma de Meredith $(\overline{\mathscr{U}}; \mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{U}})$ associé au relèvement très lisse $p_{\mathscr{U}} : A(\mathscr{U}) \to \mathscr{O}_{\overline{X}}(\overline{\mathscr{U}})$. On sait (maintenant) que les sections de $\mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{U}}$ au-dessus des ouverts affines de $\overline{V} \subseteq \overline{U}$ appartiennent naturellement à $X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ et chaque morphisme de restriction $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}(\overline{V}_1) \to \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}(\overline{V}_2)$ est un morphisme de $\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$. Il s'ensuit que chaque objet $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$ 'détecte' un sous-site de $\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$ noté $\mathscr{M}er(\mathscr{U})$ appelé sous-site de Meredith engendré par $\mathscr{U}$. Les deux observations suivantes sont utiles

- La catégorie des faisceaux sur $\mathscr{M}er(\mathscr{U})$ est équivalente à la catégorie des faisceaux sur $\overline{\mathscr{U}}$.
- Le site annelé $(\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf};\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}})$ est le recollement de ses sous-sites de Meredith.

**Commentaire.** D'un point de vue heuristique, on cherche à remplacer le schéma $(\boldsymbol{X},\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ défini sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ par le site annelé $(\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf},\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}})$ de tous les relèvements faiblement complets très lisses des ouverts affines de $\boldsymbol{X}$ sur lesquels la cohomologie de Monsky-Washnitzer est bien définie. Le problème de la globalisation se traduit alors dans la recherche d'un faisceau de complexes de de Rham sur le site recollant en catégorie dérivée les complexes de Monsky-Washnitzer sur chaque relèvement faiblement complet des ouverts affines de $\boldsymbol{X}$, *i.e.* sur chaque 'ouvert affine' du site $\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$.

**1.6.5 Catégorie des faisceaux sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$.** Une partie importante de [$\mathrm{A}_{11}$] concerne l'étude de différentes catégories de faisceaux sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$, notamment celles des faisceaux de groupes abéliens, celle de faisceaux d'algèbres $\mathscr{A}$ sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$ et celle des faisceaux $\mathscr{A}$-modules (à gauche) sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$. La section **4** de [$\mathrm{A}_{11}$] donne des équivalences de catégories qui ramènent chacune de ces catégories à certaines catégories de faisceaux sur $\overline{\boldsymbol{X}}$. Ces études ont relevé l'intérêt d'un faisceaux de groupes particulier, celui des automorphismes «†-*adiques*». Ce faisceaux est défini aussi bien sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$ que sur chaque $\overline{\mathscr{U}}$ pour $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$, noté respectivement $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}$ et $\mathscr{G}^\dagger_{\overline{\mathscr{U}}}$, on a des isomorphismes canoniques :

$$\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}(\mathscr{U}) \simeq \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{U}) \qquad \Gamma(\overline{V};\mathscr{G}^\dagger_{\overline{\mathscr{U}}}) \simeq \boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}(\overline{V}))$$

pour tout ouvert affine $\overline{V}$ et où $\boldsymbol{G}^\dagger$ dénote le groupe des automorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbre dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est l'identité. On note $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{M}er(\mathscr{U})}$ la restriction de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}$ à $\mathscr{M}er(\mathscr{U})$. La propriété fondamentale de ces faisceaux de groupes est que la restriction d'un faisceau $\mathscr{F}$ de $\mathbb{Z}$-modules sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$ au sous-site de Meredith $\mathscr{M}er(\mathscr{U})$ est munie d'une structure canonique de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{M}er(\mathscr{U})}$-module, on démontre alors :

**Théorème 4.2.3 [$\mathbf{A_{11}}$].** *Soient $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma affine lisse, $\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$ son site de relèvements affines très lisses et $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$ tel que $\overline{\mathscr{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$. Le foncteur*

$$\mathscr{R}_{\mathscr{U}} : \mathrm{Mod}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{G}^\dagger)$$

*où $\mathrm{Mod}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathbb{Z})$ désigne la catégorie des faisceaux de $\mathbb{Z}$-modules sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$ et $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{G}^\dagger)$ celle des faisceaux de $\mathscr{G}^\dagger$-modules sur $\overline{\boldsymbol{X}}$, qui fait correspondre à un faisceau $\mathscr{F}$ sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$ le $\mathscr{G}^\dagger_{\overline{\mathscr{U}}}$-module sur $\overline{\mathscr{U}}$ associé à la restriction de $\mathscr{F}$ au sous-site de Meredith $\mathscr{M}er(\mathscr{U})$ munie de l'action canonique de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{M}er(\mathscr{U})}$, est une équivalence de catégories.*

*En particulier, on a un isomorphisme canonique de foncteurs :*

$$\mathbb{R}\Gamma(\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf};\_) \equiv \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}}(\mathbb{Z}_{\overline{\mathscr{U}}};\mathscr{R}_{\mathscr{U}}(\_)) \qquad (\diamond)$$

Ce type d'équivalence de catégorie est plus généralement vérifié sur la catégorie $\mathrm{Mod}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{A})$ de faisceaux de $\mathscr{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$ où $\mathscr{A}$ est un faisceau d'algèbres sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\rm inf}$. Dans ces cas, la restriction d'un faisceau de $\mathscr{A}$-module à $\mathscr{Mer}(\mathscr{U})$ est munie d'une structure de $\mathscr{A}|_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})} \rtimes \mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}|_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}$-modules (pour l'action canonique de $\mathscr{G}^\dagger$ sur $\mathscr{A}$) et l'analogue du théorème **4.2.3** est le suivant.

**Théorème 4.4.3 [$\mathbf{A_{11}}$].** *Soient* $(\overline{\boldsymbol{X}}; \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ *un schéma* ***affine*** *lisse,* $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *son site de relèvements affines très lisses et* $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *tel que* $\overline{\mathscr{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$. *Le foncteur :*

$$\mathscr{R}_{\mathscr{U}} : \mathrm{Mod}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}\big(\mathscr{R}_{\mathscr{U}}(\mathscr{A}) \rtimes \mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}\big)$$

*est une équivalence de catégories.*

**1.6.6 Faisceau d'opérateurs différentiels †-adiques.** La section **5** de [$\mathrm{A}_{11}$] est dédiée au faisceau des opérateurs différentiels †-adiques sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, noté $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}$, qui fait correspondre à $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, l'algèbre des opérateurs différentiels †-adiques $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}$ introduite par Mebkhout-Narvaez dans [M-N$_1$,M-N$_2$]. On a un isomorphisme canonique (*loc.cit.*) :

$$\boxed{\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}}(\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}, \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes \mathbb{Q}_p) \equiv H^*_{\mathrm{DR}}(\overline{\mathscr{U}}/\mathbb{Q}_p)} \qquad (\diamond\diamond)$$

où le terme de droite est la cohomologie de Monsky-Washnitzer.

– ***Le faisceau*** $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}$ ***contient de façon tout à fait remarquable le faisceau*** $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}$***.***

**1.6.7 La catégorie des modules «*spéciaux*» $\mathbf{Mod}^\dagger(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$.** Soit $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Par l'inclusion $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}} \subseteq \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}$, on munit un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}$-module d'une structure de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}$-module et donc aussi de $\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}} \rtimes \mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}\big)$-module. La catégorie $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}})$ s'identifie de cette manière à une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}} \rtimes \mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})$, ce qui sera noté dans la suite par l'inclusion $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}) \subseteq \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}} \rtimes \mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})$. Notons maintenant $\mathrm{Mod}^\dagger(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$ des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}$-modules $\mathscr{M}$, dits «*spéciaux*», tels que pour chaque $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ l'action de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}(\mathscr{U})$ sur $\mathscr{M}(\mathscr{U})$ ($\mathscr{M}$ est un préfaisceau sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$) coïncide avec l'action induite par l'action de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(\mathscr{U})$ sur $\mathscr{M}(\mathscr{U})$ ($\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}(\mathscr{U}) \subseteq \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(\mathscr{U})$). Il est clair que le noyau et conoyau d'un morphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}$-modules de $\mathrm{Mod}^\dagger(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$ appartiennent encore à cette catégorie qui est donc une sous-catégorie abélienne de $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$.

**1.6.7-1. Remarque.** On a $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}} \in \mathrm{Mod}^\dagger(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$ mais $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}} \notin \mathrm{Mod}^\dagger(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$.

**1.6.7-2. Théorème 5.5.3 [$\mathbf{A_{11}}$].** *Soit* $(\overline{\boldsymbol{X}}; \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ *un schéma lisse et séparé sur* $\overline{\boldsymbol{R}}$ *de site de relèvements affines très lisses* $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *et soit* $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

a) *La restriction* $\mathscr{Res}'_{\mathscr{U}}$ *du foncteur* $\mathscr{Res}_{\mathscr{U}} : \mathrm{Mod}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}} \rtimes \mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})$ *à la sous-catégorie* $\mathrm{Mod}^\dagger(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$ *est à valeurs dans* $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}})$ *et le foncteur*

$$\mathscr{Res}'_{\mathscr{U}} : \mathrm{Mod}^\dagger(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}) \qquad (\diamond *)$$

*est exact et admet un adjoint à droite.*

b) *Lorsque* $\overline{\boldsymbol{X}}$ *est affine et* $\overline{\mathscr{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$, *le foncteur* $(\diamond *)$ *est une équivalence de catégories.*

c) *La catégorie* $\mathrm{Mod}^\dagger(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$ *est abélienne et possède suffisamment d'objets injectifs.*

**1.6.8 Cohomologie de de Rham †-adique.** Inspirés des résultats des prépublications [$A_{11}$,$A_{15}$,$A_{16}$], les articles [$AM_1$,$AM_2$], en collaboration avec Mebkhout, sont le fruit de plusieurs années de travail autour de la recherche d'un prolongement (fonctoriel !) de la cohomologie de de Rham $p$-adique de Monsky-Washnitzer définie sur la catégorie schémas **affines** lisses sur un corps fini de caractéristique $p$, vers la catégorie de **tous** les schémas lisses (sur le même corps). Nous définissons la cohomologie de de Rham †-adique par la même égalité (1.6.6-($\diamond\diamond$)) du cas affine, *i.e.*

$$\boxed{\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{D}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_p) =: H^*_{\mathrm{DR}}(\overline{\boldsymbol{X}}/\mathbb{Q}_p)}$$

mais où le foncteur dérivé est à calculer dans la catégorie $\mathrm{Mod}^\dagger(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$ (*cf.* 1.6.7).

Nos articles [$AM_1$,$AM_2$] (resp. 194 et 80 pages) donnent les fondements de cette nouvelle théorie. On y établit pour les variétés algébriques non singulières, **affines, projectives ou non**, sur un corps de caractéristique positive,

- L'existence d'une suite spectrale de "Čech-de Rham" reliant les cohomologies de de Rham $p$-adique locales et globale. En particulier, **la finitude des nombres de Betti $p$-adiques locaux** ([Meb]) **implique aussitôt la finitude des nombres de Betti $p$-adiques globaux.**
- **Opérations cohomologiques.** Associées aux morphismes des variétés, on définit les images inverses et directes pour les $\mathscr{D}^\dagger$-modules spéciaux (*cf.* 1.6.7), ces opérations sont à la base de la fonctorialité de la cohomologie de de Rham $p$-adique.
- **Fonctorialité de la cohomologie $p$-adique**. En particulier, **l'action du Frobenius sur les groupes de cohomologie en résulte, que le Frobenius admette ou non des relèvements globaux !**
- La suite exacte longue de Gysin pour la cohomologie de de Rham $p$-adique pour tout couple de variétés.
- **La factorisation de la fonction Zéta en termes des polynômes caractéristiques de l'action du Frobenius sur la cohomologie de de Rham $p$-adique.**

Tous ces résultats sont nouveaux, ce sont des conséquences très importantes de notre travail, le dernier en particulier, est un résultat test qui valide nos méthodes. Cette factorisation de la fonction Zéta n'était précédemment connue que dans le cas affine par Monsky [$Mo_1$] complété par le théorème de finitude de Mebkhout [Meb], et dans le cas projectif par Berthelot à l'aide de la cohomologie cristalline [Ber].

Nos articles ont été soumis pour publication en juillet 2007, le premier, [$AM_1$], vient d'être accepté et paraîtra dans le volume **60** des Annales de l'Institut Fourier (2010).

En 2009-10, j'ai fait plusieurs exposés sur ces sujets dont trois internationaux. A savoir

- **Séville (Espagne).** "*Conference on $\mathscr{D}$-modules in Honor of Zoghman's Mebkhout*",
- **Luminy (France).** "*Finite groups : local methods and representations*".
- **Tufts University (Medford, MA, USA).** "*Weil conjectures and p-adic cohomology*".
- **Université de Caen (France).** "*Topos infinitésimal p-adique*".
- **Université de Strasbourg (France).** "*Topos infinitésimal p-adique*".

## § 2. Quelques développements en cohomologie $p$-adique (2010–2013)

Je décris maintenant trois autres thèmes de recherche liés à la cohomologie de de Rham $p$-adique.

### 2.1 Vers une définition topologique de la cohomologie $p$-adique

Reprenons l'égalité de 1.6.6 :

$$H^*_{\mathrm{DR}}(\overline{\mathscr{U}}/\mathbb{Q}_p) = \mathrm{Ext}^*_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}}(\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}, \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes \mathbb{Q}_p)\,, \tag{$\diamond\diamond$}$$

concernant un schéma †-adique affine $\mathscr{U}$.

Comme le noyau de la surjection $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}} \mathscr{O}^\dagger_U \to \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}$, $P \otimes f \mapsto P(f)$, est de $p$-torsion, on a aussi

$$H^*_{\mathrm{DR}}(\overline{\mathscr{U}}/\mathbb{Q}_p) = \mathrm{Ext}^*_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}} \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}, \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes \mathbb{Q}_p)$$

et l'on a donc un morphisme naturel entre la cohomologie de de Rham †-adique de $\overline{\mathscr{U}}$ et la cohomologie de faisceau du faisceau structural $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}^\dagger}$ sur $\boldsymbol{U}^\dagger_{\mathrm{inf}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\mathrm{Hom}^*_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}} \underline{\boldsymbol{R}}, \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes \mathbb{Q}_p) \xrightarrow[*]{} & \mathbb{R}\mathrm{Hom}^*_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}} \underline{\mathbb{Z}}_p, \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes \mathbb{Q}_p) \\ &= \mathbb{R}\mathrm{Hom}^*_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}}(\underline{\mathbb{Z}}_p, \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes \mathbb{Q}_p) \\ &= \mathbb{R}\Gamma(\boldsymbol{U}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{U}^\dagger_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_p) \end{aligned}$$

Dans le cas d'un schéma général $\overline{\boldsymbol{X}}$, les morphismes précédents se recollent pour donner lieu à un morphisme canonique

$$\boxed{H^*_{\mathrm{DR}}(\overline{\boldsymbol{X}}/\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{R}\Gamma(\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_p)}$$

qui n'est pas sans rappeler le morphisme analogue introduit et étudié par Grothendieck dans [$\mathrm{G}_3$] pour la cohomologie infinitésimale où il démontre qu'il s'agit en fait d'un **isomorphisme**.

Dans notre contexte du site des relèvements plats d'un schéma lisse, nous avons longtemps pensé qu'il devait en être autant, mais nous avons fini par trouver un contrexemple montrant que ce morphisme n'est déjà pas bijectif pour la droite affine $\overline{\boldsymbol{X}} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$. Or, dans ce cas, la cohomologie de de Rham $p$-adique est triviale et notre recherche de contrexemple a consisté à exhiber un 1-cocycle non trivial de la cohomologie de faisceaux de $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}$. L'équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et la catégorie des $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}$-modules pour un relèvement †-adique plat $\mathscr{X}$ de $\overline{\boldsymbol{X}}$, réalise le dit cocycle comme une dérivation de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}$ à valeurs dans $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}$, mais cette dérivation **n'est pas continue** pour la topologie $p$-adique lorsque $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}$ est muni de la topologie induite par la topologie de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}$. Cette observation, clef pour la suite, nous a amené à nous intéresser à la catégorie des faisceaux des $\mathbb{Z}_p[\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}]$-modules munis d'une topologie homogène, filtrés donc, telle que l'action de $\mathbb{Z}_p[\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}]$ est continue. La catégorie de tels modules, dont les morphismes sont les morphismes de $\mathbb{Z}_p[\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}]$-modules **continus**, notée $\mathrm{Mod}_\infty(\mathbb{Z}_p[\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}])$, n'est pas abélienne mais elle est **exacte** de sorte que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}},\infty}(\_, \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}} \otimes \mathbb{Q}_p)$ induit bien un foncteur en catégorie dérivée que nous notons

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}},\infty}(\_,\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}\otimes\mathbb{Q}_p)\,.$$

Le foncteur «*oubli de la topologie*» induit un morphisme $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}},\infty}(\_,\_)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}}(\_,\_)$ qui passe en catégorie dérivée

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}},\infty}(\_,\_)\longrightarrow\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}}(\_,\_)\,.$$

Cela étant, nous pouvons procéder de manière analogue dans la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}$-modules et considérer la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}$-modules filtrés, notée $\mathrm{Mod}_\infty(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$, et les mêmes remarques que précédemment conduisent à l'existence d'un morphisme canonique de bifoncteurs

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}},\infty}(\_,\_)\longrightarrow\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}}(\_,\_)\,.$$

d'où le diagramme commutatif de foncteurs sur $\mathrm{Mod}_\infty(\mathbb{Z}_p[\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}])$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}},\infty}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}\otimes_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}}(_),\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}) & \xrightarrow{\ \Xi_\infty\ } & \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}},\infty}\big((_),\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}\big)\\
\downarrow & & \downarrow\\
\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}\otimes_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}}(_),\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}) & \xrightarrow{\ \Xi\ } & \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}}\big((_),\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}\big)
\end{array}\qquad(\mathbb{D})$$

Or, on peut démontrer que le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}},\infty}(M,\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}\otimes\mathbb{Q}_p)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}}(M,\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}\otimes\mathbb{Q}_p)\,,$$

est en fait un **isomorphisme** lorsque $M$ est muni de la topologie $p$-adique **et est de type fini en tant que $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}$-module**. Or, $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}$ admet justement une présentation par des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}$-modules libres de type fini, présentation qui plus est, est une présentation dans la catégorie $\mathrm{Mod}_\infty(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$. La flèche de gauche dans le dernier diagramme ($\mathbb{D}$) et donc ***bijective***.

Le résultat fondamental de cette étude est alors le suivant

**Théorème.** *Le morphisme canonique de foncteurs sur* $\mathrm{Mod}_{\infty,\mathrm{t.f.}}(\mathbb{Z}_p[\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}])$

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}},\infty}\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}\otimes_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}}(\_),\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}\otimes\mathbb{Q}_p\big)\longrightarrow\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}},\infty}\big((\_),\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}\otimes\mathbb{Q}_p\big)$$

*est un* ***isomorphisme***. *On a donc des isomorphismes canoniques*

$$\boxed{H^n_{\mathrm{DR}}(\overline{\boldsymbol{X}}/\mathbb{Q}_p)\simeq H^n_\infty\big(\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}\otimes\mathbb{Q}_p\big)\,,\quad \textit{pour tout } n\in\mathbb{N}.}$$

où nous avons noté $H^*_\infty\big(\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}},\_\big)$ la cohomologie de faisceaux de la catégorie des faisceaux de $\mathbb{Z}_p$-modules sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ munis d'une filtration et d'une action de $\mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ continue, ce que nous appelons «*la catégorie des faisceaux lisses sur* $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$».

Le dernier théorème est très satisfaisant du point de vue théorique, d'une part puisqu'il renforce l'analogie avec la construction originale de site infinitésimal de Grothendieck, et d'autre part parce qu'il donne une définition de la cohomologie $p$-adique indépendante de la théorie des

$\mathscr{D}^\dagger$-modules suggérant une voie topologique de justification de la fonctorialité de la cohomologie $p$-adique.

## 2.2 L'hypercohomologie (continue) du complexe de de Rham sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathbf{inf}}$

Dans son célèbre article [G3], Grothendieck fait une analyse critique des différents candidats pour la cohomologie $p$-adique qui s'expriment dans les notations de notre travail [AM1] par

$$H^n_{\mathrm{DR}}(\overline{\boldsymbol{X}}/\mathbb{Q}_p) \stackrel{?}{=} \begin{cases} H^n\big(\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_p\big), \\ \mathbb{H}^n(\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_p) \end{cases}$$

Nous avons montré que le premier ne donne pas les bons nombres de Betti déjà pour la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$, mais le second est toujours une question ouverte qui mérite notre attention.

La question semble liée à l'acyclicité du faisceau constant $\mathbb{Q}_{p,\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$. Bien sûr, ce faisceau est flasque, mais cela ne suffit pas a établir son acyclicité puisque le site infinitésimal $p$-adique n'a pas d'objet final, ce qui rend la question encore plus intéressante. Dans le cas d'un schéma $\overline{\boldsymbol{X}}$ admettant un relèvement global $\mathscr{X}^\dagger$, nous avons par équivalence de catégories, platitude de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}$ sur $\underline{\mathbb{Z}}_{p,\mathscr{X}^\dagger}$ et le théorème de la section précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_\infty(\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_p) &= \mathbb{R}\mathrm{Hom}_\infty(\underline{\mathbb{Z}}_{p,\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_p) \\ &= \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger},\infty}(\underline{\mathbb{Z}}_p, \underline{\Omega}^*_{\mathscr{X}^\dagger} \otimes \mathbb{Q}_p) \\ &= \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger,\infty}\big(\underline{\mathbb{Z}}_p, \mathbb{R}\mathscr{H}\!\mathit{om}_{\mathscr{G}^\dagger,\infty}(\underline{\mathbb{Z}}_p, \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger} \otimes \mathbb{Q}_p)\big) \\ &= \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger,\infty}\big(\underline{\mathbb{Z}}_p \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathscr{G}_{\mathscr{X}^\dagger}} \underline{\mathbb{Z}}_p, \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger} \otimes \mathbb{Q}_p\big)\end{aligned}$$

Ce qui nous amène à nous interroger sur le morphisme

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger,\infty}\big(\underline{\mathbb{Z}}_p, \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger} \otimes \mathbb{Q}_p\big) \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger,\infty}\big(\underline{\mathbb{Z}}_p \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathscr{G}_{\mathscr{X}^\dagger}} \underline{\mathbb{Z}}_p, \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger} \otimes \mathbb{Q}_p\big)\,, \tag{$\diamond$}$$

induit par le morphisme canonique

$$\underline{\mathbb{Z}}_p \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathscr{G}_{\mathscr{X}^\dagger}} \underline{\mathbb{Z}}_p \to \underline{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathscr{G}_{\mathscr{X}^\dagger}} \underline{\mathbb{Z}}_p = \underline{\mathbb{Z}}_p\,,$$

et où le terme de gauche calcule $H_{\mathrm{DR}}(\overline{\boldsymbol{X}}/\mathbb{Q}_p)$ d'après la section précédente. On voit maintenant clairement qu'une condition suffisante pour que $(\diamond)$ soit un quasi-isomorphisme est

$$\underline{\mathbb{Q}}_p \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathscr{G}^\dagger} \underline{\mathbb{Q}}_p \cong \underline{\mathbb{Q}}_p\,. \tag{$\diamond\diamond$}$$

On en déduirait aussitôt

$$H_\infty\big(\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \underline{\mathbb{Q}}_{p,\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}\big) = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger,\infty}(\underline{\mathbb{Z}}_p, \underline{\mathbb{Q}}_p) \cong \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\underline{\mathbb{Q}}_p \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathscr{G}^\dagger} \underline{\mathbb{Q}}_p, \underline{\mathbb{Q}}_p) \cong \mathbb{R}\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}}, \underline{\mathbb{Q}}_p)\,,$$

impliquant l'acyclicité de $\underline{\mathbb{Q}}_{p,\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ dans la catégorie des faisceaux lisses sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

**Conjecture.** Ces observations, et d'autres, nous incitent à conjecturer $(\diamond\diamond)$. Cela revient dans le cas de la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ à monter que le groupe associé $\boldsymbol{G}^\dagger$, des automorphismes de $\mathbb{Z}_p[X]^\dagger$ dont la réduction modulo $p$ est l'identité, est rationnellement acyclique, *i.e.* $H_i(\boldsymbol{G}^\dagger, \mathbb{Q}) = 0$ pour tout $i > 0$. Nous avons passé un certain temps sur cette question, suffisamment en tout cas pour comprendre qu'elle est hautement non triviale. Nous avons réussi à montrer que $\mathscr{T}\!\mathit{or}_1^{\mathscr{G}^\dagger}(\underline{\mathbb{Q}}_p, \underline{\mathbb{Q}}_p) = 0$, mais nous ne savons rien dire pour l'instant en degrés supérieurs et nous n'avons rien trouvé dans la littérature concernant l'acyclicité des groupes $\boldsymbol{G}^{\dagger}$. Il est certain que si cette conjecture s'avérait juste, elle produirait beaucoup de groupes acycliques inconnus jusqu'alors.

**2.2.1 Cohomologie $p$-adique et cohomologies de Weil.** Rappelons brièvement (cf. [Kle]) qu'étant donné un corps de caractéristique nulle $\boldsymbol{K}$ appelé «*corps des coefficients*», un foncteur contravariant $\boldsymbol{X} \rightsquigarrow H^*(\boldsymbol{X})$ de la catégorie des variétés algébriques non singulières sur un corps fini $k$ vers la catégorie des $\boldsymbol{K}$-algèbres graduées anticommutatives **et de dimension finie**, est dit «*cohomologie de Weil*» lorsqu'il satisfait les trois propriétés suivantes :

W-i) **Dualité de Poincaré.** Soit $\boldsymbol{X}$ irréductible, propre sur $k$, de dimension $n$. Alors
 a) Les groupes $H^i(\boldsymbol{X})$ sont nuls pour tout $i \notin [0, 2n]$.
 b) Il existe un isomorphisme canonique d'«*orientation*» $H^{2n}(\boldsymbol{X}) \cong \boldsymbol{K}$.
 c) L'accouplement $H^i(\boldsymbol{X}) \times H^{2n-i}(\boldsymbol{X}) \to H^{2n}(\boldsymbol{X})$ est parfait.

W-ii) **Formule de Künneth.** Soient $p : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ et $q : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ les projections. Alors, le morphisme canonique $(\alpha \otimes \beta) \mapsto p^*\alpha \wedge q^*\beta$ induit un isomorphisme

$$H^*(\boldsymbol{X}) \otimes_{\boldsymbol{K}} H^*(\boldsymbol{Y}) \to H^*(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y})$$

W-iii) **Le morphisme «*cycles*».** Il existe un morphisme de groupes abéliens

$$\gamma_{\boldsymbol{X}} : C^m(\boldsymbol{X}) \to H^{2m}(\boldsymbol{X}) \,,$$

 où $C^m(\boldsymbol{X})$ désigne le groupe des $m$-cycles algébriques de $\boldsymbol{X}$, vérifiant
 a) (fonctorialité) – Si $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est un morphisme, alors $f^* \circ \gamma_{\boldsymbol{Y}} = \gamma_{\boldsymbol{X}} \circ f^*$
 b) (multiplicativité) – $\gamma_{\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}}(A \times B) = \gamma_{\boldsymbol{X}}(A) \otimes \gamma_{\boldsymbol{Y}}(B)$
 c) (non trivialité) – Si $P$ est un point, alors $\gamma_P : C^*(P) = \mathbb{Z} \to H^*(P) = \boldsymbol{K}$ est l'inclusion canonique.

Dans notre article [AM$_1$], nous avons bien démontré la fonctorialité et la finitude de la cohomologie de de Rham $p$-adique et nous avons également introduit l'essentiel des éléments des conditions W-(i,ii,iii) et même démontré un certain nombre de ces propriétés dans les sections **14** et **15** dont les titres évoquent bien de ces thèmes, à savoir :

- **14.** La suite exacte de Gysin en cohomologie de de Rham $p$-adique et la classe de cohomologie d'un cycle.
- **14.1** La compatibilité des foncteurs images directes topologique et différentielle
- **14.2** La suite exacte de Gysin en cohomologie de de Rham $p$-adique
- **14.3** La classe de cohomologie d'un cycle
- **15.** Le lemme de Poincaré et la formule de Künneth pour l'espace affine

Peu de propriétés restent aujourd'hui à établir pour montrer que notre définition de cohomologie $p$-adique fournit une cohomologie de Weil. Rappelons qu'alors, d'après l'article de Katz-Messing [KM], les polynômes caractéristiques de l'action du Frobenius sur les groupes de cohomologie d'une variété propre seront indépendants de la cohomologie de Weil considérée et seront, par conséquent, les mêmes que ceux obtenus en cohomologie étale !

L'aboutissement de cette recherche est aujourd'hui essentiellement une question de temps mais aussi de moyens car nous manquons cruellement d'étudiants de qualité que nous pourrions faire travailler sur le sujet.

### 2.3 Formule des points fixes de Lefschetz pour les variétés algébriques non singulières sur un corps de caractéristique positive, propres ou non

Le théorème suivant est nouveau dans la famille de théorèmes de points fixes de Lefschetz, non seulement parce qu'il concerne la cohomologie de de Rham $p$-adique, mais aussi parce qu'il s'applique à des variétés non projectives. La compacité, une propriété généralement indispensable dans les théorèmes de points fixes de Lefschetz, se trouve ici remplacée par l'hypothèse sur le morphisme $\theta$, supposé être un automorphisme d'ordre fini $\ell$. Dans le cas d'une variété différentielle de dimension $n$, sans point fixe, la proposition résulte immédiatement du fait que toute orbite admet une base de voisinages difféomorphes à la réunion disjointe de $\ell$ copies de $\mathbb{R}^n$. Dans le cas algébrique complexe on peut se ramener au contexte analytique et donc différentiable à l'aide du théorème de comparaison de Grothendieck, mais dans le cas des variétés non singulières sur un corps de caractéristique positive, ces approches ne sont pas envisageables.

Dans [$\mathrm{A}_{19}$], je démontre le résultat suivant à l'aide des techniques de [$\mathrm{AM}_1$].

**Théorème.** *Soit $\boldsymbol{X}$ un schéma lisse séparé de type fini sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. Soit $\theta : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ un automorphisme d'ordre fini $\ell$, relativement premier à $q$. Alors*

$$\chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{X}/\mathbb{Q}_q)) = \chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{X}^\theta/\mathbb{Q}_q)) \ .$$

*où $\boldsymbol{X}^\theta$ désigne la sous-variété des points fixes de $\boldsymbol{X}$ sous l'action de $\theta$, et où $\chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{Y}/\mathbb{Q}_q))$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de la cohomologiede de Rham $p$-adique de $\boldsymbol{Y}$,* i.e. $\chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{Y}/\mathbb{Q}_q)) := \sum_k (-1)^k \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_q}\big(\theta : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{Y}/\mathbb{Q}_q) \to H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{Y}/\mathbb{Q}_q)\big)$.

## § 3. Autres thèmes de recherche depuis 2009

### 3.1 Equivariant Poincaré Duality and Equivariant Gysin Morphism (2009)

The aim of [$\mathrm{A}_{18}$] is the generalization of the Gysin morphism $f_\sharp$ associated to a map between oriented manifolds $f\colon \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$, from the nonequivariant to the equivariant framework. In order to motivate definitions, I begin recalling the classical formalism based on Poincaré duality, outlining the steps to follow in the equivariant setting. There are several advantages in my approach. First, while Gysin morphism is often explicitly defined only for projections $p\colon \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ and closed embeddings $i\colon \boldsymbol{M} \hookrightarrow \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}$, and then extended to any map $f$ using the factorization trick throw the graph, $f = p \circ \mathrm{Gr}(f)$, and therefore setting $f_\sharp := p_\sharp \circ \mathrm{Gr}(f)_\sharp$, procedure that doesn't give any evidence for the functorial equality : $(f \circ g)_\sharp = f_\sharp \circ g_\sharp$ $(\diamond)$, that one has to prove *a* posteriori, instead, my definition of the Gysin morphism makes no distinction on the nature of $f$ and $(\diamond)$ will be tautological. Another bonus of my approach is its ability to extend known properties of the classical case to the equivariant case without additional difficulties. Finally, I introduce the equivariant analog of classical Poincaré duality, i.e. the existence of a canonical spectral sequence

$$\mathbf{Ext}_{H_{\boldsymbol{G}}}(H_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}), H_{\boldsymbol{G}}) \Rightarrow H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})[d_{\boldsymbol{M}}] \,,$$

following the ideas of J.-L. Brylinski for pseudovarieties in [Br] and generally omitted in books on equivariant cohomology despite its theoretical interest.

### 3.2 Scindage de complexes en catégorie dérivée

**3.2.1** Soient $R$ un anneau commutatif gradué, $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ la catégorie des $R$-modules différentiels gradués (*R-mdg* en bref), $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ la catégorie obtenue de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ en identifiant les morphismes $R$-homotopes, et $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ obtenue de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ en inversant ses quasi-isomorphismes. On définit la structure triangulée de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et de $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, et l'on étudie le problème du scindage des $R$-modules différentiels gradués, plus précisément, l'existence d'un isomorphisme dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, entre un *R-mdg* $(M, d_M)$ et sa cohomologie : le *R-mdg* $(\mathcal{H}(M, d_M), 0)$.

Comme la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ est abélienne, on dispose aussi des catégories triangulées $K^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R))$ et $D^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R))$ de complexes de *R-mdg*'s bornés supérieurement. Si $\boldsymbol{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$ est un foncteur covariant additif compatible au décalage, il induit un foncteur $\mathrm{Diff}\boldsymbol{F} : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et son dérivé à gauche $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\boldsymbol{F} : D^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)) \rightsquigarrow D^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R))$ . Nous montrons qu'il existe de même un prolongement

$$\mathbb{D}\,\boldsymbol{F} : \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,.$$

La cohomologie de $\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\_)$ s'identifie alors naturellement à la limite de la suite spectrale associé à la filtration par degrés de *R-mdg*'s du bicomplexe $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\boldsymbol{F}(\_)$. Lorsque $(M, d_M)$ est scindé, on montre l'existence d'un isomorphisme de $R$-modules gradués entre $\boldsymbol{h}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(M, d_M))$ et $\mathbf{tot}\,\mathbb{L}^*\boldsymbol{F}(\boldsymbol{h}(M, d_M))$, où $\mathbb{L}^k\boldsymbol{F} : D^-(\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R))$ est le $k$-ième foncteur dérivé à gauche standard.

**3.2.2** Au sujet du scindage de complexes en catégorie dérivée, je démontre pour $R$ un anneau de dimension globale finie,

**Théorème ([A$_{\mathbf{22}}$]).** *Tout R-mdg est scindé dans* $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ *si, et seulement si, l'anneau* $R$ *est héréditaire* ([5]).

Ce théorème s'applique en particulier au cas de la cohomologie $\mathbb{S}^1$-équivariante puisque $H_{\mathbb{S}^1}(\bullet) = \mathbb{Q}[X]$, ce qui était notre première motivation. En particulier, dans mon travail 3.1 la suite spectrale

$$\mathbf{Ext}_{H_{\boldsymbol{G}}}(H_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}), H_{\boldsymbol{G}}) \Rightarrow H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})[d_{\boldsymbol{M}}]\,,$$

est dégénérée lorsque $G = \mathbb{S}^1$.

**3.2.3** Pour un groupe de Lie $\boldsymbol{G}$ compact et connexe, les complexes des formes différentielles équivariantes pour une $\boldsymbol{G}$-variété différentielle $\boldsymbol{X}$, sont des objets de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}})$ où $H_{\boldsymbol{G}}$ désigne la cohomologie $\boldsymbol{G}$-équivariante d'un point.

[5] Un anneau est dit « *héréditaire* » lorsque tout sous-module d'un module projectif est lui-même projectif. Dans un anneau héréditaire, tout module admet une résolution projective de longueur $\leqslant 1$, donc $\dim_{\mathrm{gb}}(R) \leqslant 1$.

Lorsque $\boldsymbol{X}$ vérifie la dualité de Poincaré rationnelle, le morphisme de dualité de Poincaré équivariante

$$\mathbb{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}} : (\Omega_{\boldsymbol{G}}[d_{\boldsymbol{X}}], \boldsymbol{d}) \to \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}((\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}, \boldsymbol{d}), H_{\boldsymbol{G}}) \,, \tag{$\mathbb{D}$}$$

est un quasi-isomorphisme.

Lorsque $\boldsymbol{G} = \mathbb{S}^1$, on a des isomorphismes canoniques dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}})$

$$(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{d}) \cong (H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}), 0) \text{ et } (\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{d}) \cong (H_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), 0) \,. \tag{$\diamond$}$$

et le quasi-morphisme ($\mathbb{D}$) induit un isomorphisme de $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg*

$$\mathscr{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}} : H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}}] \xrightarrow[\cong]{} \mathbf{tot}\,\mathrm{Extgr}^{*,\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}(H_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), H_{\boldsymbol{G}}) \,.$$

Il en résulte le critère de dualité de Poincaré équivariante suivant.

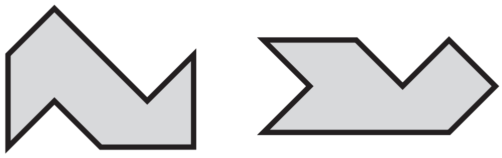
**Théorème ([$\mathbf{A_{22}}$] ).** *Pour $\boldsymbol{G} = \mathbb{S}^1$ et lorsque la cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{X}$ est de dimension finie, le morphisme de dualité*

$$H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}}] \to \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(H_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), H_{\boldsymbol{G}})$$

*induit par $\mathbb{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}}$ est bijectif si, et seulement si, $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ est un $H_{\boldsymbol{G}}$-module sans torsion.*

### 3.3 Isospectralité et Transplantations

Rédaction d'un livre sur l'isospéctralité des tambours d'après les idées de M-.F. Vigneras (1980) et T. Sunada (1985) et sur la technique des transplantations de fonctions de P. Bérard (1992). Mon but est d'expliquer complètement et en des termes aussi simples que possible le contrexemple de GordonWebbWolpert (1992) à la celèbre question de Marc Kac : "Can one hear the shape of a drum" (1966). Plus précisément expliquer pourquoi les surfaces ci-dessous



sont isospectrales. Niveaux MathSpé et Master2, à paraître dans la collection Universitext de Springer (Contract No. : 55856, prévu pour 2019). Le livre est basé sur mes notes de cours du stage M2 en 2014-15 ([$A_{24}$]).

## § 4. Espaces de configuration (2013-2016)

Depuis l'année 2013, je m'intéresse aux espaces de configuration « *généralisés* » d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$. C'est ainsi que j'appelle les sous-espaces $\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m \subseteq \boldsymbol{X}^m$ définis, pour $0 \leqslant \ell \leqslant m \in \mathbb{N}$, par

$$\begin{aligned} \Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m \ &: = \big\{(z_1, \ldots, z_m) \in \boldsymbol{X}^m \mid \mathrm{Card}\,\{z_1, \ldots, z_m\} \leqslant \ell\big\} \,, \\ \Delta_{\ell}\boldsymbol{X}^m \ &: = \Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m \smallsetminus \Delta_{\leqslant \ell-1}\boldsymbol{X}^m \,, \quad \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}) := \Delta_m\boldsymbol{X}^m \,. \end{aligned}$$

Ces espaces sont munis de l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$ par permutation de coordonnées. Ma première motivation dans cette recherche a été d'y transposer las questions classiques sur les espaces de configuration standard $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ aux espaces de configuration généralisés, pour tenter de les résoudre pour des larges familles d'espaces $\boldsymbol{X}$ à l'aide de méthodes *uniformes*. Parmi ces questions, les suivantes ont trouvé des réponses très complètes pour les coefficients de cohomologie dans un corps de caractéristique nulle.

- Calculer le caractère de la représentations $\mathfrak{S}_m{:}H(\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)$.
- Calculer le polynôme de Poincaré des quotients de $\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m$ pas des sous-groupes de $\mathfrak{S}_m$. Montrer que, pour $a \in \mathbb{N}$ fixé, les nombres de Betti de $\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m$ sont donnés un polynôme «*universel*» en $m$ et en les nombres de Betti de $\boldsymbol{X}$.
- Montrer que la suite spectrale de Leray des fibrations entre espaces de configuration dégénèrent, notamment celles associées aux projections $\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \twoheadrightarrow \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$.
- Pour $a \in \mathbb{N}$ fixé, estimer les rangs de stabilité de représentation et de polynomialité de caractère, au sens de Church-Farb ([CF]), de la famille $\{H(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$.

Ces questions sont abordées au moyen de ce que j'appele le «*complexe fondamental de* $\boldsymbol{X}$ *pour* $\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m$». Il s'agit d'un complexe de $\mathfrak{S}_m$-modules gradués :

$$0 \to H_c^{*-\ell+1}(\Delta_1\boldsymbol{X}^m) \to \cdots \to H_c^{*-1}(\Delta_{\ell-1}\boldsymbol{X}^m) \to H_c^{*}(\Delta_\ell\boldsymbol{X}^m) \to H_c^{*}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m) \to 0\,,$$

qui a la propriété remarquable d'être exact lorsque la cohomologie «*intérieure*» de $\boldsymbol{X}$, *i.e.* de l'image de l'application naturelle $H_c(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{X})$, est nulle. Il y a même équivalence de ces propriétés lorsque $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique orientable (th. [A$_{20}$]-3.2.3).

J'appelle «*i-acyclique*» tout espace sans cohomologie intérieure. Les premiers exemples de tels espaces sont les espaces acycliques connexes non compacts, les groupes de Lie réels connexes non compacts, et, plus généralement, si $\boldsymbol{X}$ est $i$-acyclique, tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, tout quotient $\boldsymbol{X}/W$ par un groupe fini $W$, et tout produit cartésien $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$, où $\boldsymbol{Y}$ est quelconque, le sont aussi.

Une large partie de ma recherche est concentrée sur les conséquences du fait que le complexe fondamental est une résolution par $\mathfrak{S}_m$-modules de $H_c(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m)$. Les questions de stabilité de représentations, de formules de caractères, de nombres de Betti, sont alors susceptibles d'approches combinatoires. Une autre partie importante est consacrée à la conception d'une suite spectrale particulière qui établit un pont entre les espaces de configuration des espaces $i$-acycliques et ceux des espaces généraux, ce qui permet de généraliser un certain nombre de résultats connus du contexte $i$-acyclique au contexte général.

– Pour le problème de la formule des caractères, j'étends la formule bien connue de Macdonald du caractère de la cohomologie des produits cartésiens $\boldsymbol{X}^m$ ([M1]), au cas des espaces de configuration $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$.

*Théorème* ([A$_{20}$]-10.5.3). *Soit* $\boldsymbol{X}$ *un espace* $i$*-acyclique. Si* $\alpha \in \mathfrak{S}_m$, *on a*

$$\frac{\chi_c(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\alpha,T)}{T^m} = \prod_{d=1}^m d^{\mathbb{X}_d}\Big(\sum_{e\,|\,d}\mu\big(\frac{d}{e}\big)\frac{\mathscr{P}_c(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e}\Big)^{\underline{\mathbb{X}_d}},$$

*où* $\chi_c(\boldsymbol{F}_m)(\alpha,T) := \sum_{i\in\mathbb{Z}}\operatorname{tr}(\alpha{:}H_c^i(\boldsymbol{F}_m))\,(-T)^i$, *et où* $(1^{\mathbb{X}_1}, 2^{\mathbb{X}_2},\ldots,m^{\mathbb{X}_m}) \vdash m$ *est le type de la permutation* $\alpha$, $\mu(\_)$ *est la fonction de Möbius,* $\mathscr{P}_c(\_)$ *est le polynôme de Poincaré de* $H_c(\_)$, *et* $(\_)^{\underline{r}}$ *est la factorielle décroissante.*

– Pour le problème des polynômes de Poincaré, le cas de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ relève d'une formule fermée très simple conséquence de la $i$-acyclicité de $\boldsymbol{X}$, tandis que les cas plus généraux des quotients de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ par des sous-groupes finis de $\mathfrak{S}_m$ sont traités via la formule des caractères [A$_{20}$]-10.5.3. C'est ainsi que je procède pour l'espace des configurations «*cycliques*» $\boldsymbol{CF}_m(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\boldsymbol{C}_m$, où $\boldsymbol{C}_m := \langle(1,\dots,m)\rangle \subseteq \mathfrak{S}_m$, et celui des configurations «*non ordonnées*» $\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\mathfrak{S}_m$.

Notons, $\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(\_)$ le polynôme de Poincaré de $H_{\mathrm{c}}(\_)$, $\phi(\_)$ la fonction indicatrice d'Euler, $\mu(\_)$ la fonction de Möbius, et $(\_)^{\underline{r}}$ la factorielle décroissante. Pour tout espace $i$-acyclique $\boldsymbol{X}$, je prouve les égalités suivantes.

*Théorème* ([A$_{20}$]-4.2.1) *:* $\quad \dfrac{\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(-T)}{T^m} = \Big(\dfrac{\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T)}{T}\Big)^{\underline{m}}.$

*Théorème* ([A$_{20}$]-11.2.1) *:*

$$\frac{\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{CF}_m)(-T)}{T^m} = \frac{1}{m}\sum_{d\,|\,m}\phi(d)\, d^{m/d}\Big(\sum_{e\,|\,d}\mu\big(\frac{d}{e}\big)\frac{\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e}\Big)^{\underline{m/d}}.$$

*Théorème* ([A$_{20}$]-11.3.1)

$$\frac{\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X}))(-T)}{T^m} = \frac{1}{m!}\sum_{\lambda:=(1^{\mathbb{X}_1},\dots,m^{\mathbb{X}_m})\vdash m} h_\lambda \prod_{d=1}^m d^{\mathbb{X}_d}\Big(\sum_{e\,|\,d}\mu\big(\frac{d}{e}\big)\frac{\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e}\Big)^{\underline{\mathbb{X}_d}},$$

*où $h_\lambda$ est le cardinal de l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_m$ dont la décomposition en cycles disjoints est de type $\lambda := (1^{\mathbb{X}_1},\dots,m^{\mathbb{X}_m}) \vdash m$.*

– L'expression simple du polynôme de Poincaré de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ me suggérait l'existence d'une forme de trivialité cohomologique des projections $\pi_a : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$, et donc la dégénérescence des suites spectrales de Leray associées. Je montre que c'est en effet le cas lorsque $\boldsymbol{X}$ est $i$-acyclique et localement connexe (Th. [A$_{20}$]-12.4.9).

– Pour la stabilité de représentations, je prouve les théorèmes suivants.

*Théorème* ([A$_{20}$]-9.3.15). *Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété connexe orientable de dimension $\geqslant 2$. Pour $a, i \in \mathbb{N}$, la famille de représentations $\{\mathfrak{S}_m{:}H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m;k)\}_m$ est monotone et stationnaire pour $m \geqslant 4i{+}4a$, si $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, et pour $m \geqslant 2i{+}4a$, si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$. Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont (donc) polynomiales et la famille $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m/\mathfrak{S}_m)\}_m$ est constante sur ces mêmes intervalles de $m$.*
*La proposition* [A$_{20}$]-11.6.1 *va encore plus loin pour la famille $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$ en montrant qu'elle est constante pour $m \geqslant 2i$, si $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, et pour $m \geqslant i$, si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$.*

Ces théorèmes sont dus à Church ([Ch], 2012) dans le cas où $\boldsymbol{M}$ est lisse et pour la famille $\{\mathfrak{S}_m{:}H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$. Mes énoncés généralisent ceux de Church dans deux directions. Premièrement, en s'affranchissant de l'hypothèse de lissité de $\boldsymbol{M}$, et, deuxièmement, en incorporant les familles des espaces de configuration généralisés $\{\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m\}_m$ (singuliers, même si $\boldsymbol{M}$ ne l'est pas) pour lesquelles il n'y avait pas de conjecture. Mon approche est totalement différente de celle de Church qui s'appuie sur les travaux de Totaro ([To]) sur la suite spectrale de Leray associée au plongement $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}) \hookrightarrow \boldsymbol{M}^m$ lorsque $\boldsymbol{M}$ est lisse.

Ma stratégie de la preuve a consisté à me restreindre dans un premier temps aux pseudovariétés $\boldsymbol{M}$ qui sont $i$-acycliques ([A$_{20}$]-9.2.3) et pour lesquelles je peux élaborer une combinatoire basée sur l'exactitude des complexes fondamentaux qui réduit les questions de stabilité et monotonie au cas des familles d'espaces produit $\{\boldsymbol{M}^m\}_m$ où la réponse est assez simple. La combinatoire repose sur deux foncteurs d'induction dans la catégorie des $\boldsymbol{FI}$-modules, les foncteurs $\boldsymbol{I}^a, \boldsymbol{\Theta}^a : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \to \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])$ ([A$_{20}$]-8.2) qui décalent les $\mathfrak{S}_{m-a}$-modules vers des $\mathfrak{S}_m$-modules et pour lesquels j'ai un contrôle assez précis de la manière dont ils perturbent les rangs de stabilité et monotonie (thm. [A$_{20}$]-8.2.2).

Le cas où $\boldsymbol{M}$ est une pseudovariété générale est ensuite abordé moyennant la remarque que $\boldsymbol{M}$ se réalise comme différence $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{\geqslant 0} \smallsetminus \boldsymbol{M}_{>0}$, où $\boldsymbol{M}_{\geqslant 0} := \boldsymbol{M}\times\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ et $\boldsymbol{M}_{>0} := \boldsymbol{M}\times\mathbb{R}_{>0}$ sont des pseudovariétés $i$-acycliques. Cette observation simple m'a conduit naturellement à la construction de la suite spectrale $(\mathbb{E}_\sigma(\mathscr{U}^m)_r, d_r)$ ([A$_{20}$]) qui converge vers $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ et dont la page $\mathbb{E}_1$ concerne uniquement des espaces de configuration pour des espaces $i$-acycliques. J'ai ([A$_{20}$]-9.3.13-(b)) :

$$\mathbb{E}_\sigma(\mathscr{U}^m)_1^{p,q} = \bigoplus\nolimits_{\tau\in\mathfrak{T}(p+1,m)} \mathrm{ind}_{\mathfrak{H}_\tau}^{\mathfrak{S}_m} \boldsymbol{\sigma} \otimes H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0})) \;\Rightarrow\; H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))\,,$$

où $Q := i-(m-(p+1))\,(d_{\boldsymbol{M}}-1)$. J'y ai noté $\mathfrak{T}(p+1,m)$ l'ensemble des tableaux de Young à $m$ boites et première colonne $(m-p,\ldots,m)$, et $\mathfrak{H}_\tau$ le stabilisateur de $\tau$ dans $\mathfrak{S}_{m-(p+1)}\times\mathfrak{S}_{p+1}$ et dont l'action sur $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}))$ est tordue par la signature $\boldsymbol{\sigma}$ de $\mathfrak{S}_{m-(p+1)}$. J'appelle ces suites spectrales « *basiques* ». Leur construction est compatible aux images-inverses ce qui me permet d'estimer les rangs de monotonie et stabilité de $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$ à partir de ceux déjà connus dans le cas $i$-acyclique de $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{>0}))\}_m$. Le foncteur d'induction $\boldsymbol{I}^a$ est ensuite de nouveau utilisé pour atteindre $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{M}^m)\}_m$ et une récurrence descendante basée sur des suites longues de cohomologie fixe le cas de $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m)\}$.

L'étude des familles $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$ suit la même approche. Lorsque $\boldsymbol{M}$ est $i$-acyclique, la formule explicite du caractère $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ donnée par le théorème [A$_{20}$]-10.5.3 me permet d'obtenir une information assez précise de la multiplicité de la représentation triviale de $\mathfrak{S}_m$ dans $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$. Je suis alors en mesure de prouver le résultat suivant.

*Proposition* ([A$_{20}$]-11.5.3). *Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété connexe orientable et $i$-acyclique. La famille $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M};\mathbb{Q}))\}_m$ est constante pour chaque $i \in \mathbb{N}$ et tout $m \geqslant i$.*

À partir de là, les suites spectrales basiques me permettent d'examiner le cas où $\boldsymbol{M}$ est une pseudovariété générale et d'établir la proposition [A$_{20}$]-11.6.1 déjà mentionnée.

Je pense que même s'il reste beaucoup de questions intéressantes ouvertes, l'utilité des complexes fondamentaux en tant qu'outil d'approche combinatoire dans le cas des espaces $i$-acycliques, et l'utilité des suites spectrales basiques comme moyen de propagation de résultats vers le cadre plus large des pseudovariétés, devrait être clair d'après ce travail . Ces idées inédites ouvrent la voie pour de nouvelles perspectives de recherche.

## §5. Lahore (Pakistan) 2018 et 2019. Poursuites de recherche.

**Lahore 2018.** En février 2018, j'ai donné un minicours sur mon travail sur les espaces de configuration dans le cadre d'un workshop en topologie organisé par l'université de LUMS et par l'Abdus Salam School of Mathematics de Lahore, Pakistan. Pendant l'élaboration de ce cours, j'ai été emmené à préciser certains aspects de la théorie générale des familles de représentations de groupes symétriques, les FB-modules, ce qui a donné lieu à l'article [A$_{28}$] présenté dans le paragraphe suivant, actuellement disponible sur arXiv.

**Lahore 2019.** Je suis de nouveau invité à Lahore, cette fois à l'Abdus Salam School et pour une période plus longue, dans le but de donner un cours plus approfondi sur les espaces de configuration et d'encadrer un ou deux étudiants en thèse.

**5.0.1 On the equivalence of two stability conditions of FB-modules.** In this paper, we give a proof of the equivalence of two stability conditions in the work of Thomas Church and Benson Farb on FB-modules ([CF]) : *representation stability* (RS) and *character polynomiality* (PC). While the implication (RS) $\Rightarrow$ (PC) is a simple consequence of the Frobenius character formula, the converse seems not to have been documented, motivating this work.

An FB-module is a countable family $\mathscr{W} := \{W_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ of linear representations $W_m$ of the symmetric groups $\mathbf{S}_m$, assumed, in these notes, to be finite dimensional over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$, hereafter called *an* $\mathbf{S}_m$*-module*.

— The FB-module $\mathscr{W}$ is said to be *representation stable* (RS in short), if there exists some $N \in \mathbb{N}$, such that, for all $m \geqslant N$, the decomposition in simple factors of $W_m$ has the *stable* form :

$$W_m \sim \bigoplus_\lambda V_{\lambda[m]}{}^{\boldsymbol{n}_\lambda},$$

where

- $\lambda := (\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_\ell)$ is a partition verifying $|\lambda| + \lambda_1 \leqslant N$ ;
- $V_{\lambda[m]}$ is the simple $\mathbf{S}_m$-module associated with $\lambda[m] := (m-|\lambda| \geqslant \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_\ell)$ ;
- for $m \geqslant N$, the family of natural numbers $\{\boldsymbol{n}_\lambda\}_\lambda$ is *constant*.

The smallest such $N$ is *the rank of* (RS) *of* $\mathscr{W}$, which we will denote by '$\mathrm{rank}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W})$'.

— The FB-module $\mathscr{W}$ is said to *have a polynomial character* (PC in short), if there exists $N \in \mathbb{N}$ and a polynomial $P_{\mathscr{W}} \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_N]$, such that, for all $m \geqslant N$ and all $g \in \mathbf{S}_m$, one has :

$$\chi_{W_m}(g) = P_{\mathscr{W}}(X_1(g), \ldots, X_N(g)),$$

where $\chi_{W_m}$ is the character of $W_m$, and $X_i(g)$ is the number of cycles of length $i$ in the decomposition of $g$ in $\mathbf{S}_m$ as a product of disjoint cycles. The polynomial $P_{\mathscr{W}}$, which is unique, is *the polynomial character of* $\mathscr{W}$. The smallest such $N$ is *the rank of character polynomiality of* $\mathscr{W}$, it will be denoted by '$\mathrm{rank}_{\mathrm{pc}}(\mathscr{W})$'.

Regarding the equivalence of these conditions, we prove the following theorem.

**Theorem.** *Let* $\mathscr{W}$ *be an* FB*-module.*

a) $\mathrm{rank}_{\mathrm{pc}}(\mathscr{W}) \leqslant \mathrm{rank}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W})$.

b) *If* $\mathscr{W}$ *is* (PC) *and has polynomial character* $P_{\mathscr{W}}$, *then*

$$\mathrm{rank}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W}) \leqslant \max\{\mathrm{rank}_{\mathrm{pc}}(\mathscr{W}), 2\deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathscr{W}})\},$$

*where* $\deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathscr{W}})$ *is the polynomial degree of* $P_{\mathscr{W}}$, *when stipulating that* $\deg_{\boldsymbol{w}}(X_i) := i$.

*Comments.* (i) This theorem exhibits FB-modules $\mathscr{W}$ with $\mathrm{rank}_{\mathrm{pc}}(\mathscr{W}) = 0$ and arbitrarily big $\mathrm{rank}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W})$. It also shows that the bounds are optimal, giving examples where they are reached. (ii) Beyond FB-modules, we also look at FI-modules $\mathscr{W}$, which are FB-modules with some additional structure. There is a corresponding representation stability condition for FI-modules, its rank is denoted by $\mathrm{rank}^{\mathrm{fi}}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W})$. One has $\mathrm{rank}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W}) \leqslant \mathrm{rank}^{\mathrm{fi}}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W})$, but there is no equivalence with (PC) stability, in particular the statement (b) in the last theorem for FI-modules and $\mathrm{rank}^{\mathrm{fi}}_{\mathrm{rs}}$ is false.

An interesting by-product in this work is the fact that the *weight* $\boldsymbol{w}(W_m)$ of an $\mathbf{S}_m$-module $W_m$ coincides with the lowest possible degree $\deg_{\boldsymbol{w}}(P)$ of a polynomial $P$ expressing the character $\chi_{W_m}$. Moreover, if $\mathscr{W} := \{W_m\}$ is a (PC) FB-module, then $\deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathscr{W}}) = \boldsymbol{w}(W_m)$, for all $m \geqslant \mathrm{rank}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W})$. The next theorem follows from these observations.

**Proposition.** *If $\mathscr{W}_1$ and $\mathscr{W}_2$ are FB-modules which are $(\mathrm{PC})_{m\geqslant N}$, then*

$$\boldsymbol{w}(W_{1,m} \otimes W_{2,m}) = \boldsymbol{w}(W_{1,m}) + \boldsymbol{w}(W_{2,m}),$$

*for all $m \geqslant 2(\boldsymbol{w}(W_{1,m}) + \boldsymbol{w}(W_{2,m}))$. In particular,*

$$\boldsymbol{w}((\mathscr{W}_1 \otimes \mathscr{W}_2)_{\geqslant N}) = \boldsymbol{w}((\mathscr{W}_1)_{\geqslant N}) + \boldsymbol{w}((\mathscr{W}_2)_{\geqslant N}),$$

*where $(\mathscr{W})_{\geqslant N}$ denotes the truncation of $\mathscr{W}$ that replaces $W_n$ by $0$ for all $n < N$.*

## § 6. Références

Le sigle '(W3)' indique que le document concerné est accessible à mon adresse internet :
`http://www.math.jussieu.fr/~arabia`


[$A_0$] A. Arabia. Thèse de doctorat ; Université Paris 7 – Denis Diderot (1985).

[$A_1$] A. Arabia. Cycles de Schubert et cohomologie équivariante de $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{T}$ ; C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **301** (1985), no. 2, 45–48.

[$A_2$] A. Arabia. Cycles de Schubert et cohomologie équivariante de $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{T}$ ; Invent. Math. **85** (1986), no. 1, 39–52.

[$A_3$] A. Arabia. Cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante de $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{B}$ pour un groupe $\boldsymbol{G}$ de Kac-Moody ; C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **302** (1986), no. 17, 631–634.

[$A_4$] A. Arabia. Cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante de la variété de drapeaux d'un groupe de Kac-Moody ; Bull. Soc. Math. France **117** (1989), no. 2, 129–165.

[$A_5$] A. Arabia. Introduction à la cohomologie de de Rham ; Cours de M2 (260 pages) (1997).

[$A_6$] A. Arabia. Classes d'Euler équivariantes et points rationnellement lisses ; Ann. Inst. Fourier, **48** (1998), no. 3, 861–912.

[$A_7$] A. Arabia. Appendice à l'article de M.-F. Vignéras : "Induced $R$-representations of $p$-adic reductive groups" ; Selecta Mathematica, new series, **4** (1998) 549–623.

[$A_8$] A. Arabia. Cohomologie de de Rham dans la catégorie des schémas ; Notes de cours (107 pages), (1999).

[$A_9$] A. Arabia. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes ; Commentarii Mathematici Helvetici **76** (2001) 607–639.

[$A_{10}$] A. ARABIA. Faisceaux pervers sur les variétés algébriques complexes. Correspondance de Springer (d'après Borho-MacPherson) ; Notes de cours (67 pages) (2001).

[$A_{11}$] A. ARABIA. Cohomologie de Monsky-Washnitzer dans la catégorie des schémas lisses et séparés sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ ; (2001).

[$A_{12}$] A. ARABIA. Introduction à l'homologie d'intersection ; Cours de M2 (102 pages) (2002).

[$A_{13}$] A. ARABIA. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches ; (octobre 2002).

[$A_{14}$] A. ARABIA. Lissité rationnelle des variétés de représentations dun carquois ; (août 2003). C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **338** (2004) 267–270.

[$A_{15}$] A. ARABIA. Affinité des schémas †-adiques de réduction affine ; *prépublication* (août 2005).

[$A_{16}$] A. ARABIA. Produits fibrés dans la catégorie des schémas dag-adiques localement de type fini ; *prépublication* (juillet 2006).

[$A_{17}$] A. ARABIA. Introduction à la cohomologie de de Rham p-adique ; "*Applications du théorème de Čech-Leray*". "*Complétion †-adique*". Notes supplémentaires du cours de M2 (2008, 2009).

[$A_{18}$] A. ARABIA. Equivariant Poincaré Duality and Equivariant Gysin Morphism ; (2010). `(W3)/Gysin/Gysin-2010.pdf`

[$A_{19}$] A. ARABIA. Un théorème des points fixes de Lefschetz p-adique pour les variétés ouvertes ; (2011). `(W3)/Lefschetz/Lefschetz-2011.pdf`

[$A_{20}$] A. ARABIA. Espaces de configuration généralisés. Espaces topologiques $i$-acycliques. Suites spectrales basiques ; arXiv : 1609.00522, 195 pages (2016).

[$AM_1$] A. ARABIA, Z. MEBKHOUT. Sur le Topos infinitésimal $p$-adique d'une variété algébrique non singulière I ; Avec Z. Mebkhout. À paraître dans Ann. Inst. Fourier 60 (2010), 194 pages.

[$AM_2$] A. ARABIA, Z. MEBKHOUT. Sur le Topos infinitésimal $p$-adique d'une variété algébrique non singulière II ; Avec Zoghman Mebkhout. Soumis (novembre 2008).

[Art] M. ARTIN. On the solutions of analytique equations ; Invent. Math. **5** pp. 277–291 (1968).

[AS] M.F. ATIYAH, G. SEGAL. "*Equivariant cohomology and localization*" ; Lecture notes, Warwick (1965).

[BS] R. BÉDARD, R. SCHIFFLER. Rational smoothness of varieties of representations for quivers of type $A$ ; Representation Theory **7**, 481-548 (2003).

[BV] N. BERLINE, M. VERGNE. Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante ; C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 295 (1982), no. 9, 539–541. Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes ; Duke Math. J. 50 (1983), no. 2, 539–549. Fourier transforms of orbits of the coadjoint representation ; Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982), 53–67, Progr. Math., 40, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1983).

[BGG] I.N. BERNŠTEĬN, I.M. GEL'FAND, S.I. GEL'FAND. Schubert cells, and the cohomology of the spaces $G/P$ ; Uspehi Mat. Nauk 28 (1973), no. 3(171), 3–26.

[Ber] P. BERTHELOT. "*Cohomologie cristalline des schémas de car. $p > 0$*" ; Lecture Notes in Mathematics **407**, Springer-Verlag (1974)

[$B_0$] A. BOREL. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts ; Ann. of Math. (2) 57, 115–207 (1953).

[$B_1$] A. BOREL. Sous-groupes commutatifs et torsion des groupes de Lie compacts connexes ; Tôhoku Math. J. (2) 13, 216–240 (1961).

[B-al] A. BOREL & AL. "*Seminar on transformation groups*" ; Annals of Mathematics Studies, No. 46 Princeton University Press, Princeton, N.J. (1960).

[BoMc$_1$] Borho, MacPherson. Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés nilpotentes ; C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292, no. 15, 707–710 (1981).

[Bri$_2$] M. Brion. Equivariant Chow groups for torus actions ; Birkhäuser. Transformation groups, Vol 2, n$^{ro}$ 3, 1–43 (1997).

[Bri$_2$] M. Brion. Rational smoothness and fixed points of torus actions ; Transformation Groups **4**, 127–156 (1999).

[Br] J.-L. Brylinski. Equivariant intersection cohomology ; Kazhdan-Lusztig theory and related topics (Chicago, IL, 1989), 5–32, Contemp. Math., 139, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[Ch] T. Church.. Homological stability for configuration spaces of manifolds. ; Invent. Math. 188, no. 2, 465504 (2012).

[CF] T. Church, B. Farb.. Representation theory and homological stability. ; Adv. Math. 245, 250314 (2013).

[Crl] J.B. Carrell. The Bruhat graph of a Coxeter group, a conjecture of Deodhar, and rational smoothness of Schubert varieties ; Algebraic groups and their generalizations : classical methods. University Park, PA, (1991), 53–61. Proc. Sympos. Pure Math. **56**, Part 1 (1994).

[Crt] H. Cartan. Notions d'algèbre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie ; La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal ; Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, pp. 15–27 et 57–71. Georges Thone, Liège; Masson et Cie., Paris, 1951.

[CS] Ph. Caldéro, R. Schiffler. Rational smoothness of varieties of representations for quivers of Dynkin type ; Prépublication `http://arxiv.org/abs/math.RT/0305149`.

[Del] P. Deligne. La conjecture de Weil. I ; Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 43 (1974), 273–307.

[Dem$_1$] M. Demazure. Invariants symétriques entiers des groupes de Weyl et torsion ; Invent. Math. 21, 287–301, (1973).

[Dem$_2$] M. Demazure. Une nouvelle formule des caractères ; Bull. Sci. Math. (2) 98 (1974), no. 3, 163–172.

[Deo] V.V. Deodhar. Local Poincaré duality and nonsingularity of Schubert varieties ; Comm. Algebra 13, no. 6, 1379–1388, (1985).

[DH] J.J. Duistermaat, G.J. Heckman. On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space ; Invent. Math. 69 (1982), no. 2, 259–268. Addendum to: On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space ; Invent. Math. 72 (1983), no. 1, 153–158.

[Dw] B. Dwork. On the rationality of the zeta function of an algebraic variety ; Amer. J. Math. 82, 631–648 (1960).

[EGA$_1$] Grothendieck, Dieudonné. "*Éléments de géométrie algébrique-I*" ; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 166. Springer-Verlag (1971)

[E] R. Elkik. Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien ;
Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, quatrième série, tome 6, pp. 553–604 (1973).

[G$_1$] A. Grothendieck. Géométrie formelle et géométrie algébrique ; Séminaire Bourbaki, exposé **182** (Mai 1959).

[G$_2$] A. Grothendieck. Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions $L$ ; Séminaire Bourbaki, Vol. 9, Exp. No. 279 (1965), 41–55, Soc. Math. France, Paris, 1995.

[G$_3$] A. Grothendieck. Crystals and the de Rham cohomology of schemes ; Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas pp. 306–358 North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris (1968).

[Hrs] HARISH-CHANDRA. Differential operators on a semisimple Lie algebra ; Amer. J. Math. 79, 87–120 (1957).

[Har] R. HARTSHORNE. "*Algebraic geometry*" ; Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1977).

[KM] N.M. KATZ, W. MESSING. Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields ; Invent. Math. 23 (1974), 73–77.

[KL] D. KAZHDAN, G. LUSZTIG. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras ; Invent. Math. 53, no. 2, 165–184 (1979).

[$KK_1$] B. KOSTANT, S. KUMAR. The nil Hecke ring and cohomology of $G/P$ for a Kac-Moody group $G$ ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 83, no. 6, 1543–1545 (1986). The nil Hecke ring and cohomology of $G/P$ for a Kac-Moody group $G$ ; Adv. in Math. 62, no. 3, 187–237 (1986).

[$KK_2$] B. KOSTANT, S. KUMAR. $T$-equivariant $K$-theory of generalized flag varieties ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 84, no. 13, 4351–4354 (1987). — J. Differential Geom. 32, no. 2, 549–603 (1990).

[Kle] S.L. KLEIMAN. Algebraic cycles and the Weil conjectures ; Dans "Dix esposés sur la cohomologie des schémas", pp. 359–386. North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, (1968).

[Kum] S. KUMAR. A connexion of equivariant $\boldsymbol{K}$-theory with the singularity of Schubert varieties ; Prépublication (1986–87). The nil-Hecke ring and singularity of Schubert varieties ; In "Lie Theory and geometry (in honor of Bertram Kostant)". Progress in Math. **123**, Birkhäuser, 497–507 (1994). The nil-Hecke ring and singularity of Schubert varieties. ; Inventiones Mathematicae **123**, $n^{ro}$ 3, 471–506 (1996).

[LS] V. LAKSHMIBAI, C.S. SESHADRI. Singular locus of a Schubert variety ; Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 11, no. 2, 363–366 (1984).

[$L_1$] G. LUSZTIG. Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras ; J. Amer. Math. Soc. 3, 257–296 (1990).

[$L_2$] G. LUSZTIG. Canonical bases arising from quantized enveloping algebras ; J. Amer. Math. Soc. 3, 447–498 (1990).

[M1] I.G. MACDONALD.. "*The Poincaré polynomial of a symmetric product.*" ; Proc. Cambridge Philos. Soc. 58, pp. 563568, (1962).

[Meb] Z. MEBKHOUT. Sur le théorème de finitude de la cohomologie $p$-adique d'une variété affine non singulière. ; Amer. J. Math. 119, no. 5, 1027–1081 (1997).

[M-$N_1$] Z. MEBKHOUT, L. NARVAEZ. Sur les coefficients de de Rham-Grothendieck des variétés algébriques ; In $p$-adic analysis (Trento 1989), Lecture Notes in Math. **1454**, pp. 267-309, (1990).

[M-$N_2$] Z. MEBKHOUT, L. NARVAEZ. La théorie du polynôme de Berstein-Sato pour les algébres de Tate et de Dwork-Monsky-Washnitzer ; Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **24**, 227-256, (1991).

[Mer] D. MEREDITH. Weak formal schemes ; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).

[Mil] J. MILNOR. Construction of universal bundles. II ; Ann. of Math. (2) 63, 430–436 (1956).

[$Mo_1$] P. MONSKY. Formal cohomology: III. Fixed point theorems ; Ann. of Math. (2) **93**, pp. 315–343 (1971).

[$Mo_2$] P. MONSKY. One dimensional formal cohomology ; Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, pp. 451–456. Gauthier-Villars, Paris, (1971).

[$MW_0$] P. MONSKY, G. WASHNITZER. The construction of formal cohomology sheaves ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **52** 1511–1514 (1964).

[$MW_1$] P. MONSKY, G. WASHNITZER. Formal cohomology: I ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217 (1968).

[$MW_2$] P. MONSKY, G. WASHNITZER. Formal cohomology: II. The cohomology sequence of a pair ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 218–238 (1968).

[Ser] J.-P. Serre. Exemples de variétés projectives en caractéristique $p$ non relevables en caractéristique zéro ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **47**, pp. 108–109 (1961).

[SGA] "*Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*" ; Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61. Lecture Notes in Mathematics **224**. Springer-Verlag (1971).

[To] B. Totaro.. Configuration spaces of algebraic varieties. ; Topology 35(4), 10571067 (1996).

[Vig] M.-F. Vignéras. Induced $R$-representations of $p$-adic reductive groups ; Selecta Mathematica 4 (1998), pp. 549–623.

[vdP] M. van der Put. The cohomology of Monsky and Washnitzer ; Société Mathématique de France. Deuxième série, Mémoire n$^{\text{ro}}$ 23, pp. 33–60 (1986).