

Sur le Topos infinitésimal p -adique d'un schéma lisse II

Alberto Arabia & Zoghman Mebkhout*

Résumé. Soient R un anneau commutatif noethérien et I un idéal de R . Nous avons construit dans l'article précédent le site infinitésimal \dagger -adique d'un schéma lisse sur R/I dans le but de définir sa cohomologie de de Rham \dagger -adique. Les objets du site sont les schémas \dagger -adiques définis par Meredith. Dans cet article nous démontrons le critère d'affinité: un schéma \dagger -adique est affine si et seulement si sa réduction est un schéma affine. Le critère d'affinité produit beaucoup d'objets et de morphismes du site infinitésimal et lui donne beaucoup de souplesse. Nous utilisons le critère d'affinité pour démontrer l'existence du produit fibré dans la catégorie des schémas \dagger -adiques. Chemin faisant nous avons été conduits à revoir les fondements de la théorie des schémas \dagger -adiques pour les débarrasser des restrictions sur le couple (R, I) imposées dans l'article de Meredith.

Sommaire

§ 0. Introduction	2
§ 1. Préliminaires	5
1.1. Notations	5
1.2. Complétion \dagger -adique	6
1.3. Rappels sur les algèbres faiblement complètes	7
1.4. Localisation \dagger -adique dans le cas f.c.t.f.	8
1.5. Algèbres f.c.t.f. et complétion d'algèbres de t.f.	9
§ 2. Recouvrements et recollements \dagger -adiques	10
2.1. Préliminaire technique	10
2.2. Exactitude des suites courtes de Mayer-Vietoris	11
2.3. Cas particulier de l'algèbre des polynômes	16
2.4. Un théorème pour le recollement des algèbres f.c.t.f.	18
2.5. Un théorème pour le recollement de modules sur une algèbre f.c.t.f.	22
§ 3. Schémas \dagger -adiques	25
3.1. Cohomologie de Čech	25
3.2. Le foncteur $(_)\dagger: \mathbf{Mod}(A^\dagger) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_A^\dagger)$	28
3.3. Schémas \dagger -adiques affines	31
3.4. Catégorie des schémas \dagger -adiques	34
§ 4. Modules cohérents sur un schéma \dagger -adique	35
4.1. Modules cohérents sur un espace annelé	35
4.2. Modules cohérents sur un schéma \dagger -adique affine	36
§ 5. Critère d'affinité des schémas \dagger -adiques	38
§ 6. Produits fibrés dans la catégorie des schémas \dagger -adiques	41
6.1. Généralités sur le produit fibré	41
6.2. Produits fibrés de schémas \dagger -adiques	44
§ 7. Schémas \dagger -adiques plats, schémas \dagger -adiques lisses	47
7.1. Algèbres \dagger -adiques lisses	47
7.2. Schémas \dagger -adiques plats, schémas \dagger -adiques lisses	48
§ 8. Faisceau d'automorphisme \dagger -adiques	49
8.1. Faisceau de morphismes \dagger -adiques	49
§ 9. Références bibliographiques	50

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 9^e étage, bureau 9D11, 75013 Paris.
Adresses électroniques: arabia@math.jussieu.fr, mebkhout@math.jussieu.fr

§0. Introduction

Soient \mathbf{R} un anneau commutatif noethérien et \mathbf{I} un idéal dans \mathbf{R} . Si \mathbf{X} est un schéma lisse sur $\mathbf{R}_1 := \mathbf{R}/\mathbf{I}$ nous avons construit dans l'article précédent ([A-M]) le site infinitésimal \dagger -adique $\mathbf{X}_{\text{inf}}^\dagger$ afin de définir la cohomologie de de Rham \dagger -adique de \mathbf{X} . Les objets du site sont des schémas \dagger -adiques définis par Meredith ([Mr]). Dans cet article nous démontrons le « critère d'affinité » : *Un schéma \dagger -adique est affine si et seulement si sa réduction est un schéma affine.* Le critère d'affinité produit beaucoup d'objets et de morphismes du site infinitésimal et lui donne beaucoup de souplesse. Nous utilisons le critère d'affinité pour démontrer l'existence du produit fibré dans la catégorie des schémas \dagger -adiques : *La catégorie $\mathbf{Sch}_{\text{if}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ des schémas \dagger -adiques possède des produits fibrés.* L'existence du produit fibré est nécessaire pour étudier les opérations cohomologiques pour la cohomologie de de Rham \dagger -adique.

Chemin faisant pour démontrer ces théorèmes nous avons été conduits à revoir les fondements de la théorie des schémas \dagger -adiques pour les débarrasser des restrictions sur le couple (\mathbf{R}, \mathbf{I}) imposées dans [Mr].

Nous décrivons maintenant plus en détail le contenu de cet article.

Le schémas \dagger -adiques affines. La « complétion \mathbf{I} -adique faible » a été introduite par Monsky-Washnitzer ([MW]) comme substitut de la « complétion \mathbf{I} -adique formelle » dans le but de corriger les défauts des nombres de Betti de la cohomologie de de Rham des schémas formels. Étant donnée une \mathbf{R} -algèbre de type fini \mathbf{A} , sa complétion \mathbf{I} -adique faible \mathbf{A}^\dagger est une sous-algèbre de sa complétion \mathbf{I} -adique formelle $\widehat{\mathbf{A}}$ avec laquelle elle partage la propriété d'être de Zariski et d'être un relèvement de $\mathbf{A}_1 := \mathbf{A}/\mathbf{I}\mathbf{A}$, i.e. $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^\dagger_1 = \widehat{\mathbf{A}}_1$. Une algèbre de la forme \mathbf{A}^\dagger est dite « faiblement complète de type fini » (f.c.t.f. en bref). La nature fonctorielle de la correspondance $(_)^\dagger : \mathbf{Alg}_{\text{if}}(\mathbf{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R})$ permet de mimer les constructions usuelles de la théorie des schémas.

Pour $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ notons $\mathbf{X} := \text{Spec}(\mathbf{A}^\dagger_1)$ et soit $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ le schéma algébrique affine associé à \mathbf{A}^\dagger_1 . Pour $f \in \mathbf{A}^\dagger$, l'algèbre $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} := (\mathbf{A}^\dagger[\frac{1}{f}])^\dagger$ dépend uniquement de la classe modulo \mathbf{I} de f et lorsque $D(\bar{f}) \subseteq D(\bar{g}) \subseteq \mathbf{X}$, il existe un morphisme canonique $\nu_{\bar{g}}^\dagger : \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{g}\}$. On a ainsi une correspondance fonctorielle

$$\begin{array}{ccc} D(\bar{f}) \rightsquigarrow \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} & \xrightarrow{\pi_{\bar{f}}} & \mathbf{A}^\dagger_1[\frac{1}{\bar{f}}] = \Gamma(D(\bar{f}); \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \\ \subseteq \downarrow & \downarrow \nu_{\bar{g}}^\dagger \oplus & \downarrow \nu_{\bar{g}} \\ D(\bar{g}) \rightsquigarrow \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{g}\} & \xrightarrow{\pi_{\bar{g}}} & \mathbf{A}^\dagger_1[\frac{1}{\bar{g}}] = \Gamma(D(\bar{g}); \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \end{array}$$

dont les termes $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{*}\}$ définissent un faisceau de \mathbf{R} -algèbres sur \mathbf{X} noté $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}$, et dont flèches π_* définissent une surjection de faisceaux de \mathbf{R} -algèbres $\pi : \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$. L'espace annelé $(\mathbf{A}^\dagger)^\sim := (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})$, noté aussi $\mathcal{D}^\dagger = (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger})$, est « le schéma \dagger -adique affine associé à \mathbf{A}^\dagger ». Le morphisme π réalise un plongement fermé canonique $\mathbf{X} \hookrightarrow \mathcal{D}^\dagger$.

Le procédé de localisation suivi de complétion faible, « la localisation \dagger -adique », permet aussi d'associer, comme dans le cas algébrique, à un morphisme de \mathbf{R} -algèbres

$\alpha : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$ un morphisme d'espaces annelés $(\alpha)^\sim : (\mathbf{B}^\dagger)^\sim \rightarrow (\mathbf{A}^\dagger)^\sim$. La correspondance $\mathbf{A}^\dagger \rightsquigarrow (\mathbf{A}^\dagger)^\sim$, $\alpha \rightsquigarrow (\alpha)^\sim$ est alors fonctorielle et le plongement $\mathbf{X} \hookrightarrow \mathcal{X}^\dagger$ est naturel relativement à la catégorie $\mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

Lorsque \mathbf{I} opère de manière nilpotente sur \mathbf{A}^\dagger , l'algèbre \mathbf{A}^\dagger est de type fini sur \mathbf{R} et l'on a $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} = \mathbf{A}^\dagger[\frac{1}{f}]$ pour tout $f \in \mathbf{A}^\dagger$. Dans ce cas, le schéma \dagger -adique \mathcal{X}^\dagger est un schéma algébrique affine et la théorie \dagger -adique n'apporte rien de nouveau. C'est plutôt dans le cas où \mathbf{A}^\dagger est *plate* sur \mathbf{R} que la théorie trouve tout son intérêt. Plus précisément, étant donné un schéma affine \mathbf{X} lisse sur \mathbf{R}/\mathbf{I} , son algèbre de fonctions régulières $R(\mathbf{X})$ admet des relèvements $\rho : \mathbf{A}^\dagger \twoheadrightarrow R(\mathbf{X})$ plats sur \mathbf{R} . La classe d'isomorphisme de \mathbf{A}^\dagger dans $\mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ est alors indépendante du relèvement ρ mais le plongement fermé $\mathbf{X} \hookrightarrow \mathcal{X}^\dagger$ par contre n'est déterminé qu'à homotopie près ([MW,Ar]). De même, tout morphisme $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ entre schémas lisses sur \mathbf{R}/\mathbf{I} admet des prolongements $f^\dagger : \mathcal{X}^\dagger \rightarrow \mathcal{Y}^\dagger$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \hookrightarrow & \mathcal{X}^\dagger \\ f \downarrow & & \downarrow f^\dagger \\ \mathbf{Y} & \hookrightarrow & \mathcal{Y}^\dagger \end{array}$$

mais f^\dagger est au mieux déterminé à homotopie près. Ces idées qui constituent le point de départ de Monsky-Washnitzer pour définir le foncteur de cohomologie de de Rham p -adique sur la catégorie des schémas lisses sur un corps de caractéristique fini, se heurtent à de sérieuses obstructions liées à la non fonctorialité du plongement $\mathbf{X} \hookrightarrow \mathcal{X}^\dagger$ lors du passage du cas affine au cas général. Dans l'article «*Sur le Topos infinitésimal p -adique d'un schéma lisse I* » ([A-M]) nous donnons une définition intrinsèque de la cohomologie de de Rham p -adique qui contourne cette difficulté.

Le but du présent article est l'étude des propriétés générales des schémas \dagger -adiques. La plupart des propositions sont motivées par leurs analogues dans la théorie des schémas formels ou algébriques. Il est assez rassurant de constater qu'au-delà de quelques difficultés techniques, schémas formels, schémas \dagger -adiques et schémas algébriques partagent bon nombre de propriétés de base.

Les deux propositions suivantes précisent la nature du foncteur de localisation \dagger -adique dans les constructions des schémas \dagger -adiques affines.

Proposition (3.3.4). *Soient $\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.*

- a) *L'espace annelé $(\mathbf{A}^\dagger)^\sim := (\text{Spec}(\mathbf{A}^\dagger_1); \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})$ est localement annelé.*
- b) *Pour tout morphisme de \mathbf{R} -algèbres $\eta : \mathbf{B}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$, le morphisme $(\eta)^\sim : (\mathbf{A}^\dagger)^\sim \rightarrow (\mathbf{B}^\dagger)^\sim$ est un morphisme d'espaces localement annelés. Le foncteur $(-)^\sim$ est donc à valeurs dans catégorie $\mathbf{Loc-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim}$ des espaces localement annelés au-dessus de $(\mathbf{R})^\sim$.*

Notons $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ l'image essentielle du foncteur $(-)^\sim : \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Loc-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim}$.

Théorème (3.3.8)

- a) *Le foncteur $(-)^\sim : \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ est une équivalence de catégories.*

b) La catégorie $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ possède des produits fibrés.

Localisation des modules. Pour $\mathbf{A}^{\dagger} \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$, le foncteur de «localisation \dagger -adique»

$$(-)^{\sim} : \mathbf{Mod}(\mathbf{A}^{\dagger}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^{\dagger}})$$

fait correspondre au module \mathbf{M} le faisceau $(\mathbf{M})^{\sim}$ sur \mathbf{X} associé au préfaisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^{\dagger}} \otimes_{\mathbf{A}^{\dagger}} \mathbf{M}$.

Le théorème suivant rassemble plusieurs résultats déjà démontrés dans [M] mais sous des hypothèses restrictives sur le couple $(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

Théorème (3.2.5). *Soit $\mathbf{A}^{\dagger} \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. Alors :*

- a) *Le foncteur $(-)^{\sim} : \mathbf{Mod}(\mathbf{A}^{\dagger}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^{\dagger}})$ est exact.*
- b) *Pour tout \mathbf{A}^{\dagger} -module \mathbf{M} et tout ouvert principal $D(\bar{f}) \subseteq \mathbf{X}$:*
 - i) *Le morphisme canonique $\mathbf{A}^{\dagger}\{\frac{1}{\bar{f}}\} \otimes_{\mathbf{A}^{\dagger}} \mathbf{M} \rightarrow \Gamma(D(\bar{f}); \mathbf{M}^{\sim})$ est bijectif.*
 - ii) *Pour tout recouvrement principal $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de $D(\bar{f})$, on a*

$$\check{H}^i(\mathcal{U}; \mathbf{M}^{\sim}) = 0, \text{ pour tout } i > 0.$$

- iii) *$H^i(D(\bar{f}); \mathbf{M}^{\sim}) = 0$, pour tout $i > 0$.*

c) *Le foncteur $(-)^{\sim} : \mathbf{Mod}(\mathbf{A}^{\dagger}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^{\dagger}})$ est pleinement fidèle.*

La proposition suivante est le pendant du théorème d'acyclicité des modules quasi-cohérents en théorie des schémas. Il est démontré dans [M] en supposant que (\mathbf{R}, \mathbf{I}) est un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal \mathbf{I} .

Théorème (4.2.3). *Soit $(\mathbf{X}, \mathcal{O}_{\mathbf{A}^{\dagger}})$ le schéma \dagger -adique affine associé à $\mathbf{A}^{\dagger} \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.*

- a) *Si $\mathcal{M} \in \mathbf{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^{\dagger}})$, on a $H^i(\mathbf{X}; \mathcal{M}) = 0$ pour tout $i > 0$.*
- b) *Le foncteur $(-)^{\sim} : \mathbf{Mod}_{\text{tf}}(\mathbf{A}^{\dagger}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^{\dagger}})$ est une équivalence de catégories.*

Les schémas \dagger -adiques. On appelle ainsi un espace localement annelé $\mathcal{X}^{\dagger} = (\mathbf{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\dagger}})$ au-dessus $(\mathbf{R})^{\sim}$ localement isomorphe à un schéma \dagger -adique affine. On note $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc-ann}/_{(\mathbf{R}^{\dagger})^{\sim}}$ dont les objets sont les schémas \dagger -adiques.

Soit $\mathcal{O}_{\mathbf{X}} := \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\dagger}} / \mathbf{I} \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\dagger}}$. L'espace annelé $\mathbf{X} := (\mathbf{X}, \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ que nous appelons «la réduction de \mathcal{X}^{\dagger} », est un schéma algébrique localement de type fini sur \mathbf{R} , et nous avons, comme dans le cas affine, un plongement fermé $\mathbf{X} \hookrightarrow \mathcal{X}^{\dagger}$. Lorsque \mathcal{X}^{\dagger} est \dagger -adique affine sa réduction \mathbf{X} est affine. La réciproque de cette propriété: «le critère d'affinité», est aussi vérifiée.

Théorème (5.1.1). *Un schéma \dagger -adique est affine si et seulement si sa réduction est un schéma affine.*

Ce critère joue un rôle fondamental dans la théorie où il produit beaucoup d'objets et de morphismes du site infinitésimal et lui donne beaucoup de souplesse (cf. [A-M]). Le critère d'affinité est aussi utilisé pour démontrer l'existence du produit fibré dans la catégorie des schémas \dagger -adiques :

Théorème (6.2.3). *La catégorie $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ possède des produits fibrés.*

Plan de l'article. La section 1 rappelle des définitions et des résultats de base des articles de Monsky-Washnitzer ([MW]) et Meredith ([M]).

Dans la section 2 nous prouvons trois théorèmes concernant les localisations \dagger -adiques. Ces théorèmes sont des cas particuliers des principaux théorèmes de l'article, ils concentrent dans leurs preuves toutes les difficultés techniques spécifiques au contexte \dagger -adique. On se place dans la situation où l'on se donne $f_1, f_2 \in \mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{ftf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ avec $f_1 + f_2 = 1$, on note alors $(\mathbf{X}, \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ le schéma affine associé à \mathbf{A}^\dagger_1 et $\mathbf{U}_i := D(\bar{f}_i)$.

- Le théorème 2.2 qui montre l'annulation de la cohomologie de Čech du préfaisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}$ relative au recouvrement $\mathcal{U} = \{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2\}$. On en déduit dans la section 3 les théorèmes d'acyclicité des faisceaux associés aux schémas \dagger -adiques affines (th. 3.2.5). Ce résultat était déjà démontré dans [M] par une autre méthode et sous des hypothèses restrictives sur le couple $(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.
- Le théorème 2.5.1 qui montre qu'un $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}$ -module dont les restrictions aux ouverts \mathbf{U}_i sont engendrées par leur sections globales, est lui-même engendré par ses sections globales. On en déduit dans la section 4 qu'un module cohérent sur un schéma \dagger -adique affine est engendré par ses sections globales (th. 4.2.3). Notre démarche généralise et simplifie celle de [M] qui démontre cette propriété en supposant l'anneau \mathbf{R} de valuation discrète d'idéal maximal \mathbf{I} .
- Le théorème 2.4.1 qui montre que un schéma \dagger -adique \mathcal{Y}^\dagger obtenu en recollant deux schémas \dagger -adiques affines \mathbf{Y}_i^\dagger de réductions les schémas algébriques \mathbf{U}_i respectivement, est lui-même un schéma \dagger -adique affine. On en déduit dans la section 5 qu'un schéma \dagger -adique de réduction affine est un schéma \dagger -adique affine (th. 5.1.1). Ce résultat est, à son tour, nécessaire pour prouver dans la section 6 l'existence de produits fibrés dans la catégorie des schémas \dagger -adiques (th. 6.2.3).

Les sections 7 et 8 donnent quelques résultats utiles concernant la lissité et la platitude des schémas \dagger -adiques.

§1. Préliminaires

1.1 Notations

- Le couple $(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ désignera tout au long de cet article la donnée d'un anneau unitaire commutatif et noethérien \mathbf{R} et d'un idéal $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$. Le mot « algèbre » sera synonyme de \mathbf{R} -algèbre sauf mention explicite du contraire. Les algèbres seront notées $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$
- Pour $s = 1, 2, \dots$, on pose $\mathbf{R}_s := \mathbf{R}/\mathbf{I}^s$ et, plus généralement pour toute \mathbf{R} -algèbre (\mathbf{R} -module...) \mathbf{A} on note $\mathbf{A}_s := \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}_s$ la « réduction modulo \mathbf{I}^s de \mathbf{A} ». Le cas $s = 1$ est de spéciale importance, \mathbf{A}_1 sera aussi appelé « la réduction de \mathbf{A} ». Pour tous $s_2 \geq s_1$, l'application $\mathbf{A}_{s_2} \rightarrow \mathbf{A}_{s_1}$, $(x \bmod \mathbf{I}^{s_2} \mathbf{A}) \mapsto (x \bmod \mathbf{I}^{s_1} \mathbf{A})$, est « la surjection canonique »; l'image d'un élément x par une telle surjection sera notée \bar{x} .

- Étant donnée une \mathbf{R}_1 -algèbre \mathbf{A}_1 , on appelle «*relèvement de \mathbf{A}_1* » la donnée, d'une part d'une \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} , et d'autre part d'un morphisme $\rho : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_1$ dont la réduction, à savoir l'application induite $\rho_1 : \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{A}_1$, est **bijective**. Lorsque \mathbf{A}_1 est plate, lisse, ... sur \mathbf{R}_1 , le relèvement $\rho : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_1$ sera dit respectivement «*plat, lisse, ...*» si la algèbre \mathbf{A} est respectivement plate, lisse, ... sur \mathbf{R} .
- Les espaces topologiques sous-jacents à nos espaces annelés seront des espaces sous-jacents à des schémas sur \mathbf{R}_1 , ils seront notés $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \dots$. Pour tout anneau \mathbf{S} la notation $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}/\mathbf{S}})$ désignera un espace annelé par des \mathbf{S} -algèbres. La notation $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ sera synonyme de $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}/\mathbf{R}_1})$.
- On note $\widehat{\mathbf{A}}$ le complété séparé I -adique de \mathbf{A} , i.e. $\widehat{\mathbf{A}} = \varprojlim_s \{\mathbf{A}_{s+1} \twoheadrightarrow \mathbf{A}_s\}$.

1.2 Complétion \dagger -adique

Suite à Monsky et Washnitzer ([MW]) «*la complétion I -adique faible*», que nous appellerons «*complétion \dagger -adique*», d'une \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} est la sous-algèbre $\mathbf{A}^\dagger \subseteq \widehat{\mathbf{A}}$ des éléments z tels qu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, des éléments $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{A}$ et une famille de polynômes $\{p_j \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]\}_{j \in \mathbb{N}}$, le tout dépendant de z , tels que :

$$z = \sum_{j \geq 0} p_j(a_1, \dots, a_n) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bullet p_j \in I^j \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n], \forall j \in \mathbb{N}; \\ \bullet \text{l'ensemble } \{\frac{\deg p_j}{j+1}\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ est borné.} \end{cases} \quad (\dagger)$$

1.2.1. La complétion \dagger -adique vérifie les propriétés suivantes (*loc.cit.*) :

- a) L'application canonique de \mathbf{A} vers $\widehat{\mathbf{A}}$ se factorise à travers \mathbf{A}^\dagger en un morphisme naturel que nous notons $\iota(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$.
- b) Pour tout morphisme d'algèbres $\alpha : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, il existe un et un seul morphisme d'algèbres $\alpha^\dagger : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$ tel que $\alpha^\dagger \circ \iota(\mathbf{A}) = \iota(\mathbf{B}) \circ \alpha$.
- c) La correspondance $\mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{A}^\dagger$, $\alpha \rightsquigarrow \alpha^\dagger$ est fonctorielle et $\iota(-) : (-) \rightarrow (-)^\dagger$ est un morphisme de foncteurs.
- d) Si I est nilpotent dans \mathbf{A} , on a $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger = \widehat{\mathbf{A}}$.
- e) Pour $s = 1, 2, \dots$ les morphismes canoniques $\mathbf{A}_s \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_s \rightarrow \widehat{\mathbf{A}}_s$ sont bijectifs.
- f) Si \mathbf{A} est une \mathbf{R} -algèbre de type fini de générateurs algébriques (ξ_1, \dots, ξ_ℓ) , on peut prendre $(a_1, \dots, a_m) = (\xi_1, \dots, \xi_\ell)$ dans la définition (\dagger) , quel que soit $z \in \mathbf{A}^\dagger$.

Définition ([MW]). Une algèbre \mathbf{A} est dite «*faiblement complète*» (f.c. en bref) lorsque l'application $\iota(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{A})^\dagger$ est bijective. Une algèbre faiblement complète \mathbf{B} est dite de «*type fini*» (f.c.t.f. en bref) lorsqu'elle est quotient de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_\ell]^\dagger$ pour un certain $\ell \in \mathbb{N}$, dans ce cas l'ensemble des images des X_i est «*un système de générateurs \dagger -adiques*» de \mathbf{B} .

Notations. On notera $\mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ (resp. $\mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$) la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathbf{Alg}(\mathbf{R})$ des \mathbf{R} -algèbres dont les objets sont les algèbres faiblement complètes (resp. de type fini). Un objet dont la notation comporte le symbole ‘ \dagger ’ appartient à $\mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$, mais il y aura un certain abus: la notation \mathbf{A}^\dagger désignera tantôt une algèbre faiblement complète, tantôt la complétion \dagger -adique d’une algèbre \mathbf{A} , cette dernière pourra aussi être notée $(\mathbf{A})^\dagger$ dans les passages où la nuance sera importante.

1.3 Rappels sur les algèbres faiblement complètes

1.3.1. Dans cet article nous allons utiliser, souvent sans référence, certaines propriétés de base établies par Monsky-Washnitzer ([MW]) et Meredith ([M]). Voici une liste de ces propriétés valables lorsque l’anneau \mathbf{R} est noethérien (*loc.cit.*).

- a) Pour toute $\mathbf{A} \in \mathbf{Alg}(\mathbf{R})$ l’application $\iota(\mathbf{A}^\dagger) : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow (\mathbf{A}^\dagger)^\dagger$ est bijective, autrement dit $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. De plus, si \mathbf{A} est de type fini, \mathbf{A}^\dagger est f.c.t.f.
- b) Si \mathbf{A}^\dagger est f.c. l’idéal \mathbf{IA}^\dagger est contenu dans le radical de Jacobson de \mathbf{A}^\dagger .
- c) Soit \mathbf{A} une algèbre. Si \mathbf{A} et \mathbf{A}^\dagger sont noethériennes, \mathbf{A}^\dagger est plate sur \mathbf{A} ([M]).
- d) Une algèbre est f.c.t.f. si et seulement si c’est un quotient de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_m]^\dagger$ pour $m \gg 0$.
- e) Une algèbre f.c.t.f. est noethérienne.
- f) Si \mathbf{A}^\dagger est f.c.t.f. $(\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{IA}^\dagger)$ est un anneau de Zariski. En particulier, $f \in \mathbf{A}^\dagger$ est inversible si et seulement si sa réduction $\bar{f} \in \mathbf{A}^\dagger_1$ l’est.
- g) Un module de type fini sur une algèbre f.c.t.f. est \mathbf{I} -adiquement séparé.
- h) Soit $\alpha : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$ un morphisme d’algèbres f.c.t.f., notons $\bar{\alpha}$ sa réduction modulo \mathbf{I} .
 - 1) Si $\bar{\alpha}$ est surjective, α est surjective.
 - 2) Si $\bar{\alpha}$ est bijective et \mathbf{B}^\dagger est plate sur \mathbf{R} , α est bijective.

La proposition suivante est une reformulation de plusieurs résultats de [MW].

1.3.2. Proposition

- a) Le foncteur $(-)^{\dagger} : \mathbf{Alg}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ est adjoint à gauche du foncteur d’inclusion de $\mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ dans $\mathbf{Alg}(\mathbf{R})$. Autrement dit, le morphisme fonctoriel

$$\begin{aligned} \mathbf{Homom}_{\mathbf{R}^\dagger}(\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{B}^\dagger) &\longrightarrow \mathbf{Homom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}^\dagger) \\ \alpha &\longmapsto \alpha \circ \iota(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

est bijectif pour tous $\mathbf{A} \in \mathbf{Alg}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

- b) Soit \mathbf{C} l’une des catégories $\mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ ou $\mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. Pour tous $\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{B}^\dagger, \mathbf{S}^\dagger \in \mathbf{C}$ et pour tous morphismes de \mathbf{R} -algèbres $\alpha : \mathbf{S}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$ et $\beta : \mathbf{S}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$, munissons \mathbf{A}^\dagger et \mathbf{B}^\dagger des structures de \mathbf{S}^\dagger -algèbres définies respectivement par α et β . Alors, le foncteur

$$\mathbf{Homom}_{\mathbf{S}^\dagger}(\mathbf{A}^\dagger, -) \times \mathbf{Homom}_{\mathbf{S}^\dagger}(\mathbf{B}^\dagger, -) : \mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$$

est représentable par $(\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{S}^\dagger} \mathbf{B}^\dagger)^\dagger$ et les morphismes

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\dagger &\longrightarrow (\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{S}^\dagger} \mathbf{B}^\dagger)^\dagger & \text{et} & & \mathbf{B}^\dagger &\longrightarrow (\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{S}^\dagger} \mathbf{B}^\dagger)^\dagger \\ a &\longmapsto a \otimes 1 & & & b &\longmapsto 1 \otimes b \end{aligned}$$

Autrement dit, les catégories $\mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et $\mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ possèdent des coproduits.

1.3.3. Localisation †-adique. Étant donnés $f \in \mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$, il existe une algèbre $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} \in \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et un morphisme $\nu_f^\dagger : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$, uniques à isomorphisme canonique près, tels que tout morphisme d'algèbres $\mu : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$ tel que $\mu(f)$ est inversible se factorise de manière unique à travers ν_f^\dagger . L'algèbre $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$, qu'on appellera «la localisation †-adique de \mathbf{A}^\dagger en f », est la complétion faible de la localisation algébrique $\mathbf{A}^\dagger[\frac{1}{f}]$, i.e. $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} = (\mathbf{A}^\dagger[\frac{1}{f}])^\dagger$, en particulier, si \mathbf{A}^\dagger est f.c.t.f., il en est de même de $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$.

1.3.4. Lorsque aucune confusion ne sera à craindre on notera de la même manière un élément $a \in \mathbf{A}^\dagger$ et son image $\nu_f^\dagger(a) \in \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$.

1.3.5. Voici quelques propriétés utiles de la localisation †-adique (cf. [MW,M]).

a) Si $f \in \mathbf{A} \in \mathbf{Alg}(\mathbf{R})$, le morphisme canonique $\mathbf{A}[\frac{1}{f}]^\dagger \rightarrow (\mathbf{A}^\dagger)\{\frac{1}{f}\}$ est bijectif.

Soient $f, g \in \mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

b) Le morphisme canonique $\mathbf{A}^\dagger_s[\frac{1}{f}] \rightarrow \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}_s$, est bijectif pour tout $s = 1, 2, \dots$

c) Si \bar{f} est inversible dans $\mathbf{A}^\dagger_1[\frac{1}{g}]$, le morphisme canonique $\mathbf{A}^\dagger_1[\frac{1}{f}] \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_1[\frac{1}{g}]$ est la réduction d'un et d'un unique morphisme de \mathbf{A}^\dagger -algèbres $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{g}\}$.

d) Si \mathbf{A}^\dagger est f.c.t.f., l'algèbre $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ est de Zariski (1.3.1-f) et plate sur \mathbf{A}^\dagger ([M]).

1.3.6. Commentaire. Il est assez clair à partir des définitions que pour $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et $f \in \mathbf{A}^\dagger$, on a $\varinjlim_{\mathbf{B}^\dagger \in \mathcal{B}_f} \mathbf{B}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger$ où \mathcal{B}_f désigne la famille des sous-algèbres f.c.t.f. de \mathbf{A}^\dagger qui contiennent f . On a donc un morphisme canonique $\Xi : \varinjlim_{\mathbf{B}^\dagger \in \mathcal{B}_f} \mathbf{B}^\dagger\{\frac{1}{f}\} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ qui est surjectif mais qui n'est pas nécessairement injectif. En effet, $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ est l'espace séparé \mathbf{I} -adique associé à l'espace $\varinjlim_{\mathbf{B}^\dagger \in \mathcal{B}_f} \mathbf{B}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ mais ce dernier n'a a priori aucune raison d'être séparé. L'algèbre $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ n'est donc pas nécessairement la limite inductive des localisations des sous-algèbres f.c.t.f. de \mathbf{A}^\dagger contenant f .

1.4 Localisation †-adique dans le cas f.c.t.f.

1.4.1. Localisation †-adique de modules. Étant donnés $f \in \mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et un \mathbf{A}^\dagger -module \mathbf{M} la «localisation †-adique de \mathbf{M} en f » se définit de manière analogue au cas algébrique. On pose

$$\mathbf{M}\{\frac{1}{f}\} := \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M}$$

et on note $\nu_f^\dagger(\mathbf{M}) : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}\{\frac{1}{f}\}$ l'application canonique $m \mapsto 1 \otimes m$.

1.4.2. Lorsque aucune confusion ne sera à craindre on notera de la même manière un élément $m \in \mathbf{M}$ et son image $\nu_f^\dagger(\mathbf{M})(a) \in \mathbf{M}\{\frac{1}{f}\}$.

1.4.3. Proposition. Pour $f \in \mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{ictf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ l'ensemble $S_f := \{f^n + \mathbf{I}\mathbf{A}^\dagger \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un système multiplicatif de \mathbf{A}^\dagger et pour tout \mathbf{A}^\dagger -module \mathbf{M} , le morphisme canonique

$$S_f^{-1}\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}\left\{\frac{1}{f}\right\}$$

est **injectif**. Le noyau du morphisme canonique $\nu_f^\dagger(\mathbf{M}) : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}\left\{\frac{1}{f}\right\}$ est l'ensemble des $m \in \mathbf{M}$ tels $(f^N + w) \cdot m = 0$ pour certains $w \in \mathbf{I}\mathbf{A}^\dagger$ et $N \in \mathbb{N}$ (dépendants de m). En particulier, si $m \in \ker(\nu_f^\dagger(\mathbf{M}))$, on a $f^N m \in (\mathbf{I}\mathbf{A}^\dagger) \cdot m$ pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand.

Preuve. Supposons le module \mathbf{M} de type fini sur \mathbf{A}^\dagger . Le $\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{f}\right\}$ -module $\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{f}\right\} \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M}$ est alors de type fini donc \mathbf{I} -adiquement séparé (1.3.1-g) et le noyau du morphisme

$$\mathbf{M}\left[\frac{1}{f}\right] := \mathbf{A}^\dagger\left[\frac{1}{f}\right] \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M} \xrightarrow[\iota(\mathbf{A}^\dagger[1/f]) \otimes \text{id}]^{\mu} \mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{f}\right\} \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M} =: \mathbf{M}\left\{\frac{1}{f}\right\}$$

contient l'adhérence \mathbf{I} -adique $\bar{0}$ de 0 dans $\mathbf{M}\left[\frac{1}{f}\right]$. Réciproquement, on a aussi $\ker(\mu) \subseteq \bar{0}$ puisque les réductions modulo \mathbf{I}^s de μ sont des isomorphismes (1.3.5-b). Par conséquent $\ker(\mu) = \bar{0}$. Or, comme $\mathbf{A}^\dagger\left[\frac{1}{f}\right]$ est noethérien et que $\mathbf{M}\left[\frac{1}{f}\right]$ est un $\mathbf{A}^\dagger\left[\frac{1}{f}\right]$ -module de type fini, on a $\mathbf{I}\bar{0} = \bar{0}$ et donc $(1+w) \cdot \ker(\mu) = 0$, pour un certain $w \in \mathbf{I}\mathbf{A}^\dagger\left[\frac{1}{f}\right]$; autrement dit $(f^N + w) \cdot \ker(\mu) = 0$, pour certains $N \in \mathbb{N}$ et $w \in \mathbf{I}\mathbf{A}^\dagger$. La réciproque étant claire, on a $\ker(\mu) = \text{Annul}_{\mathbf{M}[1/f]}(f^N + w)$. Cela étant, $\nu_f^\dagger(\mathbf{M})$ se factorise à travers le morphisme canonique $\nu_f(\mathbf{M}) : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}\left[\frac{1}{f}\right]$, i.e. $\nu_f^\dagger(\mathbf{M}) = \mu \circ \nu_f(\mathbf{M})$, de sorte que $\nu_f^\dagger(\mathbf{M})(m) = 0$ si et seulement si $\nu_f(\mathbf{M})((f^N + w)m) = 0$, ou encore $f^M(f^N + w) \cdot m = 0$ pour $M \in \mathbb{N}$ assez grand et indépendant de m puisque $\ker(\nu_f^\dagger(\mathbf{M}))$ de t.f. On a ainsi prouvé que pour tout \mathbf{A}^\dagger -module de type fini \mathbf{M} il existe $N \in \mathbb{N}$ et $w \in \mathbf{I}\mathbf{A}^\dagger$ tels que

$$\ker(\nu_f^\dagger(\mathbf{M}) : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{f}\right\} \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M}) = \text{Annul}_{\mathbf{M}}(f^N + w).$$

Dans le cas où \mathbf{M} est un \mathbf{A}^\dagger -module arbitraire on note $\langle m \rangle$ le sous- \mathbf{A}^\dagger -module de \mathbf{M} engendré par un élément $m \in \mathbf{M}$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \langle m \rangle & \xrightarrow{\subseteq} & \mathbf{M} \\ \nu_f^\dagger(\langle m \rangle) \downarrow & & \downarrow \nu_f^\dagger(\mathbf{M}) \\ \mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{f}\right\} \otimes \langle m \rangle & \xrightarrow{\text{id} \otimes \subseteq} & \mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{f}\right\} \otimes \mathbf{M} \end{array}$$

où $(\text{id} \otimes \subseteq)$ est injectif puisque l'algèbre $\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{f}\right\}$ est plate sur \mathbf{A}^\dagger (1.3.5-d). Il s'ensuit que m appartient au noyau de $\nu_f^\dagger(\mathbf{M})$, si et seulement si, il appartient au noyau de $\nu_{f, \langle m \rangle}^\dagger$ déjà étudié dans le paragraphe précédent. ■

1.5 Algèbres f.c.t.f. et complétion d'algèbres de t.f.

On prendra garde du fait que le foncteur $(-)^{\dagger} : \mathbf{Alg}_{\text{tf}}(\mathbf{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Alg}_{\text{ictf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ n'est pas essentiellement surjectif. La proposition suivante nous permettra souvent de contourner cette difficulté.

1.5.1. Proposition. *Étant donné une algèbre \mathbf{A}^\dagger f.c.t.f. et des éléments $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{A}^\dagger$, il existe une algèbre de type fini \mathbf{B} , des éléments $b_1, \dots, b_m \in \mathbf{B}$ et un morphisme d'algèbres $\mu : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$ avec $\alpha(b_i) = a_i$, tels que les morphismes induits*

$$\mu_{i_1, \dots, i_t} : \mathbf{B} \left[\frac{1}{b_{i_1} \dots b_{i_t}} \right]^\dagger \otimes_{\mathbf{B}^\dagger} \mathbf{A}^\dagger \xrightarrow{\simeq} \mathbf{A}^\dagger \left\{ \frac{1}{a_{i_1} \dots a_{i_t}} \right\} \quad (\diamond)$$

sont des isomorphismes quel que soit l'ensemble $\{i_1, \dots, i_t\} \subseteq \{1, \dots, m\}$.

Si de plus $(a_1, \dots, a_m) = \mathbf{A}^\dagger$, l'algèbre \mathbf{B} et les éléments b_1, \dots, b_m peuvent être choisis tels que $(b_1, \dots, b_m) = \mathbf{B}$.

Preuve. Fixons un morphisme surjectif $\mu : \mathbf{R}[\overline{X}]^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$ (1.3.1-d) et soit \mathbf{B} la sous-algèbre de $\mathbf{R}[\overline{X}]^\dagger$ engendrée par $\mathbf{R}[\overline{X}]$ et des éléments b_1, \dots, b_m vérifiant $\mu(b_i) = a_i$. Les applications $\mathbf{B} \left[\frac{1}{b_{i_1} \dots b_{i_t}} \right]^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger \left\{ \frac{1}{a_{i_1} \dots a_{i_t}} \right\}$ induites par μ sont alors clairement des surjections, de même donc que les μ_{i_1, \dots, i_t} . D'autre part la réduction modulo \mathbf{I}^s de μ_{i_1, \dots, i_t} s'identifie à l'isomorphisme de localisation algébrique (1.2.1-e, 1.3.5-b) :

$$(\mu_{i_1, \dots, i_t})_s : \mathbf{B}_s \left[\frac{1}{b_{i_1} \dots b_{i_t}} \right] \otimes_{\mathbf{B}_s} \mathbf{A}^\dagger_s \xrightarrow{\simeq} \mathbf{A}^\dagger_s \left[\frac{1}{a_{i_1} \dots a_{i_t}} \right], \quad (\diamond_s)$$

et $\ker(\mu_{i_1, \dots, i_t})$ est contenu dans l'adhérence \mathbf{I} -adique de (0) , or $\mathbf{B} \left[\frac{1}{b_{i_1} \dots b_{i_t}} \right]^\dagger \otimes \mathbf{A}^\dagger$ est \mathbf{I} -adiquement séparé (1.3.1-g).

L'argument qui précède reste vrai pour peu que l'on ait une algèbre de type fini \mathbf{B} et un morphisme $\mu : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$ dont l'image contienne les a_i et tel que $\mu^\dagger : \mathbf{B}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$ soit surjectif. Il s'ensuit que si l'on a $1 = \sum_i a_i a'_i$ on peut remplacer \mathbf{B} par la localisation $\mathbf{B}(b'_1, \dots, b'_m) \left[\frac{1}{\sum_i b_i b'_i} \right]$ où $\mu(b_i) = a_i$ et où $\mathbf{B}(b'_1, \dots, b'_m)$ désigne la \mathbf{B} -sous-algèbre de \mathbf{B}^\dagger engendrée par des éléments $b'_i \in \mathbf{B}^\dagger$ vérifiant $\mu^\dagger(b'_i) = a'_i$. ■

§2. Recouvrements et recollements \dagger -adiques

Dans cette section nous prouvons trois théorèmes techniques concernant les localisations \dagger -adiques dont on déduira par des raisonnements plus ou moins formels les principaux résultats de l'article.

2.1 Préliminaire technique

2.1.1. Proposition. *On se donne un élément P et un idéal \mathbf{K} de $\mathbf{R}[\overline{X}] := \mathbf{R}[X_1, \dots, X_\ell]$. Pour tous $d, s \in \mathbb{N}$, notons $\mathbf{I}^s[\overline{X}]_d$ le sous- \mathbf{R} -module des polynômes de $\mathbf{R}[\overline{X}]$ à coefficients dans \mathbf{I}^s et de degré total majoré par d .*

a) *Il existe des entiers positifs $N(P, \mathbf{K})$ et $D(P, \mathbf{K})$, tels que les ensembles :*

$$\begin{aligned} \mathbf{C1}(P, \mathbf{K}, s) &= \left\{ Q \in \mathbf{I}^s[\overline{X}] \mid P^N Q \in (\mathbf{K} + \mathbf{I}^{s+1}[\overline{X}]), \text{ pour } N \text{ assez grand} \right\} \\ \mathbf{C2}(P, \mathbf{K}, s) &= \left\{ Q \in \mathbf{I}^s[\overline{X}] \mid P^{N(P, \mathbf{K})} Q \in (\mathbf{K} + \mathbf{I}^{s+1}[\overline{X}]_{d+D(P, \mathbf{K})}) \text{ si } Q \in \mathbf{I}^s[\overline{X}]_d \right\} \end{aligned}$$

sont égaux quel que soit $s \in \mathbb{N}$.

- b) Plus généralement, si $Q \in \mathbf{I}^s[\overline{X}]_d$ et si $P^N Q \in (\mathbf{K} + \mathbf{I}^{s+r}[\overline{X}])$, pour N assez grand et pour un certain $r \in \mathbb{N}$, alors $P^{rN(P, \mathbf{K})} Q \in (\mathbf{K} + \mathbf{I}^{s+r}[\overline{X}]_{d+rD(P, \mathbf{K})})$.
- c) Pour tous $d, s \in \mathbb{N}$, on a $(\mathbf{K} + \mathbf{I}^s[\overline{X}]) \cap \mathbf{R}[\overline{X}]_d \subseteq \mathbf{K} + \mathbf{I}^s[\overline{X}]_{d+sD(1, \mathbf{K})}$.

Preuve. Pour chaque $d, s \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{F}^{s,d}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\overline{X}]) := \mathbf{I}^s[\overline{X}]_d U^s T^d$, où U et T désignent des variables formelles. On munit $\mathcal{F}^{s,d}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\overline{X}])$ de la structure de \mathbf{R} -module de $\mathbf{I}^s[\overline{X}]_d$ et l'on considère $\mathcal{F}^{*,*}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\overline{X}]) := \bigoplus_{s,d \in \mathbb{N}} \mathbf{I}^s[\overline{X}]_d U^s T^d$ muni de la structure d'algèbre positivement graduée donnée par les égalités :

$$Q_1 U^{s_1} T^{d_1} \cdot Q_2 U^{s_2} T^{d_2} := Q_1 Q_2 U^{s_1+s_2} T^{d_1+d_2},$$

pour tous $s_i, d_i \in \mathbb{N}$ et $Q_i \in \mathbf{I}^{s_i}[\overline{X}]_{d_i}$. La \mathbf{R} -sous-algèbre

$$\mathcal{F}^{0,*}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\overline{X}]) = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}[\overline{X}]_1 T \oplus \mathbf{R}[\overline{X}]_2 T^2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}[\overline{X}]_d T^d \oplus \cdots$$

est engendrée par $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}[\overline{X}]_1 T$, et $\mathcal{F}^{*,*}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\overline{X}])$, vue comme $\mathcal{F}^{0,*}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\overline{X}])$ -algèbre, est engendrée par $\mathbf{R} \oplus \mathbf{I}U$. Il s'ensuit que $\mathcal{F}^{*,*}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\overline{X}])$ est une \mathbf{R} -algèbre de type fini et c'est donc un anneau **noethérien**.

Existence de $N(P, \mathbf{K})$. L'inclusion $\mathcal{C}2(P, \mathbf{K}, s) \subseteq \mathcal{C}1(P, \mathbf{K}, s)$ est claire. L'ensemble des sommes finies $\sum_{s,d} Q_{s,d} U^s T^d$ où $Q_{s,d} \in \mathcal{C}1(P, \mathbf{K}, s)$ est un idéal noté \mathcal{C} de l'anneau noethérien $\mathcal{F}^{*,*}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\overline{X}])$, il est donc de type fini, l'existence de $N(P, \mathbf{K})$ s'ensuit de même que l'inclusion inverse $\mathcal{C}2(P, \mathbf{K}, s) \supseteq \mathcal{C}1(P, \mathbf{K}, s)$

Existence de $D(P, \mathbf{K})$. Pour $D \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{C}(D)$ des éléments $\sum_{s,d} Q_{s,d} U^s T^d$ de \mathcal{C} tels que $P^{N(P, \mathbf{K})} Q_{s,d} \in (\mathbf{K} + \mathbf{I}^{s+1}[\overline{X}]_{d+D})$, est un idéal de $\mathcal{F}^{*,*}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\overline{X}])$, et comme \mathcal{C} est la réunion de la suite croissante d'idéaux $\mathcal{C}(0) \subseteq \mathcal{C}(1) \subseteq \cdots \mathcal{C}(D) \subseteq \cdots$, on a $\mathcal{C} = \mathcal{C}(D)$ pour D assez grand. On peut donc prendre pour $D(P, \mathbf{K})$ la borne inférieure de tels D .

L'assertion (b) résulte par itération de (a), et (c) est cas particulier de (b) avec $P = 1$. ■

2.2 Exactitude des suites courtes de Mayer-Vietoris

2.2.1. Notations. Pour $f_1, f_2 \in \mathbf{A} \in \mathbf{Alg}(\mathbf{R})$ on notera

$$\nu_i : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \left[\frac{1}{f_i} \right], \quad \nu_{12}^i : \mathbf{A} \left[\frac{1}{f_i} \right] \rightarrow \mathbf{A} \left[\frac{1}{f_1 f_2} \right]$$

les morphismes canoniques de localisation algébrique.

De manière analogue, si $f_1, f_2 \in \mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ on notera

$$\nu_i^\dagger : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger \left\{ \frac{1}{f_i} \right\}, \quad \nu_{12}^{i\dagger} : \mathbf{A}^\dagger \left\{ \frac{1}{f_i} \right\} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger \left\{ \frac{1}{f_1 f_2} \right\}$$

les morphismes canoniques de localisation \dagger -adique.

Lorsque aucune confusion ne sera à craindre on notera de la même manière l'élément d'une algèbre et son image dans un localisé.

2.2.2. Le cas algébrique. Lorsque $(f_1, f_2) = \mathbf{A}$, la suite de Mayer-Vietoris du faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathbf{X}/R}$ du schéma affine associé à \mathbf{A} relatif au recouvrement principal $\mathbf{X} = D(f_1) \cup D(f_2)$ est la suite exacte bien connue en géométrie algébrique

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{A}\left[\frac{1}{f_1}\right] \oplus \mathbf{A}\left[\frac{1}{f_2}\right] \xrightarrow{\delta_0} \mathbf{A}\left[\frac{1}{f_1 f_2}\right] \rightarrow \mathbf{0} \quad (\text{MV})$$

où $\epsilon(x) = (x, x)$ et $\delta_0(x, y) = x - y$. Le théorème 2.2.4, qui concerne la version \dagger -adique de cette propriété, sera démontré suivant une démarche très proche de celle du cas algébrique que nous rappelons brièvement maintenant et qui repose pour l'essentiel sur les deux propriétés élémentaires suivantes :

MV-a) Le noyau de $\nu_i : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}\left[\frac{1}{f_i}\right]$ est l'idéal des $a \in \mathbf{A}$ tels $f_i^N a = 0$ pour $N \gg 0$.

MV-b) Lorsque $1 = \zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2$, le développement de $(\zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2)^{2N}$ donne des éléments $\xi_{i,N}$ (qui dépendent polynomialement de $\{\zeta_i, f_i\}$), tels que $\xi_{1,N} f_1^N + \xi_{2,N} f_2^N = 1$.

Voici comment elles sont utilisées.

Injectivité de ϵ . Si $\epsilon(x) = 0$, il existe $N \gg 0$ tel que $f_i^N x = 0$ (MV-a), et alors (MV-b)

$$x = \xi_{1,N} f_1^N x + \xi_{2,N} f_2^N x = 0$$

Exactitude du terme central de (MV). Soient $x_i = a_i / f_i^N \in \mathbf{A}\left[\frac{1}{f_i}\right]$ avec $a_i \in \mathbf{A}$. La condition $x_1 = x_2$ dans $\mathbf{A}\left[\frac{1}{f_1 f_2}\right]$, équivaut à l'égalité sur \mathbf{A} (MV-a) :

$$(f_1 f_2)^M (f_2^N a_1 - f_1^N a_2) = 0, \text{ pour } M \gg 0. \quad (\star)$$

et grâce à l'égalité $1 = \xi_{1,M+N} f_1^{M+N} + \xi_{2,M+N} f_2^{M+N}$ (MV-b), l'élément

$$a := \xi_{1,M+N} f_1^M a_1 + \xi_{2,M+N} f_2^M a_2 \in \mathbf{A} \quad (\star\star)$$

vérifie bien $a = x_i$ dans $\mathbf{A}\left[\frac{1}{f_i}\right]$ pour $i = 1, 2$. En effet, dans $\mathbf{A}\left[\frac{1}{f_1}\right]$ l'égalité ' $a = x_1$ ' équivaut à l'égalité ' $f_1^N a = a_1$ ', or :

$$\begin{aligned} f_1^N a &= \xi_{1,M+N} f_1^{M+N} a_1 + \xi_{2,M+N} f_2^M f_1^N a_2 \\ &= \xi_{1,M+N} f_1^{M+N} a_1 + \xi_{2,M+N} f_2^{M+N} a_1, \text{ (d'après } (\star)) \\ &= a_1 \end{aligned}$$

Exactitude à droite de (MV). Dans $\mathbf{A}\left[\frac{1}{f_1 f_2}\right]$ on a les décompositions (MV-b) :

$$\left(\frac{1}{f_1 f_2}\right)^N = \frac{\xi_{1,N} f_1^N + \xi_{2,N} f_2^N}{f_1^N f_2^N} = \frac{\xi_{1,N}}{f_2^N} + \frac{\xi_{2,N}}{f_1^N}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$. En particulier, un élément $z \in \mathbf{A}\left[\frac{1}{f_1 f_2}\right]$ est toujours de la forme

$$z = \frac{a}{(f_1 f_2)^N} = \frac{\xi_{1,N}}{f_2^N} a + \frac{\xi_{2,N}}{f_1^N} a$$

avec $a \in \mathbf{A}$. On y voit bien que z appartient à l'image de δ_0 .

2.2.3. Le cas \dagger -adique. Dans ce cas nous serons amenés à monter l'exactitude de la complétion \dagger -adique de (MV), c'est-à-dire de la suite

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger} \mathbf{A}[\frac{1}{f_1}]^\dagger \oplus \mathbf{A}[\frac{1}{f_2}]^\dagger \xrightarrow{\delta_0^\dagger} \mathbf{A}[\frac{1}{f_1 f_2}]^\dagger \rightarrow \mathbf{0}. \quad (\text{MV}^\dagger)$$

Nous utiliserons, comme nous venons de le rappeler, la description du noyau du morphisme canonique $\mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ (prop. 1.4.3), des expressions polynomiales de $\xi_{i,N}$ en termes de ζ_i, f_i , et plus important encore des estimations (2.1.1) des degrés M et N dans (\star) et $(\star\star)$ nécessaires pour l'étude de la convergence \dagger -adique. Abordons maintenant la preuve du théorème annoncé dans 2.2.2.

2.2.4. Théorème. Soient $f_1, f_2 \in \mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{icf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ tels que $(f_1, f_2) = \mathbf{A}^\dagger$, la suite

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger} \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f_1}\} \oplus \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f_2}\} \xrightarrow{\delta_0^\dagger} \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f_1 f_2}\} \rightarrow \mathbf{0} \quad (\{\text{MV}\})$$

avec $\epsilon^\dagger(x) = (x, x)$ et $\delta_0^\dagger(x, y) = x - y$ est exacte.

Preuve. La proposition résultera de montrer l'exactitude de la complétion \dagger -adique (MV^\dagger) des suites (MV). En effet, si \mathbf{A}^\dagger est f.c.t.f., il existe d'après 1.5.1, une algèbre de type fini \mathbf{B} , des éléments $b_1, b_2 \in \mathbf{B}$ vérifiant $(b_1, b_2) = \mathbf{B}$ et un morphisme $\mu : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$ avec $\mu(b_i) = a_i$ tels que

$$\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f_i}\} = \mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}^\dagger} \mathbf{B}[\frac{1}{b_i}]^\dagger \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f_1 f_2}\} = \mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}^\dagger} \mathbf{B}[\frac{1}{b_1 b_2}]^\dagger.$$

La suite (MV^\dagger) résulte alors d'appliquer le foncteur $(-) \otimes_{\mathbf{B}^\dagger} \mathbf{A}^\dagger$ à la suite

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{B}^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger} \mathbf{B}[\frac{1}{b_1}]^\dagger \oplus \mathbf{B}[\frac{1}{b_2}]^\dagger \xrightarrow{\delta_0^\dagger} \mathbf{B}[\frac{1}{b_1 b_2}]^\dagger \rightarrow \mathbf{0} \quad (1)$$

Or, si nous supposons la proposition démontrée pour les suites (MV^\dagger) , la suite (1) sera une résolution \mathbf{B}^\dagger -plate du \mathbf{B}^\dagger -module $\mathbf{B}[\frac{1}{b_1 b_2}]^\dagger$ qui est lui-même \mathbf{B}^\dagger -plat (1.3.5-d) et la suite $(\{\text{MV}\})$ sera, par conséquent, elle aussi exacte.

Supposons maintenant donnée une algèbre de type fini \mathbf{A} avec $f_1, f_2 \in \mathbf{A}$ vérifiant $(f_1, f_2) = \mathbf{A}$. Notons $\mathbf{A}^\dagger := (\mathbf{A})^\dagger$. Un élément de \mathbf{A} et son image dans \mathbf{A}^\dagger par le morphisme canonique $\iota(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$ seront notés de la même manière. On a $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} = \mathbf{A}[\frac{1}{f}]^\dagger$ quel que soit $f \in \mathbf{A}$.

Injectivité de ϵ^\dagger . Pour $x \in \ker(\epsilon^\dagger)$, on a $\nu_i^\dagger(x) = 0$ pour $i = 1, 2$. Par 1.4.3, il existe des entiers N_i et des éléments $w_i \in \mathbf{I}\mathbf{A}^\dagger$ tels que $(f_i^{N_i} + w_i)x = 0$. Comme $\mathbf{A}f_1 + \mathbf{A}f_2 = \mathbf{A}$, il existe $\xi_i \in \mathbf{A}$ tel que $\sum_i \xi_i f_i^{N_i} = 1$ et $\text{Annul}_{\mathbf{A}^\dagger}(x)$ contient un élément de la forme $(1 + w)$ avec $w \in \mathbf{I}\mathbf{A}^\dagger$ et donc $\text{Annul}_{\mathbf{A}^\dagger}(x) = \mathbf{A}^\dagger$ (1.3.1-f).

Exactitude du terme central de (MV^\dagger) . Fixons une famille $\vec{a} = (a_1, \dots, a_\ell)$ de générateurs algébriques de \mathbf{A} en tant que \mathbf{R} -algèbre. Fixons une relation $\zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2 = 1$

dans \mathbf{A} . Notons $\vec{f} := (f_1, f_2)$ et $\vec{\zeta} := (\zeta_1, \zeta_2)$. Notons $\{\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}\}$ la famille de variables $\{A_1, \dots, A_\ell, F_1, F_2, Z_1, Z_2\}$ et considérons la surjection de \mathbf{R} -algèbres :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}] & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{A} \\ A_k & \longmapsto & a_k \\ F_i & \longmapsto & f_i \\ Z_i & \longmapsto & \zeta_i \end{array} \quad 1 \leq k \leq \ell \quad \text{et} \quad i = 1, 2.$$

dont on notera $\mathbf{K} := \ker(\alpha)$. On a donc $\alpha^{-1}(\mathbf{I}^m \mathbf{A}) = \mathbf{K} + \mathbf{I}^m[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Un élément $\vec{z}_i \in \mathbf{A}[\frac{1}{f_i}]^\dagger$ s'exprime toujours comme somme d'une série (1.2.1-f)

$$z_i = \sum_{j \geq 0} p_{i,j}(\vec{a}, 1/f_i) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_{i,j} \in \mathbf{I}^j[\vec{A}, T_i], & \text{et} \\ \deg_{\vec{A}, T_i}(p_{i,j}) \leq (j+1)C_i, \end{cases}$$

et donc aussi comme somme d'une série

$$z_i = \sum_{j \geq 0} \frac{q_{i,j}(\vec{a}, f_i)}{f_i^{(j+1)C_i}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_{i,j} \in \mathbf{I}^j[\vec{A}, F_i], & \text{et} \\ \deg_{\vec{A}, F_i}(q_{i,j}) \leq 2(j+1)C_i, \end{cases}$$

Lorsque $\vec{z} \in \mathbf{A}[\frac{1}{f_1}]^\dagger \oplus \mathbf{A}[\frac{1}{f_2}]^\dagger$, on pose $C = \sup\{C_1, C_2\}$ et alors

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \sum_{j \geq 0} \begin{pmatrix} \frac{q_{1,j}(\vec{a}, f_1)}{f_1^{(j+1)C}} \\ \frac{q_{2,j}(\vec{a}, f_2)}{f_2^{(j+1)C}} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_{i,j} \in \mathbf{I}^j[\vec{A}, \vec{F}], & \text{et} \\ \deg_{\vec{A}, \vec{F}}(q_{i,j}) \leq 2(j+1)C, \end{cases}$$

Pour $s \in \mathbb{N}$ on définit le polynôme $S_{i,s} \in \mathbf{R}[\vec{A}, \vec{F}]$ par l'égalité :

$$\sum_{j=0}^s \frac{q_{i,j}(\vec{A}, \vec{F})}{F_i^{(j+1)C}} = \frac{\sum_{j=0}^s F_i^{(s-j)C} q_{i,j}(\vec{A}, \vec{F})}{F_i^{(s+1)C}} =: \frac{S_{i,s}(\vec{A}, \vec{F})}{F_i^{(s+1)C}},$$

de sorte que

$$\deg_{\vec{A}, \vec{F}}(S_{i,s}) \leq 2(s+1)C.$$

Supposons maintenant que l'on ait $\delta_0(z_1, z_2) = 0$ dans $\mathbf{A}[\frac{1}{f_1, f_2}]^\dagger$.

Pour chaque $s \in \mathbb{N}$, on a par réduction modulo \mathbf{I}^{s+1} :

$$f_2^{(s+1)C} S_{1,s}(\vec{a}, \vec{f}) - f_1^{(s+1)C} S_{2,s}(\vec{a}, \vec{f}) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{A}_{s+1}[\frac{1}{f_1 f_2}],$$

autrement dit, il existe $N \gg 0$ tel que

$$(f_1 f_2)^N \left(f_2^{(s+1)C} S_{1,s}(\vec{a}, \vec{f}) - f_1^{(s+1)C} S_{2,s}(\vec{a}, \vec{f}) \right) \in \mathbf{I}^{s+1} \mathbf{A},$$

ou encore, grâce à la surjectivité de α ,

$$(F_1 F_2)^N \left[F_2^{(s+1)C} S_{1,s}(\vec{A}, \vec{F}) - F_1^{(s+1)C} S_{2,s}(\vec{A}, \vec{F}) \right] \in \mathbf{K} + \mathbf{I}^{s+1}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}], \quad (2)$$

pour chaque $s \in \mathbb{N}$ et pour $N \gg 0$ assez grand.

On remarquera que le terme entre crochets dans la relation (2) est, à priori, seulement dans $\mathbf{I}^0[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]$, de sorte que (2) exprime son appartenance à l'ensemble $\text{C1}(F_1 F_2, \mathbf{K}, 0)$ de la proposition technique 2.1.1. L'égalité $\text{C1}(F_1 F_2, \mathbf{K}, 0) = \text{C2}(F_1 F_2, \mathbf{K}, 0)$ (*loc.cit.*), et l'assertion 2.1.1-(b) pour $s = 0$ et $r = (s + 1)$, nous donnent $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(F_1 F_2)^{(s+1)\mathbf{N}} \left(F_2^{(s+1)\mathbf{C}} S_{1,s}(\vec{A}, \vec{F}) - F_1^{(s+1)\mathbf{C}} S_{2,s}(\vec{A}, \vec{F}) \right) \in \mathbf{K} + \mathbf{I}^{s+1}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}], \quad (3)$$

mais cette fois **quel que soit** $s \in \mathbb{N}$.

La relation (3) étant l'analogie de l'égalité (\star) dans 2.2.2, nous procédons au recollement des $S_{i,s}(\vec{a}, f_i)/f_i^{(s+1)\mathbf{C}}$ suivant la méthode expliquée dans 2.2.2.

En développant pour chaque $L \in \mathbb{N}$ l'expression $(Z_1 F_1 + Z_2 F_2)^{2L}$, on obtient des polynômes $\Xi_{i,L} \in \mathbf{R}[\vec{F}, \vec{Z}]$ vérifiant :

$$\begin{cases} (Z_1 F_1 + Z_2 F_2)^{2L} = \Xi_{1,L}(\vec{F}, \vec{Z}) F_1^L + \Xi_{2,L}(\vec{F}, \vec{Z}) F_2^L, \\ \text{et } \deg_{\vec{F}, \vec{Z}}(\Xi_{i,L}) = 3L \end{cases} \quad (4)$$

On pose alors comme pour $(\star\star)$ dans 2.2.2 :

$$R_s(\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}) := \sum_{i=1,2} \Xi_{i,(s+1)(\mathbf{N}+\mathbf{C})}(\vec{F}, \vec{Z}) F_i^{(s+1)\mathbf{N}} S_{i,s}(\vec{A}, \vec{F}),$$

où l'on remarquera que $\deg_{\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}}(R_s) \leq (s+1)4(\mathbf{N} + \mathbf{C})$.

Par construction, l'élément $R_s(\vec{a}, \vec{f}, \vec{\zeta}) \in \mathbf{A}$ est le recollement de z_1, z_2 **modulo** \mathbf{I}^{s+1} . Ainsi, et après évaluations de degrés, on voit que pour chaque $s \geq 1$ on a :

$$R_s(\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}) - R_{s-1}(\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}) \in (\mathbf{K} + \mathbf{I}^s[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]) \cap \mathbf{R}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]_{(s+1)4(\mathbf{N}+\mathbf{C})},$$

ou encore, grâce à 2.1.1-(c),

$$R_s(\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}) - R_{s-1}(\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}) \in \mathbf{K} + \mathbf{I}^s[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]_{(s+1)\tilde{C}},$$

où $\tilde{C} := 4(\mathbf{N} + \mathbf{C}) + D(1, \mathbf{K})$.

Il existe donc $P_s \in \mathbf{I}^s[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]$ de degré polynôme majoré par $(s+1)\tilde{C}$ tel que $P_s = R_s - R_{s-1} \bmod \mathbf{K}$. La série infinie $\alpha(R_0) + \sum_{1 \leq j} \alpha(P_j)$ représente ainsi un élément $z \in \mathbf{A}^\dagger$ tel que $z = \alpha(R_s) \bmod \mathbf{I}^{s+1}$ pour tout $s \in \mathbb{N}$, mais alors

$$\nu_i^\dagger(z) = z_i \bmod \mathbf{I}^{s+1}, \text{ pour tout } s \in \mathbb{N},$$

autrement dit $\nu_i^\dagger(z) = z_i$, cqfd.

Exactitude à droite de (MV^\dagger) . Nous reprenons les notations des paragraphes précédents. La famille $\{\vec{a}, 1/(f_1 f_2)\}$ est un système de générateurs algébriques de la \mathbf{R} -algèbre $\mathbf{A}[\frac{1}{f_1 f_2}]$ et un élément $z \in \mathbf{A}[\frac{1}{f_1 f_2}]^\dagger$ s'exprime alors comme somme d'une série (1.2.1-f)

$$z = \sum_{j>0} p_j(\vec{a}, 1/(f_1 f_2)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_j \in \mathbf{I}^j[\vec{A}, T]; \\ \deg_{\vec{X}, T}(p_j) < C(j+1). \end{cases}$$

Or, pour $L \in \mathbb{N}$ on a (cf. (6))

$$\frac{1}{(f_1 f_2)^L} = \frac{\Xi_{1,L}(\vec{f}, \vec{\zeta}) f_1^L + \Xi_{2,L}(\vec{f}, \vec{\zeta}) f_2^L}{f_1^L f_2^L} = \frac{\Xi_{1,L}(\vec{f}, \vec{\zeta})}{f_2^L} + \frac{\Xi_{2,L}(\vec{f}, \vec{\zeta})}{f_1^L}$$

de sorte qu'en substituant les monômes T^L qui interviennent dans $p_j[\vec{A}, \vec{T}]$ par

$$T^L = \Xi_{1,L}(\vec{F}, \vec{Z}) T_2^L + \Xi_{2,L}(\vec{F}, \vec{Z}) T_1^L \quad (5)$$

dont le degré en $\{\vec{F}; \vec{Z}, \vec{T}\}$ est $4L$, on obtient les décompositions

$$\begin{cases} \text{(i)} & p_j(\vec{A}, T) = R_{2,j}(\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}, T_2) + R_{1,j}(\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}, T_1) \\ \text{(ii)} & R_{1,j}, R_{2,j} \in \mathbf{I}^j[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}, \vec{T}] \\ \text{(iii)} & \deg_{\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}, T_i}(R_{i,j}) < 4C(j+1) \end{cases}$$

de sorte que la série formelle

$$z_i := \sum_{j \geq 0} R_{i,j}(\vec{a}, \vec{f}, \vec{\zeta}, 1/f_i),$$

appartient bien à $\mathbf{A}[\frac{1}{f_i}]^\dagger$. Ceci termine la démonstration puisque, par construction, on aura $z = z_1 + z_2$ dans $\mathbf{A}[\frac{1}{f_1 f_2}]^\dagger$. \blacksquare

2.3 Cas particulier de l'algèbre des polynômes

Dans cette partie nous revoyons la surjection δ_0^\dagger du théorème 2.2.4 dans le cas particulier de l'algèbre $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_\ell, F]$ et des polynômes $f_1 = F$ et $f_2 = 1 - F$, soit donc l'application $\delta_0^\dagger(x, y) = x - y$,

$$\mathbf{R}[\vec{X}, F][\frac{1}{F}]^\dagger \oplus \mathbf{R}[\vec{X}, F][\frac{1}{1-F}]^\dagger \xrightarrow{\delta_0^\dagger} \mathbf{R}[\vec{X}, F][\frac{1}{F(1-F)}]^\dagger \quad (6)$$

2.3.1. Une section linéaire de δ_0^\dagger . L'algèbre $\mathbf{R}[\vec{X}, F][\frac{1}{F(1-F)}]$ est un $\mathbf{R}[\vec{X}]$ -module libre de base l'ensemble $\{F^m, (\frac{1}{1-F})^n \mid m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. On a la décomposition directe en $\mathbf{R}[\vec{X}]$ -modules libres

$$\mathbf{R}[\vec{X}, F][\frac{1}{F(1-F)}] = \mathbf{R}[\vec{X}, F] \oplus \bigoplus_{1 \leq n} \mathbf{R}[\vec{X}](\frac{1}{F})^n \oplus \bigoplus_{1 \leq n} \mathbf{R}[\vec{X}](\frac{1}{1-F})^n, \quad (7)$$

et donc

$$\mathbf{I}^k \mathbf{R}[\vec{X}, F][\frac{1}{F(1-F)}] = \mathbf{I}^k \mathbf{R}[\vec{X}, F] \oplus \bigoplus_{1 \leq n} \mathbf{I}^k \mathbf{R}[\vec{X}](\frac{1}{F})^n \oplus \bigoplus_{1 \leq n} \mathbf{I}^k \mathbf{R}[\vec{X}](\frac{1}{1-F})^n, \quad (8)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La décomposition (7) permet d'exprimer les éléments $z \in \mathbf{R}[\vec{X}, F] \left[\frac{1}{F(1-F)} \right]^\dagger$ comme sommes de séries la forme

$$z = \sum_{0 \leq j} P_j(\vec{X}, F) + Q_j(\vec{X}, \frac{1}{F}) - R_j(\vec{X}, \frac{1}{1-F}) \quad (9)$$

avec, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour un certain $C \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} P_j, Q_j, R_j \in \mathbf{I}^j \mathbf{R}[\vec{X}, T], \\ Q_j(\vec{X}, 0) = R_j(\vec{X}, 0) = 0, \\ \sup\{\deg P_j, \deg Q_j, \deg R_j\} \leq C(j+1). \end{cases}$$

Remarquons que lorsque $z = 0$, on a pour chaque $r \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=0}^r P_j(\vec{X}, F) + Q_j(\vec{X}, \frac{1}{F}) - R_j(\vec{X}, \frac{1}{1-F}) \in \mathbf{I}^{r+1} \mathbf{R}[\vec{X}, F, \frac{1}{F(1-F)}]$$

auquel cas on a d'après (8) et pour chaque $r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^r P_j(\vec{X}, F) + Q_j(\vec{X}, \frac{1}{F}) \in \mathbf{I}^{r+1} \mathbf{R}[\vec{X}, F], \\ \sum_{j=0}^r R_j(\vec{X}, \frac{1}{1-F}) \in \mathbf{I}^{r+1} \mathbf{R}[\vec{X}, \frac{1}{1-F}]. \end{cases}$$

La conséquence de cette remarque est que pour tout $z \in \mathbf{R}[\vec{X}, F] \left[\frac{1}{F(1-F)} \right]^\dagger$, les séries

$$\sigma_F(z) := \sum_{0 \leq j} P_j(\vec{X}, F) + Q_j(\vec{X}, \frac{1}{F}) \quad \text{et} \quad \sigma_{1-F}(z) := \sum_{0 \leq j} R_j(\vec{X}, \frac{1}{1-F}) \quad (10)$$

dépendent seulement de z et non pas de la série de la forme (7) qui le réalise. Nous avons ainsi deux applications clairement $\mathbf{R}[\vec{X}]^\dagger$ -linéaires

$$\sigma_F : \mathbf{R}[\vec{X}, F] \left[\frac{1}{F(1-F)} \right]^\dagger \rightarrow \mathbf{R}[\vec{X}, F] \left[\frac{1}{F} \right]^\dagger \quad \text{et} \quad \sigma_{1-F} : \mathbf{R}[\vec{X}, F] \left[\frac{1}{F(1-F)} \right]^\dagger \rightarrow \mathbf{R}[\vec{X}, F] \left[\frac{1}{1-F} \right]^\dagger,$$

et $z \mapsto \sigma(z) : (\sigma_F(z), -\sigma_{1-F}(z))$ est, par construction, une section $\mathbf{R}[\vec{X}]^\dagger$ -linéaire de δ_0 ,

$$\begin{array}{c} \mathbf{R}[\vec{X}, F] \left[\frac{1}{F(1-F)} \right]^\dagger \xrightarrow{\sigma} \mathbf{R}[\vec{X}, F] \left[\frac{1}{F} \right]^\dagger \oplus \mathbf{R}[\vec{X}, F] \left[\frac{1}{1-F} \right]^\dagger \xrightarrow{\delta_0} \mathbf{R}[\vec{X}, F] \left[\frac{1}{F(1-F)} \right]^\dagger \\ \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{id}} \uparrow \end{array} \quad (11)$$

2.3.2. Modules $\mathcal{R}_{F_1, \dots, F_r}(C)$. Pour $F_1, \dots, F_r \in \mathbf{R}[\vec{X}, F]$ et $C \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{R}_{F_1, \dots, F_r}(C)$ le sous- \mathbf{R} -module de $\mathbf{R}[\vec{X}, F] \left[\frac{1}{F_1}, \dots, \frac{1}{F_r} \right]^\dagger (= \mathbf{R}[\vec{X}, F] \left[\frac{1}{F_1 \dots F_r} \right]^\dagger)$ des éléments de la forme $z = \sum_{0 \leq j} Z_j(\vec{X}, F, \frac{1}{F_1}, \dots, \frac{1}{F_r})$ où la série $\sum_{0 \leq j} Z_j(\vec{X}, F, \vec{T})$ est telle que :

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \bullet Z_j \in \mathbf{I}^j \mathbf{R}[\vec{X}, F, T_1, \dots, T_r], \\ \bullet \deg_{\vec{X}, F, \vec{T}} Z_j \leq C(j+1); \end{cases}$$

on dira alors que la série $\sum_{0 \leq j} Z_j$ « est de type $\mathcal{R}(C)$ ».

2.3.3. Lemme

a) On a $\mathbf{R}[\vec{X}, F] \left[\frac{1}{F_1}, \dots, \frac{1}{F_r} \right]^\dagger = \bigcup \uparrow_{C \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_{F_1, \dots, F_r}(C)$.

b) Pour chaque $C \in \mathbb{N}$, on a

$$\delta_0^\dagger(\mathcal{R}_F(C) \oplus \mathcal{R}_{1-F}(C)) = \mathcal{R}_{F,1-F}(C) \quad \text{et} \quad \sigma(\mathcal{R}_{F,1-F}(C)) \subseteq \mathcal{R}_F(C) \oplus \mathcal{R}_{1-F}(C)$$

Preuve. (a) résulte des décompositions (7) et (8). Pour (b) on remarque que comme σ est une section de δ_0 l'assertion résultera des inclusions ' \subseteq '. Celle concernant δ_0 est claire. Pour l'autre, des égalités pour tous $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$F^a \left(\frac{1}{F-1}\right)^b = \sum_{k=0}^a \binom{a}{k} (F-1)^{k-b} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{F}\right)^a \left(\frac{1}{1-F}\right)^b = S_{a,b}\left(\frac{1}{F}\right) + S_{b,a}\left(\frac{1}{1-F}\right)$$

où $S_{d,d}(Y) \in \mathbb{Z}[Y]$ est de degré d , vont nous permettre des réécritures de la forme (9) :

$$Z\left(\vec{X}, F, \frac{1}{F}, \frac{1}{1-F}\right) = P\left(\vec{X}, F\right) + Q\left(\vec{X}, \frac{1}{F}\right) - R\left(\vec{X}, \frac{1}{1-F}\right)$$

où, si $Z(\vec{X}, F, T_1, T_2) \in \mathbf{I}^j \mathbf{R}[\vec{X}, F, \vec{T}]$ de degré total majoré d , il en sera de même pour les polynômes P, Q, R ; l'inclusion concernant σ en découle aussitôt. ■

2.4 Un théorème pour le recollement des algèbres f.c.t.f.

Le théorème suivant jouera un rôle clef dans la question du recollement des schémas \dagger -adiques affines de réduction affine de la section 5.

2.4.1. Théorème. On se donne $\bar{f} \in \bar{\mathbf{A}} \in \mathbf{Alg}_{\text{tf}}(\mathbf{R}_1)$ et des relèvements f.c.t.f.

$$\beta : \mathbf{B}^\dagger \rightarrow \bar{\mathbf{A}}\left[\frac{1}{\bar{f}}\right], \quad \text{et} \quad \gamma : \mathbf{C}^\dagger \rightarrow \bar{\mathbf{A}}\left[\frac{1}{1-\bar{f}}\right].$$

On choisit $f \in \mathbf{B}^\dagger$ et $f \in \mathbf{C}^\dagger$ relevant \bar{f} et on suppose qu'il existe un isomorphisme de \mathbf{R} -algèbres $\varphi : \mathbf{C}^\dagger\left\{\frac{1}{f}\right\} \rightarrow \mathbf{B}^\dagger\left\{\frac{1}{1-f}\right\}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^\dagger\left\{\frac{1}{f}\right\} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{B}^\dagger\left\{\frac{1}{1-f}\right\} \\ \gamma\{1/f\} \downarrow & \oplus & \downarrow \beta\{1/(1-f)\} \\ \bar{\mathbf{A}}\left[\frac{1}{f(1-f)}\right] & \xlongequal{\quad} & \bar{\mathbf{A}}\left[\frac{1}{f(1-f)}\right] \end{array}$$

Alors, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}^\dagger \oplus \mathbf{C}^\dagger & \xrightarrow{\delta_{\varphi^\dagger}} & \mathbf{B}^\dagger\left\{\frac{1}{1-f}\right\}, \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta\{1/(1-f)\} \\ \bar{\mathbf{A}}\left[\frac{1}{f}\right] \oplus \bar{\mathbf{A}}\left[\frac{1}{1-f}\right] & \xrightarrow{\delta_0} & \bar{\mathbf{A}}\left[\frac{1}{f(1-f)}\right] \end{array}$$

avec $\delta_0(x, y) = x - y$ et $\delta_{\varphi^\dagger}(x, y) = x - \varphi(y)$, l'application δ_{φ^\dagger} est **surjective**.

Preuve. Fixons une famille $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_\ell\}$ de générateurs \mathbf{R} -algèbre $\bar{\mathbf{A}}$. Notons $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_\ell\}$ et soit $\bar{\pi} : \mathbf{R}[\vec{X}, F]^\dagger \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$ l'épimorphisme d'algèbres défini par $\bar{\pi}(X_i) = \bar{a}_i$

et $\bar{\pi}(F) = \bar{f}$. Pour chaque $P \in \mathbf{R}[\bar{X}, F]$, le morphisme $\bar{\pi}$ induit une surjection de \mathbf{R} -algèbres de $\mathbf{R}[\bar{X}, F][\frac{1}{P}]^\dagger$ sur $\bar{\mathbf{A}}[\frac{1}{\bar{\pi}(P)}]$, nous la noterons :

$$\bar{\pi}_P : \mathbf{R}[\bar{X}, F][\frac{1}{P}]^\dagger \longrightarrow \bar{\mathbf{A}}[\frac{1}{\bar{\pi}(P)}]$$

Par la propriété universelle de l'algèbre des polynômes et de la localisation, il existe des relèvements $\pi_F : \mathbf{R}[\bar{X}, F][\frac{1}{F}]^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$ et $\pi_{1-F} : \mathbf{R}[\bar{X}, F][\frac{1}{1-F}]^\dagger \rightarrow \mathbf{C}^\dagger$ de $\bar{\pi}_F$ et de $\bar{\pi}_{1-F}$ respectivement.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}[\bar{X}, F][\frac{1}{F}]^\dagger & \xrightarrow{\pi_F} \mathbf{B}^\dagger & \xrightarrow{\beta} \bar{\mathbf{A}}[\frac{1}{f}] \\ \downarrow \bar{\pi}_F & \uparrow & \downarrow \bar{\pi}_{1-F} \\ \mathbf{R}[\bar{X}, F][\frac{1}{1-F}]^\dagger & \xrightarrow{\pi_{1-F}} \mathbf{C}^\dagger & \xrightarrow{\beta} \bar{\mathbf{A}}[\frac{1}{1-f}] \end{array}$$

Les morphismes π_F et π_{1-F} sont surjectifs d'après 1.3.1-h. Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}[\bar{X}, F] & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{R}[\bar{X}, F][\frac{1}{F(1-F)}]^\dagger \\ \pi_{1-F} \downarrow & & \downarrow \pi_F\{1/(1-F)\} \\ \mathbf{C}^\dagger\{\frac{1}{f}\} & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & \mathbf{B}^\dagger\{\frac{1}{1-f}\} \end{array}$$

l'existence du morphisme de \mathbf{R} -algèbres Φ rendant le diagramme commutatif résulte de la propriété universelle des algèbres de polynômes. Comme $\varphi = \text{id} \bmod \mathbf{I}$, on peut même définir Φ de sorte que $\Phi(P) = P \bmod \mathbf{I}$, pour tout $P \in \mathbf{R}[\bar{X}, F]$, auquel cas $\Phi(F(1-F))$ est inversible (1.3.1-b) et Φ induit un endomorphisme de \mathbf{R} -algèbre $\phi : \mathbf{R}[\bar{X}, F][\frac{1}{F(1-F)}]^\dagger$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}[\bar{X}, F][\frac{1}{F(1-F)}]^\dagger & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{R}[\bar{X}, F][\frac{1}{F(1-F)}]^\dagger \\ \pi_{1-F}\{1/F\} \downarrow & & \downarrow \pi_F\{1/(1-F)\} \\ \mathbf{C}^\dagger\{\frac{1}{f}\} & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & \mathbf{B}^\dagger\{\frac{1}{1-f}\} \end{array}$$

Or, comme $\mathbf{R}[\bar{X}, F][\frac{1}{F(1-F)}]^\dagger$ est une \mathbf{R} -algèbre f.c.t.f. plate et $\phi = \text{id} \bmod \mathbf{I}$ par construction, le morphisme ϕ est un **isomorphisme** (1.3.1-h).

Nous avons ainsi tous les ingrédients du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R}[\bar{X}, F][\frac{1}{F}]^\dagger \oplus \mathbf{R}[\bar{X}, F][\frac{1}{1-F}]^\dagger & \xrightarrow{\delta_\phi^\dagger} & \mathbf{R}[\bar{X}, F][\frac{1}{F(1-F)}]^\dagger & & \\ \pi_F \downarrow & & \downarrow \pi_{1-F} & & \downarrow \pi_F\{1/(1-F)\} \\ \mathbf{B}^\dagger & \oplus & \mathbf{C}^\dagger & \xrightarrow{\delta_\varphi^\dagger} & \mathbf{B}^\dagger\{\frac{1}{1-f}\} \end{array}$$

et la surjectivité de δ_φ^\dagger résultera de celle de δ_ϕ^\dagger .

Développement de Taylor de ϕ . Comme $\phi : \mathbf{R}[\bar{X}, F][\frac{1}{F(1-F)}]^\dagger$ est un morphisme d'algèbres égal à l'identité modulo \mathbf{I} , on a pour $P \in \mathbf{R}[\bar{X}, F]$:

$$\begin{aligned} \phi(P(X_1, \dots, X_\ell, F)) &= P(\phi(X_1), \dots, \phi(X_\ell), \phi(F)) \\ &= P(X_1 + h_1, \dots, X_\ell + h_\ell, F + h_{\ell+1}) \end{aligned}$$

où $h_i \in \mathbf{IR}[\vec{X}, F] \left[\frac{1}{F(1-F)} \right]^\dagger$. On aura donc un développement en série de Taylor :

$$\phi = \sum_{0 \leq m_1, \dots, m_{\ell+1}} h_1^{m_1} \cdots h_{\ell+1}^{m_{\ell+1}} \Delta_1^{m_1} \cdots \Delta_{\ell+1}^{m_{\ell+1}}, \quad (12)$$

où $\Delta_i^m = \frac{1}{m!} \frac{\partial}{\partial X_i}$ et $\Delta_{\ell+1}^m = \frac{1}{m!} \frac{\partial}{\partial F}$. Chaque h_i s'écrit d'autre part comme série de la forme

$$h_i = \sum_{1 \leq j} H_{i,j}(\vec{X}, F, \frac{1}{F}, \frac{1}{1-F}),$$

avec $H_{i,j} \in \mathbf{I}^j \mathbf{R}[\vec{X}, F, \vec{T}]$ vérifiant, pour un certain $\mathcal{M} \in \mathbb{N}$ (indépendant de i) :

$$\deg(H_{i,j}) \leq \mathcal{M}(j+1), \quad \forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Les produits $h_1^{m_1} \cdots h_{\ell+1}^{m_{\ell+1}}$ ont alors des développements en séries de la forme :

$$h_1^{m_1} \cdots h_{\ell+1}^{m_{\ell+1}} = \sum_{|\vec{m}| \leq j} H_{\vec{m},j}(\vec{X}, F, \frac{1}{F}, \frac{1}{1-F}),$$

où $\vec{m} := (m_1, \dots, m_{\ell+1})$, $|\vec{m}| := m_1 + \cdots + m_{\ell+1}$, $H_{\vec{m},j} \in \mathbf{I}^j \mathbf{R}[\vec{X}, F, \vec{T}]$ et

$$\deg(H_{\vec{m},j}) \leq \mathcal{M}(j + |\vec{m}|), \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

On obtient ainsi un développement de (12) comme somme dénombrable de la forme

$$\phi = \sum_{\vec{m} \leq j} H_{\vec{m},j}(\vec{X}, F, \frac{1}{F}, \frac{1}{1-F}) \Delta_1^{m_1} \cdots \Delta_{\ell+1}^{m_{\ell+1}} \quad (14)$$

avec

$$H_{\vec{m},j} \in \mathbf{I}^j \mathbf{R}[\vec{X}, F, \vec{T}] \quad \text{et} \quad \text{val}_I(H_{\vec{m},j}) \geq j \geq |\vec{m}| \quad (15)$$

et donc aussi grâce à (13) :

$$\deg(H_{\vec{m},j}) \leq \mathcal{M}(j + |\vec{m}|) \leq 2\mathcal{M} \text{val}_I(H_{\vec{m},j}). \quad (16)$$

Pour $I = (i_1, \dots, i_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$, on notera $\vec{X}^I := X_1^{i_1} \cdots X_\ell^{i_\ell}$, puis $|I| = i_1 + \cdots + i_\ell$ et donc $\deg(\vec{X}^I) = |I|$. De même, pour $\vec{m} \in \mathbb{N}^{\ell+1}$, on notera $\Delta^{\vec{m}} = \Delta_1^{m_1} \cdots \Delta_{\ell+1}^{m_{\ell+1}}$.

Soit $z \in \mathcal{R}_F(\mathcal{C})$ et $z = \sum_{k \geq 0} Z_k(\vec{X}, F, \frac{1}{F})$ une série de type $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ (cf. 2.3.2).

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ fixe, $Z_k(\vec{X}, F, \frac{1}{F})$ est somme de termes de la forme $\vec{X}^I F^a (\frac{1}{F})^b$ avec $|I| + a + b \leq \deg_{\vec{X}, F, T}(Z_k)$. On a alors

$$\Delta(\vec{X}^I F^a (\frac{1}{F})^b) = \Delta(\vec{X}^I) F^a (\frac{1}{F})^b + a \vec{X}^I F^{a-1} (\frac{1}{F})^b \Delta(F) - b \vec{X}^I F^a (\frac{1}{F})^{b+1} \Delta(F),$$

où $\Delta(F) \in \{0, 1\}$. Il s'ensuit que $\Delta(\vec{X}^I F^a (\frac{1}{F})^b) = Q(\vec{X}, F, \frac{1}{F})$ où $Q \in \mathbf{R}[\vec{X}, F, T]$ vérifie

$$\deg Q \leq |I| + a + b + |\vec{m}| \leq \deg_{\vec{X}, F, T}(Z_k) + |\vec{m}|.$$

Par conséquent, on aura pour chaque \vec{m}

$$\Delta^{\vec{m}}(z) = \sum_{0 \leq k} \Delta^{\vec{m}} Z_k(\vec{X}, F, \frac{1}{F}) = \sum_{0 \leq k} Z'_{\vec{m},k}(\vec{X}, F, \frac{1}{F}),$$

avec pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} Z'_{\vec{m},k}(\vec{X}, F, T) \in \mathbf{I}^k \mathbf{R}[\vec{X}, F, T], \text{ et} \\ \deg(Z'_{\vec{m},k}) \leq \deg(Z_k) + |\vec{m}| \leq C(k+1) + |\vec{m}| \leq \\ \leq C(\text{val}_{\mathbf{I}}(Z_k) + 1) + |\vec{m}| \leq C(\text{val}_{\mathbf{I}}(Z'_{\vec{m},k}) + 1) + |\vec{m}|. \end{cases} \quad (17)$$

où il convient de retenir les inégalités

$$k \leq \text{val}_{\mathbf{I}}(Z_k(\vec{X}, F, T)) \leq \text{val}_{\mathbf{I}}(Z'_{\vec{m},k}(\vec{X}, F, T)) \quad (18)$$

En rassemblant toutes ces remarques on obtient une somme formelle dénombrable

$$\phi(z) = \sum_{\vec{m} \leq j, k} H_{\vec{m},j}(\vec{X}, F, \frac{1}{F}, \frac{1}{1-F}) Z'_{\vec{m},k}(\vec{X}, F, \frac{1}{F}) \quad (19)$$

où l'on a d'après (15), (16) et (17) et pour $H_{\vec{m},j}$ et $Z'_{\vec{m},k}$ considérés dans $\mathbf{R}[\vec{X}, F, \vec{T}]$,

$$\deg_{\vec{X}, F, \vec{T}}(H_{\vec{m},j} Z'_{\vec{m},k}) \leq (2\mathcal{M} + 1) \text{val}_{\mathbf{I}}(H_{\vec{m},j}) + C(\text{val}_{\mathbf{I}}(Z'_{\vec{m},k}) + 1)$$

et donc, si $C > 2\mathcal{M} + 1$:

$$\deg(H_{\vec{m},j} Z'_{\vec{m},k}) \leq C(\text{val}_{\mathbf{I}}(H_{\vec{m},j} Z'_{\vec{m},k}) + 1). \quad (20)$$

Cela étant, pour chaque $v \in \mathbb{N}$, l'inégalité $\text{val}_{\mathbf{I}}(H_{\vec{m},j} Z'_{\vec{m},k}) \leq v$ implique $k \leq v$ (18) et $|\vec{m}| \leq j \leq v$ (15) de sorte que seul un nombre **fini** de termes de la série (19) sont de valuation inférieure à un entier donné. Aussi, si nous notons J_j la somme (finie) des termes de la série (19) de valuation \mathbf{I} -adique égale à j , la série $\sum_j J_j(\vec{X}, \frac{1}{F}, \frac{1}{1-F})$ converge vers $\phi(z)$ mais, plus important encore, on a $\phi(z) \in \mathcal{R}_{F,1-F}(C)$ d'après (20).

Ces mêmes raisonnements s'appliquent pour $z \in \mathcal{R}_{1-F}(C)$ ce qui prouve :

Lemme 1. Si $C \geq 2\mathcal{M} + 1$, on a : $\phi(\mathcal{R}_F(C)) \subseteq \mathcal{R}_{F,1-F}(C)$ et $\phi(\mathcal{R}_{1-F}(C)) \subseteq \mathcal{R}_{F,1-F}(C)$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la surjectivité de δ_ϕ^\dagger ce pourquoi il suffira, d'après (2.3.3-a), de montrer que ses restrictions

$$\mathcal{R}_F(C) \oplus \mathcal{R}_{1-F}(C) \xrightarrow{\delta_\phi^\dagger} \mathcal{R}_{F,1-F}(C),$$

(bien définies lorsque $C \geq 2\mathcal{M} + 1$) le sont.

Nous avons déjà montré que $\delta_0 : \mathcal{R}_F(C) \oplus \mathcal{R}_{1-F}(C) \rightarrow \mathcal{R}_{F,1-F}(C)$ est bien définie, surjective (2.3.3) et de section \mathbf{R} -linéaire $\sigma = (\sigma_F(-), \sigma_{1-F}(-))$ (cf. 2.3.1-(11)).

Lemme 2. Soit $C \geq 2\mathcal{M} + 1$. Si $z \in \mathcal{R}_{F,1-F}(C)$, on a l'égalité dans $\mathbf{R}[\vec{X}, F][\frac{1}{F(1-F)}]^\wedge$

$$z = \sum_{0 \leq j} \sigma_F[(\phi - 1)\sigma_{1-F}]^j(z) - \phi \left(\sum_{0 \leq j} \sigma_{1-F}[(\phi - 1)\sigma_{1-F}]^j(z) \right) \quad (21)$$

où, les séries du membre de droite convergent vers des éléments de $\mathcal{R}_F(C)$ et $\mathcal{R}_{1-F}(C)$ respectivement.

Preuve. Pour $r \in \mathbb{N}$, soit $w = \sum_{r \leq k} Z_k(\vec{X}, F, \frac{1}{F}, \frac{1}{1-F})$ où $\sum_{r \leq k} Z_k$ est de type $\mathcal{R}(C)$ (2.3.2). On a bien évidemment $w \in \mathbf{I}^r \mathbf{R}[\vec{X}, F][\frac{1}{F(1-F)}]^\dagger$ mais aussi grâce au lemme 2.3.3 et au lemme 1 :

$$\begin{cases} \sigma_F(w) = \sum_{r \leq k} Z'_k(\vec{X}, F, \frac{1}{F}) \text{ et } \sigma_{1-F}(w) = \sum_{r \leq k} Z''_k(\vec{X}, F, \frac{1}{1-F}), \\ (\phi - 1)(w) = \sum_{r+1 \leq k} Z'''_k(\vec{X}, F, \frac{1}{F}, \frac{1}{1-F}), \end{cases}$$

où les séries $\sum_{r \leq k} Z'_k$, $\sum_{r \leq k} Z''_k$ et $\sum_{r+1 \leq k} Z'''_k$ sont de type $\mathcal{R}(C)$. On aura donc

$$[(\phi - 1)\sigma_{1-F}]^j(z) = \sum_{r+j \leq k} Z_k^{(j)}(\vec{X}, F, \frac{1}{F}, \frac{1}{1-F})$$

pour une certaine série $\sum_{r+j \leq k} Z_k^{(j)}$ de type $\mathcal{R}(C)$ de sorte que dans la somme dénombrable du deuxième membre

$$\sum_{0 \leq j} [(\phi - 1)\sigma_{1-F}]^j(w) = \sum_{0 \leq j} \left(\sum_{r+j \leq k} Z_k^{(j)}(\vec{X}, \frac{1}{F}, \frac{1}{1-F}) \right)$$

il n'y aura qu'un nombre fini de termes d'indice donné et la série obtenue en les additionnant sera encore de type $\mathcal{R}(C)$.

Pour terminer, si nous notons pour simplifier $U := (\phi - 1)\sigma_{1-F}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j} \sigma_F U^j(z) - \phi \left(\sum_{0 \leq j} \sigma_{1-F} U^j(z) \right) &= \\ &= \sum_{0 \leq j} \sigma_F U^j z - \sum_{0 \leq j} \sigma_{1-F} U^j z - (\phi - 1) \left(\sum_{0 \leq j} \sigma_{1-F} U^j(z) \right) \\ &= \left(\sum_{0 \leq j} U^j(z) \right) - \left(\sum_{1 \leq j} U^j z \right) = z. \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du lemme et donc celle du théorème. \square

2.5 Un théorème pour le recollement de modules sur une algèbre f.c.t.f.

Le théorème suivant joue un rôle clef dans l'étude des faisceaux cohérents sur un schéma \dagger -adique affine de la section 4.2.

2.5.1. Théorème. *On se donne $f \in A^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$, un A^\dagger_1 -module de type fini \bar{L} , des relèvements*

$$\begin{cases} \mu : M \rightarrow \bar{L}[\frac{1}{f}], & M \in \mathbf{Mod}_{\text{tf}}(A^\dagger\{\frac{1}{f}\}) \\ \nu : N \rightarrow \bar{L}[\frac{1}{1-f}], & N \in \mathbf{Mod}_{\text{tf}}(A^\dagger\{\frac{1}{1-f}\}) \end{cases}$$

On suppose qu'il existe un isomorphisme de $A^\dagger\{\frac{1}{f(1-f)}\}$ -modules $\varphi : N\{\frac{1}{f}\} \rightarrow M\{\frac{1}{1-f}\}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} N\{\frac{1}{f}\} & \xrightarrow{\varphi} & M\{\frac{1}{1-f}\} \\ \nu\{1/f\} \downarrow & \oplus & \downarrow \mu\{1/1-f\} \\ \bar{L}[\frac{1}{(1-f)f}] & \xlongequal{\quad} & \bar{L}[\frac{1}{f(1-f)}] \end{array}$$

Alors, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M \oplus N & \xrightarrow{\delta_\varphi^\dagger} & M\left\{\frac{1}{1-f}\right\} \\ \mu \downarrow & \nu \downarrow & \downarrow \mu\{1/1-f\} \\ \overline{L}\left[\frac{1}{f}\right] \oplus \overline{L}\left[\frac{1}{1-f}\right] & \xrightarrow{\delta_0} & \overline{L}\left[\frac{1}{f(1-f)}\right] \end{array}$$

avec $\delta_0(x, y) = x - y$ et $\delta_\varphi^\dagger(x, y) = x - \varphi(y)$, le morphisme δ_φ^\dagger est **surjectif**.

Preuve. Soit $\overline{\pi} : (\mathbf{A}^\dagger)^\ell \rightarrow \overline{L}$ une surjection de \mathbf{A}^\dagger -modules et notons de la même manière les surjections induites après localisation \dagger -adique $\overline{\pi} : (\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{\star}\right\})^\ell \rightarrow \overline{L}\left[\frac{1}{\star}\right]$ où $\star \in \{f, 1-f, f(1-f)\}$. Notons π des relèvements de $\overline{\pi}$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{f}\right\})^\ell & \xrightarrow{\pi} M \xrightarrow{\mu} \overline{L}\left[\frac{1}{f}\right] & (\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{1-f}\right\})^\ell & \xrightarrow{\pi} N \xrightarrow{\nu} \overline{L}\left[\frac{1}{1-f}\right] \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\overline{\pi}} & \uparrow & \underbrace{\hspace{10em}}_{\overline{\pi}} & \uparrow \end{array}$$

Les applications π sont surjectives puisque de réduction surjective et que M et N sont de type fini sur des anneaux de Zariski.

On notera $\{e_1, \dots, e_\ell\}$ la base canonique de $(\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{f(1-f)}\right\})^\ell$. Soit $\psi : (\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{f(1-f)}\right\})^\ell$ un endomorphisme de \mathbf{A}^\dagger -modules tel que $\psi(e_i) = e_i \bmod \mathbf{I}$ et tel que $\pi \circ \psi = \varphi \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{f(1-f)}\right\})^\ell & \xrightarrow{\psi} & (\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{f(1-f)}\right\})^\ell \\ \pi \downarrow & \oplus & \downarrow \pi \\ N\left\{\frac{1}{f}\right\} & \xrightarrow[\simeq]{\varphi} & M\left\{\frac{1}{1-f}\right\} \end{array}$$

Le morphisme ψ est bijectif. En effet, surjectif puisque son conoyau est à priori séparé (1.3.1-g) et de réduction modulo \mathbf{I} nulle, puis injectif puisque son noyau est alors facteur direct de $(\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{f(1-f)}\right\})^\ell$ et de réduction nulle.

On a ainsi les ingrédients d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{f}\right\})^\ell \oplus (\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{1-f}\right\})^\ell & \xrightarrow{\delta_\psi^\dagger} & (\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{f(1-f)}\right\})^\ell \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M \oplus N & \xrightarrow{\delta_\varphi^\dagger} & M\left\{\frac{1}{1-f}\right\} \end{array}$$

où $\delta_\psi(x, y) = x - \psi(y)$. La surjectivité de δ_φ^\dagger résultera de celle de δ_ψ^\dagger .

Si nous fixons maintenant une surjection d'algèbres $\alpha : \mathbf{R}[\overline{X}, F]^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$ avec $\alpha(F) = f$, ces idées permettent aussi de construire un isomorphisme $\phi : (\mathbf{R}[\overline{X}, F]\left[\frac{1}{F(1-F)}\right]^\dagger)^\ell$ égal à l'identité modulo \mathbf{I} et tel que $\pi \circ \phi = \psi \circ \pi$. La surjection de δ_ψ^\dagger résulte alors de celle de

$$(\mathbf{R}[\overline{X}, F]\left[\frac{1}{F}\right]^\dagger)^\ell \oplus (\mathbf{R}[\overline{X}, F]\left[\frac{1}{1-F}\right]^\dagger)^\ell \xrightarrow{\delta_\phi^\dagger} (\mathbf{R}[\overline{X}, F]\left[\frac{1}{F(1-F)}\right]^\dagger)^\ell \quad (\diamond)$$

avec $\delta_\phi^\dagger(x, y) = x - \phi(y)$.

La démarche pour prouver la surjectivité de δ_ϕ^\dagger est la même que dans la preuve du théorème 2.4.1, elle est basée sur les propriétés suivantes.

i) La surjectivité du morphisme

$$\left(\mathbf{R}[\overline{X}, F]\left[\frac{1}{F}\right]^\dagger\right)^\ell \oplus \left(\mathbf{R}[\overline{X}, F]\left[\frac{1}{1-F}\right]^\dagger\right)^\ell \xrightarrow{\delta_0^\dagger} \left(\mathbf{R}[\overline{X}, F]\left[\frac{1}{F(1-F)}\right]^\dagger\right)^\ell$$

où $\delta_0^\dagger(\overline{x}, \overline{y}) = (x_i - y_i)_{i=1, \dots, \ell}$, évidente car somme directe de surjections (2.2.4).

ii) L'existence d'une section linéaire σ de δ_0^\dagger . On pose $\sigma(\overline{x}) = (\sigma(x_i))_{i=1, \dots, \ell}$ (2.3.1).

iii) Les sous-modules $\mathcal{R}_*(C)^\ell \subseteq \left(\mathbf{R}[\overline{X}, F]\left[\frac{1}{*}\right]^\dagger\right)^\ell$ (cf. 2.3.2) vérifient

a) $\left(\mathbf{R}[\overline{X}, F]\left[\frac{1}{*}\right]^\dagger\right)^\ell = \bigcup \uparrow_{C \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_*(C)^\ell$.

b) Pour chaque $C \in \mathbb{N}$,

$$\delta_0^\dagger(\mathcal{R}_F(C)^\ell \oplus \mathcal{R}_{1-F}(C)^\ell) = \mathcal{R}_{F, 1-F}(C)^\ell, \quad \sigma(\mathcal{R}_{F, 1-F}(C)^\ell) \subseteq \mathcal{R}_F(C)^\ell \oplus \mathcal{R}_{1-F}(C)^\ell$$

puisqu'il en est ainsi coordonnée par coordonnée d'après 2.3.3.

iv) L'isomorphisme ϕ conserve $\mathcal{R}_{F, 1-F}(C)^\ell$ pour $C \gg 0$.

Soient $\epsilon = \phi - \text{id}$ et $z_{i,j} := \epsilon(\mathbf{e}_i)_j$, pour $i, j = 1, \dots, \ell$. On a $z_{i,j} := \mathbf{IR}[\overline{X}, F]\left[\frac{1}{F(1-F)}\right]^\dagger$ et des séries $\sum_{1 \leq k} Z_{i,j,k}(\overline{X}, F, T_1, T_2)$ vérifiant $\deg Z_{i,j,k} \leq \mathcal{M}k$ pour un certain $\mathcal{M} \in \mathbb{N}$ telles que $z_{i,j} = \sum_{1 \leq k} Z_{i,j,k}(\overline{X}, F, \frac{1}{F}, \frac{1}{1-F})$. Pour $\overline{x} \in \mathcal{R}_{F, 1-F}(C)^\ell$, choisissons des séries $\sum_{0 \leq n} P_{i,n}$ de type $\mathcal{R}_{F, 1-F}(C)$ telles que $x_i = \sum_{0 \leq n} P_{i,n}(\overline{X}, F, \frac{1}{F}, \frac{1}{1-F})$. Alors, dans les sommes formelles

$$\epsilon(\overline{x})_j = \sum_{i=1, \dots, \ell} x_i \epsilon(\mathbf{e}_i)_j = \sum_{i=1, \dots, \ell} \left(\sum_{0 \leq n} P_{i,n} \right) \left(\sum_{1 \leq k} Z_{i,j,k} \right) \quad (*)$$

on a $\deg P_{i,n} Z_{i,j,k} \leq C(n+1) + \mathcal{M}k$ et, par conséquent, si $C \geq \mathcal{M}$

$$\deg P_{i,n} Z_{i,j,k} \leq C(\text{val}_I(P_{i,n} Z_{i,j,k}) + 1).$$

Ainsi, en regroupant les termes de (*) par valuation I -adique on a $\epsilon(\overline{x}) \in \mathcal{R}_{F, 1-F}(C)^\ell$ et donc aussi $\phi(\mathcal{R}_{F, 1-F}(C)^\ell) = \mathcal{R}_{F, 1-F}(C)^\ell$.

Ces propriétés sont tout ce qu'il faut pour démontrer l'analogie du lemme 2 de la preuve du théorème 2.4.1 qui s'énonce maintenant en disant que pour tout $C \geq \mathcal{M}$ et pour tout $\overline{z} \in \mathcal{R}_{F, 1-F}(C)^\ell$ les séries dans membre de droite de l'égalité formelle

$$\overline{z} = \sum_{0 \leq j} \sigma_F[(\phi - 1)\sigma_{1-F}]^j(\overline{z}) - \phi \left(\sum_{0 \leq j} \sigma_{1-F}[(\phi - 1)\sigma_{1-F}]^j(\overline{z}) \right)$$

convergent bien vers des éléments de $\mathcal{R}_{F, 1-F}(C)^\ell$, autrement dit, les applications

$$\delta_\phi^\dagger : \mathcal{R}_F(C)^\ell \oplus \mathcal{R}_{1-F}(C)^\ell \longrightarrow \mathcal{R}_{F, 1-F}(C)^\ell$$

sont bien définies et surjectives dès que $C \geq \mathcal{M}$.

La surjectivité de δ_ϕ^\dagger dans (\diamond) est alors conséquence de la propriété iii-(a). ■

§3. Schémas \dagger -adiques

Dans cette section nous rappellerons la définition de Meredith ([M]) des «*schémas formels faibles (affines)*», que nous appelons «*schémas \dagger -adiques (affines)*», et redémontrerons ses théorèmes d'acyclicité en les débarrassant des hypothèses superflues sur le couple $(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ dont nous ne supposerons que la noëthérianité de \mathbf{R} . Mais auparavant nous commençons pas quelques remarques sur la cohomologie de Čech.

3.1 Cohomologie de Čech

Dans cette partie on note \mathbf{Y} un espace topologique et \mathcal{B} une famille d'ouverts vérifiant les propriétés suivantes

- \mathcal{B} -i) \mathcal{B} est une base de la topologie de \mathbf{Y} , *i.e.* tout ouvert de \mathbf{Y} peut être recouvert par des ouverts de \mathcal{B} et \mathcal{B} est stable par intersection finie.
- \mathcal{B} -ii) De tout recouvrement d'un ouvert de \mathcal{B} par des ouverts de \mathcal{B} on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- \mathcal{B} -iii) Pour tous $U_1, \dots, U_\ell \in \mathcal{B}$ de réunion $U \in \mathcal{B}$, il existe $V \in \mathcal{B}$ tel que

$$U = U_1 \cup V \quad \text{et} \quad V \subseteq U_2 \cup \dots \cup U_\ell.$$

Exemples

- \mathbf{Y} est l'espace topologique sous-jacent au schéma affine associé à un anneau \mathbf{A} et \mathcal{B} est l'ensemble des ouverts principaux.
Vérifions (\mathcal{B} -iii). L'inclusion $D(f) \subseteq D(f_1) \cup D(f_2) \cup \dots \cup D(f_\ell)$ équivaut à l'existence d'une égalité de la forme $f^N = \zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2 + \dots + \zeta_\ell f_\ell$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $\zeta_i \in \mathbf{A}$. Il s'ensuit que si nous notons $g = \sum_{i=2}^\ell \zeta_i f_i$, on a aussi $D(f) = D(f_1) \cup D(g)$ et bien évidemment $D(g) \subseteq D(f_i)$.
- \mathbf{Y} l'espace topologique sous-jacent à un schéma séparé et \mathcal{B} l'ensemble de ses ouverts affines. Conséquence de la propriété précédente.

3.1.1. Lemme. Soit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ vérifiant

- \mathcal{F} -i) Tout ouvert dans \mathcal{B} admet un recouvrement par des ouverts de \mathcal{F} .
- \mathcal{F} -ii) Tout ouvert de \mathcal{B} contenu dans un ouvert de \mathcal{F} appartient à \mathcal{F} .
- \mathcal{F} -iii) Un ouvert de \mathcal{B} réunion de deux ouverts de \mathcal{F} appartient à \mathcal{F} .

Alors $\mathcal{F} = \mathcal{B}$.

Preuve. Pour $U \in \mathcal{B}$, notons $\ell(U)$ le plus petit des cardinaux des recouvrements de U par des ouverts de \mathcal{F} . Supposons le lemme prouvé pour tout $W \in \mathcal{B}$ tel que $\ell(W) < \ell$ et soit $U \in \mathcal{B}$ avec $\ell(U) = \ell$, On a $U = U_1 \cup \dots \cup U_\ell$ avec $U_i \in \mathcal{F}$. Par (\mathcal{B} -iii) il existe $V \in \mathcal{B}$ avec $U = U_1 \cup V$ et $V \subseteq U_2 \cup \dots \cup U_\ell$. Mais alors $V \in \mathcal{F}$ car $V = \bigcup_{i=2, \dots, \ell} (V \cap U_i)$ et chaque $(V \cap U_i) \in \mathcal{F}$ d'après (\mathcal{B} -ii) et on conclut par (\mathcal{B} -iii). ■

3.1.2. Cohomologie de Čech de préfaisceaux. A partir de maintenant, l'espace \mathbf{Y} et l'ensemble \mathcal{B} sont fixés. L'ensemble \mathcal{B} muni des inclusions entre ses ouverts est une sous-catégorie de la catégories des ouverts de \mathbf{Y} . Soit \mathcal{P} un préfaisceau de groupes abéliens sur la catégorie \mathcal{B} . Étant donné un ensemble totalement ordonné (\mathfrak{A}, \leq) , une famille $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in \mathfrak{A}\}$ d'éléments de \mathcal{B} de réunion un élément $U \in \mathcal{B}$ et un entier $n \in \mathbb{N}$, « le groupe des n -cochaînes de Čech à valeurs dans \mathcal{P} relatives à \mathcal{U} » est le groupe :

$$\check{C}^n(\mathcal{U}; \mathcal{P}) := \prod_{i_0 < i_1 < \dots < i_n} \mathcal{P}(U_{i_0 \dots i_n})$$

où $U_{i_0 \dots i_n} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}$. Le « n -cobord » est l'application :

$$\begin{aligned} \delta_n : \check{C}^n(\mathcal{U}; \mathcal{P}) &\longrightarrow \check{C}^{n+1}(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \\ \omega &\longmapsto \delta_n(\omega)_{i_0, \dots, i_{n+1}} = \sum_{k=0, \dots, n+1} (-1)^k \omega_{i_0, \dots, \widehat{i}_k, \dots, i_{n+1}} \end{aligned}$$

On a $\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$, d'où « le complexe de Čech à valeurs dans \mathcal{P} et relatif à \mathcal{U} » :

$$(\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}), \delta_*) := \left(\mathbf{0} \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_0} \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_{k-1}} \check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_k} \dots \right)$$

dont l'homologie, notée $\check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P})$, est la « cohomologie de Čech de \mathcal{P} relative à \mathcal{U} ».

L'« augmentation » $\epsilon(U) : \mathcal{P}(U) \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P}) = \prod_{i \in \mathfrak{A}} \mathcal{P}(U_i \cap U)$, produit des morphismes de restriction $\mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U_i \cap U)$, est à valeurs dans $\check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P})$.

3.1.3. Proposition. Supposons que pour tous $U, U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ tels que $U = U_1 \cup U_2$, le complexe de Čech augmenté :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}(U) \xrightarrow{\epsilon(U)} \mathcal{P}(U_1) \oplus \mathcal{P}(U_2) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{P}(U_{12}) \rightarrow \mathbf{0} \quad (22)$$

est **exact**. Alors

a) Pour toute famille $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathfrak{A}}$ d'ouverts de \mathcal{B} de réunion un ouvert $U \in \mathcal{B}$, le complexe de Čech augmenté :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}(U) \xrightarrow{\epsilon(U)} \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_0} \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_{i-1}} \check{C}^i(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_i} \dots$$

est **exact**.

b) Soit $\tilde{\mathcal{P}}$ le faisceau sur \mathbf{Y} associé à \mathcal{P} , alors pour tout ouvert $U \in \mathcal{B}$:

i) Le morphisme canonique $\mathcal{P}(U) \rightarrow \Gamma(U; \tilde{\mathcal{P}})$ est bijectif.

ii) $H^i(U; \tilde{\mathcal{P}}) = 0$, pour tout $i > 0$.

Preuve

a) Par récurrence sur le plus petit cardinal $\ell(\mathcal{U})$ des sous-familles finies de \mathcal{U} qui recouvrent U (\mathcal{B} -ii). Lorsque $\ell(\mathcal{U}) = 1$ on a $U_i = U$ pour un certain $i \in \mathfrak{A}$ et le complexe de Čech augmenté est homotope à zéro ⁽¹⁾. Supposons maintenant $\ell(\mathcal{U}) > 1$ et l'assertion (a) démontrée pour tout recouvrement \mathcal{V} d'un ouvert de \mathcal{B} vérifiant $\ell(\mathcal{V}) < \ell(\mathcal{U})$.

¹ Cf. [Go] p. 222, dernier paragraphe de §5.7.

Notons $\ell := \ell(\mathcal{U})$, soit U_1, \dots, U_ℓ une sous-famille minimale de \mathcal{U} de réunion U et soit $V \in \mathcal{B}$ vérifiant $(\mathcal{B}\text{-iii})$, *i.e.*

$$U = U_1 \cup V \quad \text{et} \quad V = \bigcup_{k=2, \dots, \ell} (V \cap U_k).$$

On considère alors le bicomplexe

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{P}(U) & \xrightarrow{\epsilon(U)} & \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{P}(U_1) \oplus \mathcal{P}(V) & \xrightarrow{\epsilon(U_1) \oplus \epsilon(V)} & \check{C}^*(U_1 \cap \mathcal{U}; \mathcal{P}) \oplus \check{C}^*(V \cap \mathcal{U}; \mathcal{P}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{P}(U_1 \cap V) & \xrightarrow{\epsilon(U_1 \cap V)} & \check{C}^*(U_1 \cap V \cap \mathcal{U}; \mathcal{P}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \quad (23)$$

où les colonnes sont définies à l'aide des suites

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}(U_{i_1 \dots i_n}) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{P}(U_1 \cap U_{i_1 \dots i_n}) \oplus \mathcal{P}(V \cap U_{i_1 \dots i_n}) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{P}(U_1 \cap V \cap U_{i_1 \dots i_n}) \rightarrow \mathbf{0},$$

qui sont **exactes** par l'hypothèse de la proposition, quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $i_j \in \mathfrak{A}$. Le complexe de Čech augmenté $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}(U) \rightarrow \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ est donc quasi-isomorphe au complexe simple associé au sous-bicomplexe des lignes inférieures de (23). Or, ces lignes sont exactes par hypothèse de récurrence puisque $\ell(U_1 \cap \mathcal{U}) = 1$, $\ell(V \cap \mathcal{U}) \leq \ell - 1$ et $\ell(U_1 \cap V \cap \mathcal{U}) \leq \ell - 1$ par construction. Ceci termine la preuve de (a).

- b) Résulte de considérations générales sur la cohomologie de Čech que nous rappelons brièvement (*cf.* [Go] §5.8). Pour tout ouvert $W \subseteq \mathbf{Y}$ et chaque recouvrement \mathcal{U} de W par des ouverts de \mathcal{B} on dispose du complexe de Čech $\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P})$. Les propriétés 3.1- $(\mathcal{B}\text{-}^*)$ assurent l'existence de raffinements pour deux tels recouvrements et on peut définir une cohomologie de Čech relative à \mathcal{B} , notée $\check{H}_{\mathcal{B}}^*(W; \mathcal{P})$, comme limite inductive des $\check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ suivant une famille cofinale convenable de recouvrements (*loc.cit.*). La correspondance $W \rightsquigarrow \check{H}_{\mathcal{B}}^*(W; \mathcal{P})$ définit alors naturellement un préfaisceau **sur** \mathbf{Y} que nous notons $\check{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{P})$. D'après (a) on a

$$\Gamma(U; \check{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}}^0(\mathcal{P})) = \mathcal{P}(U), \quad \text{pour tout } U \in \mathcal{B},$$

et les mêmes raisonnements s'appliquent au préfaisceau $\check{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}}^0(\mathcal{P})$ sur \mathbf{Y} , l'application canonique $\Gamma(U; \check{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}}^0(\mathcal{P})) \rightarrow \Gamma(U; \check{\mathcal{H}}^0(\check{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}}^0(\mathcal{P})))$ est donc bijective pour tout $U \in \mathcal{B}$. Or, $\check{\mathcal{H}}^0(\check{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}}^0(\mathcal{P}))$ est le faisceau $\tilde{\mathcal{P}}$ sur \mathbf{Y} associé à \mathcal{P} et (b-i) est prouvée. Il s'ensuit que le morphisme canonique

$$\check{H}_{\mathcal{B}}^i(W; \mathcal{P}) \longrightarrow \check{H}^i(W; \tilde{\mathcal{P}})$$

est bijectif pour tout ouvert $W \subseteq \mathbf{Y}$. En particulier, $\check{H}^i(U; \tilde{\mathcal{P}}) = 0$ pour $i > 0$ et $U \in \mathcal{B}$

et le théorème 5.9.2 dans [Go] qui relie la cohomologie de Čech à la cohomologie de faisceaux s'applique; le morphisme canonique

$$\check{H}^i(W; \tilde{\mathcal{P}}) \longrightarrow H^i(W; \tilde{\mathcal{P}})$$

est bijectif pour tout ouvert $W \subseteq Y$. On conclut que $H^i(U; \tilde{\mathcal{P}}) \simeq \check{H}_{\mathcal{B}}^i(U; \mathcal{P}) = 0$ pour $i > 0$ et $U \in \mathcal{B}$ d'après (a). ■

3.1.4. Remarque. Si dans l'énoncé de 3.1.3 les suites (22) sont uniquement supposées exactes à gauche, la même démonstration prouve que les complexes de Čech augmentés dans (b) sont exacts à gauche et l'assertion (b-i) en découle.

3.2 Le foncteur $(-)^{\sim} : \mathbf{Mod}(\mathbf{A}^{\dagger}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^{\dagger}})$

3.2.1. Soit $\mathbf{A}^{\dagger} \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et notons $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ le schéma affine associé à l'algèbre \mathbf{A}^{\dagger}_1 , réduction modulo \mathbf{I} de \mathbf{A}^{\dagger} . Soient $f, g \in \mathbf{A}^{\dagger}$. Lorsque $f = g \bmod \mathbf{I}$, l'élément g est inversible dans $\mathbf{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\}$ (1.3.1-f) et donc $\mathbf{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\} = \mathbf{A}^{\dagger}\{\frac{1}{g}\}$. La correspondance qui associe à l'ouvert principal $D(\bar{f}) \subseteq \mathbf{X}$ l'algèbre $\mathbf{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\}$ est ainsi bien définie. De même, $D(\bar{g}) \subseteq D(\bar{f})$, si et seulement si $g \in \sqrt{f}$, auquel cas f est inversible dans $\mathbf{A}^{\dagger}\{\frac{1}{g}\}$ et il existe morphisme canonique (1.3.3) «*de restriction*» de $\mathbf{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\}$ vers $\mathbf{A}^{\dagger}\{\frac{1}{g}\}$. La correspondance $\mathcal{P}_{\mathbf{A}^{\dagger}}$

$$\mathcal{P}_{\mathbf{A}^{\dagger}} : D(\bar{f}) \rightsquigarrow \mathbf{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\}, \quad \mathcal{P}_{\mathbf{A}^{\dagger}} : (D(f) \supseteq D(g)) \rightsquigarrow (\mathbf{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\} \rightarrow \mathbf{A}^{\dagger}\{\frac{1}{g}\})$$

est un préfaisceau sur la catégorie \mathcal{B} des ouverts principaux de \mathbf{X} dont on notera $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^{\dagger}}$ le faisceau d'algèbres sur \mathbf{X} qui lui est associé.

3.2.2. Plus généralement on considérera le foncteur

$$(-)^{\sim} : \mathbf{Mod}(\mathbf{A}^{\dagger}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^{\dagger}})$$

de la catégorie des \mathbf{A}^{\dagger} -modules (à gauche) vers la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^{\dagger}}$ -modules (à gauche) qui fait correspondre au \mathbf{A}^{\dagger} -module M le faisceau M^{\sim} associé au préfaisceau sur \mathcal{B} :

$$\mathcal{P}_M(-) := \mathcal{P}_{\mathbf{A}^{\dagger}}(-) \otimes_{\mathbf{A}^{\dagger}} M : D(\bar{f}) \rightsquigarrow \mathbf{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\} \otimes_{\mathbf{A}^{\dagger}} M = M\{\frac{1}{f}\},$$

et qui fait correspondre au morphisme de \mathbf{A}^{\dagger} -modules $\alpha : M \rightarrow N$ le morphisme de faisceaux $\alpha^{\sim} = M^{\sim} \rightarrow N^{\sim}$ associé au morphisme de préfaisceaux $\text{id}_{\mathcal{P}_{\mathbf{A}^{\dagger}}} \otimes \alpha : \mathcal{P}_M \rightarrow \mathcal{P}_N$.

3.2.3. Morphisme d'adjonction. La composée d'un morphisme de \mathbf{A}^{\dagger} -modules $\alpha : M \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{X})$ avec les morphismes de restriction $\mathcal{N}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{N}(D(\bar{f}))$ se factorise d'une

unique manière en une application $\alpha\{\frac{1}{f}\} : \mathcal{M}\{\frac{1}{f}\} \rightarrow \mathcal{N}(D(\bar{f}))$ et la famille des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{N}(\mathbf{X}) \\ \nu_f^\dagger(\mathcal{M}) \downarrow & & \downarrow \text{rest.} \\ \mathcal{M}\{\frac{1}{f}\} & \xrightarrow{\alpha\{1/f\}} & \mathcal{N}(D(\bar{f})) \end{array}$$

est un morphisme de préfaisceaux sur la catégorie \mathcal{B} des ouverts affines de \mathbf{X} dont on notera $\Xi(\mathcal{M}; \mathcal{N})(\alpha) : \mathcal{M}^\sim \rightarrow \mathcal{N}$ le morphisme de faisceaux sur \mathbf{X} associé. L'application ainsi définie

$$\Xi(\mathcal{M}; \mathcal{N}) : \text{Hom}_{\mathcal{A}^\dagger}(\mathcal{M}, \mathcal{N}(\mathbf{X})) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\dagger}}(\mathcal{M}^\sim, \mathcal{N}),$$

est clairement fonctorielle par rapport à \mathcal{M} et \mathcal{N} .

Terminologie. Pour tout $\mathcal{N} \in \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$, le morphisme $\Xi(\mathcal{N}(\mathbf{X}), \mathcal{N}) : \mathcal{N}(\mathbf{X})^\sim \rightarrow \mathcal{N}$ sera appelé « *le morphisme canonique* ».

3.2.4. Proposition. Soit $\mathcal{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et notons $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ le schéma affine associé à \mathcal{A}^\dagger_1 . Le foncteur $(-)^{\sim} : \mathbf{Mod}(\mathcal{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\dagger})$ est l'adjoint à gauche du foncteur des sections globales $\Gamma(\mathbf{X}; -) : \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\dagger}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{A}^\dagger)$. Plus précisément, l'application

$$\Xi(\mathcal{M}; \mathcal{N}) : \text{Hom}_{\mathcal{A}^\dagger}(\mathcal{M}, \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{N})) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\dagger}}(\mathcal{M}^\sim, \mathcal{N}),$$

est **bijective**.

Indication. On a d'une part $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\dagger}}(\mathcal{M}^\sim, \mathcal{N}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}^\dagger}}(\mathcal{P}_{\mathcal{A}^\dagger} \otimes \mathcal{M}, \mathcal{N})$ par l'adjonction du foncteur « *faisceaux associés* » et d'autre part $\text{Hom}_{\mathcal{A}^\dagger}(\mathcal{M}; \mathcal{N}(\mathbf{Y})) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}^\dagger}}(\mathcal{P}_{\mathcal{A}^\dagger} \otimes \mathcal{M}; \mathcal{N})$. ■

Le théorème suivant rassemble plusieurs résultats démontrés dans [M] sous des hypothèses restrictives sur le couple $(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

3.2.5. Théorème. Soit $\mathcal{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. Alors :

- a) Le foncteur $(-)^{\sim} : \mathbf{Mod}(\mathcal{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\dagger})$ est exact.
- b) Pour tout \mathcal{A}^\dagger -module \mathcal{M} et tout ouvert principal $D(\bar{f}) \subseteq \mathbf{X}$:
 - i) Le morphisme canonique $\mathcal{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} \otimes_{\mathcal{A}^\dagger} \mathcal{M} \rightarrow \Gamma(D(\bar{f}); \mathcal{M}^\sim)$ est bijectif.
 - ii) Pour tout recouvrement principal $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de $D(\bar{f})$, on a

$$\check{H}^i(\mathcal{U}; \mathcal{M}^\sim) = 0, \text{ pour tout } i > 0.$$

- iii) $H^i(D(\bar{f}); \mathcal{M}^\sim) = 0$, pour tout $i > 0$.

- c) Étant donnés deux \mathcal{A}^\dagger -modules \mathcal{M} et \mathcal{N} , l'application naturelle induite par le foncteur $(-)^{\sim}$

$$\Xi(\mathcal{M}, \mathcal{N}) : \text{Hom}_{\mathcal{A}^\dagger}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\dagger}}(\mathcal{M}^\sim, \mathcal{N}^\sim)$$

est bijective, i.e. le foncteur $(-)^{\sim}$ est pleinement fidèle.

Preuve. Nous nous plaçons dans le contexte d'application de la proposition 3.1.3. L'espace topologique est $\mathbf{X} := \text{Spec}(\mathbf{A}^\dagger_1)$, l'ensemble d'ouverts \mathcal{B} est l'ensemble des ouverts principaux de \mathbf{X} et le préfaisceau sur \mathcal{B} est défini pour chaque \mathbf{A}^\dagger -module \mathbf{M} par la correspondance \mathcal{P}_M (cf. 3.2.2) :

$$D(\bar{f}) \rightsquigarrow \mathcal{P}_M(D(\bar{f})) := \mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{\bar{f}}\right\} \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M}$$

Le foncteur $\mathbf{M} \rightsquigarrow \mathcal{P}_M$ est alors exact puisque chaque $\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{\bar{f}}\right\}$ est un \mathbf{A}^\dagger -module plat (1.3.5-d). L'assertion (a) en découle car le foncteur "faisceau associé" est lui aussi exact.

De l'égalité de préfaisceaux $\mathcal{P}_M(-) = \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}(-) \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M}$ on déduit aussitôt l'identification des complexes de Čech

$$(\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}_M), \delta_*) = (\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}), \delta_*) \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M}$$

pour toute famille *finie* \mathcal{U} d'ouverts principaux de \mathbf{X} et de même pour les complexes de Čech augmentés lorsque \mathcal{U} est un recouvrement d'un ouvert $U \in \mathcal{B}$. En particulier, si $U, U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ vérifient $U = U_1 \cup U_2$, le complexe de Čech augmenté :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}_M(U) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{P}_M(U_1) \oplus \mathcal{P}_M(U_2) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{P}_M(U_{12}) \rightarrow \mathbf{0} \quad (24)$$

s'identifie à

$$\left(\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}(U) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}(U_1) \oplus \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}(U_2) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}(U_{12}) \rightarrow \mathbf{0} \right) \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M}$$

et l'exactitude de (24) résulte puisque $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}(\bar{U}) \rightarrow \check{C}^*(\{\bar{U}_1, \bar{U}_2\}; \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger})$ est exact (2.2.4) et que ses termes sont des \mathbf{A}^\dagger -modules plats (1.3.5-d).

L'hypothèse de la proposition 3.1.3 est donc vérifiée par \mathcal{P}_M quel que soit le \mathbf{A}^\dagger -module \mathbf{M} et (b) en découle.

L'assertion (c) peut être justifiée comme corollaire de la proposition 3.2.3 et de l'assertion (b-i) mais admet aussi la démonstration directe suivante.

Suite à (b-i) le foncteur $\Gamma(\mathbf{X}, -) : \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathbf{A}^\dagger)$ est inverse à gauche de $(-)^{\sim} : \mathbf{Mod}(\mathbf{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})$ et l'application $\Xi(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ est injective pour tous $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbf{Mod}(\mathbf{A}^\dagger)$. Soit maintenant $\varphi : \mathbf{M}^{\sim} \rightarrow \mathbf{N}^{\sim}$ un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}$ -modules. Pour chaque ouvert principal $U = D(\bar{f}) \subseteq \mathbf{X}$ on a un diagramme commutatif de \mathbf{A}^\dagger -modules

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \xrightarrow{\varphi(\mathbf{X})} & \mathbf{N} \\ \nu_{\bar{f}}^{\dagger}(\mathbf{M}) \downarrow & & \downarrow \nu_{\bar{f}}^{\dagger}(\mathbf{N}) \\ \mathbf{M}\left\{\frac{1}{\bar{f}}\right\} = \Gamma(U; \mathbf{M}^{\sim}) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \Gamma(U; \mathbf{N}^{\sim}) = \mathbf{N}\left\{\frac{1}{\bar{f}}\right\} \end{array}$$

et $\varphi(U) = \mathbf{1} \otimes \varphi(\mathbf{X})$ puisque ces deux morphismes coïncident sur le sous- $\mathbf{A}^\dagger\left\{\frac{1}{\bar{f}}\right\}$ -module engendré par \mathbf{M} , *i.e.* sur $\mathbf{M}\left\{\frac{1}{\bar{f}}\right\}$ tout entier. On a donc $\varphi = (\varphi(\mathbf{X}))^{\sim}$ et $\Xi(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ est bien surjective. ■

3.2.6. Remarque. Comme conséquence de 3.2.5-b-i, la bijection naturelle dans la proposition 3.2.3 pour tout $M \in \mathbf{Mod}(\mathbf{A}^\dagger)$ et tout $\mathcal{N} \in \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})$:

$$\gamma(M, \mathcal{N}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}}(M^\sim, \mathcal{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^\dagger}(M, \mathcal{N}(\mathbf{X}))$$

est celle induite par le foncteur des sections globales $\Gamma(\mathbf{X}; -)$.

3.3 Schémas \dagger -adiques affines

3.3.1. Espaces localement annelés. ([EGA₁]) Un espace topologique annelé est un couple $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ formé d'un espace topologique \mathbf{X} et d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ sur \mathbf{X} . Un morphisme de $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ vers $(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ est un couple $(\alpha, \alpha^\#)$ où $\alpha : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ est une application continue et $\alpha^\# : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \alpha_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux. Ces données constituent la « catégorie d'espaces annelés », notée **Esp-ann**.

Étant donné un espace annelé \mathbf{S} , on note **Esp-ann**/ \mathbf{S} la « catégorie des espaces annelés au-dessus de \mathbf{S} » dont les objets sont les morphismes d'espaces annelés $\pi_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{S}$ et les morphismes $\alpha : \pi_{\mathbf{X}} \rightarrow \pi_{\mathbf{Y}}$ sont les morphismes d'espaces annelés $\alpha : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ tels que $\pi_{\mathbf{Y}} \circ \alpha = \pi_{\mathbf{X}}$.

Un espace annelé $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est dit « localement annelé » lorsque les fibres $\mathcal{O}_{\mathbf{X}, x}$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ sont des anneaux locaux. La catégorie **Loc-ann** des espaces localement annelés est la sous-catégorie de **Esp-ann** dont les objets sont les espaces localement annelés et les morphismes sont les morphismes d'espaces annelés $(\alpha, \alpha^\#) : (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ tels que les applications induites $\alpha_x^\# : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}, \alpha(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}, x}$ sont des homomorphismes locaux d'anneaux locaux (on appelle ainsi tout homomorphisme entre deux anneaux locaux $\eta : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ tel que l'image inverse par η de l'idéal maximal de \mathbf{B} est l'idéal maximal de \mathbf{A}).

La catégorie **Loc-ann**/ \mathbf{S} se définit de manière analogue à **Esp-ann**/ \mathbf{S} .

3.3.2. Le foncteur $(-)^{\sim} : \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Esp-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^{\sim}}$. Les constructions 3.2 font correspondre à $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\mathbf{R})$ l'espace topologique annelé $(\mathbf{A}^\dagger)^{\sim} := (\mathrm{Spec}(\mathbf{A}^\dagger_1); \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})$.

Si l'on se donne maintenant un morphisme de \mathbf{R} -algèbres f.c.t.f. $\eta : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$, il existe pour chaque $f \in \mathbf{A}^\dagger$ un et un seul morphisme $\eta\{\frac{1}{f}\} : \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} \rightarrow \mathbf{B}^\dagger\{\frac{1}{\eta(f)}\}$ (cf. 1.3.3), « la localisation \dagger -adique de η en f », rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^\dagger & \xrightarrow{\eta} & \mathbf{B}^\dagger \\ \nu_f^\dagger \downarrow & & \downarrow \nu_{\eta(f)}^\dagger \\ \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} & \xrightarrow{\eta\{1/f\}} & \mathbf{B}^\dagger\{\frac{1}{\eta(f)}\} \end{array}$$

et l'on déduit, comme dans la théorie des schémas classique, un morphisme canonique d'espaces annelés $\alpha^\sim : (\mathbf{B}^\dagger)^{\sim} \rightarrow (\mathbf{A}^\dagger)^{\sim}$. En particulier, le morphisme structural $s : \mathbf{R}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$ donne lieu à un morphisme d'espaces annelés $s^\sim : (\mathbf{A}^\dagger)^{\sim} \rightarrow (\mathbf{R}^\dagger)^{\sim}$ et toutes ces constructions associent donc à $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ un espace annelé au-dessus de $(\mathbf{R}^\dagger)^{\sim}$.

La correspondance $\mathbf{A}^\dagger \rightsquigarrow (\mathbf{A}^\dagger)^\sim$, $\eta \rightsquigarrow \eta^\sim$, est fonctorielle et contravariante de la catégorie $\mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ vers la catégorie $\mathbf{Esp}\text{-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim}$, on la note :

$$(-)^\sim : \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Esp}\text{-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim}$$

Le lemme suivant est élémentaire

3.3.3. Lemme. Soit $\mathbf{A} \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

- Le morphisme canonique $\mathbf{A}^\dagger_1[\frac{1}{f}] \rightarrow \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}_1$ est bijectif pour tout $f \in \mathbf{A}$.
- Soit $\{\varphi_{\mathfrak{a}}^\dagger : \mathbf{A}^\dagger_{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_{\mathfrak{b}} \mid \mathfrak{a} \preccurlyeq \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}\}$ un système inductif dans $\mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ où $(\mathfrak{A}, \preccurlyeq)$ est partiellement ordonné filtrant supérieurement. Notons $\mathbf{A}^\dagger_\infty := \varinjlim_{\mathfrak{a}} \mathbf{A}^\dagger_{\mathfrak{a}}$. Alors, l'idéal $\mathbf{IA}^\dagger_\infty$ est contenu dans le radical de $\mathbf{A}^\dagger_\infty$.
- Si \mathbf{I} est nilpotent dans \mathbf{A}^\dagger , l'espace annelé $(\mathbf{A}^\dagger)^\sim$ est le schéma affine associé à \mathbf{A}^\dagger .
- Soit $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(\mathbf{A}^\dagger_1)$. La réduction modulo \mathbf{I} de l'algèbre $(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})_{\mathfrak{P}}$, fibre de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}$ en \mathfrak{P} , est l'anneau local $(\mathbf{A}^\dagger_1)_{\mathfrak{P}}$. Le morphisme naturel $\pi_{\mathfrak{P}} : (\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})_{\mathfrak{P}} \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathbf{A}_1})_{\mathfrak{P}}$ est surjectif et c'est un isomorphisme modulo \mathbf{I} , i.e. c'est un relèvement.

Indication. Dans l'assertion (b) un élément $x \in \mathbf{IA}^\dagger_\infty$ s'exprime comme somme finie $x = \sum_i \xi_i a_i$ avec $\xi_i \in \mathbf{I}$ et $a_i \in \varinjlim_{\mathfrak{a}} \mathbf{A}^\dagger_{\mathfrak{a}}$. Comme la limite est filtrante, il existe $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ assez grand tel que les a_i sont les images d'éléments $a_{\mathfrak{a},i}$ d'un même $\mathbf{A}^\dagger_{\mathfrak{a}}$; mais $1 + \sum \xi_i a_{\mathfrak{a},i}$ est inversible dans $\mathbf{A}^\dagger_{\mathfrak{a}}$ (1.3.1-b) et alors $1 + x$ est inversible dans $\mathbf{A}^\dagger_\infty$. ■

3.3.4. Proposition. Soient $\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

- L'espace annelé $(\mathbf{A}^\dagger)^\sim = (\text{Spec}(\mathbf{A}^\dagger_1); \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})$ est localement annelé.
- Pour tout morphisme de \mathbf{R} -algèbres $\eta : \mathbf{B}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$, le morphisme $(\eta)^\sim : (\mathbf{A}^\dagger)^\sim \rightarrow (\mathbf{B}^\dagger)^\sim$ est un morphisme d'espaces localement annelés. Le foncteur $(-)^\sim$ (cf. 3.3.2) est donc à valeurs dans catégorie $\mathbf{Loc}\text{-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim}$, soit

$$(-)^\sim : \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Loc}\text{-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim}$$

Preuve

- Soit $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(\mathbf{A}^\dagger_1)$. On a $(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})_{\mathfrak{P}} = \varinjlim_{\bar{f}} \mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{\bar{f}}\}$, où $\bar{f} \in \mathbf{A}^\dagger_1 \setminus \mathfrak{P}$. Pour chaque $\bar{f} \notin \mathfrak{P}$, l'idéal engendré par \mathbf{I} dans $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{\bar{f}}\}$ est contenu dans le radical de $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{\bar{f}}\}$ (1.3.1-b) et comme cette propriété est préservée par passage à la limite inductive (3.3.3-b), l'algèbre $(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})_{\mathfrak{P}}$ la vérifie aussi. L'anneau $(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})_{\mathfrak{P}}$ est alors local si et seulement si sa réduction modulo \mathbf{I} l'est, ce qui est bien le cas (3.3.3-d).
- Pour $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(\mathbf{A}^\dagger_1)$ on a le diagramme d'anneaux locaux :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{O}_{\mathbf{B}^\dagger})_{\eta^{-1}\mathfrak{P}} & \xrightarrow{\eta_{\mathfrak{P}}^\#} & (\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})_{\mathfrak{P}} \\ \pi_{\eta^{-1}\mathfrak{P}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathfrak{P}} \\ (\mathbf{B}^\dagger_1)_{\eta^{-1}\mathfrak{P}} & \xrightarrow{\bar{\eta}_{\mathfrak{P}}^\#} & (\mathbf{A}^\dagger_1)_{\mathfrak{P}} \end{array}$$

où les morphismes verticaux, ceux du lemme 3.3.3-d, sont *locaux*, de même aussi, mais pour des raisons évidentes, que $\bar{\eta}_{\mathfrak{P}}^\#$. Il s'ensuit que $\eta_{\mathfrak{P}}^\#$ est lui aussi local. ■

3.3.5. Réduction du faisceau structural. Pour tout espace annelé $(\mathbf{X}; \mathcal{O})$ au-dessus de $(\mathbf{R})^\sim$ et pour tout $s \in \mathbb{N}$ on notera $(\mathcal{O})_s$ le faisceau d'algèbres engendré par le préfaisceau $\mathbf{U} \rightsquigarrow \Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}_s$ et $\pi_s : \mathcal{O} \rightarrow (\mathcal{O})_s$ la surjection canonique.

Pour $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$, soit $(\alpha, \alpha^\#) : (\mathbf{A}^\dagger_s)^\sim \rightarrow (\mathbf{A}^\dagger)^\sim$ le morphisme d'espaces annelés associé à la surjection canonique $\mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_s$. On a $\alpha = \text{id}_{\text{Spec}(\mathbf{A}^\dagger_1)}$ et $\alpha^\# : \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger_s}$ se factorise à travers $\pi_s : \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger} \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})_s$ en un isomorphisme de $(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})_s$ sur $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger_s}$.

3.3.6. Schémas \dagger -adiques affines. On appelle « schéma \dagger -adique affine » tout espace annelé isomorphe à un espace de la forme $(\mathbf{A}^\dagger)^\sim$ avec $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. La sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc}\text{-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim}$ dont les objets sont des schémas \dagger -adiques affines est la « catégorie des schémas \dagger -adiques affines »; elle sera notée $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

3.3.7. Proposition. Soient $f \in \mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et notons $(\mathbf{A}^\dagger)^\sim = (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})$. L'espace annelé induit par $(\mathbf{A}^\dagger)^\sim$ au-dessus de l'ouvert principal $D(\bar{f}) \subseteq \mathbf{X}$ est canoniquement isomorphe au schéma \dagger -adique affine associé à $\mathbf{A}^\dagger \left\{ \frac{1}{f} \right\}$, i.e.

$$(\mathbf{A}^\dagger)^\sim \Big|_{D(\bar{f})} = (\mathbf{A}^\dagger \left\{ \frac{1}{f} \right\})^\sim$$

Preuve. Conséquence immédiate de 3.2.5-b-i ■

Voici maintenant le principal résultat de cette section.

3.3.8. Théorème

- a) Le foncteur $(-)^\sim : \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ est une équivalence de catégories.
b) La catégorie $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ possède des produits fibrés.

Preuve

- a) Notons $\Gamma : \mathbf{Esp}\text{-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim} \rightsquigarrow \mathbf{Alg}(\mathbf{R})$ le foncteur qui fait correspondre à un espace annelé $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ l'algèbre $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ et a un morphisme $(\alpha, \alpha^\#) : (\mathbf{X}; \mathcal{O}_X) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_Y)$ le morphisme $\Gamma(\mathbf{Y}, \alpha^\#) : \Gamma(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$. Le morphisme naturel de foncteurs $(-) \rightarrow \Gamma \circ (-)^\sim$ est alors l'identité sur $\mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ (3.2.5-b-i, [M]) ce qui prouve la *fidélité* du foncteur $(-)^\sim$.

Soient $(\mathbf{A}^\dagger)^\sim = (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})$, $(\mathbf{B}^\dagger)^\sim = (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{B}^\dagger})$ et $(\alpha, \alpha^\#) : (\mathbf{A}^\dagger)^\sim \rightarrow (\mathbf{B}^\dagger)^\sim$ un morphisme d'espaces *localement* annelés au-dessus de $(\mathbf{R}^\dagger)^\sim$. Le morphisme $\alpha^\# : \mathcal{O}_{\mathbf{B}^\dagger} \rightarrow \alpha_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}$ est un morphisme de faisceaux de \mathbf{R} -algèbres.

R-i) Pour chaque $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(\mathbf{A}^\dagger_1)$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{O}_{\mathbf{B}^\dagger})_{\alpha(\mathfrak{P})} & \xrightarrow{\alpha^\#_{\mathfrak{P}}} & (\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})_{\mathfrak{P}} \\ \pi(\alpha(\mathfrak{P})) \downarrow & & \downarrow \pi(\mathfrak{P}) \\ (\mathcal{O}_{\mathbf{B}^\dagger_1})_{\alpha(\mathfrak{P})} & \xrightarrow{\bar{\alpha}^\#_{\mathfrak{P}}} & (\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger_1})_{\mathfrak{P}} \end{array}$$

où $\pi(*)$ est local et surjectif (3.3.3-d) et $\alpha^\#_{\mathfrak{P}}$ est local par hypothèse. On en déduit que $\bar{\alpha}^\#_{\mathfrak{P}}$ est local.

R-ii) Le morphisme $\alpha^\#$ induit un morphisme de faisceaux $\bar{\alpha}^\# : (\mathcal{O}_{A^\dagger})_1 \rightarrow \alpha_* (\mathcal{O}_{B^\dagger})_1$ (3.3.5) et donc un morphisme d'espaces annelés $(\alpha, \bar{\alpha}^\#) : (A^\dagger_1)^\sim \rightarrow (B^\dagger_1)^\sim$ qui est, d'après (R-i), un morphisme d'espaces localement annelés entre deux schémas affines (3.3.3-c). On a donc $(\alpha, \bar{\alpha}^\#) = (\bar{\eta})^\sim$ où $\bar{\eta} := \Gamma(\mathbf{Y}; \bar{\alpha}^\#) : B^\dagger_1 \rightarrow A^\dagger_1$ n'est autre que la réduction modulo \mathbf{I} de l'homomorphisme $\eta := \Gamma(\mathbf{Y}; \alpha^\#) : B^\dagger \rightarrow A^\dagger$. On en déduit que :

$$\alpha = \eta^{-1}, \quad \text{et alors} \quad \alpha^{-1}(D(f)) = D(\eta(f)), \quad \text{pour tout } f \in B^\dagger. \quad (\diamond)$$

Cela étant, le morphisme $\alpha^\# : \mathcal{O}_{B^\dagger} \rightarrow \alpha_* \mathcal{O}_{A^\dagger}$ donne, pour chaque $f \in B^\dagger$, le diagramme commutatif suivant où les flèches verticales sont les applications canoniques.

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{\eta = \Gamma(D(1); \alpha^\#)} & & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ B^\dagger & \xrightarrow[\cong]{\Gamma(D(1); \mathcal{O}_{B^\dagger})} & \Gamma(D(1); \alpha_* \mathcal{O}_{A^\dagger}) & \xrightarrow[\cong]{\Gamma(D(\eta(1)); \mathcal{O}_{A^\dagger})} & A^\dagger \\ \nu_f^\dagger \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \nu_{\eta(f)}^\dagger \\ B^\dagger \left\{ \frac{1}{f} \right\} & \xrightarrow[\cong]{\Gamma(D(f); \mathcal{O}_{B^\dagger})} & \Gamma(D(f); \alpha_* \mathcal{O}_{A^\dagger}) & \xrightarrow[\cong]{\Gamma(D(\eta(f)); \mathcal{O}_{A^\dagger})} & A^\dagger \left\{ \frac{1}{\eta(f)} \right\} \end{array} \quad (\mathcal{D})$$

les égalités $(=_{\mathbb{M}})$ résultent d'appliquer 3.2.5-b-i et $(=_{\diamond})$ de (\diamond) . Or, la localisation \dagger -adique de η en f , *i.e.* l'application $\eta \left\{ \frac{1}{f} \right\} : B^\dagger \left\{ \frac{1}{f} \right\} \rightarrow A^\dagger \left\{ \frac{1}{\eta(f)} \right\}$ (cf. 3.3.2) est bien l'**unique** morphisme rendant (\mathcal{D}) commutatif, par conséquent $\Gamma(D(f); \alpha^\#) = \eta \left\{ \frac{1}{f} \right\}$ et on a bien :

$$(\alpha, \alpha^\#) = \Gamma(\mathbf{Y}; \alpha^\#)^\sim.$$

Nous avons ainsi prouvé que le foncteur $(-)^\sim : \mathbf{Alg}_{\text{ctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Loc-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim}$ est pleinement fidèle, c'est donc une équivalence sur son image essentielle, *i.e.* sur $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.
b) Conséquence immédiate de (a) et de 1.3.2-(b). ■

3.4 Catégorie des schémas \dagger -adiques

3.4.1. Schémas \dagger -adiques. La «*catégorie des schémas \dagger -adiques*», notée $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$, est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim}$ des espaces annelés tels que chaque point admet un voisinage ouvert isomorphe à un objet de $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

3.4.2. Notation. On note $\mathcal{X}^\dagger := (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})$ un schéma \dagger -adique. L'espace annelé induit par \mathcal{X}^\dagger au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ est noté $\mathcal{U}^\dagger := (U; \mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger})$ avec donc $\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger} := \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}|_U$.

3.4.3. Proposition. *Le sous-espace annelé \mathcal{U}^\dagger induit par un schéma \dagger -adique \mathcal{X}^\dagger au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ est un schéma \dagger -adique.*

Preuve. Soit $x \in U$. Par définition de schéma \dagger -adique il existe un ouvert $V \subseteq U$ avec $x \in V$ et tel que $\mathcal{V}^\dagger = (V; \mathcal{O}_{\mathcal{V}^\dagger})$ est un schéma \dagger -adique affine. Notons \mathbf{W} un voisinage de x principal dans V et tel que $\mathbf{W} \subseteq U$. Alors $\mathcal{W}^\dagger = (\mathbf{W}; \mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger})$ est aussi l'espace annelé induit par le schéma affine $(V; \mathcal{O}_{\mathcal{V}^\dagger})$ au-dessus de son ouvert principal \mathbf{W} , c'est donc un schéma \dagger -adique affine (3.3.7). L'espace annelé \mathcal{U}^\dagger est donc un schéma \dagger -adique affine. ■

3.4.4. Proposition. Soit $\mathcal{D}^\dagger \in \mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

a) L'algèbre $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger})$ est séparée.

b) Si \mathbf{X} est quasi-compact, l'algèbre $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger})$ est aussi faiblement complète.

Preuve

a) Soit $\mathcal{R} := \{\mathbf{U}_i\}_{i \in \mathfrak{A}}$ un recouvrement de \mathbf{X} avec $\mathcal{W}_i^\dagger \in \mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. On a la suite exacte :

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger}) \xrightarrow{\epsilon(\mathcal{R})} \prod_{i \in \mathfrak{A}} \Gamma(\mathbf{U}_i; \mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger}) \xrightarrow{\delta_0(\mathcal{R})} \prod_{i, j \in \mathfrak{A}} \Gamma(\mathbf{U}_{i, j}; \mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger}) \quad (\diamond)$$

avec $\Gamma(\mathbf{U}_i; \mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger}) \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. L'algèbre $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger})$ se réalise ici comme sous-algèbre d'un produit d'algèbres séparées ; elle est donc séparée.

b) Lorsque \mathbf{X} est quasi-compact, le recouvrement \mathcal{R} dans (\diamond) peut être choisi *fini* auquel cas l'application $\delta_0(\mathcal{R})$ est continue entre un espace faiblement complet, car somme finie d'espaces f.c., et un espace séparé (d'après (a)), son noyau est alors faiblement complet. ■

3.4.5. Réduction d'un schéma \dagger -adique. Pour tout schéma \dagger -adique \mathcal{D}^\dagger , l'espace annelé $(\mathbf{X}; (\mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger})_s)$ (cf. 3.3.5) est un schéma localement de type fini (3.3.3-c) au-dessus de $\text{Spec}(\mathbf{R}_1)$, il sera appelé « la réduction modulo \mathbf{I}^s de \mathcal{D}^\dagger »

Terminologie. Un schéma \dagger -adique \mathcal{D}^\dagger sera dit « de réduction affine, séparée, ... » s'il en est ainsi du schéma algébrique $(\mathbf{X}; (\mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger})_1)$.

§ 4. Modules cohérents sur un schéma \dagger -adique

4.1 Modules cohérents sur un espace annelé

Soit $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ un espace annelé. On rappelle qu'un $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module \mathcal{M} (à droite) est « quasi-cohérent » lorsque pour chaque $x \in \mathbf{X}$ il existe voisinage ouvert V_x et une suite exacte à droite de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}|_{V_x}$ -modules

$$\bigoplus_{\mathfrak{A}_x} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}|_{V_x} \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{B}_x} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}|_{V_x} \longrightarrow \mathcal{M}|_{V_x} \rightarrow \mathbf{0}, \quad (25)$$

où \mathfrak{A}_x et \mathfrak{B}_x sont des ensembles d'indices arbitraires. On note $\mathbf{Mod}_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ dont les objets sont les $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules quasi-cohérents.

Un $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module \mathcal{M} est dit « de type fini » lorsque pour tout $x \in \mathbf{X}$ il existe un voisinage ouvert V_x et une surjection $p_x : \bigoplus_{\mathfrak{B}_x} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}|_{V_x} \twoheadrightarrow \mathcal{M}|_{V_x}$ avec \mathfrak{B}_x fini.

Le $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module \mathcal{M} est dit « cohérent » lorsqu'il est de type fini et que pour toute surjection locale $p_x : \bigoplus_{\mathfrak{B}_x} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}|_{V_x} \twoheadrightarrow \mathcal{M}|_{V_x}$ avec \mathfrak{B}_x fini, le faisceau $\ker(p_x)$ est de type fini. On note $\mathbf{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ dont les objets sont les $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules cohérents.

4.1.1. Réductions de modules cohérents. De même que nous l'avons fait pour les faisceaux d'algèbres (cf. 3.3.5), si $\mathcal{M} \in \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$, on note $(\mathcal{M})_s$ le faisceau engendré par le préfaisceau $\mathcal{M} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}_s$. Le faisceau $(\mathcal{M})_s$ est la « réduction modulo \mathbf{I}^s de \mathcal{M} ».

4.2 Modules cohérents sur un schéma \dagger -adique affine

Les assertions suivantes résultent aussitôt du théorème 3.2.5.

4.2.1. Proposition

- a) Soit $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.
- i) Pour tout \mathbf{A}^\dagger -module \mathbf{M} , le faisceau \mathbf{M}^\sim est un $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}$ -module quasi-cohérent.
 - ii) Pour tout \mathbf{A}^\dagger -module de type fini \mathbf{M} , le faisceau \mathbf{M}^\sim est un $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}$ -module cohérent.
 - iii) Le foncteur $(-)^\sim : \mathbf{Mod}(\mathbf{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})$ est pleinement fidèle.
- b) Soit \mathcal{X}^\dagger un schéma \dagger -adique.
- i) Les catégories $\mathbf{Mod}_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})$ et $\mathbf{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})$ sont abéliennes.
 - ii) Si \mathcal{M} est $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}$ -cohérent, on a $\mathcal{M}|_U = \Gamma(U; \mathcal{M})^\sim$, et donc $H^j(U; \mathcal{M}) = 0$ pour $j > 0$, pour tout ouvert U (affine) assez petit.
 - iii) Si $\mathcal{M} \in \mathbf{Mod}_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})$, sa réduction modulo \mathbf{I}^s , le faisceau $(\mathcal{M})_s$, est un $(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})_s$ -module (algébriquement) quasi-cohérent. Lorsque $(\mathbf{X}; (\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})_1)$ est un schéma (algébrique) affine, le faisceau $(\mathcal{M})_s$ est engendré par ses sections globales, i.e. il est isomorphe à $\Gamma(\mathbf{X}; (\mathcal{M})_s)^\sim$.

4.2.2. Acyclicité. La proposition suivante, pendant du théorème d'acyclicité des modules quasi-cohérents en théorie des schémas, jouera un rôle important dans la suite. Il est démontré dans [M] en supposant que (\mathbf{R}, \mathbf{I}) est un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal \mathbf{I} , nous allons le prouver dans le cas plus général où \mathbf{R} est seulement supposé noethérien.

4.2.3. Théorème. Soit $(\mathbf{X}, \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})$ le schéma \dagger -adique affine associé à $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

- a) Si $\mathcal{M} \in \mathbf{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})$, on a $H^i(\mathbf{X}; \mathcal{M}) = 0$ pour tout $i > 0$.
- b) Le foncteur

$$(-)^\sim : \mathbf{Mod}_{\text{tf}}(\mathbf{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})$$

est une équivalence de catégories.

Preuve. D'après 3.2.5 il suffira de prouver que $(-)^\sim$ est essentiellement surjectif. Soit \mathcal{M} un $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}$ -module cohérent. Nous allons appliquer le lemme 3.1.1. Soient $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ l'ensemble des ouverts principaux de \mathbf{X} et $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\mathbf{X})$ l'ensemble de $V \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ tels que $\mathcal{M}(V)$ est un $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(V)$ -module de type fini et le morphisme canonique $\mathcal{M}(V)^\sim \rightarrow \mathcal{M}|_V$ (cf. 3.2.3) est bijectif. Les propriétés 3.1.1- \mathcal{B} -i et 3.1.1- \mathcal{B} -ii sont immédiates d'après 4.2.1 et la proposition résultera de vérifier la propriété 3.1.1- \mathcal{B} -iii qui dit que si l'on a $D(f) = D(f_1) \cup D(f_2)$ avec $D(f_i) \in \mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\mathbf{X})$, on doit avoir aussi $D(f) \in \mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\mathbf{X})$.

Étant donnée une décomposition

$$D(\bar{f}) = D(\bar{f}_1) \cup D(\bar{f}_2), \quad \text{avec } D(\bar{f}_i) \in \mathcal{B}(\mathbf{X}), \quad (26)$$

il existe $g_i \in \mathbf{A}^\dagger \left\{ \frac{1}{\bar{f}} \right\}$ avec $1 = f_1 g_1 + f_2 g_2$ et quitte à nous restreindre au sous-schéma \dagger -adique ouvert $(\mathbf{V}; \mathcal{O}_{\mathbf{V}}) = (\mathbf{A}^\dagger \left\{ \frac{1}{\bar{f}} \right\})^\sim$ et à remplacer $D(\bar{f}_i) \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ par $D(\bar{f}_i \bar{g}_i) \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ nous pouvons supposer que l'on a $1 = f_1 + f_2$ dans (26).

Notations et remarques.

R-1) $V_i := D(\bar{f}_i)$ et $V_{12} := D(\bar{f}_{12}) = D(\bar{f}_1 \bar{f}_2)$,

R-2) $\mathbf{Mod}_{V_1, V_2}(\mathcal{O}_{\mathbf{V}})$: sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{V}})$ des $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$ -modules \mathcal{A} tels que $\mathcal{A}|_{V_i} = \mathcal{A}(V_i)^\sim$; c'est une sous-catégorie abélienne de $\mathbf{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{V}})$.

R-3) Si $\mathcal{A} \in \mathbf{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{V}})$ on note $\bar{\mathcal{A}} := (\mathcal{A})_1$, la réduction modulo \mathbf{I} de \mathcal{A} (4.1.1). Le faisceau $\bar{\mathcal{A}}$ est un faisceau cohérent sur le schéma algébrique affine $(\mathbf{V}; (\mathcal{O}_{\mathbf{V}})_1)$ (associé à $\mathbf{A}^\dagger_1[1/\bar{f}]$) il est donc de la forme $(\bar{\mathbf{N}})^\sim$ pour un certain $\mathbf{A}^\dagger_1[1/\bar{f}]$ -module de type fini $\bar{\mathbf{N}}$. On a aussi $H^i(\mathbf{V}; \bar{\mathcal{A}}) = 0$ pour tout $i > 0$.

Lemme 1. Pour tout $\mathcal{A} \in \mathbf{Mod}_{V_1, V_2}(\mathcal{O}_{\mathbf{V}})$, on a $H^i(\mathbf{V}; \mathcal{A}) = 0$, pour $i > 0$. En particulier, le foncteur $\Gamma(\mathbf{V}; -)$ est exact sur $\mathbf{Mod}_{V_1, V_2}(\mathcal{O}_{\mathbf{V}})$.

Preuve du lemme. La suite exacte de Mayer-Vietoris pour la cohomologie des faisceaux et pour le recouvrement $\mathbf{V} = V_1 \cup V_2$ est

$$\cdots \rightarrow H^i(\mathbf{V}; \mathcal{A}) \rightarrow H^i(V_1; \mathcal{A}) \oplus H^i(V_2; \mathcal{A}) \rightarrow H^i(V_{12}; \mathcal{A}) \rightarrow \cdots$$

ce qui donne aussitôt

$$H^i(\mathbf{V}; \mathcal{A}) = 0, \text{ pour } i \geq 2,$$

puisque $V_* \in \mathcal{F}(\mathbf{V})$ (3.2.5). Il nous reste la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathcal{A}(V_1) \oplus \mathcal{A}(V_2) \xrightarrow{\delta^\dagger} \mathcal{A}(V_{12}) \rightarrow H^1(\mathbf{V}; \mathcal{A}) \rightarrow 0 \quad (27)$$

et l'annulation de $H^1(\mathbf{V}; \mathcal{A})$ résultera de la surjectivité de δ^\dagger .

Nous avons ainsi un morphisme de suites exactes (cf. R-3)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{A}(\mathbf{V}) & \rightarrow & \mathcal{A}(V_1) \oplus \mathcal{A}(V_2) & \xrightarrow{\delta^\dagger} & \mathcal{A}(V_{12}) & \rightarrow & H^1(\mathbf{V}; \mathcal{A}) & \rightarrow & 0 \\ & & \pi \downarrow & & \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 & & \pi_{12} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \bar{\mathcal{A}}(\mathbf{V}) & \rightarrow & \bar{\mathcal{A}}(V_1) \oplus \bar{\mathcal{A}}(V_2) & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \bar{\mathcal{A}}(V_{12}) & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & \bar{\mathbf{N}} & \rightarrow & \bar{\mathbf{N}}[\frac{1}{\bar{f}_1}] \oplus \bar{\mathbf{N}}[\frac{1}{\bar{f}_2}] & \xrightarrow{\bar{\delta}_0} & \bar{\mathbf{N}}[\frac{1}{\bar{f}_{12}}] & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où les morphismes π_\bullet sont des relèvements (3.2.5-(b-i) appliqué à V_\bullet). Les conditions d'application du théorème 2.5.1 sont présentes et le morphisme δ^\dagger est surjectif. Mais alors $H^1(\mathbf{V}; \mathcal{A}) = 0$ dans la suite exacte (27) et ceci termine la preuve du lemme. \square

Soient $\mathcal{A} \in \mathbf{Mod}_{V_1, V_2}(\mathcal{O}_{\mathbf{V}})$ et $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ la surjection canonique, le morphisme $\pi(\mathbf{V}) : \mathcal{A}(\mathbf{V}) \rightarrow \bar{\mathcal{A}}(\mathbf{V})$ est surjectif d'après le lemme 1. On prendra garde du fait que nous ne savons pas encore que $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ est un $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{\bar{f}}\}$ -module **de type fini**. Or, $\bar{\mathcal{A}}(\mathbf{V})$ est de type fini, puisque $\bar{\mathcal{A}}$ est un $(\mathcal{O}_{\mathbf{V}})_1$ -module cohérent sur un schéma (algébrique) affine, il existe donc un sous- $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{\bar{f}}\}$ -module $\mathbf{M} \subseteq \mathcal{A}(\mathbf{V})$ de type fini tel que $\pi(\mathbf{V})(\mathbf{M}) = \bar{\mathcal{A}}(\mathbf{V})$. Le morphisme d'inclusion $\mathbf{M} \subseteq \mathcal{A}(\mathbf{V})$ induit (3.2.3) un morphisme de faisceaux $\phi : \mathbf{M}^\sim \rightarrow \mathcal{A}$ dont les restrictions $\phi|_{V_i}$ correspondent aux morphismes $\mathbf{M}\{\frac{1}{\bar{f}_i}\} \rightarrow \mathcal{A}(V_i)$ qui, étant surjectifs modulo \mathbf{I} , sont surjectifs puisque $\mathcal{A}(V_i) \rightarrow \bar{\mathcal{A}}(V_i)$ est un relèvement de type fini. Le morphisme de faisceaux $\phi : \mathbf{M}^\sim \rightarrow \mathcal{A}$ est donc surjectif car localement surjectif, et

sa section globale $\phi(\mathbf{V}) : \mathbf{M} = \Gamma(\mathbf{V}; \mathbf{M}^\sim) \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{V})$ est surjective d'après le lemme 1. Le $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ -module $\mathcal{N}(\mathbf{V})$ est donc bien de type fini. Posons $\mathbf{M} := \mathcal{N}(\mathbf{V})$ pour la suite.

Nous venons de démontrer que pour **tout** $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$ -module $\mathcal{N} \in \mathbf{Mod}_{V_1, V_2}(\mathcal{O}_{\mathbf{V}})$ le $\mathbf{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ -module $\mathcal{N}(\mathbf{V})$ est de type fini est que \mathcal{N} est quotient de $\mathcal{N}(\mathbf{V})^\sim$. Or le noyau \mathcal{K} du morphisme $\phi : \mathcal{N}(\mathbf{V})^\sim \rightarrow \mathcal{N}$ induit à partir de $\text{id} : \mathcal{N}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{V})$ (3.2.3) est un $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$ -module de la catégorie $\mathbf{Mod}_{V_1, V_2}(\mathcal{O}_{\mathbf{V}})$ avec $\mathcal{K}(\mathbf{V}) = 0$. Par conséquent $\mathcal{K} = 0$ et $\mathcal{N}(\mathbf{V})^\sim \sim \mathcal{N}$.

La propriété 3.1.1- \mathcal{B} -iii pour \mathcal{M} est ainsi vérifiée et ceci achève la démonstration du théorème. \blacksquare

4.2.4. Remarque. La question de savoir si le foncteur $(-)^\sim : \mathbf{Mod}(\mathbf{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})$, dont on sait qu'il est pleinement fidèle, est une équivalence de catégorie est équivalente à l'annulation de la cohomologie de faisceau en degrés positifs pour tout module quasi-cohérent. Dans le cas algébrique ceci résulte du fait qu'un module quasi-cohérent est limite inductive de modules cohérents. L'analogie \dagger -adique de cette dernière propriété n'est pas examiné dans cet article.

§ 5. Critère d'affinité des schémas \dagger -adiques

5.1 On rappelle (cf. 3.4.5) qu'un schéma \dagger -adique \mathcal{D}^\dagger est dit de réduction affine lorsque l'espace annelé $(\mathbf{X}; (\mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger})_1)$ est un schéma algébrique affine (de type fini).

5.1.1. Théorème (Critère d'affinité). *Un schéma \dagger -adique $\mathcal{D}^\dagger = (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger})$ est affine si et seulement si sa réduction $(\mathbf{X}; (\mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger})_1)$ est un schéma algébrique affine.*

Preuve. Nous détaillons seulement la suffisance de la condition. Supposons que le schéma algébrique $(\mathbf{X}; (\mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger})_1)$ est affine associé à une \mathbf{R}_1 -algèbre notée $\bar{\mathbf{A}}$ qui sera nécessairement de type fini puisque localement de type fini. Notons $\pi : \mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger} \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger})_1$ la surjection canonique de faisceaux.

La démonstration suit la même démarche que la preuve du théorème 4.2.3, à savoir : utiliser le lemme 3.1.1. Notons $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ l'ensemble des ouverts principaux de \mathbf{X} et $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ l'ensemble des $V \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ tels que $(V; \mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger}|_V)$ est un schéma \dagger -adique affine. Les propriétés 3.1.1- \mathcal{B} -i et 3.1.1- \mathcal{B} -ii sont immédiates d'après 4.2.1 et la proposition résultera de vérifier la propriété 3.1.1- \mathcal{B} -iii qui dit que si l'on a $D(f) = D(f_1) \cup D(f_2)$ avec $D(f_i) \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, on doit avoir aussi $D(f) \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$. Nous supposons, comme dans la preuve de 4.2.3, que $f_1 + f_2 = 1$.

Notons pour simplifier $\mathbf{V} := D(f)$, $\mathcal{O}_{\mathbf{V}} := \mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger}|_{\mathbf{V}}$, $V_i := D(f_i)$, $f_{12} = f_1 f_2$ et $V_{12} = V_1 \cap V_2 = D(f_{12})$. Puis $\pi_\bullet := \pi(V_\bullet)$.

On a pour $i \in \{1, 2, 12\}$ (3.2.5)

R-i) Le morphisme $\pi_i : \mathcal{O}_{\mathbf{V}}(V_i) \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathbf{V}})_1(V_i) = \bar{\mathbf{A}}[1/\bar{f}_i]$ est un relèvement.

R-ii) $H^j(V_i; \mathcal{O}_{\mathbf{V}}) = 0$ pour tout $j > 0$.

On a alors le morphisme de complexes de Mayer-Vietoris relatifs au recouvrement $V = V_1 \cup V_2$ induit par le morphisme de faisceaux $\pi : \mathcal{O}_V \rightarrow (\mathcal{O}_V)_1$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{O}_V(\mathbf{V}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_V(V_1) \oplus \mathcal{O}_V(V_2) & \xrightarrow{\delta^\dagger} & \mathcal{O}_V(V_{12}) \rightarrow H^1(\mathbf{V}; \mathcal{O}_V) \rightarrow \mathbf{0} \\ & & \pi \downarrow & & \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \bar{\mathbf{A}} & \longrightarrow & \bar{\mathbf{A}}\left[\frac{1}{\bar{f}}\right] \oplus \bar{\mathbf{A}}\left[\frac{1}{1-\bar{f}}\right] & \xrightarrow{\delta_0} & \bar{\mathbf{A}}\left[\frac{1}{\bar{f}(1-\bar{f})}\right] \rightarrow \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

Les conditions d'application du théorème 2.4.1 étant vérifiées, l'application δ^\dagger est surjective. Par conséquent

$$H^j(\mathbf{V}; \mathcal{O}_V) = 0, \text{ pour tout } j > 0.$$

et nous avons le diagramme commutatif de lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{I} \otimes \mathcal{O}_V(\mathbf{V}) & \longrightarrow & \mathbf{I} \otimes \mathcal{O}_V(V_1) \oplus \mathbf{I} \otimes \mathcal{O}_V(V_2) & \longrightarrow & \mathbf{I} \otimes \mathcal{O}_V(V_{12}) & \rightarrow & \mathbf{0} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{O}_V(\mathbf{V}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_V(V_1) \oplus \mathcal{O}_V(V_2) & \xrightarrow{\delta^\dagger} & \mathcal{O}_V(V_{12}) \rightarrow \mathbf{0} \\ & & \pi \downarrow & & \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \bar{\mathbf{A}} & \longrightarrow & \bar{\mathbf{A}}\left[\frac{1}{\bar{f}}\right] \oplus \bar{\mathbf{A}}\left[\frac{1}{1-\bar{f}}\right] & \xrightarrow{\delta_0} & \bar{\mathbf{A}}\left[\frac{1}{\bar{f}(1-\bar{f})}\right] \rightarrow \mathbf{0} \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}$$

où les trois colonnes de droite sont exactes. Une chasse au diagramme élémentaire montre alors que $\pi : \mathcal{O}_V(\mathbf{V}) \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$ est **surjective** (mais pas nécessairement un relèvement).

L'algèbre $\mathcal{O}_V(\mathbf{V})$ est faiblement complète (mais pas nécessairement f.c.t.f.) puisque $\mathcal{O}_V(V_1) \oplus \mathcal{O}_V(V_2)$ est f.c.t.f. et que $\mathcal{O}_V(V_{12})$ est séparé (cf. 3.4.4).

Notons \mathbf{B}^\dagger une sous-algèbre f.c.t.f. de $\mathcal{O}_V(\mathbf{V})$ telle que $\pi(\mathbf{B}^\dagger) = \bar{\mathbf{A}}$, et soit $b_1 \in \mathbf{B}^\dagger$ tel que $\pi(b_1) = \bar{f}_1$ et $b_2 = 1 - b_1$. Soit $\beta : \mathbf{B}^\dagger \hookrightarrow \mathcal{O}_V(\mathbf{V})$ l'inclusion et $\bar{\beta} : \mathbf{B}^\dagger_1 \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$ la surjection induite.

Notons $(\mathbf{B}^\dagger)^\sim = (\mathbf{W}; \mathcal{O}_{\mathbf{B}^\dagger})$ et soit $W_i = D(\bar{b}_i)$. Le schéma algébrique \mathbf{V} est alors un fermé (affine) de \mathbf{W} et le plongement $\iota : \mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}$ correspond à la surjection $\bar{\beta} : \mathbf{B}^\dagger_1 \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$. On a $\iota^{-1}(W_i) = V_i$.

Notons $\mathcal{B}_{W_1, W_2}(\mathbf{W})$ la catégorie des ouverts affines de \mathbf{W} contenus dans l'un des W_i et de même pour $\mathcal{B}_{V_1, V_2}(\mathbf{V})$. Si $D(\bar{b}) \in \mathcal{B}_{W_1, W_2}(\mathbf{W})$, on a $\iota^{-1}(D(\bar{b})) = D(\bar{\beta}(\bar{b})) \in \mathcal{B}_{V_1, V_2}(\mathbf{V})$, et b agit comme un opérateur inversible sur $\iota_*(\mathcal{O}_V)(D(\bar{b}))$ (1.3.1-f), il existe par conséquent un et un unique morphisme de \mathbf{B}^\dagger -module $\beta\{1/b\}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}^\dagger & \xrightarrow[\subseteq]{\beta} & \iota_*(\mathcal{O}_V)(\mathbf{W}) \\ \nu_b^\dagger \downarrow & & \downarrow \text{rest.} \\ \mathbf{B}^\dagger\left\{\frac{1}{b}\right\} & \xrightarrow{\beta\{1/b\}} & \iota_*(\mathcal{O}_V)(D(\bar{b})) \end{array}$$

La famille de ces diagrammes définit alors un morphisme de préfaisceaux sur la catégorie $\mathcal{B}_{W_1, W_2}(\mathbf{W})$ qui étant une base pour la topologie de \mathbf{W} donne lieu à un morphisme de faisceaux de \mathbf{R} -algèbres $\rho : \mathcal{O}_{\mathbf{B}^\dagger} \rightarrow \iota_*(\mathcal{O}_V)$ dont la restriction à W_i est l'unique morphisme $\rho(W_i) : \mathbf{B}^\dagger\left\{\frac{1}{b}\right\}_i \rightarrow \mathcal{O}_V(V_i)$ induit par $\beta : \mathbf{B}^\dagger \hookrightarrow \mathcal{O}_V(\mathbf{V})$. Le morphisme $\rho(W_i)$ est

surjectif puisque de réduction la surjection $\mathbf{B}^\dagger_1[\frac{1}{b_i}] \rightarrow \overline{\mathbf{A}}[\frac{1}{f_i}]$ et puisque $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}(V_i)$ est f.c.t.f. (1.3.1-h). On conclut que $\iota_*(\mathcal{O}_{\mathbf{V}})$ un $\mathcal{O}_{\mathbf{B}^\dagger}$ -module cohérent quotient de $\mathcal{O}_{\mathbf{B}^\dagger}$. Par le théorème 4.2.3 le module $\Gamma(\mathbf{W}; \iota_*(\mathcal{O}_{\mathbf{V}})) = \mathcal{O}_{\mathbf{V}}(\mathbf{V})$ est un quotient de \mathbf{B}^\dagger et c'est donc une algèbre f.c.t.f. (1.3.1-d). Nous pouvons donc prendre $\mathbf{B}^\dagger = \mathcal{O}_{\mathbf{V}}(\mathbf{V})$ dans tout ce qui précède auquel cas on conclut que $(\mathcal{O}_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}))^\sim \sim (\mathbf{V}; \mathcal{O}_{\mathbf{V}})$ et ceci prouve la propriété 3.1.1- \mathcal{B} -iii ce qui achève la démonstration du théorème. ■

5.1.2. Le corollaire suivant du critère d'affinité 5.1.1 élargit la portée de l'assertion 3.2.5-b-i dès ouverts principaux jusqu'aux ouverts affines d'un schéma \dagger -adique affine.

5.1.3. Corollaire. Soit $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ de schéma \dagger -adique affine associé $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})$, et soit \mathbf{V} un ouvert affine de \mathbf{X} .

a) Pour tout \mathbf{A}^\dagger -module \mathbf{M} , le morphisme canonique

$$\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}(\mathbf{V}) \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}^\sim(\mathbf{V}), \quad P \otimes m \mapsto Pm,$$

est **bijectif**.

b) Pour tout recouvrement $\mathbf{V} = V_1 \cup \dots \cup V_\ell$ où V_i est un ouvert affine de \mathbf{X} , la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(\mathbf{V}) \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M} \rightarrow \prod_{i=1, \dots, \ell} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(V_i) \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M} \rightarrow \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(V_i \cap V_j) \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M}$$

est exacte.

Preuve. Soit $\mathbf{V} = W_1 \cup \dots \cup W_\ell$ un recouvrement de \mathbf{V} par des ouverts principaux $W_i = D(\overline{f}_i)$ de \mathbf{X} avec $f_i \in \mathbf{A}^\dagger$. Par 3.2.5-b-i et la propriété de faisceau on a une suite exacte à gauche :

$$0 \rightarrow \mathbf{M}^\sim(\mathbf{V}) \rightarrow \prod_i \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(W_i) \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M} \xrightarrow{\delta_0(\mathbf{M})} \prod_{i < j} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(W_i) \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M}$$

D'autre part suite au critère d'affinité 5.1.1 on a $\mathbf{B}^\dagger := \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(\mathbf{V}) \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et l'espace annelé $(\mathbf{V}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}|_{\mathbf{V}})$ s'identifie à $(\mathbf{B}^\dagger)^\sim$. On a donc un isomorphisme de suites exactes à gauche

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{B}^\dagger & \rightarrow & \prod_i \mathbf{B}^\dagger \left\{ \frac{1}{f_i} \right\} & \xrightarrow{\delta_0(\mathbf{B}^\dagger)} & \prod_{i < j} \mathbf{B}^\dagger \left\{ \frac{1}{f_i f_j} \right\} \\ & & \text{id} \downarrow & & \sim \downarrow & & \sim \downarrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(\mathbf{V}) & \rightarrow & \prod_i \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(W_i) & \xrightarrow{\delta_0} & \prod_{i < j} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(W_{ij}) \end{array}$$

qui induit un isomorphisme canonique de $\mathbf{K} := \ker(\delta_0(\mathbf{B}^\dagger) \otimes \text{id}_{\mathbf{M}})$ sur $\mathbf{M}^\sim(\mathbf{V})$. Or, par l'isomorphisme de foncteurs sur $\mathbf{Mod}(\mathbf{B}^\dagger)$:

$$(-) \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M} \simeq (-) \otimes_{\mathbf{B}^\dagger} (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M})$$

et l'affinité de $(\mathbf{V}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}|_{\mathbf{V}})$, on a $\mathbf{K} = \mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M}$, CQFD. ■

§6. Produits fibrés dans la catégorie des schémas \dagger -adiques

6.1 Généralités sur le produit fibré

On rappelle dans cette section les définitions et résultats nécessaires à la compréhension de la proposition 6.1.15 qui reformule le critère de représentabilité de foncteurs sur la catégorie des espaces annelés de [EGA₁] (prop. §4.5.4).

On désigne par \mathcal{C} une catégorie. Le mot “foncteur” sans qualificatif est synonyme de “foncteur contravariant”. En parlant de foncteurs, le mot “morphisme” est synonyme de “transformation naturelle”.

6.1.1. Catégorie \mathcal{C}/\mathcal{S} .

Pour tout objet \mathcal{S} de \mathcal{C} , on note \mathcal{C}/\mathcal{S} la catégorie dont les objets sont les morphismes de \mathcal{C} de but \mathcal{S} . Si $\pi_1 : \mathbf{X}_1 \rightarrow \mathcal{S}$ et $\pi_2 : \mathbf{X}_2 \rightarrow \mathcal{S}$ sont des objets de \mathcal{C}/\mathcal{S} , l'ensemble $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}/\mathcal{S}}(\pi_1, \pi_2)$ est le sous-ensemble de $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ des morphismes $\phi : \mathbf{X}_1 \rightarrow \mathbf{X}_2$ tels que $\pi_1 = \pi_2 \circ \phi$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_1 & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{X}_2 \\ \pi_1 \downarrow & \oplus & \downarrow \pi_2 \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{S}}} & \mathcal{S} \end{array}$$

6.1.2. Foncteur représentable. Un foncteur contravariant $F : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ est dit «représentable» s'il existe $\mathbf{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et un isomorphisme de foncteurs $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{X}) \simeq F(-)$.

6.1.3. Lemme d'Yoneda. La correspondance qui associe à un morphisme de foncteurs $\Phi(-) : \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{X}) \rightarrow F(-)$ l'élément $\Phi(\mathbf{X})(\text{id}_{\mathbf{X}}) \in F(\mathbf{X})$ est une bijection sur l'ensemble $F(\mathbf{X})$. La correspondance réciproque associe à $x \in F(\mathbf{X})$ et $\mathbf{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ l'application $\Phi(\mathbf{Y}) : \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \rightarrow F(\mathbf{Y})$, $f \mapsto F(f)(x)$.

Lorsque F est représentable, les couples $(\mathbf{X}, x \in F(\mathbf{X}))$ donnés par le lemme d'Yoneda sont dits «représenter F ».

6.1.4. Lemme. Les couples représentant un même foncteur sont deux à deux **canoniquement** isomorphes.

6.1.5. Produits. Étant donnés deux objets \mathbf{X} et \mathbf{Y} de \mathcal{C} , on dit que « \mathbf{X} et \mathbf{Y} admettent un produit dans \mathcal{C} » lorsque le foncteur $F(-) := \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{X}) \times \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{Y}) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ est représentable. Dans ce cas, on note $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ et $p_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ et $p_{\mathbf{Y}} : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$ respectivement l'objet et l'élément de $F(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ qui caractérisent F .

On dira que «les produits existent dans \mathcal{C} » ou bien que « \mathcal{C} admet des produits» lorsque chaque paire d'objets de \mathcal{C} admet un produit dans \mathcal{C} .

6.1.6. Produits fibrés d'ensembles. Étant données deux applications d'ensembles $\pi_X : X \rightarrow S$ et $\pi_Y : Y \rightarrow S$ on définit l'ensemble $X \times_S Y$ et l'application $\pi_{X \times_S Y} : X \times_S Y \rightarrow S$ par :

$$X \times_S Y =: \{(x, y) \in X \times Y \mid \pi_X(x) = \pi_Y(y)\} \xrightarrow{\pi_{X \times_S Y}} S$$

$$(x, y) \longmapsto \pi_X(x)$$

On note $p_X : X \times_S Y \rightarrow X$ et $p_Y : X \times_S Y \rightarrow Y$ les restrictions des projections canoniques de $X \times Y$. On a le diagramme « cartésien »

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{p_Y} & Y \\ p_X \downarrow & \square & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{\pi_X} & S \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (x, y) & \xrightarrow{p_Y} & y \\ p_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ x & \xrightarrow{\pi_X} & \pi_X(x) = \pi_Y(y) \end{array}$$

Le couple $(X \times_S Y, (p_X, p_Y))$ représente le foncteur

$$\mathbf{Mor}_{\mathbf{Ens}/S}(-, \pi_X) \times \mathbf{Mor}_{\mathbf{Ens}/S}(-, \pi_Y),$$

c'est le « produit fibré de X et Y au-dessus de S (relativement à π_X et π_Y) ».

6.1.7. Lemme. Étant donnés deux diagrammes commutatifs d'applications d'ensembles :

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f_X} & X_2 \\ \pi_{X_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{X_2} \\ S_1 & \xrightarrow{f_S} & S_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{f_Y} & Y_2 \\ \pi_{Y_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{Y_2} \\ S_1 & \xrightarrow{f_S} & S_2 \end{array}$$

il existe une et une unique application $f_X \times_{f_S} f_Y : X_1 \times_{S_1} Y_1 \rightarrow X_2 \times_{S_2} Y_2$ rendant commutatifs les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times_{S_1} Y_1 & \xrightarrow{f_X \times_{f_S} f_Y} & X_2 \times_{S_2} Y_2 \\ p_{X_1} \downarrow & & \downarrow p_{X_2} \\ X_1 & \xrightarrow{f_X} & X_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_1 \times_{S_1} Y_1 & \xrightarrow{f_X \times_{f_S} f_Y} & X_2 \times_{S_2} Y_2 \\ p_{Y_1} \downarrow & & \downarrow p_{Y_2} \\ Y_1 & \xrightarrow{f_Y} & Y_2 \end{array}$$

6.1.8. Produits fibrés de foncteurs d'ensembles. Étant donnés trois foncteurs contravariants $F, G, H : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ et deux morphismes de foncteurs $\pi_F : F \rightarrow H$ et $\pi_G : G \rightarrow H$ la correspondance :

$$\mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \ni X \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} F(X) \times_{H(X)} G(X) & \xrightarrow{p_{G(X)}} & G(X) \\ p_{F(X)} \downarrow & & \downarrow \pi_{G(X)} \\ F(X) & \xrightarrow{\pi_{F(X)}} & H(X) \end{array} \right)$$

$$\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \ni f \rightsquigarrow (F(f) \times_{H(f)} G(f), F(f), G(f), H(f))$$

où $F(f) \times_{H(f)} G(f)$ désigne le morphisme donné par le lemme 6.1.7, est une correspondance fonctorielle.

Le foncteur $(-) \rightsquigarrow F(-) \times_{H(-)} G(-)$ est le « produit fibré de F et G au-dessus de H (relativement à π_F et π_G) ».

6.1.9. Lemme. *Étant donnés trois foncteurs d'ensembles F, G, H représentés par des objets X, Y, S respectivement. Étant donnés deux morphismes $\pi_F : F \rightarrow H$ et $\pi_G : G \rightarrow H$ représentés par des morphismes $\pi_X : X \rightarrow S$ et $\pi_Y : Y \rightarrow S$. Le produit fibré de foncteurs $F \times_H G$ relatif à π_F et π_G est représentable si et seulement si le produit fibré $X \times_S Y$ relatif à π_X et π_Y existe.*

6.1.10. Produits fibrés dans une catégorie générale

Définition. On dit que «les produits fibrés existent dans la catégorie \mathcal{C} » lorsque les produits existent dans les catégories $\mathcal{C}/_S$ pour tout objet $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Étant donnés deux morphismes $\pi_X : X \rightarrow S$ et $\pi_Y : Y \rightarrow S$ dans \mathcal{C} , on a les applications naturelles

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X) & \xrightarrow{\pi_X(-)} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, S) \\ f & \longmapsto & \pi_X \circ f \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, Y) & \xrightarrow{\pi_Y(-)} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, S) \\ f & \longmapsto & \pi_Y \circ f \end{array}$$

Posons $F(-) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X)$, $G(-) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ et $H(-) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, S)$. L'existence des produits fibrés dans \mathcal{C} équivaut alors à la représentabilité du foncteur $F \times_H G$, quels que soient π_X et π_Y (cf. 6.1.5).

6.1.11. Produits fibrés dans la catégorie $\text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{C}')$. On note ainsi la catégorie des foncteurs contravariants de \mathcal{C} vers \mathcal{C}' . Lorsque la catégorie \mathcal{C}' admet des produits fibrés on peut, de manière analogue à 6.1.6, définir pour des foncteurs $F, G, B : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}'$ et deux morphismes $\pi_F : F \rightarrow B$ et $\pi_G : G \rightarrow B$, «le produit fibré de F et G au-dessus de B (relativement à π_F et π_G)». On dit ([EGA₁] 0 §1.7.2, p. 45) que les produits fibrés existent dans la catégorie $\text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{C}')$.

6.1.12. Morphisme représentable de foncteurs d'ensembles. Soient $F, G : \mathcal{C} \rightsquigarrow \text{Ens}$ deux foncteurs contravariants. Un morphisme $f : F \rightarrow G$ est dit «représentable» si pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout morphisme $u : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X) \rightarrow G$, le foncteur $F \times_G \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X)$ est représentable.

Dans ce cas, si on fixe un isomorphisme $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, Y) \simeq F \times_G \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X)$, le morphisme canonique de foncteurs $F \times_G \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X)$ est déterminé par un unique morphisme $\phi_X \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

Soit \mathcal{P} une classe de morphismes de \mathcal{C} qui soit :

- stable par composition à droite ou à gauche par des isomorphismes ;
- stable par changement de base dans \mathcal{C} .

Définition. Un morphisme de foncteurs d'ensembles est dit «représentable par un morphisme de \mathcal{P} » si dans la correspondance $X \rightsquigarrow \phi_X$, les morphismes ϕ_X appartiennent tous à \mathcal{P} .

6.1.13. Proposition. ([EGA₁] prop. 0.1.7.5) *Soient F, G, H des foncteurs contravariants de \mathcal{C} vers Ens .*

a) *Tout isomorphisme de foncteurs est représentable.*

- b) Si $f : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ et $g : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ sont représentables, il en est de même de $g \circ f$.
- c) Si $f : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ est représentable, il en est de même de tout morphisme $f_{(\mathbf{H})}$ déduit de f par changement de base $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}$.

6.1.14. Critère de représentabilité dans les catégories d'espaces annelés. Le critère de représentabilité de foncteurs sur la catégorie des espaces annelés $\mathbf{Esp}\text{-ann}/\mathcal{S}$ de [EGA₁] (prop. 0.4.5.4, p. 103) est plus généralement valable sur n'importe quelle sous-catégorie pleine \mathcal{C} de $\mathbf{Esp}\text{-ann}/\mathcal{S}$ vérifiant les deux propriétés de stabilité suivantes :

- Recollement : Tout \mathcal{S} -espace localement isomorphe à un objet \mathcal{C} est dans \mathcal{C} .
- Restriction ouverte : Le \mathcal{S} -espace induit sur un ouvert d'un objet de \mathcal{C} est dans \mathcal{C} .

Voici l'énoncé du critère en question.

6.1.15. Proposition. Soient \mathcal{C} une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Esp}\text{-ann}/\mathcal{S}$ stable par recollements et restrictions ouvertes, $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur contravariant, $\{\mathbf{F}_i\}_{i \in I}$ une famille de sous-foncteurs de \mathbf{F} . On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :

- a) Chacun des morphismes fonctoriels canoniques $u_i : \mathbf{F}_i \rightarrow \mathbf{F}$ est représentable par une immersion ouverte.
- b) Pour tout $\mathbf{X} \in \mathcal{C}$, l'application $U \mapsto \mathbf{F}(U)$, où U parcourt l'ensemble des \mathcal{S} -espaces annelés induits sur les ouverts de \mathbf{X} , est un faisceau d'ensembles.
- c) Pour tout $\mathbf{Z} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout morphisme $\text{Mor}(_, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{F}$, si \mathbf{Z}_i représente $\mathbf{F}_i \times_{\mathbf{F}} \text{Mor}(_, \mathbf{Z})$ et si U_i est l'image de \mathbf{Z}_i dans \mathbf{Z} , alors les U_i forment un recouvrement de \mathbf{Z} .
- d) Chaque \mathbf{F}_i est représentable par un objet $\mathbf{X}_i \in \text{Ob}(\mathcal{C})$

Dans ces conditions, \mathbf{F} est représentable par un objet \mathbf{X} de \mathcal{C} , les morphismes $\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}$ sont des immersions ouvertes et les images des espaces sous-jacents aux \mathbf{X}_i forment un recouvrement ouvert de \mathbf{X} .

6.2 Produits fibrés de schémas \dagger -adiques

Le principal résultat de cette section est le théorème 6.2.3 qui établit l'existence des produits fibrés dans la catégorie des schémas \dagger -adiques. Dans la preuve, le critère de représentabilité de foncteurs 6.1.15 ⁽²⁾ nous amène à montrer que les produits fibrés de la catégorie $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ sont aussi des produits fibrés de $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. Ceci est établi dans 6.2.2-b comme corollaire du théorème d'affinité 5.1.1.

² [EGA₁], chap 0, prop. §4.5.4.

6.2.1. Faisceaux sur $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. Un foncteur $\mathbf{F} : \mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ est dit «*faisceau (d'ensembles)*» s'il est contravariant et si pour tout $\mathcal{D}^\dagger \in \mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et pour tout recouvrement ouvert $\{\iota_\alpha : \mathcal{W}_\alpha^\dagger \subseteq \mathcal{D}^\dagger\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de \mathcal{D}^\dagger , la suite

$$\mathbf{F}(\mathcal{D}^\dagger) \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{F})} \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{F}(\mathcal{W}_\alpha^\dagger) \xrightarrow[\delta_2(\mathbf{F})]{\delta_1(\mathbf{F})} \prod_{\alpha, \beta \in \mathfrak{A}} \mathbf{F}(\mathcal{W}_{\alpha, \beta}^\dagger)$$

avec

$$\begin{cases} \epsilon(\mathbf{F})(z)(\alpha) = \mathbf{F}(\iota_\alpha)(z) \\ \delta_1(\mathbf{F})(\omega)(\alpha, \beta) = \mathbf{F}(\iota_{\alpha, \beta}^\alpha)(\omega(\alpha)) \\ \delta_2(\mathbf{F})(\omega)(\alpha, \beta) = \mathbf{F}(\iota_{\alpha, \beta}^\beta)(\omega(\beta)) \end{cases}$$

où $\iota_{\alpha, \beta}^\alpha$ désigne l'inclusion $\mathcal{W}_{\alpha, \beta}^\dagger \subseteq \mathcal{W}_\alpha^\dagger$, est «*exacte*», i.e. $\epsilon(\mathbf{F})$ est une bijection entre $\mathbf{F}(\mathcal{D}^\dagger)$ et l'ensemble $\{\delta_1(\mathbf{F}) = \delta_2(\mathbf{F})\} \subseteq \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{F}(\mathcal{W}_\alpha^\dagger)$.

Proposition. *Un morphisme $\mu : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ de faisceaux d'ensembles sur $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ est un isomorphisme si et seulement si sa restriction à la sous-catégorie $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ est un isomorphisme.*

Preuve. Soit $\mathcal{D}^\dagger \in \mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et soit $\{\mathcal{W}_\alpha^\dagger\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de \mathcal{D}^\dagger avec $\mathcal{W}_\alpha^\dagger \in \mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. On a le morphisme des suites exactes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{F}(\mathcal{D}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{F})} & \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{F}(\mathcal{W}_\alpha^\dagger) & \xrightarrow[\delta_2(\mathbf{F})]{\delta_1(\mathbf{F})} & \prod_{\alpha, \beta \in \mathfrak{A}} \mathbf{F}(\mathcal{W}_{\alpha, \beta}^\dagger) \\ \mu(\mathcal{D}^\dagger) \downarrow & & \mu(\mathcal{W}_\alpha^\dagger) \downarrow & & \mu(\mathcal{W}_{\alpha, \beta}^\dagger) \downarrow \\ \mathbf{G}(\mathcal{D}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{G})} & \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{G}(\mathcal{W}_\alpha^\dagger) & \xrightarrow[\delta_2(\mathbf{G})]{\delta_1(\mathbf{G})} & \prod_{\alpha, \beta \in \mathfrak{A}} \mathbf{G}(\mathcal{W}_{\alpha, \beta}^\dagger) \end{array}$$

et le lemme résultera de montrer que les applications $\mu(\mathcal{W}_{\alpha, \beta}^\dagger)$ sont bijectives. C'est le cas lorsque \mathcal{D}^\dagger est de réduction séparée puisqu'alors $\mathcal{W}_{\alpha, \beta}^\dagger$ est un ouvert de réduction *affine* du schéma \dagger -adique affine $\mathcal{W}_\alpha^\dagger$ et donc $\mathcal{W}_{\alpha, \beta}^\dagger \in \mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ d'après 5.1.1. Et ce sera alors aussi le cas dans la situation générale car la réduction de $\mathcal{W}_{\alpha, \beta}^\dagger$ est toujours séparée étant sous-schéma (ouvert) d'un schéma affine (donc séparé). ■

6.2.2. Théorème

a) Pour tous $\mathcal{D}^\dagger \in \mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et $\mathcal{Y}^\dagger \in \mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ l'application naturelle

$$\begin{aligned} \mathbf{Mor}(\mathcal{D}^\dagger, \mathcal{Y}^\dagger) & \xrightarrow{\gamma(\mathcal{D}^\dagger, \mathcal{Y}^\dagger)} \mathbf{Homom}_{\mathbf{R}}(\Gamma(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathcal{Y}^\dagger}), \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger})) \\ (f, f^\#) & \longmapsto \Gamma(\mathbf{Y}; f^\# : \mathcal{O}_{\mathcal{Y}^\dagger} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\mathcal{D}^\dagger}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

b) Les produits fibrés de $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ sont des produits fibrés de $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

Preuve

a) Pour $\mathcal{Y}^\dagger = (\mathbf{A}^\dagger)^\sim$ fixé, le foncteur $(-) \rightsquigarrow \mathbf{Homom}_R(\mathbf{A}^\dagger, \Gamma(-))$ est un faisceau d'ensembles sur $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. En effet, soit $\mathcal{X}^\dagger = \cup_\alpha \mathcal{U}_\alpha^\dagger$ un recouvrement ouvert de $\mathcal{X}^\dagger \in \mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. On a la suite exacte de d'ensembles

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}) \xrightarrow{\epsilon(\Gamma)} \prod_\alpha \Gamma(\mathbf{U}_\alpha; \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}) \xrightarrow[\delta_2(\Gamma)]{\delta_1(\Gamma)} \prod_{\alpha, \beta} \Gamma(\mathbf{U}_{\alpha, \beta}; \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})$$

L'application $\mathbf{Homom}_R(\mathbf{A}^\dagger; \epsilon(\Gamma))$ est injective puisque \mathbf{U}_α recouvre \mathbf{X} . Ensuite,

$$\mathbf{Homom}_R(\mathbf{A}^\dagger; \prod_\alpha \Gamma(\mathbf{U}_\alpha; \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})) = \prod_\alpha \mathbf{Homom}_R(\mathbf{A}^\dagger; \Gamma(\mathbf{U}_\alpha; \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}))$$

et la donnée de $\vec{\eta} \in \mathbf{Homom}_R(\mathbf{A}^\dagger; \prod_\alpha \Gamma(\mathbf{U}_\alpha; \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}))$ vérifiant $\delta_1(\Gamma) \circ \vec{\eta} = \delta_2(\Gamma) \circ \vec{\eta}$ équivaut à la donnée d'une famille de morphismes de \mathbf{R} -algèbres $\eta_\alpha : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \Gamma(\mathbf{U}_\alpha; \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})$ telle que, pour chaque $a \in \mathbf{A}^\dagger$ on ait :

$$\eta_\alpha(a)|_{\mathbf{U}_{\alpha, \beta}} = \eta_\beta(a)|_{\mathbf{U}_{\alpha, \beta}}.$$

Il existe alors une et une seule section globale $\eta(a) \in \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})$ recollant les $\eta_\alpha(a)$. L'application $a \mapsto \eta(a)$ est un morphisme de \mathbf{R} -algèbres vérifiant $\epsilon(\Gamma) \circ \eta = \vec{\eta}$ ce qui termine la preuve du fait que $\mathbf{Homom}_R(\mathbf{A}^\dagger, \Gamma(-))$ est un faisceau sur $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

L'application $\gamma(-, \mathcal{Y}^\dagger) : \mathbf{Mor}(-, \mathcal{Y}^\dagger) \rightarrow \mathbf{Homom}_R(\mathbf{A}^\dagger, \Gamma(-))$ est par conséquent un morphisme de *faisceaux d'ensembles* sur $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$; on peut alors invoquer 6.2.1 et affirmer que c'est un isomorphisme de foncteurs puisqu'il en est ainsi de sa restriction à la sous-catégorie $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ (3.3.8-(a)).

b) Étant donnés $\mathcal{X}_i^\dagger, \mathcal{Y}^\dagger \in \mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et $\pi_i \in \mathbf{Mor}(\mathcal{X}_i^\dagger, \mathcal{Y}^\dagger)$ on a les morphismes de foncteurs $\mathbf{Mor}(-, \pi_i) : \mathbf{Mor}(-, \mathcal{X}_i^\dagger) \rightarrow \mathbf{Mor}(-, \mathcal{Y}^\dagger)$ et le foncteur sur $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$:

$$(-) \rightsquigarrow \mathbf{Mor}(-, \mathcal{X}_1^\dagger) \times_{\mathbf{Mor}(-, \mathcal{Y}^\dagger)} \mathbf{Mor}(-, \mathcal{X}_2^\dagger)$$

dont il faut prouver la représentabilité.

Or, grâce au produit fibré dans $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ (3.3.8)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_1^\dagger \times_{\mathcal{Y}^\dagger} \mathcal{X}_2^\dagger & \xrightarrow{p_1} & \mathcal{X}_1^\dagger \\ p_2 \downarrow & \square & \downarrow \pi_1 \\ \mathcal{X}_2^\dagger & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{Y}^\dagger \end{array}$$

on définit pour chaque $\mathcal{Z}^\dagger \in \mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ l'application

$$\mathbf{Mor}(\mathcal{Z}^\dagger, \mathcal{X}_1^\dagger \times_{\mathcal{Y}^\dagger} \mathcal{X}_2^\dagger) \xrightarrow{\Xi(\mathcal{Z}^\dagger)} \mathbf{Mor}(\mathcal{Z}^\dagger, \mathcal{X}_1^\dagger) \times_{\mathbf{Mor}(\mathcal{Z}^\dagger, \mathcal{Y}^\dagger)} \mathbf{Mor}(\mathcal{Z}^\dagger, \mathcal{X}_2^\dagger)$$

qui associe à $\alpha \in \mathbf{Mor}(\mathcal{Z}^\dagger, \mathcal{X}_1^\dagger \times_{\mathcal{Y}^\dagger} \mathcal{X}_2^\dagger)$ le couple $(p_1 \circ \alpha, p_2 \circ \alpha)$. La correspondance $\Xi(-)$ est naturelle entre deux *faisceaux d'ensembles* sur $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$; on peut alors invoquer 6.2.1 et affirmer que c'est un isomorphisme de foncteurs puisqu'il en est ainsi de sa restriction à la sous-catégorie $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ (3.3.8-(b)) \blacksquare

6.2.3. Théorème. *La catégorie $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ possède des produits fibrés.*

Preuve. Soient $\pi_{\mathcal{D}^\dagger} : \mathcal{D}^\dagger \rightarrow \mathcal{S}^\dagger$ et $\pi_{\mathcal{Y}^\dagger} : \mathcal{Y}^\dagger \rightarrow \mathcal{S}^\dagger$ des objets de $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})/\mathcal{S}^\dagger$. Notons $\{\mathcal{S}_\alpha^\dagger\}_\alpha$ un recouvrement ouvert de \mathcal{S}^\dagger avec $\mathcal{S}_\alpha^\dagger \in \mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ pour tout α . Soit $\{\mathcal{D}_{\alpha, \beta}^\dagger\}_\beta$ un recouvrement ouvert de $\pi_{\mathcal{D}^\dagger}^{-1}(\mathcal{S}_\alpha^\dagger)$ par des objets de $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et de même pour \mathcal{Y}^\dagger .

Le produit fibré $\mathcal{D}_{\alpha, \beta}^\dagger \times_{\mathcal{S}_\alpha^\dagger} \mathcal{Y}_{\alpha, \beta'}^\dagger$ existe dans $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})/\mathcal{S}_\alpha^\dagger$ (6.2.2-b) et représente aussi le foncteur $\mathbf{Mor}_{\mathbf{e}}(-, \mathcal{D}_{\alpha, \beta}^\dagger) \times_{\mathbf{Mor}_{\mathbf{e}}(-, \mathcal{S}^\dagger)} \mathbf{Mor}_{\mathbf{e}}(-, \mathcal{Y}_{\alpha, \beta'}^\dagger)$ (car $\mathcal{S}_\alpha^\dagger \rightarrow \mathcal{S}^\dagger$ est un plongement ouvert). Le produit fibré $\mathcal{D}_{\alpha, \beta}^\dagger \times_{\mathcal{S}^\dagger} \mathcal{Y}_{\alpha, \beta'}^\dagger$ existe donc bien dans $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})/\mathcal{S}^\dagger$.

On conclut en appliquant le critère de représentabilité 6.1.15 avec

- $\mathbf{C} = \mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})/\mathcal{S}^\dagger$,
- $\mathbf{F} := \mathbf{Mor}_{\mathbf{e}}(-, \mathcal{D}^\dagger) \times_{\mathbf{Mor}_{\mathbf{e}}(-, \mathcal{S}^\dagger)} \mathbf{Mor}_{\mathbf{e}}(-, \mathcal{Y}^\dagger)$,
- $\mathbf{F}_{\alpha, \beta, \beta'} : \mathbf{Mor}_{\mathbf{e}}(-, \mathcal{D}_{\alpha, \beta}^\dagger) \times_{\mathbf{Mor}_{\mathbf{e}}(-, \mathcal{S}^\dagger)} \mathbf{Mor}_{\mathbf{e}}(-, \mathcal{Y}_{\alpha, \beta'}^\dagger)$. ■

§7. Schémas \dagger -adiques plats, schémas \dagger -adiques lisses

7.1 Algèbres \dagger -adiques lisses

Une algèbre $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ est dite « \dagger -adique lisse»⁽³⁾, lorsque :

- L'algèbre \mathbf{A}_1 est lisse sur \mathbf{R}_1 .
- Pour toute paire de morphismes de \mathbf{R} -algèbres $\mathbf{B}^\dagger \xrightarrow{p} \mathbf{C} \xleftarrow{\varphi} \mathbf{A}^\dagger$, où \mathbf{B} est f.c., \mathbf{C} est séparée et p est surjectif (de noyau arbitraire), et pour chaque morphisme d'algèbres $\bar{h} : \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1$ vérifiant $\bar{\varphi} = \bar{p} \circ \bar{h}$, il existe un relèvement $h : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$ de \bar{h} , tel que $\varphi = p \circ h$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \\ \searrow \varphi & \downarrow p & \\ & \mathbf{C} & \end{array} + \begin{array}{ccc} \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{\bar{h}} & \mathbf{B}_1 \\ \searrow \bar{\varphi} & \downarrow \bar{p} & \\ & \mathbf{C}_1 & \end{array} \implies \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{\exists h} & \mathbf{B} \\ \searrow \varphi & \downarrow p & \\ & \mathbf{C} & \end{array}$$

Étant donnée $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbf{Alg}(\mathbf{R}_1)$ lisse sur \mathbf{R}_1 , on appelle «relèvement \dagger -adique lisse de $\bar{\mathbf{A}}$ » la donnée d'une algèbre \dagger -adique lisse \mathbf{A}^\dagger et d'une surjection d'algèbres $\mathbf{A}^\dagger \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$ dont la réduction modulo \mathbf{I} est bijective.

7.1.1. Théorème ([Ar]). *Soit $\bar{\mathbf{A}}$ une algèbre \mathbf{R}_1 -lisse.*

- a) $\bar{\mathbf{A}}$ admet des relèvements lisses sur \mathbf{R} .
- b) Pour tout relèvement $p : \mathbf{A} \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$ lisse sur \mathbf{R} , le morphisme $p^\dagger : (\mathbf{A})^\dagger \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$ est un relèvement \dagger -adique lisse. Deux relèvements \dagger -adiques lisses de $\bar{\mathbf{A}}$ sont isomorphes.

Remarque. Ce même énoncé en remplaçant «lisse» par «plat» n'est plus vrai.

7.1.2. Corollaire

- a) Une algèbre \dagger -adique lisse est la complétion faible d'une algèbre lisse sur \mathbf{R} .
- b) Il y a équivalence pour $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ entre : être \dagger -adique lisse, et être plate sur \mathbf{R} et de réduction lisse sur \mathbf{R}_1 .

³ «*Very smooth*» dans [MW]

c) Si $A^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ est plate sur \mathbf{R} (resp. \dagger -adique lisse), l'algèbre $A^\dagger \left\{ \frac{1}{f} \right\}$ est plate sur \mathbf{R} (resp. \dagger -adique lisse) quel que soit $f \in A^\dagger$.

Indication. Pour A^\dagger \dagger -adique lisse notons $\pi : A^\dagger \rightarrow (A^\dagger)_1$ la surjection canonique. Fixons un relèvement \mathbf{R} -lisse $\beta : B \rightarrow (A^\dagger)_1$ (7.1.1). Le morphisme induit $\beta^\dagger : B^\dagger \rightarrow (A^\dagger)_1$ est un relèvement \dagger -adique lisse (*loc.cit.*). Il existe donc un morphisme d'algèbres $h^\dagger : B^\dagger \rightarrow A^\dagger$ vérifiant $\pi \circ h^\dagger = \beta^\dagger$ donc de réduction bijective. Or, une algèbre \dagger -adique lisse est plate sur \mathbf{R} ([MW] th. 2.6) et on peut appliquer 1.3.1-h pour conclure que h est bijective. ■

7.1.3. Remarque. Contrairement à la situation générale (*cf.* 1.5.1), une algèbre \dagger -adique lisse est toujours la complétion faible d'une algèbre de type fini.

7.2 Schémas \dagger -adiques plats, schémas \dagger -adiques lisses

7.2.1. Définition. On appelle « schéma \dagger -adique plat (resp. \dagger -adique lisse) » tout espace annelé localement isomorphe à un schéma \dagger -adique affine associé à une algèbre f.c.t.f. plate sur \mathbf{R} (resp. \dagger -adique lisse).

7.2.2. Proposition. Un schéma \dagger -adique est lisse si et seulement si il est plat sur \mathbf{R} et sa réduction est lisse sur \mathbf{R}_1 .

Preuve. La propriété d'être \dagger -adique lisse est locale, et sur un schéma \dagger -adique affine l'équivalence résulte de 7.1.2-b. ■

7.2.3. Proposition. Soit $\mathcal{X}^\dagger = (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})$ est un schéma \dagger -adique plat (resp. lisse).

a) Le schéma algébrique $(\mathbf{X}; (\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})_1)$ est plat (resp. lisse) sur \mathbf{R}_1 .

b) Pour tout ouvert affine $V \subseteq \mathbf{X}$, l'algèbre $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V)$ est une algèbre f.c.t.f. plate sur \mathbf{R} (resp. \dagger -adique lisse).

Preuve. L'assertion (a) est claire. Pour (b), on sait d'après le critère d'affinité (5.1.1) que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V)$ est un relèvement f.c.t.f. de $(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})_1(V)$ qui est une algèbre lisse sur \mathbf{R}_1 lorsque $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V)$ est \dagger -adique lisse. Soit maintenant $V = V_1 \cup \dots \cup V_\ell$ un recouvrement par des ouverts affines tels que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V_i)$ est plate sur \mathbf{R} (7.1.2-c). Pour tout \mathbf{R} -module M , la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V) \otimes_{\mathbf{R}} M \rightarrow \prod_i \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V_i) \otimes_{\mathbf{R}} M \rightarrow \prod_{i < j} \mathcal{O}_X(V_i \cap V_j) \otimes_{\mathbf{R}} M$$

est exacte d'après 5.1.3-(b) pour le foncteur $(-)\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V)} (\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V) \otimes_{\mathbf{R}} M)$. Ainsi, lorsque $M \subseteq N$ est une inclusion de \mathbf{R} -modules, on aura $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V_i) \otimes_{\mathbf{R}} M \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V_i) \otimes_{\mathbf{R}} N$ par platitude de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V_i)$ et l'injectivité du morphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V) \otimes_{\mathbf{R}} M \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V) \otimes_{\mathbf{R}} N$ découle aussitôt du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V) \otimes_{\mathbf{R}} M & \xrightarrow{\subseteq} & \prod_i \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V_i) \otimes_{\mathbf{R}} M \\ & \downarrow & \downarrow \subseteq \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V) \otimes_{\mathbf{R}} N & \xrightarrow{\subseteq} & \prod_i \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V_i) \otimes_{\mathbf{R}} N \end{array}$$

Ces remarques prouvent que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V)$ est une algèbre plate sur \mathbf{R} . Lorsque, de plus, $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})$ est un schéma \dagger -adique lisse, l'algèbre $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}(V)$ est \dagger -adique lisse d'après 7.1.2-b. ■

7.2.4. Proposition. Soit \mathcal{Y}^\dagger un schéma \dagger -adique plat sur \mathbf{R} . Un morphisme de schémas \dagger -adiques $(f, f^\#) : \mathcal{Y}^\dagger \rightarrow \mathcal{X}^\dagger$ est un isomorphisme si et seulement si $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ est un isomorphisme de schémas algébriques.

Preuve. Si $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ est un isomorphisme, la restriction de $(f, f^\#)$ à un ouvert affine de \mathbf{Y} correspond par l'équivalence de catégories 3.3.8-a et le critère d'affinité 5.1.1 à un morphisme d'algèbres f.c.t.f. de but plat et de réduction bijective, donc à un isomorphisme d'après 1.3.1-h. ■

§8. Faisceau d'automorphisme \dagger -adiques

8.1 Faisceau de morphismes \dagger -adiques

8.1.1. Morphismes \dagger -adiques au-dessus d'un morphisme de schémas. Soient deux schémas \dagger -adiques $\mathcal{Y}^\dagger = (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathcal{Y}^\dagger})$ et $\mathcal{X}^\dagger = (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})$. Pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{Y}$ notons $\mathcal{Y}^\dagger|_U$ le sous-espace annelé induit par \mathcal{Y}^\dagger sur U . Étant donné un morphisme de schémas $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$, qu'un morphisme de schémas \dagger -adiques $\varphi = (\phi, \phi^\#) : \mathcal{Y}^\dagger|_U \rightarrow \mathcal{X}^\dagger$ sera dit « au-dessus de f » lorsque $\phi = f|_U$.

La correspondance $\mathcal{G}_{f: \mathcal{Y}^\dagger \rightarrow \mathcal{X}^\dagger}$ qui associe à un ouvert $U \subseteq \mathbf{Y}$ l'ensemble des morphismes de schémas \dagger -adiques $\varphi : \mathcal{Y}^\dagger|_U \rightarrow \mathcal{X}^\dagger$ au-dessus de f , et qui associe à l'inclusion $V \subseteq U$ la restriction $\varphi \rightsquigarrow \varphi|_V : \mathcal{Y}^\dagger|_V \rightarrow \mathcal{X}^\dagger$, est un faisceau d'ensembles sur \mathbf{Y} .

8.1.2. Proposition. Dans ce qui précède, soit $\mathcal{X}^\dagger = (\mathbf{A}^\dagger)^\sim$ avec $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{ictf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

a) Pour tout ouvert affine $V \subseteq \mathbf{Y}$, on a

$$\mathcal{G}_{f: \mathcal{Y}^\dagger \rightarrow \mathcal{X}^\dagger}(V) = \{ \phi^\# \in \mathbf{Homom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A}^\dagger; \mathcal{O}_{\mathcal{Y}^\dagger}(V)) \mid \phi^\# \pmod{\mathbf{I}} = (f|_V)^\# \}$$

où $(f|_V)^\# : \mathbf{A}^\dagger_1 \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathcal{Y}^\dagger})_1(V)$ est le morphisme de \mathbf{R}_1 -algèbres associé à $f|_V : V \rightarrow \mathbf{X}$.

b) Si \mathcal{Y}^\dagger est un schéma \dagger -adique **plat sur \mathbf{R}** le faisceau $\mathcal{G}_{\text{id}_{\mathbf{Y}}: \mathcal{Y}^\dagger \rightarrow \mathcal{Y}^\dagger}$ est un faisceau de groupes. Plus précisément, pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{Y}$, l'ensemble $\mathcal{G}_{\text{id}_{\mathbf{Y}}: \mathcal{Y}^\dagger \rightarrow \mathcal{Y}^\dagger}(U)$ est le groupe des isomorphismes de schéma \dagger -adique de $\mathcal{Y}^\dagger|_U$ au-dessus de id_U . En particulier, si V est un ouvert affine de \mathbf{Y} , on a

$$\mathcal{G}_{\text{id}_{\mathbf{Y}}: \mathcal{Y}^\dagger \rightarrow \mathcal{Y}^\dagger}(V) = \{ \phi^\# \in \mathbf{Endom}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}^\dagger}(V)) \mid \phi^\# \pmod{\mathbf{I}} = \text{id} \}.$$

c) Si \mathcal{Y}^\dagger est un schéma \dagger -adique **plat sur \mathbf{R}** et si $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ est un plongement ouvert, le groupe $\mathcal{G}_{\text{id}_{\mathbf{Y}}: \mathcal{Y}^\dagger \rightarrow \mathcal{Y}^\dagger}(U)$ opère à droite sur $\mathcal{G}_{f: \mathcal{Y}^\dagger \rightarrow \mathcal{X}^\dagger}(U)$ de manière simplement transitive quel que soit l'ouvert $U \subseteq \mathbf{Y}$.

Preuve

a) Par définition de $\mathcal{G}_f(V)$, le critère d'affinité 5.1.1 et l'équivalence de catégories 3.3.8-a.

b) Tout morphisme de schéma \dagger -adique au-dessus de l'identité $\varphi : \mathcal{Y}^\dagger|_U \rightarrow \mathcal{Y}^\dagger$ se factorise de manière unique comme composée de l'endomorphisme $\varphi|_U : \mathcal{Y}^\dagger|_U \rightarrow \mathcal{Y}^\dagger|_U$ et de l'inclusion $\mathcal{Y}^\dagger|_U \subseteq \mathcal{Y}^\dagger$. Le morphisme $\varphi|_U$ est un isomorphisme d'après 7.2.4. L'assertion résulte alors du critère d'affinité 5.1.1 et de l'équivalence de catégories 3.3.8-a.

- c) Comme pour (b), tout morphisme $\mathcal{Y}^\dagger|_U \rightarrow \mathcal{X}^\dagger$ au-dessus de f se factorise comme la composée d'un (unique) isomorphisme de $\mathcal{Y}^\dagger|_U$ sur $\mathcal{X}^\dagger|_{f(U)}$ suivi de l'inclusion $\mathcal{X}^\dagger|_{f(U)} \subseteq \mathcal{X}^\dagger$. ■

8.1.3. Notations

- Le faisceau $\mathcal{G}_{f: \mathcal{Y}^\dagger \rightarrow \mathcal{X}^\dagger}$ « des morphismes \dagger -adiques de \mathcal{Y}^\dagger vers \mathcal{X}^\dagger au-dessus de f » sera noté plus simplement $\mathcal{G}_{\mathcal{Y}^\dagger \rightarrow \mathcal{X}^\dagger}$ lorsque $f: \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ est sous-entendue.
- Le faisceau $\mathcal{G}_{\text{id}_{\mathbf{Y}}: \mathcal{Y}^\dagger \rightarrow \mathcal{Y}^\dagger}$ « des automorphismes \dagger -adiques de \mathcal{Y}^\dagger » (8.1.2-b) sera noté plus simplement $\mathcal{G}_{\mathcal{Y}^\dagger}$.

§ 9. Références bibliographiques

- [Ar] A. ARABIA. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes ; *Commentarii Mathematici Helvetici* 76 (2001) 607–639. (avril 2000).
- [A-M] A. ARABIA-Z. MEBKHOUT. Sur le Topos infinitésimal p -adique d'une variété algébrique non singulière I ; à paraître.
- [EGA₁] A. GROTHENDIECK, J.A. DIEUDONNÉ. “*Éléments de géométrie algébrique-I*” ; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 166. Springer-Verlag (1971).
- [Go] R. GODEMENT. “*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*” ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).
- [M] D. MEREDITH. Weak formal schemes ; *Nagoya Math. Journal*. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).
- [MW] P. MONSKY, G. WASHNITZER. Formal cohomology : I ; *Ann. of Math.* (2) 88, pp. 181–217 (1968).

—————×—————