

# Affinité des schémas $\dagger$ -adiques de réduction affine

Alberto Arabia<sup>\*</sup>

**Résumé.** On se donne un anneau commutatif noethérien  $\mathbf{R}$  et un idéal  $I \subseteq \mathbf{R}$ . On note  $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R}/I$ . Pour tout schéma affine lisse  $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}})$  au-dessus de  $\overline{\mathbf{R}}$ , et toute  $\mathbf{R}$ -algèbre  $\mathbf{A}$  lisse sur  $\mathbf{R}$ , relèvement de  $\overline{\mathbf{A}} := \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}})$  et de complétion  $I$ -adique faible notée  $\mathbf{A}^\dagger$ , Meredith associe un espace annelé  $(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}}^\dagger)$  au-dessus du même espace topologique  $\overline{\mathbf{X}}$  qu'il appelle *schéma faiblement formel affine* (cf. [M]) et que nous appelons *schéma  $\dagger$ -adique affine-lisse*. Un schéma  $\dagger$ -adique lisse est, par définition, tout espace annelé localement isomorphe à un schéma  $\dagger$ -adique affine-lisse.

Étant donné un schéma  $\dagger$ -adique lisse  $(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$ , notons  $\overline{\mathcal{O}^\dagger}$  le faisceau sur  $\overline{\mathbf{X}}$  associé au préfaisceau qui fait correspondre à l'ouvert  $U \subseteq \mathbf{X}$ , l'algèbre  $\Gamma(U; \mathcal{O}^\dagger) \otimes_{\mathbf{R}} \overline{\mathbf{R}}$ . L'espace annelé  $(\overline{\mathbf{X}}; \overline{\mathcal{O}^\dagger})$  est un schéma que nous appellerons *réduction (modulo  $I$ ) de  $(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$* . Il est aisé de voir que la réduction d'un schéma  $\dagger$ -adique affine-lisse est un schéma affine lisse. Le but de ce papier est de démontrer la réciproque de cette assertion; question posée par Meredith dans son article (*loc. cit.*). Plus précisément, nous prouvons :

## Théorème 2.1.8

- a) Pour tout ouvert affine  $\overline{U} \subseteq \overline{\mathbf{X}}$  d'un schéma  $\dagger$ -adique lisse  $(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$ , le sous-espace annelé  $(\overline{U}; \mathcal{O}^\dagger|_{\overline{U}})$  est un schéma  $\dagger$ -adique affine-lisse.
- b) Pour tout ouvert affine  $\overline{U} \subseteq \overline{\mathbf{X}}$  d'un schéma  $\dagger$ -adique lisse  $(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$ , le morphisme de  $\mathbf{R}$ -algèbres  $\alpha(\overline{U}) : \Gamma(\overline{U}; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \Gamma(\overline{U}; \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}})$  est un relèvement f.c.t.f. très lisse.
- c) Un schéma  $\dagger$ -adique lisse et de réduction affine est affine-lisse.

## Table des matières

§1. A propos de recollements de schémas affines .....	1
1.1. Schéma non affine au-dessus du spectre d'un schéma affine .....	1
1.1.1. Exemple de recollement non affine .....	2
1.1.2. Le cas des schémas formels .....	3
§2. Schémas $\dagger$ -adiques à réduction affine .....	5
2.1. Rappels .....	5
2.1.1. Schémas $\dagger$ -adiques affines .....	6
2.1.2. Schémas $\dagger$ -adiques .....	6
2.1.3. Schémas $\dagger$ -adiques lisses .....	7
2.1.4. Schémas $\dagger$ -adiques lisses de réduction séparée .....	7
2.1.5. Schémas $\dagger$ -adiques de réduction affine .....	8

---

<sup>\*</sup>CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.  
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.  
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.  
175, rue du Chevaleret, 9<sup>e</sup> étage, bureau 9D11, 75013 Paris.  
Adresse électronique : arabia@math.jussieu.fr

2.1.6. Schémas $\dagger$ -adiques lisses de réduction affine .....	10
2.1.8. Affinité des schémas $\dagger$ -adiques de réduction affine .....	15
2.1.12. Un théorème de relèvement de morphismes .....	22
§3. Références bibliographiques .....	23

## § 1. A propos de recollements de schémas affines

### 1.1 Schéma non affine au-dessus du spectre d'un schéma affine

Soit  $\mathbf{A}$  un anneau et notons  $(\mathbf{X} := \text{Spec}(\mathbf{A}); \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$  le schéma affine associé. Pour  $f, g \in \mathbf{A}$  tels que  $1 \in (f, g)$ , l'espace  $\mathbf{X}$  est réunion des ouverts principaux  $U_f := D(f)$  et  $U_g := D(g)$ . Ces ouverts sont les espaces topologiques sous-jacents aux schémas affines  $(U_f; \mathcal{O}_f)$  et  $(U_g; \mathcal{O}_g)$  associés respectivement à  $\mathbf{A}_f$  et à  $\mathbf{A}_g$ . Un recollement de ces deux espaces annelés est donné par un isomorphisme de sous-schémas affines au-dessus de l'ouvert principal  $U_{fg} := D(fg)$ , autrement dit par un automorphisme  $\varphi$  de  $\mathbf{A}_{fg}$ , on notera alors  $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\varphi})$  l'espace annelé obtenu par le recollement défini par  $\varphi$ .

**1.1.1. Exemple de recollement non affine.** Soient  $\mathbf{A} := k[X]$ ,  $f = X$  et  $g = 1 - X$  et notons  $\varphi : k[X] \rightarrow k[X]$  le morphisme de  $k$ -algèbres défini par  $\varphi(X) = 1 - X$ . Le morphisme  $\varphi$  est un automorphisme de  $k[X]$  vérifiant aussi  $\varphi(1 - X) = X$  de sorte qu'il induit :

- un isomorphisme de  $\mathbf{A}_f$  sur  $\mathbf{A}_g$ ,
- un isomorphisme de  $\mathbf{A}_g$  sur  $\mathbf{A}_f$ ,
- un automorphisme de  $\mathbf{A}_{fg}$ .

Notons  $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\varphi})$  le schéma obtenu en recollant  $(U_f; \mathcal{O}_f)$  et  $(U_g; \mathcal{O}_g)$  à l'aide de  $\varphi$ . On a la suite exacte à gauche

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{O}_{\varphi}(\mathbf{X}) \xrightarrow{(\epsilon_f, \epsilon_g)} \mathbf{A}_f \oplus \mathbf{A}_g \xrightarrow{\delta_{\varphi}} \mathbf{A}_{fg} \quad (\diamond)$$

avec  $\delta_{\varphi}(a, b) = a - \varphi(b)$ . Le schéma  $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\varphi})$  **n'est pas affine**.

Nous en donnons trois raisons.

- On constate que le morphisme de restriction  $\epsilon_f : \mathcal{O}_{\varphi}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{O}_{\varphi}(U_f)$  est bijectif ce qui entraîne que  $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\varphi})$  **n'est pas** un schéma affine car autrement on aurait  $\mathbf{X} = U_f$  ce qui est contraire à la définition.
- On constate aussi que dans la suite  $(\diamond)$  l'application  $\delta_0$  n'est pas surjective comme elle aurait dû être si  $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\varphi})$  avait été affine.

iii) Enfin, on dispose aussi des suites exactes longues de cohomologie de faisceaux

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H^i_{\mathbf{X} \setminus \mathbf{U}_f}(\mathbf{X}; \mathcal{O}_\varphi) & \rightarrow & H^i(\mathbf{X}; \mathcal{O}_\varphi) & \rightarrow & H^i(\mathbf{U}_f; \mathcal{O}_\varphi) & \rightarrow \\ & \parallel & & & & & \\ \rightarrow & H^i_{\mathbf{U}_g \setminus \mathbf{U}_{fg}}(\mathbf{U}_g; \mathcal{O}_{\mathbf{U}_g}) & \rightarrow & H^i(\mathbf{U}_g; \mathcal{O}_{\mathbf{U}_g}) & \rightarrow & H^i(\mathbf{U}_{fg}; \mathcal{O}_{\mathbf{U}_{fg}}) & \rightarrow \end{array} \quad (\mathcal{D})$$

Par l'acyclicité des faisceaux quasi-cohérents sur un schéma affine on a l'annulation de  $H^i_{\mathbf{U}_g \setminus \mathbf{U}_{fg}}(\mathbf{U}_g; \mathcal{O}_{\mathbf{U}_g})$  pour tout  $i > 1$  (deuxième ligne de  $(\mathcal{D})$ ) et donc l'annulation de  $H^i(\mathbf{X}; \mathcal{O}_\varphi)$  pour tout  $i > 1$  (première ligne de  $(\mathcal{D})$ ). Le cas  $i = 0$  est clair, et nous sommes réduits à la suite exacte

$$\mathbf{0} \rightarrow H^0(\mathbf{X}, \mathcal{O}_\varphi) \xrightarrow{\epsilon_f} \mathbf{A}_f \rightarrow H^1_{\mathbf{U}_g \setminus \mathbf{U}_{fg}}(\mathbf{U}_g; \mathcal{O}_{\mathbf{U}_g}) \rightarrow H^1(\mathbf{X}, \mathcal{O}_\varphi) \rightarrow \mathbf{0}$$

où la bijectivité de  $\epsilon_f$  a déjà été établie. On a donc

$$H^1(\mathbf{X}; \mathcal{O}_\varphi) = H^1_{\mathbf{U}_g \setminus \mathbf{U}_{fg}}(\mathbf{U}_g; \mathcal{O}_{\mathbf{U}_g}) = \frac{\mathbf{A}_{fg}}{\mathbf{A}_g} = \frac{\mathbf{A}_f}{\mathbf{A}} \neq \mathbf{0}$$

et  $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_\varphi)$  n'est pas un schéma affine.

**1.1.2. Le cas des schémas formels.** Comme dans 1.1.1 nous considérons un recollement de deux schémas formels au-dessus de la droite affine  $(\overline{\mathbf{X}} := \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p[X]); \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}})$ . Les schémas affines faiblement complets  $(D(X); \mathcal{O}_{[X]}^\dagger)$  et  $(D(1-X); \mathcal{O}_{[1-X]}^\dagger)$  associés respectivement aux algèbres  $\mathbb{Z}_p[X]_{[X]}^\dagger$  et  $\mathbb{Z}_p[X]_{[1-X]}^\dagger$  sont recollés le long de l'ouvert  $\mathbf{U}_{fg} := \mathbf{U}_f \cap \mathbf{U}_g$  à l'aide de l'automorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p[X]_{[X(1-X)]}^\dagger & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z}_p[X]_{[X(1-X)]}^\dagger \\ X & \xrightarrow{\varphi} & X + \frac{p}{X(1-X)} \end{array}$$

Notons  $(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}}^\dagger)$  le schéma ainsi obtenu. On a la suite exacte à gauche

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}}^\dagger(\mathbf{X}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_p[X]_{[X]}^\dagger \oplus \mathbb{Z}_p[X]_{[1-X]}^\dagger \xrightarrow{\delta_\varphi} \mathbb{Z}_p[X]_{[X(1-X)]}^\dagger \quad (\diamond\diamond)$$

avec  $\delta_\varphi(a, b) = \varphi(a) - b$ .

Nous allons montrer que  $(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}}^\dagger)$  est isomorphe au schéma affine faiblement complet associé à  $\mathbb{Z}_p[X]^\dagger$ .

Comme l'automorphisme  $\varphi$  induit l'identité modulo  $p$ , on a un morphisme naturel de complexes de  $\mathbb{Z}_p$ -modules

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} \rightarrow & \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}}^\dagger(\mathbf{X}) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{Z}_p[X]_{[X]}^\dagger \oplus \mathbb{Z}_p[X]_{[1-X]}^\dagger & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \mathbb{Z}_p[X]_{[X(1-X)]}^\dagger & \\ & \alpha \downarrow & & q \downarrow \oplus q \downarrow & & q \downarrow & \\ \mathbf{0} \rightarrow & \mathbb{F}_p[X] & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{F}_p[X]_{[X]}^\dagger \oplus \mathbb{F}_p[X]_{[1-X]}^\dagger & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{F}_p[X]_{[X(1-X)]}^\dagger & \rightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

où la deuxième ligne est exacte et où  $q$  désigne le morphisme canonique.

**1.1.3. Proposition.** *Le morphisme  $\alpha$  est une **surjection** de  $\mathbf{R}$ -algèbres*

**Preuve.** Comme  $\alpha$  est clairement un morphisme de  $\mathbb{Z}_p$ -algèbres, il suffira de vérifier que  $X$  est dans l'image de  $\alpha$ . Autrement dit, il suffira de montrer qu'il existe  $P \in p\mathbb{Z}_p[X]_{[X]}^\dagger$  et  $Q \in p\mathbb{Z}_p[X]_{[1-X]}^\dagger$  tels que

$$\boxed{\varphi(X + P) = X + Q} \quad (*)$$

La surjectivité du morphisme

$$\mathbb{Z}_p[X]_X^\dagger \oplus \mathbb{Z}_p[X]_{1-X}^\dagger \xrightarrow{\delta_{\text{id}}} \mathbb{Z}_p[X]_{X(1-X)}^\dagger$$

étant connue, fixons deux applications  $\mathbb{Z}_p$ -linéaires

$$\begin{cases} \sigma_X : \mathbb{Z}_p[X]_{X(1-X)}^\dagger \rightarrow \mathbb{Z}_p[X]_X^\dagger \\ \sigma_{1-X} : \mathbb{Z}_p[X]_{X(1-X)}^\dagger \rightarrow \mathbb{Z}_p[X]_{1-X}^\dagger \end{cases}$$

vérifiant

$$\sigma_X(S) + \sigma_{1-X}(S) = S, \quad \forall S \in \mathbb{Z}_p[X]_{X(1-X)}^\dagger$$

*Lemme. Les séries*

$$P = \sum_{k \geq 1} (\sigma_X(1 - \varphi))^k(X) \quad \text{et} \quad Q = -\sigma_{1-X}(1 - \varphi)(X + P)$$

sont des solutions formelles de (\*).

*Preuve du lemme.* En effet, on a par construction :

$$\sigma_X(1 - \varphi)(X + P) = P$$

et alors :

$$\begin{aligned} (1 - \varphi)(X + P) &= P + \sigma_{1-X}(1 - \varphi)(X + P) \\ X - \varphi(X + P) &= \sigma_{1-X}(1 - \varphi)(X + P) \\ \varphi(X + P) &= X - \sigma_{1-X}(1 - \varphi)(X + P) \end{aligned} \quad \square$$

Nous allons monter maintenant que la série définissant  $P$  converge bien vers un élément de  $\mathbb{Z}_p[X]_{[X]}^\dagger$ . Il s'ensuivra que  $Q \in \mathbb{Z}_p[X]_{[1-X]}^\dagger$  d'où la surjectivité de  $\alpha$ .

Pour cela on utilisera le développement de  $\varphi$  en série de Taylor :

$$(1 - \varphi) = - \sum_{1 \leq m} \left( \frac{p}{X(1-X)} \right)^m \Delta^m$$

et l'égalité pour tous  $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  :

$$\frac{1}{X^a(1-X)^b} = \left( \sum_{\ell=0}^{a-1} \binom{b+\ell-1}{\ell} \frac{1}{X^{a-\ell}} \right) + \left( \sum_{\ell=0}^{b-1} \binom{a+\ell-1}{\ell} \frac{1}{(1-X)^{b-\ell}} \right) \quad (E)$$

dont on tire l'expression

$$\sigma_X(1-\varphi) = - \sum_{0 \leq \ell < m} \binom{m+\ell-1}{\ell} \frac{p^m}{X^{m-\ell}} \Delta^m \quad (\ddagger)$$

On remarque alors les égalités

$$\begin{aligned} \sigma_X(1-\varphi)(X) &= -\frac{p}{X} \\ (\sigma_X(1-\varphi))^2(X) &= \sum_{0 \leq \ell < m} \binom{m+\ell-1}{\ell} \frac{p^m}{X^{m-\ell}} \Delta^m \left( \frac{p}{X} \right) \\ &= \sum_{0 \leq \ell < m} \binom{m+\ell-1}{\ell} \frac{p^m}{X^{m-\ell}} p \frac{(-1)^m}{X^{m+1}} \end{aligned}$$

qui nous amènent à vérifier que  $\sigma_X(1-\varphi)$  laisse stable l'ensemble des séries de la forme

$$\sum_{n \geq 1} a_n \left( \frac{1}{X} \right)^n \quad \text{avec} \quad 2v_p(a_n) \geq n$$

Ceci résulte de l'égalité :

$$\begin{aligned} \sigma_X(1-\varphi) \left( \frac{a_n}{X^n} \right) &= - \sum_{0 \leq \ell < m} \binom{m+\ell-1}{\ell} \frac{p^m}{X^{m-\ell}} a_n \Delta^m \left( \frac{1}{X^n} \right) \\ &= - \sum_{0 \leq \ell < m} \binom{m+\ell-1}{\ell} \frac{p^m}{X^{m-\ell}} a_n \binom{n+m-1}{m} \frac{(-1)^m}{X^{m+n}} \end{aligned} \quad (\ddagger\ddagger)$$

où le coefficient du terme  $1/X^{2m+n-\ell}$  est de valuation au moins égale à  $m + v_p(a_n)$ .

Ces remarques jointes au fait que  $(\sigma_X(1-\varphi))^m(X) \in p^m \mathbb{Z}_p[X]_{[X]}^\dagger$  suffisent pour montrer que  $P$  est bien un élément de  $p\mathbb{Z}_p[X]_{[X]}^\dagger$ .

Montrons pour terminer l'égalité (E). Le développement en série de Taylor :

$$\frac{1}{(1-X)^b} = \sum_{0 \leq \ell} \binom{b+\ell-1}{\ell} X^\ell$$

fournit la décomposition

$$\frac{1}{X^a} \frac{1}{(1-X)^b} = \sum_{\ell=0}^{a-1} \binom{b+\ell-1}{\ell} \frac{1}{X^{a-\ell}} + \sum_{0 \leq n} c_n X^n$$

avec  $c_n \in \mathbb{N}$  et la série  $\sum_n c_n X^n$  de rayon de convergence égal à 1. Comme d'autre part un raisonnement inductif immédiat montre que l'on a une égalité de la forme

$$\frac{1}{X^a} \frac{1}{(1-X)^b} = \frac{u_0}{X^a} + \cdots + \frac{u_{a-1}}{X} + \frac{v_{b-1}}{1-X} + \cdots + \frac{v_0}{(1-X)^b}$$

avec  $u_\ell, v_\ell \in \mathbb{Z}$ , on conclut aussitôt que  $u_\ell = \binom{b+\ell-1}{\ell}$ . Un raisonnement symétrique donne les coefficients  $v_n$ . ■

**1.1.4. Remarque.** Les valeurs explicites des coefficients dans les l'égalité  $(E, \dagger, \ddagger)$  n'interviennent pas dans la démonstration de la proposition.

## §2. Schémas $\dagger$ -adiques à réduction affine

### 2.1 Rappels

Dans les paragraphes suivants nous rappelons brièvement les constructions de Meredith ([M]) et nous fixons quelques terminologies et notations nouvelles. Le couple  $(\mathbf{R}, \mathbf{I})$  est constitué d'un anneau commutatif et noëthérien et d'un idéal  $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$  quelconque. Pour toute  $\mathbf{R}$ -algèbre  $\mathbf{A}$ , l'algèbre  $\overline{\mathbf{A}} := \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{R}} (\mathbf{R}/\mathbf{I})$  est «*sa réduction (modulo  $\mathbf{I}$ )*» et la surjection canonique  $q : \mathbf{A} \rightarrow \overline{\mathbf{A}}$  «*le morphisme de réduction (modulo  $\mathbf{I}$ )*». On dira que  $f \in \mathbf{A}$  «*est un relèvement de*» ou «*relève*»  $\overline{f} \in \overline{\mathbf{A}}$  lorsque  $q(f) = \overline{f}$ . Pour tout morphisme de  $\mathbf{R}$ -algèbres (modules)  $\eta : \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_2$ , le morphisme induit  $\overline{\eta} : \overline{\mathbf{A}}_1 \rightarrow \overline{\mathbf{A}}_2$  est «*sa réduction (modulo  $\mathbf{I}$ )*». Un morphisme de  $\mathbf{R}$ -algèbres  $\eta : \mathbf{B} \rightarrow \overline{\mathbf{A}}$  est appelé «*un relèvement de  $\overline{\mathbf{A}}$* » lorsque sa réduction  $\overline{\eta} : \overline{\mathbf{B}} \rightarrow \overline{\mathbf{A}}$  est bijective ; le relèvement est dit, f.c.t.f., plat, lisse, très lisse..., lorsqu'il en est ainsi de l'algèbre  $\mathbf{B}$ .

**2.1.1. Schémas  $\dagger$ -adiques affines.** Étant donnée une  $\mathbf{R}$ -algèbre f.c.t.f.  $\mathbf{A}^\dagger$  nous notons  $\overline{\mathbf{A}} := \overline{\mathbf{A}^\dagger}$ , puis  $\overline{\mathbf{X}} := \text{Spec}(\overline{\mathbf{A}})$  et  $(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}})$  le schéma affine associé à  $\overline{\mathbf{A}}$ .

Pour tout  $\overline{f} \in \overline{\mathbf{A}}$  l'algèbre  $\mathbf{A}^\dagger_{[\overline{f}]} := (\mathbf{A}^\dagger_f)^\dagger$  est indépendante du relèvement  $f$  de  $\overline{f}$ . On note  $\nu_{\overline{f}} : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_{[\overline{f}]}$  le morphisme canonique. Pour toute inclusion d'ouverts principaux  $D(\overline{f}) \subseteq D(\overline{g})$  il existe un unique morphisme  $\nu_{\overline{f}}^{\overline{g}} : \mathbf{A}^\dagger_{[\overline{g}]} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_{[\overline{f}]}$  vérifiant  $\nu_{\overline{f}} = \nu_{\overline{f}}^{\overline{g}} \circ \nu_{\overline{g}}$ . La correspondance qui associe à un ouvert principal  $D(\overline{f})$  l'algèbre  $\mathbf{A}^\dagger_{[\overline{f}]}$  et à l'inclusion  $D(\overline{f}) \subseteq D(\overline{g})$  le morphisme  $\nu_{\overline{f}}^{\overline{g}}$  est un préfaisceau de  $\mathbf{R}$ -algèbres sur la catégorie des ouverts principaux de  $\overline{\mathbf{X}}$  noté  $\mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}$ . On note  $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}$  le faisceau sur  $\overline{\mathbf{X}}$  engendré à  $\mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}$ .

L'espace annelé  $(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger)$  est «*le schéma  $\dagger$ -adique affine associé à  $\mathbf{A}^\dagger$* ».

*Rappels et remarques*

- Le morphisme canonique  $\mathbf{A}^\dagger_{[\overline{f}]} = \Gamma(D(\overline{f}); \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}) \rightarrow \Gamma(D(\overline{f}); \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger)$  est bijectif ([M]) et le morphisme de restriction  $\Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger) \rightarrow \Gamma(D(\overline{f}); \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger)$  s'identifie alors à  $\nu_{\overline{f}} : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_{[\overline{f}]}$ .
- Pour tout ouvert **principal**  $\overline{U} = D(\overline{f}) \subseteq \overline{\mathbf{X}}$  le sous-espace annelé  $(\overline{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger|_{\overline{U}})$  est isomorphe au schéma  $\dagger$ -adique affine associé à  $\mathbf{A}^\dagger_{[\overline{f}]}$ .

c) La famille des morphismes de réduction  $q : \mathbf{A}_{[\bar{f}}^\dagger \rightarrow \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}}$  où  $\bar{f}$  parcourt  $\bar{\mathbf{A}}$ , définit un morphisme de préfaisceaux sur la catégorie des ouverts principaux de  $\bar{\mathbf{X}}$  induisant un morphisme canonique de faisceau d'algèbres que nous notons  $\alpha : \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}$ . L'identification de (a) identifie  $\alpha(D(\bar{f}))$  au morphisme  $q : \mathbf{A}_{[\bar{f}}^\dagger \rightarrow \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}}$ . Le morphisme  $\alpha$  est une surjection de faisceaux d'algèbres sur  $\bar{\mathbf{X}}$ .

**2.1.2. Schémas †-adiques.** On appelle ainsi un espace annelé obtenu par recollement de schémas †-adiques affines. Plus précisément, il s'agit d'un espace annelé  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  dans lequel pour chaque  $x \in \bar{\mathbf{X}}$  il existe un ouvert  $\bar{U}_x \ni x$  et une  $\mathbf{R}$ -algèbre f.c.t.f.  $\mathbf{A}_x^\dagger$  tels que le sous-espace annelé  $(\bar{U}_x; \mathcal{O}^\dagger|_{\bar{U}_x})$  est isomorphe au schéma †-adique affine associé à  $\mathbf{A}_x^\dagger$ .

*Rappels et remarques*

a) Soit  $\mathbf{I}\mathcal{O}^\dagger$  le sous-faisceau de  $\mathcal{O}^\dagger$  engendré par le sous-préfaisceau qui fait correspondre à un ouvert  $\bar{U} \subseteq \bar{\mathbf{X}}$  l'idéal  $\mathbf{I} \cdot \Gamma(\bar{U}; \mathcal{O}^\dagger)$ , notons  $\mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}} := \mathcal{O}^\dagger / \mathbf{I}\mathcal{O}^\dagger$ . L'espace annelé  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$  est alors un schéma algébrique.

Le schéma  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$  est « la réduction (modulo  $\mathbf{I}$ ) du schéma †-adique  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  ». Le morphisme canonique de faisceaux de  $\mathcal{O}^\dagger$  vers  $\mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}$  est noté  $\alpha : \mathcal{O}^\dagger \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}$ , il coïncide dans le cas des schémas affines avec le morphisme de 2.1.1-(c).

b) La réduction d'un schéma †-adique affine est un schéma algébrique affine.

c) La notation ' $\bar{\mathbf{X}}$ ' désignera, par abus, le schéma algébrique  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$ . Toute allusion à une propriété de ' $\bar{\mathbf{X}}$ ' fait donc référence à ladite propriété de l'espace annelé  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$ .

**2.1.3. Schémas †-adiques lisses.** On appellera « schéma †-adique affine-lisse (sur  $\mathbf{R}$ ) » tout schéma †-adique affine  $(\bar{\mathbf{X}}, \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger)$  associé à une algèbre f.c.t.f.  $\mathbf{A}^\dagger$  très lisse (sur  $\mathbf{R}$ ). On appellera « schéma †-adique lisse (sur  $\mathbf{R}$ ) » tout espace annelé localement isomorphe à un schéma †-adique affine-lisse (sur  $\mathbf{R}$ ).

*Rappel.* L'hypothèse de lissité permet de généraliser le résultat de Meredith rappelé dans 2.1.1-(b). En effet, le sous-espace annelé  $(\bar{U}; \mathcal{O}^\dagger|_{\bar{U}})$  d'un schéma †-adique affine-lisse  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  est aussi affine-lisse pour peu que  $\bar{U}$  soit un ouvert affine (prop. 3.2.16). Nous irons même plus loin dans le théorème 2.1.8 qui affirme que cette dernière affirmation est vraie en supposant le schéma †-adique  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  lisse (mais pas nécessairement affine).

*Remarque.* Si  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  est un schéma †-adique lisse sur  $\mathbf{R}$ , sa réduction  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$  est un schéma lisse sur  $\bar{\mathbf{R}}$ . En particulier, si  $\bar{\mathbf{X}}$  est affine l'algèbre  $\bar{\mathbf{A}} := \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$  est lisse sur  $\bar{\mathbf{R}}$  et admet par conséquent des relèvements f.c.t.f. très lisses  $q : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$ .

*Mise en garde.* Nous n'avons pas encore prouvé qu'un schéma  $\dagger$ -adique lisse et affine est affine-lisse. Ce sera une conséquence immédiate du théorème 2.1.8 qui affirme qu'un schéma  $\dagger$ -adique lisse de réduction affine est affine-lisse.

**2.1.4. Schémas  $\dagger$ -adiques lisses de réduction séparée.** Étant donné un schéma  $\dagger$ -adique  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  de réduction  $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$  il existe, par définition,

- un recouvrement ouvert **affine**  $\bar{X} = \bigcup_{i \in \mathfrak{A}} \bar{U}_i$ ,
- une  $\mathbf{R}$ -algèbre f.c.t.f.  $\mathbf{A}_i^\dagger$  et un relèvement  $q_i : \mathbf{A}_i^\dagger \twoheadrightarrow \bar{\mathbf{A}}_i := \Gamma(\bar{U}_i; \mathcal{O}_{\bar{X}})$  pour chaque  $i \in \mathfrak{A}$ ,
- un isomorphisme d'espaces annelés  $\Phi_i : (\bar{U}_i; \mathcal{O}^\dagger|_{\bar{U}_i}) \simeq (\bar{U}_i; \mathcal{O}_{\mathbf{A}_i^\dagger}^\dagger)$  dont on rappelle que s'agissant de schémas  $\dagger$ -adiques affines, il équivaut à la donnée de l'isomorphisme induit sur les algèbres des sections au-dessus de  $\bar{U}_i$  des faisceaux structuraux, ce que nous notons

$$\Gamma(\bar{U}_i; \mathcal{O}^\dagger|_{\bar{U}_i}) \xrightarrow[\simeq]{\varphi_i} \mathbf{A}_i^\dagger \quad (\varphi_*)$$

Pour chaque couple d'indices  $(i, j)$  notons  $\bar{U}_{ij} := \bar{U}_i \cap \bar{U}_j$ . Lorsque le schéma  $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$  est **séparé** l'ouvert  $\bar{U}_{ij}$  est affine et le sous-espace annelé  $(\bar{U}_{ij}; \mathcal{O}^\dagger)$  est affine-lisse puisque  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  est **lisse**, (prop. 3.2.16). Dans ce cas, l'isomorphisme «*de transition*» défini par la composée  $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$  entre les sous-espaces annelés  $(\bar{U}_{ij}; \mathcal{O}_{\mathbf{A}_i^\dagger}^\dagger|_{\bar{U}_{ij}})$  et  $(\bar{U}_{ij}; \mathcal{O}_{\mathbf{A}_j^\dagger}^\dagger|_{\bar{U}_{ij}})$  (des schémas  $\dagger$ -adiques affines) est entièrement déterminé par l'isomorphisme induit sur les sections au-dessus de  $\bar{U}_{ij}$  :

$$\varphi_{j,i} = \Phi_j(\bar{U}_{ij}) \circ \Phi_i^{-1}(\bar{U}_{ij}) : \Gamma(\bar{U}_{ij}, \mathcal{O}_{\mathbf{A}_i^\dagger}^\dagger) \longrightarrow \Gamma(\bar{U}_{ij}, \mathcal{O}_{\mathbf{A}_j^\dagger}^\dagger).$$

Un **schéma  $\dagger$ -adique lisse de réduction séparée** équivaut donc à la donnée de :

- i) Un  $\bar{\mathbf{R}}$ -schéma algébrique séparé  $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$ .
- ii) Un recouvrement par des ouverts affines  $\bar{X} = \bigcup_{i \in \mathfrak{A}} \bar{U}_i$ .
- iii) Un relèvement f.c.t.f. très lisse  $q_i : \mathbf{A}_i^\dagger \twoheadrightarrow \Gamma(\bar{U}_i, \mathcal{O}_{\bar{X}})$  pour chaque  $i \in \mathfrak{A}$ .
- iv) Une famille d'isomorphismes  $\{\varphi_{j,i} \mid i, j \in \mathfrak{A}\}$  telle que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\bar{U}_{ij}, \mathcal{O}_{\mathbf{A}_i^\dagger}^\dagger) & \xrightarrow[\simeq]{\varphi_{j,i}} & \Gamma(\bar{U}_{ij}, \mathcal{O}_{\mathbf{A}_j^\dagger}^\dagger) \\ q_i \downarrow & & \downarrow q_j \\ \Gamma(\bar{U}_{ij}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) & \xrightarrow{\mathbf{id}} & \Gamma(\bar{U}_{ij}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) \end{array}$$

sont commutatifs et vérifient les relations

$$\varphi_{i,i} = \mathbf{id}, \quad \varphi_{j,i} = \varphi_{i,j}^{-1}, \quad \varphi_{k,j} \circ \varphi_{j,i} = \varphi_{k,i}, \quad (\varphi_{*,*})$$

sur les ouverts (affines) *ad hoc*.

**2.1.5. Schémas †-adiques de réduction affine.** Un cas particulier de ce qui précède est celui où  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$  est affine. Dans ce cas les ouverts principaux de  $\bar{\mathbf{X}}$  remplacent avantageusement les ouverts affines en ce sens que si  $\bar{V}_1$  et  $\bar{V}_2$  sont des ouverts principaux de  $\bar{\mathbf{X}}$  tels que  $(\bar{V}_i; \mathcal{O}^\dagger|_{\bar{V}_i})$  sont des schémas †-adiques affines alors  $(\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2; \mathcal{O}^\dagger|_{\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2})$  l'est également (2.1.1-(b)) et ceci **sans** hypothèse de lissité (*cf.* 2.1.3-*Rappel*). Nous avons donc une description analogue à celle de 2.1.4 pour un schéma †-adique seulement supposé de réduction affine.

Un **schéma †-adique de réduction affine** équivaut à la donnée de :

- i) Un  $\bar{\mathbf{R}}$ -schéma algébrique affine  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$ , associé donc à l'algèbre  $\bar{\mathbf{A}} = \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$ .
- ii) Un recouvrement fini principal  $\bar{\mathbf{X}} = \bigcup_{i \in \mathfrak{A}} \bar{U}_i$  avec  $\mathfrak{A} = \{1, \dots, r\}$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $\bar{U}_i = D(\bar{f}_i)$  avec  $\bar{f}_1 + \dots + \bar{f}_r = 1$ . On note  $\bar{U}_{ij} := D(\bar{f}_i \bar{f}_j)$ .
- iii) Un relèvement f.c.t.f.  $q : \mathbf{A}_i^\dagger = \Gamma(\bar{U}_i; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \Gamma(\bar{U}_i, \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$  pour chaque  $i \in \mathfrak{A}$ .
- iv) Une famille d'isomorphismes  $\{\varphi_{j,i} \mid i, j \in \mathfrak{A}\}$  telle que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_{i[f_j]}^\dagger = \Gamma(\bar{U}_{ij}, \mathcal{O}_{\mathbf{A}_i}^\dagger) & \xrightarrow[\simeq]{\varphi_{j,i}} & \Gamma(\bar{U}_{ij}, \mathcal{O}_{\mathbf{A}_j}^\dagger) = \mathbf{A}_{j[f_i]}^\dagger \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}_i \bar{f}_j} = \Gamma(\bar{U}_{ij}, \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}) & \xrightarrow{\text{id}} & \Gamma(\bar{U}_{ij}, \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}) = \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}_i \bar{f}_j} \end{array}$$

sont commutatifs et vérifient les relations  $(\varphi_{*,*})$  sur les ouverts (principaux) *ad hoc*.

La condition de faisceau sur  $\mathcal{O}^\dagger$  relative au recouvrement  $\{\bar{U}_i\}_{i \in \mathfrak{A}}$  identifie  $\Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  au noyau de l'application  $\bar{\mathbf{R}}$ -linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\ell=1}^r \mathbf{A}_\ell^\dagger & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \prod_{1 \leq i < j \leq r} \mathbf{A}_{j[f_i]}^\dagger \\ (a_1, \dots, a_r) & \longmapsto & (\dots, b_{i,j}, \dots) \end{array} \quad \text{avec } b_{i,j} = \varphi_{j,i}(a_i) - a_j.$$

On a donc la suite exacte à gauche :

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) \xrightarrow{\epsilon_\varphi} \prod_{\ell=1}^r \mathbf{A}_\ell^\dagger \xrightarrow{\delta_\varphi} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \mathbf{A}_{j[f_i]}^\dagger,$$

où  $\epsilon_\varphi = (\epsilon_{\varphi_1}, \dots, \epsilon_{\varphi_r})$  et  $\epsilon_{\varphi, \ell} : \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \mathbf{A}_\ell^\dagger$  est la composée du morphisme de restriction  $\Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \Gamma(D(\bar{f}_\ell); \mathcal{O}^\dagger)$  suivi par l'isomorphisme  $\varphi_\ell : \Gamma(D(\bar{f}_\ell); \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \mathbf{A}_\ell^\dagger$ .

Cela étant, la réduction modulo  $\mathbf{I}$  de  $\delta_\varphi$  s'identifie au morphisme  $\delta_{\bar{\mathbf{A}}}$  du complexe de Čech associé au recouvrement  $\{\bar{U}_\ell\}$  de  $\bar{\mathbf{X}}$  à valeurs dans le faisceau  $\mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}$ . On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\ell=1}^r \mathbf{A}_\ell^\dagger & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \prod_{1 \leq i < j \leq r} \mathbf{A}_{j[f_i]}^\dagger \\ q \downarrow & \oplus & \downarrow q \\ \prod_{\ell=1}^r \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}_\ell} & \xrightarrow{\delta_{\bar{\mathbf{A}}}} & \prod_{1 \leq i < j \leq r} \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}_i \bar{f}_j} \end{array} \quad (\mathcal{D}_r)$$

et le morphisme canonique de suites exactes à gauche :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & \prod_{\ell=1}^r \mathbf{A}_\ell^\dagger \xrightarrow{\delta_\varphi} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \mathbf{A}_{j[f_i]}^\dagger \\
\alpha \downarrow & & q \downarrow \quad (\mathcal{D}_r) \quad q \downarrow \\
\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}) = \bar{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\epsilon_{\bar{\mathbf{a}}}} & \prod_{\ell=1}^r \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}_\ell} \xrightarrow{\delta_{\bar{\mathbf{a}}}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}_i \bar{f}_j}
\end{array} \quad (\Delta_r)$$

où  $\alpha$ , induite par la commutativité de  $(\mathcal{D}_r)$ , est le morphisme  $\alpha(\bar{\mathbf{X}})$  de 2.1.2-(a).

**Le cas  $r = 2$ .** Le cas le plus simple de recollement non trivial est celui où le recouvrement  $\bar{\mathbf{X}} = \bigcup_i \bar{U}_i$  comporte seulement deux ouverts  $\bar{U}_1 = D(\bar{f}_1)$  et  $\bar{U}_2 = D(\bar{f}_2)$  avec  $\bar{f}_1 + \bar{f}_2 = 1$ . Le schéma  $\dagger$ -adique  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  est alors entièrement déterminé par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{A}_{1[f_2]}^\dagger & \xrightarrow[\simeq]{\varphi_{21}} & \mathbf{A}_{2[f_1]}^\dagger \\
q \downarrow & \oplus & \downarrow q \\
\bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}_1 \bar{f}_2} & \xrightarrow{\text{id}} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}_1 \bar{f}_2}
\end{array}$$

On a alors :

$$\delta_\varphi : \mathbf{A}_1^\dagger \oplus \mathbf{A}_2^\dagger \rightarrow \mathbf{A}_{2[f_1]}^\dagger, \quad \delta_\varphi(a_1, a_2) := \varphi_{21}(a_1) - a_2$$

et le diagramme commutatif  $\Delta_2$  est

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & \mathbf{A}_1^\dagger \oplus \mathbf{A}_2^\dagger \xrightarrow{\delta_\varphi} \mathbf{A}_{2[f_1]}^\dagger \\
\alpha(\bar{\mathbf{X}}) \downarrow & & q \downarrow \quad (\mathcal{D}_2) \quad q \downarrow \\
\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}) = \bar{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\epsilon_{\bar{\mathbf{a}}}} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}_1} \oplus \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}_2} \xrightarrow{\delta_{\bar{\mathbf{a}}}} \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}_1 \bar{f}_2} \rightarrow \mathbf{0}
\end{array} \quad (\Delta_2)$$

où la deuxième ligne est exacte puisque  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$  est affine.

**2.1.6. Schémas  $\dagger$ -adiques lisses de réduction affine.** Lorsque  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  est lisse de réduction  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$  affine la description de la section précédente peut encore être simplifiée. En effet, le schéma affine  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$  étant lisse la  $\mathbf{R}$ -algèbre  $\bar{\mathbf{A}} := \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger)$  est lisse et nous pouvons fixer un relèvement  $q : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$  avec  $\mathbf{A}^\dagger$  f.c.t.f. **très lisse**. Soit  $\bar{\mathbf{X}} = \bigcup_{i \in \mathfrak{Q}} \bar{U}_i$  la décomposition avec  $\bar{U}_i := D(\bar{f}_i) \subseteq \bar{\mathbf{X}}$  et  $1 = \bar{f}_1 + \dots + \bar{f}_r$  de 2.1.5, et fixons un relèvement  $f_i \in \mathbf{A}^\dagger$  pour chaque  $\bar{f}_i$ . L'élément  $c = f_1 + \dots + f_r$  est inversible dans  $\mathbf{A}^\dagger$  puisque  $c = 1 \pmod{\mathbf{I}}$ . Nous pouvons donc remplacer  $f_i$  par  $cf_i$  et supposer que  $1 = f_1 + \dots + f_r$ .

L'algèbre  $\mathbf{A}_i^\dagger = \Gamma(\bar{U}_i; \mathcal{O}^\dagger)$  est f.c.t.f. très lisse et  $\alpha(\bar{U}_i) : \mathbf{A}_i^\dagger \rightarrow \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}_i}$  est un relèvement de  $\bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}_i}$ . Il s'ensuit que  $\mathbf{A}_i^\dagger$  est isomorphe à  $\mathbf{A}_{[f_i]}^\dagger$ , on peut donc remplacer  $\mathbf{A}_i^\dagger$  par  $\mathbf{A}_{[f_i]}^\dagger$  dans la description de  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  de 2.1.5 ce qui nous conduit à la réécriture suivante :

Un **schéma  $\dagger$ -adique lisse de réduction affine** équivaut à la donnée de :

- i) Une  $\mathbf{R}$ -algèbre f.c.t.f. **très lisse**  $\mathbf{A}^\dagger$ .
- ii) Une famille finie  $\{f_1, \dots, f_r\} \subseteq \mathbf{A}^\dagger$  vérifiant  $1 = f_1 + \dots + f_r$ .

iii) Une famille  $\varphi = \{\varphi_{i,j} : \mathbf{A}_{[f_i f_j]}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}_{[f_i f_j]}^\dagger\}$  d'automorphismes vérifiant les relations  $(\varphi_{*,*})$  et tels que  $\varphi_{i,j} \bmod \mathbf{I} = \mathbf{id}$ .

La condition de faisceau sur  $\mathcal{O}^\dagger$  relative au recouvrement prncipal  $\{\overline{U}_\ell\}_{\ell \in \mathfrak{A}}$  identifie l'algèbre  $\Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  au noyau de l'application  $\mathbf{R}$ -linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\ell=1}^r \mathbf{A}_{[f_\ell]}^\dagger & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \prod_{1 \leq i < j \leq r} \mathbf{A}_{[f_i f_j]}^\dagger \\ (a_1, \dots, a_r) & \longmapsto & (\dots, b_{i,j}, \dots) \end{array} \quad \text{avec } b_{i,j} = \varphi_{j,i}(a_i) - a_j.$$

On a donc la suite exacte à gauche :

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) \xrightarrow{\epsilon_\varphi} \prod_{\ell=1}^r \mathbf{A}_{[f_\ell]}^\dagger \xrightarrow{\delta_\varphi} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \mathbf{A}_{[f_i f_j]}^\dagger,$$

où  $\epsilon_\varphi = (\epsilon_{\varphi_1}, \dots, \epsilon_{\varphi_r})$  et  $\epsilon_{\varphi_\ell} : \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \mathbf{A}_{[f_\ell]}^\dagger$  est la composée du morphisme de restriction  $\Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \Gamma(\overline{U}_\ell; \mathcal{O}^\dagger)$  suivi par l'isomorphisme  $\varphi_\ell : \Gamma(\overline{U}_\ell; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \mathbf{A}_{[f_\ell]}^\dagger$ .

Cela étant, la réduction modulo  $\mathbf{I}$  de  $\delta_\varphi$  s'identifie au morphisme  $\delta_{\overline{\mathbf{A}}}$  du complexe de Čech associé au recouvrement  $\{\overline{U}_\ell\}$  de  $\overline{\mathbf{X}}$  à valeurs dans le faisceau  $\mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}}$ . On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\ell=1}^r \mathbf{A}_{[f_\ell]}^\dagger & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \prod_{1 \leq i < j \leq r} \mathbf{A}_{[f_i f_j]}^\dagger \\ q \downarrow & \oplus & \downarrow q \\ \prod_{\ell=1}^r \overline{\mathbf{A}}_{f_\ell} & \xrightarrow{\delta_{\overline{\mathbf{A}}}} & \prod_{1 \leq i < j \leq r} \overline{\mathbf{A}}_{f_i f_j} \end{array} \quad (\mathcal{D}_r)$$

et le morphisme canonique de suites exactes à gauche :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & \prod_{\ell=1}^r \mathbf{A}_{[f_\ell]}^\dagger \xrightarrow{\delta_\varphi} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \mathbf{A}_{[f_i f_j]}^\dagger \\ \alpha \downarrow & & q \downarrow \quad (\mathcal{D}_r) \quad q \downarrow \\ \mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}}) = \overline{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\epsilon_{\overline{\mathbf{A}}}} & \prod_{\ell=1}^r \overline{\mathbf{A}}_{f_\ell} \xrightarrow{\delta_{\overline{\mathbf{A}}}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \overline{\mathbf{A}}_{f_i f_j} \end{array} \quad (\Delta_r)$$

où  $\alpha$ , induite par la commutativité de  $(\mathcal{D}_r)$ , est le morphisme  $\alpha(\overline{\mathbf{X}})$  de 2.1.2-(a).

**Le cas  $r = 2$ .** Le schéma †-adique  $(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  est entièrement déterminé par la donnée de l'automorphisme  $\varphi_{21} \in \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}_{[f_1 f_2]}^\dagger)$ . On a :

$$\delta_\varphi : \mathbf{A}_{[f_1]}^\dagger \oplus \mathbf{A}_{[f_2]}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}_{[f_1 f_2]}^\dagger, \quad \delta_\varphi(a_1, a_2) := \varphi_{21}(a_1) - a_2 \quad (\delta_\varphi)$$

et le diagramme  $\Delta_2$  est

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & \mathbf{A}_{[f_1]}^\dagger \oplus \mathbf{A}_{[f_2]}^\dagger \xrightarrow{\delta_\varphi} \mathbf{A}_{[f_1 f_2]}^\dagger \\ \alpha(\overline{\mathbf{X}}) \downarrow & & q \downarrow \quad (\mathcal{D}_2) \quad q \downarrow \\ \mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}}) = \overline{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\epsilon_{\overline{\mathbf{A}}}} & \overline{\mathbf{A}}_{f_1} \oplus \overline{\mathbf{A}}_{f_2} \xrightarrow{\delta_{\overline{\mathbf{A}}}} \overline{\mathbf{A}}_{f_1 f_2} \rightarrow \mathbf{0} \end{array} \quad (\Delta_2)$$

où la deuxième ligne est exacte puisque  $(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}})$  est affine.

La proposition suivante joue un rôle fondamental dans la démonstration du théorème

2.1.8 qui concerne les schémas  $\dagger$ -adiques lisses, elle est pourtant vraie sans hypothèse de lissité. Le corollaire 2.1.10 de 2.1.8 généralisera 2.1.7 au cas d'un schéma  $\dagger$ -adique de réduction affine **quelconque**.

**2.1.7. Proposition.** *Soit  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  un schéma  $\dagger$ -adique de réduction  $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$  affine. On suppose qu'il existe  $\bar{f}_1, \bar{f}_2 \in \bar{A} := \Gamma(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$  vérifiant  $\bar{X} = D(\bar{f}_1) \cup D(\bar{f}_2)$  et tels que chaque sous-espace annelé  $(D(\bar{f}_i); \mathcal{O}^\dagger|_{D(\bar{f}_i)})$  est un schéma  $\dagger$ -adique affine. Alors, le morphisme  $\alpha(\bar{X}) : \Gamma(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \Gamma(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$  est **surjectif**.*

### Démonstration

**I.** Cas où  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  est lisse et  $\bar{X}$  est un ouvert principal d'un espace affine. On note  $\bar{X}$  la liste de variables  $\{X_1, \dots, X_t\}$ , on se donne  $\bar{c}, \bar{f}_1, \bar{f}_2 \in \bar{\mathbf{R}}[\bar{X}]$  vérifiant  $\bar{c} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2$ , on note  $\bar{A} := \bar{\mathbf{R}}[\bar{X}]_{\bar{c}}$  l'algèbre des fonctions régulières sur de l'ouvert principal  $D(\bar{c}) \subseteq \mathbb{A}_{\bar{\mathbf{R}}}^t$ . Le schéma  $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$  est le schéma affine associé à  $\bar{A}$ . On a  $\bar{X} = D(\bar{f}_1) \cup D(\bar{f}_2)$ .

Soient  $c, f_1, f_2 \in \mathbf{R}[\bar{X}]$  des relèvements respectifs de  $\bar{c}, \bar{f}_1, \bar{f}_2$ , notons  $\mathbf{A}^\dagger := (\mathbf{R}[\bar{X}]_c)^\dagger$  et reprenons les notations du cas  $r = 2$  de 2.1.6. La proposition résulte alors de montrer que pour chaque  $z \in \mathbf{A}^\dagger$  donné il existe  $P_z \in \mathbf{IA}_{[f_1]}^\dagger$  et  $Q_z \in \mathbf{IA}_{[f_2]}^\dagger$  tels que

$$\boxed{\varphi(z + P_z) = z + Q_z}$$

Le morphisme  $\delta_{\text{id}} : \mathbf{A}_{[f_1]}^\dagger \oplus \mathbf{A}_{[f_2]}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}_{[f_1, f_2]}^\dagger$  étant surjectif (3.2.7), soient

$$\begin{cases} \sigma_{f_1} : \mathbf{A}_{[f_1, f_2]}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}_{[f_1]}^\dagger \\ \sigma_{f_2} : \mathbf{A}_{[f_1, f_2]}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}_{[f_2]}^\dagger \end{cases}$$

des applications  $\mathbf{R}$ -linéaires vérifiant

$$\sigma_{f_1}(S) + \sigma_{f_2}(S) = S, \quad \forall S \in \mathbf{A}_{[f_1, f_2]}^\dagger$$

*Lemme.* Pour tout  $z \in \mathbf{A}^\dagger$  les séries

$$P_z = \sum_{k \geq 1} (\sigma_{f_1}(1 - \varphi))^k(z) \quad \text{et} \quad Q_z = -\sigma_{f_2}(1 - \varphi)(z + P_z) \quad (\diamond)$$

sont des solutions formelles de l'équation  $\varphi(z + P_z) = z + Q_z$ .

*Preuve du lemme.* On a par construction :

$$\sigma_{f_1}(1 - \varphi)(z + P) = P$$

et alors :

$$\begin{aligned} (1 - \varphi)(z + P) &= P + \sigma_{f_2}(1 - \varphi)(z + P) \\ X - \varphi(z + P) &= \sigma_{f_2}(1 - \varphi)(z + P) \\ \varphi(z + P) &= X - \sigma_{f_2}(1 - \varphi)(z + P) \end{aligned} \quad \square$$

Nous allons vérifier maintenant que la série  $(\diamond)$  définissant  $P_z$  converge vers un élément de  $\mathbf{A}_{[f_1]}^\dagger$ . Il s'ensuivra que  $Q_z \in \mathbf{A}_{[f_2]}^\dagger$  et la surjectivité de  $\alpha(\overline{\mathbf{X}})$  sera alors établie.

Pour cela on utilisera le développement de  $\varphi$  en série de Taylor :

$$(\varphi - 1) = \sum_{0 \leq m_i} h_1^{m_1} \cdots h_t^{m_t} \Delta_1^{m_1} \cdots \Delta_t^{m_t} \quad (\ddagger)$$

où  $h_i = (\varphi - 1)(X_i) \in \mathbf{IA}_{[f_1 f_2]}^\dagger$  puisque  $\varphi = \mathbf{id} \bmod \mathbf{I}$ . Chaque  $h_i$  s'écrit d'autre part comme somme d'une série de la forme

$$h_i = \sum_{n \geq 0} H_{i,n}(\overline{\mathbf{X}}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1 f_2}), \quad i = 1, \dots, t,$$

avec  $H_{i,n} \in \mathbf{R}[\overline{\mathbf{X}}, T, U]$  vérifiant, pour un certain  $M \in \mathbb{N}$  :

$$\deg(H_{i,n}) \leq M(\text{val}_{\mathbf{I}}(H_{i,n}) + 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, t.$$

Les produits  $h_1^{m_1} \cdots h_r^{m_r}$  ont alors des développements en séries de la forme :

$$h_1^{m_1} \cdots h_t^{m_t} = \sum_{n \geq 0} H_{\vec{m},n}(\overline{\mathbf{X}}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1 f_2})$$

telles que :

$$\deg(H_{\vec{m},n}) \leq M(\text{val}_{\mathbf{I}}(H_{\vec{m},n}) + |\vec{m}|), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où on a noté  $\vec{m} := m_1, \dots, m_t$  et  $|\vec{m}| := m_1 + \cdots + m_t$ .

On obtient ainsi un développement de  $(\ddagger)$  comme somme dénombrable de la forme

$$(\varphi - 1) = \sum_{\vec{m},n} H_{\vec{m},n}(\overline{\mathbf{X}}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1 f_2}) \Delta_1^{m_1} \cdots \Delta_t^{m_t} \quad (\ddagger\ddagger)$$

avec

$$\begin{cases} \text{val}_{\mathbf{I}}(H_{\vec{m},n}) \geq |\vec{m}| \\ \deg(H_{\vec{m},n}) < M(\text{val}_{\mathbf{I}}(H_{\vec{m},n}) + |\vec{m}|) \end{cases}$$

Soit maintenant  $z \in \mathbf{A}_{[f_1]}^\dagger$  donné par une série

$$\begin{cases} z = \sum_{\ell \geq 0} Z_\ell(\overline{\mathbf{X}}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1}), \text{ avec} \\ \deg(Z_\ell) < L(\text{val}_{\mathbf{I}}(Z_\ell) + 1), \text{ pour tout } \ell \in \mathbb{N} \text{ et un certain } L \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (\star_L)$$

Notons  $I = (i_1, \dots, i_t)$ , puis  $|I| = i_1 + \cdots + i_t$  et  $\overline{\mathbf{X}}^I := X_1^{i_1} \cdots X_t^{i_t}$ . On a  $\deg(\overline{\mathbf{X}}^I) = |I|$ . Chaque polynôme  $Z_\ell$  est somme de termes de la forme  $\overline{\mathbf{X}}^I (\frac{1}{c})^a (\frac{1}{f_1})^b$  avec  $|I| + a + b \leq \deg(Z_\ell)$ . On a

$$\Delta\left(\overline{\mathbf{X}}^I (\frac{1}{c})^a (\frac{1}{f_1})^b\right) = \Delta(\overline{\mathbf{X}}^I) (\frac{1}{c})^a (\frac{1}{f_1})^b - a \overline{\mathbf{X}}^I (\frac{1}{c})^{a+1} \Delta(c) (\frac{1}{f_1})^b - b \overline{\mathbf{X}}^I (\frac{1}{c})^a (\frac{1}{f_1})^{b+1} \Delta(f_1)$$

et

$$\deg \Delta_1^{m_1} \cdots \Delta_t^{m_t} \left( \overline{\mathbf{X}}^I (\frac{1}{c})^a (\frac{1}{f_1})^b \right) \leq |I| + a + b + |\vec{m}| \sup(\deg(c), \deg(f_1))$$

de sorte que si on pose  $S := \sup(\deg(c), \deg(f_1))$ , on a pour chaque  $\vec{m} := (m_1, \dots, m_t)$  :

$$\begin{cases} \Delta_1^{m_1} \cdots \Delta_t^{m_t}(z) = \sum_{\ell \geq 0} T_{\vec{m}, \ell}(\vec{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1}), \text{ avec} \\ \deg(T_{\vec{m}, \ell}) < L(\text{val}_I(T_{\vec{m}, \ell}) + 1) + |\vec{m}|S, \text{ pour tout } \ell \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (\star\star_L)$$

En rassemblant  $(\dagger\dagger)$  et  $(\star\star_L)$  on obtient

$$\sigma_f(\varphi - 1)(z) = \sum_{\vec{m}, n, \ell} \sigma_f\left(H_{\vec{m}, n}(\vec{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1 f_2}) \cdot T_{\vec{m}, \ell}(\vec{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1})\right)$$

où les polynômes  $H_{\vec{m}, n}(\vec{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1 f_2}) \cdot T_{\vec{m}, \ell}(\vec{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1})$  sont des sommes finies de termes :

$$q(\vec{X}, \frac{1}{c}) \left(\frac{1}{f_1 f_2}\right)^a \left(\frac{1}{f_1}\right)^b \quad (\Delta)$$

avec  $a \leq \deg H_{\vec{m}, n}$  et  $b \leq \deg T_{\vec{m}, \ell}$ .

*Lemme.* Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  on a dans  $\mathbf{A}_{[f_1 f_2]}^\dagger$

$$\left(\frac{1}{f_1}\right)^\alpha \left(\frac{1}{f_2}\right)^\beta = \left(\sum_{k=0}^{\alpha-1} m_{f,k} \left(\frac{1}{f_1}\right)^{\alpha-k} \left(\frac{1}{c}\right)^{\beta+k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\beta-1} m_{g,k} \left(\frac{1}{c}\right)^{\alpha+k} \left(\frac{1}{f_2}\right)^{\beta-k}\right)$$

avec  $m_{f,k}$  et  $m_{g,k}$  des entiers naturels.

*Preuve.* L'égalité  $c = f_2 + f_1$  donne aussitôt  $\frac{1}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_1 c} + \frac{1}{c f_2}$  et le lemme en résulte par une induction élémentaire.  $\square$

L'application de ce lemme aux termes  $(\Delta)$  permet d'obtenir des majorations

$$\begin{aligned} \deg \sigma_f\left(H_{\vec{m}, n}(\vec{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1 f_2}) \cdot T_{\vec{m}, \ell}(\vec{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1})\right) &\leq 2 \deg H_{\vec{m}, n} + \deg T_{\vec{m}, \ell} \\ &< 2M(\text{val}_I H_{\vec{m}, n}) + (2M + S)|\vec{m}| + L(\text{val}_I(T_{\vec{m}, \ell}) + 1) \\ &< (4M + S)(\text{val}_I H_{\vec{m}, n}) + L(\text{val}_I(T_{\vec{m}, \ell}) + 1) \end{aligned}$$

en particulier, si  $L > 4M + S$  l'opérateur  $\sigma_f(\varphi - 1)$  préserve la classe des éléments  $z \in \mathbf{A}_{[f_1]}^\dagger$  donnés par les séries de la forme  $(\star_L)$ . Comme d'autre part, la valuation augmente strictement à chaque application de  $\sigma_{f_1}(\varphi - 1)$  la série  $(\diamond)$  apparaît comme somme d'une famille dénombrable telle que pour chaque  $N \in \mathbb{N}$  seul un nombre fini de ses termes est de valuation inférieure à  $N$ . En regroupant les termes de même valuation on obtient une nouvelle expression de  $P_z$  comme série de la forme  $(\star_L)$ . L'élément  $P_z$  appartient donc bien à  $\mathbf{A}_{f_1}^\dagger$  quel que soit  $z \in \mathbf{A}_{f_1}^\dagger$ , donc quel que soit  $z \in \mathbf{A}^\dagger$ .

**II. Cas général.** On reprend les notations du cas  $r = 2$  de 2.1.5. Fixons une surjection de  $\mathbf{R}$ -algèbres  $\pi : \mathbf{R}[X_1, \dots, X_t] \rightarrow \bar{\mathbf{A}} := \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$ , choisissons des éléments  $F_i \in \mathbf{R}[\bar{\mathbf{X}}]$  tels que  $\pi(F_i) = f_i$ , notons  $\mathbf{B}^\dagger := \mathbf{R}[\bar{\mathbf{X}}]_{[F_1 + F_2]}^\dagger$  et  $\bar{\mathbf{B}} := \bar{\mathbf{B}}^\dagger$ . Le morphisme  $\pi$  induit les surjections  $\bar{\pi} : \bar{\mathbf{B}}_{F_i} \rightarrow \bar{\mathbf{A}}_{f_i}$  et  $\bar{\pi} \circ q : \mathbf{B}_{[F_i]}^\dagger \rightarrow \bar{\mathbf{A}}_{f_i}$  et comme d'autre part  $\alpha(\bar{U}_i) : \mathbf{A}_i^\dagger \rightarrow \bar{\mathbf{A}}_{f_i}$  est un relèvement avec  $\mathbf{A}_i^\dagger$  f.c.t.f. et que  $\mathbf{B}_{[F_i]}^\dagger$  est très lisse, il existe des morphismes

$\pi_i^\dagger : \mathbf{B}_{[F_i]}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}_i^\dagger$  (surjectifs car de réduction surjective th. 3.2 [MW]) rendant commutatif les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}_{[F_i]}^\dagger & \xrightarrow{\pi_i^\dagger} & \mathbf{A}_i^\dagger \\ q \downarrow & & q \downarrow \alpha(\bar{U}_i) \\ \bar{\mathbf{B}}_{\bar{F}_i} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{F}_i} \end{array}$$

On a, par réduction :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{B}_{[F_1 F_2]}^\dagger & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{B}_{[F_1 F_2]}^\dagger \\ \pi_1^\dagger \downarrow & & \pi_2^\dagger \downarrow \\ \mathbf{A}_{1, [\pi_1^\dagger(F_2)]}^\dagger & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{A}_{2, [\pi_2^\dagger(F_1)]}^\dagger \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{réduction modulo } \mathbf{I}} \left\{ \begin{array}{ccc} \bar{\mathbf{B}}_{\bar{F}_1 \bar{F}_2} & \xrightarrow{\text{id}} & \bar{\mathbf{B}}_{\bar{F}_1 \bar{F}_2} \\ \bar{\pi} \downarrow & & \bar{\pi} \downarrow \\ \bar{\mathbf{A}}_{\bar{F}_1 \bar{F}_2} & \xrightarrow{\text{id}} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{F}_1 \bar{F}_2} \end{array} \right\}$$

où le diagramme de droite est trivialement commutatif. Il existe alors un isomorphisme  $\psi : \mathbf{B}_{[F_1 F_2]}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}_{[F_1 F_2]}^\dagger$  congruent à l'identité modulo  $\mathbf{I}$  fermant commutativement le diagramme de gauche car  $\mathbf{B}_{[F_1 F_2]}^\dagger$  est f.c.t.f. très lisse. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}_{[F_1]}^\dagger \oplus \mathbf{B}_{[F_2]}^\dagger & \xrightarrow{\delta_\psi} & \mathbf{B}_{[F_1 F_2]}^\dagger \\ \pi_1^\dagger \downarrow \quad \pi_2^\dagger \downarrow & & \downarrow \pi_2^\dagger \\ \mathbf{A}_1^\dagger \oplus \mathbf{A}_2^\dagger & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \mathbf{A}_{2, [\pi_2^\dagger(F_1)]}^\dagger \end{array} \quad (\mathcal{D})$$

et le morphisme induit  $\pi : \ker(\delta_\psi) \dashrightarrow \ker(\delta_\varphi)$  ; autrement dit, on a le morphisme de suites exactes à gauche :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(\bar{\mathbf{Y}}; \mathcal{B}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\psi} & \Gamma(\bar{V}_1; \mathcal{B}^\dagger) \oplus \Gamma(\bar{V}_2; \mathcal{B}^\dagger) & \xrightarrow{\delta_\psi} & \Gamma(\bar{V}_{12}; \mathcal{B}^\dagger) \\ & & \pi \downarrow & & \pi^\dagger \downarrow & (\mathcal{D}) & \pi^\dagger \downarrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & \Gamma(\bar{U}_1; \mathcal{O}^\dagger) \oplus \Gamma(\bar{U}_2; \mathcal{O}^\dagger) & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \Gamma(\bar{U}_{12}; \mathcal{O}^\dagger) \end{array} \quad (\mathcal{D}')$$

avec :

- $(\bar{\mathbf{Y}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{Y}}})$  schéma affine associé à  $\bar{\mathbf{B}}$  (ouvert principal  $D(\bar{F}_1 + \bar{F}_2)$  dans  $\mathbb{A}_{\bar{R}}^t$ ) ;
- $\bar{V}_i = D(F_i)$ , ouvert principal de  $\bar{\mathbf{Y}}$  ;
- $(\bar{V}_i; \mathcal{B}_i^\dagger)$  le schéma †-adique affine associé à  $\mathbf{B}_{[F_i]}^\dagger$ ,
- $(\bar{\mathbf{Y}}; \mathcal{B}^\dagger)$  le recollement d'espaces annelés des  $(\bar{V}_i; \mathcal{B}_i^\dagger)$  via l'isomorphisme  $\psi$ .

Le diagramme commutatif suivant relie le morphisme  $\pi$  à sa réduction :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\bar{\mathbf{Y}}; \mathcal{B}^\dagger) & \xrightarrow{\pi} & \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) \\ \alpha(\bar{\mathbf{Y}}) \downarrow & & \downarrow \alpha(\bar{\mathbf{X}}) \\ \Gamma(\bar{\mathbf{Y}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{Y}}}) & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}) \end{array}$$

où  $\bar{\pi}$  est la réduction modulo  $\mathbf{I}$  du morphisme  $\pi : \mathbf{B}^\dagger \dashrightarrow \mathbf{A}^\dagger$  car  $\bar{\mathbf{X}}$  est affine.

La surjectivité de  $\alpha(\bar{\mathbf{X}})$  résulte maintenant de celle de  $\alpha(\bar{\mathbf{Y}})$  déjà établie, CQFD. ■

**2.1.8. Affinité des schémas  $\dagger$ -adiques de réduction affine.** Le but de cette section est de démontrer l'équivalence pour un schéma  $\dagger$ -adique entre « être affine-lisse » et « être lisse de réduction affine » (cor. 2.1.9).

**Théorème**

- a) Pour tout ouvert affine  $\bar{U} \subseteq \bar{X}$  d'un schéma  $\dagger$ -adique lisse  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$ , le sous-espace annelé  $(\bar{U}; \mathcal{O}^\dagger|_{\bar{U}})$  est un schéma  $\dagger$ -adique affine-lisse.
- b) Pour tout ouvert affine  $\bar{U} \subseteq \bar{X}$  d'un schéma  $\dagger$ -adique lisse  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$ , le morphisme de  $\mathbf{R}$ -algèbres  $\alpha(\bar{U}) : \Gamma(\bar{U}; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \Gamma(\bar{U}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$  est un relèvement f.c.t.f. très lisse.
- c) Un schéma  $\dagger$ -adique lisse et de réduction affine est affine-lisse.

**Preuve.** Commençons par vérifier que les trois assertions sont équivalentes.

(a)  $\Rightarrow$  (b). Immédiat (presque par définition).

(b)  $\Rightarrow$  (c). Les conditions pour appliquer (b) sont vérifiées. L'algèbre  $\Gamma(D(\bar{f}); \mathcal{O}^\dagger)$  est f.c.t.f. très lisse et  $\alpha(D(\bar{f})) : \Gamma(D(\bar{f}); \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}}$  est un relèvement quel que soit  $\bar{f} \in \bar{\mathbf{A}} := \Gamma(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$ . Par conséquent, le morphisme de restriction  $\mathbf{A}^\dagger = \Gamma(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \Gamma(D(\bar{f}); \mathcal{O}^\dagger)$  induit un **isomorphisme canonique**  $\mathbf{A}^\dagger_{[\bar{f}]} \rightarrow \Gamma(D(\bar{f}); \mathcal{O}^\dagger)$  d'où un isomorphisme de faisceaux de  $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger$  vers  $\mathcal{O}^\dagger$  sur la catégorie des ouverts principaux de  $\bar{X}$  induisant l'isomorphisme d'espaces annelés annoncé.

(c)  $\Rightarrow$  (a). Immédiat.

Rappelons avant de continuer que l'assertion (a) a déjà été établie sous hypothèses plus faibles.

- Lorsque  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  est un schéma  $\dagger$ -adique affine-lisse et que  $\bar{U}$  est **principal**. Résultat de Meredith ([M]) rappelé dans 2.1.1-(b). Signalé dans la suite par le sigle (AL-P).
- Lorsque  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  est un schéma  $\dagger$ -adique affine-lisse et que  $\bar{U}$  est **affine** (3.2.16). Signalé dans la suite par le sigle (AL-A).

On démontre (c) pour le schéma  $\dagger$ -adique lisse  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  de réduction  $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$ .

Comme le schéma  $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$  est lisse sur  $\bar{\mathbf{R}}$  et est affine par hypothèse, l'algèbre  $\bar{\mathbf{A}} := \Gamma(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$  est lisse sur  $\mathbf{R}$  et nous pouvons fixer un relèvement f.c.t.f. très lisse  $q : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$ ,  $q : a \mapsto \bar{a}$ . D'autre part, par définition de schéma  $\dagger$ -adique, il existe une famille finie  $\{f_1, \dots, f_r\} \subseteq \mathbf{A}^\dagger$  telle que  $1 = f_1 + \dots + f_r$  et telle que l'espace annelé  $(\bar{U}_i; \mathcal{O}^\dagger|_{\bar{U}_i})$ , avec  $\bar{U}_i := D(\bar{f}_i)$ , est isomorphe au schéma  $\dagger$ -adique affine associé à  $\mathbf{A}^\dagger_{[f_i]}$ . L'espace annelé  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  apparaît ainsi comme le recollement de  $r$  schémas  $\dagger$ -adiques affines-lisses tous sous-schémas ouverts (principaux) d'un **même** schéma  $\dagger$ -adique affine-lisse d'après la discussion 2.1.6. Dans la suite on notera par  $r(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  le plus petit des cardinaux de telles descriptions de  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$ .

Notons  $g := 1 - f_1$ . On a  $g = f_2 + \dots + f_r$  et un recouvrement ouvert principal :

$$D(\bar{g}) = D(\bar{g}\bar{f}_2) \cup \dots \cup D(\bar{g}\bar{f}_r)$$

où  $(D(\bar{g}\bar{f}_i); \mathcal{O}^\dagger|_{D(\bar{g}\bar{f}_i)})$  est †-adique affine-lisse (AL-P). L'espace annelé  $(D(\bar{g}); \mathcal{O}^\dagger|_{D(\bar{g})})$  est donc le recollement ouvert de  $r - 1$  schémas †-adiques affines-lisses tous sous-schémas ouverts (principaux) d'un même schéma †-adique affine-lisse. En raisonnant par récurrence sur le nombre  $r$  nous pouvons conclure que  $(D(\bar{g}); \mathcal{O}|_{D(\bar{g})})$  est †-adique affine-lisse et que l'espace annelé  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  est le recollement des deux schémas †-adiques affines-lisses

$$\left( D(\bar{f}_1); \mathcal{O}_{A_{|f_1}}^\dagger \right) \quad \text{et} \quad \left( D(\bar{g}); \mathcal{O}_{A_{|g}}^\dagger \right)$$

au-dessus du schéma algébrique affine  $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$  avec  $\mathbf{X} = D(\bar{f}_1) \cup D(\bar{g})$ . Le théorème résultera maintenant de vérifier l'assertion (c) dans le cas où  $r = 2$  ou encore l'assertion (b) aussi pour  $r = 2$ .

Lorsque  $r(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger) = 2$  l'assertion (b) résulte de l'existence pour chaque ouvert affine  $\bar{V} \subseteq \bar{X}$  d'un morphisme de  $\mathbf{R}$ -algèbres  $\gamma(\bar{V}) : \mathbf{B}(\bar{V})^\dagger \rightarrow \Gamma(\bar{V}; \mathcal{O}^\dagger)$  rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}(\bar{V})^\dagger & \xrightarrow{\gamma(\bar{V})} & \Gamma(\bar{V}; \mathcal{O}^\dagger) \\ \parallel & & \downarrow \alpha(\bar{V}) \\ \mathbf{B}(\bar{V})^\dagger & \xrightarrow{q} & \Gamma(\bar{V}; \mathcal{O}_{\bar{X}}) \end{array} \quad (*)$$

où  $q : \mathbf{B}(\bar{V})^\dagger \rightarrow \Gamma(\bar{V}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$  désigne un relèvement f.c.t.f. très lisse. En effet,

• *Sous les hypothèses en cours, tout morphisme de  $\mathbf{R}$ -algèbres  $\gamma(\bar{V}) : \mathbf{B}(\bar{V})^\dagger \rightarrow \Gamma(\bar{V}; \mathcal{O}^\dagger)$  vérifiant  $\alpha(\bar{V}) \circ \gamma(\bar{V}) = q$  est nécessairement **bijectif**. En particulier, l'existence de  $\gamma(\bar{V})$  implique que  $\Gamma(\bar{V}; \mathcal{O}^\dagger)$  est f.c.t.f. très lisse et que  $\alpha(\bar{V})$  est un relèvement.*

*Preuve.* Posons pour simplifier  $\gamma := \gamma(\bar{V})$ ,  $\mathbf{B}^\dagger := \mathbf{B}(\bar{V})^\dagger$ ,  $\bar{\mathbf{B}} := \Gamma(\bar{V}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$ . Notons  $b_i \in \mathbf{B}^\dagger$  un relèvement de  $\bar{b}_i := \bar{f}_i \cdot \mathbf{1}_{\bar{\mathbf{B}}}$ . Le schéma †-adique  $(\bar{V}; \mathcal{O}^\dagger|_{\bar{V}})$  est clairement recollement des deux schémas †-adiques affines-lisses  $(\bar{V}_1; \mathcal{O}^\dagger)$  et  $(\bar{V}_2; \mathcal{O}^\dagger)$  (AL-A) via la restriction de l'isomorphisme  $\varphi \in \mathbf{G}^\dagger(A_{f_1 f_2}^\dagger)$  à  $\mathbf{B}_{b_1 b_2}^\dagger$  (3.4.5) que nous continueront de noter ' $\varphi$ '.

Nous avons ainsi le diagramme commutatif qui complète le diagramme  $\Delta_2$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{B}^\dagger & \xrightarrow{\gamma} & \Gamma(\bar{V}; \mathcal{O}^\dagger) & \xleftarrow{\epsilon_\varphi} & \mathbf{B}_{[b_1]}^\dagger \oplus \mathbf{B}_{[b_2]}^\dagger & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \mathbf{B}_{[b_1 b_2]}^\dagger \\ \parallel & & \alpha(\bar{V}) \downarrow & & \alpha(\bar{V}_1) \downarrow & & \downarrow \alpha(\bar{V}_2) & \downarrow \alpha_{(\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2)} \\ \mathbf{B}^\dagger & \xrightarrow{q} & \bar{\mathbf{B}} = \Gamma(\bar{V}; \mathcal{O}_{\bar{V}}) & \xleftarrow{\epsilon_{\text{id}}} & \bar{\mathbf{B}}_{\bar{b}_1} \oplus \bar{\mathbf{B}}_{\bar{b}_2} & \xrightarrow{\delta_{\text{id}}} & \bar{\mathbf{B}}_{\bar{b}_1 \bar{b}_2} & \rightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

L'algèbre  $\mathbf{B}_{[b_i]}^\dagger$  possède alors deux structures de  $\mathbf{B}^\dagger$ -algèbres, celle canonique en tant que localisation de  $\mathbf{B}^\dagger$  que nous allons noter  $\{\mathbf{B}_{[b_i]}^\dagger\}$  et celle induite par la composée  $\epsilon_{\varphi, i} \circ \gamma$  que nous notons  $[\mathbf{B}_{[b_i]}^\dagger]$ . La réduction modulo  $\mathbf{I}$  des morphismes structuraux de

ces algèbres n'est autre que le morphisme associé à l'inclusion  $V_i \subseteq \bar{V}$  de sorte que ces morphismes appartiennent à l'ensemble  $\text{Hom}'_{\mathbf{R}}(\mathbf{B}^\dagger, \mathbf{B}^\dagger_{[b_i]})$  sur lequel le groupe  $\mathbf{G}^\dagger(\mathbf{B}^\dagger_{[b_i]})$  opère à gauche de façon simplement transitive (3.4-a). Il existe donc un et un unique isomorphisme de  $\mathbf{B}^\dagger$ -algèbres  $h^\dagger_i : \{\mathbf{B}^\dagger_{[b_i]}\} \rightarrow [\mathbf{B}^\dagger_{[b_i]}]$  congruent à  $\mathbf{id}$  modulo  $\mathbf{I}$  et tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbf{B}^\dagger_{[b_i]}\} & \xrightarrow{h^\dagger_i} & [\mathbf{B}^\dagger_{[b_i]}] \\ \alpha(\bar{V}_i) \downarrow & & \downarrow \alpha(\bar{V}_i) \\ \bar{\mathbf{B}}_{b_i} & \xrightarrow{\mathbf{id}} & \bar{\mathbf{B}}_{b_i} \end{array}$$

est commutatif. On obtient ainsi un morphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{B}^\dagger & \xrightarrow{\epsilon_{\mathbf{id}}} & \{\mathbf{B}^\dagger_{[b_1]}\} \oplus \{\mathbf{B}^\dagger_{[b_2]}\} & \xrightarrow{\delta_{\mathbf{id}}} & \{\mathbf{B}^\dagger_{[b_1 b_2]}\} \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \gamma \downarrow & & \bigoplus h^\dagger_1 \downarrow \simeq h^\dagger_2 \downarrow \simeq h^\dagger_{12} \downarrow & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \Gamma(\bar{V}; \mathcal{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & [\mathbf{B}^\dagger_{[b_1]}] \oplus [\mathbf{B}^\dagger_{[b_2]}] & \xrightarrow{\delta_\varphi} & [\mathbf{B}^\dagger_{[b_1 b_2]}] \end{array} \quad (\nabla_2)$$

où  $h^\dagger_{12}$  est le morphisme induit sur  $\text{coker}(\epsilon_{\mathbf{id}}) = \{\mathbf{B}^\dagger_{[b_1 b_2]}\}$  vers  $\text{coker}(\epsilon_\varphi) \subseteq [\mathbf{B}^\dagger_{[b_1 b_2]}]$ .

On constate alors que les structures de  $\mathbf{B}^\dagger$ -algèbres sur  $[\mathbf{B}^\dagger_{[b_1 b_2]}]$  provenant des morphismes  $\varphi \circ h^\dagger_1$  et  $h^\dagger_2$  coïncident et alors, le même raisonnement qui nous a conduit à l'existence et unicité des morphismes  $h^\dagger_i$  prouve que l'application  $h^\dagger_{12}$  n'est autre que l'unique isomorphisme de  $\mathbf{B}^\dagger$ -algèbre de  $\{\mathbf{B}^\dagger_{[b_1 b_2]}\}$  sur  $[\mathbf{B}^\dagger_{[b_1 b_2]}]$  congruent à  $\mathbf{id}$  module  $\mathbf{I}$ . On en déduit la surjectivité de  $\delta_\varphi$  et donc la bijectivité de  $\gamma$ .  $\square$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à justifier l'existence de  $\gamma(\bar{V}) : \mathbf{B}^\dagger(\bar{V}) \rightarrow \Gamma(\bar{V}; \mathcal{O}^\dagger)$  vérifiant l'égalité  $\alpha(\bar{V}) \circ \gamma(\bar{V}) = q$  pour tout ouvert affine  $\bar{V} \subseteq \bar{\mathbf{X}}$  et lorsque  $r(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) = 2$ . Or,  $r(\bar{V}; \mathcal{O}^\dagger_{|\bar{V}}) \leq r(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  (AL-A) de sorte qu'il revient au même de justifier "seulement" l'existence de  $\gamma : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  vérifiant  $\alpha(\bar{\mathbf{X}}) \circ \gamma = q$  pour **tout** schéma  $\dagger$ -adique lisse  $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  de réduction affine et tel que  $r(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) = 2$  <sup>(1)</sup>. On reprend dans la suite les notations du début et montrons l'existence de  $\gamma$  en deux étapes.

*I. Cas où  $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{R}}[\bar{\mathbf{X}}]_{\bar{\mathcal{C}}}$*

- Soit  $C \in \mathbf{R}[\bar{\mathbf{X}}]$  un relèvement de  $\bar{C} \in \bar{\mathbf{R}}[\bar{\mathbf{X}}]$ .
- Soient  $q_2 : \mathbf{R}[\bar{\mathbf{X}}] \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$  et  $q_1 : \mathbf{R}[\bar{\mathbf{X}}]_C \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$  les morphismes induits par la surjection canonique  $q : \mathbf{R}[\bar{\mathbf{X}}]^\dagger_{[C]} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}[\bar{\mathbf{X}}]_{\bar{\mathcal{C}}} = \bar{\mathbf{A}}$ .
- Soit  $\eta_2 : \mathbf{R}[\bar{\mathbf{X}}] \rightarrow \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  un morphisme de  $\mathbf{R}$ -algèbres vérifiant  $\alpha(\bar{\mathbf{X}}) \circ \eta_2 = q_2$ , son existence résulte de la surjectivité de  $\alpha(\bar{\mathbf{X}})$  (2.1.7).

<sup>1</sup>Il convient de remarquer que si dans ce cas l'application  $\alpha(\bar{\mathbf{X}}) : \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \Gamma(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$  est surjective (2.1.7), on ne sait toujours pas (encore) si c'est un relèvement, faute de quoi l'existence de  $\gamma$  résulterait simplement de ce que  $\mathbf{B}^\dagger$  est très lisse.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{R}[X] & \xrightarrow{\eta_2} & \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & \mathbf{A}^\dagger_{[f_1]} \oplus \mathbf{A}^\dagger_{[f_2]} & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \mathbf{A}^\dagger_{[f_1 f_2]} \\
\downarrow & \searrow^{\eta_1} & \downarrow^{\alpha(\overline{\mathbf{X}})} & \downarrow^{\alpha(\overline{U}_1)} & \downarrow^{\alpha(\overline{U}_2)} & \downarrow^{\alpha(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2)} & \\
\mathbf{R}[X]_C & \xrightarrow{\gamma} & \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}}) & \xrightarrow{\bar{\epsilon}_{\text{id}}} & \overline{\mathbf{A}}_{\overline{f}_1} \oplus \overline{\mathbf{A}}_{\overline{f}_2} & \xrightarrow{\bar{\delta}_{\text{id}}} & \overline{\mathbf{A}}_{\overline{f}_1 \overline{f}_2} \rightarrow \mathbf{0} \\
\downarrow^{q_2} & \searrow^{q_1} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\mathbf{R}[X]^\dagger_{[C]} & \xrightarrow{q} & \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}}) & \xrightarrow{\bar{\epsilon}_{\text{id}}} & \overline{\mathbf{A}}_{\overline{f}_1} \oplus \overline{\mathbf{A}}_{\overline{f}_2} & \xrightarrow{\bar{\delta}_{\text{id}}} & \overline{\mathbf{A}}_{\overline{f}_1 \overline{f}_2} \rightarrow \mathbf{0}
\end{array}$$

L'élément  $u := \eta_2(C)$  est inversible dans  $\Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$ . En effet,  $\epsilon_{\varphi, i}(u) \in \mathbf{A}^\dagger_{[f_i]}$  est inversible puisque sa réduction modulo  $\mathbf{I}$  l'est et que  $(\mathbf{A}^\dagger_{[f_i]}, \mathbf{I}\mathbf{A}^\dagger_{[f_i]})$  est de Zariski; l'égalité  $\varphi(\epsilon_{\varphi, 1}(u)) = \epsilon_{\varphi, 2}(u)$  implique alors la condition de recollement  $\varphi(\epsilon_{\varphi, 1}(u)^{-1}) = \epsilon_{\varphi, 2}(u)^{-1}$  pour l'élément  $z \in \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  vérifiant  $\epsilon_\varphi(z) = (\epsilon_{\varphi, 1}(u)^{-1}, \epsilon_{\varphi, 2}(u)^{-1})$  et on a  $zu = 1$  par injectivité de  $\epsilon_\varphi$ . Le morphisme  $\eta_2$  induit donc un morphisme  $\eta_1 : \mathbf{R}[\overline{\mathbf{X}}]_C \rightarrow \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  vérifiant l'égalité  $\alpha(\overline{\mathbf{X}}) \circ \eta_1 = q_1$ . Cela étant, chaque morphisme  $\tau_i := \epsilon_{\varphi, i} \circ \eta_1 : \mathbf{R}[\overline{\mathbf{X}}]_C \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_{[f_i]}$  se prolonge en un morphisme  $\tilde{\tau}_i : \mathbf{R}[\overline{\mathbf{X}}]^\dagger_{[C]} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_{[f_i]}$  et l'égalité  $\delta_\varphi(\tilde{\tau}_1(w), \tilde{\tau}_2(w)) = 0$  pour tout  $w \in \mathbf{R}[\overline{\mathbf{X}}]^\dagger$ , résulte de la séparation  $\mathbf{I}$ -adique de  $\mathbf{A}^\dagger_{[f_1 f_2]}$ . Le morphisme  $\gamma : \mathbf{R}[\overline{\mathbf{X}}]^\dagger \rightarrow \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  défini par  $\gamma(w) = (\tilde{\tau}_1(w), \tilde{\tau}_2(w))$  vérifie par construction l'égalité  $\alpha(\overline{\mathbf{X}}) \circ \gamma = q$ .

**II. Cas général.** Fixons une surjection de  $\mathbf{R}$ -algèbres  $\pi : \mathbf{R}[X_1, \dots, X_t]^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$  et choisissons des éléments  $F_i \in \mathbf{R}[\overline{\mathbf{X}}]$  tels que  $\pi(F_i) = f_i$ , on a  $\pi(F_1 + F_2) = 1$ . Notons  $\mathbf{B}^\dagger := \mathbf{R}[\overline{\mathbf{X}}]^\dagger_{[F_1 + F_2]}$ . Le morphisme  $\pi$  induit par restriction, une surjection de  $\mathbf{B}^\dagger$  sur  $\mathbf{A}^\dagger$  et plus généralement une surjection de  $\mathbf{B}^\dagger_{[G]}$  sur  $\mathbf{A}^\dagger_{[\pi(G)]}$  quel que soit  $G \in \mathbf{B}^\dagger$ ; on désignera tous ces morphismes par la même lettre  $\pi$ . D'autre part, comme la  $\mathbf{R}$ -algèbre  $\mathbf{B}^\dagger_{[F_1 F_2]}$  est f.c.t.f. très lisse, il existe un isomorphisme  $\psi : \mathbf{B}^\dagger_{[F_1 F_2]} \rightarrow \mathbf{B}^\dagger_{[F_1 F_2]}$  congruent à l'identité modulo  $\mathbf{I}$  et rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{B}^\dagger_{[F_1 F_2]} & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{B}^\dagger_{[F_1 F_2]} \\
\pi \downarrow & & \pi \downarrow \\
\mathbf{A}^\dagger_{[f_1 f_2]} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{A}^\dagger_{[f_1 f_2]}
\end{array}$$

commutatif. Il en résulte la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{B}^\dagger_{[F_1]} \oplus \mathbf{B}^\dagger_{[F_2]} & \xrightarrow{\delta_\psi} & \mathbf{B}^\dagger_{[F_1 F_2]} \\
\pi \downarrow & & \pi \downarrow \\
\mathbf{A}^\dagger_{[f_1]} \oplus \mathbf{A}^\dagger_{[f_2]} & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \mathbf{A}^\dagger_{[f_1 f_2]}
\end{array} \quad (\mathcal{D})$$

et un morphisme induit  $\pi : \ker(\delta_\psi) \rightarrow \ker(\delta_\varphi)$ . Autrement dit, on a un morphisme de suites exactes à gauche :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(\overline{\mathbf{Y}}; \mathcal{B}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\psi} & \Gamma(\overline{\mathbf{V}}_1; \mathcal{B}^\dagger) \oplus \Gamma(\overline{\mathbf{V}}_2; \mathcal{B}^\dagger) & \xrightarrow{\delta_\psi} & \Gamma(\overline{\mathbf{V}}_1 \cap \overline{\mathbf{V}}_2; \mathcal{B}^\dagger) \rightarrow \mathbf{0} \\
& & \pi \downarrow & & \pi \downarrow & (\mathcal{D}) & \pi \downarrow \\
\mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & \Gamma(\overline{\mathbf{U}}_1; \mathcal{O}^\dagger) \oplus \Gamma(\overline{\mathbf{U}}_2; \mathcal{O}^\dagger) & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \Gamma(\overline{\mathbf{U}}_1 \cap \overline{\mathbf{U}}_2; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \mathbf{0}
\end{array} \tag{\mathcal{D}'}$$

Où :

- $(\overline{\mathbf{Y}}; \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{Y}}})$  schéma affine associé à  $\overline{\mathbf{B}} := \mathbf{B}^\dagger / \mathbf{I} \mathbf{B}^\dagger$ , c'est l'ouvert principal  $D(\overline{F}_1 + \overline{F}_2)$  de l'espace affine  $\mathbb{A}_{\mathbf{R}}^t$ ;
- $\overline{\mathbf{V}}_i = D(F_i)$ , ouvert principal de  $\overline{\mathbf{Y}}$ ;
- $(\overline{\mathbf{V}}_i; \mathcal{B}_i^\dagger)$  le schéma  $\dagger$ -adique affine associé à  $\mathbf{B}_{[F_i]}^\dagger$ ,
- $(\overline{\mathbf{Y}}; \mathcal{B}^\dagger)$  le recollement d'espaces annelés des  $(\overline{\mathbf{V}}_i; \mathcal{B}_i^\dagger)$  via l'isomorphisme  $\psi$ .

D'après **(I)**, le schéma  $\dagger$ -adique  $(\overline{\mathbf{Y}}; \mathcal{B}^\dagger)$  est **affine** et la première ligne de  $(\mathcal{D}')$  est exacte, de même alors que sa deuxième ligne de par la surjectivité de la troisième colonne. Le conoyau de  $\epsilon_\varphi$  est donc le  $\mathbf{R}$ -module  $\mathbf{A}_{[f_1, f_2]}^\dagger$  tout entier dont on sait qu'il est **plat**. La réduction modulo  $\mathbf{I}$  de la deuxième ligne de  $(\mathcal{D}')$  reste donc exacte et coïncide avec la suite exacte courte

$$\mathbf{0} \rightarrow \overline{\mathbf{A}} \xrightarrow{\epsilon_{\text{id}}} \overline{\mathbf{A}}_{\overline{f}_1} \oplus \overline{\mathbf{A}}_{\overline{f}_2} \xrightarrow{\delta_{\text{id}}} \overline{\mathbf{A}}_{\overline{f}_1 \overline{f}_2} \rightarrow \mathbf{0}$$

Autrement dit, la réduction modulo  $\mathbf{I}$  du morphisme  $\alpha(\overline{\mathbf{X}}) : \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \overline{\mathbf{A}}$  est **bijective**, *i.e.*  $\alpha(\overline{\mathbf{X}})$  est un relèvement de  $\overline{\mathbf{A}}$ .

Cela étant la complétion faible du morphisme  $\epsilon_\varphi$  donne la suite

$$\Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)^\dagger \xrightarrow{\epsilon_\varphi^\dagger} \Gamma(\overline{\mathbf{U}}_1; \mathcal{O}^\dagger) \oplus \Gamma(\overline{\mathbf{U}}_2; \mathcal{O}^\dagger) \xrightarrow{\delta_\varphi} \Gamma(\overline{\mathbf{U}}_1 \cap \overline{\mathbf{U}}_2; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \mathbf{0}$$

dont l'exactitude au terme central résulte de mêmes arguments que ceux de la fin de **(I)**.

On en déduit la factorisation  $\mathbf{id} = \epsilon_\varphi^\dagger \circ \iota$  :

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) & \xrightarrow{\iota} & \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)^\dagger \xrightarrow{\epsilon_\varphi^\dagger} \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger), \\
& & \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{id}} \uparrow
\end{array}$$

où  $\iota$  désigne le morphisme canonique d'une algèbre vers sa complétion faible, et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{A}^\dagger & \xrightarrow{\gamma^\dagger} & \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)^\dagger & \xrightarrow{\epsilon_\varphi^\dagger} & \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) \\
q \downarrow & & q \downarrow & & \alpha(\overline{\mathbf{X}}) \downarrow \\
\overline{\mathbf{A}} & \xrightarrow[\simeq]{\overline{\alpha(\overline{\mathbf{X}})^{-1}}} \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) & \xrightarrow[\simeq]{\iota} \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)^\dagger & \xrightarrow[\simeq]{\epsilon_\varphi^\dagger} \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger) & \xrightarrow[\simeq]{\overline{\alpha(\overline{\mathbf{X}})}} \overline{\mathbf{A}} \\
& & \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{id}} \uparrow & & 
\end{array}$$

où l'existence de  $\gamma^\dagger : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)^\dagger$  résulte de la lissité de  $\mathbf{A}^\dagger$ . Le morphisme recherché est donc  $\gamma = \epsilon_\varphi^\dagger \circ \gamma^\dagger$ , CQFD. ■

**2.1.9. Corollaire.** *Il y a équivalence pour un schéma †-adique entre être affine-lisse et être lisse et de réduction affine.*

**Preuve.** Clair d'après (c) de 2.1.8. ■

**Remarque.** La terminologie «*affine-lisse*» est désormais obsolète et sera remplacée par l'expression «*lisse et affine*».

**2.1.10. Corollaire.** *Pour tout schéma †-adique  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  de réduction  $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$  affine le morphisme  $\alpha(\bar{X}) : \Gamma(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \Gamma(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$  est **surjectif**.*

**Preuve.** Le corollaire est conséquence évidente de l'assertion suivante

• Soit  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  un schéma †-adique de réduction affine  $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$ . Notons  $\bar{A} := \Gamma(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$  et supposons qu'il existe  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r \in \bar{A}$  vérifiant  $1 = \bar{f}_1 + \dots + \bar{f}_r$  et tels que les sous-espaces annelés  $(D(\bar{f}_i); \mathcal{O}^\dagger|_{D(\bar{f}_i)})$  sont des schéma †-adiques affines. Soit  $\pi : \mathbf{B} \twoheadrightarrow \bar{A}$  une surjection de  $\mathbf{R}$ -algèbres où  $\mathbf{B}$  est lisse. Soit  $F_i \in \mathbf{B}$  vérifiant  $\pi(F_i) = \bar{f}_i$  et  $F_1 + \dots + F_r = 1$ . Il existe alors un morphisme de  $\mathbf{R}$ -algèbres  $\pi^\dagger : \mathbf{B}^\dagger \rightarrow \Gamma(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}^\dagger & \xrightarrow{\pi^\dagger} & \Gamma(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger) \\ q \downarrow & & \downarrow \alpha(\bar{X}) \\ \bar{\mathbf{B}} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \bar{A} = \Gamma(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}}) \end{array} \quad (\ddagger)$$

Lorsque le schéma †-adique  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  est lisse le morphisme  $\alpha(\bar{X})$  est un relèvement f.c.t.f. d'après 2.1.8, et l'existence de  $\pi^\dagger$  résulte alors de ce que  $\mathbf{B}^\dagger$  est très lisse.

Lorsque  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  n'est pas lisse on raisonne par récurrence sur le nombre  $r$  en remarquant que la partie (II) de la démonstration de 2.1.7 règle déjà le cas où  $r \leq 2$ . Dans le cas général, on a le recouvrement principal  $\bar{X} = \bar{V}_1 \cup \bar{V}_2$  avec  $\bar{V}_1 = D(\bar{f}_1)$  et  $\bar{V}_2 = D(1 - \bar{f}_1)$  et des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}^\dagger_{[F_1]} & \xrightarrow{\pi_1^\dagger} & \Gamma(\bar{V}_1; \mathcal{O}^\dagger) & & \mathbf{B}^\dagger_{[1-F_1]} & \xrightarrow{\pi_2^\dagger} & \Gamma(\bar{V}_2; \mathcal{O}^\dagger) \\ q \downarrow & & \downarrow \alpha(\bar{V}_1) & & q \downarrow & & \downarrow \alpha(\bar{V}_2) \\ \bar{\mathbf{B}}_{\bar{F}_1} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}_1} & & \bar{\mathbf{B}}_{1-\bar{F}_1} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \bar{\mathbf{A}}_{1-\bar{f}_1} \end{array}$$

Celui de gauche parce que  $(\bar{V}_1; \mathcal{O}^\dagger)$  est †-adique affine ce qui entraîne que  $\Gamma(\bar{V}_1; \mathcal{O}^\dagger)$  est f.c.t.f. et que  $\alpha(\bar{V}_1)$  est un relèvement. L'existence de  $\pi_1^\dagger$  résulte de ce que  $\mathbf{B}^\dagger_{[F_1]}$  est très lisse, c'est même un morphisme surjectif car de réduction surjective ([MW] th. 3.2).

Celui de droite par hypothèse de récurrence puisque  $D(\bar{V}_2)$  est recouvert par les  $(r-1)$  ouverts principaux  $D(\bar{f}_i(1 - \bar{f}_1)^{-1})$ ,  $i = 2, \dots, r$ , au-dessus desquels  $(\bar{X}; \mathcal{O}^\dagger)$  est affine. Contrairement à  $\pi_1^\dagger$ , le morphisme  $\pi_2^\dagger$  n'est pas *a priori* surjectif.

La composition des morphismes  $\pi_i^\dagger$  avec les restrictions  $\Gamma(\overline{V}_i; \mathcal{O}^\dagger) \rightarrow \Gamma(\overline{V}_{12}; \mathcal{O}^\dagger)$  induit des morphismes de  $\mathbf{B}_{[F_1(1-F_1)]}^\dagger$  qu'on note pareillement. On a, par réduction :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{B}_{[F_1(1-F_1)]}^\dagger & \xrightarrow[\simeq]{\psi} & \mathbf{B}_{[F_1(1-F_1)]}^\dagger \\ \pi_2^\dagger \downarrow & & \pi_1^\dagger \downarrow \\ \Gamma(\overline{V}_{12}; \mathcal{O}^\dagger) & \xrightarrow[\simeq]{\text{id}} & \Gamma(\overline{V}_{12}; \mathcal{O}^\dagger) \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{modulo } \mathbf{I}]{\text{réduction}} \left\{ \begin{array}{ccc} \overline{\mathbf{B}}_{\overline{F}_1(1-\overline{F}_1)} & \xrightarrow{\text{id}} & \overline{\mathbf{B}}_{\overline{F}_1(1-\overline{F}_1)} \\ \pi \downarrow & \oplus & \pi \downarrow \\ \overline{\mathbf{A}}_{\overline{f}_1(1-\overline{f}_1)} & \xrightarrow{\text{id}} & \overline{\mathbf{A}}_{\overline{f}_1(1-\overline{f}_1)} \end{array} \right\}$$

D'où l'existence d'un isomorphisme  $\psi : \mathbf{B}_{[F_1(1-F_1)]}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}_{[F_1(1-F_1)]}^\dagger$  trivial modulo  $\mathbf{I}$ , qui ferme commutativement le diagramme de gauche puisque  $\mathbf{B}_{[F_1(1-F_1)]}^\dagger$  est très lisse.

La suite est maintenant connue : on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}_{[1-F_1]}^\dagger \oplus \mathbf{B}_{[F_1]}^\dagger & \xrightarrow{\delta_\psi} & \mathbf{B}_{[F_1(1-F_1)]}^\dagger \\ \pi_2^\dagger \downarrow & & \pi_1^\dagger \downarrow \\ \Gamma(\overline{V}_2; \mathcal{O}^\dagger) \oplus \Gamma(\overline{V}_1; \mathcal{O}^\dagger) & \xrightarrow{\delta} & \Gamma(\overline{V}_{12}; \mathcal{O}^\dagger) \end{array} \quad (\mathcal{D})$$

induisant un morphisme d'algèbres  $\pi^\dagger : \ker(\delta_\psi) \rightarrow \ker(\delta)$ . Or,  $\ker(\delta_\psi) = \mathbf{B}^\dagger$  d'après 2.1.8 et  $\ker(\delta) = \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$ . Nous avons donc bien  $\pi^\dagger : \mathbf{B}^\dagger \rightarrow \Gamma(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$  rendant commutatif le diagramme  $(\ddagger)$  CQFD.  $\blacksquare$

**2.1.11. Remarque.** Le corollaire précédent suggère très fortement l'acyclicité cohomologique des faisceaux structuraux des schémas  $\dagger$ -adiques à réduction affine. Cela est clair dans le cas lisse maintenant qu'on a 2.1.8 car c'est ainsi des schémas  $\dagger$ -adiques affines d'après Meredith. On observera aussi que le diagramme  $(\mathcal{D})$  à la fin de la démonstration montre aussi que  $\delta$  est surjectif, car c'est ainsi de  $\delta_\psi$ . Autrement dit, la cohomologie de Čech de  $\mathcal{O}^\dagger$  relative à tout recouvrement principal à deux ouverts  $\{\overline{V}_1, \overline{V}_2\}$  tel que  $(\overline{V}_1; \mathcal{O}^\dagger|_{\overline{V}_1})$  est  $\dagger$ -adique affine, est triviale.

Comme les ouverts principaux "affinissants" constituent une base pour la topologie de  $\overline{\mathbf{X}}$ , cela semble suffire, compte tenu de la proposition 3.2.10, pour prouver le :

*Théorème.* Pour tout schéma  $\dagger$ -adique  $(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{O}^\dagger)$ , on a :

$$H^j(\overline{U}; \mathcal{O}^\dagger) = 0, \text{ pour tout } j > 0.$$

quel que soit l'ouvert affine  $\overline{U} \subseteq \overline{\mathbf{X}}$ .

Cette remarque est à vérifier, bien entendu !

**2.1.12. Un théorème de relèvement de morphismes.** Cette section est destinée à prouver un corollaire du théorème de relèvement de morphismes à source lisse ([Ar]-2.1.3) qu'on a utilisé dans une première démonstration du théorème 2.1.8. Ce corollaire étant plus fort que nécessaire nous l'avons remplacé dans la dernière version de la démonstra-

tion. Nous pensons que ce corollaire est néanmoins intéressant même s'il n'est pas utilisé dans ces notes.

**2.1.13. Rappel du théorème [Ar]-2.1.3.** *Étant donné un morphisme de  $\mathbf{R}$ -algèbres  $\bar{h}: \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ , et des relèvements  $p_A: A \rightarrow \bar{A}$  et  $p_B: B \rightarrow \bar{B}$ , où  $A$  est lisse, il existe une  $B$ -algèbre  $B_\varepsilon$  intersection complète et voisinage étale de  $I$  dans  $B$ , et un morphisme de  $\mathbf{R}$ -algèbres  $h_\varepsilon: A \rightarrow B_\varepsilon$  qui relève  $\bar{h}$ . En d'autres termes, on a un diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{h_\varepsilon}{\dashrightarrow} & B_\varepsilon \xleftarrow{\varepsilon} B \\ p_A \downarrow & & \searrow p_{B_\varepsilon} \downarrow p_B \\ \bar{A} & \xrightarrow{\bar{h}} & \bar{B} \end{array} \quad (\mathcal{R})$$

où  $\varepsilon: B \rightarrow B_\varepsilon$  désigne l'homomorphisme structural et où  $p_{B_\varepsilon}$  est l'homomorphisme induit par  $\varepsilon$  à partir de  $p_B$ .

Dans la proposition qui suit on se donne une  $\mathbf{R}$ -algèbre  $E$  et une  $E$ -algèbre  $A$ , dans un tel contexte la notation  $A^\dagger$  désigne la complétion faible de  $A$  relative au couple  $(\mathbf{R}, I)$  pour la structure de  $\mathbf{R}$ -module sur  $A$  induite par  $E$ .

**2.1.14. Proposition.** *Soit  $E$  une  $\mathbf{R}$ -algèbre de type fini. On se donne des  $E$ -algèbres de type fini  $A$  et  $B$  où  $A$  est  $E$ -lisse. Pour tout morphisme de  $E$ -algèbres  $\bar{h}: \bar{A} \rightarrow \bar{B}$  il existe un morphisme de  $E^\dagger$ -algèbres  $h^\dagger: A^\dagger \rightarrow B^\dagger$  rendant commutatif le diagramme suivant.*

$$\begin{array}{ccc} A^\dagger & \xrightarrow{h^\dagger} & B^\dagger \\ p_{A^\dagger} \downarrow & & \downarrow p_{B^\dagger} \\ \bar{A} & \xrightarrow{\bar{h}} & \bar{B} \end{array}$$

**Preuve.** En appliquant le théorème 2.1.13 on a :

- i) la  $E$ -algèbre  $B_\varepsilon$  et le morphisme étale de  $E$ -algèbres  $\varepsilon: B \rightarrow B_\varepsilon$ , voisinage étale de  $I$  dans  $B$ . Par complétion faible (relative à  $(\mathbf{R}, I)$ ) on a un **isomorphisme** de  $E^\dagger$ -algèbres  $\varepsilon^\dagger: B^\dagger \rightarrow B_\varepsilon^\dagger$  (cf. [Ar] prop. 3.2.5).
- ii) le morphisme de  $E$ -algèbres  $h: A \rightarrow B_\varepsilon$  de complétion faible: le morphisme de  $E^\dagger$ -algèbres  $h_\varepsilon^\dagger: A^\dagger \rightarrow B_\varepsilon^\dagger$ .

La commutativité du diagramme  $(\mathcal{R})$  étant préservée par complétion faible, la proposition résulte alors de prendre  $h^\dagger = (\varepsilon^\dagger)^{-1} \circ h_\varepsilon^\dagger$ .  $\blacksquare$

**2.1.15. Remarque.** Bien que le théorème 2.1.13 soit valable sous des hypothèses très faibles: l'anneau  $\mathbf{R}$  commutatif avec identité multiplicative et l'idéal  $I$  quelconque, la proposition 2.1.14 est démontrée à l'aide de la proposition 3.2.5 de [Ar] où  $\mathbf{R}$  est noëthérien et  $B$  est une  $\mathbf{R}$ -algèbre de type fini.

## § 3. Références bibliographiques

- [Ar] A. ARABIA. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes ; Prépublication (avril 2000).
- [A] M. ARTIN. On the solutions of analytic equations ; *Invent. Math.* **5** pp. 277–291 (1968).
- [B] S. BOSCH. A rigid analytic version of M. Artin’s theorem on analytic equations ; *Math. Ann.* **255**, n<sup>o</sup> 3, pp. 395–404 (1981).
- [BLR] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD. “*Néron Models*” ; *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* **3**. Folge–Band **21** (1980).
- [E] R. ELKIK. Solutions d’équations à coefficients dans un anneau hensélien ; *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, quatrième série, tome 6, pp. 553–604 (1973).
- [EGA<sub>4,1</sub>] A. GROTHENDIECK. “*Éléments de géométrie algébrique-IV*” ; Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. Première partie. Publications mathématiques de l’I.H.E.S. **20** (1964).
- [SGA<sub>2</sub>] A. GROTHENDIECK. “*Cohomologie locale des faisceaux cohérents et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*” ; Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie 1962. *Advanced studies in pure mathematics*. Vol. 2. North-Holland – Masson (1968).
- [Go] R. GODEMENT. “*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*” ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, XIII. *Actualités Scientifiques et Industrielles*, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).
- [Gro] A. GROTHENDIECK. Géométrie formelle et géométrie algébrique ; Séminaire Bourbaki, exposé **182** (Mai 1959).
- [McL] S. MAC LANE. “*Categories for the working mathematician*” ; Second edition. *Graduate Texts in Mathematics*, 5. Springer-Verlag (1998).
- [M] D. MEREDITH. Weak formal schemes ; *Nagoya Math. Journal*. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).
- [MW] P. MONSKY, G. WASHNITZER. Formal cohomology : I ; *Ann. of Math. (2)* **88**, pp. 181–217 (1968).
- [vdP] M. VAN DER PUT. The cohomology of Monsky and Washnitzer ; *Société Mathématique de France*. Deuxième série, Mémoire n<sup>o</sup> 23, pp. 33–60 (1986).
- [Ser] J.-P. SERRE. Exemples de variétés projectives en caractéristique  $p$  non relevables en caractéristique zéro ; *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **47**, pp. 108–109 (1961).
- [SGA1] “*Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*” ; Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61. *Lecture Notes in Mathematics* **224**. Springer-Verlag (1971).

—————×—————