

Produits fibrés dans la catégorie des schémas \dagger -adiques

Alberto Arabia^{*}

Résumé. On démontre les deux assertions suivantes

- La catégorie des schémas \dagger -adiques localement de type fini possède des produits fibrés.
- Pour un schéma \dagger -adique localement de type fini, il y a équivalence entre : « être de réduction affine » et « être \dagger -adique affine de type fini. »

Table des matières

§0. Résumé	2
§1. Généralités sur le produit fibré	2
1.1. Catégorie \mathcal{C}/S	2
1.2. Foncteur représentable	2
1.3. Produits	3
1.4. Produits fibrés d'ensembles	3
1.5. Produits fibrés de foncteurs d'ensembles	3
1.6. Produits fibrés dans une catégorie générale	4
1.7. Produits fibrés dans la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{C}')$	4
1.8. Morphisme représentable de foncteurs d'ensembles	4
1.9. Critère de représentabilité dans les catégories d'espaces annelés	5
§2. Produits fibrés de schémas \dagger -adiques affines	6
2.1. Le foncteur de complétion I -adique faible	6
2.2. Catégories $\mathbf{Alg}_{fc}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et $\mathbf{Alg}_{fctf}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$	6
2.3. Quelques propriétés des algèbres faiblement complètes	7
2.4. Schémas \dagger -adiques affines	7
2.4.1. Le foncteur $(_)^\sim$	7
2.4.4. Espaces localement annelés	8
2.4.7. Schémas \dagger -adiques affines	9
2.4.8. Le cas noëthérien	9
2.5. Catégorie des schémas \dagger -adiques	11
2.5.1. Schémas \dagger -adiques	11
2.5.2. Réduction d'un schéma \dagger -adique	11
2.5.3. Terminologie	11
§3. Produits fibrés de schémas \dagger -adiques	11
3.1. Un complément sur l'affinité des schémas \dagger -adiques de réduction affine	11
3.1.3. Un critère d'affinité	12
3.2. Isomorphismes de faisceaux sur $\mathbf{Sch}_{tf}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$	14
3.2.1. Faisceaux sur $\mathbf{Sch}_{tf}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$	14
§4. Affinité des schémas \dagger -adiques de réduction affine	16
§5. Références bibliographiques	19

^{*} CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
 Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
 UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
 175, rue du Chevaleret, 9^e étage, bureau 9D11, 75013 Paris.
 Adresse électronique : arabia@math.jussieu.fr

§0. Résumé

On complète l'étude des schémas \dagger -adiques de réduction affine de type fini ($[\text{Ar}_3]$) avec :

Théorème 4.1. *Pour un schéma \dagger -adique localement de type fini il y a équivalence entre :*

- a) *Être de réduction affine (de type fini).*
- b) *Être \dagger -adique affine de type fini.*

Ce résultat, ou plutôt sa version affaiblie 3.1.3, constitue le point clé dans la preuve des théorèmes suivants clairement inspirés de leurs analogues en théorie des schémas.

Théorème 3.2.3-(a). *Pour tout schéma \dagger -adique localement de type fini $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ et tout schéma \dagger -adique affine de type fini $(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ l'application $(f, f^\#) \mapsto \Gamma(\mathbf{Y}; f^\#)$ est un isomorphisme naturel de $\text{Mor}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ sur $\text{Homom}_{\mathbf{R}}(\Gamma(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}), \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}))$.*

Théorème 3.2.4. *La catégorie des schémas \dagger -adiques localement de type fini possède des produits fibrés.*

§1. Généralités sur le produit fibré

Cette section peut être ignorée en première lecture. On y trouve les définitions et des résultats élémentaires sans démonstration nécessaires à la compréhension de la proposition 1.9.1 (p. 5) qui reformule le critère de représentabilité de foncteurs sur la catégorie des espaces annelés de $[\text{EGA}_1]$ (prop. §4.5.4).

On désigne par \mathcal{C} une catégorie. Le mot “foncteur” sans qualificatif est synonyme de “foncteur contravariant”. En parlant de foncteurs, le mot “morphisme” est synonyme de “transformation naturelle”.

1.1 Catégorie $\mathcal{C}/_{\mathcal{S}}$

Pour tout objet \mathcal{S} de \mathcal{C} , on note $\mathcal{C}/_{\mathcal{S}}$ la catégorie dont les objets sont les morphismes de \mathcal{C} de but \mathcal{S} . Si $\pi_1 : \mathbf{X}_1 \rightarrow \mathcal{S}$ et $\pi_2 : \mathbf{X}_2 \rightarrow \mathcal{S}$ sont des objets de $\mathcal{C}/_{\mathcal{S}}$, l'ensemble $\text{Mor}_{\mathcal{C}/_{\mathcal{S}}}(\pi_1, \pi_2)$ est le sous-ensemble de $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ des morphismes $\phi : \mathbf{X}_1 \rightarrow \mathbf{X}_2$ tels que $\pi_1 = \pi_2 \circ \phi$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_1 & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{X}_2 \\ \pi_1 \downarrow & \oplus & \downarrow \pi_2 \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{S}}} & \mathcal{S} \end{array}$$

1.2 Foncteur représentable

Un foncteur contravariant $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ est dit «représentable» s'il existe $\mathbf{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et un isomorphisme de foncteurs $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{X}) \simeq \mathbf{F}(-)$.

1.2.1. Lemme d'Yoneda. *La correspondance qui associe à un morphisme de foncteurs $\Phi(-) : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{F}(-)$ l'élément $\Phi(\mathbf{X})(\text{id}_{\mathbf{X}}) \in \mathbf{F}(\mathbf{X})$ est une bijection sur l'ensemble $\mathbf{F}(\mathbf{X})$. La correspondance réciproque associe à $x \in \mathbf{F}(\mathbf{X})$ et $\mathbf{Y} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ l'application $\Phi(\mathbf{Y}) : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{Y})$, $f \mapsto \mathbf{F}(f)(x)$.*

Lorsque \mathbf{F} est représentable, les couples $(\mathbf{X}, x \in \mathbf{F}(\mathbf{X}))$ donnés par le lemme d'Yoneda sont dits «représenter \mathbf{F} ».

1.2.2. Lemme. *Les couples représentant un même foncteur sont deux à deux **canoniquement** isomorphes.*

1.3 Produits

Étant donnés deux objets \mathbf{X} et \mathbf{Y} de \mathcal{C} , on dit que « \mathbf{X} et \mathbf{Y} admettent un produit dans \mathcal{C} » lorsque le foncteur $\mathbf{F}(_) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(_, \mathbf{X}) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(_, \mathbf{Y}) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ est représentable. Dans ce cas, on note $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ et $p_X : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ et $p_Y : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$ respectivement l'objet et l'élément de $\mathbf{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ qui caractérisent \mathbf{F} .

On dira que «*les produits existent dans \mathcal{C}* » ou bien que « \mathcal{C} admet des produits» lorsque chaque paire d'objets de \mathcal{C} admet un produit dans \mathcal{C} .

1.4 Produits fibrés d'ensembles

Étant données deux applications d'ensembles $\pi_X : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{S}$ et $\pi_Y : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{S}$ on définit l'ensemble $\mathbf{X} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{Y}$ et l'application $\pi_{\mathbf{X} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{Y}} : \mathbf{X} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{S}$ par :

$$\mathbf{X} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{Y} =: \{(x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \mid \pi_X(x) = \pi_Y(y)\} \xrightarrow{\pi_{\mathbf{X} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{Y}}} \mathbf{S}$$

$$(x, y) \longmapsto \pi_X(x)$$

On note $p_X : \mathbf{X} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ et $p_Y : \mathbf{X} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$ les restrictions des projections canoniques de $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. On a le diagramme «cartésien»

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{Y} & \xrightarrow{p_Y} & \mathbf{Y} \\ p_X \downarrow & \square & \downarrow \pi_Y \\ \mathbf{X} & \xrightarrow{\pi_X} & \mathbf{S} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (x, y) & \xrightarrow{p_Y} & y \\ p_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ x & \xrightarrow{\pi_X} & \pi_X(x) = \pi_Y(y) \end{array}$$

Le couple $(\mathbf{X} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{Y}, (p_X, p_Y))$ représente le foncteur $\text{Mor}_{\mathbf{Ens}/\mathbf{S}}(-, \pi_X) \times \text{Mor}_{\mathbf{Ens}/\mathbf{S}}(-, \pi_Y)$, c'est le «*produit fibré de \mathbf{X} et \mathbf{Y} au-dessus de \mathbf{S} (relativement à π_X et π_Y)*».

1.4.1. Lemme. *Étant donnés deux diagrammes commutatifs d'applications d'ensembles :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_1 & \xrightarrow{f_X} & \mathbf{X}_2 \\ \pi_{X_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{X_2} \\ \mathbf{S}_1 & \xrightarrow{f_S} & \mathbf{S}_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Y}_1 & \xrightarrow{f_Y} & \mathbf{Y}_2 \\ \pi_{Y_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{Y_2} \\ \mathbf{S}_1 & \xrightarrow{f_S} & \mathbf{S}_2 \end{array}$$

il existe une et une unique application $f_X \times_{f_S} f_Y : \mathbf{X}_1 \times_{\mathbf{S}_1} \mathbf{Y}_1 \rightarrow \mathbf{X}_2 \times_{\mathbf{S}_2} \mathbf{Y}_2$ rendant commutatifs les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_1 \times_{\mathbf{S}_1} \mathbf{Y}_1 & \xrightarrow{f_X \times_{f_S} f_Y} & \mathbf{X}_2 \times_{\mathbf{S}_2} \mathbf{Y}_2 \\ p_{X_1} \downarrow & & \downarrow p_{X_2} \\ \mathbf{X}_1 & \xrightarrow{f_X} & \mathbf{X}_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{X}_1 \times_{\mathbf{S}_1} \mathbf{Y}_1 & \xrightarrow{f_X \times_{f_S} f_Y} & \mathbf{X}_2 \times_{\mathbf{S}_2} \mathbf{Y}_2 \\ p_{Y_1} \downarrow & & \downarrow p_{Y_2} \\ \mathbf{Y}_1 & \xrightarrow{f_Y} & \mathbf{Y}_2 \end{array}$$

1.5 Produits fibrés de foncteurs d'ensembles

Étant donnés trois foncteurs contravariants $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ et deux morphismes de

foncteurs $\pi_F : F \rightarrow H$ et $\pi_G : G \rightarrow H$ la correspondance :

$$\text{Ob}(\mathcal{C}) \ni X \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} F(X) \times_{H(X)} G(X) & \xrightarrow{p_G(X)} & G(X) \\ p_F(X) \downarrow & & \downarrow \pi_G(X) \\ F(X) & \xrightarrow{\pi_F(X)} & H(X) \end{array} \right)$$

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \ni f \rightsquigarrow (F(f) \times_{H(f)} G(f), F(f), G(f), H(f))$$

où $F(f) \times_{H(f)} G(f)$ désigne le morphisme donné par le lemme 1.4.1, est une correspondance fonctorielle.

Le foncteur $(-) \rightsquigarrow F(-) \times_{H(-)} G(-)$ est le «*produit fibré de F et G au-dessus de H (relativement à π_F et π_G)*».

1.5.1. Lemme. *Étant donnés trois foncteurs d'ensembles F, G, H représentés par des objets X, Y, S respectivement. Étant donnés deux morphismes $\pi_F : F \rightarrow H$ et $\pi_G : G \rightarrow H$ représentés par des morphismes $\pi_X : X \rightarrow S$ et $\pi_Y : Y \rightarrow S$. Le produit fibré de foncteurs $F \times_H G$ relatif à π_F et π_G est représentable si et seulement si le produit fibré $X \times_S Y$ relatif à π_X et π_Y existe.*

1.6 Produits fibrés dans une catégorie générale

Définition. On dit que «*les produits fibrés existent dans la catégorie \mathcal{C}* » lorsque les produits existent dans les catégories $\mathcal{C}/_S$ pour tout objet $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Étant donnés deux morphismes $\pi_X : X \rightarrow S$ et $\pi_Y : Y \rightarrow S$ dans \mathcal{C} , on a les applications naturelles

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X) & \xrightarrow{\pi_X(-)} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, S) \\ f & \longmapsto & \pi_X \circ f \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, Y) & \xrightarrow{\pi_Y(-)} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, S) \\ f & \longmapsto & \pi_Y \circ f \end{array}$$

Posons $F(-) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X)$, $G(-) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ et $H(-) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, S)$. L'existence des produits fibrés dans \mathcal{C} équivaut alors à la représentabilité du foncteur $F \times_H G$, quels que soient π_X et π_Y (cf. 1.3).

1.7 Produits fibrés dans la catégorie $\text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{C}')$

On note ainsi la catégorie des foncteurs contravariants de \mathcal{C} vers \mathcal{C}' . Lorsque la catégorie \mathcal{C}' admet des produits fibrés on peut, de manière analogue à 1.4, définir pour des foncteurs $F, G, B : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}'$ et deux morphismes $\pi_F : F \rightarrow B$ et $\pi_G : G \rightarrow B$, «*le produit fibré de F et G au-dessus de B (relativement à π_F et π_G)*». On dit ([EGA₁] 0 §1.7.2, p. 45) que les produits fibrés existent dans la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{C}')$.

1.8 Morphisme représentable de foncteurs d'ensembles

Soient $F, G : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ deux foncteurs contravariants. Un morphisme $f : F \rightarrow G$ est dit «*représentable*» si pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout morphisme $u : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X) \rightarrow G$, le foncteur $F \times_G \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X)$ est représentable.

Dans ce cas, si on fixe un isomorphisme $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{Y}) \simeq \mathbf{F} \times_{\mathbf{G}} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{X})$, le morphisme canonique de foncteurs $\mathbf{F} \times_{\mathbf{G}} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{X}) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{X})$ est déterminé par un unique morphisme $\phi_{\mathbf{X}} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$.

Soit \mathcal{P} une classe de morphismes de \mathcal{C} qui soit :

- stable par composition à droite ou à gauche par des isomorphismes ;
- stable par changement de base dans \mathcal{C} .

Définition. Un morphisme de foncteurs d'ensembles est dit «représentable par un morphisme de \mathcal{P} » si dans la correspondance $\mathbf{X} \rightsquigarrow \phi_{\mathbf{X}}$, les morphismes $\phi_{\mathbf{X}}$ appartiennent tous à \mathcal{P} .

1.8.1. Proposition. ([EGA₁] prop. 0.1.7.5) Soient $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ des foncteurs contravariants de \mathcal{C} vers **Ens**.

- a) Tout isomorphisme de foncteurs est représentable.
- b) Si $f : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ et $g : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ sont représentables, il en est de même de $g \circ f$.
- c) Si $f : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ est représentable, il en est de même de tout morphisme $f_{(\mathbf{H})}$ déduit de f par changement de base $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}$.

1.9 Critère de représentabilité dans les catégories d'espaces annelés

Le critère de représentabilité de foncteurs sur la catégorie des espaces annelés $\mathbf{Esp}\text{-ann}/\mathcal{S}$ de [EGA₁] (prop. 0.4.5.4, p. 103) est plus généralement valable sur n'importe quelle sous-catégorie pleine \mathcal{C} de $\mathbf{Esp}\text{-ann}/\mathcal{S}$ vérifiant les deux propriétés de stabilité suivantes :

- Recollement : Tout \mathcal{S} -espace localement isomorphe à un objet \mathcal{C} est dans \mathcal{C} .
- Restriction ouverte : Le \mathcal{S} -espace induit sur un ouvert d'un objet de \mathcal{C} est dans \mathcal{C} .

Voici l'énoncé du critère en question.

1.9.1. Proposition. Soient \mathcal{C} une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Esp}\text{-ann}/\mathcal{S}$ stable par recollements et restrictions ouvertes, $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur contravariant, $\{\mathbf{F}_i\}_{i \in I}$ une famille de sous-foncteurs de \mathbf{F} . On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :

- a) Chacun des morphismes fonctoriels canoniques $u_i : \mathbf{F}_i \rightarrow \mathbf{F}$ est représentable par une immersion ouverte.
- b) Pour tout $\mathbf{X} \in \mathcal{C}$, l'application $U \mapsto \mathbf{F}(U)$, où U parcourt l'ensemble des \mathcal{S} -espaces annelés induits sur les ouverts de \mathbf{X} , est un faisceau d'ensembles.
- c) Pour tout $\mathbf{Z} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout morphisme $\text{Mor}(-, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{F}$, si \mathbf{Z}_i représente $\mathbf{F}_i \times_{\mathbf{F}} \text{Mor}(-, \mathbf{Z})$ et si U_i est l'image de \mathbf{Z}_i dans \mathbf{Z} , alors les U_i forment un recouvrement de \mathbf{Z} .
- d) Chaque \mathbf{F}_i est représentable par un objet $\mathbf{X}_i \in \text{Ob}(\mathcal{C})$

Dans ces conditions, \mathbf{F} est représentable par un objet \mathbf{X} de \mathcal{C} , les morphismes $\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}$ sont des immersions ouvertes et les images des espaces sous-jacents aux \mathbf{X}_i forment un recouvrement ouvert de \mathbf{X} .

§2. Produits fibrés de schémas \dagger -adiques affines

Les principaux résultats de cette section sont les propositions 2.4.5 et 2.4.10. On y montre d'une part que les schémas \dagger -adiques introduits dans [M] sont des espaces *localement* annelés et d'autre part que le foncteur qui associe à une algèbre faiblement complète de type fini son schéma \dagger -adique affine est un foncteur *pleinement fidèle* dans la catégorie des espaces localement annelés. Deux résultats inspirés par leurs analogues en théorie des schémas.

2.1 Le foncteur de complétion I -adique faible

On note $(\mathbf{R}; I)$ la donnée d'un anneau commutatif \mathbf{R} (non nécessairement noethérien) et d'un idéal $I \subseteq \mathbf{R}$. Dans [MW], Monsky et Washnitzer associent à une \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} une certaine sous-algèbre \mathbf{A}^\dagger du complété séparé I -adique $\widehat{\mathbf{A}}$ qu'ils appellent la « *complétion faible de \mathbf{A}* ». Plus précisément \mathbf{A}^\dagger est l'ensemble des éléments z de $\widehat{\mathbf{A}}$ tels qu'il existe un ensemble fini $\{a_1, \dots, a_r\} \subseteq \mathbf{A}$ et une famille de polynômes $p_n \in I^n \mathbf{R}[X_1, \dots, X_r]$ vérifiant $\deg(p_n) = O(n)$ et tels que $z = \sum_{n \geq 0} p_n(a_1, \dots, a_r)$. Le morphisme canonique de \mathbf{A} vers $\widehat{\mathbf{A}}$ se factorise à travers \mathbf{A}^\dagger en un morphisme noté $\iota(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$. Les propriétés suivantes sont élémentaires :

- Si I est nilpotent dans \mathbf{A} , on a $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$.
- Pour tout morphisme de \mathbf{R} -algèbres $\alpha : \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_2$, il existe un et un seul morphisme de \mathbf{R} -algèbres $\alpha^\dagger : \mathbf{A}_1^\dagger \rightarrow \mathbf{A}_2^\dagger$ tel que $\alpha^\dagger \circ \iota(\mathbf{A}_1) = \iota(\mathbf{A}_2) \circ \alpha$.

La correspondance ainsi définie $\mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{A}^\dagger$, $\alpha \rightsquigarrow \alpha^\dagger$ est fonctorielle et $\iota(_) : (_) \rightarrow (_)^\dagger$ est un morphisme de foncteurs. Une \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} est dite « *faiblement complète (pour la topologie I -adique)* », f.c. en bref, lorsque $\iota(\mathbf{A})$ est bijectif, on écrit alors $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$. On a $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{\dagger\dagger}$, pour toute \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} ([MW]).

Une \mathbf{R} -algèbre f.c. est dite « *faiblement complète de type fini* », f.c.t.f. en bref, si elle est l'image homomorphique de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_m]^\dagger$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

Notation. Dans la suite une notation de la forme $(_)^\dagger$ rappellera que l'objet ainsi noté est faiblement complet pour la topologie I -adique.

2.2 Catégories $\mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; I)$ et $\mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; I)$

On notera $\mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; I)$ (resp. $\mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; I)$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Alg}(\mathbf{R})$ dont les objets sont les algèbres f.c. (resp. f.c.t.f.). La proposition suivante est une reformulation de plusieurs résultats de [MW].

2.2.1. Proposition

a) Le foncteur $(_)^\dagger : \mathbf{Alg}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; I)$ est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion de $\mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; I)$ dans $\mathbf{Alg}(\mathbf{R})$. Autrement dit, le morphisme fonctoriel :

$$\begin{array}{ccc} \text{Homom}_{\mathbf{R}^\dagger}(\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{B}^\dagger) & \longrightarrow & \text{Homom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}^\dagger) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha \circ \iota(\mathbf{A}) \end{array}$$

est bijectif pour tous $\mathbf{A} \in \mathbf{Alg}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; I)$.

b) Soit \mathcal{C} l'une des catégories $\mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ où $\mathbf{Alg}_{\text{ictf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. Pour tous $\mathbf{B}^\dagger, \mathbf{A}_1^\dagger, \mathbf{A}_2^\dagger \in \mathcal{C}$ et pour tous morphismes de \mathbf{R} -algèbres $\alpha_i : \mathbf{B}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}_i^\dagger$, munissons les algèbres \mathbf{A}_i^\dagger des structures de \mathbf{B}^\dagger -algèbres définies par les α_i . Alors, le foncteur covariant

$$\text{Homom}_{\mathbf{B}^\dagger}(\mathbf{A}_1^\dagger, -) \times \text{Homom}_{\mathbf{B}^\dagger}(\mathbf{A}_2^\dagger, -) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$$

est représentable par $(\mathbf{A}_1^\dagger \otimes_{\mathbf{B}^\dagger} \mathbf{A}_2^\dagger)^\dagger$ et par les morphismes $\eta_i : \mathbf{A}_i^\dagger \rightarrow (\mathbf{A}_1^\dagger \otimes_{\mathbf{B}^\dagger} \mathbf{A}_2^\dagger)^\dagger$, déterminés par les égalités $\eta_1(a_1) = a_1 \otimes 1$ et $\eta_2(a_2) = 1 \otimes a_2$.

2.3 Quelques propriétés des algèbres faiblement complètes

2.3.1. Proposition ([MW]). L'idéal \mathbf{IA}^\dagger est contenu dans le radical de \mathbf{A}^\dagger .

Preuve. En effet, un élément $z \in \mathbf{IA}^\dagger$ admet une écriture de la forme $z = h_1 a_1 + \cdots + h_\ell a_\ell$ avec $h_i \in \mathbf{I}$ et $a_i \in \mathbf{A}^\dagger$ et la série $\sum_{m \geq 0} z^m = \sum_{m \geq 0} (h_1 a_1 + \cdots + h_\ell a_\ell)^m$ définit bien un élément \mathbf{A}^\dagger . Par conséquent, $1 - z$ est inversible dans \mathbf{A}^\dagger . L'idéal \mathbf{IA}^\dagger est bien contenu dans tout idéal maximal de \mathbf{A}^\dagger donc dans son radical. ■

2.3.2. Lemme. Soit $(\mathfrak{A}, \preccurlyeq)$ un ensemble muni d'un ordre partiel filtrant supérieurement. Soit $\{\varphi_\beta^\alpha : \mathbf{A}_\alpha^\dagger \rightarrow \mathbf{A}_\beta^\dagger \mid \alpha \preccurlyeq \beta \in \mathfrak{A}\}$ un système inductif dans $\mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ de limite $\mathbf{A}_\infty := \varinjlim_{\mathfrak{A}} \mathbf{A}_\alpha^\dagger$. Alors, l'idéal \mathbf{IA}_∞ est contenu dans le radical de \mathbf{A}_∞ .

Preuve. Un élément $x \in \mathbf{IA}_\infty$ s'exprime comme somme finie $x = \sum_i h_i a_i$ avec $h_i \in \mathbf{I}$ et $a_i \in \varinjlim_{\mathfrak{A}} \mathbf{A}_\alpha$. Comme la limite est filtrante, il existe α assez grand tel que les a_i proviennent tous des $\mathbf{A}_{\alpha, i}^\dagger$; mais $1 + \sum h_i a_{\alpha, i}$ est inversible dans $\mathbf{A}_\alpha^\dagger$ (2.3.1) et alors $1 + x$ est inversible dans \mathbf{A}_∞ . ■

2.4 Schémas \dagger -adiques affines

Notation. Pour $\mathbf{A} \in \mathbf{Alg}(\mathbf{R})$ on notera $\overline{\mathbf{A}} := \mathbf{A}/\mathbf{IA}$ et $\nu : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \overline{\mathbf{A}}$ la surjection canonique. Pour $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ on notera aussi $\overline{\mathbf{A}^\dagger} := \mathbf{A}^\dagger$ et donc $\nu : \mathbf{A}^\dagger \twoheadrightarrow \overline{\mathbf{A}^\dagger}$ la surjection canonique.

2.4.1. Le foncteur $(-)^{\sim}$. Étant donnés $f, g \in \mathbf{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ tels que $f = g \pmod{\mathbf{I}}$, l'élément f est inversible dans \mathbf{B}^\dagger si et seulement si g l'est. De cette observation élémentaire il suit que si $f, g \in \mathbf{A}^\dagger$ sont tels que $\nu(f) = \nu(g)$ alors $((\mathbf{A}^\dagger)_f)^\dagger = ((\mathbf{A}^\dagger)_g)^\dagger$, l'algèbre $\mathbf{A}^\dagger_{[f]} := ((\mathbf{A}^\dagger)_f)^\dagger$ ne dépend donc que de $\nu(f) \in \overline{\mathbf{A}^\dagger}$. On notera $\gamma_{[f]} : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_{[f]}$ la composée du morphisme de localisation $\mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}_f^\dagger$ suivi de $\iota(\mathbf{A}_f^\dagger) : \mathbf{A}_f^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_{[f]}$. La correspondance

$$D(\overline{f}) \rightsquigarrow \mathbf{A}^\dagger_{[f]}, \quad (D(g) \supseteq D(fg)) \rightsquigarrow (\mathbf{A}^\dagger_{[g]} \xrightarrow{\gamma_{[f]}} \mathbf{A}^\dagger_{[fg]})$$

définit un préfaisceau sur la catégorie des ouverts principaux de $\text{Spec}(\overline{\mathbf{A}})$. Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger$ est, par définition, le faisceau sur $\text{Spec}(\overline{\mathbf{A}})$ associé à ce préfaisceau. Le couple $(\mathbf{A}^\dagger)^\sim := (\text{Spec}(\overline{\mathbf{A}^\dagger}); \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger)$ est un espace topologique annelé.

Soient $\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et $\alpha : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$ un morphisme de \mathbf{R} -algèbres. Pour chaque $f \in \mathbf{A}^\dagger$ il existe un et un seul morphisme $\alpha_{[f]} : \mathbf{A}^\dagger_{[f]} \rightarrow \mathbf{B}^\dagger_{[\alpha(f)]}$, « la localisation \dagger -adique

de α en f », rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^\dagger & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{B}^\dagger \\ \gamma_{[f]} \downarrow & & \downarrow \gamma_{[\alpha(f)]} \\ \mathbf{A}^\dagger_{[f]} & \xrightarrow{\alpha_{[f]}} & \mathbf{B}^\dagger_{[\alpha(f)]} \end{array}$$

On en déduit, comme dans la théorie des schémas classique, un morphisme canonique d'espaces annelés $(\alpha)^\sim : (\mathbf{B}^\dagger)^\sim \rightarrow (\mathbf{A}^\dagger)^\sim$.

La correspondance $(-)^\sim : \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Esp-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim}, \mathbf{A}^\dagger \rightsquigarrow (\mathbf{A}^\dagger)^\sim, \alpha \rightsquigarrow (\alpha)^\sim$, est fonctorielle et contravariante de $\mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ vers la catégorie $\mathbf{Esp-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim}$ des espaces annelés au-dessus de $(\mathbf{R}^\dagger)^\sim$.

2.4.2. Lorsque \mathbf{I} est un idéal de type fini de générateurs $\{x_1, \dots, x_\ell\}$, un polynôme $p \in \mathbf{I}^m[X_1, \dots, X_m]$ avec $m > 0$, s'écrit aussi $p = \sum_{i=1}^\ell x_i p_i$ avec $p_i \in \mathbf{I}^{m-1}[X_1, \dots, X_m]$. Il s'ensuit que si $\mathbf{A} \in \mathbf{Alg}(\mathbf{R})$, l'idéal $\mathbf{I}\mathbf{A}^\dagger$ est celui des éléments de \mathbf{A}^\dagger qui s'expriment sous la forme $\sum_{m>1} p_m(a_1, \dots, a_\ell)$ avec $p_m \in \mathbf{I}^m[X_1, \dots, X_\ell]$. Le lemme suivant découle aussitôt de cette remarque.

2.4.3. Lemme. *Supposons l'idéal \mathbf{I} de type fini et soit $\mathbf{A} \in \mathbf{Alg}(\mathbf{R})$.*

- Le morphisme canonique $\overline{\mathbf{A}}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_{[f]}$ est bijectif pour tout $f \in \mathbf{A}$.
- Si chaque $x \in \mathbf{I}$ est nilpotent dans \mathbf{A} , l'espace $(\mathbf{A})^\sim$ est le schéma affine associé à \mathbf{A} .
- Soit $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(\overline{\mathbf{A}})$. La réduction modulo \mathbf{I} de l'algèbre $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger, \mathfrak{P}}^\dagger$, fibre de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger$ en \mathfrak{P} , est l'anneau local $\overline{\mathbf{A}}_{\mathfrak{P}}$. Le morphisme naturel $\nu_{\mathfrak{P}} : \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger, \mathfrak{P}}^\dagger \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{A}}, \mathfrak{P}}^\dagger$ est surjectif et c'est un isomorphisme modulo \mathbf{I} , i.e. c'est relèvement.

2.4.4. Espaces localement annelés. ([EGA₁]) Un espace topologique annelé est un couple $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ formé d'un espace topologique \mathbf{X} et d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ sur \mathbf{X} . Un morphisme de $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ vers $(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ est un couple $(\alpha, \alpha^\#)$ où $\alpha : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ est une application continue et $\alpha^\# : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \alpha_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux. Ces données constituent la « catégorie d'espaces annelés », notée **Esp-ann**.

Un espace annelé $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est dit « localement annelé » lorsque les fibres $\mathcal{O}_{\mathbf{X}, x}$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ sont des anneaux locaux. La catégorie **Loc-ann** des espaces localement annelés est la sous-catégorie de **Esp-ann** dont les objets sont les espaces localement annelés et les morphismes sont les morphismes d'espaces annelés $(\alpha, \alpha^\#) : (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ tels que les applications induites $\alpha_x^\# : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}, \alpha(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}, x}$ sont des homomorphismes locaux d'anneaux locaux (on appelle ainsi tout homomorphisme entre deux anneaux locaux $\eta : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ tel que l'image inverse par η de l'idéal maximal de \mathbf{B} est l'idéal maximal de \mathbf{A}).

2.4.5. Proposition. *On suppose \mathbf{I} de type fini. Soient $\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.*

- L'espace annelé $(\mathbf{A}^\dagger)^\sim = (\text{Spec}(\overline{\mathbf{A}}); \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger)$ est localement annelé.
- Pour tout morphisme de \mathbf{R} -algèbres $\eta : \mathbf{B}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$, le morphisme $(\eta)^\sim : (\mathbf{A}^\dagger)^\sim \rightarrow (\mathbf{B}^\dagger)^\sim$ est un morphisme d'espaces localement annelés. Autrement dit, le foncteur $(-)^\sim$ (cf. 2.4.1) est à valeurs dans catégorie $(\mathbf{Loc-ann})/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim}$, soit

$$(-)^\sim : \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Loc-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim}.$$

Preuve

a) En effet, pour $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(\overline{\mathbf{A}})$ on a $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger, \mathfrak{P}}^\dagger = \varinjlim_{\overline{f}} \mathbf{A}^\dagger_{[f]}$, où \overline{f} appartient au système multiplicatif $\overline{\mathbf{A}} \setminus \mathfrak{P}$. Pour chaque $\overline{f} \notin \mathfrak{P}$, l'idéal engendré par \mathbf{I} dans $\mathbf{A}^\dagger_{[f]}$ est contenu dans le radical de $\mathbf{A}^\dagger_{[f]}$ (2.3.1) et comme cette propriété est préservée par passage à la limite inductive (2.3.2), l'algèbre $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger, \mathfrak{P}}^\dagger$ la vérifie aussi. L'anneau $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger, \mathfrak{P}}^\dagger$ est alors local si et seulement si sa réduction modulo \mathbf{I} l'est, ce qui est bien le cas (2.4.3-c).

b) Pour $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(\overline{\mathbf{A}})$ considérons le diagramme d'anneaux locaux :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbf{B}^\dagger, \eta^{-1}\mathfrak{P}}^\dagger & \xrightarrow{\eta_{\mathfrak{P}}^\#} & \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger, \mathfrak{P}}^\dagger \\ \nu_{\eta^{-1}\mathfrak{P}} \downarrow & & \downarrow \nu_{\mathfrak{P}} \\ \overline{\mathbf{B}}_{\eta^{-1}\mathfrak{P}} & \xrightarrow{\overline{\eta}_{\mathfrak{P}}^\#} & \overline{\mathbf{A}}_{\mathfrak{P}} \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont ceux du lemme 2.4.3-c ; ils sont donc *locaux*, de même aussi, mais pour des raisons évidentes, que le morphisme $\overline{\eta}_{\mathfrak{P}}^\#$. On conclut alors sans difficulté que $\eta_{\mathfrak{P}}^\#$ est lui aussi local. ■

2.4.6. Notation et remarque. Pour tout espace annelé $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ au-dessus de $(\mathbf{R})^\sim$ on notera $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}}$ le faisceau d'algèbres engendré par le préfaisceau $\mathbf{U} \rightsquigarrow \Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}) / \mathbf{I} \cdot \Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger})$. Notons $\nu : \mathcal{O}_{\mathbf{X}} \rightarrow \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}}$ la surjection canonique.

Pour $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ de réduction $\overline{\mathbf{A}} := \mathbf{A}^\dagger / \mathbf{I}\mathbf{A}^\dagger$, soit $(\alpha, \alpha^\#) : (\overline{\mathbf{A}})^\sim \rightarrow (\mathbf{A}^\dagger)^\sim$ le morphisme d'espaces annelés associé à la surjection canonique $\mathbf{A}^\dagger \rightarrow \overline{\mathbf{A}}$. On a $\alpha = \text{id}_{\text{Spec}(\overline{\mathbf{A}})}$ et $\alpha^\# : \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{A}}}^\dagger$ se factorise à travers $\nu : \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger \rightarrow \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{A}^\dagger}$ en un isomorphisme de $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{A}^\dagger}$ sur $\mathcal{O}_{\overline{\mathbf{A}}}^\dagger$.

2.4.7. Schémas \dagger -adiques affines. On appelle « schéma \dagger -adique affine » tout espace annelé isomorphe à un espace de la forme $(\mathbf{A}^\dagger)^\sim$. La sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc-ann}/(\mathbf{R}^\dagger)$ dont les objets sont des schémas \dagger -adiques affines est la « catégorie des schémas \dagger -adiques affines » ; elle sera notée $\mathbf{Aff}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

Lorsque \mathbf{A}^\dagger est f.c.t.f. le schéma \dagger -adique affine $(\mathbf{A}^\dagger)^\sim$ est dit « de type fini ». La sous-catégorie pleine des objets de type fini de $\mathbf{Aff}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ est la « catégorie des schémas \dagger -adiques affines de type fini » ; elle sera notée $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

2.4.8. Le cas noëthérien. Ce qui précède est vrai pour tout anneau commutatif \mathbf{R} et tout idéal \mathbf{I} de type fini, mais sans hypothèse de finitude supplémentaire il ne semble pas possible d'aller très loin. L'hypothèse de noëthérianité sur \mathbf{R} et de finitude sur les algèbres intervient de manière essentielle dans la démonstration de théorèmes importants, très particulièrement celui de Meredith que nous utiliserons souvent dans la suite :

2.4.9. Théorème [M]. Soient \mathbf{R} noëthérien et $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. Alors, pour tout $f \in \mathbf{A}^\dagger$ le morphisme naturel $\mathbf{A}^\dagger_{[f]} \rightarrow \Gamma(D(f); \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est **bijectif**.

2.4.10. Voici maintenant le principal résultat de cette section :

Théorème. On suppose \mathbf{R} noëthérien.

- Le foncteur $(_)^\sim : \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ est une équivalence de catégories.
- La catégorie $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ possède des produits fibrés.

Preuve

a) Notons $\Gamma : \mathbf{Esp}\text{-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim} \rightsquigarrow \mathbf{Alg}(\mathbf{R})$ le foncteur qui fait correspondre à un espace annelé $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ l'algèbre $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ et a un morphisme $(\alpha, \alpha^\#) : (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ le morphisme $\Gamma(\mathbf{Y}, \alpha^\#) : \Gamma(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$. Le morphisme naturel de foncteurs $(-) \rightarrow \Gamma \circ (-)^\sim$ est alors l'identité sur $\mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ (2.4.9, [M]) ce qui prouve la *fidélité* du foncteur $(-)^\sim$.

Soit maintenant $(\alpha, \alpha^\#) : (\mathbf{A}^\dagger)^\sim \rightarrow (\mathbf{B}^\dagger)^\sim$ un morphisme d'espaces *localement* annelés au-dessus de $(\mathbf{R}^\dagger)^\sim$. Le morphisme $\alpha^\# : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \alpha_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ est donc un morphisme de faisceaux de \mathbf{R} -algèbres ce qui nous permet les raisonnements par réduction modulo \mathbf{I} suivants :

R-i) Pour chaque $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(\bar{\mathbf{A}})$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbf{B}^\dagger, \alpha(\mathfrak{P})}^\dagger & \xrightarrow{\alpha_\mathfrak{P}^\#} & \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger, \mathfrak{P}}^\dagger \\ \nu(\alpha(\mathfrak{P})) \downarrow & & \downarrow \nu(\mathfrak{P}) \\ \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{B}}, \alpha(\mathfrak{P})}^\dagger & \xrightarrow{\bar{\alpha}_\mathfrak{P}^\#} & \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{A}}, \mathfrak{P}}^\dagger \end{array}$$

où $\nu(*)$ est local et surjectif (2.4.3-c) et $\alpha_\mathfrak{P}^\#$ est local par hypothèse. On en déduit que $\bar{\alpha}_\mathfrak{P}^\#$ est local.

R-ii) Le morphisme $\alpha^\#$ induit un morphisme de faisceaux $\bar{\alpha}^\# : \bar{\mathcal{O}}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \alpha_* \bar{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}}$ (2.4.6) et donc un morphisme d'espaces annelés $(\alpha, \bar{\alpha}^\#) : (\bar{\mathbf{A}})^\sim \rightarrow (\bar{\mathbf{B}})^\sim$ qui est, d'après (R-i), un morphisme d'espaces localement annelés entre deux schémas affines (2.4.3-b). On a donc $(\alpha, \bar{\alpha}^\#) = (\bar{\eta})^\sim$ où $\bar{\eta} := \Gamma(\text{Spec}(\bar{\mathbf{B}}); \bar{\alpha}^\#) : \bar{\mathbf{B}} \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$ n'est autre que la réduction modulo \mathbf{I} de l'homomorphisme $\eta := \Gamma(\text{Spec}(\bar{\mathbf{B}}); \alpha^\#) : \mathbf{B}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$. On en déduit que :

$$\alpha = \eta^{-1}, \quad \text{et alors} \quad \alpha^{-1}(D(f)) = D(\eta(f)), \quad \text{pour tout } f \in \mathbf{B}^\dagger. \quad (\diamond)$$

Cela étant, le morphisme $\alpha^\# : \mathcal{O}_{\mathbf{B}^\dagger}^\dagger \rightarrow \alpha_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger$ donne, pour chaque $f \in \mathbf{B}^\dagger$, le diagramme commutatif suivant où les flèches verticales sont les applications canoniques.

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{\eta = \Gamma(D(1); \alpha^\#)} & & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathbf{B}^\dagger & \xrightarrow[\text{M}]{\Gamma(D(1); \mathcal{O}_{\mathbf{B}^\dagger}^\dagger)} & \Gamma(D(1); \alpha_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger) & \underset{\diamond}{=} & \Gamma(D(\eta(1)); \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger) \underset{\text{M}}{=} \mathbf{A}^\dagger \\ \gamma_{[f]} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \gamma_{[\eta(f)]} \\ \mathbf{B}^\dagger_{[f]} & \xrightarrow[\text{M}]{\Gamma(D(f); \mathcal{O}_{\mathbf{B}^\dagger}^\dagger)} & \Gamma(D(f); \alpha_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger) & \underset{\diamond}{=} & \Gamma(D(\eta(f)); \mathcal{O}_{\mathbf{A}^\dagger}^\dagger) \underset{\text{M}}{=} \mathbf{A}^\dagger_{[\eta(f)]} \end{array} \quad (\mathcal{D})$$

les égalités $(=_{\text{M}})$ résultent d'appliquer 2.4.9 et $(=_{\diamond})$ de (\diamond) . Or, la localisation \dagger -adique de η en f , *i.e.* l'application $\eta_{[f]} : \mathbf{B}^\dagger_{[f]} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_{[\eta(f)]}$ (*cf.* 2.4.1) est bien l'**unique** morphisme rendant (\mathcal{D}) commutatif, par conséquent $\Gamma(D(f); \alpha^\#) = \eta_{[f]}$ et on a bien :

$$(\alpha, \alpha^\#) = (\Gamma(\text{Spec}(\bar{\mathbf{B}}); \alpha^\#)^\sim).$$

Nous avons ainsi prouvé que le foncteur $(-)^\sim : \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Loc}\text{-ann}/_{(\mathbf{R}^\dagger)^\sim}$ est plei-

nement fidèle, c'est donc une équivalence sur son image essentielle, *i.e.* sur $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.
 b) Conséquence immédiate de (a) et de 2.2.1-(b). ■

Convention. Compte tenu de l'importance des théorèmes de cette section, l'anneau \mathbf{R} sera dorénavant supposé **noëthérien**.

2.5 Catégorie des schémas \dagger -adiques

2.5.1. Schémas \dagger -adiques. La «*catégorie des schémas \dagger -adiques (localement de type fini)*», notée $\mathbf{Sch}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ (resp. $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$), est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc-ann}/_{(\mathbf{R})}$ des espaces annelés tels que chaque point admet un voisinage ouvert isomorphe à un objet de $\mathbf{Aff}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ ($\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$).

2.5.2. Réduction d'un schéma \dagger -adique. Pour tout schéma \dagger -adique localement de type fini $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$, l'espace annelé $(\mathbf{X}; \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}})$ est un schéma localement de type fini (2.4.3-b) sur $\text{Spec}(\overline{\mathbf{R}})$, il sera appelé «*la réduction (modulo \mathbf{I}) de $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$* »

2.5.3. Terminologie. Un schéma \dagger -adique $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ sera dit «*de réduction affine (de type fini), séparée, ...*» s'il en est ainsi du schéma $(\mathbf{X}; \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}})$.

§3. Produits fibrés de schémas \dagger -adiques

On rappelle que l'anneau \mathbf{R} est désormais supposé **noëthérien**.

Le principal résultat de cette section est le théorème 3.2.4 qui établit l'existence des produits fibrés dans la catégorie des schémas \dagger -adiques localement de type fini. Dans la preuve, le critère de représentabilité de foncteurs 1.9.1 ⁽¹⁾ nous mène à montrer que les produits fibrés de la catégorie $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ sont aussi des produits fibrés de $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. Ceci est établi dans 3.2.3-b moyennant un nouveau critère d'affinité de schémas \dagger -adiques de réduction affine qui, à la différence des critères précédemment connus, est indépendant des hypothèses de lissité.

3.1 Un complément sur l'affinité des schémas \dagger -adiques de réduction affine

Cette section reprend l'étude commencée dans [Ar₃] à propos de l'affinité des schémas \dagger -adiques de réduction affine.

3.1.1. Proposition. Soit $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \in \mathbf{Sch}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

- a) L'algèbre $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est séparée.
- b) Si \mathbf{X} est quasi-compact, l'algèbre $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est aussi faiblement complète.

¹ [EGA₁], chap 0, prop. §4.5.4.

Preuve

a) Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathfrak{Q}}$ un recouvrement de X avec $U_i \in \mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. On a la suite exacte :

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \xrightarrow{\epsilon(\mathcal{U})} \prod_{i \in \mathfrak{Q}} \Gamma(U_i; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \xrightarrow{\delta_0(\mathcal{U})} \prod_{i, j \in \mathfrak{Q}} \Gamma(U_{i, j}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \quad (\diamond)$$

avec $\Gamma(U_i; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. L'algèbre $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ se réalise ici comme sous-algèbre d'un produit d'algèbres séparées ; elle est donc séparée.

b) Lorsque X est quasi-compact, le recouvrement \mathcal{U} dans (\diamond) peut être choisi *fini* auquel cas l'application $\delta_0(\mathcal{U})$ est continue entre un espace faiblement complet, car somme finie d'espaces f.c., et un espace séparé (d'après (a)), son noyau est alors faiblement complet. ■

3.1.2. J'ignore si dans (b) l'algèbre $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est faiblement complète **de type fini**.

3.1.3. Un critère d'affinité. On généralise maintenant la proposition 3.2.16 de [Ar₂] en l'affranchissant de toute considération de lissité, cela donne :

Proposition. Soient $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \in \mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et $U \subseteq X$ un ouvert de réduction affine. L'espace annelé induit $(U; \mathcal{O}_X|_U)$ est un schéma \dagger -adique affine de type fini.

Pour le prouver on utilisera le théorème 2.5.5 de [Ar₃], corollaire du principal résultat de ce papier, dont on rappelle l'énoncé sans démonstration :

3.1.4. Théorème [Ar₃]. Pour tout $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \in \mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ de réduction **affine**, le morphisme naturel $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{X}; \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}})$ est **surjectif**.

Démonstration du critère 3.1.3. Dans la suite, si \mathbf{A} est un anneau et si \mathbf{B} est une \mathbf{A} -algèbre, on notera de la même manière un élément $a \in \mathbf{A}$ et l'élément $a \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{B}} \in \mathbf{B}$.

Posons $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) = (\mathbf{A}^\dagger)^\sim$.

Soit $\mathcal{U} = \{D(f_1), \dots, D(f_\ell)\}$ un recouvrement de U par des ouverts principaux de X et considérons les premiers termes des complexes de Čech relatifs à \mathcal{U} appliqués au morphisme naturel des faisceaux $\mathcal{O}_X \rightarrow \overline{\mathcal{O}}_X$. On a le diagramme commutatif de \mathbf{A}^\dagger -modules :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) & \xrightarrow{\epsilon(\mathcal{U})} & \prod_{1 \leq i \leq \ell} \mathbf{A}^\dagger_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0(\mathcal{U})} & \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} \mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]} \\ & \nu(\mathbf{U}) \downarrow & \downarrow \Pi \nu_{f_i} & & \downarrow \Pi \nu_{f_i f_j} \\ \mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\mathbf{U}; \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}}) & \xrightarrow{\epsilon(\overline{\mathcal{U}})} & \prod_{1 \leq i \leq \ell} \overline{\mathbf{A}}_{f_i} & \xrightarrow{\delta_0(\overline{\mathcal{U}})} & \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} \overline{\mathbf{A}}_{f_i f_j} \end{array} \quad (\mathcal{C})$$

où $\overline{\mathbf{A}}_{f_i} := \overline{\mathbf{A}^\dagger_{[f_i]}} = \overline{\mathbf{A}^\dagger}_{f_i}$, où les morphismes ν_{f_i} et $\nu_{f_i f_j}$ sont bijectifs modulo \mathbf{I} et où les lignes sont exactes à gauche.

Grâce à la surjectivité de $\nu(\mathbf{U}) : \Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{U}; \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}})$ (3.1.4) on peut fixer des éléments $a_i \in \Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ tels que $\xi := \sum_i a_i f_i$ est inversible dans $\Gamma(\mathbf{U}; \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}})$. Montrons que ξ est aussi inversible dans $\Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$. En effet, comme ξ est inversible dans $\Gamma(\mathbf{U}; \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}})$, il l'est aussi dans $\overline{\mathbf{A}}_{f_i}$ et $\overline{\mathbf{A}}_{f_i f_j}$, mais alors aussi dans $\mathbf{A}^\dagger_{[f_i]}$ et $\mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]}$ puisque les morphismes ν_{f_i} et $\nu_{f_i f_j}$ sont des relèvements ([M] th. 2.8, p. 5, et [MW] th. 1.6). Notons ξ_*^{-1}

l'inverse de ξ dans \mathbf{A}_*^\dagger . La famille $\{\xi_{[f_i]}^{-1}\}$ vérifie automatiquement les conditions de recollement et définit par conséquent un élément $\xi^{-1} \in \Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$, inverse multiplicatif de ξ dans $\Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$.

La \mathbf{R} -algèbre $\Gamma(\mathbf{U}; \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}})$ est de type fini d'après un résultat classique de géométrie algébrique. Fixons une \mathbf{A}^\dagger -sous-algèbre $\mathbf{C}^\dagger \subseteq \Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})^\dagger = \Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ (cf. 3.1.1) vérifiant :

$$\nu(\mathbf{U})(\mathbf{C}^\dagger) = \Gamma(\mathbf{U}; \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}}), \quad \mathbf{C}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\text{fcff}}(\mathbf{R}; \mathbf{I}), \quad \{a_1, \dots, a_\ell, \xi^{-1}\} \subseteq \mathbf{C}^\dagger.$$

On a alors $(f_1, \dots, f_\ell) = \mathbf{C}^\dagger$ et les premiers termes du complexe de Čech de $(\mathbf{C}^\dagger)^\sim$ relatif au recouvrement principal de $\text{Spec}(\overline{\mathbf{C}^\dagger})$ défini par les f_i :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{C}^\dagger \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{C})} \prod_{1 \leq i \leq \ell} \mathbf{C}^\dagger_{[f_i]} \xrightarrow{\delta_0(\mathbf{C})} \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} \mathbf{C}^\dagger_{[f_i f_j]},$$

suite exacte à gauche de \mathbf{A}^\dagger -modules ([M] th. 2.8, p. 5).

Soit $g \in \mathbf{A}^\dagger$. Notons $\rho_{[g]} : \mathbf{C}^\dagger_{[g]} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_{[g]}$ le morphisme induit par la composée de l'inclusion $\mathbf{C}^\dagger \subseteq \Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ suivie de la restriction $\Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \rightarrow \Gamma(D(g); \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) = \mathbf{A}^\dagger_{[g]}$. Notons $\sigma_{[g]} : \mathbf{A}^\dagger_{[g]} \rightarrow \mathbf{C}^\dagger_{[g]}$ le morphisme induit par le morphisme structural $\sigma : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{C}^\dagger$. On a $\rho_{[g]} \circ \sigma_{[g]} = \text{id}$, autrement dit $\sigma_{[g]}$ est une section de $\rho_{[g]}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^\dagger_{[g]} & \xleftarrow{\sigma_{[g]}} & \mathbf{C}^\dagger_{[g]} & \xrightarrow{\rho_{[g]}} & \mathbf{A}^\dagger_{[g]} \\ & & \text{id} & & \uparrow \end{array}$$

On obtient ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) & \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{U})} & \prod_{1 \leq i \leq \ell} \mathbf{A}^\dagger_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0(\mathbf{U})} & \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} \mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]} \\ & \uparrow \subseteq & \uparrow \Pi \rho_{[f_i]} & & \uparrow \Pi \rho_{[f_i f_j]} \\ \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{C}^\dagger & \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{C})} & \prod_{1 \leq i \leq \ell} \mathbf{C}^\dagger_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0(\mathbf{C})} & \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} \mathbf{C}^\dagger_{[f_i f_j]} \\ & & \uparrow \Pi \sigma_{[f_i]} & & \uparrow \Pi \sigma_{[f_i f_j]} \\ & & \prod_{1 \leq i \leq \ell} \mathbf{A}^\dagger_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0(\mathbf{U})} & \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} \mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]} \end{array} \quad (\mathcal{E})$$

dont on déduit l'égalité $\mathbf{C}^\dagger = \Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ et

$$\boxed{\Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \text{ est f.c.t.f.}}$$

Le diagramme (\mathcal{E}) donne, par restriction de sa dernière colonne, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) & \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{U})} & \prod_{1 \leq i \leq \ell} \mathbf{A}^\dagger_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0(\mathbf{U})} & \text{im}(\delta_0(\mathbf{U})) \rightarrow \mathbf{0} \\ & \parallel & \uparrow \Pi \rho_{[f_i]} & & \uparrow \Pi \rho_{[f_i f_j]} \\ \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{C}^\dagger & \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{C})} & \prod_{1 \leq i \leq \ell} \mathbf{C}^\dagger_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0(\mathbf{C})} & \text{im}(\delta_0(\mathbf{C})) \rightarrow \mathbf{0} \\ & & \uparrow \Pi \sigma_{[f_i]} & & \uparrow \Pi \sigma_{[f_i f_j]} \\ & & \prod_{1 \leq i \leq \ell} \mathbf{A}^\dagger_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0(\mathbf{U})} & \text{im}(\delta_0(\mathbf{U})) \rightarrow \mathbf{0} \end{array} \quad (\mathcal{E}')$$

où les deux premières lignes sont exactes.

Appliquons le foncteur $\mathrm{Tor}_1^R(\overline{\mathbf{R}}, _)$ à (\mathcal{E}') . Alors :

- $\mathrm{Tor}_1^R(\overline{\mathbf{R}}, \rho_{[*]})$ est surjective, car $\mathrm{Tor}_1^R(\overline{\mathbf{R}}, \rho_{[*]}) \circ \mathrm{Tor}_1^R(\overline{\mathbf{R}}, \sigma_{[*]}) = \mathrm{Tor}_1^R(\overline{\mathbf{R}}, \mathrm{id}) = \mathrm{id}$.
- $\mathrm{Tor}_1^R(\overline{\mathbf{R}}, \delta_0(\mathbf{C}))$ est surjective, car $\overline{\epsilon(\mathbf{C})} : \overline{\mathbf{C}^\dagger} \rightarrow \prod_i \overline{\mathbf{C}_{f_i}}$ est injective.
- $\mathrm{Tor}_1^R(\overline{\mathbf{R}}, \delta_0(\mathbf{U}))$ est surjective, car $\mathrm{Tor}_1^R(\overline{\mathbf{R}}, \Pi \rho_{f_i, f_j}) \circ \mathrm{Tor}_1^R(\overline{\mathbf{R}}, \delta_0(\mathbf{C}))$ l'est.

On en déduit que l'application $\overline{\epsilon(\mathbf{U})} : \overline{\Gamma(\mathbf{U}; \overline{\mathcal{O}_X})} \rightarrow \prod_i \overline{\mathbf{A}_{f_i}}$ est *injective*, et comme elle se factorise à travers $\overline{\epsilon(\overline{\mathcal{O}})} : \Gamma(\mathbf{U}; \overline{\mathcal{O}_X}) \rightarrow \prod_i \overline{\mathbf{A}_i}$ (cf. (\mathcal{C})), l'égalité $\overline{\Gamma(\mathbf{U}; \overline{\mathcal{O}_X})} = \Gamma(\mathbf{U}; \overline{\mathcal{O}_X})$ résulte ; autrement dit,

$$\boxed{\Gamma(\mathbf{U}; \overline{\mathcal{O}_X}) \text{ est un relèvement f.c.t.f. de } \Gamma(\mathbf{U}; \overline{\mathcal{O}_X})}$$

Il s'ensuit que les morphismes $\sigma_{[*]}$ sont tous **bijectifs** et alors $(\mathbf{U}; \overline{\mathcal{O}_X}|_{\mathbf{U}}) \simeq (\Gamma(\mathbf{U}; \overline{\mathcal{O}_X}))^\sim$. ■

3.2 Isomorphismes de faisceaux sur $\mathrm{Sch}_{\mathrm{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$

3.2.1. Faisceaux sur $\mathrm{Sch}_{\mathrm{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. Un foncteur contravariant de $\mathrm{Sch}_{\mathrm{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ vers la catégorie **Ens** est dit « *faisceau* » si pour tout schéma \dagger -adique \mathbf{X} et tout recouvrement ouvert $\{\iota_\alpha : \mathbf{U}_\alpha \subseteq \mathbf{X}\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, la suite

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{F})} \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{F}(\mathbf{U}_\alpha) \xrightleftharpoons[\delta_2(\mathbf{F})]{\delta_1(\mathbf{F})} \prod_{\alpha, \beta \in \mathfrak{A}} \mathbf{F}(\mathbf{U}_{\alpha, \beta})$$

avec

$$\begin{cases} \epsilon(\mathbf{F})(z)(\alpha) = \mathbf{F}(\iota_\alpha)(z) \\ \delta_1(\mathbf{F})(\omega)(\alpha, \beta) = \mathbf{F}(\iota_{\alpha, \beta}^\alpha)(\omega(\alpha)) \\ \delta_2(\mathbf{F})(\omega)(\alpha, \beta) = \mathbf{F}(\iota_{\alpha, \beta}^\beta)(\omega(\beta)) \end{cases}$$

où $\iota_{\alpha, \beta}^\alpha$ désigne l'inclusion $\mathbf{U}_{\alpha, \beta} \subseteq \mathbf{U}_\alpha$, est « *exacte* », i.e. $\epsilon(\mathbf{F})$ est une bijection entre $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ et l'ensemble $\{\delta_1(\mathbf{F}) = \delta_2(\mathbf{F})\} \subseteq \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{F}(\mathbf{U}_\alpha)$.

3.2.2. Proposition. *Un morphisme $\mu : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ de faisceaux d'ensembles sur $\mathrm{Sch}_{\mathrm{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ est un isomorphisme si et seulement si sa restriction à la sous-catégorie $\mathrm{Aff}_{\mathrm{tf}}^\dagger$ est un isomorphisme.*

Preuve. Soit $\mathbf{X} \in \mathrm{Sch}_{\mathrm{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et fixons un recouvrement $\{\mathbf{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ avec $\mathbf{U}_\alpha \in \mathrm{Aff}_{\mathrm{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. On a le morphisme des suites exactes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{F}(\mathbf{X}) & \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{F})} & \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{F}(\mathbf{U}_\alpha) & \xrightleftharpoons[\delta_2(\mathbf{F})]{\delta_1(\mathbf{F})} & \prod_{\alpha, \beta \in \mathfrak{A}} \mathbf{F}(\mathbf{U}_{\alpha, \beta}) \\ \mu(\mathbf{X}) \downarrow & & \mu(\mathbf{U}_\alpha) \downarrow & & \mu(\mathbf{U}_{\alpha, \beta}) \downarrow \\ \mathbf{G}(\mathbf{X}) & \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{G})} & \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{G}(\mathbf{U}_\alpha) & \xrightleftharpoons[\delta_2(\mathbf{G})]{\delta_1(\mathbf{G})} & \prod_{\alpha, \beta \in \mathfrak{A}} \mathbf{G}(\mathbf{U}_{\alpha, \beta}) \end{array}$$

et le lemme résultera de montrer que les applications $\mu(\mathbf{U}_{\alpha, \beta})$ sont bijectives. C'est le cas lorsque $(\mathbf{X}, \overline{\mathcal{O}_X})$ est de réduction séparée puisqu'alors $\mathbf{U}_{\alpha, \beta}$ est un ouvert de réduction *affine* du schéma \dagger -adique affine \mathbf{U}_α et donc $\mathbf{U}_{\alpha, \beta} \in \mathrm{Aff}_{\mathrm{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ d'après 3.1.3. Et ce sera alors aussi le cas dans la situation générale car la réduction de $\mathbf{U}_{\alpha, \beta}$ est toujours séparée étant sous-schéma (ouvert) d'un schéma affine (donc séparé). ■

3.2.3. Théorème

a) Pour tous $\mathbf{X} \in \mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et $\mathbf{Y} \in \mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ l'application naturelle

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) & \xrightarrow{\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{Y})} & \text{Homom}_{\mathbf{R}}(\Gamma(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}), \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})) \\ (f, f^\#) & \longmapsto & \Gamma(\mathbf{Y}; f^\# : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \end{array}$$

est un isomorphisme.

b) Les produits fibrés de $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ sont des produits fibrés de $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

Preuve

a) Pour $\mathbf{Y} = (\mathbf{A}^\dagger)^\sim$ fixé, le foncteur $(-) \rightsquigarrow \text{Homom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A}^\dagger, \Gamma(-))$ est un faisceau d'ensembles sur $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. En effet, soit $\mathbf{X} = \cup_\alpha U_\alpha$ un recouvrement ouvert de $\mathbf{X} \in \mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. On a la suite exacte de d'ensembles

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \xrightarrow{\epsilon(\Gamma)} \prod_\alpha \Gamma(U_\alpha; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \xrightarrow[\delta_2(\Gamma)]{\delta_1(\Gamma)} \prod_{\alpha, \beta} \Gamma(U_{\alpha, \beta}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$$

L'application $\text{Homom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A}^\dagger; \epsilon(\Gamma))$ est injective puisque U_α recouvre \mathbf{X} . Ensuite, on a

$$\text{Homom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A}^\dagger; \prod_\alpha \Gamma(U_\alpha; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})) = \prod_\alpha \text{Homom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A}^\dagger; \Gamma(U_\alpha; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}))$$

et la donnée de $\vec{\eta} \in \text{Homom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A}^\dagger; \prod_\alpha \Gamma(U_\alpha; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}))$ vérifiant $\delta_1(\Gamma) \circ \vec{\eta} = \delta_2(\Gamma) \circ \vec{\eta}$ équivaut à la donnée d'une famille de morphismes de \mathbf{R} -algèbres $\eta_\alpha : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \Gamma(U_\alpha; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ telle que, pour chaque $a \in \mathbf{A}^\dagger$ on ait :

$$\eta_\alpha(a)|_{U_{\alpha, \beta}} = \eta_\beta(a)|_{U_{\alpha, \beta}}.$$

Il existe alors une et une seule section globale $\eta(a) \in \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ recollant les $\eta_\alpha(a)$. L'application $a \mapsto \eta(a)$ est un morphisme de \mathbf{R} -algèbres vérifiant $\epsilon(\Gamma) \circ \eta = \vec{\eta}$ ce qui termine la preuve du fait que $\text{Homom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A}^\dagger, \Gamma(-))$ est un faisceau sur $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$.

L'application $\gamma(-, \mathbf{Y}) : \text{Mor}(-, \mathbf{Y}) \rightarrow \text{Homom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A}^\dagger, \Gamma(-))$ est par conséquent un morphisme de *faisceaux d'ensembles* sur $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$; on peut alors invoquer 3.2.2 et affirmer que c'est un isomorphisme de foncteurs puisqu'il en est ainsi de sa restriction à la sous-catégorie $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ (2.4.10-(a)).

b) Étant donnés $\mathbf{X}_i, \mathbf{S} \in \mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et $\pi_i \in \text{Mor}(\mathbf{X}_i, \mathbf{S})$ on a les morphismes de foncteurs $\text{Mor}(-, \pi_i) : \text{Mor}(-, \mathbf{X}_i) \rightarrow \text{Mor}(-, \mathbf{S})$ et le foncteur sur $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$:

$$(-) \rightsquigarrow \text{Mor}(-, \mathbf{X}_1) \times_{\text{Mor}(-, \mathbf{S})} \text{Mor}(-, \mathbf{X}_2)$$

dont il faut prouver la représentabilité.

Or, grâce au produit fibré dans $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ (2.4.10)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_1 \times_{\mathbf{S}} \mathbf{X}_2 & \xrightarrow{p_1} & \mathbf{X}_1 \\ p_2 \downarrow & \square & \downarrow \pi_1 \\ \mathbf{X}_2 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbf{S} \end{array}$$

on définit pour chaque $\mathbf{Z} \in \mathbf{Sch}_{\text{tf}}^\dagger(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ l'application

$$\text{Mor}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}_1 \times_{\mathbf{S}} \mathbf{X}_2) \xrightarrow{\Xi(\mathbf{Z})} \text{Mor}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}_1) \times_{\text{Mor}(\mathbf{Z}, \mathbf{S})} \text{Mor}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}_2)$$

qui associe à $\alpha \in \text{Mor}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}_1 \times_{\mathbf{S}} \mathbf{X}_2)$ le couple $(p_1 \circ \alpha, p_2 \circ \alpha)$. La correspondance $\Xi(-)$ est naturelle entre deux *faisceaux d'ensembles* sur $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$; on peut alors invoquer 3.2.2 et affirmer que c'est un isomorphisme de foncteurs puisqu'il en est ainsi de sa restriction à la sous-catégorie $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ (2.4.10-(b)) ■

3.2.4. Théorème. *La catégorie $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ possède des produits fibrés.*

Preuve. Soient $\pi_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{S}$ et $\pi_{\mathbf{Y}} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{S}$ des objets de $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})/\mathbf{S}$. Notons $\{\mathbf{S}_{\alpha}\}_{\alpha}$ un recouvrement ouvert de \mathbf{S} avec $\mathbf{S}_{\alpha} \in \mathbf{Aff}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ pour tout α . Soient $\{\mathbf{X}_{\alpha, \beta}\}_{\beta}$ un recouvrement ouvert de $\pi_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{S}_{\alpha})$ par des objets de $\mathbf{Aff}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et de même pour \mathbf{Y} .

Le produit fibré $\mathbf{X}_{\alpha, \beta} \times_{\mathbf{S}_{\alpha}} \mathbf{Y}_{\alpha, \beta'}$ existe dans $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})/\mathbf{S}_{\alpha}$ (3.2.3-b) et représente aussi le foncteur $\text{More}(-, \mathbf{X}_{\alpha, \beta}) \times_{\text{More}(-, \mathbf{S})} \text{More}(-, \mathbf{Y}_{\alpha, \beta'})$ (car $\mathbf{S}_{\alpha} \rightarrow \mathbf{S}$ est un plongement ouvert). Le produit fibré $\mathbf{X}_{\alpha, \beta} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{Y}_{\alpha, \beta'}$ existe donc bien dans $\mathbf{Sch}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})/\mathbf{S}$.

On conclut en appliquant le critère de représentabilité 1.9.1 avec

- $\mathbf{C} = \mathbf{Sch}_{\text{tf}}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})/\mathbf{S}$,
- $\mathbf{F} := \text{More}(-, \mathbf{X}) \times_{\text{More}(-, \mathbf{S})} \text{More}(-, \mathbf{Y})$,
- $\mathbf{F}_{\alpha, \beta, \beta'} : \text{More}(-, \mathbf{X}_{\alpha, \beta}) \times_{\text{More}(-, \mathbf{S})} \text{More}(-, \mathbf{Y}_{\alpha, \beta'})$. ■

§ 4. Affinité des schémas \dagger -adiques de réduction affine

Tout comme la section 3.1, les résultats de cette partie complètent l'étude commencée dans [Ar₃] concernant l'affinité des schémas \dagger -adiques de réduction affine, tous ces résultats y seront replacés dans une version ultérieure de ce travail.

Le question de l'affinité des schémas \dagger -adiques de réduction affine est apparue à différentes occasions depuis [M] et a donné lieu à des réponses variées, par exemple :

- Aff-(i)** Si $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est un schéma \dagger -adique affine de type fini et si $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$ est un ouvert principal, l'espace $(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}|_{\mathbf{U}})$ est un schéma \dagger -adique affine de type fini. ⁽²⁾
- Aff-(ii)** Si $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est un schéma \dagger -adique affine-lisse ⁽³⁾ et si $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$ est un ouvert affine, l'espace $(\mathbf{U}; \mathcal{O}^{\dagger}|_{\mathbf{U}})$ est un schéma \dagger -adique affine-lisse. ⁽⁴⁾
- Aff-(iii)** Si $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est un schéma \dagger -adique affine de type fini et si $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$ est un ouvert affine, l'espace $(\mathbf{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}|_{\mathbf{U}})$ est un schéma \dagger -adique affine de type fini. ⁽⁵⁾
- Aff-(iv)** Un schéma \dagger -adique lisse de réduction affine est affine-lisse. ⁽⁶⁾

Nous allons maintenant démontrer le résultat le plus général concernant cette question :

² Théorème 2.8, p. 5, de [M].

³ On rappelle que dans [Ar₃] un schéma \dagger -adique affine est dit « affine-lisse » lorsqu'il est associé à une algèbre f.c.t.f. très lisse, et il est dit « lisse » s'il est localement affine-lisse. Le principal résultat de *loc.cit.*, assertion aff-(iv) ici, affirme qu'il y a équivalence entre les deux concepts.

⁴ Proposition 3.2.16 de [Ar₂].

⁵ Proposition 3.1.3 dans ce papier.

⁶ Théorème 2.5.3 de [Ar₃].

4.1. Théorème. *Pour un schéma \dagger -adique localement de type fini les assertions suivantes sont équivalentes :*

- a) Être de réduction affine (de type fini).
- b) Être \dagger -adique affine de type fini.

Preuve. Soit $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \in \mathbf{Sch}_{\dagger}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ de réduction $(\mathbf{X}; \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}}) = \text{Spec}(\overline{\mathbf{A}})$. Soient $\{f_1, \dots, f_r\} \subseteq \overline{\mathbf{A}}$ tels que $f_1 + \dots + f_r = 1$ et tels que $(D(f_i); \mathcal{O}_{\mathbf{X}}|_{D(f_i)}) \in \mathbf{Aff}_{\dagger}^{\dagger}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$. On a le morphisme de suites exactes à gauche :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) & \xrightarrow{\epsilon(\mathcal{O})} & \prod_i \Gamma(D(f_i); \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) & \xrightarrow{\delta_0(\mathcal{O})} & \prod_{ij} \Gamma(D(f_i f_j); \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \\ \nu \downarrow & & \nu_i \downarrow & & \nu_{ij} \downarrow \\ \mathbf{0} \rightarrow \Gamma(\mathbf{X}; \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}}) & \xrightarrow{\epsilon(\overline{\mathcal{O}})} & \prod_i \Gamma(D(f_i); \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}}) & \xrightarrow{\delta_0(\overline{\mathcal{O}})} & \prod_{ij} \Gamma(D(f_i f_j); \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}}) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \overline{\mathbf{A}} & & \prod_i \overline{\mathbf{A}}_{f_i} & & \prod_{ij} \overline{\mathbf{A}}_{f_i f_j} \end{array} \quad (\mathcal{D})$$

où les flèches verticales proviennent de la réduction modulo \mathbf{I} des fibres de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ (cf. 2.4.6). Les morphismes ν_i et ν_{ij} sont alors des relèvements ([M] th. 2.8, p. 5) et le morphisme ν est surjectif d'après 3.1.4 ([Ar₃] cor. 2.5.5).

D'autre part, l'algèbre $\overline{\mathbf{A}} := \Gamma(\mathbf{X}; \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{X}})$ est de type fini sur $\overline{\mathbf{R}}$, car elle est localement de type fini, et l'algèbre $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est faiblement complète d'après 3.1.1 (⁷), il existe donc un sous-algèbre **faiblement complète de type fini** $\mathbf{C}^{\dagger} \subseteq \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ telle que $\nu(\mathbf{C}^{\dagger}) = \overline{\mathbf{A}}$.

Choisissons $F_i \in \mathbf{C}^{\dagger}$ tel que $\nu(F_i) = f_i$ et notons $\xi = F_1 + \dots + F_r$. On a $\nu(\xi) = 1 \in \overline{\mathbf{A}}$ et donc aussi $\xi = 1 \pmod{\mathbf{I}}$ dans chaque $\Gamma(D(f_i); \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$. On en déduit que ξ est inversible dans $\Gamma(D(f_i); \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$, car de Zariski, d'inverse noté ζ_i . Les sections $(\zeta_1, \dots, \zeta_r)$ vérifient la condition de recollement et se recollent en une section globale $\zeta \in \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ vérifiant l'égalité $\xi\zeta - 1 = 0$ (localement évidente). Ainsi, quitte à rajouter ζ à \mathbf{C}^{\dagger} , l'image de ξ dans $\overline{\mathbf{C}} := \mathbf{C}^{\dagger}/\mathbf{I}\mathbf{C}^{\dagger}$ est **inversible** et l'espace $\text{Spec}(\overline{\mathbf{C}})$ est **recouvert** par les ouverts principaux $D(F_i)$. Notons $\mathbf{Y} := \text{Spec}(\overline{\mathbf{C}})$ et $(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) := (\mathbf{C}^{\dagger})^{\sim}$.

Soit $(\alpha, \alpha^{\#}) : (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ le morphisme d'espaces localement annelés associé à l'inclusion $\mathbf{C}^{\dagger} \subseteq \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ (prop. 3.2.3-a). Le morphisme $\alpha^{\#} : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \alpha_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ fait de $\alpha_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ un $\mathcal{O}_{\mathbf{Y}}$ -module **cohérent**. En effet, d'après l'équivalence de catégories 2.4.10, la restriction de $\alpha^{\#}$ à $D(F_i)$ est le morphisme de faisceaux correspondant au morphisme d'algèbres $\Gamma(D(F_i); \alpha^{\#})$. Or, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(D(F_i); \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) & \xrightarrow{\Gamma(D(F_i); \alpha^{\#})} & \Gamma(D(F_i); \alpha_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \\ \parallel & \oplus & \parallel \\ \mathbf{C}_{[F_i]}^{\dagger} & \xrightarrow{\epsilon(\mathcal{O})_i} & \Gamma(D(f_i); \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \\ & & \nu_i \downarrow \\ & & \overline{\mathbf{A}}_{f_i} \end{array} \quad (\ddagger)$$

où $\epsilon(\mathcal{O})_i$ est **surjective** car il en est ainsi de $\nu_i \circ \epsilon(\mathcal{O})_i$, par construction de \mathbf{C}^{\dagger} , et

⁷ Mais on ne sait pas encore si elle est f.c.t.f. ni si ν est un relèvement !

puisque $\Gamma(D(f_i); \mathcal{O}_X) \in \mathbf{Alg}_{\text{ictf}}(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ et que ν_i est un relèvement (th. 3.2 [MW]). Le $\mathbf{C}_{[F_i]}^\dagger$ -module $\Gamma(D(F_i); \alpha_* \mathcal{O}_X)$ est donc cyclique et de présentation finie car $\mathbf{C}_{[F_i]}^\dagger$ est noëthérien. L'exactitude de $(-)^{\sim}$ sur la catégorie des $\mathbf{C}_{[F_i]}^\dagger$ -modules de type fini ([M] prop. 2.5, p. 4) permet maintenant de conclure que $(\alpha_* \mathcal{O}_X)|_{D(F_i)}$ est un $\mathcal{O}_Y|_{D(F_i)}$ -module de présentation finie, ce qui termine la preuve de la cohérence de $\alpha_* \mathcal{O}_X \in \text{Mod}(\mathcal{O}_Y)$.

La cohérence de $\alpha_* \mathcal{O}_X$ plus le fait que le morphisme $\Gamma(\mathbf{Y}; \alpha_* \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(\mathbf{Y}; \alpha_* \overline{\mathcal{O}}_X)$ est **surjectif**, car égal à ν dans (\mathcal{D}) , suffisent (*cf.* la preuve du th. 3.3 de [M], p. 12) pour affirmer que $\alpha_* \mathcal{O}_X$ est de la forme $(\mathbf{M})^{\sim}$ pour un certain \mathbf{C}^\dagger -module de type fini \mathbf{M} et que $\alpha^\# = (\gamma)^{\sim}$ où $\gamma : \mathbf{C}^\dagger \rightarrow \mathbf{M}$ est un morphisme de \mathbf{C}^\dagger -modules. De plus, on a $\mathbf{M} = \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ (th. 2.14 [M], cor. 3.2.12 [Ar₂]) et donc $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ est une \mathbf{C}^\dagger -algèbre **finie** et

$$\boxed{\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X) \text{ est f.c.t.f.}}$$

On peut maintenant reprendre toute l'argumentation de la preuve avec $\mathbf{C}^\dagger := \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ ce qui nous conduit à l'existence d'un isomorphisme $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X) \simeq (\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X))^{\sim}$. ■

4.2. Remarques sur la preuve

a) Dans l'avant dernier paragraphe,

- i) la référence à la preuve du théorème 3.3 de [M] et non pas au théorème lui-même s'explique par le fait que nous ne faisons pas l'hypothèse sur (\mathbf{R}, \mathbf{I}) d'être un anneau de valuation discrète complet.
- ii) le morphisme γ y est déjà **bijectif**. En effet, il est *injectif* car $\mathbf{M} = \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ et que γ s'identifie à l'inclusion $\mathbf{C}^\dagger \subseteq \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$. Il est aussi *surjectif* car en notant $\mathbf{Q} := \text{coker}(\gamma)$, on a $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{C}^\dagger} \mathbf{C}_{[F_i]}^\dagger = 0$ d'après (‡) et alors $0 = \overline{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{C}^\dagger} \mathbf{C}_{[F_i]}^\dagger = (\overline{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{Q}) \otimes_{\overline{\mathbf{C}}} \overline{\mathbf{C}}_{F_i}$ pour tout i , et donc $\overline{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{Q} = 0$. Mais alors $\mathbf{Q} = 0$ puisque \mathbf{Q} est un \mathbf{C}^\dagger -module de type fini et que $(\mathbf{C}^\dagger; \mathbf{I}\mathbf{C}^\dagger)$ est de Zariski.

b) Le critère d'affinité 3.1.3, cas particulier de 4.1, est nécessaire dans cette démonstration dans la mesure où l'on s'en sert pour établir la proposition 3.2.3-a elle-même appelée par 4.1. En fait, la preuve de 4.1 prouve aussi 3.1.3 dans la mesure où la proposition 3.2.3-a est trivialement vérifiée dans son cas. On peut facilement concevoir un énoncé commun à 3.2.3-a et 4.1 dont la démonstration règle dans un premier temps le cas où \mathbf{X} est un ouvert de réduction affine d'un schéma \dagger -adique affine de type fini.

4.3. Commentaire. Le théorème 4.1 prouve la conjecture de 2.5.6 dans [Ar₃]:

Théorème. Pour tout schéma \dagger -adique localement de type fini $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ et tout ouvert de réduction affine $U \subseteq \mathbf{X}$ on a :

$$H^j(U; \mathcal{O}_X) = 0, \text{ pour tout } j > 0.$$

§ 5. Références bibliographiques

- [Ar₂] A. ARABIA. Cohomologie de Monsky-Washnitzer dans la catégorie des schémas lisses et séparés sur $\overline{\mathbf{R}}$; Prépublication (2004).
- [Ar₃] A. ARABIA. Affinité de schémas \dagger -adiques de réduction affine; Prépublication (2005).
- [EGA₁] A. GROTHENDIECK, J.A. DIEUDONNÉ. “*Éléments de géométrie algébrique-I*”; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 166. Springer-Verlag (1971).
- [M] D. MEREDITH. Weak formal schemes; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).
- [MW] P. MONSKY, G. WASHNITZER. Formal cohomology: I; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217 (1968).

—————×—————