Algèbre & Géométrie
une interview de Gabriel Pallares
à Alberto Arabia

20 avril 2015

Question 1 : Qu'entendez-vous par «algèbre» et par «géométrie» ?

Après bien d'années de travailler dans ces disciplines, il m'est difficile de les dissocier, tant elles sont enchevêtrées dans mon esprit et tant elles participent à la fois à la recherche et à la découverte d'une réalité dont elles saisissent des vues complémentaires. Je vois l'algèbre et la géométrie interagir harmonieusement pour leur enrichissement mutuel et, au delà d'une forme de symbiose, je suis tenté de les voir comme les faces d'une pièce que l'on ne peut saisir qu'à travers elles.

D'un point de vue naïf, l'algèbre m'apparaît comme un monde abstrait dont les objets sont des expressions rattachées à une « structure d'algèbre », c'est à dire, à la donnée d'un ensemble muni d'opérations de somme '$+$' et de produit 'x' satisfaisant des propriétés d'associativité et distributivité inspirées de notre connaissance de l'arithmétique des nombres entiers. Ces expressions qui vont contenir quelques éléments particuliers $(0, 1, -1, ...)$ mais aussi des éléments variables, vont être quantifiées et seront reliées par des signes syntaxiques dont le plus remarquable est l'égalité '$=$', le tout constituant des « formules » ou « équations ». Ces formules et leurs propriétés constituent le sujet de l'algébriste. Quant à la géométrie, le préfixe « géo- » nous met déjà devant le « réel » : la terre, et le suffixe « -métrie » devant un geste concret vieux comme le monde : la mesure. On n'est plus dans l'abstrait mais dans le concret, dans l'espace qui nous entoure, ou tout du moins tel que nous nous le représentons depuis l'enseignement des anciens qui nous ont légué les concepts de droite, plan, espace, de triangles, polygones, polyèdres et solides platoniciens,... mais aussi des moins anciens qui ont façonné la géométrie différentielle et les concepts de variétés riemanniennes, fibrations, groupes de Lie,... Ces objets et leurs propriétés constituent le sujet du géomètre. En simplifiant à l'extrême, en géométrie il est question d'espace et de points, en algèbre, de formules et d'équations.

N'ayant pas de culture en histoire des mathématiques, je n'évoquerai rien du chemin parcouru par l'humanité dans l'appréhension des objets algébriques, mais il m'est clair pour l'avoir expérimenté, qu'ils ont une forme d'existence dans notre esprit. Je ne saurai dire, si c'est l'objet algébrique qui prend vie dans nos pensées ou si, au contraire, il préexiste à leur expérience, le fait est que pour peu que l'on se familiarise avec eux, la curiosité de notre esprit s'éveille et presque spontanément, à notre insu même, des intuitions sur leurs propriétés émergent. Quant aux objets géométriques, ils s'appréhendent autrement que ceux de l'algèbre, il n'est point question ici de formules, mais souvent d'images ou de dessins d'objets dont on a pris conscience par le simple fait d'être immergés dans le monde « réel ». Ces objets nous apparaissent souvent sans effort et ne nécessitent pas de connaissances particulières, contrairement aux objets algébriques qui, eux, demandent un parcours initiatique.

Dans tous les cas, lorsque l'esprit s'intéresse à ces deux mondes, une forme de vie apparaît sous forme de pensées qui vont au-delà des faits acquis. C'est un mystère pour moi, mais je vois bien comment se mettent à interagir : objets, intuition, questionnements, exemples et contrexemples, preuves et réfutations, dans notre esprit, qui, par des chemins parfois très mystérieux, parvient découvrir des faits nouveau dans une démarche qui sans cesse gagne du terrain sur monde de l'inconnu.

Mais, si algèbre et géométrie sont indépendamment des mondes extrêmement riches et fertiles, c'est leur interaction qui est d'une étonnante efficacité dans la recherche, notamment en géométrie algébrique. L'interaction entre ces mondes vient de la représentation cartésienne d'un espace vectoriel V de dimension finie n sur un corps K. En effet, une fois fixée une base de V, un point de V se « voit » comme un système d'équations à n variables à coefficients dans K, et donc comme un idéal maximal de l'algèbre de polynômes $A = K[X_1, ..., X_n]$. Mieux encore, la notion de « point » va se trouver étonnamment généralisée dans le cadre algébrique en définissant comme « point » tout idéal premier (et pas seulement maximal) de l'algèbre A. Les conséquences de cette idée qui entraîne par exemple que l'algèbre « voit » des points que la géométrie ne voit pas, se sont avérées d'une étonnante richesse. En progressant dans cette « algébrisation » de la géométrie, une variété différentiable devient un « fourbis » de systèmes d'équations algébriques avec des conditions « de recollement » et donne lieu à la notion de variété algébrique. Ces variétés et ces points nouveaux constituent les éléments d'une nouvelle géométrie, la géométrie algébrique ou schématique. Bien de propriétés intuitivement claires de la géométrie ont trouvé leur pendant en géométrie algébrique, mais ce qui est très puissant c'est que l'intuition géométrique du monde qui nous entoure continue d'être un guide efficace pour évoluer dans le monde (à priori) (très) abstrait de l'algèbre (notamment en caractéristique positive), ce qui me semble être une découverte majeure en mathématiques.

En science, il faut avoir des idées et beaucoup d'inspiration, non seulement pour répondre à d'anciennes questions, mais aussi pour découvrir de nouvelles réalités. L'histoire du rapport entre algèbre et géométrie est édifiante de ce point de vue. Le dernier théorème de Fermat, de nature purement algébrique et que tout écolier comprend dès qu'il a appris à sommer et à multiplier des nombres, n'a pu être démontré sans inspirations géométriques, ce qui conforte mon idée que algèbre et géométrie sont indissociables.

Question 2 : Quel est votre domaine de recherche, et comment le situez-vous par rapport à l'algèbre et à la géométrie ?

Mon tempérament fait que mon domaine de recherches change régulièrement. En règle générale, une fois que j'ai accompli un travail important, je me retrouve assez rapidement à la quête d'un nouveau sujet pour lequel j'aurais une approche fraîche. C'est ainsi que, dans ma carrière, je me suis intéressé aux sujets suivants.

1. Géométrie riemannienne et formes automorphes (DEA).
2. Groupes de Lie, variétés de Schubert, cohomologie équivariante (THESE).
3. Singularités des variétés algébriques. Critères cohomologique de lissité rationnelle et algébrique.
4. Relèvement des algèbres lisses
5. Homologie d'intersection et faisceaux pervers.
6. Fondements de la cohomologie de de Rham p-adique et conjectures de Weil.
7. Isospectrailté des tambours et technique de transplantation.
8. Homologie des espaces de configuration

Dans leur ensemble, ces sujets concernent : la géométrie différentielle, riemannienne et algébrique (en toute caractéristique), la théorie des représentation des groupes, l'analyse fonctionnelle, les théories homologiques, catégories dérivées, la combinatoire. Algèbre et géométrie y sont omniprésentes, mais dans des proportions inégales et, surtout, n'interagissant pas de la même manière ni avec la même intensité. La plupart du temps, dans un même travail, ces disciplines restent clairement dissociées, cloisonnées même, certains passages étant éminemment algébriques, d'autres éminemment géométriques. Un classement croissant possible de la nécessité heuristique d'une interactivité entre les aspects algébriques et géométrique des sujets en question n'a aucun sens dans l'absolu, mais dans ma perception il pourrait être le suivant : $8 \prec 7 \prec 5 \prec 1 \prec 2 \prec 3 \prec 6 \prec 4$.

Dans (4) l'interaction entre algèbre et géométrie, au sens de ma réponse à votre première question, est maximale. Dans ce sujet, on s'intéresse aux algèbres lisses sur un anneau R. La lissité d'une algèbre est une propriété purement algébrique qui généralise la propriété universelle des algèbres de polynômes. Une question très importante en géométrie algébrique est de savoir si une algèbre lisse sur un corps de caractéristique p provient, par réduction modulo p, d'une algèbre lisse sur l'anneau des entiers. Enoncé qui, réinterprété dans un langage géométrique, dit qu'une variété algébrique (affine) lisse en caractéristique positive admet un épaississement lisse sur les entiers. Dans ce travail, on montre que c'est toujours le cas, mais à un moment donné l'intuition géométrique nous est incontournable, elle nous éclaire et nous indique le chemin à suivre, sans quoi, on serait perdu dans un fourbi inextricable d'équations algébriques.

A l'autre extrême, mon sujet de recherches actuel (8) concerne l'homologie des espaces de configuration. Je rappelle qu'on appelle ainsi l'espace $F(n, X)$ dans lequel évoluent sans heurts n points distincts d'un espace X donné. La définition ensembliste est donc de dire que $F(n, X)$ est l'ensemble des n-uplets d'éléments deux à deux distincts de X. L'espace de configuration est clairement un objet important en physique et bien sûr en robotique. Il se trouve que pour X donné, l'étude des propriétés homologiques de $F(n, X)$ lorsque n tend vers l'infini, par exemple le comportement asymptotique du polynôme de Poincaré de $F(n, X)$, pose des problèmes mathématiques intéressants encore largement ouverts. Il y a un an environ, j'ai réalisé que lorsque X était un groupe de Lie non compact, l'analyse de la plupart ces problèmes se simplifiait considérablement et des réponses très explicites étaient alors accessibles. Depuis, j'ai cherché l'ingrédient suffisant et surtout nécessaire à cette simplification. Ce n'était pas tant la propriété *géometrique* d'être un groupe de Lie, mais plutôt une propriété *homologique*, plus subtile, celle de ne pas posséder de *cohomologie intérieure*, propriété partagée par bien plus d'espaces que les seuls groupes de Lie ([1]). En conclusion, ce sujet de recherche, de part sa nature homologique, ses questionnements et ses méthodes le situent plutôt dans un cadre de recherches transverse à celui d'une interaction algébro-géométrique.

Question 3 : Dans vos recherches, en quoi vous appuyez-vous sur l'intuition géométrique ?

Avant de me pencher sur cette question, je voudrais mentionner le fait que lorsque l'on fait des mathématiques, on aborde rarement un problème n'appartenant pas déjà à un certain univers que d'autres, avant nous, ont exploré, débroussaillé et relevé la nature des ses objets. Nous héritons, non seulement des problèmes ouverts, mais aussi d'une forme d'intuition qui nous est largement imposée par l'histoire du sujet. Les questions apparaissent alors comme des énoncés se rapportant à un certain univers, à un certain monde. Ce monde qui nous paraît indissociable des questions, s'installe dans nos esprits comme un modèle commode dans lequel la question « prend corps » et se laisse étudier. On dirait que notre cerveau a besoin de mettre une question dans un certain contexte dont il va se familiariser (s'il ne l'est pas déjà) et qu'il va apprivoiser jusqu'à ce que la question y trouve naturellement une réponse. Mais voilà, il nous arrive aussi d'être en face d'une question ouverte qui résiste à toute analyse, et d'entendre alors quelqu'un s'exclamer : « il manque une idée » ! Ce qui, clairement, en dit long sur le rapport entre les questions et les intuitions.

En mathématique, il existe beaucoup de mondes différents avec des objets et des intuitions qui leur sont propres. La géométrie n'en est qu'un parmi d'autres et si beaucoup de disciplines deviennent plus accessibles dans une approche géométrique, d'autres me paraissent en être hermétiques. N'étant pas assez savant, je préfère rester prudent et ne pas accorder à la géométrie le statut d'une approche universelle dans la recherche mathématique ; la question fondamental étant bien évidemment de savoir si une telle approche aide ou non à la découverte, dans quels cas et surtout dans quelles directions. Je pense qu'il faut, en tout et pour tout, rester maître de ses outils, et non pas le contraire...

1. A ce propos, je voudrais commenter à titre anecdotique que j'ai récemment assisté à une soutenance de thèse dans laquelle cette même condition cohomologique jouait un rôle important mais cette fois pour les variétés de Shimura et en théorie des nombres. J'ai trouvé cela assez drôle pour ne pas dire remarquable.

Je vais essayer maintenant de rendre mes propos plus concrets en citant deux exemples assez extrêmes où l'approche géométrique apporte réellement quelque chose.

— L'un est celui du théorème de Pythagore. En disant que le carré de la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés de longueurs des deux autres côtés, il exprime une propriété algébrique des longueurs des côtés du triangle. Et là, limité à des éléments aussi sommaires et en s'interdisant plus d'interprétation géométrique des données, l'esprit peine à trouver une explication à cette propriété et encore moins à la concevoir comme possible. Il suffit par contre d'interpréter l'opération d'élévation au carré d'une longueur comme représentant l'« aire » du carré de côté de cette longueur, pour que le problème s'éclaire d'une nouvelle lumière. On n'a plus affaire à une équation quadratique sur des longueurs, mais à une équation linéaire sur les aires des carrés que l'on peut dessiner sur les côtés du triangle. La question d'origine devient alors : peut on remplir le grand carré avec le contenu des deux autres. Et tout d'un coup, on réalise que l'on peut incorporer des opérations de déplacement, de découpage, de déformations à aire constante,... pour « manipuler » les données. De nouvelles pistes pour une réponse positive se présentent alors rapidement à l'esprit. Les démonstrations d'Euclides, chinoise, indienne,... relèvent de cette idée et sont toutes plus ingénieuses et amusantes les unes que les autres. Bien sûr, beaucoup d'autres preuves existent depuis et même qui ne parlent pas d'aires, mais la question n'est pas tant l'existence des preuves dans l'absolu, mais plutôt comment faire pour en trouver une. Quel modèle des données va nous permettre de transformer le problème original le rendant plus maniable à nos esprits, et en particulier nous permettant d'avoir un sentiment sur sa vraisemblance. Et, inversement, dans quel mesure le problème, lui-même, est une porte (initiatique) pour la découverte d'un monde plus vaste dont il est une évidence parmi beaucoup de phénomènes inconnus et étonnants à découvrir.

— La dernière phrase anticipe sur mon deuxième exemple : celui des conjectures de Weil, autour desquelles j'ai travaillé une dizaine d'années. Dans les années 40, André Weil s'intéresse au problème arithmétique du dénombrement des ensembles (finis) des solutions d'un système S d'équations polynomiales donné, lorsque l'on prend les coefficients successivement dans les différentes extensions finies du corps $\mathbb{F}$ à p éléments. Plus précisément, il s'intéressait à une série entière dont les coefficients permettent de retrouver la suite de ces cardinaux : la « fonction Zéta d'une variété algébrique sur un corps fini ». A son sujet, Weil démontra dans le cas des courbes, dans un travail pionnier remarquable, que sous des hypothèses assez naturelles, c'était une fonction rationnelle, c'est à dire, pouvait s'écrire comme quotient de deux polynômes à coefficients entiers. Il montra aussi qu'elle vérifiait une certaine équation fonctionnelle et une certaine propriété analogue à l'hypothèse de Riemann. Il conjectura aussi que toutes ces propriétés devaient être encore vérifiées, au delà des courbes, par toute variété projective non singulière sur un corps fini, ce que l'on appellera depuis « les conjectures de Weil ». Il eut même « une idée » de la démarche à suivre. Notons $\overline{\mathbb{F}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}$, et soit X l'ensemble des solutions sur $\overline{\mathbb{F}}$ du système d'équations S. En caractéristique positive, il existe un opérateur remarquable : le Frobenius, noté Φ dans la suite, qui va agir sur X de telle manière que l'ensemble des solutions de S sur l'extension finie de degré n de $\mathbb{F}$ s'identifie à l'ensemble des points fixes de Φ^n agissant sur X. Ainsi, le problème original se transforme en un problème d'ensembles de points fixes finis d'une application (continue) agissant sur une espace topologique. Or, le théorème de points fixes de Lefschetz pour les variétés complexes, bien connu à l'époque, exprime le cardinal de ces ensembles en termes de la trace de l'opérateur Φ^n agissant sur la cohomologie rationnelle de X, et ce d'une manière « compatible » aux recouvrements ouverts de X (Mayer-Vietoris), ce qui permet de relier l'étude de la fonction Zéta de X à celles des ouverts d'un recouvrement. La rationalité ainsi que l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction Zéta de X devenaient alors conséquences faciles de celles des ouverts de X assez petits (affines), ce qui ne présentait pas de difficultés insurmontables. Ainsi, tout comme dans l'exemple du théorème de Pythagore, le changement de point de vue de la question, l'enrichissait par l'incorporation de nouvelles méthodes d'analyse, de nouvelles manières de « bouger » dans le problème. Mais cette idée lumineuse de Weil se heurtait à un problème majeur : il n'existait à l'époque aucune idée de ce que pouvait être l'analogue pour une variété algébrique en caractéristique positive de la cohomologie rationnelle d'une variété complexe. La fascination exercée par la beauté des conjectures de Weil, l'idée de démonstration générale de Weil, et aussi l'importance à priori de l'existence d'une telle théorie cohomologique en tant qu'outil disponible pour attaquer bien d'autres problèmes, poussa des mathématiciens de premier rang de l'époque, dans un effort de plus de trente ans, à la recherche, par des voies très diverses, de théories cohomologiques possédant assez de bonnes propriétés pour assurer la validité de l'heuristique de Weil, ce que l'on appelle depuis : les cohomologies de Weil. Les cohomologies : étale l-adique, de de Rham p-adique, cristalline et rigide, sont issues de cette quête, et c'est en 1974 que Pierre Deligne réussi, enfin, à prouver les conjectures à l'aide de la cohomologie étale l-adique.

Je voudrais insister sur le phénomène de la découverte et ses motivations (masquées). Au départ : un problème d'arithmétique qui trouve une réponse positive par une certaine méthode que l'on voit difficilement comment généraliser à des situations plus générales. Le cas traité étant « riche et profond », il justifie l'espoir d'une généralisation. C'est alors que le mathématicien, qui avait longuement réfléchi à la question, évoque une « idée nouvelle » (mais qui lui avait probablement chatouillé l'esprit bien de fois) en s'affranchissant de l'exigence de justifier tous ses détails. Il change le contexte : arithmétique $\mapsto$ géometrie-algébrique $\mapsto$ variétés complexes et il esquisse une ligne argumentaire avec l'outil clef de la cohomologie des variétés complexes qui n'avait pas (encore) d'analogue dans les autres contextes. Le problème se pose ensuite de voir si l'on peut donner un sens à un tel outil dans ces autres contextes. Il n'y a aucune raison à priori pour que cette démarche réussisse, lorsque c'est le cas nous sommes devant une véritable découverte. On se demande alors si cette « nouvelle idée » était une intuition, au sens de prescience, d'une vérité cachée, ou seulement un coup de chance... Quoi qu'il en soit, tel Christophe Colomb qui, parti trouver une nouvelle route pour atteindre les Indes, découvre l'Amérique, l'esprit humain, parti à la recherche d'une preuve des conjectures de Weil, découvre (sous l'impulsion visionnaire de Grothendieck) les schémas, les topos, les catégories dérivées,..., les cohomologies de Weil,..., les motifs ! Ce qui donne tout son sens à ma réfection sur le fait que certaines question sont assimilables à des portes initiatiques.

Revenons maintenant à la question (3). Comme je l'évoquais plus haut, je me suis intéressé aux cohomologies de Weil entre les années 2002 et 2013, et plus particulièrement au fondements de la cohomologie de de Rham p-adique (au sens premier de Monsky-Washnitzer), restée inachevée depuis le succès de la cohomologie étale pour établir les conjectures de Weil. C'est avec Zoghman Mebkhout que nous nous sommes attelés, dans un travail de très longue haleine, à mener à terme la construction d'une théorie de cohomologie de de Rham p-adique sur la catégorie des schémas lisses et séparés sur un corps de caractéristique positive répondant aux exigences d'une cohomologie de Weil. Cela nous a permis d'aborder les conjectures de Weil sans sortir du cadre purement p-adique et de donner aux mathématiques un nouvel outil de recherche.

Dans tous mes travaux, l'intuition géométrique est omniprésente et s'impose, comme je le disais, par l'histoire propre de chaque sujet. Sujets qui se sont trouvés progressivement modelés par les intuitions de chacun des ses acteurs majeurs. Mais, en même temps, je dois dire que je trouve très surprenant que bien de questions abstraites puissent être traitées efficacement par des représentations géométriques. Points, espaces, variétés et sous-variétés différentielles, fibrations localement triviales, applications différentiables,... la quasi-totalité de l'intuition géométrique de la géométrie différentielle s'intègre harmonieusement à la géométrie algébrique devenant un puissant outil heuristique. Le langage géométrique nous aide ainsi à imaginer des propriétés probables du monde abstrait des équations polynomiales et souvent nous indique même le chemin à suivre. Ce support au raisonnement, ce support à la mémoire aussi, semble plutôt répondre non pas aux besoins de la logique intrinsèque aux problèmes mathématiques, mais plutôt aux besoin d'un cerveau devenu, après tant d'évolution, parfaitement adapté à un environnement éminemment géométrique : le monde réel qui nous entoure (tel que nos sens nous le font « sentir »).

En guise de conclusion, et à titre très personnel, je voudrais dire que, bien que je trouve fondamentale l'intuition géométrique dans mes recherches, son efficacité garde pour moi une grande part de mystère.

— Pourquoi est-elle si efficace dans un contexte à priori si éloigné ?

— Existe-t-il un risque pour que, à la longue, le modèle géométrique prenne la place du sujet lui-même et devienne alors une source édulcorée des progrès successifs dans le sujet. Progrès pour lesquels l'approche géométrique serait (donc) « tautologiquement » la plus efficace ? Quel garde-fou contre cette éventuelle dérive ?

Heureusement que des grandes question ouvertes sont toujours là ! Car ce sont bien elles qui montrent les limites de nos méthodes, de nos modèles, de nos intuitions, et, par cela même, qui nous exhortent à plus de création et de découverte. Sans cela aucun réel progrès ne me semble possible.

Question 4 : En quoi selon vous algèbre et géométrie sont liées dans les mathématiques en général ?

Revenant sur mes considérations dans la réponse à la question (1), l'algèbre m'apparaît comme un outil d'écriture, de manipulation et de comparaison de formules portant sur des opérations dont la nature rappelle (ou s'inspire de) celle de la somme et produit des entiers naturels. Mais, à y réfléchir, pourquoi doit-on s'arrêter à ces deux types d'opérations. La réponse à cette interrogation mais semble très floue, bien que, à l'opposé, j'aurais beaucoup de réticences qualifier de (purement) algébrique une formule comportant un signe intégral. Ce signe qui représente le résultat limite d'un processus infini de sommations, exige de l'ensemble sous-jacent (les nombres réels) des propriétés de densité et complétude qui manquent aux entiers naturels, de propriétés classiquement confinées par une convention bien établie à une autre branche des mathématiques : l'analyse. Ces branches, qui ont mis des siècles à se dégager, aussi bien par la nature de leurs objets, que par leur méthodes si spécifiques et par l'ensemble des recherches les incombant, ne me paraissent pas moins relever de subdivisions quelque peu artificielles dans l'esprit mathématicien, lequel devant une question ouverte se laisse influencer, parfois à son insu, par toutes source d'inspiration dans le but de faire une percée.

Si je fais cet aparté, c'est parce que j'ai tendance à voir l'algèbre, ou devrais-je plutôt dire, l'algébrisation d'un sujet, comme une méthode universelle incontournable en mathématiques, tant elle a fait ses preuves. En effet, une bonne partie de la méthode mathématique consiste dans l'encodage des faits dans un langage précis et reproductible (ce qui est le propre de la science). Cette méthode de transcription me parait être l'aboutissement d'une longue tradition algébrique. Je vois par expérience que quel que soit le sujet d'étude, en peu de temps apparaissent, des symboles, des opérations, une syntaxe, ... et des formules les reliant, tant et si bien que vois de l'algèbre partout. Ainsi, au delà de l'algèbre des matrices, de l'algèbre linéaire, de l'algèbre commutative (ou non-commutative), qui correspondent bien à une définition naïve d'algèbre, j'ai rencontré de l'algèbre dans des contextes très éloignés comme par exemple en topologie algébrique, revue dans la contexte de Grothendieck-Verdier qui concerne les catégories dérivées des catégories des faisceaux sur des espaces topologiques, dans la théorie des $\mathcal{D}$-modules... Dans ces contextes, l'algébrisation apparaît par l'introduction d'opérations homologiques, des six « opérations de Grothendieck » et par tout un ensemble de formules les reliant dans un corpus algébrique. Ces formules qui condensent énormément d'information (certaines codent des théorèmes très profonds) sont d'une efficacité redoutable. Mais, redoutables aussi parce que l'on est tenté de les manipuler sans faire attention à leur signification, obtenant alors des preuves « formelles » (ou abstract nonsens) de théorèmes importants dont on peut se demander, à postériori, si on a réellement compris la preuve...

Tout ceci pour préciser comment j'interprète le mot « algèbre » lorsque je lis la question (4), et de lui répondre, donc, que je vois l'algèbre comme à priori liée à une méthode de réécriture, d'approche, de communication et de manipulation de l'information. En tant que telle, l'algèbre apparaît intimement liée au sujet, mais pas (forcément) à la géométrie, car celle-ci n'est pas toujours pertinente dans certains sujets (théorie des catégories, théorie des représentations, ...)

L'autre mot important dans la question (4) est le mot « géométrie » qui, tout comme le mot « algèbre », est susceptible d'avoir plusieurs sens.

On a la géométrie affine, euclidienne, projective, et celles non-euclidiennes issues de l'axiomatique d'Euclides en perturbant son cinquième postulat (des parallèles), par exemple la géométrie hyperbolique... Chacune de ces géométries admet des modèles comportant des structures additionnelles, dont une forte participation de l'algèbre par le biais des coordonnées cartésiennes des espaces sous-jacents, mais aussi par le biais des groupes d'isométries concernés. Dans ces exemples, le lien entre algèbre et géométrie est très fort. Parfois de manière inutilement redondante en ce sens qu'un théorème purement géométrique qui admet une preuve géométrique directe et très élégante, admet aussi une approche purement algébrique, mais celle-ci est souvent obscure et n'apporte rien de plus qu'une vérification calculatoire. D'autres fois, la redondance est très utile car complémentaire, par exemple tous ces théorèmes géométriques qui ont des preuves géométriques rapides et élégantes en petites dimensions sur lesquelles on bâtit une preuve algébrique indépendante de la dimension, ce qui établit le théorème en toute généralité. Il y a aussi des exemples de théorèmes qui font participer les deux contextes à parts égales, aussi bien dans l'énoncé que dans la preuve comme par exemple (parmi beaucoup d'autres) le théorème fondamental de la géométrie affine qui affirme qu'une bijection entre deux espaces affines est un isomorphisme affine, si et seulement si, elle transforme tout triplet de points alignés en un triplet de points alignés. Dans ce théorème, on peut sans risque dire que l'interaction entre algèbre et géométrie est optimale en ce sens que l'on ne peut replacer un point de vue par l'autre sans réellement perdre beaucoup dans la qualité de l'information.

Comme je l'ai déjà signalé dans la question (2), la géométrie de mes sujets de recherche, est plutôt celle de la géométrie différentielle, riemannienne, complexe, algébrique, et aussi celle des espaces localement compacts sur lesquels portent des questions de topologie algébrique. Aussi, le lien entre algèbre et géométrie va dépendre de chaque exemple concret.

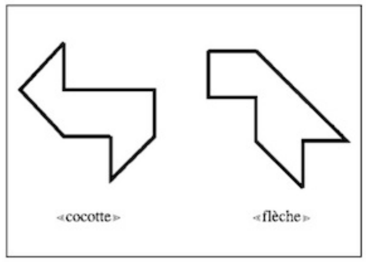
Il y a tout un monde de nuances dans la manière dont algèbre et géométrie vont se lier, vont interagir, ça peut aller d'une redondance complète de points de vue avec des interactions très riches, une forme de symbiose, jusqu'au à la simple concomitance à l'intérieur d'un sujet, chacune apportant sa pierre à un édifice qui les dépasse toute deux.

Je ne reviendrai pas sur rapport entre algèbre et géométrie en géométrie algébrique sur lequel j'ai déjà parlé dans la question (3), mais je voudrais éclairer mes propos des paragraphes précédents en parlant d'un autre sujet qui m'a beaucoup intéressé, celui de l'isospectralité des tambours. Dans ce sujet, la question à l'origine, posée par Marc Kac en 1966 : « Peut-on entendre la forme d'un tambour ? » se reformule d'emblée (modulo l'équation des membranes vibrantes) sous une forme très géométrique : Peut-on trouver deux domaines plans non isométriques ayant même spectre pour le laplacien ? La réponse est oui, et la première preuve connue qui date des années 90, repose sur une idée remarquable liée à la théorie des caractères des représentations des groupes finis. Cette idée permet de construire deux corps de nombres non isomorphes admettant la même fonction Zéta de Dedekind, ce qui est un résultat de théorie des nombres, donc essentiellement arithmétique et connu à l'époque. Or, dans le cas d'une variété riemannienne M, l'analogue de la fonction Zéta de Dedekind est la fonction « Zéta des variétés riemanniennes » définie par la série

$$\zeta_M(s) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^s}, \quad \mathrm{Re}(s) \gg 0,$$

où $\{0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots\}$ est l'ensemble des valeurs propres (non nulles) avec leur multiplicités du moins-laplacien $-\Delta_M$. Il est connu que l'application $s \mapsto \zeta_M(s)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ et que $\zeta_{M_1} = \zeta_{M_2}$ si et seulement si, M_1 et M_2 sont isospectrales.

Aussi, l'analogue en théorie des nombres de la question de Kac avait déjà une réponse négative. Et c'est ainsi que M-.F. Vigneras, spécialiste de la théorie des nombres, réalise, alors qu'elle écoute une conférence sur le sujet de Henri McKean (analyste), qu'elle connaissait déjà la réponse à la question de Kac. Elle publie alors en 1980 un article prouvant l'existence de surfaces hyperboliques compactes isospectrales non isométriques ce qui lui vaut une très rapide reconnaissance internationale. Par la suite, le mathématicien japonais T. Sunada s'intéressera à l'approche de Vigneras pour en extraire ses idées clefs et donnera en 1985 une méthode théorique simplifiée pour construire de surfaces isospectrales, méthode qui sera mise en pratique par P. Buser qui introduira en 1987 les surfaces qui portent son nom, surfaces sur lesquelles P. Berard participera à la mise au point de la technique de transplantation, avantageusement utilisée par C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert dans un travail conjoint en 1992, pour construire les des deux premières surfaces compactes planes isospectrales non-isométriques connues. Voici à quoi elles ressemblent :



Cet exemple montre à quel point il faut se méfier de la tentation de croire que la réponse à une question dans une discipline donnée viendra de l'intérieur seul de la discipline. Il met en relief mes propos sur l'attitude de totale liberté que l'on doit avoir devant une question ouverte. Ici donc, alors que la question de Kac venait de très loin : d'abord posée par les physiciens du XIXe sous la forme : Peut-on entendre la forme d'une cloche ? et même : Peut on voir la composition des étoiles (en faisant allusion à la spectrographie) ? ensuite reprise par les spécialistes en EDP sous la forme de la question de Kac, toutes des questions de ce que l'on appelle aujourd'hui : « le problème inverse » en « géométrie spectrale », alors donc que ce sujet stagnait dans des recherches (en interne) restées plutôt infructueuses, la première réponse claire est apparue presque 100 ans plus tard et ce grâce à une inspiration dont la source était très algébrique puisqu'il s'agissait de la théorie des nombres.

Aujourd'hui, si l'on doit expliquer complètement l'isospectralité des deux formes ci-dessus, il faut un peu de algèbre pour la partie élémentaire de la théorie des caractères des groupes finis, et aussi pour dépouiller la structure du groupe $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{F}_2)$. Il faut aussi un peu de géométrie riemannienne, mais seulement dans le cas plat ce qui représente une énorme simplification par rapport à la théorie générale. Mais il ne faut quasiment plus rien d'analyse et des EDP, et absolument plus rien du tout de la théorie des nombres. L'isospectralité peut ainsi être expliquée de manière exhaustive en M2, voire fin de M1. Il en résulte qu'un résultat important dont l'énoncé est très chargé de références à l'analyse est conséquence de constructions et résultats qui n'ont rien de commun avec cette discipline, ni par ailleurs avec les sources historiques de sa résolution. Aussi, le lien entre algèbre et géométrie dans ce sujet qui a été tellement déterminant d'un point de vue historique, se retrouve aujourd'hui réduit à une simple concomitance de méthodes.

C'est là un point qui donne matière à réfléchir car, en effet, dans les versions épurés de beaucoup de grands théorèmes, les idées clés, les liens et interactions entre disciplines différentes, les sources d'inspirations, qui ont tous participé à la découverte, s'effacent pour le « besoin » d'une esthétique parfois sans commune mesure avec les besoins fondamentaux en recherche : la genèse des idées, la découverte de preuves, et surtout le besoin de projection vers l'inconnu.

Question 5 : Selon vous, qu'est ce qui représente le mieux les liens entre algèbre et géométrie ? Un objet mathématique, un théorème en particulier. . .

Comme je le disais dans les précédentes questions, les liens entre algèbre et géométrie sont très divers et dépendent du sens précis que l'on donne à ces termes. Une fois cet aspect précisé, il y a aussi l'échelle de l'interaction : locale ou globale, le sens : laquelle agit sur laquelle, la forme de l'interaction : par le langage, l'heuristique, par la nature des énoncés. En géométrie algébrique les interactions se manifestent à toute échelle, dans tous les sens et sous toutes ses formes.

On a tendance à dire que la géométrie algébrique est l'ensemble de faits algébriques que l'on découvre par le biais d'une heuristique géométrique. Mais, fait remarquable, inversement, l'algèbre est aussi à l'origine de la découverte de nouveaux êtres géométriques.

Le point de départ de la géométrie algébrique pourrait se situer peu après le théorème des zéros de Hilbert qui établit une correspondance biunivoque et naturelle entre les points d'une partie algébrique Y d'un espace affine sur $\mathbb{C}$ (corps des complexes), et les idéaux maximaux de l'algèbre des fonctions complexes polynomiales sur Y. Ce théorème établit déjà un premier lien important entre algèbre et géométrie. A partir de là, et alors que le langage des catégories se répandait (fin des années 40), on a pu reformuler ce théorème par une équivalence de catégories entre, d'une part, la catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres de type fini et réduites, et les homomorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres, et, d'autre part, la catégorie des variétés algébriques affines complexes et les applications algébriques. C'était là, un deuxième lien beaucoup plus fertile que le premier. Il a permis d'établir un dictionnaire d'opérations équivalentes : sur les algèbres (quotients, localisations, produits tensoriels,...), et sur les espaces géométriques (restrictions fermées, ouvertes, produits,...). Ce dictionnaire sera un puissant moteur de recherches car il permettait dès lors de s'appuyer sur des intuitions géométriques pour progresser dans le monde abstrait des algèbres.

Il faudra ensuite attendre la fin des années 50 pour que Grothendieck se lance dans un vaste projet d'extension de cette équivalence dans le but de s'affranchir des limitations du corps de base $\mathbb{C}$, pour le remplacer par n'importe quel autre anneau commutatif A, et de s'affranchir aussi des limitations de finitude et réduction des algèbres. La question devenait alors : comment « géométriser » la catégorie des A-algèbres commutatives toute entière, et ce, quel que soit l'anneau A.

Mais voilà, si l'extension du côté algébrique avait été évidente, celle du côté géométrique et celle, postérieure, de la l'équivalence de catégories, l'étaient beaucoup moins, notamment dans les situations où le théorème de Hilbert n'était plus satisfait. Le côté géométrique s'est alors vu progressivement enrichi des concepts de « spectre » d'un anneau (ensemble de ses idéaux premiers muni de la topologie « spectrale »), de « faisceau (d'anneaux) structural », d'« espace annelé », pour enfin en arriver à celui de « schéma ». Tous ont été créés de toutes pièces pour résoudre la question de l'extension de la catégorie des espaces algébriques. Le fait que de tels objets aient pu exister est déjà en soi une découverte majeure (à mes yeux) à la fois par le contenu que par la méthode. C'a été un acte de création/découverte très puissant qui a demandé la révision de toute sorte de notions dont celles de point et d'espace.

L'équivalence entre la catégorie des A-algèbres et celle des schémas basés sur Spec(A) et, pour moi, indiscutablement le théorème qui fonde la naissance de la géométrie algébrique commutative. Il représente le mieux le lien entre algèbre et géométrie sous la forme d'un théorème.

Un schéma est un espace topologique, muni d'un faisceau d'algèbres qui en fait un espace « localement »annelé. De nature à la fois géométrique et algébrique, il représente le mieux le lien entre algèbre et géométrie sous la forme d'un objet.

Mais l'algèbre et la géométrie sont aussi inextricablement liées à travers l'heuristique et le langage. En effet, dans cette histoire d'émergement de la géométrie algébrique, je voudrais insister sur la nature et sens successifs des interactions.

Au départ, algèbre et géométrie concourent dans le contexte de la géométrie complexe pour l'étude d'un même objet : courbe, surface, sous-espace, définis comme les zéros d'une famille de polynômes. Ces disciplines y concourent mais d'une manière que l'on pourrait qualifier de concomitante, de complémentaire. La poursuite de l'étude de ces ensembles de nature algébro-géométriques conduit finalement à la découverte d'un premier lien intime, une forme de tunnel ou de passage qui va permettre de « transporter » les concepts d'un domaine vers l'autre. Et c'est alors que va s'installer une forme de symbiose entre les deux disciplines, chacune servant à explorer et enrichir l'autre. La géométrie envers l'algèbre : les opérations de sous-espace algébrique engendré par une ensemble, de réunion ou intersections d'espaces algébriques, de produits d'espaces algébriques, d'applications algébriques, de fibrations, etc. conduiront à la recherche des opérations correspondantes dans les ensembles des idéaux des algèbres. Réciproquement, l'algèbre envers la géométrie : poussera à dépasser l'univers des variétés algébriques affines et l'effort conduira à la conception de nouveaux objets géométriques : les schémas affines.

Ce processus évolutif aboutira à la découverte de l'équivalence entre la catégorie des A-algèbres commutatives et celle des schémas (affines) basés sur Spec(A), et à l'éclosion d'un nouveau continent : la géométrie algébrique commutative dont chaque catégorie était une incarnation possible. Pour reprendre mes propos du tout au début du questionnaire, algèbre et géométrie apparaissaient alors comme les deux faces d'une pièce que l'on ne pouvait saisir qu'à travers elles.

Par tous ces commentaires, je justifie ma réponse à la question (5) : de mon point de vue, ce qui représente le mieux l'existence d'un lien intime et fort entre deux mondes est la possibilité de ce type de symbiose. Cela se traduit sous la forme de théorèmes et objets dont l'intuition, les preuves, les applications, mêlent de manière indissociables les deux mondes.

Question 5 bis : Pour vous, le théorème des zéros de Hilbert est-il un bon exemple de l'articulation entre l'algèbre et la géométrie ?

C'est un bon exemple, mais je le trouve beaucoup moins frappant que l'équivalence des catégories entre la catégorie des variétés affines sur $\mathbb{C}$ et la catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres de type fini réduites. Equivalence qui, rappelons-le, a été étendue bien au-delà de la sphère de validité du théorème de zéros de Hilbert.

En fait, cette équivalence est une « dualité » entre algèbre et géométrie, ce qui est un phénomène conceptuellement bien plus profond et universel que celui décrit par le théorème de Hilbert qui, lui, se « limite » à révéler le sens algébrique du concept géométrique de « point d'une variété affine ».

A ce sujet, je voudrais faire une parenthèse pour insister sur le fait fondamental qui dit que l'identité d'un objet mathématique (dans une catégorie) est dans ses « relations » avec les autres objets (les morphismes de la catégorie). Aussi, dans la dualité entre algèbre et géométrie, si l'un des volets importants est de comprendre quel objet algébrique correspond à tel objet géométrique et vice-versa, le deuxième grand volet est celui d'expliquer comment se correspondent les « relations ». Or, le théorème de Hilbert qui intervient certes de manière indiscutable et décisive dans le premier volet, ne suffit pas à lui tout seul pour répondre aux besoins du deuxième. Ceci sera le résultat en fait d'une autre grande idée en mathématiques qui consiste à systématiquement (fonctoriellement) remplacer un espace par son algèbre de fonctions, ce qui est, en essence, le réflexe de base du principe de « dualité ».

Je vais rappeler comment, à partir de l'interprétation algébrique du « point », une certaine heuristique de dualité se déroule sans difficulté technique majeure, ce qui justifie largement l'idée que le théorème de Hilbert occupe bien une place distinguée dans l'« articulation » entre l'algèbre et la géométrie. (Bien que, aussi distinguée soit-elle, je ne la vois toujours pas éclipser l'importance du principe de dualité dont elle fait partie.)

Le principe de dualité suivant fonctionne bien dans beaucoup de contextes différents ce qui lui confère une certaine universalité. Pour l'illustrer mais aussi pour rappeler les étapes à suivre, je vais l'appliquer à la catégorie des espaces topologiques compacts et les applications continues plutôt qu'à celle des variétés affines complexes et les applications algébriques. Ici, je choisis délibérément de changer de contexte pour montrer que la géométrie algébrique n'a pas l'exclusivité d'une dualité géométrie/algèbre, ce qui devrait aider à mieux évaluer la place du principe de dualité relativement au théorème des zéros de Hilbert, une fois revenus dans le cadre de la géométrie algébrique complexe.

La transposition des données et remarques qui vont suivre, du cadre topologique au cadre algébrique, devrait être évidente.

0) On note $I\!R$ le corps des nombres réels muni de la topologie ordinaire.
1) Si X est un espace topologique compact, on note $I\!R[X]$ la $I\!R$-algèbre des applications continues de X à valeurs dans $I\!R$, somme et produits définis point par point.

Commentaire. L'algèbre $\mathbb{R}[X]$ est réduite, i.e. sans élément nilpotent. Elle n'est presque jamais de type fini, contrairement au cas des variétés affines.

2) Si $a : X \to Y$ est une application continue, l'application $a^* : \mathbb{R}[Y] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $a^*(f) = f \circ a$, est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres.

3) La correspondance qui associe

$$X \mapsto \mathbb{R}[X] \quad et \quad (a : X \to Y) \mapsto (a^* : \mathbb{R}[Y] \to \mathbb{R}[X])\,,$$

est un foncteur contravariant de la catégorie d'espaces topologiques compacts vers la catégorie $\mathrm{Alg}(\mathbb{R})$ des $\mathbb{R}$-algèbres.

4) Pour $x \in X$, l'idéal $\mathfrak{Z}(x)$ des fonctions de $\mathbb{R}[X]$ qui s'annulent en x, est maximal. En particulier l'intersection des idéaux maximaux (le radical de Jacobson) de $\mathbb{R}[X]$ est l'idéal nul.

5) Un exercice facile de topologie générale à l'aide du lemme d'Urysohn permet de voir que tout idéal maximal de $\mathbb{R}[X]$ est de la forme $\mathfrak{Z}(x)$ pour un unique $x \in X$. La correspondance $x \to \mathfrak{Z}(x)$ est donc une bijection entre X et l'ensemble $\mathrm{Spm}(\mathbb{R}[X])$ des idéaux maximaux de $\mathbb{R}[X]$.

   Commentaire. De (1) et de (5), on voit que les algèbres de la forme $\mathbb{R}[X]$ sont de radical de Jacobson nul (donc réduites) et de corps résiduel $\mathbb{R}$.

6) Si $\alpha : \mathbb{R}[Y] \to \mathbb{R}[X]$ est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres, l'image inverse par α d'un idéal maximal $\mathfrak{Z}(x)$ de $\mathbb{R}[X]$ est un idéal de $\mathbb{R}[X]$, lui aussi maximal (!), donc de la forme $\mathfrak{Z}(y)$ pour un unique y dans Y (d'après (5)). L'homomorphisme α détermine ainsi l'application $a : X \to Y$ définie par $a(x) = y$. On montre alors que pour toute fonction f de $\mathbb{R}[Y]$, on a $\alpha(f) = f \circ a$ (lié à la question (4)), ce qui prouve, d'abord, que a est continue, et ensuite, que $\alpha = a^*$ (cf. (3)).

7) D'après (6), tout homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\alpha : \mathbb{R}[Y] \to \mathbb{R}[X]$ est de la forme a^* pour une certaine application continue $a : X \to Y$. Cette application est unique à avoir cette propriété. En effet, si $b : X \to Y$ était telle que $a^* = b^*$ alors

$$\mathfrak{Z}(b(x)) = (b^*)^{-1}(\mathfrak{Z}(x)) = (a^*)^{-1}(\mathfrak{Z}(x)) = \mathfrak{Z}(a(x))\,,$$

   et alors $b(x) = a(x)$, d'après (5).

8) Par ce qui précède, le foncteur dans (3) est une équivalence de catégories sur la sous-categorie pleine de $\mathrm{Alg}(R)$ des algèbres de la forme $\mathbb{R}[X]$.

9) Dans le principe de dualité, il y a aussi la « bidualité » qui dit que le dual du dual doit s'identifier à l'objet de départ. En termes de catégories et dans le contexte présent, cela signifie qu'il existe une équivalence contravariante de la catégorie des $\mathbb{R}$-algèbres (de la forme $\mathbb{R}[X]$) vers la catégorie des espaces topologiques, que je vais noter $(\_) \rightsquigarrow (\_)^\vee$, et un application naturelle (dite d'adjonction) $X \to \mathbb{R}[X]^\vee$ qui est un homéomorphisme.

Sans trop entrer dans les détails et suivant le réflexe de base en dualité, notons pour une algèbre $\mathbb{R}[X]$ donnée, par $\mathbb{R}[X]^\vee$, l'ensemble des homomorphismes de $\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$. Cet ensemble $\mathbb{R}[X]^\vee$ est, d'après (5) (corps résiduels $= \mathbb{R}$), en bijection canonique avec l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathbb{R}[X]$, qui, de nouveau d'après (5)(idéal-max $= \mathfrak{Z}(x)$), est aussi en bijection canonique avec l'ensemble X lui-même. D'où la bijection ensembliste $E(X) : X \to \mathbb{R}[X]^\vee$ qui associe à x la surjection canonique $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]/\mathfrak{Z}(x) = \mathbb{R}$ (écriture intrinsèque pour l'homomorphisme d'évaluation en x qui fait correspondre à une fonction f de $\mathbb{R}[X]$ le nombre réel $e_x(f) := f(x)$). Mais l'ensemble $\mathbb{R}[X]^\vee$ doit être un espace topologique, aussi, nous devons encore le munir d'une topologie. Pour cela, on remarque que la classe d'un élément f de $\mathbb{R}[X]$ dans l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/\mathfrak{Z}(x) = \mathbb{R}$, que nous notons (pour cause) $f(x)$, définit une application ensembliste $f : X \to \mathbb{R}$. La topologie de $\mathbb{R}[X]^\vee$ est alors définie comme la plus grossière rendant continues toutes ces applications $f : X \to \mathbb{R}$. Cette topologie est séparée et est à priori plus grossière que celle de X, ce qui assure la continuité de l'application $E(X) : X \to \mathbb{R}[X]^\vee$, sa bicontinuité découle alors de ce que X est compact.

Pour être rigoureux, la définition du foncteur $(\_) \rightsquigarrow (\_)^\vee$ demande encore de préciser son action sur les homomorphismes de $\mathbb{R}$-algèbres, mais comme cette action suit de près les constructions des étapes (6) et (7), je m'abstiendrai d'en parler davantage.

Commentaire. Cette étape (9), qui n'est pas absolument nécessaire, est souvent appelée la procédure de « reconstruction ». Comme son nom l'indique, elle permet de reconstruire un espace à partir de la connaissance de son dual. Le but de cette étape, on l'aura compris, est la construction d'un inverse de la l'équivalence de catégories de (3).

Dans le cadre de la géométrie algébrique, la démarche est exactement la même, seule change la nature des justifications. En termes de difficulté de justification, la différence la plus remarquable étant dans (5) qui, dans le cas algébrique, est précisément remplacée par le théorème des zéros de Hilbert.

Ma motivation en présentant tous ces détails a été de souligner les endroits précis où la caractérisation algébrique du concept de « point d'un espace » intervient de manière essentielle à l'établissement d'une dualité entre algèbre et géométrie, mais aussi de montrer la nature des autres ingrédients. Il résulte de leur inspection, mais aussi de mon expérience, que c'est effectivement le point (5) qui normalement bloque cette forme d'une dualité, de sorte que l'on est en droit de voir en lui un ingrédient critique, et de lui reconnaître donc un statut privilégié. Néanmoins, et en accord avec ma première réponse, je continue de penser que si le point (5) est un point clef, il n'est pas le phénomène clef, à savoir la dualité algèbre/géométrie.

Question 6 : Donnez-vous, ou avez-vous donné, des cours d'algèbre ? Si oui : Quelle place donnez-vous à l'articulation avec la géométrie, et aux représentations géométriques ? Avez-vous un exemple ?

Je ne suis pas enseignant, mais j'ai donné des cours spécialisés en M2 dans des thèmes liés à la géométrie algébrique et dans le cadre de la formation à la recherche. Je ne suis donc pas un professionnel de l'enseignement.

Mes cours partaient nécessairement d'un bagage de connaissances de base relativement large dans une discipline donnée, large mais non pas pointu, le but du cours étant alors précisément de mettre rapidement l'étudiant devant un secteur où l'on fait activement de la recherche. Il fallait apporter à sa conscience un problème ouvert en lui donnant tous les éléments pour sa compréhension mais aussi qui pourraient lui permettre de faire des progrès.

A ce niveau où le temps est limité, la technicité prime et la réflexion explicite sur les articulations entre l'algèbre et la géométrie n'est plus d'actualité. C'est quelque chose que l'on présume (souvent à tort) plus ou moins acquise par les étudiants. Le cours apparaît alors comme un terrain où ces articulations se mettent à l'oeuvre révélant alors dans la pratique tout leur intérêt.

A ce sujet, je dois dire que, moi-même, je n'ai pas souvenir d'avoir suivi des cours en géométrie algébrique dans lesquels on se soit livré à une réflexion un tant soit peu élaborée sur les thèmes de votre questionnaire. Le cours de mathématiques sont généralement guidés par des considérations pragmatiques, ils sont orientés vers l'action et peuvent manquer certaines occasions de réflexion, ce qui relève bien souvent de la qualité et expérience de l'enseignant.

En mathématiques, comme dans tant d'autres métiers, il y a le « faire » et le « comprendre », ce sont des questions très différentes, elles répondent à des besoins différents et même en opposition. La première est d'ordre pratique : on veut percer la barrière de l'inconnu, peu importe comment, c'est une nécessité « à priori ». La seconde est d'ordre philosophique, elle répond à un besoin beaucoup plus profond qui se pose (forcément) après que la première ait réussi : « qu'est ce qu'on a fait, qu'est ce qu'on a découvert, pourquoi on a réussi... ». C'est une question « à postériori » fondamentale, elle demande du temps supplémentaire, du recul et des qualités d'esprit d'une autre nature. Les thèmes de votre questionnaire se rapportent davantage à cette seconde question, contrairement à mes cours.

En reprenant une réflexion que j'ai déjà exprimée, on pourrait dire que les grandes questions mathématiques non résolues sont des portes initiatiques. Le vrai travail de l'esprit commence lorsque l'on a réussi à les entr'ouvrir.

Je voudrais terminer en citant René Thom lorsqu'il dit : *Le but de la science n'est pas seulement d'agir, mais de comprendre. C'est cette compréhension qui distingue la science de la magie.*