A propos d'un théorème d'Henri Cartan

Alberto Arabia*

Ce texte concerne les articles de Henri Cartan suivants :

C1. *Notions d'algèbre différentielle ; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie.* Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, pp. 15–27.

C2. *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal.* Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, pp. 57–71.

On donne une preuve simple du Théorème 3 de [C2] (p. 62). Les notations seront celles de [C1,C2] à de petites différences près.

§ 1. Rappels

1.1 Objets et notations

- Dans la suite, les objets gradués le sont sur $\mathbb{N}$.
- $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dual noté $\mathfrak{g}^\vee$.
- $\boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee)$ algèbre graduée des fonctions polynôme sur $\mathfrak{g}$.
- $\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$ algèbre graduée des formes multilinéaires alternées sur $\mathfrak{g}$.
- Pour chaque $x \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme $\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ induit une action sur $\mathfrak{g}^\vee$ qui se prolonge en des dérivations de degré 0 sur $\boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee)$ et $\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$, notées $\theta(x)$. On a ainsi des homomorphisme d'algèbres de Lie
$$\theta : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}^0(\boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee), \boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee)) \quad \text{et} \quad \theta : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}^0(\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee), \Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee))$$
- Pour chaque $x \in \mathfrak{g}$, la forme linéaire qui fait correspondre $\lambda \in \mathfrak{g}^\vee \mapsto \lambda(x)$ induit une antidérivation de degré -1 sur $\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$ notée $\boldsymbol{i}(x)$.
- $d_{\boldsymbol{K}} : \Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee) \to \Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$, « *différentielle de Koszul* », antidérivation de degré $+1$, définie par :
$$d_{\boldsymbol{K}}(\_) = \frac{1}{2} \sum_k x'_k \wedge \theta(x_k)(\_) \,,$$
où $\{x'_k\}$ désigne la base duale d'une base $\{x_k\}$ de $\mathfrak{g}$ arbitrairement choisie.
- $\boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) := \Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee) \otimes \boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee)$, « *Algèbre de Weil de* $\mathfrak{g}$ », munie de la graduation définie par :
$$\boldsymbol{W}^d(\mathfrak{g}) := \bigoplus\nolimits_{d=a+2b} \Lambda^a(\mathfrak{g}^\vee) \otimes \boldsymbol{S}^b(\mathfrak{g}^\vee) \,,$$
et d'une structure d'algèbre différentielle graduée par la donnée de l'antidérivation $d_{\boldsymbol{W}} : \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \to \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$, de degré $+1$:
$$\begin{cases} d_{\boldsymbol{W}}(\lambda \otimes 1) \,:=\, 1 \otimes \lambda + d_{\boldsymbol{K}}(\lambda) \otimes 1 \\ d_{\boldsymbol{W}}(1 \otimes \lambda) \,:=\, \sum_k x'_k \otimes \theta(x_k)\lambda \end{cases}$$

La dérivation $\theta(x)$ sur $\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$ et $\boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee)$ se prolonge en une unique dérivation de degré 0 sur $\boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$ notée également $\theta(x)$. L'antidérivation $\boldsymbol{i}(x)$ sur $\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$ se prolonge en une unique antidérivation de $\boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$ dont la restriction à $\boldsymbol{S}^1(\mathfrak{g}^\vee)$ est nulle qui sera également notée $\boldsymbol{i}(x)$. On a ainsi le quadruplet $\big(\boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}), d_{\boldsymbol{W}}, \theta, \boldsymbol{i}\big)$.

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 6e étage, bureau 6D15, 75013 Paris.
Adresse électronique : arabia@math.jussieu.fr

- Une « *algèbre différentielle graduée munie d'une action de* $\mathfrak{g}$ », $\mathfrak{g}$-ADG dans la suite, est la donnée d'une algèbre différentielle graduée $(\boldsymbol{E}^*, d_{\boldsymbol{E}})$, d'un homomorphisme d'algèbres de Lie, $\theta : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}^0(\boldsymbol{E}^*, \boldsymbol{E}^*)$, et d'un morphisme $\boldsymbol{i} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}^{-1}(\boldsymbol{E}^*, \boldsymbol{E}^*)$ vérifiant les conditions :

$$\boxed{\begin{array}{rl} \text{(I)} & \theta([x,y]) = \theta(x)\theta(y) - \theta(y)\theta(x); \\ \text{(II)} & \boldsymbol{i}([x,y]) = \theta(x)\,\boldsymbol{i}(y) - \boldsymbol{i}(y)\theta(x); \\ \text{(III)} & \theta(x) = \boldsymbol{i}(x)d_{\boldsymbol{E}} + d_{\boldsymbol{E}}\,\boldsymbol{i}(x) \end{array}}$$

Remarque. $\big(\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee), d_{\boldsymbol{K}}, \theta, \boldsymbol{i}\big)$ et $\big(\boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}), d_{\boldsymbol{W}}, \theta, \boldsymbol{i}\big)$ sont des $\mathfrak{g}$-ADG.

Un élément ω d'une $\mathfrak{g}$-ADG $(\boldsymbol{E}^*, \boldsymbol{d_E}, \theta, \boldsymbol{i})$, est dit « *basique* » lorsque

$$\boldsymbol{i}(x)\omega = \theta(x)\omega = 0\,, \qquad \text{pour tout } x \in \mathfrak{g}\,.$$

L'ensemble $\mathbf{Bas}^*(\boldsymbol{E})$ des éléments basiques est alors une sous-algèbre différentielle graduée de $(\boldsymbol{E}^*, d_{\boldsymbol{E}})$.

- Une « *connexion* » d'une $\mathfrak{g}$-ADG $\big(\boldsymbol{E}^*, d_{\boldsymbol{E}}, \theta, \boldsymbol{i}\big)$ est la donnée d'une application linéaire $f : \Lambda^1(\mathfrak{g}^\vee) \to \boldsymbol{E}^1$ vérifiant, pour tout $x \in \mathfrak{g}$,

$$f \circ \theta(x) = \theta(x) \circ f \quad \text{et} \quad f \circ \boldsymbol{i}(x) = \boldsymbol{i}(x) \circ f\,.$$

- Pour $(\boldsymbol{E}^*, d_{\boldsymbol{E}})$ comme ci-dessus, on note $\overline{\boldsymbol{E}}^* := \boldsymbol{E}^* \otimes \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$, et

$$\begin{array}{rl} \bar{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{E}} : \overline{\boldsymbol{E}}^* \to \overline{\boldsymbol{E}}^* : & \text{antidérivation de degré } +1 \text{ qui prolonge} \\ & d_{\boldsymbol{W}} : \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \to \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \text{ et } d_{\boldsymbol{E}} : \boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{E}^*. \\ \boldsymbol{i}(x) : \overline{\boldsymbol{E}}^* \to \overline{\boldsymbol{E}}^* : & \text{antidérivation de degré } -1 \text{ qui prolonge} \\ & \boldsymbol{i}(x) : \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \to \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \text{ et } \boldsymbol{i}(x) : \boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{E}^*. \\ \boldsymbol{\theta}(x) : \overline{\boldsymbol{E}}^* \to \overline{\boldsymbol{E}}^* : & \text{dérivation de degré 0 qui prolonge} \\ & \theta(x) : \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \to \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \text{ et } \theta(x) : \boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{E}^*. \end{array}$$

Le quadruplet $\big(\overline{\boldsymbol{E}}^*, \bar{d}_{\boldsymbol{E}}, \theta, \boldsymbol{i}\big)$ est à nouveau une $\mathfrak{g}$-ADG.

§ 2. Le théorème

Théorème (th. 3 [C2]). *Avec les données ci-dessus, l'application* $\omega \mapsto \omega \otimes 1 \otimes 1$ *est un homomorphisme injectif de* $\mathfrak{g}$*-ADG, noté* $\Xi : \boldsymbol{E}^* \hookrightarrow \overline{\boldsymbol{E}}^*$*, de restriction aux éléments basiques notée* $\xi : \mathbf{Bas}^*(\boldsymbol{E}) \hookrightarrow \mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}})$.

Lorsque $(\boldsymbol{E}^*, d_{\boldsymbol{E}}, \theta, \boldsymbol{i})$ *admet une connexion, les morphismes de complexes* Ξ *et* ξ *sont des quasi-isomorphismes.*

Démonstration. Soit $f : \Lambda^1(\mathfrak{g}^\vee) \to \boldsymbol{E}^1$ une connexion et considérons, suivant Cartan, l'antidérivation κ sur $\overline{\boldsymbol{E}}^* = \boldsymbol{E}^* \otimes \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$, de degré -1, nulle sur $\boldsymbol{E}^* \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee) \otimes 1$ et dont la restriction à $\boldsymbol{S}^1(\mathfrak{g}^\vee)$ est définie par :

$$\kappa(1 \otimes 1 \otimes \lambda) = (1 \otimes \lambda \otimes 1) - (f\lambda \otimes 1 \otimes 1)\,.$$

Pour chaque $x \in \mathfrak{g}$, on a les égalités sur $\overline{\boldsymbol{E}}^*$

$$\boxed{\kappa \circ \theta(x) = \theta(x) \circ \kappa \quad \text{et} \quad \kappa \circ \boldsymbol{i}(x) = -\,\boldsymbol{i}(x) \circ \kappa} \qquad (*)$$

En effet, $\kappa\circ\theta(x)-\theta(x)\circ\kappa$ et $\kappa\circ\boldsymbol{i}(x)+\boldsymbol{i}(x)\circ\kappa$ (‡) sont respectivement une antidérivation de degré -1 et une dérivation de degré -2. Leur action sur $\overline{\boldsymbol{E}}^*$ est donc déterminée par leurs restrictions à $1\otimes 1\otimes \boldsymbol{S}^1(\mathfrak{g}^\vee)$, à $1\otimes\Lambda^1(\mathfrak{g}^\vee)\otimes 1$ et à $\boldsymbol{E}^*\otimes 1\otimes 1$ qui sont trivialement nulles. ([1])

L'endomorphisme de $\overline{\boldsymbol{E}}^*$:

$$\boxed{h=\bar d_{\boldsymbol{E}}\circ\kappa+\kappa\circ\bar d_{\boldsymbol{E}}}$$

est une dérivation de degré 0 de $\overline{\boldsymbol{E}}^*$ qui vérifie :

$$\boxed{h\circ\theta(x)=\theta(x)\circ h\,,\quad h\circ\bar d_{\overline{\boldsymbol{E}}}=\bar d_{\overline{\boldsymbol{E}}}\circ h\,,\quad h\circ\boldsymbol{i}(x)=\boldsymbol{i}(x)\circ h\,,\quad h(\boldsymbol{E}^*\otimes 1\otimes 1)=0}$$

(immédiat d'après $(*)$ et (I,II,III)). Il induit donc un endomorphisme de module différentiel gradué sur $\mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}})$ et sur les complexes quotients

$$\operatorname{coker}\Xi=\frac{\overline{\boldsymbol{E}}^*}{\boldsymbol{E}^*\otimes 1\otimes 1}\quad\text{et}\quad \operatorname{coker}\xi=\frac{\mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}})}{\mathbf{Bas}^*(\boldsymbol{E})\otimes 1\otimes 1}\,.$$

Notons $\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\Xi)$, $\mathcal{B}^*(\operatorname{coker}\Xi)$, $\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\xi)$, $\mathcal{B}^*(\operatorname{coker}\xi)$ respectivement les sous-algèbres de cocycles et les idéaux des cobords des complexes en question. On a

$$h(\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\Xi))\subseteq\mathcal{B}^*(\operatorname{coker}\Xi)\quad\text{et}\quad h(\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\xi))\subseteq\mathcal{B}^*(\operatorname{coker}\xi)$$

et les diagrammes de morphismes de modules gradués de degré 0 suivants, où l'on note Π et π les surjections canoniques, sont trivialement commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\Xi) & \xrightarrow{h} & \mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\Xi) & \qquad & \mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\xi) & \xrightarrow{h} & \mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\xi)\\
{\scriptstyle\Pi}\big\downarrow & \oplus & {\scriptstyle\Pi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & \oplus & {\scriptstyle\pi}\big\downarrow\\
H^*(\operatorname{coker}\Xi) & \xrightarrow{0} & H^*(\operatorname{coker}\Xi) & & H^*(\operatorname{coker}\xi) & \xrightarrow{0} & H^*(\operatorname{coker}\xi)
\end{array}\qquad(\mathcal{D})$$

Décomposition spectrale de $h:\overline{\boldsymbol{E}}^*\to\overline{\boldsymbol{E}}^*$. On commence par remarquer que $\overline{\boldsymbol{E}}^*$ est un $\boldsymbol{E}^*$-module gradué à gauche *libre* admettant comme base la famille des monômes

$$M_{\Lambda,P}:=1\otimes(x'_{j_1}\wedge\cdots\wedge x'_{j_r})\otimes(x'_{\ell_1}\cdots x'_{\ell_s})$$

où :

- $\{x_i\}$ est une base de $\mathfrak{g}$ de base duale $\{x'_i\}$,
- $\Lambda:=(j_1<\cdots<j_r)$ et $P:=(\ell_1\leqslant\cdots\leqslant\ell_s)$ avec la convention que lorsque $P=\varnothing$ (resp. $\Lambda=\varnothing$) le terme symétrique (resp. antisymétrique) vaut 1. On notera $|\Lambda|:=r$ et $|P|:=s$.

Étant données deux suite ordonnées d'entiers naturels P_1,P_2 on note « $P_1\preccurlyeq P_2$ » lorsque P_1 est une sous-suite de P_2. La notation « $P_1\prec P_2$ » équivaut à « $P_1\preccurlyeq P_2$ *et* $P_1\neq P_2$ ». La relation '$\preccurlyeq$' est un ordre partiel sur l'ensemble des suites finies croissantes d'entiers naturels. On munit l'ensemble des couples de suites finies $\{(\Lambda,P)\}$ de l'ordre partiel défini par l'ordre lexicographique inverse, autrement dit :

$$(\Lambda_1,P_1)\preccurlyeq(\Lambda_2,P_2)\iff\begin{cases}P_1\prec P_2\,,\ \text{ou bien}\\ P_1=P_2\ \text{et}\ \Lambda_1\preccurlyeq\Lambda_2\,.\end{cases}$$

[1] Il s'ensuit que $\kappa(\mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}}))\subseteq\mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}})$, mais on n'aura pas besoin de ce résultat.

D'autre part, $h:\overline{\boldsymbol{E}}^*\to\overline{\boldsymbol{E}}^*$ est un endomorphisme de $\boldsymbol{E}^*$-module vérifiant :

- $$\begin{aligned} h(1{\otimes}1{\otimes}\lambda) &= (\bar d_{\boldsymbol{E}}\circ\kappa+\kappa\circ\bar d_{\boldsymbol{E}})\big(1{\otimes}1{\otimes}\lambda\big)\\ &= \bar d_{\boldsymbol{E}}(1{\otimes}\lambda{\otimes}1)-\bar d_{\boldsymbol{E}}\big(f\lambda{\otimes}1{\otimes}1\big)+\kappa\sum_k\big(1{\otimes}x'_k{\otimes}\theta(x'_k)\lambda\big)\\ &= \big(1{\otimes}1{\otimes}\lambda\big)+(1{\otimes}d_{\boldsymbol{K}}\lambda{\otimes}1)-\big(d_{\boldsymbol{E}}f\lambda{\otimes}1{\otimes}1\big)-2(1{\otimes}d_{\boldsymbol{K}}\lambda{\otimes}1)+\sum_k\big(\theta(x_k)f\lambda{\otimes}x'_k{\otimes}1\big)\\ &= \big(1{\otimes}1{\otimes}\lambda\big)-(1{\otimes}d_{\boldsymbol{K}}\lambda{\otimes}1)-\big(d_{\boldsymbol{E}}f\lambda{\otimes}1{\otimes}1\big)+\sum_k\big(\theta(x_k)f\lambda{\otimes}x'_k{\otimes}1\big)\end{aligned}$$
- $h(1{\otimes}\lambda{\otimes}1)=(\bar d_{\boldsymbol{E}}\circ\kappa+\kappa\circ\bar d_{\boldsymbol{E}})(1{\otimes}\lambda{\otimes}1)=\kappa\big(1{\otimes}1{\otimes}\lambda\big)=(1{\otimes}\lambda{\otimes}1)-\big(f\lambda{\otimes}1{\otimes}1\big)$

et comme h est en plus une dérivation, on en déduit aussitôt l'égalité, pour tous (λ,P) :

$$\boxed{h(M_{\Lambda,P})=(|\Lambda|+|P|)M_{\Lambda,P}+\textstyle\sum_{(\Lambda',P')}\omega_{\Lambda,P}^{\Lambda',P'}\cdot M_{\Lambda',P'}}$$

où $(\Lambda',P')\prec(\Lambda,P)$ et $\omega_{\Lambda,P}^{\Lambda',P'}\in\boldsymbol{E}^*$. D'où la conséquence fondamentale suivante :

- *L'endomorphisme* $h:\overline{\boldsymbol{E}}^*\to\overline{\boldsymbol{E}}^*$ *est trigonalisable.*
- $\mathbb{N}$ *est l'ensemble des valeurs propres de* $h:\overline{\boldsymbol{E}}^*\to\overline{\boldsymbol{E}}^*$.
- *Le sous-espace spectral de* h *dans* $\overline{\boldsymbol{E}}^*$ *associé à la valeur propre* 0 *est* $\boldsymbol{E}^*\cdot M_{\varnothing,\varnothing}=\boldsymbol{E}^*\otimes 1\otimes 1$. *Il coïncide donc avec* $\ker h$.

Enfin, comme h commute aux opérateurs $\bar d_{\boldsymbol{E}},\theta(x),\boldsymbol{i}(x)$, les espaces vectoriels

$$\mathcal{Z}^*(\mathrm{coker}(\xi))\subseteq\mathcal{Z}^*(\mathrm{coker}(\Xi))\subseteq\frac{\overline{\boldsymbol{E}}^*}{\boldsymbol{E}^*\otimes 1\otimes 1}$$

se décomposent en somme directe de sous-espaces spectraux de h associés à des valeurs propres **strictement positives**. En particulier, les surjections Π et π dans $(\mathcal{D})$ sont nécessairement nulles et alors

$$\boxed{H^*(\mathrm{coker}\,\Xi)=H^*(\mathrm{coker}\,\xi)=0}$$

Ces annulations reportées dans suites exactes longues de cohomologie

$$\longrightarrow H^{m-1}(\mathrm{coker}\,\Xi)\longrightarrow H^m(\boldsymbol{E}^*)\xrightarrow{H^m(\Xi)}H^m(\overline{\boldsymbol{E}}^*)\longrightarrow H^m(\mathrm{coker}\,\Xi)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{m-1}(\mathrm{coker}\,\xi)\longrightarrow H^m(\boldsymbol{B}^*)\xrightarrow{H^m(\xi)}H^m(\overline{\boldsymbol{B}}^*)\longrightarrow H^m(\mathrm{coker}\,\xi)\longrightarrow$$

où $\boldsymbol{B}^*:=\mathbf{Bas}^*(\boldsymbol{E})$ et $\overline{\boldsymbol{B}}^*:=\mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}})$, terminent la preuve du théorème. ■

———————×———————

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes
Samedi 2 juin 2003

Notes on the Cartan Model

Alberto Arabia

§ 1. The Cartan model

1.1. Let $\boldsymbol{G}$ denote a connected compact Lie Group with universal fibre bundle $\mathbb{E}\boldsymbol{G}$. Let $\mathbb{E}\boldsymbol{G} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\boldsymbol{G}(m)$, where $\mathbb{E}(m) \subseteq \mathbb{E}\boldsymbol{G}$ is a compact $\boldsymbol{G}$-manifold with no cohomology in degrees belonging to the interval $[1, m+1]$.

Let $\boldsymbol{M}$ be a $\boldsymbol{G}$-manifold. Denote $(\Omega^*(\boldsymbol{M}), d_{\boldsymbol{M}})$ its de Rham complex of differential forms, $\boldsymbol{Z}^*(\boldsymbol{M})$ the subring of cocycles, $\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{M})$ its ideal of coboundaries, and finally $H^*_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{Z}^*(\boldsymbol{M})/\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{M})$ its de Rham cohomology ring.

The "*Cartan complex of* $\boldsymbol{M}$" is by definition

$$\big(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}), d_{\boldsymbol{G}}\big) := \begin{cases} \Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}) = \big(S(\mathfrak{g}^\vee)\otimes\Omega(\boldsymbol{M})\big)^{\boldsymbol{G}} \\ d_{\boldsymbol{G}}(\omega(X)) = d_{\boldsymbol{M}}(\omega(X)) - \iota(X)(\omega(X)) \end{cases}$$

Théorème (Cartan model). *For any $\boldsymbol{G}$-manifold $\boldsymbol{M}$, there exist a natural isomorphism*

$$\boxed{H^*(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{G}}, \mathbb{R}) \cong H^*(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}), d_{\boldsymbol{G}})}$$

where the left hand side denotes the singular cohomology of the Borel construction on $\boldsymbol{M}$, the space $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{G}} := \mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{M}$.

1.2. The last theorem is a consequence of the three following propositions.

Proposition A. *For each $n\in\mathbb{N}$, the restriction map*

$$H^n(\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{M}, \mathbb{R}) \to H^n(\mathbb{E}\boldsymbol{G}(m)\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{M}, \mathbb{R})$$

is un isomorphism for all $m \gg 0$.

Proposition B (Cartan). *For each $m\in\mathbb{N}$, one has a natural isomorphism*

$$H^n(\mathbb{E}\boldsymbol{G}(m)\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{M}, \mathbb{R}) \cong H^*\big(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\mathbb{E}\boldsymbol{G}(m)\times\boldsymbol{M}), d_{\boldsymbol{G}}\big)$$

Proposition C (Homotopic invariance). *Let $f:\boldsymbol{M}\to\boldsymbol{N}$ be a $\boldsymbol{G}$-equivariant map between $\boldsymbol{G}$-manifolds such that $f^*: H^\ell_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{N}) \to H^\ell_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M})$ is an isomorphism for all $\ell \leqslant 2N$, then the induced pull-back map*

$$f^\ell : H^\ell\big(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{N}), d_{\boldsymbol{G}}\big) \to H^\ell\big(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}), d_{\boldsymbol{G}}\big)$$

is an isomorphism for all $\ell < N$.

1.3. The Cartan model theorem then follows from the natural diagram

$$\begin{tikzcd} \operatorname*{limproj}_m H(\mathbb{E}\boldsymbol{G}(m)\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{M}, \mathbb{R}) \arrow[r, "\cong", "\text{prop. B}"'] & \operatorname*{limproj}_m H\big(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\mathbb{E}\boldsymbol{G}(m)\times\boldsymbol{M}), d_{\boldsymbol{G}}\big) \\ H(\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{M}, \mathbb{R}) \arrow[u, "\cong", "\text{prop. A}"'] & H\big(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}), d_{\boldsymbol{G}}\big) \arrow[u, "\cong", "\text{prop. C}"'] \end{tikzcd}$$

where the "prop. C" arrow is induced by the projections $\mathbb{E}\boldsymbol{G}(m)\times\boldsymbol{M} \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}$, $(x, m)\mapsto m$.

The fact that the arrows in this diagram are bijections is a consequence of propositions A, B, C.

§ 2. Proposition A

The singular cohomologies of $\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{M}$ and of $\mathbb{E}\boldsymbol{G}(m)\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{M}$ are just the $\boldsymbol{G}$-equivariant cohomologies of $\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{M}$ and $\mathbb{E}\boldsymbol{G}(m)\times\boldsymbol{M}$, as the group $\boldsymbol{G}$ acts freely in these topological spaces. On the other and, the natural map between the fibred spaces over $\mathbb{B}\boldsymbol{G}$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{E}\boldsymbol{G}(m)\times\boldsymbol{M} & \xrightarrow[\subseteq]{\qquad} & \mathbb{E}\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{M}\\
\downarrow & & \downarrow\\
\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}(\mathbb{E}\boldsymbol{G}(m)\times\boldsymbol{M}) & \xrightarrow[\subseteq]{} & \mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}(\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{M})\\
\downarrow & & \downarrow\\
\mathbb{B}\boldsymbol{G} & = & \mathbb{B}\boldsymbol{G}
\end{array}$$

induces a morphism of the Leray spectral sequences associated to these fibrations, which coincides with the natural restriction map

$$\rho_2^{p,q}: H^p(\mathbb{B}\boldsymbol{G})\otimes H^q(\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{M})\longrightarrow H^p(\mathbb{B}\boldsymbol{G})\otimes H^q(\mathbb{E}\boldsymbol{G}(m)\times\boldsymbol{M})$$

at the $\mathbb{E}_2^{p,q}$ terms.

Standard arguments show then that if m is sufficiently large (in fact if $m\geqslant 2n$), the induced morphisms $\rho_r^{p,q}$, with $n=p+q$, will be isomorphic between the corresponding subsequent terms $\mathbb{E}_r^{p,q}$, for all $r\geqslant 2$. This implies that the induced map $\rho_\infty^{*,*}$ on $\bigoplus_{n=p+q}\mathbb{E}_\infty^{p,q}$ is also bijective, and proposition A follows since this map is the graded morphism induced by the restriction map

$$H^n(\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}(\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{M}),\mathbb{R})\longrightarrow H^n(\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}(\mathbb{E}\boldsymbol{G}(m)\times\boldsymbol{M}),\mathbb{R})$$

filtered by a finite decreasing filtration.

§ 3. Proposition B

This is Cartan's theorem for principal $\boldsymbol{G}$-bundles.

§ 4. Proposition C

4.1. Symmetrization. A very particular feature concerns the $\boldsymbol{G}$-modules $\Omega^\ell(\boldsymbol{M})$.

Proposition (Symmetrizing operator). *Let $\boldsymbol{G}$ be a compact Lie group endowed with the Haar measure. Let $\boldsymbol{M}$ be a $\boldsymbol{G}$-manifold. Let $\boldsymbol{V}$ be a finite dimensional $\boldsymbol{G}$-module. For $\ell\in\mathbb{N}$, endow $\boldsymbol{V}\otimes\Omega^\ell(\boldsymbol{M})$ with the diagonal action of $\boldsymbol{G}$,* i.e. $g\cdot(v\otimes\omega)=g\cdot v\otimes g\cdot\omega$.

a) *The map $\mathfrak{S}:\boldsymbol{V}\otimes\Omega^\ell(\boldsymbol{M})\to\boldsymbol{V}\otimes\Omega^\ell(\boldsymbol{M})$*

$$\mathfrak{S}(v\otimes\omega)=\int_{\boldsymbol{G}} g\cdot(v\otimes\omega)\,dg$$

is well defined and verifies:

i) $(\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}})\circ\mathfrak{S}=\mathfrak{S}\circ(\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}})$.

ii) $\mathfrak{S}(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{K}^\ell)=\big(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{K}^\ell\big)^{\boldsymbol{G}}$, *where* $\boldsymbol{K}^\ell\in\{\Omega^\ell(\boldsymbol{M}),\boldsymbol{B}^\ell(\boldsymbol{M}),\boldsymbol{Z}^\ell(\boldsymbol{M}),H^\ell_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M})\}$

iii) $\mathfrak{S}^2=\mathfrak{S}$,

b) *If $\boldsymbol{G}$ is connected, there exist a canonical isomorphism*

$$H\big((\boldsymbol{V}\otimes\Omega^*(\boldsymbol{M}))^{\boldsymbol{G}},\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}}\big)\cong\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{G}}\otimes H^*_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M})$$

Proof. Claim (a) is standard. For (b), let's denote $\Omega^\ell=\Omega^\ell(\boldsymbol{M})$, $\boldsymbol{B}^\ell=\boldsymbol{B}^\ell(\boldsymbol{M})$ and $\boldsymbol{Z}^\ell=\boldsymbol{Z}^\ell(\boldsymbol{M})$. One then has the following sequence of inclusions and surjections which is exact at the Ω's terms:

$$\boldsymbol{B}^{\ell-1}\underset{\subseteq}{\longrightarrow}\boldsymbol{Z}^{\ell-1}\underset{\subseteq}{\longrightarrow}\Omega^{\ell-1}\xrightarrow[\twoheadrightarrow]{d_M}\boldsymbol{B}^\ell\underset{\subseteq}{\longrightarrow}\boldsymbol{Z}^\ell\underset{\subseteq}{\longrightarrow}\Omega^\ell\xrightarrow[\twoheadrightarrow]{d_M},$$

giving rise to the analog sequence of $\boldsymbol{G}$-modules

$$\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^{\ell-1}\underset{\subseteq}{\longrightarrow}\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^{\ell-1}\underset{\subseteq}{\longrightarrow}\boldsymbol{V}\otimes\Omega^{\ell-1}\xrightarrow[\twoheadrightarrow]{\mathbf{id}\otimes d_M}\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^\ell\underset{\subseteq}{\longrightarrow}\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^\ell\underset{\subseteq}{\longrightarrow}\boldsymbol{V}\otimes\Omega^\ell\xrightarrow[\twoheadrightarrow]{\mathbf{id}\otimes d_M}$$

as $\boldsymbol{V}\otimes(\_)$ is an exact functor. Now, if we take $\boldsymbol{G}$-invariants, the map

$$(\boldsymbol{V}\otimes\Omega^{\ell-1})^{\boldsymbol{G}}\xrightarrow[\twoheadrightarrow]{\mathbf{id}\otimes d_M}(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^\ell)^{\boldsymbol{G}}\tag{$\diamond$}$$

remains onto. Indeed, if $\sum_\alpha v_\alpha\otimes\omega_\alpha\in(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^\ell)^{\boldsymbol{G}}$, choose $\nu_\alpha\in\Omega^{\ell-1}$ such that $\omega_\alpha=d_{\boldsymbol{M}}(\nu_\alpha)$. We then have after (a)

$$(\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}})\big(\mathfrak{S}(\textstyle\sum_\alpha v_\alpha\otimes\nu_\alpha)\big)=\mathfrak{S}(\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}})\big(\sum_\alpha v_\alpha\otimes\nu_\alpha\big)=\mathfrak{S}(\sum_\alpha v_\alpha\otimes\omega_\alpha)=\sum_\alpha v_\alpha\otimes\omega_\alpha\,,$$

proving that ($\diamond$) is onto. One gets in this way a sequence of injections and surjections

$$(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^{\ell-1})^{\boldsymbol{G}}\underset{\subseteq}{\to}(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^{\ell-1})^{\boldsymbol{G}}\underset{\subseteq}{\to}(\boldsymbol{V}\otimes\Omega^{\ell-1})^{\boldsymbol{G}}\underset{\twoheadrightarrow}{\to}(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^\ell)^{\boldsymbol{G}}\underset{\subseteq}{\to}(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^\ell)^{\boldsymbol{G}}\underset{\subseteq}{\to}(\boldsymbol{V}\otimes\Omega^\ell)^{\boldsymbol{G}}\underset{\twoheadrightarrow}{\to}$$

which is again exact at the Ω's terms. This fact immediately gives a canonical isomorphism

$$H^\ell\big((\boldsymbol{V}\otimes\Omega^*)^{\boldsymbol{G}},\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}}\big)\longrightarrow(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^\ell)^{\boldsymbol{G}}/(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^\ell)^{\boldsymbol{G}}\,.\tag{$*$}$$

On the other hand, and for the same reasons as above, one has the exact sequence

$$\mathbf{0}\to\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^\ell\underset{\subseteq}{\longrightarrow}\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^\ell\underset{\twoheadrightarrow}{\longrightarrow}\boldsymbol{V}\otimes H^\ell\to\mathbf{0}\,,$$

where $H^\ell:=H^\ell_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M})$. And, using the symmetrizing operator $\mathfrak{S}$ over $\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^\ell$ as we did in the previous paragraph, we get the exactness of the sequence

$$\mathbf{0}\to(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^\ell)^{\boldsymbol{G}}\underset{\subseteq}{\longrightarrow}(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^\ell)^{\boldsymbol{G}}\underset{\twoheadrightarrow}{\longrightarrow}(\boldsymbol{V}\otimes H^\ell)^{\boldsymbol{G}}\to\mathbf{0}\,,$$

which shows that the right hand side of ($*$) is just $(\boldsymbol{V}\otimes H^\ell)^{\boldsymbol{G}}$. We then have

$$H^\ell\big((\boldsymbol{V}\otimes\Omega^*)^{\boldsymbol{G}},\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}}\big)=(\boldsymbol{V}\otimes H^\ell)^{\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{G}}\otimes H^\ell\,,$$

as the action of $\boldsymbol{G}$ on H^ℓ is trivial because $\boldsymbol{G}$ is connected. ∎

4.2. Proof of C. Put $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_i=(S^{\geqslant i}(\mathfrak{g}^\vee)\otimes\Omega)^{\boldsymbol{G}}$, where $S^{\geqslant i}(\mathfrak{g}^\vee)$ denotes the ideal of $S(\mathfrak{g}^\vee)$ generated by the products of i elements of $\mathfrak{g}^\vee$. Each $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_i$ is clearly a $d_{\boldsymbol{G}}$ subcomplex of $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})$ and we get a decreasing filtration

$$\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})=\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_0\supseteq\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_1\supseteq\cdots\supseteq\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_i\supseteq\cdots\tag{$\diamond\diamond$}$$

which is *regular* ([1]) as one has $\Omega^\ell_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})\cap\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_i=0$, for $i>\ell$. As usual, this data generates a

[1] Our reference on spectral sequences is: Godement, *Topologie algébrique et théorie des Faisceaux*, pp. 75-89.

spectral sequence $\mathbb{E}(\boldsymbol{M})_*$ whose first term is

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{M})_0^{p,q} = (S^p(\mathfrak{g}^\vee) \otimes \Omega^q(\boldsymbol{M}))^{\boldsymbol{G}}\,, \qquad d_0 = (\mathbf{id} \otimes d_{\boldsymbol{M}}) : \mathbb{E}(\boldsymbol{M})_0^{p,q} \to \mathbb{E}(\boldsymbol{M})_0^{p,q+1}\,,$$

so that one gets

$$\boxed{\mathbb{E}(\boldsymbol{M})_1^{p,q} = S^p(\mathfrak{g}^\vee)^{\boldsymbol{G}} \otimes H^q_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M})}$$

as a consequence of (b) in the symmetrizing operator theorem.

Now, given a differentiable $\boldsymbol{G}$-equivariant map $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ one gets a morphism of Cartan complexes $f^* : \Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{N}) \to \Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})$ such that $f^*(\Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{N})_i) \subseteq (\Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_i)$ for all $i \in \mathbb{N}$, inducing thereafter a morphism of spectral sequences

$$f_r^{*,\bullet} : \mathbb{E}(\boldsymbol{N})_r^{*,\bullet} \to \mathbb{E}(\boldsymbol{M})_r^{*,\bullet}$$

which, for $r = 1$, takes the value

$$f_1^{*,\bullet} = \mathbf{id}^* \otimes f^\bullet : S^*(\mathfrak{g}^\vee)^{\boldsymbol{G}} \otimes H^\bullet_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{N}) \longrightarrow S^*(\mathfrak{g}^\vee)^{\boldsymbol{G}} \otimes H^\bullet_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M})\,.$$

Standard arguments then show that if $f^\bullet : H^\bullet_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{N}) \to H^\bullet_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M})$ is bijective in degrees $\leqslant 2N$, then

$$f_\infty^{p,q} : \mathbb{E}(\boldsymbol{N})_\infty^{p,q} \longrightarrow \mathbb{E}(\boldsymbol{M})_\infty^{p,q}$$

is bijective for $p + q \leqslant N$.

Recall now (*loc.cit.* thm. 4.4.2) that the filtration ($\diamond\diamond$) gives the sequence of morphisms

$$H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})) = H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_0) \leftarrow H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_1) \leftarrow \cdots \leftarrow H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_i) \leftarrow \cdots$$

and that if we denote by $H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}))_i$ the image of $H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_i)$ in $H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}))$, we get a decreasing filtration

$$H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})) = H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}))_0 \supseteq H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}))_1 \supseteq \cdots \leftarrow H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}))_i \supseteq \cdots\,,$$

such that the spectral series $\mathbb{E}(\boldsymbol{M})_*$ converges to $\mathbb{E}_\infty(\boldsymbol{M}) = \operatorname{Gr} H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}))_\star$. The conclusion of the last paragraph maybe then restated by saying that the map

$$\operatorname{Gr} f^* : \operatorname{Gr} H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{N}))_\star \to \operatorname{Gr} H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}))_\star$$

is bijective in total degrees bounded above by N, and the same for

$$f^* : H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{N})) \to H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}))\,,$$

since the filtrations are regular.

———×———

Autour des exposés n° 19, 20 du Séminaire Cartan 1949/50

La catégorie des $\mathfrak{g}$-adg

Dans l'exposé n° 19 du séminaire Cartan (49-50), on introduit, pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, la catégorie des $\mathfrak{g}$-algèbres différentielles graduées ($\mathfrak{g}$-adg). Une $\mathfrak{g}$-adg est un quadruplet $E = (E, d, \theta, i)$ où (E, d) est une algèbre différentielle positivement graduée, où $\theta : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_0(E, d)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie à valeurs dans l'algèbre de Lie des dérivations de degré 0 de (E, d), et où $i : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_{-1}(E)$ est une application linéaire à valeurs dans l'espace des (anti)dérivations de degré -1 de E, telles que

$$\bullet\ \iota([x, y]) = \theta(x)\iota(y) - \iota(y)\theta(x)\,, \qquad \bullet\ \theta(x) = \iota(x)d + d\iota(x)\,,$$

pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

L'ensemble $\mathrm{Bas}(E)$ des éléments « *basiques* » de E, i.e. tués par toutes les dérivations $\theta(x)$ et $i(x)$, est une sous-algèbre différentielle de (E, d), d'où l'inclusion d'adg's

$$(\mathrm{Bas}(E), d) \subset (E, d)\,. \tag{$*$}$$

Un « *morphisme de* $\mathfrak{g}$*-adg's de* $E_1 = (E_1, d, \theta, i)$ *vers* $E_2 = (E_2, d, \theta, i)$ » est un morphisme d'algèbres différentielles graduées de (E_1, d) vers (E_2, d) de degré 0 qui commute aux opérateurs $\{d, \theta(x), i(x) \mid x \in \mathfrak{g}\}$. On note $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{g}\text{-adg}}(E_1, E_2)$ l'ensemble de ces morphismes.

Connexions algébriques des $\mathfrak{g}$-adg's et algèbre de Weil $\boldsymbol{W(\mathfrak{g})}$

Un cas particulièrement important de $\mathfrak{g}$-adg est donné par « *l'algèbre de Weil* » $W(\mathfrak{g}) = (S(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}), d, \theta, i)$, caractérisée par le fait de représenter le foncteur de « *connexions algébriques d'une* $\mathfrak{g}$*-adg* », *i.e.* le foncteur qui fait correspondre

$$\mathfrak{g}\text{-adg} \ni E \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\theta,i}(\Lambda^1(\mathfrak{g}), E^1)$$

où $\mathrm{Hom}_{\theta,i}(\Lambda^1(\mathfrak{g}), E^1)$ est l'espace des « *connexions algébriques de* E », *i.e.* des applications linéaires $\xi : \Lambda^1(\mathfrak{g}) \to E^1$ vérifiant pour tout $x \in \mathfrak{g}$ les conditions :

$$\bullet\ \theta(x)(\xi(\phi)) = \xi(\theta(x)(\phi)) \qquad \bullet\ i(x)(\xi(\phi)) = \phi(x)\,.$$

Dans les paragraphes §5 et §6 de l'exposé n° 19, Cartan montre dans le détail comment le foncteur $E \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\theta,i}(\Lambda^1(\mathfrak{g}), E^1)$ est représenté par la couple $(W(\mathfrak{g}), \Phi)$ où Φ est l'isomorphisme naturel

$$\Phi(\_) : \mathrm{Mor}_{\mathfrak{g}\text{-adg}}(W(\mathfrak{g}), \_) \xrightarrow[(\simeq)]{} \mathrm{Hom}_{\theta,\xi}(\Lambda^1(\mathfrak{g}), (\_)^1) \tag{$\ddagger$}$$

qui fait correspondre à un morphisme de $\mathfrak{g}$-adg's de $W(\mathfrak{g}) \to E$ sa restriction au sous-espace $1 \otimes \Lambda^1(\mathfrak{g}) \subseteq W(\mathfrak{g})$.

Les G-variétés et les fibrés principaux

Soit G un groupe de Lie connexe et compact ([1]) d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'exposé n° 19 introduit plusieurs concepts liés à la donnée d'une G-variété différentielle M.

C-1) L'algèbre des formes différentielles $\Omega(M)$ est munie d'une structure de $\mathfrak{g}$-adg, et lorsque la surjection canonique $p : M \to M/G$ est un fibré principal, le complexe $(\mathrm{Bas}(\Omega(M)), d)$ calcule $H(M/G)$. L'inclusion $(*)$ induit alors le morphisme image inverse $p^* : H(M/G) \to H(M)$.

C-2) Des arguments géométriques sur l'espace total d'un fibré principal de variétés différentielles $p : M \to B$ de groupe G sont utilsés pour montrer que $(\Omega(M), d, \theta, i)$ admet des connexions $\xi : \Lambda^1(\mathfrak{g}) \to \Omega^1(M)$. L'équivalence $(\ddagger)$ donne alors un homomorphisme de $\mathfrak{g}$-adg's $\bar{\xi} : W(\mathfrak{g}) \to \Omega(M)$ et, par restriction, le morphisme canonique entre algèbres basiques

$$\bar{\xi} : (\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g})), d) \to (\mathrm{Bas}(\Omega(M)), d)\,. \tag{$**$}$$

Comme on a $(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g})), d) = (S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}, 0)$, ce morphisme induit en cohomologie « *le morphisme caractéristique* »

$$H(\bar{\xi}) : S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to H(B)\,.$$

L'indépendance de $H(\bar{\xi})$ par rapport à ξ sera établie par le théorème 3 de l'exposé n° 20 du même séminaire.

Steenrod, Chern, Weil

Le diagramme suivant est un résumé des différentes approches pour définir le morphisme caractéristique $\mathrm{ch} : S(\mathfrak{g})^G \to H(B)$ pour un fibré principal de variétés différentielles $p : M \to B$ de groupe G, compact et connexe.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathfrak{g}\text{-adg}}(W(\mathfrak{g})), \Omega(M)) \arrow[r, equal, "\text{Weil}"] \arrow[d, "\text{Bas}"] & \big\{\text{connexions algébriques sur } \Omega(M)\big\} \\
\big\{\mathrm{ch} : S(\mathfrak{g})^G \to H(B)\big\} & \big\{\text{connexions infinitésimales sur } \Omega(M)\big\} \arrow[l, "\text{Chern}"'] \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads] \\
\mathrm{Hot}(B, \mathbb{B}G) \arrow[u] & \big\{\text{fibrés principaux } p : M \to B\big\} \arrow[l, two heads, "\text{Steenrod}"']
\end{tikzcd}$$

Dans la première ligne, l'algèbre de Weil représente le foncteur covariant « *connexions algébriques* », tandis que dans la troisième, basée sur le théorème de que Steenrod, le classifiant $\mathbb{B}G$ représente le foncteur contravariant « *fibrés principaux de groupe G à isomorphisme près* » dans la catégorie des variétés différentielles et applications continues à homotopie près.

1. La plupart des constructions dans l'exposé n° 19 sont indépendantes de ces hypothèses sur G, mais elles deviennent incontournables pour les résultats les plus intéressants.

Le Complexe de Cartan pour la cohomologie équivariante

On se donne une variété différentielle M munie d'une action différentiable (pas nécessairement libre) de G (connexe et compact). Bien que ce ne soit pas un objet central des exposés de Cartan, l'exposé n° 20 introduit le sous-complexe $(S(\mathfrak{g})^G \otimes \Omega(M), d_\mathfrak{g}) \subseteq \Omega_\mathfrak{g}(M) := \mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M))$ des « *formes différentielles G-équivariantes de M* ». Bien des années plus tard, dans l'article d'Atiyah-Bott *The moment map and equivariant cohomology*, Topology, 23, 1984, le complexe $\Omega_\mathfrak{g}(M)$ réapparaît sous le nom « *modèle infinitésimal de de Rham pour l'espace* $M_G := \mathbb{E}G \times_G M$ », où l'on trouve une ébauche de preuve du fait que ce complexe calcule la cohomologie singulière de M_G.

Pour montrer que le complexe de Cartan $(S(\mathfrak{g})^G \otimes \Omega(M), d_\mathfrak{g})$ calcule la cohomologie *singulière* de l'espace topologique $\mathbb{E}G \times_G M$ on peut procéder en deux étapes.

C-A) Monter que $H(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M)), d) = H(\mathbb{E}G \times_G M)$.

C-B) Montrer que $(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M), d) = (S(\mathfrak{g})^G \times \Omega(M), d_\mathfrak{g})$.

La question (C-A) est abordée par Cartan uniquement lorsque M est l'espace total d'un fibré principal $p : M \to B$, auquel cas on applique (C-1). C'est le Théorème 3, donné sans démonstration en page 20-05 de l'exposé 20 du Séminaire Cartan (*loccit*), il donne l'égalité

$$H(B) = H(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M)), d)\,.$$

L'assertion (C-A) résulte alors du fait que la projection $\mathbb{E}G \times_G M \to B$ est une équivalence d'homotopie.

Dans ses articles, Cartan ne discute pas du cas général où $M \to M/G$ n'est pas un fibré principal de variétés différentielles. En sont exclus notamment les deux cas importants suivants.

C-i) Le groupe G n'opère pas librement sur la variété différentielle M. Par exemple, le groupe orthogonal $G := O(2)$ agissant sur $\mathbb{R}^2$.

C-ii) Le groupe G opère librement sur M, mais M n'est pas une variété différentielle. Par exemple, $M = \mathbb{E}G$, cas pour lequel Cartan donne seulement une heuristique justifiant du fait que $H(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g})))$ doit s'identifier canoniquement à $H(\mathbb{B}G)$. ([2])

Dans "A propos du théorème de Cartan" je donne une preuve du Théorème 3 (*loccit*) dans les mêmes lignes argumentaires de l'exposé n° 20.

Pour (C-i), il faut un travail supplémentaire pour se ramener à des actions libres auxquelles on peut appliquer les idées de Cartan. Dans "Notes on the Cartan model" je donne l'approche qui consiste à réaliser *l'espace topologique*

2. Une idée de preuve pour l'identification $H(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}))) = H(\mathbb{B}G)$ est donnée en page 11 de l'article d'Atiyah-Bott.

$\mathbb{E}G \times_G M$ comme réunion croissante de variétés différentielles $\mathbb{E}G(m) \times_G M$. Je profite alors du fait que G opère librement sur chaque $\mathbb{E}G(m) \times M$. ([3])

La proposition C dans ces Notes, qui est l'analogue du Théorème 3 (*loccit*), est prouvée en intégrant encore d'autres ingrédients permettant de sortir du cadre restreint où G opère librement sur M.

Une démarche légèrement différente, en filigrane dans ce qui précède, est basée sur la réalisation de l'espace classifiant $\mathbb{B}G$ comme réunion croissante de variétés différentielles $\mathbb{E}(m)/G$. Il est bien connu que les *approximations* $\mathbb{E}G(m)$ peuvent être choisies de sorte que l'on ait pour chaque $i \in \mathbb{N}$

$$H^i(\mathbb{B}G) = \varprojlim{}_m H^i(\mathbb{E}G(m)/G) = \varprojlim{}_m H^i(\mathrm{Bas}(\Omega(\mathbb{E}G(m)))),$$

ce qui nous conduit à introduire le complexe

$$(\Omega(\mathbb{E}G), d) := \varprojlim{}_m (\Omega(\mathbb{E}G(m)), d)$$

comme modèle de complexe pour remplacer le complexe des cochaînes simpliciales de $\mathbb{E}G$. L'intérêt, ce faisant, est que $(\Omega(\mathbb{E}G), d)$ est muni d'une structure de $\mathfrak{g}$-adg et d'une connexion (car limite de $\mathfrak{g}$-adg's à connexion). La théorie de Cartan peut alors s'appliquer et donne un *quasi-isomorphisme*

$$(W(\mathfrak{g}), d, \theta, i) \to (\Omega(\mathbb{E}G), d, \theta, i).$$

La question (C-A) se réduit alors à montrer l'égalité

$$H^i(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M))) = H^i(\mathrm{Bas}(\Omega(\mathbb{E}G) \otimes \Omega(M))), \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

ce pourquoi un raisonnement par suites spectrales de Leray permet de conclure.

Enfin, la question (C-B) est relativement formelle et ne comporte pas de difficulté majeure. Elle fait l'objet d'une étude détaillée dans le paragraphe 7 de l'exposé n° 20 du Séminaire Cartan (*loccit*, p. 20-05).

Paris, 21 décembre 2016
Alberto Arabia

3. C'est l'idée décrite dans le §4 de l'article d'Atiyah-Bott.

Comparison theorem between the equivariant de Rham cohomology of a G-manifold M and the ordinary cohomology of the homotopic quotient M_G

Alberto Arabia*

November 28, 2018

1. Description of the problem. Let G be a compact (not necessarily connected) Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$. We compare, for a given G-manifold M, the ordinary cohomology, with coefficients in the field of real numbers $\mathbb{R}$, of the homotopic quotient

$$M_G := \mathbb{E}G \times_G M\,, \tag{1}$$

with the cohomology of the complex of G-equivariant differential forms

$$\Omega_G(M) := ((S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M))^G, d_{\mathfrak{g}})\,. \tag{2}$$

We would like to emphasize that as (1) and (2) are functorial on the category G-Man of G-manifolds and equivariant differentiable maps, what we are aiming for is to compare the two contravariant functors

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & H(M_G;\mathbb{R}) \\ G\text{-Man} \ni M \arrow[ur, rightsquigarrow] \arrow[dr, rightsquigarrow] & \\ & H_G(M) := H\big(\Omega_G(M)\big) \end{tikzcd} \tag{3}$$

We will do this by constructing a specific isomorphism of graded $\mathbb{R}$-algebras

$$\Phi_M : H(M_G;\mathbb{R}) \simeq H_G(M), \tag{4}$$

which will be functorial for $M \in G$-Man. In the particular case where $M := \{\bullet\}$, we get an isomorphism of graded $\mathbb{R}$-algebras

$$\Phi_{\{\bullet\}} : H(\mathbb{B}G;\mathbb{R}) \simeq S(\mathfrak{g})^G\,. \tag{5}$$

The functors in (3) will therefore have values in the category of $S(\mathfrak{g})^G$-graded algebras. In other words, we will get commutative diagrams of graded $\mathbb{R}$-algebras

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & H(\mathbb{B}G;\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[dd, "\Phi_{\{\bullet\}}"', "\simeq"] & H(M_G;\mathbb{R}) \arrow[dd, "\Phi_M"', "\simeq"] \\ G\text{-Man} \ni M \arrow[ur, rightsquigarrow] \arrow[dr, rightsquigarrow] & \bigoplus & \\ & S(\mathfrak{g})^G \arrow[r] & H_G(M) \end{tikzcd} \tag{6}$$

---

*Université Paris Diderot-Paris 7, IMJ-PRG, CNRS, Bâtiment Sophie Germain, bureau 608, Case 7012, 75205. Paris Cedex 13, France. Contact: `alberto.arabia@imj-prg.fr`.

2. Constructing Φ_M for free actions. Let G-Man_f denote the full subcategory of G-Man whose objects are the G-manifolds M on which G acts freely. The quotient space M/G then has a unique structure of manifold such that the orbit map $\nu : M \to M/G$ is a locally trivial fibration of manifolds of fiber G.

In that case, the projection onto the second coordinate

$$\xi_M : M_G := \mathbb{E}G \times_G M \twoheadrightarrow M/G, \quad [b,m] \mapsto [m],$$

is a locally trivial fibration with fibers homeomorphic to $\mathbb{E}G$. The map ξ_M is thus a homotopy equivalence, and a natural transformation of functors

$$\begin{tikzcd} & M_G \arrow[r, "\phi_G"] \arrow[d, "\xi_M"', "\sim"] & N_G \arrow[d, "\xi_N"', "\sim"] \\ G\text{-}\mathrm{Man}_f \ni (M \xrightarrow{\phi} N) \arrow[ur, rightsquigarrow] \arrow[dr, rightsquigarrow] & & \\ & M/G \arrow[r, "\overline{\phi}"] & N/G \end{tikzcd} \tag{7}$$

This is saying that there exists a de Rham model for the algebra $H(M_G;\mathbb{R})$, in this case the de Rham complex $(\Omega(M/G),d)$.

In this situation, the diagram (6) splits naturally in two isomorphisms of $\mathbb{R}$-algebras

$$\begin{tikzcd} & H(M_G;\mathbb{R}) \arrow[d, "(\xi_M^*)^{-1}"', "\simeq"] \arrow[dd, bend left=60, "\Phi_M"] \\ G\text{-}\mathrm{Man} \ni M \arrow[ur, rightsquigarrow] \arrow[dr, rightsquigarrow] & H_{\mathrm{dR}}(M/G) \arrow[d, "\Phi'_M"', "\simeq"] \\ & H_G(M) \end{tikzcd} \tag{8}$$

where Φ'_M is the isomorphism defined by Cartan in his Brussels lectures, and whose construction is functorial on the category G-Man_f.

3. Constructing Φ_M for general actions

3.1. The spaces M_G are generally not of finite cohomological dimension, as the example of the classifying space $\mathbb{B}G$ already shows. On the other hand, if the action of G on M is not free, the topological quotient space M/G is no longer necessarily a manifold. So it appears that Cartan's method, which depends on the existence of some kind of differential model for the ordinary cohomology of M_G, becomes useless for comparing $H(M_G;\mathbb{R})$ and $H_G(M)$.

3.2. The universal G-bundle $\mathbb{E}G$, is the topological inductive limit of an increasing sequence (a tower) of G-manifolds

$$\mathbb{E}G(0) \subset \mathbb{E}G(1) \subset \mathbb{E}G(2) \subset \cdots \subset \mathbb{E}G \tag{9}$$

where $\mathbb{E}G(n)$ is compact and n-connected, i.e. such that

$$\Pi_q(\mathbb{E}G(n)) = 0, \quad \forall q \le n. \tag{10}$$

The family of restriction homomorphisms of algebras

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
H(\mathbb{E}G;\mathbb{R}) \arrow[drr, bend left=10] \arrow[drrrr, bend left=10] \arrow[drrrrrr, bend left=10] & & & & & & & \\
& \cdots \arrow[r] & H(\mathbb{E}G(n{+}1);\mathbb{R}) \arrow[rr] & & H(\mathbb{E}G(n);\mathbb{R}) \arrow[rr] & & H(\mathbb{E}G(n{-}1);\mathbb{R}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

is then a projective family and induces, as such, an algebra homomorphism:

$$H(\mathbb{E}G;\mathbb{R}) \to \varprojlim H(\mathbb{E}G(n);\mathbb{R}), \tag{11}$$

which will be shown to be an isomorphism (*cf.* 5.1-(a)).

3.3. If X is a G-space, the increasing sequence (9) can be used to realize X_G as the topological inductive limit of the tower of spaces

$$X_G(*) := \big(X_G(0) \subset X_G(1) \subset X_G(2) \subset \cdots \subset X_G(\infty) := X_G\big) \tag{12}$$

where

$$X_G(n) := \mathbb{E}G(n) \times_G X\,.$$

– The correspondence $X \rightsquigarrow X_G(*)$ is functorial relative to $X \in G$-Man.

– Furthermore, if X is a manifold, then the $X_G(n)$'s will also be so, since G is compact and acts freely on $\mathbb{E}G(n) \times X$, which is also a manifold.

The tower (12) induces, as in section 3.2, the projective system of restriction homomorphisms of algebras

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
H(X_G;\mathbb{R}) \arrow[drr, bend left=10] \arrow[drrrr, bend left=10] \arrow[drrrrrr, bend left=10] & & & & & & & \\
& \cdots \arrow[r] & H(X_G(n{+}1);\mathbb{R}) \arrow[rr] & & H(X_G(n);\mathbb{R}) \arrow[rr] & & H(X_G(n{-}1);\mathbb{R}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

and, therefore, the algebra homomorphism:

$$\boxed{H(X_G;\mathbb{R}) \to \varprojlim H(X_G(n);\mathbb{R})} \tag{13}$$

which will also be shown to be an isomorphism (*cf.* 5.1-(b)).

3.4. Let M be a G-manifold. For each $n \in \mathbb{N}$, the projection of G-manifolds

$$p_n : \mathbb{E}G(n) \times M \to M\,, \quad (x,m) \mapsto m\,, \tag{14}$$

is equivariant and induces an homomorphism of equivariant cohomologies

$$\boxed{p_n^* : H_G(M) \to H_G(\mathbb{E}G(n) \times M) = H_{\mathrm{dR}}(M_G)} \tag{15}$$

where the equality at the right-hand is, once again, justified by Cartan's lectures.

Putting together the family of the projections (14), we get the inductive system

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbb{E}G(n{-}1) \times M \arrow[rrrrrrr, bend right=15, "p_{n+1}"] & \subset & \mathbb{E}G(n) \times M \arrow[rrrrr, bend right=15, "p_n"] & \subset & \mathbb{E}G(n{-}1) \times M \arrow[rrr, bend right=15, "p_{n+1}"] & \subset & \dots & M
\end{tikzcd}
$$

which induces, by (15), the projective system of algebra homomorphisms

$$\begin{tikzcd}
H_G(M) \arrow[dr, "p^*_{n+1}"'] \arrow[drr, "p^*_n"] \arrow[drrr, "p^*_{n+1}"] & & & & \\
\cdots \arrow[r] & H_{\mathrm{dR}}(M_G(n{+}1)) \arrow[r] & H_{\mathrm{dR}}(M_G(n)) \arrow[r] & H_{\mathrm{dR}}(M_G(n{-}1)) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

and, hence, the algebra homomorphism:

$$\boxed{H_G(M) \to \varprojlim H_{\mathrm{dR}}(M_G(n))} \tag{16}$$

which, as before, will be shown to be an isomorphism (*cf.* 5.1-(c)).

3.5. To compare $H(M_G;\mathbb{R})$ and $H_G(M)$, we put together (13) and (16) thanks to the identification $H(M(n);\mathbb{R}) \cong H_{\mathrm{dR}}(M(n))$ given by the de Rham comparison theorem. We thus have three functorial isomorphisms for $M \in G$-Man

$$H(M_G;\mathbb{R}) \underset{\simeq}{\longrightarrow} \varprojlim H(M_G(n);\mathbb{R}) \cong \varprojlim H_{\mathrm{dR}}(M_G(n)) \underset{\simeq}{\longleftarrow} H_G(M),$$

the composition of which defines the announced algebra isomorphism

$$\boxed{\Phi_M : H(M_G;\mathbb{R}) \underset{\simeq}{\longrightarrow} H_G(M)}$$

functorial relative to $M \in G$-Man.

4. A technical result. The fact that (11), (13) and (16) are isomorphisms, will be consequence of one and the same property that we now establish.

4.1. Theorem. *Let $\varphi : C \to D$ be a morphism of regular filtered graded complexes whose corresponding spectral sequences pages $\mathbb{E}(C)_2$ and $\mathbb{E}(D)_2$ are in the first quadrant, i.e. are such that $\mathbb{E}(C)_2^{p,q} = \mathbb{E}(D)_2^{p,q} = 0$, if $p < 0$ or $q < 0$. Assume that, for some fixed $n \in \mathbb{N}$, the induced homomorphisms*

$$\mathbb{E}(\varphi)_2^{p,q} : \mathbb{E}(C)_2^{p,q} \to \mathbb{E}(D)_2^{p,q}$$

are isomorphisms for all $q \leq n$. Then, the induced morphisms in cohomology

$$H^i(\varphi) : H^i(C) \to H^i(D)$$

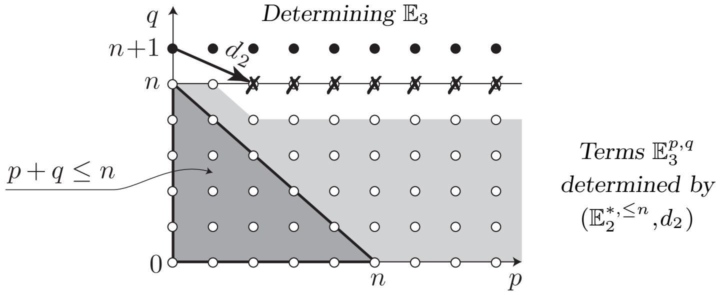
are isomorphisms for all $i \leq n$.

Proof. In the page $(\mathbb{E}_2, d_2)$, one has $d_2(\mathbb{E}_2^{p-2,q+1}) \subset \mathbb{E}_2^{p,q}$, which implies that the determination of $\mathbb{E}_3^{p,q}$ is based on the knowledge of the sub-complex $(\mathbb{E}_2^{*,\leq n}, d_2)$ only, except if

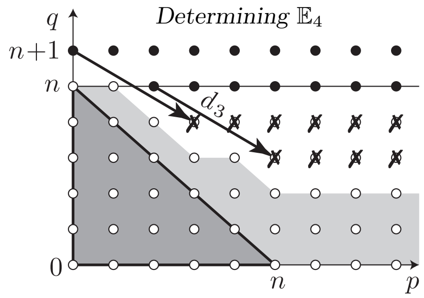
$$p - 2 \geq 0 \quad \text{and} \quad q + 1 > n, \tag{$*$}$$

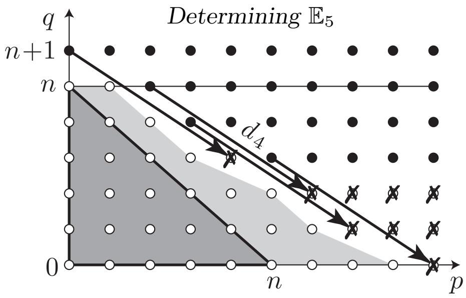
since in that case it may happen that $d_2(\mathbb{E}_2^{p-2,q+1}) \neq 0$, while $\mathbb{E}_2^{p-2,q+1} \not\subset \mathbb{E}_2^{*,\leq n}$. Notice also that if the conditions $(*)$ are satisfied, then $p + q > n + 1$.

In the pictures below, the symbol '$\circ$' indicates the terms $\mathbb{E}_{r+1}^{p,q}$ determined only by the sub-complex $(\mathbb{E}_2^{p,\leq n}, d_2)$, while a '$\bullet$' indicates those not entirely determined by $(\mathbb{E}_2^{p,\leq n}, d_2)$, and '✗' indicates that $\mathbb{E}_r^{p,q}$ is determined by $(\mathbb{E}_2^{p,\leq n}, d_2)$ but that $\mathbb{E}_{r+1}^{p,q}$ is not so.



The same analysis for the terms $\mathbb{E}_4^{p,q}$ and $\mathbb{E}_5^{p,q}$ gives the pictures

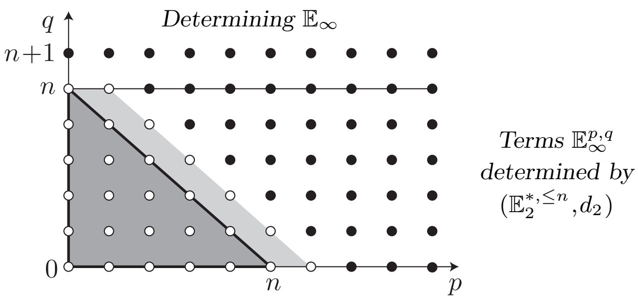




Since the image of

$$d_r : \mathbb{E}_r^{0,n+1} \to \mathbb{E}_r \qquad (\diamond)$$

is contained in the term $\mathbb{E}_r^{r,n+1-r+1}$, which is of total degree $n+2$, we understand that any term in $\mathbb{E}_\infty^{\geq 0,\geq 0}$ of total degree $n+2$ may depend on $\mathbb{E}_2^{0,n+1}$. On the other hand, none of the arrows $(\diamond)$ affect the terms $\mathbb{E}_r^{p,q}$ with $p+q \leq n$ so that, at the end, we can easily justify the following picture showing terms $\mathbb{E}_r^{p,q}$ depending only on the sub-complex $(\mathbb{E}_2^{*,\leq n}, d_2)$ for all $r \geq 2$, hence for $r = \infty$.



It then follows that if $\mathbb{E}(\varphi)_2^{*,\leq n}$ is an isomorphism, the induced homomorphisms

$$\mathbb{E}(\varphi)_r^{p,q} : \mathbb{E}(C)_\infty^{p,q} \to \mathbb{E}(D)_\infty^{p,q},$$

are isomorphisms for all $p+q \leq n$, hence the theorem. □

5. Application of Theorem 4.1. We now prove the statements in 3.5.

5.1. Theorem

a) *Given $n \in \mathbb{N}$, the restriction homomorphism*

$$H^q(\mathbb{E}G;\mathbb{R}) \to H^q(\mathbb{E}G(n);\mathbb{R})$$

is an isomorphism for $q \leq n$. In particular, the algebra homomorphism (11)

$$H(\mathbb{E}G;\mathbb{R}) \to \varprojlim H(\mathbb{E}G(n);\mathbb{R})$$

is an isomorphism.

b) *Given $n \in \mathbb{N}$, and a G-space X, the restriction homomorphism*

$$H^q(X_G;\mathbb{R}) \to H^q(X_G(n);\mathbb{R})$$

is an isomorphism for $q \leq n$. In particular, the algebra homomorphism (13)

$$H(X_G;\mathbb{R}) \to \varprojlim H(X_G(n);\mathbb{R})$$

is an isomorphism.

c) *Given $n \in \mathbb{N}$, and a G-manifold M, the restriction homomorphism* (15)

$$H^q_G(M) \to H^q_{\mathrm{dR}}(M_G(n))$$

is an isomorphism for $q \leq n$. In particular, the algebra homomorphism (16)

$$H_G(M) \to \varprojlim H_{\mathrm{dR}}(M_G(n))$$

is an isomorphism.

Proof. (a) We can assume the group G embedded in the orthogonal group $\mathrm{O}(k)$ for some $k \in \mathbb{N}$. We then set

$$\mathbb{E}G(n) := V(k,k+n+1), \quad (\forall k \geq 1)(\forall n \geq 1), \tag{†}$$

where $V(\ell,m)$ denotes the Stiefel manifold of ℓ-tuples $(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_\ell)$ of orthonormal vectors in $\mathbb{R}^m$, which is easily seen to be compact and $(m-\ell-1)$-connected ([1]).

The manifold $\mathbb{E}G(n)$ is therefore compact and n-connected, and verifies, by Hurewicz theorems,

$$H^q(\mathbb{E}G(n);\mathbb{R}) = 0, \quad \forall q \leq n,$$

One easily sees that $\mathbb{E}G(n) \sim \mathrm{O}(k+n+1)/(\mathbb{1}_k \times \mathrm{O}(n+1))$ and that $\mathrm{O}(k)$ acts freely at the right of $\mathbb{E}G(n)$. In particular, the space $\mathbb{E}G := \bigcup_n \mathbb{E}G(n)$ meets the requirements for a universal principal bundle for $\mathrm{O}(k)$, hence for G.

(b) Since the diagonal action of G on $\mathbb{E}G(n) \times X$ is free, the ideas in section 2 apply. We can therefore replace $X_G(n) \leftrightarrow (\mathbb{E}G(n) \times X)_G$ and consider the natural fibration $\pi : \mathbb{E}G \times_G (\mathbb{E}G(n) \times X) \twoheadrightarrow \mathbb{B}G$ and the corresponding Leray-Serre spectral sequence

$$\mathbb{E}(X_G(n))_2^{p,q} = H^p(\mathbb{B}G;\mathbb{R}) \otimes H^q(\mathbb{E}G(n) \times X) \Rightarrow H^{p+q}(X_G(n))$$

which is contravariant functorial for $(\mathbb{E}G(n) \times X) \in G\text{-}\mathrm{Top}_f$. In particular, we get a morphism of spectral sequences

$$\mathbb{E}(\varphi)_2^{p,q} : \mathbb{E}(X_G(n))_2^{p,q} \to \mathbb{E}(X_G)_2^{p,q}$$

[1] Indeed, for $\ell \leq m+1$, the map $p_\ell : V(\ell,m+1) \to \mathbb{S}^m$, $(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_\ell) \mapsto \vec{v}_\ell$, is a locally trivial fibration of fiber $V(\ell-1,m)$, and an inductive argument on $\ell \in [\![1m]\!]$, immediately shows that $\Pi_q(V(\ell,m)) = 0$, for all q such that $q + \ell < m$.

which is an isomorphism for all $q \le n$ since, in that case, by Künneth,

$$\begin{aligned} H^q(\mathbb{E}G(n)\times X;\mathbb{R}) &= \bigoplus_{a+b=q} H^a(\mathbb{E}G(n);\mathbb{R}) \otimes H^b(X;\mathbb{R}) \\ &= \bigoplus_{a+b=q} H^a(\mathbb{E}G;\mathbb{R}) \otimes H^b(X;\mathbb{R}) = H^q(\mathbb{E}G\times X;\mathbb{R}). \end{aligned}$$

where $a \le n$. We can therefore apply theorem 4.1, and (b) follows.

(c) Here, the important fact is that $\mathbb{E}G(n)\times M$ is a manifold, in which case we can use Cartan's identification $H_{\mathrm{dR}}(M_G(n)) = H_G(\mathbb{E}G(n)\times M)$ and the corresponding spectral sequence for equivariant cohomology (see **6**):

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}G(n)\times M)_2^{p,q} := H_G^p \otimes H^q(\Omega(\mathbb{E}G(n)\times M))$$

where $H_G^{2m} := S^m(\mathfrak{g})^G$ and $H_G^{2m+1} = 0$, for all $m \in \mathbb{N}$.

These constructions are contravariant functorial over G-Man, and for the equivariant projection $p_n : \mathbb{E}G(n) \times M \to M$, $(x,m) \mapsto m$, give a morphism of spectral sequences for equivariant cohomology

$$\mathbb{E}(p_n^*)_2^{p,q} : \mathbb{E}(M)_2^{p,q} \to \mathbb{E}(\mathbb{E}G(n)\times M)_2^{p,q},$$

which is an isomorphism for all $q \le n$, since the pullbacks

$$p_n^* : H^q(M)) \to H^q(\Omega(\mathbb{E}G(n)\times M))$$

are so. We can therefore apply theorem 4.1 and state that the restriction homomorphisms $H_G(M)^q \to H^q_{\mathrm{dR}}(M(n))$ (15) are isomorphisms for all $q \le n$, which ends the proof of (c). $\square$

6. On the spectral sequence for equivariant cohomology. The complex of equivariant differential forms of a G-manifold M is the complex

$$\Omega_G(M) := ((S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M))^G, d_{\mathfrak{g}}), \tag{$*$}$$

where, if $\{e_j\}$ is a basis of $\mathfrak{g}$ of dual basis and $\{e^j\}$, the equivariant differential $d_{\mathfrak{g}}$ is given by the expression

$$d_{\mathfrak{g}}(P \otimes \omega) = P \otimes d\omega + \sum_j Pe^j \otimes \iota(e_j)(\omega).$$

Denote by $S^a(\mathfrak{g})$ the polynomial functions on $\mathfrak{g}$ of degree a, and define the *principal degree* of $S^a(\mathfrak{g}) \otimes \Omega^b(M)$ by $2a$, and its *total degree* by $2a + b$.

In order to be able to apply theorem 4.1 *without reindexing terms*, we choose to filter the complex $(*)$ by principal degrees in $\mathbb{N}$, and not just in $2\mathbb{N}$.

We therefore set, for all $j \in \mathbb{N}$,

$$\Omega_G(M)_{\ge j} = S^{\ge \frac{j}{2}} \otimes \Omega(M). \tag{$\dagger$}$$

(In particular, $\Omega_G(M)_{\ge j} = \Omega_G(M)_{\ge j+1}$, if j is odd.)

Endowed with the filtration $(\dagger)$, the complex $(\Omega_G(M), d_{\mathfrak{g}})$ is a regular filtered graded complex. We can then apply the general theory of spectral sequences and construct a spectral sequence $(\mathbb{E}(\Omega_G(M))_r, d_r)$, where

$$\mathbb{E}(\Omega_G(M))_2^{p,q} = S^{p/2}(\mathfrak{g})^G \otimes \Omega^q(M),$$

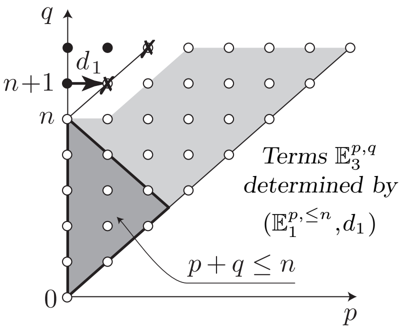
($S^{p/2}(\mathfrak{g}) = 0$, for p odd) where $d_2 : \mathbb{E}(\Omega_G(M))_2^{p,q} \to \mathbb{E}(\Omega_G(M))_2^{p+2,q-1}$.

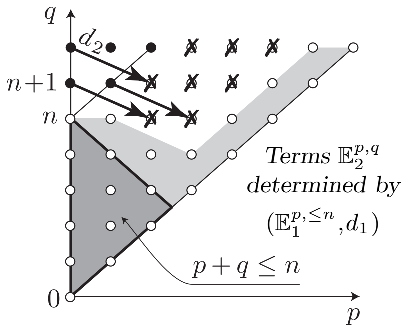
For $r \geq 2$, we then have, as usual, $d_r(\mathbb{E}(\Omega_G(M))_r^{p,q}) \subset \mathbb{E}(\Omega_G(M))_r^{p+r,q-r+1}$, and the spectral sequence converges to the graded $S(\mathfrak{g})^G$-module associated with the filtered module $H_G(M)$, by the decreasing successive images

$$H_G(M)_{\geq k} := \operatorname{im}\big(H(\Omega_G(M)_{\geq j}) \to H_G(M)\big).$$

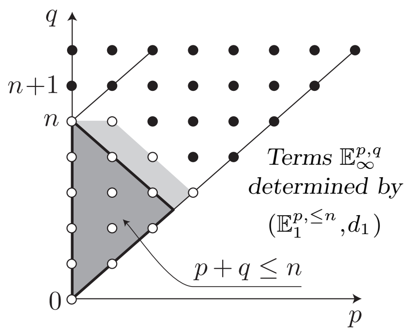
We have
$$\mathbb{E}(\Omega_G(M))_\infty^p = \frac{H_G(M)_{\geq p}}{H_G(M)_{\geq p+1}}.$$

6.1. Comment on a different spectral sequence. In appendix A.9 of ([2]), the complex $\Omega_G(M)$ is put under the form of a bi-complex, which is quite nice, but then one has to prove the analog of theorem 4.1 which gives better bounds for the proposition A.10 in *loc.cit.*. The proof will then be the same, but the pictures must be replaced by the followings





where we see (again) that the terms $\mathbb{E}_r^{p,q}$ with $p+q \leq n$ are determined solely by the sub-complex $(\mathbb{E}_1^{p,\leq n}, d_1)$, as in the proof of 4.1.



These details, which are not difficult to understand, are missing in the proposition A.10. In its proof, it is only observed that under d_r, the superscript q lowers to $q-r+1$, without considering that at the same time the superscript p raises to $p+r$ leaving enough room to preserve the $\mathbb{E}^{p,q}$'s such that $p+q \leq n$.

Alberto Arabia
November 28, 2018

[2]Forthcoming book of Loring Tu, *Introductory Lectures on Equivariant Cohomology*, in Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press.