

Cohomologie de de Rham p -adique

“Applications du théorème de Čech-Leray”

Alberto Arabia

Table des matières

§1. Contenu de ces notes	
§2. Préliminaires sur les bicomplexes	
2.1. Catégorie des complexes associée à une catégorie abélienne	3
2.1.1. Définition	3
2.1.3. Amplitude d'un complexe	3
2.1.4. Complexes concentrés en un seul degré	3
2.1.5. Complexes noyaux et conoyaux	4
2.1.6. Catégories de sous-complexes bornés	4
2.1.7. Foncteur de translation	4
2.1.8. Foncteurs de cohomologie	4
2.1.9. Quasi-isomorphismes	5
2.1.10. Amplitude cohomologique	5
2.1.11. Cône d'un morphisme de complexes	5
2.1.14. Troncatures bêtes	6
2.2. Catégorie des bicomplexes associée à une catégorie abélienne	7
2.2.1. Foncteurs induits	8
2.2.2. Foncteurs de translation	8
2.2.3. Foncteur de cohomologie verticale	8
2.2.4. Foncteur de cohomologie horizontal	8
2.2.5. $h_v \circ h_h \neq h_h \circ h_v$	9
2.2.6. Catégorie des suites exactes courtes	9
2.2.8. Complexe simple associé à un bicomplexe borné inférieurement	10
2.2.10. Critère d'acyclicité du complexe simple associé	10
2.2.11. Un critère de quasi-isomorphie de complexes simples associés	11
2.2.14. Notation $\Sigma_{\bullet, \circ}^*$	12
§3. Cohomologie des faisceaux	
3.1. Préliminaires	12
3.1.1. Faisceaux flasques	13
3.1.3. Résolution flasque de Godement	13
3.2. Cohomologie des faisceaux	14
3.2.1. Définition	14
3.2.2. Augmentation du complexe de Godement	14
3.2.4. Faisceaux acycliques	14
3.2.8. Propriétés générales de la cohomologie de faisceaux	15
3.3. Cohomologie de Čech des faisceaux	15
3.3.1. Complexe de Čech	15
3.3.3. Augmentation du complexe de Čech	16
3.3.4. Cohomologie de Čech	16
3.3.6. Faisceautisation du complexe de Čech	16
3.3.8. Théorème de Čech-Leray pour la cohomologie des faisceaux	17
§4. Hypercohomologie des complexes de faisceaux	
4.1. Hypercohomologie des complexes de faisceaux	18
4.1.2. Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\mathbf{X}; -) : h^*(\Gamma(U; -)) \rightarrow \mathbb{H}^*(U; -)$	18
4.1.3. Propriétés générales de l'hypercohomologie	19
4.2. Cohomologie de Čech de complexes de faisceaux	20
4.2.1. Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\mathcal{U}; -) : h^*(\Gamma(\mathbf{X}; -)) \rightarrow \check{H}^*(\mathcal{U}; -)$	20

4.3. Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -) : \check{H}(\mathcal{U}; -) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbf{X}; -)$	21
4.3.2. Troncatures et suites exactes longues	22
4.4. Théorème de Čech-Leray pour l'hypercohomologie des complexes de faisceaux	23
§ 5. Applications	
5.1. Théorème de de Rham sur les variétés différentielles	24
5.2. Calculs effectifs de la cohomologie de de Rham des variétés différentielles	25
5.2.1. Exemple : Cohomologie de de Rham de la sphère \mathbb{S}^2	26
5.3. Calculs effectifs de la cohomologie de de Rham des variétés algébriques	26
5.3.1. Exemple : Cohomologie de de Rham de la sphère de Riemann	27
5.4. Théorème de comparaison de Grothendieck pour les variétés algébriques sur \mathbb{C} non singulières	28
5.4.1. Structure d'espace analytique d'une variété algébrique complexe	28
5.4.2. Acyclicité des modules cohérents	29
5.4.4. Hypercohomologie de l'image directe des complexes cohérents	29
5.4.6. Cohomologies de de Rham	30
§ 6. Références bibliographiques	
§ 7. Index terminologique	

§ 1. Contenu de ces notes

On rappelle les terminologies, définitions et résultats de base d'algèbre homologique utiles dans l'étude de la cohomologie des faisceaux, de l'hypercohomologie des complexes de faisceaux, de la cohomologie de Čech des complexes de faisceaux, ainsi que dans l'étude des liens qui les unissent, en particulier, nous démontrons le théorème de Čech-Leray suivant :

Théorème (4.4.1). Soient $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{C}^+ \text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de \mathbf{X} .

a) (**Čech-Leray**) Si \mathcal{U} et \mathcal{G}^\bullet -acyclique, le morphisme canonique

$$\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet) : \check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet)$$

est un **isomorphisme**.

b) Soit $\varphi_\bullet : \mathcal{G}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{G}_2^\bullet$ un morphisme de complexes faisceau tel que

$$\mathbb{H}^*(V; \varphi) : \mathbb{H}^*(V; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^*(V; \mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un isomorphisme pour tout $V = U_{\alpha_0 \dots \alpha_k}$; ou bien, si \mathcal{U} et \mathcal{G}_i^\bullet -acyclique et que

$$h^*\Gamma(V; \varphi) : h^*\Gamma(V; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow h^*\Gamma(V; \mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un isomorphisme pour tout tel V . Alors

$$\mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \varphi) : \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un **isomorphisme**.

Dans la section § 5 nous donnons des applications au calcul effectif de la cohomologie de de Rham et au théorèmes de comparaison des cohomologies de de Rham, tout particulièrement au théorème de comparaison de Grothendieck entre cohomologies de de Rham algébrique et holomorphe pour les variétés algébriques complexes non singulières.

Ces notes se veulent un « complément » aux documents déjà distribués et aux références bibliographiques, le texte n'est pas complet et ne prétend aucune exhaustivité.

§ 2. Préliminaires sur les bicomplexes

2.1 Catégorie des complexes associée à une catégorie abélienne

2.1.1. Définition. Étant donnée une catégorie abélienne \mathbf{Ab} ⁽¹⁾, on note $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ la catégorie dont les objets sont les « complexes de \mathbf{Ab} », i.e. les familles $\{d_k : \mathbf{C}^k \rightarrow \mathbf{C}^{k+1} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ avec $\mathbf{C}^k \in \text{Ob}(\mathbf{Ab})$ et $d_k \in \text{Mor}_{\mathbf{Ab}}(\mathbf{C}^k, \mathbf{C}^{k+1})$, tels que $d_{k+1} \circ d_k = 0$. Les objets \mathbf{C}^k sont les « termes » du complexe et les morphisme d_k sont ses « différentielles » ou « cobords ».

Un complexe est noté $(\mathbf{C}^*; d_*)$ et même simplement \mathbf{C} lorsque la référence à la graduation et la différentielle est superflue ; il se représente sous la forme :

$$\dots \xrightarrow{d_{-3}} \mathbf{C}^{-2} \xrightarrow{d_{-2}} \mathbf{C}^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \mathbf{C}^0 \xrightarrow{d_0} \mathbf{C}^1 \xrightarrow{d_1} \mathbf{C}^2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

Un « morphisme de complexes » de $(\mathbf{C}_1^*; d_{1,*})$ vers $(\mathbf{C}_2^*; d_{2,*})$ est une famille $\{\varphi_k \in \text{Mor}_{\mathbf{Ab}}(\mathbf{C}_1^k, \mathbf{C}_2^k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ telle que $d_k \circ \varphi_k = \varphi_{k+1} \circ d_k$, autrement dit, telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \xrightarrow{d_{-3}} & \mathbf{C}^{-2} & \xrightarrow{d_{-2}} & \mathbf{C}^{-1} & \xrightarrow{d_{-1}} & \mathbf{C}^0 & \xrightarrow{d_0} & \mathbf{C}^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathbf{C}^2 & \xrightarrow{d_2} & \dots \\ & & \varphi_{-2} \downarrow & & \varphi_{-1} \downarrow & & \varphi_0 \downarrow & & \varphi_1 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \\ \dots & \xrightarrow{d_{-3}} & \mathbf{C}^{-2} & \xrightarrow{d_{-2}} & \mathbf{C}^{-1} & \xrightarrow{d_{-1}} & \mathbf{C}^0 & \xrightarrow{d_0} & \mathbf{C}^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathbf{C}^2 & \xrightarrow{d_2} & \dots \end{array}$$

est commutatif. L'ensemble des morphismes de \mathbf{C}_1 vers \mathbf{C}_2 est noté $\text{Mor}_{\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ et même $\text{Mor}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ lorsque aucune confusion n'est à craindre.

2.1.2. La correspondance $(\mathbf{C}^k; d_k) \rightsquigarrow \mathbf{C}^k$ et $(\varphi_* \in \text{Mor}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)) \rightsquigarrow (\varphi_k : \mathbf{C}_1^k \rightarrow \mathbf{C}_2^k)$ est le foncteur « k -ième terme »

2.1.3. Amplitude d'un complexe. On appelle « amplitude » d'un complexe \mathbf{C} le plus petit intervalle de \mathbb{Z} , noté $\text{ampl}(\mathbf{C})$, contenant tous les termes non nuls de \mathbf{C} . Pour $\mathbf{J} \subseteq \mathbb{Z}$, on dit également qu'un complexe est « concentré dans \mathbf{J} » lorsque $\text{ampl}(\mathbf{C}) \subseteq \mathbf{J}$.

2.1.4. Complexes concentrés en un seul degré. Pour $k \in \mathbb{Z}$, un complexe $\mathbf{C} \in \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est dit « concentré en degré k » si $\text{ampl}(\mathbf{C}) \subseteq \{k\}$. Dans ce cas $d_* = 0$ et $\text{Mor}(\mathbf{C}, \mathbf{D}) = \text{Mor}_{\mathbf{Ab}}(\mathbf{C}^k, \mathbf{D}^k)$. Pour $\mathbf{M} \in \text{Ob}(\mathbf{Ab})$, on note $\mathbf{M}[k]$ le complexe $(\mathbf{C}^*; d_*)$ tel que $\mathbf{C}^k = \mathbf{M}$, $\mathbf{C}^j = \mathbf{0}$ pour $j \neq k$ et $d_* = 0$. De même, si $\varphi \in \text{Mor}_{\mathbf{Ab}}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$, on note $\varphi[k] : \mathbf{M}[k] \rightarrow \mathbf{N}[k]$ le morphisme donné par $\varphi[k]_k = \varphi$ et $\varphi[k]_j = 0$ si $j \neq k$.

Proposition. Pour $k \in \mathbb{Z}$, la correspondance $(-)[k] : \mathbf{Ab} \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est fonctorielle covariante additive ⁽²⁾ adjointe à gauche du foncteur « k -ième terme ».

La sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ des complexes concentrés en degré 0 est clairement équivalente à la catégorie \mathbf{Ab} . Pour chaque $\mathbf{O} \in \text{Ob}(\mathbf{Ab})$, on note $\mathbf{O}[0]$ le complexe $(\mathbf{C}^*; d_*)$ tel que $\mathbf{C}^0 = \mathbf{O}$, $\mathbf{C}^k = \mathbf{0}$ pour $k \neq 0$ et $d_* = 0$.

¹Pour éviter des abstractions inutiles nous raisonnerons en termes de catégories de modules, il ne faudra donc pas s'étonner des expressions du genre « pour tout $x \in \ker(\alpha)$ ».

²Un foncteur covariant « additif » entre catégories additives (p.e. abéliennes) $\mathcal{F} : \mathbf{Ab} \rightsquigarrow \mathbf{Ab}'$ est un foncteur dont les applications fonctorielles $\mathcal{F}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) : \text{Mor}_{\mathbf{Ab}}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{Ab}'}(\mathcal{F}\mathbf{M}, \mathcal{F}\mathbf{N})$ sont des morphismes de groupes abéliens.

nulle. On a, de plus, une injection naturelle $\text{im}(d_*)[-1] \subseteq \ker(d_*)$ de conoyau :

$$h(\mathbf{C}) := \frac{\ker(d_*)}{\text{im}(d_*)[-1]}.$$

La correspondance $\mathbf{C} \rightsquigarrow h(\mathbf{C})$ est fonctorielle de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ vers la catégorie produit $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$, c'est le «foncteur de cohomologie» dont la composée avec le foncteur le k -ième terme est le «foncteur additif» de « k -ième objet de cohomologie»

$$h^k(-) : \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{Ab}.$$

2.1.9. Quasi-isomorphismes. Un morphisme de complexes $\varphi : \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2$ est dit «*quasi-isomorphisme*» lorsque le morphisme $h(\varphi)$ est un isomorphisme.

2.1.10. Amplitude cohomologique. L'«*amplitude cohomologique*» d'un complexe \mathbf{C} , notée $\text{ampl}_{\text{ch}}(\mathbf{C})$, est l'amplitude du complexe $h^*(\mathbf{C})$, i.e. $\text{ampl}_{\text{ch}}(\mathbf{C}) := \text{ampl}(h^*(\mathbf{C}))$.

Un complexe $\mathbf{C} \in \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est dit «*acyclique*» lorsque son amplitude cohomologique est vide, i.e. lorsque $h^k(\mathbf{C}) = \mathbf{0}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

2.1.11. Cône d'un morphisme de complexes. On appelle «*cône*» d'un morphisme de complexes $\varphi : \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2$ le complexe, noté $(\hat{c}(\varphi), \Delta)$, défini par

$$\hat{c}(\varphi) = \mathbf{C}_2 \oplus \mathbf{C}_1[1], \quad \Delta(x, y) = (dx + \varphi(y), -dy)$$

On note alors $p : \hat{c}(\varphi) \rightarrow \mathbf{C}_1[1]$ et $q : \mathbf{C}_2 \rightarrow \hat{c}(\varphi)$ respectivement la projection $\mathbf{C}_2 \oplus \mathbf{C}_1[1] \rightarrow \mathbf{C}_1[1]$ et l'injection $\mathbf{C}_2 \hookrightarrow \mathbf{C}_2 \oplus \mathbf{C}_1[1]$ canoniques. La suite des morphismes de complexes

$$\mathbf{C}_1[-1] \xrightarrow{\varphi[-1]} \mathbf{C}_2[-1] \xrightarrow{q[-1]} \hat{c}(\varphi)[-1] \xrightarrow{p[-1]} \mathbf{C}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{C}_2 \xrightarrow{q} \hat{c}(\varphi) \xrightarrow{p} \mathbf{C}_1[1] \xrightarrow{\varphi[1]} \mathbf{C}_2[1] \xrightarrow{q[1]} \hat{c}(\varphi)[1] \xrightarrow{p[1]} (\diamond)$$

est appelée «*triangle distingué*» où «*triangle exact*» et se note classiquement

$$\mathbf{C}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{C}_2 \xrightarrow{q} \hat{c}(\varphi) \xrightarrow{p} \mathbf{C}_1[1]$$

Mise en garde. Les composés $q \circ \varphi$ et $\varphi[1] \circ p$ ne sont généralement pas nuls et la suite longue ci-dessus (\diamond) n'est donc généralement pas un complexe.

Le résultat le plus important concernant le cône d'un morphisme est le suivant

2.1.12. Théorème Soit $\varphi : \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2$ un morphisme de complexes.

a) Le foncteur de cohomologie $h^0(-)$ appliqué à la suite (\diamond) donne une suite longue de cohomologies

$$\dots \xrightarrow{h^{-1}p} h^0\mathbf{C}_1 \xrightarrow{h^0\varphi} h^0\mathbf{C}_2 \xrightarrow{h^0q} h^0\hat{c}(\varphi) \xrightarrow{h^0p} h^1\mathbf{C}_1 \xrightarrow{h^1\varphi} h^1\mathbf{C}_2 \xrightarrow{h^1q} h^1\hat{c}(\varphi) \xrightarrow{h^1p} \dots$$

qui est un complexe acyclique.

b) Le morphisme φ est un quasi-isomorphisme, si et seulement si, $(\hat{c}(\varphi), \Delta)$ est acyclique.

Indication. La preuve est élémentaire et il suffit de la faire autour des termes en h^0 puisque $h^k(-) = h^0((-)[k])$. Nous montrons uniquement l'exactitude autour de $\hat{c}(\varphi)$ et laissons les autres cas au soin du lecteur. Soit $\omega = (x, y) \in \hat{c}(\varphi)^0$ vérifiant $\Delta(\omega) = (dx + \varphi(y); -dy) = 0$, autrement

dit, $dx = -\varphi(y)$ et $dy = 0$. Dire que $h^0 p(\bar{\omega}) = 0$ revient à dire que $y = -dy'$, auquel cas

$$\omega \sim (\omega - \Delta(0, y')) = (x - \varphi(y'), 0),$$

et ω est cohomologue de l'image du cocycle $\omega' = (x - \varphi(y')) \in \mathbf{C}_2^0$ par q_0 . On a donc $h^0(q)(\bar{\omega}) = \bar{\omega}$.

L'assertion (b) est conséquence immédiate de (a). ■

2.1.13. Exercice. Soit $\mathcal{F} : \mathbf{Ab} \rightsquigarrow \mathbf{Ab}'$ un foncteur additif. Montrer que si $\mathbf{C} := (\mathbf{C}^*, d_*) \in \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ alors $\mathcal{F}(\mathbf{C}) := (\mathcal{F}(\mathbf{C}^*), \mathcal{F}(d_*)) \in \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}')$. Puis que si $\varphi \in \text{Mor}_{\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ alors $\mathcal{F}(\hat{c}(\varphi)) = \hat{c}(\mathcal{F}\varphi)$.

En particulier, si $\varphi_* : \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ un morphisme de complexes faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique \mathbf{X} . Montrer que les foncteurs $\hat{c}(-)$ et $\Gamma(\mathbf{X}; -)$ commutent, *i.e.* on a une identification canonique

$$\Gamma(\mathbf{X}; \hat{c}(\varphi)) = \hat{c}(\Gamma(\mathbf{X}; \varphi)).$$

2.1.14. Troncatures bêtes. Pour $\mathbf{C} \in \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ et $\ell \in \mathbb{Z}$, on note $\beta_{\leq \ell} \mathbf{C}$ le complexe (\mathbf{D}^*, δ_*) tel que $\mathbf{D}^k = \mathbf{C}^k$ pour tout $k \leq \ell$ et $\mathbf{D}^k = \mathbf{0}$ autrement; on pose ensuite $\delta_k = d_k$ pour $k < \ell$ et $\delta_k = 0$ autrement. La troncature bête $\beta_{\geq \ell} \mathbf{C}$ est définie de manière symétrique. On a graphiquement :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \left(\cdots \longrightarrow \mathbf{C}^{\ell-1} \xrightarrow{d_{\ell-1}} \mathbf{C}^{\ell} \xrightarrow{d_{\ell}} \mathbf{C}^{\ell+1} \xrightarrow{d_{\ell+1}} \mathbf{C}^{\ell+2} \xrightarrow{d_{\ell+2}} \cdots \right) \\ \beta_{\leq \ell} \mathbf{C} &= \left(\cdots \longrightarrow \mathbf{C}^{\ell-1} \xrightarrow{d_{\ell-1}} \mathbf{C}^{\ell} \xrightarrow{0} \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \cdots \right) \\ \beta_{\geq \ell+1} \mathbf{C} &= \left(\cdots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{C}^{\ell+1} \xrightarrow{d_{\ell+1}} \mathbf{C}^{\ell+2} \xrightarrow{d_{\ell+2}} \cdots \right) \end{aligned}$$

Si $\varphi : \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2$ est un morphisme de complexes, on note $\beta_{\leq \ell} \varphi : \beta_{\leq \ell} \mathbf{C}_1 \rightarrow \beta_{\leq \ell} \mathbf{C}_2$ le morphisme qui coïncide avec φ en degrés $\leq \ell$ et est nul ailleurs. Le morphisme $\beta_{\geq \ell} \varphi : \beta_{\geq \ell} \mathbf{C}_1 \rightarrow \beta_{\geq \ell} \mathbf{C}_2$ est défini de manière symétrique.

Notation pour les troncatures bêtes. Les foncteurs de troncatures bêtes se définissent également sur les catégories des multicomplexes via l'identification évidente entre $\mathbf{C}^*(\mathbf{C}^{\bullet, \circ}(\mathbf{Ab}))$ et $\mathbf{C}^{\bullet, * \circ}(\mathbf{Ab})$; le foncteur $\beta_{\leq \ell}$ sur $\mathbf{C}^*(\mathbf{C}^{\bullet, \circ}(\mathbf{Ab}))$ sera alors noté $\beta_{* \leq \ell}$ sur $\mathbf{C}^{\bullet, * \circ}(\mathbf{Ab})$ pour éviter toute ambiguïté.

2.1.15. Proposition

- a) La correspondance $\mathbf{C} \rightsquigarrow \beta_{\leq \ell} \mathbf{C}$ et $\varphi \rightsquigarrow \beta_{\leq \ell} \varphi$ est un foncteur covariant additif de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ vers $\mathbf{C}^{*\leq \ell}(\mathbf{Ab})$, adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\mathbf{C}^{*\leq \ell}(\mathbf{Ab}) \subseteq \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$. On a donc un morphisme canonique (d'adjonction) $p_{\ell}(\mathbf{C}) : \mathbf{C} \rightarrow \beta_{\leq \ell} \mathbf{C}$.
- b) La correspondance $\mathbf{C} \rightsquigarrow \beta_{\geq \ell} \mathbf{C}$ et $\varphi \rightsquigarrow \beta_{\geq \ell} \varphi$ est un foncteur covariant additif de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ vers $\mathbf{C}^{*\geq \ell}(\mathbf{Ab})$, adjoint à droite du foncteur d'inclusion $\mathbf{C}^{*\geq \ell}(\mathbf{Ab}) \subseteq \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$. On a donc un morphisme canonique (d'adjonction) $q_{\ell}(\mathbf{C}) : \beta_{\geq \ell} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$.
- c) La correspondance $\mathbf{C} \rightsquigarrow (\mathbf{0} \rightarrow \beta_{> \ell} \mathbf{C} \xrightarrow{q_{\ell+1}(\mathbf{C})} \mathbf{C} \xrightarrow{p_{\ell}(\mathbf{C})} \beta_{\leq \ell} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{0})$ est fonctorielle de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$

vers la catégorie $\Delta(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}))$ des suites exactes courtes de complexes (cf. 2.2.6).

$$\begin{array}{ccccccc} \beta_{>\ell} \mathbf{C} & = & \left(\cdots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{C}^{\ell+1} \xrightarrow{d_{\ell+1}} \mathbf{C}^{\ell+2} \xrightarrow{d_{\ell+2}} \cdots \right) \\ q_{\ell+1}(\mathbf{C}) \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \text{id} \downarrow & \text{id} \downarrow & \\ \mathbf{C} & = & \left(\cdots \longrightarrow \mathbf{C}^{\ell-1} \xrightarrow{d_{\ell-1}} \mathbf{C}^{\ell} \xrightarrow{d_{\ell}} \mathbf{C}^{\ell+1} \xrightarrow{d_{\ell+1}} \mathbf{C}^{\ell+2} \xrightarrow{d_{\ell+2}} \cdots \right) \\ p_{\ell}(\mathbf{C}) \downarrow & & \text{id} \downarrow & \text{id} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \beta_{\leq \ell} \mathbf{C} & = & \left(\cdots \longrightarrow \mathbf{C}^{\ell-1} \xrightarrow{d_{\ell-1}} \mathbf{C}^{\ell} \xrightarrow{0} \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \cdots \right) \end{array}$$

d) Un foncteur additif entre catégories abéliennes induit un foncteur sur les catégories des complexes (cf. 2.1.13, 2.2.1) qui respecte les troncutures et les suites exactes courtes de troncutures de 0c.

2.1.16. Exercice. Avec les notations précédentes, soit $\varphi : \beta_{\leq \ell} \mathbf{C} \rightarrow \beta_{> \ell} \mathbf{C}[1]$ avec $\varphi_k = 0$ si $k \neq \ell$ et $\varphi_{\ell} = -d_{\ell}$. Vérifier que φ est un morphisme de complexes dont le cône s'identifie canoniquement au complexe $\mathbf{C}[1]$.

En écrivant les complexes verticalement, on retrouve le diagramme ci-contre. Le morphisme de complexes φ est alors un quasi-isomorphisme si et seulement si le complexe \mathbf{C} est acyclique.

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & & -d_{\ell+2} \uparrow & & -d_{\ell+2} \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{C}^{\ell+2} & \xrightarrow{q_{\ell+2}} & \mathbf{C}^{\ell+2} \oplus \mathbf{0} & \xrightarrow{[+1]} & \\ \uparrow & & -d_{\ell+1} \uparrow & & -d_{\ell+1} \uparrow & & \\ \mathbf{C}^{\ell} & \xrightarrow{-d_{\ell}} & \mathbf{C}^{\ell+1} & \xrightarrow{q_{\ell+1}} & \mathbf{C}^{\ell+1} \oplus \mathbf{0} & \xrightarrow{[+1]} & \\ d_{\ell-1} \uparrow & & \uparrow & & \nwarrow -d_{\ell} & & \\ \mathbf{C}^{\ell-1} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \xrightarrow{q_{\ell}} & \mathbf{0} \oplus \mathbf{C}^{\ell} & \xrightarrow{[+1]} & \\ d_{\ell-2} \uparrow & & \uparrow & & -d_{\ell-1} \uparrow & & \\ \mathbf{C}^{\ell-2} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \xrightarrow{q_{\ell}} & \mathbf{0} \oplus \mathbf{C}^{\ell-1} & \xrightarrow{[+1]} & \\ d_{\ell-3} \uparrow & & \uparrow & & -d_{\ell-2} \uparrow & & \\ \hline \beta_{\leq \ell} \mathbf{C} & \xrightarrow{\varphi} & \beta_{> \ell} \mathbf{C}[1] & \xrightarrow{q} & \hat{\mathbf{c}}(\varphi) = \mathbf{C}[1] & \xrightarrow{\frac{p}{[+1]}} & \end{array}$$

2.2 Catégorie des bicomplexes associée à une catégorie abélienne

Étant donné une catégorie abélienne \mathbf{Ab} , sa catégorie de ses complexes $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est également abélienne et nous pouvons considérer la catégorie de ses complexes, c'est à dire à la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}))$, notée aussi $\mathbf{C}^{*,*}(\mathbf{Ab})$. Ses objets se représentent toujours sous la forme :

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{-3}} \mathbf{C}^{-2} \xrightarrow{\delta_{-2}} \mathbf{C}^{-1} \xrightarrow{\delta_{-1}} \mathbf{C}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathbf{C}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathbf{C}^2 \xrightarrow{\delta_2} \cdots$$

mais cette fois, les \mathbf{C}^k sont des complexes et les δ_k des morphismes de complexes. Si nous représentons chaque complexe \mathbf{C}^k verticalement, nous obtenons la représentation plus explicite suivante

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\delta_{-3,1}} & \mathbf{C}^{-2,1} & \xrightarrow{\delta_{-2,1}} & \mathbf{C}^{-1,1} & \xrightarrow{\delta_{-1,1}} & \mathbf{C}^{0,1} & \xrightarrow{\delta_{0,1}} & \mathbf{C}^{1,1} & \xrightarrow{\delta_{1,1}} & \mathbf{C}^{2,1} & \xrightarrow{\delta_{2,1}} & \cdots \\ & & \uparrow d_{-2,1} & & \uparrow d_{-1,1} & & \uparrow d_{0,1} & & \uparrow d_{1,1} & & \uparrow d_{2,1} & & \\ \cdots & \xrightarrow{\delta_{-3,0}} & \mathbf{C}^{-2,0} & \xrightarrow{\delta_{-2,0}} & \mathbf{C}^{-1,0} & \xrightarrow{\delta_{-1,0}} & \mathbf{C}^{0,0} & \xrightarrow{\delta_{0,0}} & \mathbf{C}^{1,0} & \xrightarrow{\delta_{1,0}} & \mathbf{C}^{2,0} & \xrightarrow{\delta_{2,0}} & \cdots \\ & & \uparrow d_{-2,0} & & \uparrow d_{-1,0} & & \uparrow d_{0,0} & & \uparrow d_{1,0} & & \uparrow d_{2,0} & & \\ \cdots & \xrightarrow{\delta_{-3,-1}} & \mathbf{C}^{-2,-1} & \xrightarrow{\delta_{-2,-1}} & \mathbf{C}^{-1,-1} & \xrightarrow{\delta_{-1,-1}} & \mathbf{C}^{0,-1} & \xrightarrow{\delta_{0,-1}} & \mathbf{C}^{1,-1} & \xrightarrow{\delta_{1,-1}} & \mathbf{C}^{2,-1} & \xrightarrow{\delta_{2,-1}} & \cdots \\ & & \uparrow d_{-2,-1} & & \uparrow d_{-1,-1} & & \uparrow d_{0,-1} & & \uparrow d_{1,-1} & & \uparrow d_{2,-1} & & \\ & & \uparrow d_{-2,-2} & & \uparrow d_{-1,-2} & & \uparrow d_{0,-2} & & \uparrow d_{1,-2} & & \uparrow d_{2,-2} & & \end{array} \quad (\mathcal{B})$$

où les sous-diagrammes sont commutatifs. C'est ce que l'on appelle un « bicomplexe à termes dans \mathbf{Ab} ».

2.2.1. Foncteurs induits. Un foncteur additif transforme un complexe de \mathbf{Ab} en un complexe de \mathbf{Ab}' (cf. 2.1.13) induisant un foncteur additif, lui aussi, $\mathbf{C}^* \mathcal{F} : \mathbf{C}^* \mathbf{Ab} \rightsquigarrow \mathbf{C}^* \mathbf{Ab}'$ (noté souvent \mathcal{F} par abus). Le foncteur $\mathbf{C}^* \mathcal{F}$ est alors un foncteur additif et nous pouvons itérer le procédé à volonté. Le foncteur additif \mathcal{F} induit ainsi des foncteurs additifs sur les catégories de n -complexes quel que soit n . Ces foncteurs sont tous exacts (resp. à gauche, à droite) si \mathcal{F} l'est.

2.2.2. Foncteurs de translation. On note $\mathcal{J}_h : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab})$ le foncteur « de translation horizontale » qui fait correspondre

$$\begin{cases} (\mathbf{C}^{\bullet,*}, d_{\bullet,*}) \rightsquigarrow (\mathbf{D}^{\bullet,*}, d'_{\bullet,*}), & \text{avec } D^{k,*} = \mathbf{C}^{k+1,*} \text{ et } d'_{k,*} = -d_{k+1,*} \\ (\varphi : C_1 \rightarrow C_2) \rightsquigarrow (\mathcal{J}_h(\varphi) : \mathcal{J}_h(C_1) \rightarrow \mathcal{J}_h(C_2)), & \text{avec } \mathcal{J}_h(\varphi)_{k,*} = \varphi_{k+1,*} \end{cases}$$

Le foncteur « de translation verticale » noté $\mathcal{J}_v : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab})$ se définit symétriquement.

On notera aussi $\mathcal{J}_h^n \mathcal{J}_v^m(C) = C[n, m]$ et $\mathcal{J}_h^n \mathcal{J}_v^m(\varphi) = \varphi[n, m]$ pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$.

2.2.3. Foncteur de cohomologie verticale. Le foncteur $h^k : \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{Ab}$ de k -ième cohomologie de la section 2.1.8 induit (2.2.1) un foncteur de « k -ième cohomologie verticale »

$$h_v^k = \mathbf{C}^\bullet(h^k) : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^\bullet(\mathbf{Ab})$$

dont l'action sur le bicomplexe (\mathcal{B}) donne le complexe des k -ièmes cohomologies (verticales) :

$$\dots \xrightarrow{h^k(\delta_{-2,*})} h^k(\mathbf{C}^{-1,*}) \xrightarrow{h^k(\delta_{-1,*})} h^k(\mathbf{C}^{0,*}) \xrightarrow{h^k(\delta_{0,*})} h^k(\mathbf{C}^{1,*}) \xrightarrow{h^k(\delta_{1,*})} h^k(\mathbf{C}^{2,*}) \xrightarrow{h^k(\delta_{2,*})} \dots$$

que l'on peut représenter par :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{h^1(\delta_{-2,*})} & h^1(\mathbf{C}^{-1,*}) & \xrightarrow{h^1(\delta_{-1,*})} & h^1(\mathbf{C}^{0,*}) & \xrightarrow{h^1(\delta_{0,*})} & h^1(\mathbf{C}^{1,*}) & \xrightarrow{h^1(\delta_{1,*})} & h^1(\mathbf{C}^{2,*}) & \xrightarrow{h^1(\delta_{2,*})} & \dots \\ \dots & \xrightarrow{h^0(\delta_{-2,*})} & h^0(\mathbf{C}^{-1,*}) & \xrightarrow{h^0(\delta_{-1,*})} & h^0(\mathbf{C}^{0,*}) & \xrightarrow{h^0(\delta_{0,*})} & h^0(\mathbf{C}^{1,*}) & \xrightarrow{h^0(\delta_{1,*})} & h^0(\mathbf{C}^{2,*}) & \xrightarrow{h^0(\delta_{2,*})} & \dots \\ \dots & \xrightarrow{h^{-1}(\delta_{-2,*})} & h^{-1}(\mathbf{C}^{-1,*}) & \xrightarrow{h^{-1}(\delta_{-1,*})} & h^{-1}(\mathbf{C}^{0,*}) & \xrightarrow{h^{-1}(\delta_{0,*})} & h^{-1}(\mathbf{C}^{1,*}) & \xrightarrow{h^{-1}(\delta_{1,*})} & h^{-1}(\mathbf{C}^{2,*}) & \xrightarrow{h^{-1}(\delta_{2,*})} & \dots \end{array} \quad (\mathcal{B}_v)$$

Le foncteur de cohomologie vertical à donc comme effet d'« effacer » les flèches verticales, on peut le voir comme un foncteur $h_v : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^\bullet(\mathbf{Ab})^{\mathbb{Z}}$

2.2.4. Foncteur de cohomologie horizontal. Le même foncteur de cohomologie de 2.1.8 appliqué cette fois à la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}))$ donne le foncteur de « cohomologie horizontale »

$$h_h^k : \mathbf{C}^\bullet(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$$

dont l'action sur le bicomplexe \mathcal{B} donne la suite de complexes de cohomologies (horizontales) représenté dans :

$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow h^{-1}(d_{\bullet,1}) & \uparrow h^0(d_{\bullet,1}) & \uparrow h^1(d_{\bullet,1}) & \uparrow h^2(d_{\bullet,1}) & & \\ \dots & h^{-1}(\mathbf{C}^{\bullet,1}) & h^0(\mathbf{C}^{\bullet,1}) & h^1(\mathbf{C}^{\bullet,1}) & h^2(\mathbf{C}^{\bullet,1}) & \dots & \\ & \uparrow h^{-1}(d_{\bullet,0}) & \uparrow h^0(d_{\bullet,0}) & \uparrow h^1(d_{\bullet,0}) & \uparrow h^2(d_{\bullet,0}) & & \\ \dots & h^{-1}(\mathbf{C}^{\bullet,0}) & h^0(\mathbf{C}^{\bullet,0}) & h^1(\mathbf{C}^{\bullet,0}) & h^2(\mathbf{C}^{\bullet,0}) & \dots & (\mathcal{B}_h) \\ & \uparrow h^{-1}(d_{\bullet,-1}) & \uparrow h^0(d_{\bullet,-1}) & \uparrow h^1(d_{\bullet,-1}) & \uparrow h^2(d_{\bullet,-1}) & & \\ \dots & h^{-1}(\mathbf{C}^{\bullet,-1}) & h^0(\mathbf{C}^{\bullet,-1}) & h^1(\mathbf{C}^{\bullet,-1}) & h^2(\mathbf{C}^{\bullet,-1}) & \dots & \\ & \uparrow h^{-1}(d_{\bullet,-2}) & \uparrow h^0(d_{\bullet,-2}) & \uparrow h^1(d_{\bullet,-2}) & \uparrow h^2(d_{\bullet,-2}) & & \end{array}$$

2.2.7. Théorème

a) Pour toute suite exacte courte $(\mathbf{C}_*, \varphi, \psi)$ de complexes de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$, il existe un morphisme $\delta(\mathbf{C}_*) : h(\mathbf{C}_3) \rightarrow h(\mathbf{C}_1)[1]$ fonctoriel par rapport à $(\mathbf{C}_*, \varphi, \psi) \in \Delta(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}))$, tel que la suite longue

$$h^*(\mathbf{C}_1) \xrightarrow{h^*(\varphi)} h^*(\mathbf{C}_2) \xrightarrow{h^*(\psi)} h^*(\mathbf{C}_3) \xrightarrow{\delta(\mathbf{C}_*)} h^{*+1}(\mathbf{C}_1) \xrightarrow{h^*(\varphi)} h^{*+1}(\mathbf{C}_2) \xrightarrow{h^*(\psi)} h^{*+1}(\mathbf{C}_3) \xrightarrow{\delta(\mathbf{C}_*)} \dots$$

est un complexe acyclique.

b) Une inclusion (resp. surjection) de complexes $\varphi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si, le complexe $\text{coker}(\varphi)$ (resp. $\text{ker}(\varphi)$) est **acyclique**.

c) Si $\Phi_* : \mathbf{C}_{1,*} \rightarrow \mathbf{C}_{2,*}$ est un morphisme de suites exactes courtes de complexes tel que deux des trois morphismes Φ_1, Φ_2, Φ_3 sont des quasi-isomorphismes, alors le troisième l'est également.

Démonstration. Consulter n'importe quel livre d'algèbre homologique élémentaire. ■

2.2.8. Complexe simple associé à un bicomplexe borné inférieurement. On définit le foncteur additif $\Sigma : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ «*complexe simple associé*».

Action de Σ sur un bicomplexe. Pour tout bicomplexe $\mathbf{C} := (\mathbf{C}^{\bullet,*}, \delta_{\bullet,*}, d_{\bullet,*})$ d'objets de \mathbf{Ab} , on note $(\Sigma(\mathbf{C}); D(\mathbf{C}))$ le complexe de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \Sigma(\mathbf{C})^k := \bigoplus_{c+\ell=k} \mathbf{C}^{c,\ell}, \\ \bullet \left\{ \begin{array}{l} D(\mathbf{C})_k : \Sigma(\mathbf{C})^k \rightarrow \Sigma(\mathbf{C})^{k+1} \\ x_{c,\ell} \mapsto \delta x \oplus (-1)^c dx \end{array} \right. \end{array} \right.$$

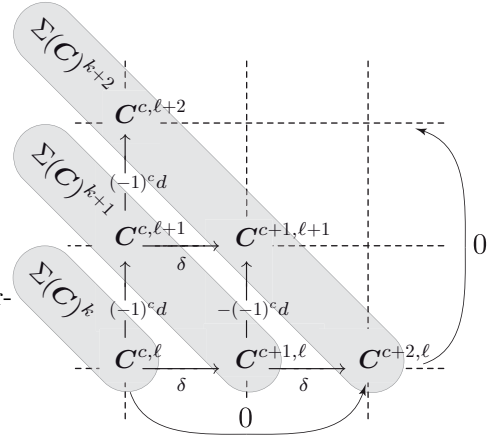
où nous avons omis des indices superflus pour améliorer la lisibilité. Le graphique suivant résume ces données et tente d'illustrer l'égalité $D_{k+1} \circ D_k = 0$.

Action de Σ sur un morphisme. Étant donné un morphisme de bicomplexes $\alpha_{\bullet,*} : \mathbf{C}_1^{\bullet,*} \rightarrow \mathbf{C}_2^{\bullet,*}$ on note,

$$\Sigma(\alpha)_k : \Sigma(\mathbf{C}_1)^k \rightarrow \Sigma(\mathbf{C}_2)^k.$$

le morphisme $\bigoplus_{k=c+\ell} \alpha_{c,\ell}$ dont la commutation avec les différentielles horizontale et verticale est évidente.

Il s'ensuit que l'on a $\Sigma(\alpha)_{k+1} \circ D(\mathbf{C}_1)_k = D(\mathbf{C}_2)_k \circ \Sigma(\alpha)_k$ et que $\Sigma(\alpha)_* : \Sigma(\mathbf{C}_1)^* \rightarrow \Sigma(\mathbf{C}_2)^*$ est bien un morphisme de complexes.



2.2.9. Proposition. Le foncteur «*complexe simple associé*» $\Sigma : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est covariant additif et exact.

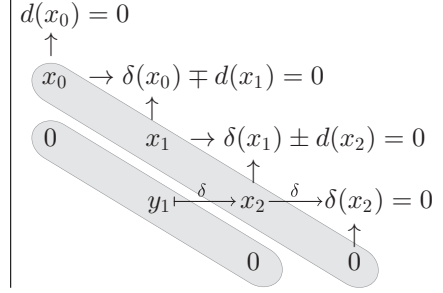
2.2.10. Critère d'acyclité du complexe simple associé

Définitions. Un bicomplexe $\mathbf{C}^{\bullet,*}$ est dit «*borné inférieurement*» lorsque ses termes $\mathbf{C}^{i,j}$ sont nuls dès que l'un des indices i, j est assez négatif, autrement dit, $\mathbf{C}^{\bullet,*} \in \mathbf{C}^{+,+}(\mathbf{Ab}) := \mathbf{C}^+(\mathbf{C}^+(\mathbf{Ab}))$ (cf. 2.1.6). Un bicomplexe $\mathbf{C}^{\bullet,*}$ est dit du «*premier quadrant*» lorsque ses coefficients $\mathbf{C}^{i,j}$ sont nuls dès que l'un des indices i, j est négatif, autrement dit, $\mathbf{C}^{\bullet,*} \in \mathbf{C}^{\geq 0, \geq 0}(\mathbf{Ab})$.

Théorème. Soit $C \in \mathbf{C}^{+,+}(\mathbf{Ab})$. Le complexe $(\Sigma(C); D(C))$ est acyclique dans les deux cas suivants

$$\bullet h_v(C) := 0 \quad \text{ou} \quad \bullet h_h(C) := 0$$

Démonstration. Il suffit de raisonner dans le cas où C est un bicomplexe du premier quadrant de lignes exactes. Soit $k \in \mathbb{N}$ et notons $\bar{x} := (x_0, \dots, x_k) \in C^{0,k} \oplus \dots \oplus C^{k,0}$ un élément de $\Sigma(C)^k$ annulé par D_k . Si $\bar{x} \neq 0$, notons j le plus grand des indices tels que $x_j \neq 0$, alors $\delta(x_j) = 0$ et il existe $y \in C^{j-1, k-j}$ tel que $\delta(y) = x_j$ grâce à l'exactitude des lignes de C . Notons \bar{y} l'élément $(y_0, \dots, y_{k-1}) \in \Sigma(C)^{k-1}$ avec $y_i = 0$ si $i \neq j-1$ et $y_{j-1} = y$. Le cocycle \bar{x} est alors cohomologue à $\bar{x}' := \bar{x} - D(\bar{y})$ dont le plus grand des indices j' tel que $x'_{j'} \neq 0$ vérifie $j' < j$. L'itération de ce procédé, possible puisque toutes les lignes sont exactes, s'arrête après au plus k étapes et montre que \bar{x} est un cobord. ■



2.2.11. Un critère de quasi-isomorphie de complexes simples associés. Le critère de 2.2.10 est aussi conséquence du critère de quasi-isomorphie de complexes simples associée suivant.

Théorème. Soit $\varphi_{\bullet,*} : C_1^{\bullet,*} \rightarrow C_2^{\bullet,*}$ un morphisme de bicomplexes bornés inférieurement. Le morphisme des complexes simples associés $\Sigma(\varphi) : \Sigma(C_1) \rightarrow \Sigma(C_2)$ est un quasi-isomorphisme dans les deux cas suivants

$$\bullet h_v(\varphi) \text{ est un isomorphisme} \quad \text{ou} \quad \bullet h_h(\varphi) \text{ est un isomorphisme}$$

Le théorème de 2.2.10 résulte alors du cas où $C_1 = 0$ et $C_2 = C$.

Démonstration du théorème. On donne le raisonnement pour le cas de la cohomologie verticale et l'on supposera le support des bicomplexes contenu dans le premier quadrant. La functorialité des troncatures bêtes du paragraphe 2.1.14 permet de définir le sous-bicomplexe $C^{\bullet > 0, *}$ de $C^{\bullet, *}$ de mêmes colonnes d'indice positif et nul sur la colonne 0. On note $C^{0, *} := C^{\bullet, *} / C^{\bullet > 0, *}$; sa colonne 0 coïncide avec celle de C et ses autres colonnes sont nulles. On considère alors le morphisme de suites exactes courtes de bicomplexes (\mathcal{B}) qui donne lieu au morphisme de suites exactes courtes de complexes simples associés $(\Sigma \mathcal{B})$ où $\Sigma \varphi_{0,*} : \Sigma C_1^{0,*} \rightarrow \Sigma C_2^{0,*}$ s'identifie trivialement au morphisme $\varphi_{0,*} : C_1^{0,*} \rightarrow C_2^{0,*}$ dont on a supposé que c'est un quasi-isomorphisme.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_1^{\bullet > 0, *} & \hookrightarrow & C_1 & \twoheadrightarrow & C_1^{0, *} \rightarrow 0 \\ & & \varphi_{\bullet > 0} \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi_{0,*} \downarrow & (\mathcal{B}) \\ 0 & \rightarrow & C_2^{\bullet > 0, *} & \hookrightarrow & C_2 & \twoheadrightarrow & C_2^{0, *} \rightarrow 0 \\ \hline 0 & \rightarrow & \Sigma C_1^{\bullet > 0, *} & \hookrightarrow & \Sigma C_1 & \twoheadrightarrow & \Sigma C_1^{0, *} \rightarrow 0 \\ & & \Sigma \varphi_{\bullet > 0} \downarrow & & \Sigma \varphi \downarrow & & \Sigma \varphi_{0,*} \downarrow & (\Sigma \mathcal{B}) \\ 0 & \rightarrow & \Sigma C_2^{\bullet > 0, *} & \hookrightarrow & \Sigma C_2 & \twoheadrightarrow & \Sigma C_2^{0, *} \rightarrow 0 \end{array}$$

Il s'ensuit (cf. 2.2.7-0c) que $\Sigma \varphi$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\Sigma \varphi_{\bullet > 0}$ l'est, mais aussi, par une itération évidente de ces idées, que $\Sigma \varphi$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\Sigma \varphi_{\bullet > k}$ l'est pour n'importe quel $k \geq 1$. On peut même raffiner sans difficulté cette assertion en disant que $\Sigma \varphi$ est un quasi-isomorphisme en degré ℓ si et seulement si $\Sigma \varphi_{\bullet > k}$ l'est pour n'importe quel $k \geq 1$. Or, sous cette forme il ne reste plus rien à démontrer puisque les termes des complexes $\Sigma C^{\bullet > \ell, *}$ sont nuls en degrés $\leq \ell$ (car C du premier quadrant). ■

2.2.12. L'idée de découper une suite exacte longue pour fabriquer deux complexes quasi-isomorphes de l'exercice 2.1.16 se généralise au contexte des bicomplexes (cf. 2.2.1). En effet, si $\mathbf{C}^{\bullet,*}$ est un bicomplexe, nous pouvons découper chaque colonne comme indiqué dans l'illustration de 2.1.16 pour obtenir un morphisme de bicomplexes $\varphi_{\bullet,*} : \mathbf{C}^{\bullet,*\leq\ell} \rightarrow \mathbf{C}^{\bullet,*>\ell}[0, 1]$ avec $\varphi_{\bullet,\ell} = d_{\bullet,\ell}$ et $\varphi_{\bullet,k} = 0$ si $k \neq \ell$.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \rightarrow \mathbf{0} & \rightarrow \mathbf{0} & \rightarrow \mathbf{0} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \rightarrow \mathbf{0} & \rightarrow \mathbf{0} & \rightarrow \mathbf{0} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \rightarrow \mathbf{C}^{0,2} & \rightarrow \mathbf{C}^{1,2} & \rightarrow \mathbf{C}^{2,2} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \rightarrow \mathbf{C}^{0,1} & \rightarrow \mathbf{C}^{1,1} & \rightarrow \mathbf{C}^{2,1} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \rightarrow \mathbf{C}^{0,0} & \rightarrow \mathbf{C}^{1,0} & \rightarrow \mathbf{C}^{2,0} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \end{array} \right] \xrightarrow{\varphi_{\bullet,*}} \left[\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \rightarrow \mathbf{C}^{0,5} & \rightarrow \mathbf{C}^{1,5} & \rightarrow \mathbf{C}^{2,5} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \rightarrow \mathbf{C}^{0,4} & \rightarrow \mathbf{C}^{1,4} & \rightarrow \mathbf{C}^{2,4} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \rightarrow \mathbf{C}^{0,3} & \rightarrow \mathbf{C}^{1,3} & \rightarrow \mathbf{C}^{2,3} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \rightarrow \mathbf{0} & \rightarrow \mathbf{0} & \rightarrow \mathbf{0} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \rightarrow \mathbf{0} & \rightarrow \mathbf{0} & \rightarrow \mathbf{0} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \end{array} \right] \\ \hline \Sigma(\mathbf{C}^{\bullet,*\leq 2}) \xrightarrow{\Sigma(\varphi_{\bullet,*})} \Sigma(\mathbf{C}^{\bullet,*>2}[0, 1]) \end{array}$$

La remarque de l'exercice 2.1.16 jointe au théorème 2.2.10 prouvent alors le corollaire suivant.

2.2.13. Corollaire. Avec les notations en cours, si $\mathbf{C} \in \mathbf{C}^{+,+}(\mathbf{Ab})$ est tel que $h_v(\mathbf{C}) = 0$, le morphisme de complexes

$$\Sigma(\varphi) : \Sigma(\mathbf{C}^{\bullet,*\leq\ell}) \longrightarrow \Sigma(\mathbf{C}^{\bullet,*>\ell}[0, 1])$$

est un quasi-isomorphisme.

2.2.14. Notation $\Sigma_{\bullet,\circ}^*$. Le foncteur “complexe simple associé” étant additif, induit des foncteurs sur les catégories des multicomplexes. Son action transforme un n -complexe en un $n-1$ -complexe en opérant des regroupements suivant une paire d'indices dont la notation devra faire référence explicite. Par exemple, sur un n -complexe constitué d'objets $\mathbf{C}^{i_1, i_2, \dots, i_n}$ avec $i_k \in \mathbb{Z}$, l'opérateur qui indexe par i_a les regroupements des termes suivant la diagonale i_a, i_b définit l'opérateur

$$(\Sigma(\mathbf{C}^{i_1, \dots, i_a, \dots, i_b, \dots, i_n}))^{i_1, \dots, i_{a-1}, k, i_{a+1}, \dots, i_b, \dots, i_n} = \Sigma_{k=i_a+i_b} \mathbf{C}^{i_1, \dots, i_{a-1}, i_a, i_{a+1}, \dots, i_b, \dots, i_n}$$

que l'on notera $\Sigma_{a,b}^a$. L'opérateur $\Sigma_{a,b}^b$ est défini de manière analogue. Enfin, pour une référence des indices non alphanumérique, on préférera la notation $\Sigma_{\bullet,\circ}^*(-)$.

2.2.15. Exercice. Soit I^* un foncteur additif de \mathbf{Ab} vers $\mathbf{C}^{\mathbb{N}}(\mathbf{Ab})$ qui fait correspondre à chaque $M \in \mathbf{Ab}$ une suite exacte longue $(\mathbf{0} \rightarrow M \rightarrow I^*(M)) = (\mathbf{0} \rightarrow M \rightarrow I^0(M) \rightarrow I^1(M) \rightarrow \dots)$. Montrer que pour tout complexe $\mathbf{M}^\bullet \in \mathbf{C}^+(\mathbf{Ab})$ on a un quasi-isomorphisme canonique $\mathbf{M}^\bullet \rightarrow \Sigma_{\bullet,\circ}^* I^*(\mathbf{M}^\bullet)$ fonctoriel sur la catégorie $\mathbf{C}^+(\mathbf{Ab})$.

§ 3. Cohomologie des faisceaux

La référence incontournable pour cette section est [Go].

3.1 Préliminaires

On désigne par \mathbf{X} un espace topologique et par $\mathbf{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$ la catégorie (abélienne) des faisceaux de groupes abéliens sur \mathbf{X} . Pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ et tout $\mathcal{G} \in \mathbf{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$ on note $\Gamma(U; \mathcal{G})$ le

groupe des sections de \mathcal{G} au-dessus de U . La correspondance $\mathcal{G} \rightsquigarrow \Gamma(U; \mathcal{G})$ est fonctorielle, additive, exacte à gauche, de $\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$ vers la catégorie $\text{Mod}(\mathbb{Z})$ des groupes abéliens.

Pour $\mathcal{G} \in \text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$, on appelle «*résolution de \mathcal{G}* » toute suite exacte longue de faisceaux

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

on la note $\epsilon : \mathcal{G} \rightarrow (\mathcal{G}^*, d_*)$. Le morphisme ϵ s'appelle l'«*augmentation (de la résolution de \mathcal{G})*»⁽⁵⁾.

3.1.1. Faisceaux flasques. Un faisceau $\mathcal{F} \in \text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ est dit «*flasque*» si ses sections locales sont restrictions de sections globales, autrement dit si l'application $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{F})$ est surjective quel que soit l'ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$.

3.1.2. Proposition

a) Pour toute suite exacte courte de faisceaux $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathbf{0}$ avec \mathcal{F} flasque, la suite courte de groupes abéliens

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{G}') \rightarrow \mathbf{0}$$

est exacte, quel que soit l'ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$.

b) Pour toute suite exacte longue de faisceaux flasques : $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \dots$, la suite longue de groupes abéliens

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}_0) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}_1) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}_2) \rightarrow \dots$$

est exacte, quel que soit l'ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$.

3.1.3. Résolution flasque de Godement. À tout un faisceau \mathcal{G} sur \mathbf{X} on associe un espace topologique $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ et une application étale $p_{\mathcal{G}} : \mathcal{E}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{X}$ dont la fibre en $x \in \mathbf{X}$ s'identifie à l'ensemble \mathcal{G}_x des germes de \mathcal{G} en x . Le faisceau des sections locales continues de $p_{\mathcal{G}}$ s'identifie à \mathcal{G} et c'est un sous-faisceau du faisceau des sections locales ensemblistes $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}$ qui est clairement flasque. La correspondance

$$\mathcal{G} \rightsquigarrow (\mathcal{G} \xrightarrow{\epsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G})$$

est *fonctorielle* et *exacte* de $\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$ vers la catégorie $\mathbf{C}^+(\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$ des complexes de faisceaux bornés à gauche. On procède ensuite par induction : ayant défini le complexe *exact* de foncteurs exacts

$$0 \rightarrow \text{id}(-) \xrightarrow{\epsilon(-)} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0(-) \xrightarrow{d_0(-)} \dots \xrightarrow{d_{k-2}(-)} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^{k-1}(-) \xrightarrow{d_{k-1}(-)} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^k(-)$$

le conoyau de $d_{k-1}(-)$, noté $\mathcal{Q}(-)$, est, lui aussi, un foncteur exact. On pose alors $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}^{k+1}(-) := \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0(\mathcal{Q}(-))$ et $(d_k(-) : \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^k(-) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^{k+1}(-))$: la composée du morphisme canonique $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}^k(-) \rightarrow \mathcal{Q}(-)$ suivi du morphisme $\epsilon(\mathcal{Q}(-)) : \mathcal{Q}(-) \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0(\mathcal{Q}(-))$. La suite

$$0 \rightarrow \text{id}(-) \xrightarrow{\epsilon(-)} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0(-) \xrightarrow{d_0(-)} \dots \xrightarrow{d_{k-2}(-)} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^{k-1}(-) \xrightarrow{d_{k-1}(-)} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^k(-) \xrightarrow{d_k(-)} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^{k+1}(-)$$

est alors un complexe de foncteurs exacts dont l'homologie est nulle en tout degré $\leq k$.

⁵Plus généralement «*augmenter un complexe*» $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{C}^0 \xrightarrow{d_0} \mathbf{C}^1 \rightarrow \dots$ consiste à le rendre exact à gauche en lui rajoutant le terme $\mathbf{C}^{-1} := \ker(d_0)$ via l'injection canonique $\epsilon : \mathbf{C}^{-1} \rightarrow \mathbf{C}^0$ que l'on appelle «*le morphisme d'augmentation*». Le complexe $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{C}^{-1} \rightarrow \mathbf{C}^0 \rightarrow \mathbf{C}^1 \rightarrow \dots$ s'appelle «*le complexe augmenté*». Cette procédure est fonctorielle et c'est une équivalence de catégories entre la catégorie des complexes à support dans $[0, +\infty[$ et la catégorie des complexes à support dans $[-1, +\infty[$ exacts en degrés $\{-1, 0\}$. La procédure symétrique donne lieu à la notion de «*co-augmentation*».

L'itération de ce procédé donne le foncteur «*résolution (flasque) canonique de Godement*», il est noté $\mathcal{F} \rightsquigarrow (\epsilon(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \rightarrow (\mathcal{C}_X^* \mathcal{F}; d_*(\mathcal{F})))$.

3.2 Cohomologie des faisceaux

3.2.1. Définition. On appelle «*k*-ième groupe de cohomologie de faisceaux de $\mathcal{G} \in \text{Fais}_X(\mathbb{Z})$ au-dessus de l'ouvert $U \subseteq X$ » et on note $H^k(U; \mathcal{G})$, le *k*-ième groupe de cohomologie du complexe

$$\Gamma(U; (\mathcal{C}_X^* \mathcal{G}, d_*(\mathcal{G}))) := (\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^2 \mathcal{G}) \rightarrow \dots)$$

soit

$$\boxed{H^*(U; \mathcal{G}) := h^* \Gamma(U; (\mathcal{C}_X^* \mathcal{G}, d_*(\mathcal{G})))}$$

3.2.2. Augmentation du complexe de Godement. La suite longue $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\epsilon(\mathcal{G})} (\mathcal{C}_X^* \mathcal{G}; d_*(\mathcal{G}))$ est un complexe exact à gauche, *i.e.* $\epsilon(\mathcal{G})$ est une «*augmentation*» du complexe de Godement.

3.2.3. Exercice. Montrer que $\Gamma(U; \epsilon(\mathcal{G}))$ induit un isomorphisme entre $\Gamma(U; \mathcal{G})$ et $H^0(U; \mathcal{G})$

3.2.4. Faisceaux acycliques. Un faisceau \mathcal{G} est dit «*acyclique sur un ouvert U* » lorsque ses groupes de cohomologie de faisceau au-dessus de U en degrés positifs sont nuls, *i.e.* $H^{>0}(U; \mathcal{G}) = 0$.

3.2.5. Exercice. Un faisceau flasque est acyclique au-dessus de tout ouvert (3.1.2).

3.2.6. Théorème (Leray). Soit $\epsilon : \mathcal{G} \rightarrow (\mathcal{G}^*, d_*)$ une résolution de $\mathcal{G} \in \text{Fais}_X(\mathbb{Z})$ où chaque \mathcal{G}^k est acyclique sur $U \subseteq X$. Alors, le groupe de cohomologie de faisceaux $H^k(U; \mathcal{G})$ s'identifie canoniquement au *k*-ième groupe de cohomologie du complexe $\Gamma(U; (\mathcal{G}^*, d_*))$.

Démonstration. En appliquant le foncteur (exact) «*résolution de Godement*» sur chaque terme de la suite longue $\epsilon : \mathcal{G} \rightarrow (\mathcal{G}^*, d_*)$ on obtient le bicomplexe de faisceaux du premier quadrant de lignes et colonnes exactes représenté ci-après. L'application du foncteur $\Gamma(U; -)$ transforme ce bicomplexe en un bicomplexe de groupes abéliens dont les lignes d'indices ≥ 1 sont exactes d'après 3.1.2 et les colonnes d'indices ≥ 1 le sont aussi en raison de l'acyclicité des \mathcal{G}^* . La cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe $\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}^*)$ (partie grisée) est alors canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe $\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{G}^*)$ grâce au corollaire 2.2.13, et est aussi canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe $\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^* \mathcal{G})$ en raison de la version symétrique du même corollaire, or cette dernière est précisément $H^*(U; \mathcal{G})$. ■

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G} & \rightarrow & \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^0 & \rightarrow & \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^1 & \rightarrow & \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^2 & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G} & \rightarrow & \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^0 & \rightarrow & \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^1 & \rightarrow & \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^2 & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{G} & \rightarrow & \mathcal{G}^0 & \rightarrow & \mathcal{G}^1 & \rightarrow & \mathcal{G}^2 & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \end{array}$$

3.2.7. Remarque. L'intérêt pratique immédiat de ce théorème vient de la souplesse qu'il permet dans le choix de résolutions d'un faisceau. Ainsi, *toute* résolution flasque d'un faisceau (*cf.* 3.2.5), pas seulement celle de Godement, permet le calcul de ses groupes de cohomologie.

3.2.8. Propriétés générales de la cohomologie de faisceaux. Nous avons défini dans les paragraphes précédents la cohomologie d'un faisceau. Si maintenant nous avons un morphisme de faisceaux $\alpha : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$, la functorialité de la résolution canonique de Godement donne un morphisme de complexes $\mathcal{C}_X^* \alpha : \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_2$ et donc un morphisme de cohomologies de faisceaux $H^*(U; \alpha) : H^*(U; \mathcal{G}_1) \rightarrow H^*(U; \mathcal{G}_2)$.

3.2.9. Théorème. Soit U un ouvert de X . Soient \mathcal{G}_i des faisceaux de groupes abéliens sur X .

a) La correspondance qui associe

$$\mathcal{G} \rightsquigarrow H^*(U; \mathcal{G}), \quad (\alpha : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2) \rightsquigarrow (H^*(U; \alpha) : H^*(U; \mathcal{G}_1) \rightarrow H^*(U; \mathcal{G}_2))$$

est fonctorielle additive et covariante de $\text{Fais}_X(\mathbb{Z})$ vers la catégorie $\text{Mod}(\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$.

b) Le morphisme de foncteurs $\Gamma(U; -) \rightarrow \Gamma(U'; -)$ correspondant à une inclusion d'ouverts $U' \hookrightarrow U$, induit un morphisme de foncteurs de cohomologie $H^*(U; -) \rightarrow H^*(U'; -)$.

c) Pour toute suite exacte courte $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_3 \rightarrow \mathbf{0}$, il existe un morphisme de connexion $c(U)_* : H^*(U; \mathcal{G}_3) \rightarrow H^{*+1}(U; \mathcal{G}_1)$ tel que la suite longue de cohomologies

$$0 \rightarrow H^0(U; \mathcal{G}_1) \rightarrow H^0(U; \mathcal{G}_2) \rightarrow H^0(U; \mathcal{G}_3) \xrightarrow{c(U)_0} H^1(U; \mathcal{G}_1) \rightarrow H^1(U; \mathcal{G}_2) \rightarrow H^1(U; \mathcal{G}_3) \xrightarrow{c(U)_1} \dots$$

est exacte. Ces suites, particulièrement le morphisme de connexion $c(U)_*$, sont fonctorielles sur la catégorie des suites exactes courtes de faisceaux et sont naturelles relativement aux inclusions d'ouverts $U' \subseteq U$.

Indications. Les assertions (a,b) sont immédiates, pour (c) il suffit de remarquer que l'application du foncteur "résolution de Godement" sur la catégorie des suites exactes courtes de faisceaux, définit un foncteur à valeurs dans la catégorie des suites exactes courtes de complexes de faisceaux flasques. On a, pour un morphisme de suites exactes courtes,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_3 \rightarrow \mathbf{0} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}'_1 \rightarrow \mathcal{G}'_2 \rightarrow \mathcal{G}'_3 \rightarrow \mathbf{0} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_1) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_2) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_3) \rightarrow \mathbf{0} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_1) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_2) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_3) \rightarrow \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, le foncteur $\Gamma(U; -)$ appliqué au bicomplexe $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_3 \rightarrow \mathbf{0}$ préserve l'exactitude des lignes (cf. prop. 3.1.20a) et nous fait passer de la catégorie des suites exactes courtes de complexes de faisceaux flasques à la catégorie des suites exactes courtes de complexes de groupes abéliens,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_1) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_2) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_3) \rightarrow \mathbf{0} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_1) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_2) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_3) \rightarrow \mathbf{0} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_1)) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_2)) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_3)) \rightarrow \mathbf{0} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_1)) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_2)) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_3)) \rightarrow \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

on conclut alors en appliquant le théorème 2.2.7. \blacksquare

3.3 Cohomologie de Čech des faisceaux

3.3.1. Complexe de Čech. Pour tout préfaisceau \mathcal{P} de groupes abéliens sur X et toute famille $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ d'ouverts de X on note $\check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ le «groupe des k -cochaînes de Čech à valeurs dans

\mathcal{P} et relatives à \mathcal{U} :

$$\check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P}) = \prod_{a_0 < \dots < a_k} \mathcal{P}(U_{a_0 \dots a_k})$$

où $U_{a_0 \dots a_k} := U_{a_0} \cap \dots \cap U_{a_k}$. On définit ensuite la « différentielle de Čech »

$$d_k : \check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \rightarrow \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \quad d_k(\omega)_{a_0 \dots a_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \omega_{a_0 \dots \widehat{a_j} \dots a_{k+1}}$$

dont on vérifie aisément que $d_{k+1} \circ d_k = 0$. On note $(\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}); d_*)$ le « complexe des cochaînes de Čech à valeurs dans \mathcal{P} et relatif à \mathcal{U} »

3.3.2. Exercice. Vérifier que pour tout complexe de préfaisceaux $(\mathcal{P}^\bullet, d_\bullet)$ et chaque $k \in \mathbb{N}$, la cohomologie du complexe $\check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet)$ s'identifie au produit des cohomologies des complexes $\Gamma(U_{a_0 \dots a_k}; (\mathcal{P}^\bullet, d_\bullet))$.

3.3.3. Augmentation du complexe de Čech. Soit $\epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P}) : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ le morphisme qui associe à une section $\sigma \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ l'élément $\epsilon(\sigma) \in \prod_{a \in \mathfrak{A}} \mathcal{P}(U_a)$ tel que $\epsilon(\sigma)_a = \sigma|_{U_a}$. La suite longue $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X}) \xrightarrow{\epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P})} (\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}); d_*)$ est un complexe, on appellera $\epsilon(\mathcal{U}; -)$ l'« augmentation » du complexe de Čech. ⁽⁶⁾

3.3.4. Cohomologie de Čech. Avec les notions précédentes, on appelle « k -ième groupe de cohomologie de Čech d'un préfaisceau \mathcal{P} relativement à \mathcal{U} » les k -ième groupe de cohomologie du complexe $(\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}); d_*)$, on le note $\check{H}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P})$.

3.3.5. Exercice. Montrer que si \mathcal{P} est un faisceau et si \mathcal{U} est un recouvrement de \mathbf{X} , l'augmentation $\epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ induit un isomorphisme entre $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ et $\check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P})$.

3.3.6. Faisceautisation du complexe de Čech. Les notation étant celles des paragraphes précédents, on note $\mathcal{U} \pitchfork V = \{U_\alpha \cap V\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ pour tout ouvert $V \subseteq \mathbf{X}$, et l'on pose

$$(\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}), d_*)(V) := (\check{C}^*(\mathcal{U} \pitchfork V; \mathcal{P}); d_*)$$

Lorsque $V' \subseteq V$ les morphismes de restriction $\mathcal{P}(U_{a_0 \dots a_k} \cap V) \rightarrow \mathcal{P}(U_{a_0 \dots a_k} \cap V')$ induisent un morphisme de restriction $\check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P})(V) \rightarrow \check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P})(V')$ clairement compatible aux différentielles de Čech. On a ainsi un complexe de préfaisceaux sur \mathbf{X} noté $(\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}), d_*)$ muni de l'« augmentation » $\epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P}) : \mathcal{P} \rightarrow (\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}), d_*)$ définie par $\Gamma(V, \epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P})) = \epsilon(V, \mathcal{U}; \mathcal{P})$ (3.3.3).

Le théorème suivant est fondamental, surtout pour l'assertion (b).

3.3.7. Théorème. Soit \mathcal{G} un faisceau sur \mathbf{X} .

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le préfaisceau $\check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ est un faisceau qui est flasque si \mathcal{G} est flasque.

!!

b) Si \mathcal{U} est un recouvrement de \mathbf{X} , le complexe $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\epsilon} (\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}), d_*)$ est acyclique.

!!

Démonstration. (cf. §5 [Go], Thm. 5.2.1 p. 206.) ■

⁶Il y a ici un petit abus de langage dans la mesure où le complexe de Čech augmenté est exact à gauche, à priori seulement lorsque \mathcal{P} est un faisceau et que \mathcal{U} est un recouvrement de \mathbf{X} .

3.3.8. Théorème de Čech-Leray pour la cohomologie des faisceaux. Soit $\mathcal{G} \in \text{Fais}_X(\mathbb{Z})$. Un recouvrement \mathcal{U} de X est dit «acyclique pour \mathcal{G} » où « \mathcal{G} -acyclique» lorsque \mathcal{G} est acyclique au-dessus de chaque ouvert $U_{a_0 \dots a_k}$.

3.3.9. Théorème. Soient $\mathcal{G} \in \text{Fais}_X(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in \mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de X .

a) Si \mathcal{U} et \mathcal{G} -acyclique, la cohomologie de faisceaux de \mathcal{G} s'identifie canoniquement à la cohomologie de Čech de \mathcal{G} relative à \mathcal{U} , i.e.

$$\boxed{\check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}) \simeq H^*(X; \mathcal{G})}$$

b) Soit $\varphi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ un morphisme de faisceau tel que $H^*(V; \varphi) : H^*(V; \mathcal{G}_1) \rightarrow H^*(V; \mathcal{G}_2)$ est un isomorphisme au-dessus de chaque ouvert $V = U_{a_0 \dots a_k}$, alors

$$\boxed{H^*(X; \varphi) : H^*(X; \mathcal{G}_1) \rightarrow H^*(X; \mathcal{G}_2)}$$

est un isomorphisme.

Démonstration

a) La preuve est semblable à celle du théorème de Leray (3.2.6). La résolution de Godement appliquée au termes de la résolution de Čech $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ (cf. 3.3.7-0b) donne le bicomplexe de faisceaux du premier quadrant

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G} & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}) & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G} & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}) & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{G} & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{G}) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U}; \mathcal{G}) & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \end{array}$$

que le foncteur $\Gamma(X; _)$ transforme en un bicomplexe de groupes abéliens de lignes d'indices ≥ 1 exactes car sections globales de suites exactes de faisceaux flasques (3.3.7) et les colonnes d'indices ≥ 1 le sont également puisqu'elles calculent la cohomologie de faisceaux de $\check{\mathcal{C}}^k(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ qui n'est autre que le produit des cohomologies faisceaux $\mathcal{G}|_{U_{a_0 \dots a_k}}$, triviales par hypothèse. La cohomologie du complexe simple associé au sous-complexe $\Gamma(X; \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}))$ (partie grisée) est alors canoniquement isomorphe, d'une part à la cohomologie de faisceaux de \mathcal{G} , et d'autre part à la cohomologie de Čech de \mathcal{G} relative à \mathcal{U} (cf. 2.2.13).

b) Le morphisme $H^*(X; \varphi)$ est un isomorphisme, si et seulement si les sections globales du morphisme $\mathcal{C}_X^* \varphi : \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_2$, défini par le foncteur «résolution de Godement», est un quasi-isomorphisme, autrement dit, si et seulement si la cohomologie des sections globales du cône de $\mathcal{C}_X^* \varphi$, noté \mathcal{F}^* , est nulle (2.1.12-0b). Soit $\mathcal{B}^{\bullet,*}$ le bicomplexe du premier quadrant ci-contre, où là ligne ℓ est le complexe de Čech augmenté associé à \mathcal{F}^ℓ . Comme chaque ligne de $\mathcal{B}^{\bullet,*}$ est une suite exacte de faisceaux flasques (3.3.70a), la cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe $\Gamma(X; \mathcal{B}^{\bullet,*})$ est nulle (3.1.20b, 2.2.10), et la cohomologie de $\Gamma(X; \mathcal{F}^*)$ s'identifie canoniquement à celle du complexe simple associé au bicomplexe

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{F}^2 & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}^2) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}^2) & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{F}^1 & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}^1) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}^1) & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{F}^0 & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}^0) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}^0) & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \end{array} \quad (\mathcal{B}^{\bullet,*})$$

$\Gamma(\mathbf{X}; \check{\mathcal{C}}^\bullet(U; \mathcal{F}^*))$ (version symétrique du corollaire de 2.2.13). Or, les colonnes de ce bicomplexe sont les produits des complexes $\Gamma(U_{a_0 \dots a_k}; \mathcal{F}^*)$ (3.3.2) dont les cohomologies sont nulles puisqu'il s'agit des cohomologies des cônes des morphismes $\Gamma(U_{a_0 \dots a_k}; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^* \varphi)$, qui sont des quasi-isomorphismes par hypothèse. On conclut par 2.2.10. ■

§4. Hypercohomologie des complexes de faisceaux

Cette partie étend les définitions et résultats de la section précédente de la catégorie $\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$ à la catégorie $\mathbf{C}^+(\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$ des *complexes* de faisceaux bornés inférieurement.

4.1 Hypercohomologie des complexes de faisceaux

L'«*hypercohomologie*» au-dessus de l'ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ d'un complexe de faisceaux borné inférieurement \mathcal{G}^\bullet , notée $\mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}^\bullet)$, est la cohomologie des sections globales du complexe simple associé au bicomplexe (borné inférieurement) $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{G}^\bullet$, on pose donc

$$\boxed{\mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}^\bullet) := h^* \Gamma(U; \Sigma_{* \bullet}^*(\mathcal{C}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{G}^\bullet))}$$

4.1.1. Commentaire. Le foncteur $(-)[0] : \text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^* \text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$ (2.1.4) identifie la catégorie de faisceaux à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}^+(\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$ des complexes concentrés en degré zéro. Ainsi, pour tout faisceau \mathcal{G} , on a $\Sigma \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{G}[0] = \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{G}$ et $\mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}[0]) = H^*(U; \mathcal{G})$. L'hypercohomologie étend de cette manière la cohomologie des faisceaux.

4.1.2. Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\mathbf{X}; -) : h^*(\Gamma(U; -)) \rightarrow \mathbb{H}^*(U; -)$. On construit un morphisme canonique de complexes de faisceaux

$$\epsilon(\mathcal{G}^\bullet) : \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \Sigma_{* \bullet}^* \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{G}^\bullet$$

par découpage de la première ligne (cf. 2.2.12) du bicomplexe construit à partir du complexe (horizontal) \mathcal{G}^\bullet en lui appliquant, terme à terme le foncteur «*résolution de Godement augmentée*» :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G}^0 & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G}^1 & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G}^2 \rightarrow \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}^0 & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}^1 & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}^2 \rightarrow \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{G}^0 & \rightarrow & \mathcal{G}^1 & \rightarrow & \mathcal{G}^2 \rightarrow \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \quad \uparrow \epsilon(-)$$

Le morphisme $\epsilon(\mathcal{G}^\bullet)$, naturel par rapport à $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{C}^+ \text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$, s'identifie au morphisme d'augmentation d'un faisceau dans sa résolution de Godement (3.2.2) lorsque \mathcal{G}^\bullet est concentré en degré 0. La section de $\epsilon(\mathcal{G}^\bullet)$ au-dessus de U sera notée

$$\epsilon(U; \mathcal{G}^\bullet) : \Gamma(U; \mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \Sigma_{* \bullet}^* \Gamma(U; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{G}^\bullet),$$

et le passage en cohomologie donne «*le morphisme canonique de la cohomologie des sections de* \mathcal{G}^\bullet »

vers l'hypercohomologie de \mathcal{G}^\bullet , noté

$$\boxed{\Xi(U; \mathcal{G}^\bullet) : h^*(\Gamma(U; \mathcal{G}^\bullet)) \longrightarrow \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}^\bullet)}$$

4.1.3. Propriétés générales de l'hypercohomologie. Si $\varphi_\bullet : \mathcal{G}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{G}_2^\bullet$ est un morphisme de complexes de faisceaux, la functorialité de la résolution canonique de Godement donne le morphisme de bicomplexes $\mathcal{C}_X^* \varphi_\bullet : \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_2^\bullet$ d'où un morphisme d'hypercohomologies

$$\mathbb{H}^*(U; \varphi_\bullet) : \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}_2^\bullet)$$

4.1.4. Théorème. Soient U un ouvert de X et $\mathcal{G}_i^\bullet \in \mathbf{C}^+(\text{Fais}_X(\mathbb{Z}))$.

a) La correspondance qui associe

$$\mathcal{G}^\bullet \rightsquigarrow \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}^\bullet), \quad (\varphi_\bullet : \mathcal{G}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{G}_2^\bullet) \rightsquigarrow (\mathbb{H}^*(U; \varphi_\bullet) : \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}_2^\bullet))$$

est fonctorielle additive et covariante de $\mathbf{C}^+ \text{Fais}_X(\mathbb{Z})$ vers la catégorie $\text{Mod}(\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$.

b) Le morphisme canonique $\epsilon(U; -) : h^*\Gamma(U; -) \rightarrow \mathbb{H}^*(U; -)$ (4.1.2) est un morphisme de foncteurs.

c) Le morphisme de foncteurs $\Gamma(U; -) \rightarrow \Gamma(U'; -)$ correspondant à une inclusion d'ouverts $U' \hookrightarrow U$, induit un morphisme de foncteurs d'hypercohomologie $\mathbb{H}^*(U; -) \rightarrow \mathbb{H}^*(U'; -)$.

d) Pour toute suite exacte courte $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{G}_2^\bullet \rightarrow \mathcal{G}_3^\bullet \rightarrow \mathbf{0}$, il existe un morphisme de connexion $c(U)_* : \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}_3^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^{*+1}(U; \mathcal{G}_1^\bullet)$ tel que la suite longue d'hypercohomologies

$$0 \rightarrow \mathbb{H}^0(U; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^0(U; \mathcal{G}_2^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^0(U; \mathcal{G}_3^\bullet) \xrightarrow{c(U)_0} \mathbb{H}^1(U; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^1(U; \mathcal{G}_2^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^1(U; \mathcal{G}_3^\bullet) \xrightarrow{c(U)_1} \dots$$

est un complexe acyclique. Ces suites, particulièrement le morphisme de connexion $c(U)_*$, sont fonctorielles sur la catégorie des suites exactes courtes de complexes de faisceaux bornés inférieurement et sont naturelles relativement aux inclusions d'ouverts $U' \subseteq U$.

e) Si \mathcal{G}^\bullet est un complexe acyclique⁽⁷⁾ son hypercohomologie est nulle, i.e.

$$(h(\mathcal{G}^\bullet) = 0) \implies (\mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}^\bullet) = 0)$$

f) Un quasi-isomorphisme $\varphi_\bullet : \mathcal{G}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{G}_2^\bullet$ induit un isomorphisme en hypercohomologie, i.e.

$$(h(\mathcal{G}_1^\bullet) \xrightarrow[\text{iso}]{h(\varphi)} h(\mathcal{G}_2^\bullet)) \implies (\mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}_1^\bullet) \xrightarrow[\text{iso}]{\mathbb{H}^*(U; \varphi_\bullet)} \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}_2^\bullet))$$

g) (**Leray**) Lorsque les faisceaux \mathcal{G}^k du complexe \mathcal{G}^\bullet sont acycliques sur l'ouvert U , le morphisme canonique

$$h^*\Gamma(U; \mathcal{G}^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}^\bullet)$$

est un isomorphisme.

h) Un quasi-isomorphisme $\varphi_\bullet : \mathcal{G}^\bullet \rightarrow \mathcal{F}^\bullet$ est appelé «résolution acyclique (resp. flasque ou molle)» lorsque les faisceaux \mathcal{F}^k le sont. Dans ces cas, φ_\bullet induit un isomorphisme canonique

$$\mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}^\bullet) \rightarrow h^*\Gamma(U; \mathcal{F}^\bullet)$$

⁷ On rappelle qu'un complexe de faisceau $(\mathcal{G}^\bullet, d_\bullet)$ est acyclique si et seulement l'inclusion $\text{im}(d_{i-1}) \subseteq \ker(d_i)$ de sous-faisceaux de \mathcal{G}^i est une égalité pour tout i . On a le critère qui dit : « $(\mathcal{G}^\bullet; d_\bullet)$ est acyclique si et seulement si le complexe des germes $(\mathcal{G}_x^\bullet; d_{x, \bullet})$ est acyclique pour tout $x \in X$ » (cf. [Go] § 2.5 th. 2.5.1, p. 133).

4.1.5. Commentaire. Ce théorème étend le théorème 3.2.9 de la catégorie des faisceaux à la catégorie des complexes (cf. 4.1.1) ; il comporte quatre assertions absentes dans 3.2.9 : les assertions 0e et 0f triviales dans ce cas, et 0g et 0h qui généralisent l'énoncé qui dit que si un faisceau \mathcal{G} est acyclique sur U , sa cohomologie est celle du complexe $\Gamma(U; \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0)$, ce qui est clairement tautologique.

Démonstration du théorème. Les assertions (a,b,c) sont immédiates. Pour (d), l'exactitude des foncteurs "résolution de Godement" et complexe simple associé nous ramènent à la preuve de l'analogue 3.2.9-(c) de cette assertion. Pour 0e on remarque que dans le bicomplexe $\Gamma(U; \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}^\bullet)$ chaque ligne de $\Gamma(U; \mathcal{C}_X^k \mathcal{G}^\bullet)$ est exacte puisque sections sur U du complexe exact de faisceaux flasques $\mathcal{C}_X^k \mathcal{G}^\bullet$ (exactitude du foncteur \mathcal{C}_X^k), on conclut par 2.2.10. L'assertion 0f résulte de 0e appliquée au $\hat{c}(\varphi)$. L'assertion 0g résulte du corollaire 2.2.13, appliqué au morphisme de complexes $\Gamma(U; \mathcal{G}^\bullet) \rightarrow \Gamma(U; \Sigma_{*}^{\bullet} \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}^\bullet)$ associé au découpage de bicomplexe de colonnes exactes représenté ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^0) & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^1) & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^2) \rightarrow \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^0) & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^1) & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^2) \rightarrow \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \hline
 \mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{G}^0) & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{G}^1) & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{G}^2) \rightarrow \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
 \end{array}$$

L'assertion 0h est conséquence immédiate de 0f et 0g. ■

4.2 Cohomologie de Čech de complexes de faisceaux

Dans cette partie on étend la définition de cohomologie de Čech (cf. 3.3) de la catégorie des faisceaux à la catégorie des complexes de faisceaux bornés inférieurement. Nous reprenons les notations de la section 3.3. Alors, si \mathcal{P}^\bullet est un complexe de **pré**faisceaux de groupes abéliens borné inférieurement, si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ est une famille d'ouverts de X , le « *complexe des cochaînes de Čech à valeurs dans \mathcal{P}^\bullet relatives à \mathcal{U}* » est le complexe simple associé au bicomplexe $\tilde{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet)$, puis on définit « *la cohomologie de Čech de \mathcal{P}^\bullet relative à \mathcal{U}* » par :

$$\boxed{\tilde{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet) = h^*(\Sigma_{*}^{\bullet} \tilde{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet))}$$

4.2.1. Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\mathcal{U}; -) : h^*(\Gamma(X; -)) \rightarrow \tilde{H}^*(\mathcal{U}; -)$. Tout comme dans 4.1.2, on construit un morphisme canonique de complexes

$$\epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet) : \Gamma(X; \mathcal{P}^\bullet) \longrightarrow \Sigma_{*}^{\bullet} \tilde{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet)$$

par découpage de la première ligne (cf. 2.2.12) du bicomplexe construit à partir du complexe (horizontal) \mathcal{P}^\bullet en lui appliquant, terme à terme le foncteur « *complexe de Čech augmenté* » :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{P}^0) & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{P}^1) & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{P}^2) \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P}^0) & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P}^1) & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P}^2) \\
\hline
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{P}^0) & \rightarrow & \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{P}^1) & \rightarrow & \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{P}^2) \rightarrow \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
\end{array} \quad \uparrow \epsilon(\mathcal{U}; -)$$

Le morphisme $\epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet)$, naturel par rapport à $\mathcal{P}^\bullet \in \mathbf{C}^+(\text{Prefaisc}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$, s'identifie à l'augmentation $\epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ de la section 3.3.3 lorsque \mathcal{P}^\bullet est concentré en degré 0. Le passage en cohomologie donne «le morphisme canonique de la cohomologie des sections de \mathcal{P}^\bullet sur \mathbf{X} vers la cohomologie de Čech de \mathcal{P}^\bullet relative à \mathcal{U} », noté

$$\boxed{\Xi(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet) : h^*(\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{P}^\bullet)) \rightarrow \check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet)}$$

4.3 Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -) : \check{H}(\mathcal{U}; -) \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{X}; -)$

Soit \mathcal{G}° un complexe de faisceaux borné inférieurement que nous allons imaginer comme représenté perpendiculairement au plan de la page. Le foncteur «résolution de Godement» donne alors le bicomplexe $\epsilon(\mathcal{G}^\circ) : \mathcal{G}^\circ \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{G}^\circ$ que nous représentons comme une suite exacte longue de complexes de faisceaux : $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}^\circ \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}^\circ \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G}^\circ \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^2 \mathcal{G}^\circ \rightarrow \dots$. Si nous appliquons maintenant, sur chaque terme de cette suite, le foncteur «complexe de Čech faisceautisé», on a le tricomplexe suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\circ) & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}^\circ) & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G}^\circ) & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^2 \mathcal{G}^\circ) & \rightarrow \dots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\circ) & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}^\circ) & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G}^\circ) & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^2 \mathcal{G}^\circ) & \rightarrow \dots \\
& & \epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\circ) \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{G}^\circ & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}^\circ & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G}^\circ & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^2 \mathcal{G}^\circ & \rightarrow \dots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
\text{indice} & & 0 & & 1 & & 2 & & 3
\end{array} \quad (\mathcal{B})$$

où chaque colonne d'indice positif est un bicomplexe de faisceaux flasques et colonnes exactes (3.3.7); propriété qui demeure vérifiée lorsque l'on applique le foncteur $\Gamma(\mathbf{X}; -)$ à (\mathcal{B}) (3.1.2-0b). On déduit aussitôt, par 2.2.13, que les morphisme induits $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^k \mathcal{G}^\circ) \rightarrow \Sigma_{*o}^\circ \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^k \mathcal{G}^\circ)$ ⁽⁸⁾ sont des quasi-isomorphismes **pour chaque $k \geq 0$ fixé**. On a donc le diagramme commutatif :

⁸ On rappelle que par la notation $\Sigma_{*o}^*(-)$ nous signifions l'opérateur $\Sigma_* \Sigma_{*=\bullet+o}(-)$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
& & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \rightarrow & \Sigma_{*\circ}^{\circ} \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}^{\circ}) & \rightarrow & \Sigma_{*\circ}^{\circ} \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^{\circ}) & \rightarrow & \Sigma_{*\circ}^{\circ} \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^{\circ}) & \rightarrow & \Sigma_{*\circ}^{\circ} \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^2 \mathcal{G}^{\circ}) & \rightarrow & \dots \\
& & \uparrow & & \uparrow \circ & & \uparrow \circ & & \uparrow \circ & & \\
\mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{G}^{\circ}) & \rightarrow & \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^{\circ}) & \rightarrow & \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^{\circ}) & \rightarrow & \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{C}_X^2 \mathcal{G}^{\circ}) & \rightarrow & \dots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \\
\text{indice} & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & \\
& & & & & & & & & & \text{(B')}
\end{array}$$

où les flèches marquées par ‘ \circ ’ sont des quasi-isomorphismes. Si l’on regarde maintenant, sur une même ligne, la suite des termes d’indice positif comme bicomplexe sur les directions horizontale et perpendiculaire à la page (indiquée par ‘ \circ ’), les flèches ‘ \circ ’ apparaissent comme un morphisme de bicomplexes induisant un isomorphisme sur la cohomologie de direction ‘ \circ ’. On peut donc appliquer le théorème 2.2.11 et affirmer que les flèches ‘ \circ ’ induisent un quasi-isomorphisme des complexes simples associés, ce qui donne les diagrammes commutatifs suivants :

$$\left(\begin{array}{ccc} \Sigma_{*\circ}^{\circ} \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}^{\circ}) & \rightarrow & \Sigma_{\bullet\circ}^{\circ} \Sigma_{*\circ}^{\circ} \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^{\bullet} \mathcal{G}^{\circ}) \\ \uparrow \epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{G}^{\circ}) & & \Sigma_{\bullet\circ}^{\circ} \uparrow \text{q.i.} \\ \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{G}^{\circ}) & \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{X}; \mathcal{G}^{\circ})} & \Sigma_{\bullet\circ}^{\circ} \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{C}_X^{\bullet} \mathcal{G}^{\circ}) \end{array} \right) \xrightarrow[h^*]{\text{cohomologie}} \left(\begin{array}{ccc} \check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}^{\circ}) & \rightarrow & h^*(\Sigma_{\bullet\circ}^{\circ} \Sigma_{*\circ}^{\circ} \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^{\bullet} \mathcal{G}^{\circ})) \\ \uparrow \Xi(\mathcal{U}; \mathcal{G}^{\circ}) & & h^*(\Sigma_{\bullet\circ}^{\circ} \uparrow \circ) \uparrow \text{iso} \\ h^* \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{G}^{\circ}) & \xrightarrow{\Xi(\mathbf{X}; \mathcal{G}^{\circ})} & \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{G}^{\circ}) \end{array} \right)$$

Maintenant, la composition de la flèche horizontale $\check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}^{\circ}) \rightarrow h^*(\Sigma_{\bullet\circ}^{\circ} \Sigma_{*\circ}^{\circ} \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^{\bullet} \mathcal{G}^{\circ}))$ avec l’inverse de $h^*(\Sigma_{\bullet\circ}^{\circ} \uparrow \circ)$ est naturelle par rapport à \mathcal{G}° , nous le notons

$$\boxed{\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -) : \check{H}^*(\mathcal{U}; -) \rightarrow \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; -)}$$

c’est le «*morphisme canonique de la cohomologie de Čech vers l’hypercohomologie*».

Nous avons ainsi un diagramme commutatif de foncteurs

$$\boxed{\begin{array}{ccc} h^* \Gamma(\mathbf{X}; -) & \xrightarrow{\Xi(\mathcal{U}; -)} & \check{H}^*(\mathcal{U}; -) \\ & \searrow \Xi(\mathbf{X}; -) & \downarrow \Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -) \\ & & \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; -) \end{array}}$$

4.3.1. Remarque. Pour $\mathcal{U} = \{\mathbf{X}\}$, on a trivialement $\Xi(\mathcal{U}; -) = \text{id}(-)$ et $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -) = \Xi(\mathbf{X}; -)$.

4.3.2. Troncatures et suites exactes longues. Les foncteurs $\Gamma(\mathbf{X}; -)$ et $\check{C}^k(\mathcal{U}; -)$ n’étant généralement pas exacts à droite, les foncteurs $h^*(\Gamma(\mathbf{X}; -))$ et $\check{H}^*(\mathcal{U}; -)$ ne génèrent pas de suite exacte longue de cohomologie lorsqu’ils sont appliqués à des suites exactes courtes de complexes, contrairement au foncteur $\mathbb{H}^*(\mathbf{X}; -)$ (3.2.9). C’est par contre bien le cas pour une suite exacte de troncatures bêtes (2.1.14, 2.1.15-0d) :

$$\mathbf{0} \rightarrow \beta_{>\ell} C^{\bullet} \xrightarrow{q_{\ell+1, \bullet}} C^{\bullet} \xrightarrow{p_{\ell, \bullet}} \beta_{\leq \ell} C^{\bullet} \rightarrow \mathbf{0},$$

puisque sur chaque ligne k , l’une des flèches $q_{\ell+1, k}$ ou $p_{\ell, k}$ est un isomorphisme tandis que l’autre est nulle. On en déduit aussitôt le lemme suivant laissé en exercice.

4.3.3. Lemme. Les morphismes de foncteurs $\Xi(\mathcal{U}; -)$, $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -)$ et $\Xi(\mathbf{X}; -)$ induisent des morphismes de suites exactes longues,

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & h^0\Gamma(\mathbf{X}; \beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & h^0\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & h^0\Gamma(\mathbf{X}; \beta_{\leq\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & h^1\Gamma(\mathbf{X}; \beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & h^1\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & h^1\Gamma(\mathbf{X}; \beta_{\leq\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow \\ & & \Xi(\mathcal{U}; -) \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}; \beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}; \beta_{\leq\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \check{H}^1(\mathcal{U}; \beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \check{H}^1(\mathcal{U}; \beta_{\leq\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow \\ & & \Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -) \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbb{H}^0(\mathbf{X}; \beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \mathbb{H}^0(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \mathbb{H}^0(\mathbf{X}; \beta_{\leq\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \mathbb{H}^1(\mathbf{X}; \beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \mathbb{H}^1(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \mathbb{H}^1(\mathbf{X}; \beta_{\leq\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow \end{array}$$

pour tout $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{C}^+(\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$.

4.4 Théorème de Čech-Leray pour l'hypercohomologie des complexes de faisceaux

On étend le théorème de Čech-Leray (3.3.9) de la catégorie $\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$ à $\mathbf{C}^+(\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$.

Soit $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{C}^+(\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$. Un recouvrement \mathcal{U} de \mathbf{X} est dit «acyclique pour \mathcal{G}^\bullet » où « \mathcal{G}^\bullet -acyclique» lorsque chaque \mathcal{U} est \mathcal{G}^k -acyclique pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (cf. 3.3.8).

4.4.1. Théorème. Soient $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{C}^+(\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$ et $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in \mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de \mathbf{X} .

!!!

a) (Čech-Leray) Si \mathcal{U} est \mathcal{G}^\bullet -acyclique, le morphisme canonique

$$\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet) : \check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet)$$

est un **isomorphisme**.

!!!

b) Soit $\varphi_\bullet : \mathcal{G}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{G}_2^\bullet$ un morphisme de complexes faisceau tel que

$$\mathbb{H}^*(V; \varphi) : \mathbb{H}^*(V; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^*(V; \mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un isomorphisme pour tout $V = U_{a_0 \dots a_k}$; ou bien, si \mathcal{U} et \mathcal{G}_i^\bullet -acyclique, tel que

$$h^*\Gamma(V; \varphi) : h^*\Gamma(V; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow h^*\Gamma(V; \mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un isomorphisme pour tout tel V . Alors

$$\mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \varphi) : \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un **isomorphisme**.

Démonstration

a) L'idée est la même que celle de la preuve du théorème 2.2.11. On suppose $\mathcal{G}^k = 0$ pour $k < 0$.

Le lemme 4.3.3 pour $\ell = 0$, le lemme des cinq et le fait que $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -)$ est bien un isomorphisme pour un complexe concentré en un seul degré (3.3.9), montre que pour $a \in \mathbb{N}$ donné, $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; \mathcal{G}^{\bullet \geq 0})$ est un isomorphisme en degré cohomologique d , si et seulement si $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; \mathcal{G}^{\bullet \geq 1})$ l'est. Et, en itérant cette idée pour $\ell = 1, 2, \dots$, on montre de même $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; \mathcal{G}^{\bullet \geq 0})$ est un isomorphisme en degré d , si et seulement si $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; \mathcal{G}^{\bullet \geq k})$ l'est pour un certain $k \geq 1$. Or, si $k > d$ l'énoncé est trivial.

b) Quitte à changer \mathcal{G}_i^\bullet par $\Sigma_{**}^\bullet \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{G}_i^\bullet$ on peut supposer que les \mathcal{G}_i^k sont flasques de même alors que les termes du cône de φ que nous notons \mathcal{F}^\bullet par commodité. Il s'agit alors de prouver que si \mathcal{F}^\bullet est un complexe borné à gauche de faisceaux flasques tel que la cohomologie des complexes $\Gamma(V; \mathcal{F}^\bullet)$ est nulle, alors la cohomologie de $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet)$ est nulle aussi. Or, c'est très exactement ce que nous avons démontré dans la preuve de 3.3.9-0b. L'équivalence entre les deux hypothèses la donne le théorème de Leray pour les complexes de faisceaux 4.1.4-0g. ■

§ 5. Applications

Le théorème 4.4.1 est de grande utilité, pratique comme théorique.

- L'assertion 4.4.1-0a est utilisée pour rendre le calcul de l'hypercohomologie effectif puisque le complexe de Čech $\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet)$ est un objet éminemment combinatoire.
- L'assertion 4.4.1-0b est utilisée dans les théorèmes de comparaison, elle dit pour l'essentiel que, étant données deux théories cohomologiques basées sur des complexes de faisceaux sur \mathbf{X} , s'il existe un recouvrement \mathcal{U} de \mathbf{X} *acyclique* pour les termes des complexes des deux théories simultanément, les théories sont globalement isomorphes si elles sont "localement" isomorphes.

5.1 Théorème de de Rham sur les variétés différentielles

Soit M une « variété différentielle de dimension d_M ». Notons $(\Omega^*(M); d_*)$ le complexe des formes différentielles sur M ; son homologie est la « cohomologie de de Rham de M » :

$$H_{\text{DR}}^*(M) := h^*(\Omega^*(M); d_*)$$

La correspondance $U \rightsquigarrow (\Omega^*(U); d_*)$ et les restrictions des formes différentielles constituent un faisceau sur M , c'est le « faisceau des formes différentielles sur M » noté $(\underline{\Omega}_M^*, d_*)$.

5.1.1. Proposition

- Chaque faisceau $\underline{\Omega}_M^k$ est acyclique sur tout ouvert $U \subseteq M$.
- (Lemme de Poincaré) La cohomologie du complexe des formes différentielles $(\Omega^*(\mathbb{R}^n, d_*)$) est nulle en degrés positifs et isomorphe à \mathbb{R} en degré 0.
- Le complexe $\mathbf{0} \rightarrow \mathbb{R}_X \rightarrow \underline{\Omega}_M^1 \rightarrow \underline{\Omega}_M^2 \rightarrow \cdots \rightarrow \underline{\Omega}_M^{d_M} \rightarrow \mathbf{0}$ est une résolution acyclique de \mathbb{R}_M .

Indications. Pour (a), de manière très succincte, comme M est paracompacte, il existe des partitions de l'unité subordonnées à n'importe quel recouvrement ouvert ; ceci suffit pour montrer que le faisceau des fonctions différentiables $\underline{\Omega}^0(M)$ est « mou ». On utilise ensuite le fait que tout module sur un faisceau d'anneaux mou (en l'occurrence $\underline{\Omega}^k(M)$ est un $\underline{\Omega}^0(M)$ -module) est mou lui-aussi. Enfin, un faisceau mou est acyclique sur tout ouvert ⁽⁹⁾. Pour (b), voir les notes du cours § 6, page 96. Pour (c), on remarque que tout germe de cocycle ω_x en $x \in M$ provient d'un cocycle $\omega \in \Omega^k(U)$ sur un voisinage ouvert U de x assez petit que nous pouvons supposer isomorphe à \mathbb{R}^{d_M} . L'assertion (b) affirme alors qu'il existe $\varpi \in \Omega^{k-1}(U)$ tel que $d\varpi = \omega$, mais alors $\omega_x = d\varpi_x$ et la suite des faisceaux en question est bien exacte. ■

5.1.2. Théorème. Soit M une variété différentielle de dimension n .

- (de Rham) On a un isomorphisme canonique

$$H^*(M; \mathbb{R}_M) = H_{\text{DR}}^*(M)$$

En particulier, le faisceau constant \mathbb{R}_M est acyclique sur un ouvert *homéomorphe* à \mathbb{R}^n . ⁽¹⁰⁾

⁹ Voir [Go] § 3.5 et thm. 4.4.3 pour plus de détails.

¹⁰ Théorème de Vietoris-Begle.

- b) $H_{\text{DR}}^*(M)$ est indépendante de la structure différentielle de M et seule dépend de sa topologie. Autrement dit, deux variétés différentielles homéomorphes ont des cohomologies de de Rham canoniquement isomorphes.
- c) Si \mathcal{U} est un recouvrement de M par des ouverts dont les intersections finies sont homéomorphes à \mathbb{R}^n , on a des isomorphismes canoniques

$$H_{\text{DR}}^*(M) = \check{H}^*(\mathcal{U}; \underline{\Omega}^*) = \check{H}^*(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_M)$$

Indication

a-b) Par 5.1.1 la suite longue 5.1.1-0c est une résolution acyclique de $\underline{\mathbb{R}}_X$. On applique alors le théorème de Leray pour la cohomologie des faisceaux (3.2.6).

On en déduit aussitôt que la cohomologie de de Rham est un invariant **topologique**. En particulier, si U est un ouvert **homéomorphe** à \mathbb{R}^n , $H(U; \underline{\mathbb{R}}_U)$ est isomorphe à $H_{\text{DR}}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}[0]$ de sorte que $\underline{\mathbb{R}}_M$ est bien acyclique sur tout ouvert homéomorphe à \mathbb{R}^n .

- c) • *Première démonstration.* On considère le bicomplexe de Čech-de Rham

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbf{0} & \rightarrow & \underline{\Omega}_M^1 & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^1) & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^1) & \rightarrow & \check{C}^2(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^1) & \rightarrow \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbf{0} & \rightarrow & \underline{\Omega}_M^0 & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^0) & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^0) & \rightarrow & \check{C}^2(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^0) & \rightarrow \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbf{0} & \rightarrow & \underline{\mathbb{R}}_M & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}) & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}) & \rightarrow & \check{C}^2(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}) & \rightarrow \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
 \end{array} \tag{B}$$

Comme les faisceaux $\underline{\Omega}_M^i$ sont acycliques sur tout ouvert de M d'après 5.1.1-0a, le théorème de Čech-Leray pour les faisceaux (3.3.9) s'applique sur chaque ligne de la partie supérieure du bicomplexe, dont la cohomologie des sections globales sera nulle. On en déduit l'isomorphisme canonique

$$H_{\text{DR}}^*(M) \simeq h^*(\Sigma_{\bullet\bullet}^* \check{C}^\bullet(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^*)) = \check{H}^*(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^*).$$

Ensuite, les sections globales des colonnes de la partie droite du bicomplexe (B) calculent les produits des cohomologies de de Rham des intersections des ouverts de \mathcal{U} et sont donc acycliques d'après (a), on en déduit l'isomorphisme canonique

$$\check{H}^*(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_M) \simeq h^*(\Sigma_{\bullet\bullet}^* \check{C}^\bullet(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^*)).$$

- *Deuxième démonstration.* Le quasi-isomorphisme $\underline{\mathbb{R}}_M[0] \rightarrow \underline{\Omega}_M^*$ de 5.1.1-0c induit l'isomorphisme

$$H(M; \underline{\mathbb{R}}_M) \simeq IH(M; \underline{\Omega}_M^*)$$

et comme \mathcal{U} est à la fois $\underline{\mathbb{R}}_M$ -acyclique par (a), et $\underline{\Omega}_M^*$ -acyclique par 5.1.1-0a; on peut donc appliquer théorème de Leray pour les complexes de faisceaux acycliques 4.1.4-0g pour avoir

$$H(M; \underline{\mathbb{R}}_M) \simeq \check{H}^*(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_M) \quad \text{et} \quad IH(M; \underline{\Omega}_M^*) \simeq \check{H}^*(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^*). \quad \blacksquare$$

5.2 Calculs effectifs de la cohomologie de de Rham des variétés différentielles

L'assertion 5.1.2-0c, par son égalité $H_{\text{DR}}^*(M) = \check{H}^*(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_M)$, donne une méthode de calcul pour la cohomologie de de Rham d'une variété différentielle. La voici pour M compacte de dimension

n :

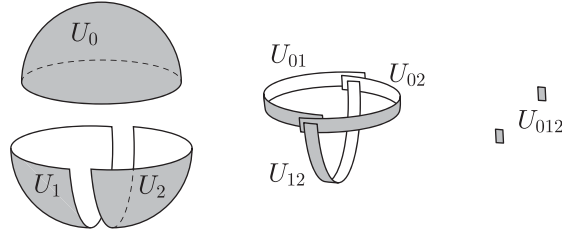
- On fixe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_r\}$ de M tel que pour tout $\bar{i} = i_0 < \dots < i_k$ l'intersection $U_{\bar{i}} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$ possède un nombre fini de composantes connexes et tel que toutes ces composantes soient toutes homéomorphes à \mathbb{R}^n ⁽¹¹⁾. Le groupe des cochaînes de Čech admet alors une description très simple, on a

$$\check{C}^k(\mathcal{U}; \mathbb{R}_M) = \prod_{1 \leq i_0 \dots i_k \leq r} \mathbb{R}^{\Pi_0(U_{i_0 \dots i_k})}$$

où $\Pi_0(U)$ désigne l'ensemble des composantes connexes de U .

- Calculer la cohomologie du complexe de Čech $\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathbb{R}_M)$.

5.2.1. Exemple : Cohomologie de de Rham de la sphère \mathbb{S}^2 . On décompose $\mathbf{X} := \mathbb{S}^2$ comme réunion des ouverts de la famille $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$ suivants :



Le complexe de Čech $\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathbb{R}_{\mathbf{X}})$ est

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U_0, \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \oplus \Gamma(U_1, \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \oplus \Gamma(U_2, \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \rightarrow \Gamma(U_{01}, \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \oplus \Gamma(U_{12}, \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \oplus \Gamma(U_{02}, \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \rightarrow \Gamma(U_{012}, \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \rightarrow \mathbf{0}$$

équivalent au complexe à trois termes : $\mathbf{0} \rightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{p} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{q} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{0}$ où $p(x, y, z) = (x - y, y - z, x - z)$ et $q(x, y, z) = (y - z + x, y - z + x)$.

Par la condition de faisceau et la connexité de \mathbf{X} , on a $\check{H}^0(\mathcal{U}; \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) = \Gamma(\mathbf{X}; \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) = \mathbb{R}$. Il s'ensuit que $\dim_{\mathbb{R}}(\text{im}(p)) = 2$. D'autre part, il est clair que $\text{im}(q) = \Delta_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^2$ et donc $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(q)) = 2$, d'où $\check{H}^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) = 0$ et, pour terminer, $\check{H}^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) = \mathbb{R}^2 / \Delta_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. On a donc

$$\bullet H_{\text{DR}}^0(\mathbf{X}) = \mathbb{R}, \quad \bullet H_{\text{DR}}^1(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad \bullet H_{\text{DR}}^2(\mathbf{X}) = \mathbb{R}.$$

5.3 Calculs effectifs de la cohomologie de de Rham des variétés algébriques

En géométrie algébrique l'acyclicité des faisceaux du complexe de de Rham sur les ouverts affines est conséquence de leur *cohérence* (critère d'acyclicité de Serre). L'assertion 4.4.1-0a donne alors une recette pour calculer la cohomologie de de Rham d'une variété algébrique \mathbf{X} , c'est-à-dire pour calculer de l'hypercohomologie de son complexe de de Rham $(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^*, d_*)$. La voici :

- Fixer un recouvrement fini par des ouverts affines $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_r\}$ de \mathbf{X} ,

Pour $\bar{i} = i_0 < \dots < i_k$, on note $U_{\bar{i}} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$.

- Expliciter l'algèbre $\mathcal{R}_{\bar{i}}$ des fonctions régulières sur $U_{\bar{i}}$ et les restrictions $\mathcal{R}_{\bar{i}} \rightarrow \mathcal{R}_{\bar{i}'}$, $\bar{i} \succ \bar{i}'$.
- Expliciter les modules $\Omega_{\mathcal{R}_{\bar{i}}/\mathbb{C}}$ et les morphismes de restriction $\Omega_{\mathcal{R}_{\bar{i}}/\mathbb{C}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{R}_{\bar{i}'}/\mathbb{C}}$, $\bar{i} \succ \bar{i}'$.

¹¹De tel recouvrements existent toujours.

- Expliciter les flèches du bicomplexe de Čech-de Rham $\check{C}^*(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}})$ suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} \rightarrow & \prod_{1 \leq i \leq r} \wedge^d \Omega_{\mathcal{R}_i/\mathbb{C}} & \rightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 \leq r} \wedge^d \Omega_{\mathcal{R}_{i_0 i_1}/\mathbb{C}} & \rightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 < i_2 \leq r} \wedge^d \Omega_{\mathcal{R}_{i_0 i_1 i_2}/\mathbb{C}} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \wedge^d \Omega_{\mathcal{R}_{1 \dots r}/\mathbb{C}} & \rightarrow & \mathbf{0} \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} \rightarrow & \prod_{1 \leq i \leq r} \wedge^2 \Omega_{\mathcal{R}_i/\mathbb{C}} & \rightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 \leq r} \wedge^2 \Omega_{\mathcal{R}_{i_0 i_1}/\mathbb{C}} & \rightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 < i_2 \leq r} \wedge^2 \Omega_{\mathcal{R}_{i_0 i_1 i_2}/\mathbb{C}} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \wedge^2 \Omega_{\mathcal{R}_{1 \dots r}/\mathbb{C}} & \rightarrow & \mathbf{0} \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} \rightarrow & \prod_{1 \leq i \leq r} \Omega_{\mathcal{R}_i/\mathbb{C}} & \rightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 \leq r} \Omega_{\mathcal{R}_{i_0 i_1}/\mathbb{C}} & \rightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 < i_2 \leq r} \Omega_{\mathcal{R}_{i_0 i_1 i_2}/\mathbb{C}} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \Omega_{\mathcal{R}_{1 \dots r}/\mathbb{C}} & \rightarrow & \mathbf{0} \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} \rightarrow & \prod_{1 \leq i \leq r} \mathcal{R}_i & \rightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 \leq r} \mathcal{R}_{i_0 i_1} & \rightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 < i_2 \leq r} \mathcal{R}_{i_0 i_1 i_2} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \mathcal{R}_{1 \dots r} & \rightarrow & \mathbf{0} \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & &
\end{array}$$

(illustration pour $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbf{X}) = d$ et $\text{card}(\mathcal{U}) = r$).

- Calculer la cohomologie du complexe simple associé $\Sigma \check{C}^*(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}})$.

5.3.1. Exemple : Cohomologie de de Rham de la sphère de Riemann. La variété algébrique complexe $\mathbf{X} := \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est réalisée comme réunion de deux ouverts U_0 et U_1 isomorphes à \mathbb{C} d'intersection U_{01} isomorphe à $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (variété affine). Les algèbres des fonctions régulières sont

$$\bullet \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1 = \mathbb{C}[X] \quad \text{et} \quad \bullet \mathcal{R}_{01} = \mathbb{C}[X, 1/X].$$

Les complexes de de Rham sont

$$\begin{aligned}
(\Omega_{\mathcal{R}_i/\mathbb{C}}^*, d_*) &= \mathbb{C}[X] \xrightarrow{d} \mathbb{C}[X] dX, & d(P) &= \frac{\partial P}{\partial X} dX, \\
(\Omega_{\mathcal{R}_{01}/\mathbb{C}}^*, d_*) &= \mathbb{C}[X, 1/X] \xrightarrow{d} \mathbb{C}[X, 1/X] dX
\end{aligned}$$

D'où le complexe Čech-de Rham :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} \rightarrow & \mathbb{C}[X] dX \oplus \mathbb{C}[X] dX & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{C}[X]_X dX & \rightarrow & \mathbf{0} \\
& & d\uparrow & & d\uparrow & & d\uparrow \\
\mathbf{0} \rightarrow & \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X] & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{C}[X]_X & \rightarrow & \mathbf{0} \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
\end{array} \tag{D}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha(P(X), Q(X)) = Q(1/X) - P(X) \\ \beta(P(X)dX, Q(X)dX) = Q(1/X)d(1/X) - P(X)dX \end{cases}$$

Le complexe simple associé au bicomplexe (D) sera noté (Σ^*, D_*) dans la suite. On a (cf. 2.2.8)

$$\begin{cases} D_0(P, Q) = (dP, dQ) \oplus \alpha(P, Q) \\ D_1((P, Q), R) = -\beta(P, Q) + dR \end{cases}$$

- On a $\Sigma^2 = \mathbb{C}[X]_X dX$ et la cohomologie en degré 2 est

$$h^2(\Sigma^*, D_*) = \frac{\mathbb{C}[X]_X dX}{\text{im}(\beta) + \text{im}(d)} = \frac{\mathbb{C}[X]_X dX}{\langle Q(\frac{1}{X})\frac{1}{X^2}dX - P(X)dX + \langle d(R(X, \frac{1}{X})) \rangle \rangle},$$

avec $P(X), Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ et $R(X, 1/X) \in \mathbb{C}[X]_X$. Un calcul simple montre que les monômes $X^m dX$ avec $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ sont dans l'image de $(\beta + d)$ alors que $\frac{1}{X} dX$ n'est pas atteint. On a donc

$$h^2(\Sigma^*, D_*) = \mathbb{C} \left[\frac{1}{X} dX \right].$$

- On a $\Sigma^0 = \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X]$ et la cohomologie de (Σ^*, D_*) en degré 0 est

$$h^0(\Sigma^*, D_*) = \ker(d, d) \cap \ker \alpha = \mathbb{C}.$$

- On a $\Sigma^1 = (\mathbb{C}[X]dX \oplus \mathbb{C}[X]dX) \oplus \mathbb{C}[X]_X$ et l'application (d, d) est surjective d'après le lemme de Poincaré global. Il s'ensuit qu'un cocycle $((P', Q'), S') \in \Sigma^2$ est toujours cohomologue à un cocycle de la forme

$$((P', Q'), S') - (dP, dQ), \alpha(P, Q) = ((0, 0), S' + \alpha(P, Q)),$$

où $(P', Q') = (dP, dQ)$. Mais dans un tel cocycle la fonction $S' + \alpha(P, Q)$ est nécessairement une constante $c \in \mathbb{C}$. Or, $((0, 0), c)$ est bien un 1-cobord puisque image par $(d, d) \oplus \alpha$ de $(0, c)$. Par conséquent :

$$h^1(\Sigma^*, D_*) = \mathbf{0}.$$

Nous avons trouvé

$$\bullet H_{\text{DR}}^0(\mathbf{X}/\mathbb{C}) = \mathbb{C}, \quad \bullet H_{\text{DR}}^1(\mathbf{X}/\mathbb{C}) = \mathbf{0}, \quad \bullet H_{\text{DR}}^2(\mathbf{X}/\mathbb{C}) = \mathbb{C}.$$

5.4 Théorème de comparaison de Grothendieck pour les variétés algébriques sur \mathbb{C} non singulières

Cette partie rappelle rapidement le théorème de comparaison et indique comment l'équivalence entre les cohomologies de de Rham holomorphe et algébrique sur des ouverts algébriques affines permet d'obtenir leur équivalence sur toute variété algébrique.

5.4.1. Structure d'espace analytique d'une variété algébrique complexe. Un ouvert algébrique U de \mathbb{C}^n , *i.e.* le complémentaire de l'ensemble des zéros d'une famille $\{P_a(X_1, \dots, X_n)\}_{a \in \mathfrak{A}}$ d'applications polynomiales, muni de la topologie de Zariski et du faisceau des fonctions algébriques, est un espace localement annelé noté $(U; \mathcal{O}_U)$. Le même ensemble U muni de la topologie «*transcendante*»¹² et du faisceau des fonctions holomorphes, est aussi un espace localement annelé, il est noté $(U^{\text{an}}, \mathcal{O}_{U^{\text{an}}})$. L'application identique $\epsilon_U : U^{\text{an}} \rightarrow U$, $x \mapsto x$ (clairement continue) et le morphisme de faisceaux d'anneaux $\epsilon_U^\sharp : \mathcal{O}_U \rightarrow \epsilon_{*}(\mathcal{O}_{U^{\text{an}}})$ qui fait correspondre à une fonction algébrique la même fonction dans l'algèbre des fonctions holomorphes, définissent un morphisme d'espaces localement annelés noté brièvement $\epsilon : U^{\text{an}} \rightarrow U$.

Dans l'article [GaGa], J.-P. Serre généralise ces constructions en définissant le **foncteur** $(-)^{\text{an}}$ de la catégorie $\mathbf{Var}_{\text{alg}}(\mathbb{C})$ des toutes les variétés algébriques sur \mathbb{C} , singulières ou non, vers la catégorie

¹²Il s'agit de la topologie d'espace métrique de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ muni la distance euclidienne. Cette terminologie fait référence à l'opposition entre «*nombre algébrique*» et «*nombre transcendant*», *i.e.* «*non algébrique*».

$\mathbf{Esp}_{\text{an}}(\mathbb{C})$ des espaces analytiques complexes :

$$(-)^{\text{an}} : \mathbf{Var}_{\text{alg}}(\mathbb{C}) \rightsquigarrow \mathbf{Esp}_{\text{an}}(\mathbb{C}).$$

On définit également le morphisme naturel $\epsilon(\mathbf{X}) : \mathbf{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathbf{X}$ qui est l'identité sur l'ensemble \mathbf{X} et qui identifie une fonction algébrique à la même fonction dans l'espace des fonctions analytiques complexes.

5.4.2. Acyclicité des modules cohérents. Soit \mathcal{O} un faisceau d'anneaux sur un espace topologique \mathbf{X} . On rappelle qu'un faisceau de \mathcal{O} -modules \mathcal{M} est dit « *cohérent* » s'il admet des présentations finies locales, *i.e.* si pour chaque $x \in \mathbf{X}$ il existe un voisinage ouvert \mathbf{V} et une suite exacte courte à droite de faisceaux

$$(\mathcal{O}|_{\mathbf{V}})^M \longrightarrow (\mathcal{O}|_{\mathbf{V}})^N \longrightarrow \mathcal{M}|_{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbf{0},$$

avec $M, N \in \mathbb{N}$.

Lorsque l'espace annelé $(\mathbf{X}; \mathcal{O})$ est une variété algébrique ou analytique complexe on dispose des critères d'acyclicité pour la cohomologie des faisceaux très importants suivants :

5.4.3. Proposition

- a) **(Serre)** Un $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module cohérent sur une variété algébrique affine est acyclique.
- b) **(Cartan)** Un $\mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}$ -module cohérent sur l'espace analytique complexe correspondant à une variété algébrique complexe **affine** est acyclique.

5.4.4. Hypercohomologie de l'image directe des complexes cohérents. Soit $\epsilon : (\mathbf{X}^{\text{an}}, \mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}) \rightarrow (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ le morphisme d'espaces annelés de 5.4.1. Pour tout complexe $\mathbf{C}^{\bullet} \in \mathbf{C}^+(\mathbf{Fais}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}(\mathbb{Z}))$, le foncteur image directe ϵ_* appliqué au morphisme $\mathbf{C}^{\bullet} \rightarrow \Sigma_{\bullet}^{\bullet} \mathcal{C}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^* \mathbf{C}^{\bullet}$ (cf. 4.1) donne le morphisme

$$\epsilon_*(\mathbf{C}^{\bullet}) \longrightarrow \epsilon_*(\Sigma_{\bullet}^{\bullet} \mathcal{C}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^* \mathbf{C}^{\bullet}) \quad (\diamond)$$

dont on déduit $\mathbb{H}(\mathbf{X}; \epsilon_*(\mathbf{C}^{\bullet})) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbf{X}; \Sigma_{\bullet}^{\bullet} \epsilon_*(\mathcal{C}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^* \mathbf{C}^{\bullet}))$ qui, composé avec les égalités :

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}; \Sigma_{\bullet}^{\bullet} \epsilon_*(\mathcal{C}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^* \mathbf{C}^{\bullet})) \stackrel{=}{=} h(\Gamma(\mathbf{X}; \Sigma_{\bullet}^{\bullet} \epsilon_*(\mathcal{C}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^* \mathbf{C}^{\bullet}))) = h(\Gamma(\mathbf{X}^{\text{an}}; \Sigma_{\bullet}^{\bullet} \mathcal{C}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^* \mathbf{C}^{\bullet})) = \mathbb{H}(\mathbf{X}^{\text{an}}; \mathbf{C}^{\bullet}),$$

⁽¹³⁾ donne à son tour le morphisme canonique d'hypercohomologies

$$\Xi(\epsilon, \mathbf{C}^{\bullet}) : \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \epsilon_* \mathbf{C}^{\bullet}) \longrightarrow \mathbb{H}^*(\mathbf{X}^{\text{an}}; \mathbf{C}^{\bullet})$$

5.4.5. Proposition. Soit \mathcal{M}^{\bullet} un complexe borné inférieurement de faisceaux cohérents sur une variété analytique complexe \mathbf{X}^{an} . Le morphisme canonique $\Xi(\epsilon, \mathcal{M}^{\bullet})$ est un **isomorphisme**.

Démonstration. L'image directe n'étant pas exacte en général, le morphisme (\diamond) n'est pas toujours un quasi-isomorphisme ; cependant, dans le cas présent, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, le complexe

$$\Gamma(\mathbf{V}; \mathbf{0} \rightarrow \epsilon_* \mathcal{M}^k \rightarrow \epsilon_* \mathcal{C}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^* \mathcal{M}^k) = \Gamma(\mathbf{V}^{\text{an}}; \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{M}^k \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^* \mathcal{M}^k)$$

est exact pour tout ouvert (algébrique) affine \mathbf{V} de \mathbf{X} d'après 5.4.3-0b. Il s'ensuit que la suite longue $\mathbf{0} \rightarrow \epsilon_* \mathcal{M}^k \rightarrow \epsilon_* \mathcal{C}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^* \mathcal{M}^k$ est exacte puisque, dans \mathbf{X} , tout point admet une base de voisinages af-

¹³L'égalité ' $\stackrel{=}{=}$ ' d'après 4.1.4-0g parce que l'image directe d'un faisceau flasque est flasque.

finies (p.e. les ouverts principaux) ⁽¹⁴⁾. Le morphisme $\mathbb{H}(\mathbf{X}; \epsilon_*(\mathcal{M}^\bullet)) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbf{X}; \epsilon_*(\Sigma_{\bullet}^* \mathcal{C}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^* \mathcal{M}^\bullet))$ est donc bijectif d'après 2.2.15 et 4.1.4-0g et la bijectivité de $\Xi(\epsilon, \mathcal{M}^\bullet)$ en résulte. ■

5.4.6. Cohomologies de de Rham. Lorsque la variété algébrique $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est « *non singulière* » de dimension $d_{\mathbf{X}}$, l'espace analytique $(\mathbf{X}^{\text{an}}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}})$ est une « *variété analytique complexe* » (aussi appelée « *variété holomorphe* ») ⁽¹⁵⁾. On note alors $(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*; d_*)$ le « *complexe des formes différentielles holomorphes sur \mathbf{X}* », i.e. le faisceau des sections holomorphes du fibré $\bigwedge_{\mathbb{C}} \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^* \mathbf{X}$ ⁽¹⁶⁾ muni de la « *différentielle holomorphe* » ⁽¹⁷⁾. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, le $\mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}$ -module $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^k$ est localement libre (de rang $\binom{d_{\mathbf{X}}}{k}$), il est donc $\mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}$ -cohérent et donc acyclique sur tout ouvert algébrique affine de \mathbf{X}^{an} (5.4.3-0b). Dans le cas algébrique les faisceaux des formes différentielles sont des $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules cohérents et sont également acycliques sur les ouverts affines de \mathbf{X} (5.4.3-0a).

Cela dit, le morphisme d'espaces annelés $\epsilon^{\natural} : \mathcal{O}_{\mathbf{X}} \rightarrow \epsilon_*(\mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}})$ se prolonge en un morphisme de complexes de faisceaux $\epsilon_*^{\natural} : \underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^* \rightarrow \epsilon_*(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*)$ ⁽¹⁸⁾, induisant un morphisme d'hypercohomologies

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}; \epsilon^{\natural}) : \mathbb{H}(\mathbf{X}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^*) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbf{X}; \epsilon_*(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*)) = \mathbb{H}(\mathbf{X}^{\text{an}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*)$$

où l'égalité est justifiée par 5.4.5. Enfin, comme la cohomologie de de Rham est l'hypercohomologie du complexe de de Rham, nous obtenons le morphisme canonique

$$\boxed{\mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \epsilon^{\natural}) : H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}/\mathbb{C}) \longrightarrow H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}^{\text{an}})}$$

5.4.7. Théorème (Grothendieck). *La cohomologie de de Rham d'une variété algébrique complexe non singulière \mathbf{X} coïncide avec la cohomologie de de Rham de la variété analytique complexe \mathbf{X}^{an} . Plus précisément, le morphisme canonique $\mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \epsilon^{\natural})$ ci-dessus est **bijectif**.*

Résumé de la démonstration d'après [Gr]. Compte tenu des théorèmes d'acyclicité de Serre et Cartan (5.4.3), le théorème 4.4.1-0b réduit l'étude au cas où \mathbf{X} est **affine**.

La preuve de Grothendieck passe alors par les étapes suivantes :

- i) Par le théorème de résolution de singularités d'Hironaka, on peut considérer que \mathbf{X} est un ouvert d'une variété algébrique complexe projective non singulière $\tilde{\mathbf{X}}$ et que $\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{X}} \setminus \mathbf{X}$ est un

¹⁴Lorsque les sections $\Gamma(\mathbf{V}; \mathbf{C}^\bullet)$ d'un complexe de faisceaux \mathbf{C}^\bullet sur les ouverts \mathbf{V} d'une base pour la topologie sont des suites exactes longues, le complexe des germes \mathbf{C}_x^\bullet en tout point $x \in \mathbf{X}$ est exact et la suite \mathbf{C}^\bullet l'est donc aussi.

¹⁵De définition analogue à celle des variétés différentiables : par des atlas d'ouverts homéomorphes à $\mathbb{C}^{d_{\mathbf{X}}}$ et morphismes de transition biholomorphes.

¹⁶Algèbre extérieure sur \mathbb{C} du fibré cotangent $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^* \mathbf{X} = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}} \mathbf{X}; \mathbb{C})$ de \mathbf{X}

¹⁷On prendra garde du fait que $(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*; d_*)$ est un sous-complexe strict du complexe $(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}}^*; d_*) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ des formes différentielles réelles à valeurs complexes ; le support du premier étant $[0, d_{\mathbf{X}}]$ tandis que celui du second est $[0, 2d_{\mathbf{X}}]$. En effet, pour $\omega \in \Omega^k(\mathbf{V}^{\text{an}})$ et $x \in \mathbf{V}$, l'élément $\omega(x)$ est une forme- k -multilinéaire complexe alternée sur $\mathbb{T}_x \mathbf{X}$, autrement dit, c'est une application $\omega(x) : (\mathbb{T}_x \mathbf{X})^k \rightarrow \mathbb{C}$ qui est \mathbb{C} -linéaire par rapport à chaque coordonnée et est nulle sur les multivecteurs $(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)$ avec $\bar{z}_i = \bar{z}_j$ pour un certain couple (i, j) avec $i \neq j$; une telle application est aussi (trivialement) une forme- k -linéaire *réelle* alternée à valeurs dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. On a donc une inclusion canonique $\underline{\Omega}_{\mathbf{V}^{\text{an}}}^k \subseteq \underline{\Omega}_{\mathbf{V}^{\text{diff}}}^k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ qui est stricte dans la mesure où $\underline{\Omega}_{\mathbf{V}^{\text{an}}}^k = 0$ si $k > d_{\mathbf{X}}$, alors que $\underline{\Omega}_{\mathbf{V}^{\text{diff}}}^k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 0$ pour $k > 2d_{\mathbf{X}}$.

¹⁸Ce qui signifie que toute forme différentielle algébrique complexe est analytique complexe et que la différentielle algébrique coïncide avec la différentielle holomorphe.

diviseur à croisement normaux. On notera $\iota : \mathbf{X} \rightarrow \tilde{\mathbf{X}}$ l'application d'inclusion et ι_* (resp. ι_*^{an}) le foncteur « *image directe* » dans la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules (resp. $\mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}$ -modules).

ii) Le morphisme $\epsilon_{\bullet}^{\sharp} : \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet} \rightarrow \epsilon_* \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet}$ induit le morphisme de complexes de faisceaux sur $\tilde{\mathbf{X}}$

$$\iota_* \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet} \rightarrow \iota_* \epsilon_* \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet} = \epsilon_* \iota_*^{\text{an}}(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet}) \rightarrow \epsilon_* \mathbb{R} \iota_*^{\text{an}}(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet})$$

(¹⁹) et donc, par adjonction (²⁰), le morphisme de complexes de faisceaux sur $\tilde{\mathbf{X}}^{\text{an}}$:

$$\boxed{\Phi_{\bullet} : (\iota_*(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet}))^{\text{an}} \longrightarrow \mathbb{R} \iota_*^{\text{an}}(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet})}$$

dont le passage en hypercohomologie donne le morphisme canonique de comparaison

$$\mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \Phi_{\bullet}) : H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}/\mathbb{C}) \longrightarrow H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}^{\text{an}})$$

qui coïncide, par construction avec $\mathbb{H}(\mathbf{X}; \epsilon_{\bullet}^{\sharp})$.

Pour justifier cette affirmation :

- On a $\mathbb{H}(\tilde{\mathbf{X}}^{\text{an}}; (\iota_*(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet}))^{\text{an}}) = \mathbb{H}(\tilde{\mathbf{X}}; \iota_*(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet}))$ par [GaGa] puisque chaque $\iota_* \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^k$ est limite inductive de module cohérents et que [GaGa] continue d'être valable dans ces cas. D'autre part, le fait que \mathbf{X} soit le complémentaire d'un diviseur de $\tilde{\mathbf{X}}$ implique que si $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^k \rightarrow \mathcal{F}^{k,*}$ est une résolution flasque (4.1.4-0h) la suite longue $\iota_*(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^k) \rightarrow \iota_*(\mathcal{F}^{k,*})$ est une résolution flasque de $\iota_*(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^k)$, puisque $\iota_*(\text{flasque}) = (\text{flasque})$ et que tout point $y \in \tilde{\mathbf{X}}$ admet un voisinage V_y tel que $W_y := V_y \cap \mathbf{X}$ est affine (puisque $\mathbf{Y} := \tilde{\mathbf{X}} \setminus \mathbf{X}$ est de codimension 1 d'après (i) ci-dessus), mais alors $\Gamma(V_y; \iota_*(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^k) \rightarrow \iota_*(\mathcal{F}^{k,*})) = \Gamma(W_y; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^k \rightarrow \mathcal{F}^{k,*})$ est acyclique en degrés positifs d'après le critère d'affinité de Serre. On en déduit l'égalité

$$\mathbb{H}(\tilde{\mathbf{X}}; \iota_*(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet})) = \Gamma(\tilde{\mathbf{X}}; \iota_*(\Sigma \mathcal{F}^{\bullet,*})) = \Gamma(\mathbf{X}; \Sigma \mathcal{F}^{\bullet,*}) = \mathbb{H}(\mathbf{X}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet}) = H_{\text{DR}}(\mathbf{X}^{\text{an}})$$

- L'égalité $\mathbb{H}(\tilde{\mathbf{X}}^{\text{an}}; \mathbb{R} \iota_*^{\text{an}} \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet}) = \mathbb{H}(\mathbf{X}^{\text{an}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet}) = H_{\text{DR}}(\mathbf{X}/\mathbb{C})$ est immédiate.

iii) Pour démontrer que Φ_{\bullet} induit un isomorphisme en hypercohomologie il suffit de montrer que c'est un quasi-isomorphisme dans la catégorie des complexes de faisceaux (4.1.4-0e) ce qui est une question **locale**. On utilise alors le fait que autour de chaque $y \in \mathbf{Y}^{\text{an}} = \tilde{\mathbf{X}}^{\text{an}} \setminus \mathbf{X}^{\text{an}}$ il existe un ouvert V_y et un isomorphisme **analytique** $\varphi_y : V_y \rightarrow \mathbb{B}^{d_x}$, où \mathbb{B}^{d_x} désigne une boule ouverte centrée à l'origine de \mathbb{C}^{d_x} , tel que $\varphi_y(\mathbf{Y} \cap V_y)$ est la trace sur \mathbb{B}^{d_x} d'une réunion d'hyperplans **de coordonnées**, autrement dit $V_y \cap \mathbf{X} = \varphi_y^{-1}(D(x_1 x_2 \cdots x_r))$. On a donc autour de y une base de voisinages pour la topologie transcendante de la forme $V = \mathbb{B} \setminus \{x_1 x_2 \cdots x_r = 0\}$ et le morphisme

$$\Gamma(V_y; \Phi_{\bullet}) : \Gamma(V_y; (\iota_*(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet}))^{\text{an}}) \longrightarrow \Gamma(V_y; \mathbb{R} \iota_*^{\text{an}}(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet}))$$

s'identifie alors à l'inclusion des complexes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{formes différentielles} \\ \text{homomorphes sur } V \\ \text{ménomorphes sur } \mathbb{B} \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{l} \text{formes différentielles} \\ \text{homomorphes sur } V \end{array} \right\}$$

et un calcul explicite montre que c'est bien un quasi-isomorphisme. ■

¹⁹ $\mathbb{R} \iota_*^{\text{an}}(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet})$ est le complexe $\iota_*^{\text{an}}(\mathcal{I}^{\bullet})$ où \mathcal{I}^{\bullet} est un complexe de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}$ -modules injectifs tel qu'il existe un quasi-isomorphisme $\Phi^{\bullet} : \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet} \rightarrow \mathcal{I}^{\bullet}$. Le morphisme $\epsilon_* \iota_*^{\text{an}}(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet}) \rightarrow \epsilon_* \mathbb{R} \iota_*^{\text{an}}(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet})$ est alors celui induit par Φ^{\bullet} .

²⁰ Dans [GaGa] le foncteur $(-)^{\text{an}} : \text{Mod}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{X}}}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{X}}^{\text{an}}})$ est adjoint à gauche du foncteur $\epsilon^{\sharp} : \text{Mod}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{X}}^{\text{an}}}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{X}}})$.

5.4.8. Exercice. Justifier les propriétés suivantes.

- a) La cohomologie de de Rham d'une variété algébrique complexe non singulière X coïncide avec la cohomologie de faisceau sur X^{an} du faisceau constant $\mathbb{C}_{X^{\text{an}}}$.
- b) La cohomologie de de Rham d'une variété algébrique complexe non singulière X coïncide avec la cohomologie de de Rham de la variété différentielle réelle X^{diff} sous-jacente à X^{an} .
- c) Montrer que la cohomologie de de Rham d'une variété différentielle **réelle** de dimension n admettant une structure complexe (auquel cas n est pair) est nulle en degrés supérieurs à $n/2$.

§ 6. Références bibliographiques

- [Gr] A. GROTHENDIECK. On the de Rham cohomology of algebraic varieties ; Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 29 pp. 95–103 (1966).
- [Go] R. GODEMENT. “*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*” ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).
- [GaGa] J.-P. SERRE. Géométrie algébrique et géométrie analytique ; Ann. Inst. Fourier, Grenoble 6, pp. 1–42, (1955–1956).

§7. Index terminologique

acyclique		cohérent,	27
(critère de Serre),	25	des formes différentielles,	22
complexe,	5	flasque,	12
faisceau,	13	mou,	22
additif (foncteur),	3	résolution,	12
amplitude		foncteur	
cohomologique,	4	additif,	3
d'un complexe,	3	image directe,	28
augmenté		Godement (résolution de),	12
complexe,	12	hypercohomologie des complexes,	17
complexe de Čech,	19	image directe (foncteur),	28
augmentation,	12, 15	k -ième terme,	3
bicomplexe		module cohérent,	27
à termes dans \mathbf{Ab} ,	7	modules (catégorie),	2
borné inférieurement,	10	morphisme	
du premier quadrant,	10	canonique $\Xi(\mathcal{U}, \mathbf{X}, -)$,	20
cône d'un morphisme de complexes,	5	canonique $\Xi(\mathcal{U}, -)$,	19
catégorie		canonique $\Xi(\mathbf{X}, -)$,	17
de modules,	2	d'augmentation,	12
Čech (complexe),	19	mou (faisceau),	22
co-augmentation,	12	quasi-isomorphisme,	4
cochaînes de Čech,	14	résolution	
cohérent		acyclique, flasque, molle,	18
(faisceau),	27	canonique de Godement,	12
(module),	27	d'un faisceau,	12
cohomologie		Serre (acyclicité),	25
de Čech,	15	termes d'un complexe,	3
de de Rham,	22	théorème	
de faisceaux,	13	de Čech-Leray	
horizontale,	8	pour les complexes de faisceaux,	21
verticale,	7	pour les faisceaux,	15
complexe		de Leray	
à termes dans \mathbf{Ab} ,	3	pour les complexes de faisceaux,	18
acyclique,	5	pour les faisceaux,	13
augmenté,	12	transcendant (topologie),	26
concentré dans... ,	3	triangle distingué,	5
des cochaînes de Čech,	19	troncatures bêtes,	5
des formes différentielles holomorphes,	28	variété	
positifs, bornés, ... ,	4	analytique complexe,	28
simple associé,	9	différentielle,	22
différentielle,	3	holomorphe,	28
du complexe de Čech,	14		
holomorphe,	28		
faisceau			
acyclique,	13		

—×—

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes

Cohomologie de de Rham p -adique

“Complétion \dagger -adique”

Alberto Arabia

Table des matières

§1. Complétion I-adique formelle	
1.1. Topologie I -adique	2
1.1.1. Boule I -adique	2
1.1.3. Définition	3
1.2. Propriétés générales de la topologie I -adique	3
1.2.2. Séparation I -adique	5
1.3. Valuations discrètes et valeurs absolues	5
1.3.7. Valuations et valeurs absolues	7
1.4. Complétion	7
1.4.1. Condition de Cauchy	7
1.4.2. Suites de Cauchy	8
1.4.3. Suites convergentes	8
1.4.6. Topologie I -adique sur $\mathbf{Chy}(M)$	8
1.4.11. Complété séparé I -adique formel	9
1.4.15. Séries de Cauchy	10
1.4.17. Sommabilité et critère de Cauchy pour les familles	11
1.5. Propriétés générales de la complétion I -adique formelle	14
§2. Sur la topologie des limites projectives	
2.1. Catégorie des systèmes projectifs	17
2.1.1. Systèmes projectifs	17
2.1.2. Morphismes de systèmes projectifs	17
2.1.3. Limite projective	17
2.1.5. Foncteur \varprojlim_n	18
2.2. Sur la topologie des complétions I -adiques formelles	19
2.3. Le cas des entiers p -adiques	20
2.3.1. \mathbb{Z}_m comme fermé totalement discontinu dans $[[0, 1]]$	20
2.3.3. Arbre des entiers m -adiques	20
2.3.4. Intégrité de \mathbb{Z}_m	21
2.3.5. Anneaux de valuation discrète	21
2.3.6. Prolongement de la valuation p -adique	22
§3. Remarques sur la cohomologie de de Rham en caractéristique zéro	
3.1. Cohomologies de de Rham associés à des ouverts principaux de $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$	22
3.1.1. Le cas $\tilde{P} = 1$	22
3.1.2. Le cas $\tilde{P} = 1 + pX$	23
3.1.3. Les anneaux de Zariski	23
3.1.7. La convergence faible	24
3.1.12. Heuristique autour du rayon de convergence	25
3.1.16. Rayon et domaine de convergence	26
§4. Complétion \dagger-adique	
4.1. Complété \dagger -adique des algèbres	27
4.1.1. Définition	27
4.1.7. Algèbres faiblement complètes	31
4.2. Complétion \dagger -adique des algèbres de type fini	31
4.3. Propriétés générales de la complétion \dagger -adique	31

§5. Cohomologie de de Rham †-adique des algèbres 33

5.1. Foncteurs complexe et cohomologie de Rham †-adique 33

5.1.1. Exemple : cohomologie de de Rham p -adique d'un ouvert principal de $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}_p}^n$ 33

5.1.3. Un petit théorème de comparaison 34

5.2. Homotopie de morphismes 35

5.2.1. Les cas topologique et différentiel 35

5.2.2. Le cas algébrique affine 35

5.2.3. Le cas des complétés 35

5.2.4. Théorème d'homotopie 35

§6. Cohomologie de de Rham †-adique des schémas affines en caractéristique positive 37

6.1. Esquisse 37

6.2. Foncteur de cohomologie de de Rham †-adique 38

6.0.4. Nombres de Betti 38

§7. Références bibliographiques

§8. Index terminologique

§1. Complétion I -adique formelle

Dans ces notes le couple $(\mathbf{R}; I)$ désigne toujours un anneau commutatif unitaire \mathbf{R} et un idéal $I \subseteq \mathbf{R}$.

1.1 Topologie I -adique

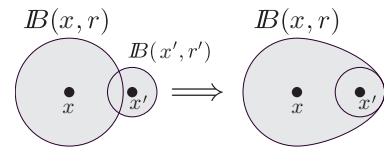
Nous montrons comment à partir de la simple donnée d'un idéal $I \subseteq \mathbf{R}$ il est possible de munir les \mathbf{R} -modules (resp. \mathbf{R} -algèbres) d'une topologie «la topologie I -adique» rendant les opérations internes (somme, produit) ainsi que leurs morphismes continus.

1.1.1. **Boule I -adique.** Soit M un \mathbf{R} -module. Pour tout $x \in M$ et $r \in \mathbb{N}$, on appelle «boule I -adique de centre x et d'ordre r dans M », l'ensemble

$$B(x; r) := x + I^r M$$

1.1.2. Proposition

- a) Les grosses boules absorbent les petites. Autrement dit, si $r \leq r'$ et si $B(x; r) \cap B(x'; r') \neq \emptyset$ alors $B(x; r) \supseteq B(x'; r')$.
- b) Une intersection finie non vide de boules est une boule.
- c) Les réunions des boules I -adiques d'un \mathbf{R} -module M constituent les ouverts d'une topologie sur M .



Démonstration. Si $x' + w' \in x + I^r M$, on a $x' + w' + I^{r'} M \in x + I^r M + I^{r'} M$, et si en plus $w' \in I^{r'} M \subseteq I^r M$, on a bien $x' + I^{r'} M \subseteq x + I^r M$. Par conséquent, l'intersection de deux boules est soit vide, soit la boule la plus petite. Par induction, une intersection finie non vide de boules est une boule. Pour vérifier que les réunions de boules constituent une topologie il ne reste plus qu'à vérifier que $(\cup_i B(x_i; r_i)) \cap (\cup_j B(x_j; r_j))$ est une réunion de boules. Or, par distributivité :

$$(\cup_i B(x_i; r_i)) \cap (\cup_j B(x_j; r_j)) = \cup_{i,j} (B(x_i; r_i) \cap B(x_j; r_j))$$

et l'assertion 0b permet de conclure. ■

1.1.3. Définition. Suite à la proposition 1.1.2-0c, on appelle «ouvert I -adique de M » toute réunion de boules I -adiques et «topologie I -adique» la topologie dont les ouverts sont les ouverts I -adiques.

1.1.4. Exemples limites. Si $I = \mathbf{R}$ (resp. $I = \mathbf{0}$), la topologie I -adique de M est la topologie grossière (resp. discrète).

1.1.5. Exercice. Montrer que la topologie I -adique sur M est la topologie discrète si et seulement si $I^r M = \mathbf{0}$ pour $r \gg 0$.

1.2 Propriétés générales de la topologie I -adique

1.2.1. Proposition. Dans les énoncés suivants, les lettres M et N désignent des \mathbf{R} -modules munis de la topologie I -adique.

- L'anneau \mathbf{R} muni de la topologie I -adique est un anneau topologique.
- Une \mathbf{R} -algèbre (resp. un \mathbf{R} -module) munie de la topologie I -adique est une \mathbf{R} -algèbre (resp. un \mathbf{R} -module) topologique.
- Un morphisme \mathbf{R} -linéaire entre modules munis de la topologie I -adique est continu.
- Pour tout sous-ensemble $Y \subseteq M$, l'adhérence I -adique de Y , notée \bar{Y} , est l'ensemble des $x \in M$ tels que $B(x; r) \cap Y \neq \emptyset$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, donc

$$\bar{Y} = \bigcap_{r \in \mathbb{N}} (Y + I^r M)$$

- Une boule I -adique est toujours fermée.
- L'adhérence I -adique de l'origine de M est l'ensemble $\bar{\mathbf{0}} = \bigcap_r I^r M$.
- M est séparé (on dit aussi « I -adiquement séparé»), si et seulement si $\mathbf{0} = \bar{\mathbf{0}}$. En particulier, N est fermé dans M , si et seulement si M/N est séparé. Le module $M_\sigma := M/\bar{\mathbf{0}}$ est séparé.
- Si \mathbf{R} est noethérien et M est de type fini.

- (Artin-Rees) Si N_1, N_2 sont des sous-modules M . Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $r \geq k$ on a

$$I^r N_1 \cap N_2 = I^{r-k} (I^k N_1 \cap N_2)$$

- (Krull) Dans M , on a $I\bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{0}}$.

- (Krull) Si $N \subseteq M$, la topologie induite sur N est la topologie I -adique de N .

- Si \mathbf{R} est noethérien et intègre, \mathbf{R} est séparé.
- Si \mathbf{R} est noethérien et $I \subseteq \text{Rad}(\mathbf{R})$ ⁽¹⁾ (p.e. si $(\mathbf{R}, \mathfrak{m})$ est local et que $I \subseteq \mathfrak{m}$)

- Si M est de type fini, M est séparé.
- Si M est de type fini, tout sous-module de M est fermé. En particulier, tout idéal de \mathbf{R} est fermé.

¹ On rappelle que le radical (de Jacobson) d'un anneau \mathbf{R} est l'idéal $\text{Rad}(\mathbf{R})$ des $x \in \mathbf{R}$ qui opèrent comme 0 sur tout \mathbf{R} -module simple, i.e. sur tout \mathbf{R} -module de la forme \mathbf{R}/\mathfrak{M} où \mathfrak{M} est un idéal maximal de \mathbf{R} . On voit aussitôt que $\text{Rad}(\mathbf{R}) = \bigcap \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \text{ est un idéal maximal de } \mathbf{R}\}$. Or, x est dans tout idéal maximal, si et seulement si, $1 + ax$ n'appartient à aucun idéal de \mathbf{R} . En effet, la nécessité étant claire, si $x \notin \mathfrak{M}$, on a $\mathbf{R} = (x) + \mathfrak{M}$ par maximalité de \mathfrak{M} et donc $1 = ax + m$ pour certains $a \in \mathbf{R}$ et $m \in \mathfrak{M}$, en particulier $1 + ax \in \mathfrak{M}$ n'est pas inversible. Par conséquent, $\text{Rad}(\mathbf{R}) = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 + ax \text{ est inversible } \forall a \in \mathbf{R}\}$ et l'assertion « $I \subseteq \text{Rad}(\mathbf{R})$ » est équivalente à « $1 + y$ est inversible que que soit $y \in I$ ».

- 3) $(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ est un «anneau de Zariski» ⁽²⁾.
 4) Une \mathbf{R} -algèbre de type fini \mathbf{A} ainsi que son complexe de de Rham $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}^*$ sont séparés.

Indications

a,b,c) Ces énoncés affirment simplement que les opérations de somme et produits sont continues. Nous démontrons seulement le cas du produit dans une \mathbf{R} -algèbre $\cdot : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ et laissons les autres cas en exercice. Dans ce cas, on doit montrer que l'ensemble $\{(x, y) \mid xy \in z + \mathbf{I}^r\}$ est un ouvert ce qui est évident car si $xy \in z + \mathbf{I}^r$ alors $(x + \mathbf{I}^r)(y + \mathbf{I}^r) = xy + x\mathbf{I}^r + y\mathbf{I}^r + \mathbf{I}^{2r} \subseteq xy + \mathbf{I}^r$.
 d,e,f,g) 1.1.2-0a. Si \mathbf{M} est séparé un point est toujours fermé, réciproquement si $x \neq y$ il existe une boule ouverte \mathcal{B} contenant x et ne contenant pas y , or le complémentaire de \mathcal{B} est ouvert par 0e.

h-1) Voir p.e. [B₂] ch. III §3.1 p. 197.

h-2) Artin-Rees pour $\mathbf{N}_1 = \mathbf{M}$ et $\mathbf{N}_2 = \bar{\mathbf{0}}$ donne $\bar{\mathbf{0}} = \mathbf{I}^{r-k}\bar{\mathbf{0}} \subseteq \mathbf{I}\bar{\mathbf{0}}$.

h-3) Voir p.e. [B₂] ch. III §3.2 p. 199.

i) On raisonne comme pour le lemme de Nakayama. Le \mathbf{R} -module $\bar{\mathbf{0}}$ est de type fini de système de générateurs $\{x_1, \dots, x_r\}$ et l'on a $\bar{\mathbf{0}} = \mathbf{I}\bar{\mathbf{0}}$ (0h-02); il existe alors des éléments $\alpha_{i,j} \in \mathbf{I}$ tels que $x_i = \alpha_{i,1}x_1 + \dots + \alpha_{i,r}x_r$. On a donc en écriture matricielle

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_{1,1} & -\alpha_{1,2} & \cdots & -\alpha_{1,r} \\ -\alpha_{2,1} & 1 - \alpha_{2,2} & \cdots & -\alpha_{2,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{r,1} & -\alpha_{r,2} & \cdots & 1 - \alpha_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_x \end{pmatrix},$$

et si nous multiplions à gauche par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{2,1} & 1 - \alpha_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r,1} & 0 & 0 & \cdots & 1 - \alpha_{1,1} \end{pmatrix},$$

nous obtenons l'égalité

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 1 - \beta_{1,1} & -\beta_{1,2} & \cdots & -\beta_{1,r} \\ 0 & 1 - \beta_{2,2} & \cdots & -\beta_{2,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -\beta_{r,2} & \cdots & 1 - \beta_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_x \end{pmatrix},$$

avec $\beta_{i,j} \in \mathbf{I}$ puisque \mathbf{I} est un idéal et que $1 + \mathbf{I}$ est stable par multiplication. L'itération de cette idée est le procédé de «trigonalisation» des matrices dans les anneaux; il produit, après r étapes, une famille d'éléments $\gamma_{i,j} \in \mathbf{I}$ tels que

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 1 - \gamma_{1,1} & -\gamma_{1,2} & \cdots & -\gamma_{1,r} \\ 0 & 1 - \gamma_{2,2} & \cdots & -\gamma_{2,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 - \gamma_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_x \end{pmatrix},$$

² Le couple $(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ est ainsi appelé lorsque \mathbf{R} est noethérien et que ses idéaux sont \mathbf{I} -adiquement fermés. Cette dernière propriété équivaut à $\mathbf{I} \subseteq \text{Rad}(\mathbf{R})$; 0j-02 montre la suffisance, réciproquement, si $\mathbf{I} \not\subseteq \text{Rad}(\mathbf{R})$, il existe \mathfrak{M} maximal tel que $\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathfrak{M}$, auquel cas $1 \in \mathbf{I} \bmod \mathfrak{M}$ et \mathbf{R}/\mathfrak{M} n'est pas \mathbf{I} -adiquement séparé car alors $\mathbf{I}^r(\mathbf{R}/\mathfrak{M}) = \mathbf{R}/\mathfrak{M}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, et donc $\bigcap_n \mathbf{I}^r(\mathbf{R}/\mathfrak{M}) = \mathbf{R}/\mathfrak{M} \neq 0$.

avec des coefficients sous la diagonale tous nuls.

Si nous posons maintenant $1 - \gamma := (1 - \gamma_{1,1}) \cdots (1 - \gamma_{r,r})$, on a $\gamma \in \mathbf{I}$ et

$$(1 - \gamma) x_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, r. \quad (\diamond)$$

par conséquent, si \mathbf{R} est intègre, on a $x_i = 0$ (car $1 - \gamma \neq 0$) et donc $\bar{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$.

j-1) Le raisonnement précédent s'applique jusqu'à l'égalité (\diamond) , on conclut puisque $1 - \gamma$ est inversible.

j-2,3) Si $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$, notons $\nu : \mathbf{M} \twoheadrightarrow \mathbf{M}/\mathbf{N}$ la surjection canonique. Le quotient \mathbf{M}/\mathbf{N} est séparé d'après l'assertion précédente et alors $\bar{\mathbf{N}} = \nu^{-1}(\bar{\mathbf{0}}) = \nu^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{N}$.

j-4) Si \mathbf{A} est de type fini, \mathbf{A} est noethérienne et $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}$ est un \mathbf{A} -module de type fini. ■

1.2.2. Séparation \mathbf{I} -adique. Soit \mathbf{Top} la catégorie des espace topologiques et \mathbf{Top}_σ la sous-catégorie pleine des espaces topologiques *séparés*. Le foncteur l'inclusion de catégories $\iota : \mathbf{Top}_\sigma \hookrightarrow \mathbf{Top}$ admet un adjoint à gauche $(-)_\sigma : \mathbf{Top} \rightsquigarrow \mathbf{Top}_\sigma$; il fait correspondre à un espace topologique \mathbf{T} son séparé \mathbf{T}_σ , quotient \mathbf{T} par la relation d'équivalence (le vérifier) qui identifie deux points $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ lorsque pour toute application continue $f : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}$ avec \mathbf{S} séparé, on a $f(t_1) = f(t_2)$. Notons \mathcal{R} cette relation. Il est immédiat que \mathbf{T}_σ est séparé (le vérifier) et que la surjection canonique $\mathbf{T} \twoheadrightarrow \mathbf{T}/\mathcal{R}$ factorise toute application continue de \mathbf{T} vers un espace séparé. On a donc bien

$$\text{Mor}_{\mathbf{Top}}(\mathbf{T}, \iota\mathbf{S}) = \text{Mor}_{\mathbf{Top}_\sigma}(\mathbf{T}_\sigma, \mathbf{S})$$

Dans le cadre des topologies \mathbf{I} -adiques l'espace $\mathbf{M}/\bar{\mathbf{0}}$ est séparé (1.2.1-0g) et pour tout morphisme de \mathbf{R} -modules $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{S}$ avec \mathbf{S} séparé, on a bien $\bar{\mathbf{0}} \subseteq \ker(f)$. Par conséquent, la surjection $\mathbf{M} \twoheadrightarrow \mathbf{M}/\bar{\mathbf{0}}$ représente « le séparé \mathbf{M}_σ de \mathbf{M} ». En particulier,

1.2.3. Proposition. *Un morphisme de \mathbf{R} -modules $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{M}$ induit un isomorphisme $\varphi_\sigma : \mathbf{N}_\sigma \rightarrow \mathbf{M}_\sigma$, si et seulement si l'application induite $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\varphi; \mathbf{S}) : \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M}, \mathbf{S}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{N}, \mathbf{S})$ est bijective pour tout \mathbf{R} -module séparé \mathbf{S} .*

1.3 Valuations discrètes et valeurs absolues

Un \mathbf{R} -module \mathbf{M} est « filtré » par la suite décroissante de ses boules \mathbf{I} -adiques

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 \supseteq \mathbf{I}\mathbf{M} \supseteq \mathbf{I}^2\mathbf{M} \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{I}^r\mathbf{M} \supseteq \cdots$$

et pour chaque $m \in \mathbf{M}$, on appelle « l'ordre \mathbf{I} -adique de m », noté $\text{ord}_{\mathbf{I}}(m)$, la borne supérieure dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble $\{r \in \mathbb{N} \mid m \in \mathbf{I}^r\mathbf{M}\}$. L'ordre \mathbf{I} -adique vérifie les propriétés suivantes :

O-i) $\text{ord}_{\mathbf{I}}(-) : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

O-ii) $\text{ord}_{\mathbf{I}}(xm) \geq \text{ord}_{\mathbf{I}}(x) + \text{ord}_{\mathbf{I}}(m)$, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $m \in \mathbf{M}$.

O-iii) $\text{ord}_{\mathbf{I}}(m) = +\infty$, si et seulement si $m \in \bar{\mathbf{0}}$.

O-iv) $\text{ord}_{\mathbf{I}}(m_1 + m_2) \geq \inf(\text{ord}_{\mathbf{I}}(m_1), \text{ord}_{\mathbf{I}}(m_2))$.

On peut alors considérer pour tout nombre réel $s > 1$, l'application

$$|\cdot|_s : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad |m|_s := s^{-\text{ord}_{\mathbf{I}}(m)}$$

Elle vérifie :

- i) $|\cdot|_s : \mathbf{M} \rightarrow \llbracket 0, 1 \rrbracket \subseteq \mathbb{R}$.
- ii) $|m|_s = 0$, si et seulement si $m \in \bar{\mathbf{0}}$.
- iii) $|xm|_s \leq |x|_s |m|_s$, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $m \in \mathbf{M}$.
- iv) $|m_1 + m_2|_s \leq \sup(|m_1|_s, |m_2|_s)$.

1.3.1. Lorsque \mathbf{M} est \mathbf{I} -adiquement séparé, la condition (ii) devient

- ii') $|m|_s = 0$, si et seulement si $m = \mathbf{0}$.

et l'application

$$d_s : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad d_s(m_1, m_2) := |m_1 - m_2|_s$$

vérifie les conditions d'une distance sur \mathbf{M} :

- D-i) distance bornée: $d_s(m_1, m_2) \leq 1$.
- D-ii) symétrie: $d_s(m_1, m_2) = d_s(m_2, m_1)$.
- D-iii) séparation: $d_s(m_1, m_2) = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2$.
- D-iv) inégalité triangulaire: $d_s(m_1, m_3) \leq d_s(m_1, m_2) + d_s(m_2, m_3)$.

et même l'inégalité plus forte

$$d_s(m_1, m_3) \leq \sup(d_s(m_1, m_2), d_s(m_2, m_3))$$

qui fait de d_s une «distance ultramétrique» ou «non archimédienne»

1.3.2. Commentaire. Dans l'axiomatique de Hilbert de la géométrie euclidienne le premier axiome de continuité (axiome IV.1) est l'axiome d'Archimède qui affirme : «Pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande». Dans le cas d'une métrique non archimédienne le fait de prolonger indéfiniment un segment ne fait pas croître sa longueur. Ainsi par exemple, étant donnée une suite de points $\{m_0, m_1, \dots, m_r\}$ l'inégalité triangulaire établit que $d(m_0, m_r) \leq \sum_{i=0}^{r-1} d(m_i, m_{i+1})$, l'égalité pouvant être atteinte ; par contre, dans le cas non archimédien on a $d(m_0, m_r) \leq \sup\{d(m_i, m_{i+1}) \mid 0 \leq i \leq r-1\}$ et le fait de rajouter de petits segments n'a pas d'effet sur la distance finale, quel que soit leur nombre.

1.3.3. Exercice. Montrer que dans un espace muni d'une distance ultramétrique tout triangle est isocèles.

Les observations de 1.3.1 prouvent la proposition suivante.

1.3.4. Proposition. La topologie \mathbf{I} -adique sur \mathbf{M} est définie par un «écart» borné par 1 ⁽³⁾. Le séparé \mathbf{I} -adique \mathbf{M}_σ de \mathbf{M} est un espace «métrique».

³ On appelle «écart» sur un ensemble \mathbf{E} une application $e : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant

$$\bullet e(x, x) = 0, \quad \bullet e(x, y) = e(y, x), \quad \bullet e(x, z) \leq e(x, y) + e(y, z) \text{ (inégalité triangulaire)}.$$

Un écart est une «distance» si, de plus, $\bullet e(x, y) < +\infty$ et $\bullet (x \neq y \Rightarrow e(x, y) \neq 0)$ (*). Dans un ensemble \mathbf{E} muni d'un écart e , on appelle «boule ouverte centrée en $x \in \mathbf{E}$ de rayon R » l'ensemble $\mathcal{B}_e(x, R) = \{y \in \mathbf{E} \mid e(x, y) < R\}$. L'inégalité triangulaire suffit alors pour prouver que l'intersection de deux boules est une réunion de boules, et donc que les réunions de boules constituent les ouverts d'une topologie. Bien entendu, cette topologie n'est séparée que si (*) est vérifiée. Lorsque \mathbf{E} est un groupe abélien muni d'une application sous-additive $|\cdot| : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$, i.e. telle que $|x+y| \leq |x| + |y|$, l'application $e : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $e(x, y) = |x - y|$, est un écart.

1.3.5. Remarque. Le fait que $M/\bar{0}$ est un espace topologique séparé apparaît donc aussi comme conséquence de 1.3.4 (cf. 1.2.1-0g).

1.3.6. Remarque et notation. On rappelle que deux distances sur un ensemble E sont dites «*équivalentes*» lorsqu'elles définissent la même topologie. Il est facile de voir que les distances ultramétriques d_s sont toutes équivalentes bien qu'elles ne soient pas «*commensurables*», i.e. il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $d_{s_1} \leq Cd_{s_2}$ et $d_{s_2} \leq Cd_{s_1}$ (le vérifier!) ⁽⁴⁾. Dans la suite on notera de manière générique $|_s|$ l'une des applications $|_s : M \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque la précision de la valeur s sera inutile.

1.3.7. Valuations et valeurs absolues. Soit A une R -algèbre I -adiquement séparée. Lorsque l'application $\text{ord}_I : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ est **additive** et pas seulement suradditive, i.e. lorsque l'on a une égalité

$$\text{ord}_I(ab) = \text{ord}_I(a) + \text{ord}_I(b) \quad \forall a, b \in A \setminus \{0\}, \quad (1)$$

l'application ordre est une «*valuation*» et est notée $v_I = A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$, les applications $|_s : A \rightarrow \mathbb{R}$ qui s'en déduisent sont alors appelées des «*valeurs absolues*» ; elles vérifient donc :

$$\text{V-i)} \quad |_s : A \rightarrow \llbracket 0, 1 \rrbracket \subseteq \mathbb{R}.$$

$$\text{V-ii)} \quad |a|_s = 0, \text{ si et seulement si } a = 0.$$

$$\text{V-iii)} \quad |ab|_s = |a|_s |b|_s, \quad \forall a, b \in A.$$

$$\text{V-iv)} \quad |a + b|_s \leq \sup(|a|_s, |b|_s).$$

1.3.8. Exercice. Soit A une R -algèbre I -adiquement séparée. Montrer que les conditions suivantes sont nécessaires pour que l'application $\text{ord}_I(-) : A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ soit une valuation :

- (i) A est intègre. (ii) IA est un idéal premier.

1.3.9. Exercice. Soit p un nombre premier, notons $I := \langle p \rangle$ et munissons \mathbb{Z} de la topologie I -adique. Montrer que l'application $\text{ord}_I : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ est une valuation ; notons-la v_p . Pour m premier à p , montrer l'égalité

$$v_p((p^r m)!) = p^{r-1}m + v_p((p^{r-1}m)!).$$

En déduire, pour $m \in \mathbb{Z}$ non nul :

$$v_p(m!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor,$$

puis

$$v_p(p^r!) = \frac{p^r - 1}{p - 1}, \quad \text{et donc aussi} \quad v_p(m!) = \frac{p^{\lfloor \log_p(m) \rfloor} - 1}{p - 1}.$$

1.4 Complétion

1.4.1. Condition de Cauchy. Commençons par rappeler que dans le cas des espaces vectoriels réels normés $(V; \|_ \|)$ la complétion consiste à passer de l'espace des vecteurs à celui des suites de vecteurs vérifiant une condition de pseudo-convergence, «*le critère de Cauchy*» qui affirme, pour

⁴ À la différence des espaces vectoriels réels ou complexes normés où deux normes sont équivalentes si et seulement si elles sont commensurables.

une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

« Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n_1, n_2 \geq N_\varepsilon$ on ait $\|v_{n_1} - v_{n_2}\| < \varepsilon$ ».

Dans le cas non archimédien (cf. 1.3.2) cette condition est équivalente à

« Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \geq N_\varepsilon$ on ait $|v_n - v_{n+1}| < \varepsilon$ » **(Chy)**

1.4.2. Suites de Cauchy. Étant donné un \mathbf{R} -module \mathbf{M} muni de la topologie \mathbf{I} -adique, on note $\mathbf{Chy}(\mathbf{M})$ l'ensemble des « suites de Cauchy de \mathbf{M} », i.e. des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{M}^{\mathbb{N}}$ vérifiant le critère de Cauchy sous la forme **(Chy)**.

1.4.3. Suites convergentes. Étant donné un \mathbf{R} -module \mathbf{M} muni de la topologie \mathbf{I} -adique, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{M}^{\mathbb{N}}$ est dite « convergente » de « limite » $x_\infty \in \mathbf{M}$ lorsque pour chaque $\varepsilon > 0$ donné, il existe N_ε tel que pour tout $n > N_\varepsilon$ on a $|x_n - x_\infty| < \varepsilon$. On note $\mathbf{Cv}(\mathbf{M})$ l'ensemble des suites convergentes et $\mathbf{Cv}_0(\mathbf{M})$ celui des suites convergentes de limite 0. On a des inclusions de \mathbf{R} -modules

$$\mathbf{Cv}_0(\mathbf{M}) \subseteq \mathbf{Cv}(\mathbf{M}) \subseteq \mathbf{Chy}(\mathbf{M}).$$

1.4.4. Exercice. Montrer que si $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy, la suite de nombres réels $(|x_n|)_{n \geq 0}$ est de Cauchy et, ou bien elle est stationnaire (1.3.3), ou bien converge vers zéro.

1.4.5. Exercice. La suite constante de terme général $x \in \mathbf{M}$ converge vers zéro si et seulement si $x \in \bar{0}$.

1.4.6. Topologie \mathbf{I} -adique sur $\mathbf{Chy}(\mathbf{M})$. On rappelle qu'une conséquence classique de la « sous-additivité » $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$ est l'inégalité

$$||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|,$$

qui dit que l'application $|_ : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est 1-lipschitzienne, donc continue, et qu'elle transforme suite de Cauchy de \mathbf{M} en suite de Cauchy, **donc convergente**, de \mathbb{R} . On pose alors

$$\|_ : \mathbf{Chy}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|(x_n)_{n \geq 0}\| = \varinjlim_n |x_n| \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$$

et l'on constate aussitôt les propriétés suivantes

- i) $\|_ : \mathbf{Chy}(\mathbf{M}) \rightarrow \llbracket 0, 1 \rrbracket \subseteq \mathbb{R}$;
- ii) $\|(x_n)_{n \geq 0}\| = 0$, si et seulement si $(x_n)_{n \geq 0} \in \mathbf{Cv}_0$;
- iii) $\|a(x_n)_{n \geq 0}\| = |a| \|(x_n)_{n \geq 0}\|$, $\forall a \in \mathbf{R}$, $\forall (x_n)_{n \geq 0} \in \mathbf{Chy}(\mathbf{M})$;
- iv) $\|(x_n)_{n \geq 0} + (y_n)_{n \geq 0}\| \leq \sup(\|(x_n)_{n \geq 0}\|, \|(y_n)_{n \geq 0}\|)$;

qui nous conduisent à munir $\mathbf{Chy}(\mathbf{M})$ de la topologie associée à l'écart défini par $\|_$ suivant le procédé (standard) de ⁽³⁾ (p. 6). Notons $(\mathbf{Chy}; \|_)$ cet espace topologique. Il est immédiat de constater que l'application $\|_$ passe au quotient $\|_ : \mathbf{Chy}(\mathbf{M}) / \mathbf{Cv}_0(\mathbf{M}) \rightarrow \llbracket 0, 1 \rrbracket$ où elle induit une structure d'espace **métrique**.

1.4.7. Exercice. Montrer que les applications $\|_ : \mathbf{Chy}(\mathbf{M}) \rightarrow \llbracket 0, 1 \rrbracket$ et $|_ : \mathbf{M} \rightarrow \llbracket 0, 1 \rrbracket$ ont même image.

1.4.8. Proposition. *L'identité $(\mathbf{Chy}(\mathbf{M})/\mathbf{Cv}_0(\mathbf{M}); |\cdot|) \rightarrow (\mathbf{Chy}(\mathbf{M})/\mathbf{Cv}_0(\mathbf{M}); \|\cdot\|)$ est continue. En particulier, $\mathbf{Chy}(\mathbf{M})/\mathbf{Cv}_0(\mathbf{M})$ est I -adiquement séparé.*

Démonstration. Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ du \mathbf{R} -module $\mathbf{Chy}(\mathbf{M})$ on a $\text{ord}_I((x_n)_{n \geq 0}) \leq \text{ord}_I(x_m)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. On en déduit l'inégalité $|\cdot| \geq \|\cdot\|$ sur $\mathbf{Chy}_0(\mathbf{M})/\mathbf{Cv}(\mathbf{M})_0$ et l'application en question est 1-lipschitzienne. ■

1.4.9. Remarque. Nous verrons plus tard que l'on a $\|\cdot\| = |\cdot|$ (cf. 1.5.1-(c)).

1.4.10. Commentaire. Un \mathbf{R} -module \mathbf{M} est dit «complet» lorsque ses séries de Cauchy convergent. Notons $\text{Cmp}(\mathbf{R})$ la catégorie de tels modules et $\iota : \text{Cmp}(\mathbf{R}) \subseteq \text{Mod}(\mathbf{R})$ le foncteur d'inclusion. Le \mathbf{R} -module $\widehat{\mathbf{M}} := \mathbf{Chy}(\mathbf{M})/\mathbf{Cv}_0(\mathbf{M})$, complet *par construction*, est universel en ce sens que le foncteur $\mathbf{M} \rightsquigarrow \widehat{\mathbf{M}}$, dit «de complétion», est adjoint à gauche de ι . La proposition 1.4.8 établit que $\widehat{\mathbf{M}}$ est séparé, mais cette propriété est particulière au contexte I -adique, en effet sur la catégorie des groupes abéliens filtrés généraux, le foncteur de complétion peut produire des espaces non séparés (cf. [B₂] III §2.12 et [J] §7.17 p. 455). Dans tous les cas le complété séparé d'un groupe abélien filtré \mathbf{M}_* est $\varprojlim_n \mathbf{M}/\mathbf{M}_n$ (cf. 1.5.1-(d)).

1.4.11. Complété séparé I -adique formel. On appelle «complété (séparé) du \mathbf{R} -module \mathbf{M} (pour la topologie I -adique)» le \mathbf{R} -module

$$\widehat{\mathbf{M}} := \frac{\mathbf{Chy}(\mathbf{M})}{\mathbf{Cv}_0(\mathbf{M})}$$

La proposition suivante est de vérification immédiate.

1.4.12. Proposition

a) *L'application qui fait correspondre à $m \in \mathbf{M}$ la suite «constante» $(m_n \mid m_n = m)_{n \geq 0}$ est une injection de \mathbf{R} -modules $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{Chy}(\mathbf{M})$ induisant une injection de \mathbf{R} -modules I -adiquement séparés*

$$\iota(\mathbf{M}) : \mathbf{M}_\sigma \xrightarrow{\subseteq} \widehat{\mathbf{M}}$$

b) *Un morphisme de \mathbf{R} -modules $\varphi : \mathbf{M}_1 \rightarrow \mathbf{M}_2$, induit par son action terme à terme un morphisme de \mathbf{R} -modules entre les modules des suites $\varphi^{\mathbb{N}} : \mathbf{M}_1^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{M}_2^{\mathbb{N}}$ induisant un morphisme $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathbf{M}}_1 \rightarrow \widehat{\mathbf{M}}_2$. On a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_{1,\sigma} & \xrightarrow{\iota(\mathbf{M}_1)} & \widehat{\mathbf{M}}_{1,\sigma} \\ \varphi_\sigma \downarrow & & \widehat{\varphi} \downarrow \\ \mathbf{M}_{2,\sigma} & \xrightarrow{\iota(\mathbf{M}_2)} & \widehat{\mathbf{M}}_{2,\sigma} \end{array}$$

De plus, si $\varphi : \mathbf{M}_1 \rightarrow \mathbf{M}_2$ est surjectif, le morphisme $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathbf{M}}_1 \rightarrow \widehat{\mathbf{M}}_2$ est surjectif. En particulier, un module I -adiquement complet et séparé est le quotient du complété (séparé) I -adique d'un \mathbf{R} -module libre.

c) *Si \mathbf{A} est une \mathbf{R} -algèbre, la multiplication terme à terme est une opération interne dans les modules $\mathbf{Cv}_0(\mathbf{A})$, $\mathbf{Cv}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{Chy}(\mathbf{A})$ qui fait de $\mathbf{Cv}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{Chy}(\mathbf{A})$ une inclusion d'anneaux dont $\mathbf{Cv}_0(\mathbf{A})$ est un idéal. L'application canonique 0_a induit une injection de \mathbf{R} -algèbres I -*

adiquement séparées

$$\iota(\mathbf{A}) : \mathbf{A}_\sigma \longrightarrow \widehat{\mathbf{A}} := \frac{\mathbf{Chy}(\mathbf{A})}{\mathbf{Cv}_0(\mathbf{A})}$$

d) Un morphisme de \mathbf{R} -algèbres $\varphi : \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_2$, induit par son action terme à terme un morphisme de \mathbf{R} -algèbres entre les algèbres de suites $\varphi^{\mathbb{N}} : \mathbf{A}_1^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{A}_2^{\mathbb{N}}$ induisant un morphisme de \mathbf{R} -algèbres $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathbf{A}}_1 \rightarrow \widehat{\mathbf{A}}_2$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_{1,\sigma} & \xrightarrow{\iota(\mathbf{A}_1)} & \widehat{\mathbf{A}}_{1,\sigma} \\ \varphi_\sigma \downarrow & & \widehat{\varphi} \downarrow \\ \mathbf{A}_{2,\sigma} & \xrightarrow{\iota(\mathbf{A}_2)} & \widehat{\mathbf{A}}_{2,\sigma} \end{array}$$

De plus, si $\varphi : \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_2$ est surjectif, le morphisme $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathbf{A}}_1 \rightarrow \widehat{\mathbf{A}}_2$ est surjectif. En particulier, une algèbre \mathbf{I} -adiquement complète et séparée est le quotient du complété (séparé) \mathbf{I} -adique $\mathbf{R}[\overline{X}]^\wedge$ d'une algèbre de polynômes $\mathbf{R}[\overline{X}]$.

Indication. Dans (c) il faut vérifier que le produit de deux suites de Cauchy est une suite de Cauchy et que les suites qui convergent vers zéro constituent un idéal de $\widehat{\mathbf{A}}$. Or, si $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ sont des suites de Cauchy de \mathbf{A} , on a

$$|x_n y_n| \leq |x_n| |y_n| \quad \text{et} \quad \begin{cases} |x_{n+1} y_{n+1} - x_n y_n| = |(x_{n+1} y_{n+1} - x_{n+1} y_n) + (x_{n+1} y_n - x_n y_n)| \\ \leq |x_{n+1}| |y_{n+1} - y_n| + |x_{n+1} - x_n| |y_n| \end{cases}$$

et les vérifications sont immédiates puisque $|_|\leq 1$. ■

1.4.13. Corollaire. La correspondance $(\widehat{_}) : \text{Mod}(\mathbf{R}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbf{R})$ (resp. $(\widehat{_}) : \mathbf{Alg}(\mathbf{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Alg}(\mathbf{R})$)

$$M \rightsquigarrow \widehat{M}, \quad (\varphi : M_1 \rightarrow M_2) \rightsquigarrow (\widehat{\varphi} : \widehat{M}_1 \rightarrow \widehat{M}_2)$$

est fonctorielle covariante ; c'est le foncteur de «complétion (\mathbf{I} -adique) formelle».

L'inclusion $\iota(_): (_)_\sigma \subseteq (\widehat{_})$ est fonctorielle.

1.4.14. Exercice. On suppose \mathbf{R} noethérien. Soit $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{M}$ une injection de \mathbf{R} -modules où \mathbf{M} est supposé de type fini. On munit \mathbf{N} et \mathbf{M} de la topologie \mathbf{I} -adique. Montrer que $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy (resp. convergente) de \mathbf{N} , si et seulement si $(\varphi(x_n))_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy (resp. convergente) de \mathbf{M} . En particulier l'application $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathbf{N}} \rightarrow \widehat{\mathbf{M}}$, $(x_n)_{n \geq 0} \mapsto (\varphi(x_n))_{n \geq 0}$ est un morphisme de \mathbf{R} -modules **injectif**. (Indication : 1.2.1-0h-03.)

1.4.15. Séries de Cauchy. Par la notion de «série», on étend la notion de «somme finie» à celle de «somme dénombrable ordonnée». L'expression «série de terme général x_n », notée $\sum_{n \geq 0} x_n$, est un raccourci pour «suite des sommes partielles» $(s_n)_{n \geq 0}$ avec $s_n = x_0 + \dots + x_n$. Cette correspondance entre «série» et «suite» est clairement bijective dans un groupe abélien. La série est dite «de Cauchy» lorsque la suite correspondante l'est. Le critère de Cauchy pour les suites d'un espace non archimédien (1.4.1) se traduit en un critère encore plus simple pour les séries. En effet,

$$\boxed{\text{«La série } \sum_{n \geq 0} x_n \text{ est de Cauchy, si et seulement si } |x_n| \text{ tend vers zéro.»}}$$

Une série est dite «convergente (de somme s)» lorsque la suite des sommes partielles est conver-

gente (de limite s). Une série convergente est toujours de Cauchy, la réciproque étant la caractéristique des espaces dits « *complets* ». La proposition suivante est la traduction en termes de séries de la définition de « *complété (séparé)* » 1.4.11.

1.4.16. Proposition. *Pour tout R -module M , le complété (séparé) I -adique \widehat{M} est le module des séries de Cauchy de M modulo les séries qui convergent vers 0.*

1.4.17. Sommabilité et critère de Cauchy pour les familles. Les notions de *série convergente* et de *séries de Cauchy* admettent une formulation indépendante de l'ordre et du cardinal de l'ensemble des termes de la série. Soient \mathfrak{A} un ensemble et $\{x_a\}_{a \in \mathfrak{A}}$ une famille d'éléments d'un espace valué,

- La famille $\{x_a\}_{a \in \mathfrak{A}}$ est « *sommable de somme s* » lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie $F(\varepsilon) \subseteq \mathfrak{A}$ telle que pour toute partie finie $F' \supseteq F(\varepsilon)$ on ait $|s - \sum_{a \in F'} x_a| < \varepsilon$.
- La famille $\{x_a\}_{a \in \mathfrak{A}}$ « *est de Cauchy* » lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie $F(\varepsilon) \subseteq \mathfrak{A}$ telle que pour toute partie finie $K \subseteq \mathfrak{A}$ vérifiant $K \cap F(\varepsilon) = \emptyset$ on ait $|\sum_{a \in K} x_a| < \varepsilon$.

Bien évidemment, une famille sommable est de Cauchy. La proposition suivante résume des propriétés très utiles de ces notions lorsque \mathfrak{A} est dénombrable.

1.4.18. Proposition

- a) Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille sommable de somme s (resp. de Cauchy). Pour toute partition $\mathbb{N} = \coprod_{\ell} F_{\ell}$ où F_{ℓ} est fini, la série $\sum_{\ell} s_{\ell}$ avec $s_{\ell} := \sum_{i \in F_{\ell}} x_i$ converge vers s (resp. est de Cauchy).
- b) Soit M une R -module muni de la topologie I -adique. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{F}_{\ell} = \{x_{\ell, n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de Cauchy avec $x_{\ell, n} \in I^{\ell} M$. Alors, la famille $\bigcup_{\ell} \mathcal{F}_{\ell} = \{x_{\ell, n}\}_{\ell, n}$ est de Cauchy.

Indication

- a) Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe N_{ε} tel que pour toute partie finie $F \supseteq \llbracket 0, N_{\varepsilon} \rrbracket$ on a $|s - \sum_{n \in F} x_n| < \varepsilon$. Or, si m est assez grand, on a $F_1 \amalg \dots \amalg F_m \supseteq \llbracket 0, N_{\varepsilon} \rrbracket$ et alors

$$|s - \sum_{\ell=0}^m s_{\ell}| = |s - \sum_{n \in F_1 \amalg \dots \amalg F_m} x_n| < \varepsilon.$$

- b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme les termes de \mathcal{F}_{ℓ} appartiennent à $I^{\ell} M$, il existe L tel que $|x_{\ell, n}| < \varepsilon$ pour tout couple (ℓ, n) tel que $\ell > L$. Par conséquent, $|\sum_{\ell, n} x_{\ell, n}| < \varepsilon$ pour **toute somme finie** avec $\ell > L$, par non archimédiannité. D'autre part, pour chaque $\ell \leq L$, il existe N_{ℓ} tel que $|\sum_{\ell, n} x_{\ell, n}| < \varepsilon$ pour **toute somme finie** avec $n > N_{\ell}$, aussi par non archimédiannité. Ainsi, si l'on pose $N := \sup\{N_{\ell} \mid \ell \leq L\}$ on a bien $|\sum_{(\ell, n) \in K} x_{\ell, n}| < \varepsilon$, pour toute partie finie K disjointe de $\llbracket 0, L \rrbracket \times \llbracket 0, N \rrbracket$. ■

1.4.19. Exercice. Une série est $\sum_n x_n$ est « *absolument convergente* » lorsque la série de réels positifs $\sum_n |x_n|$ est convergente. Prouver que la famille $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ des termes d'une série absolument convergente $\sum_{n \geq 0} x_n$ est sommable. Donner un contreexemple à l'affirmation réciproque.

1.4.20. Exercice. Montrer qu'une sous-famille d'une famille de Cauchy est de Cauchy mais qu'une sous-famille d'une famille convergente n'est pas en général convergente (bien qu'elle soit de Cauchy et donc converge dans un espace complet). Conclure que dans un espace complet l'assertion 1.4.18-0a est vraie quelle que soit la partition de \mathbb{N} .

1.4.21. Proposition. *Dans un espace non archimédien il y a équivalence entre série convergente (resp. de Cauchy) et famille dénombrable sommable (resp. de Cauchy). Plus précisément, la famille $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable (resp. de Cauchy) si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} x_n$ est convergente (resp. de Cauchy).*

Démonstration. Soit $z = \sum_{n \geq 0} x_n$. Pour $\epsilon > 0$ donné, il existe N_ϵ tel que

$$\left| z - \sum_{n=0}^{N_\epsilon} x_n \right| < \epsilon \quad \text{et} \quad |x_\ell| < \epsilon, \quad \forall \ell \geq N_\epsilon.$$

Mais alors, si $F \subseteq \mathbb{N}$ est une partie finie telle que $F \supseteq [0, N_\epsilon]$, on a

$$\left| z - \sum_{n \in F} x_n \right| \leq \sup \left(\left| z - \sum_{n=0}^{N_\epsilon} x_n \right|, |x_\ell| \text{ avec } \ell \in F \setminus [0, N_\epsilon] \right) < \epsilon,$$

grâce à la non archimédiannité de $|\cdot|$. Le cas de séries de Cauchy est laissé en exercice. ■

On en déduit le résultat utile suivant, corollaire aussi de la proposition 1.4.18, qui justifie dans son assertion (c) la terminologie d'espace « *complet* » introduite dans 1.4.11, en ce sens que le foncteur de complétion formelle laisse invariants les espaces complets.

1.4.22. Corollaire

a) Soit $\sum_{n \geq 0} x_n$ une série convergente de somme s dans un \mathbf{R} -module \mathbf{M} muni de la topologie \mathbf{I} -adique. Soit $\Pi_{\ell \in \mathbb{N}} F_\ell$ une partition de \mathbb{N} en parties finies et posons $s_\ell := \sum_{n \in F_\ell} x_n$. Alors, la série $\sum_{\ell \geq 0} s_\ell$ est convergente de même somme s .

b) Les éléments de $\widehat{\mathbf{M}}$ sont les sommes des séries de la forme

$$\sum_{n \geq 0} x_n \text{ avec } \text{ord}_{\mathbf{I}}(x_n) \in \{n, +\infty\}.$$

De plus, si l'on choisi pour chaque $n \in \mathbb{N}$ une famille $\mathcal{R}(n) \subseteq \mathbf{I}^n \mathbf{M}$ de représentants dans \mathbf{M} des classes de $\mathbf{I}^n \mathbf{M} / \mathbf{I}^{n+1} \mathbf{M}$, un élément $z \in \widehat{\mathbf{M}}$ s'exprime d'une et une seule manière comme somme de série de la forme

$$\sum_{n \geq 0} x_n \text{ avec } x_n \in \mathcal{R}(n) \cup \{0\}.$$

c) Pour tout \mathbf{R} -module \mathbf{M} le morphisme canonique $\iota(\widehat{\mathbf{M}}) : \widehat{\mathbf{M}} \rightarrow \widehat{\widehat{\mathbf{M}}}$ (1.4.12-0a) est bijectif.

Indication

a) Par 1.4.21 et 1.4.18-0a.

b) Soit $z_0 = \sum_{n \geq 0} x_n \in \widehat{\mathbf{M}}$ non nul, il existe alors n_0 tel que pour $s_0 = x_0 + \cdots + x_{n_0}$ on ait $|s_0| > |x_{n_0+r}|$ pour tout $r > 0$. Par ultramétrie on a $|z_0| = |s_0|$ (cf. 1.3.3, 1.4.4) et $|s_0| > |z_0 - s_0|$. On pose $z_1 = z_0 - s_0$. Alors, ou bien $0 = z_1$, ou bien $0 \neq z_1 = \sum_{n > n_0} x_n$, auquel cas, l'itération du procédé donne une somme partielle s_1 vérifiant $|z_1| = |s_1|$ et $|s_1| > |z_1 - s_1|$, soit

$$|z_0| = |s_0| > |s_1| > |z_0 - s_0 - s_1|.$$

Ce procédé s'arrête après un nombre fini d'itérations auquel cas z_0 s'exprime par une somme finie vérifiant la condition demandée, ou bien produit la série $\sum_n s_n$ de même somme z_0 d'après (a) et vérifiant $|s_n| > |s_{n+1}|$ pour tout n , ce qui démontre l'existence de telles séries. La fin de la preuve est aux soins du lecteur.

c) L'application $\iota(\widehat{\mathbf{M}})$ est injective puisque $\widehat{\mathbf{M}}$ est séparé (1.4.12-0a). Pour la surjectivité on se donne une série de Cauchy $\sum_{\ell \geq 0} z_\ell$ de $\widehat{\mathbf{M}}$ avec $z_\ell \in \mathbf{I}^\ell \widehat{\mathbf{M}}$, possible d'après (b); le terme z_ℓ est une série de Cauchy $\sum_n x_{\ell,n}$ de $\mathbf{I}^\ell \mathbf{M}$, et la famille $\{x_{\ell,n}\}_{\ell,n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy d'après 1.4.18-0b. On a donc,

$$\sum_{\ell \geq 0} z_\ell = \sum_{n \geq 0} x_{\varphi_n}$$

pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (1.4.21). ■

1.4.23. Corollaire

a) Les éléments de l'anneau $\mathbf{R}[\overline{X}]^\wedge$, complété (séparé) \mathbf{I} -adique de l'anneau des polynômes $\mathbf{R}[\overline{X}] = \mathbf{R}\{X_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$, s'écrivent d'une et d'une unique manière comme séries de la forme

$$\sum_{J \in \bigoplus_{\mathfrak{A}} \mathbb{N}} a_J X^J, \text{ avec } a_J \in \widehat{\mathbf{R}} \text{ t.q. } \text{ord}_{\mathbf{I}}(a_J) \rightsquigarrow \infty, \text{ lorsque } |J| \rightsquigarrow \infty \text{ (}^\circ\text{)}.$$

b) Soit \mathbf{A} une \mathbf{R} -algèbre de système de générateurs algébriques $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$. Les éléments de $\widehat{\mathbf{A}}$ s'écrivent (mais pas nécessairement de manière unique!) comme séries de la forme

$$\sum_{J \in \bigoplus_{\mathfrak{A}} \mathbb{N}} a_J \xi^J, \text{ avec } a_J \in \widehat{\mathbf{R}} \text{ t.q. } \text{ord}_{\mathbf{I}}(a_J) \rightsquigarrow \infty, \text{ lorsque } |J| \rightsquigarrow \infty.$$

Démonstration. D'après 1.4.22-0b un élément $z \in \mathbf{R}[\overline{X}]^\wedge$ est la somme s'une série de polynômes $\sum_{n \geq 0} P_n$ où $P_n \in \mathbf{I}^n \mathbf{R}[\overline{X}]$ est une somme finie de monômes $P_n = \sum a_{n,J} X^J$ avec $a_{n,J} \in \mathbf{I}^n$. On remarque alors que la famille $\{a_{n,J} X^J\}_{(n,J) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^r}$ est de Cauchy puisque pour $\epsilon > 0$ donné, il existe n_0 tel que $|a_{n,J}| < \epsilon$ si $n > n_0$ et si $n \leq n_0$ il n'y a qu'un nombre fini de monômes X^J dont les coefficients $a_{n,J}$ sont non nuls, à savoir les monômes dans les polynômes P_0, \dots, P_{n_0} . Par conséquent, si

$$\mathbf{K} \cap \left(\llbracket 0, n_0 \rrbracket \times \{J \mid |J| > \sup \{\deg(P_0), \dots, \deg(P_{n_0})\}\} \right) = \emptyset$$

$|\sum_{(n,J) \in \mathbf{K}} a_{n,J} X^J| < \epsilon$. Les familles $\{a_{n,J} X^J\}_{n,J}$ et $\{P_n\}_n$ sont donc sommables et de même somme $z \in \mathbf{R}[\overline{X}]^\wedge$ (1.4.18). De plus, pour chaque J donné, la famille $\{a_{n,J} X^J\}_n$ est une famille de Cauchy de \mathbf{R} (1.4.20) et représente donc un élément a_J de $\widehat{\mathbf{R}}$. Il est alors aisé de vérifier que la famille $\{a_J X^J\}_{J \in \mathbb{N}^r}$ est de Cauchy dans $\mathbf{R}[\overline{X}]^\wedge$ de somme z (laissé en exercice de même que l'unicité des décompositions). L'assertion (b) résulte de (a) modulo 1.4.12-0d. ■

1.4.24. Exercice. Montrer qu'un élément $z \in \mathbf{R}[X, 1/X]^\wedge$ s'exprime sous la forme

$$z = \left(\sum_{n \geq 0} a_n X^n \right) + \left(\sum_{n \geq 1} a_n X^{-n} \right)$$

et que cette écriture est unique. Une telle série est appelée «*série de Laurent*».

1.4.25. Exercice. Montrer qu'une algèbre quotient séparé d'une algèbre \mathbf{I} -adiquement complète est complète séparée

⁵ Pour un multi-indice $J \in \bigoplus_{\mathfrak{A}} \mathbb{N}$, on note $X^J = X_1^{n_1} \cdots X_r^{n_r}$, puis $|J| = n_1 + \cdots + n_r$. La notation $\sum_{J \in \bigoplus_{\mathfrak{A}} \mathbb{N}}$ fait alors référence à la somme d'une famille sommable d'ensemble d'indices $\bigoplus_{\mathfrak{A}} \mathbb{N}$.

1.5 Propriétés générales de la complétion I -adique formelle

Le théorème suivant donne une liste de propriétés de la complétion formelle que nous retrouverons plus tard dans un autre type de complétion, la complétion faible ou \dagger -adique (4.3.1). Ces propriétés jouent un rôle très important dans la théorie de la cohomologie de de Rham.

1.5.1. Théorème. *On suppose l'anneau \mathbf{R} noethérien.*

a) Les éléments de $\mathbf{I}^r \widehat{\mathbf{M}}$ sont les séries de Cauchy de \mathbf{M} à termes dans $\mathbf{I}^r \mathbf{M}$.

b) Les morphismes naturels suivants sont bijectifs

$$\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{I}^r \mathbf{M}} \rightarrow \text{coker} \left(\widehat{\mathbf{I}^r \mathbf{M}} \rightarrow \widehat{\mathbf{M}} \right) \rightarrow \frac{\widehat{\mathbf{M}}}{\mathbf{I}^r \widehat{\mathbf{M}}}.$$

En particulier $\mathbf{Gr}^*(\mathbf{M}) = \mathbf{Gr}^*(\widehat{\mathbf{M}})$ ⁽⁶⁾.

c) L'application $\text{id} : (\widehat{\mathbf{M}}; |_{-}|) \rightarrow (\widehat{\mathbf{M}}; \|\cdot\|)$ de 1.4.8 (p. 8) est une isométrie

d) On a un isomorphisme naturel

$$\widehat{\mathbf{M}} \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_r \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{I}^r \mathbf{M}}$$

e) Si \mathbf{A} est une \mathbf{R} -algèbre noethérienne et si \mathbf{M} est un \mathbf{A} -module, on a :

- $(\widehat{\mathbf{R}\mathbf{M}})$: le complété I -adique formel de \mathbf{M} en tant que \mathbf{R} -module,
- $(\widehat{\mathbf{A}\mathbf{M}})$: le complété $\mathbf{I}\mathbf{A}$ -adique formel de \mathbf{M} en tant que \mathbf{A} -module.

Le morphisme naturel $(\widehat{\mathbf{R}\mathbf{M}}) \rightarrow (\widehat{\mathbf{A}\mathbf{M}})$ est bijectif.

f) Si \mathbf{A} est une \mathbf{R} -algèbre noethérienne, $\widehat{\mathbf{A}}$ est noethérienne. ⁽⁷⁾

$$\mathbf{Alg}_{\text{tf}}(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{Alg}_{\text{noet.}}(\mathbf{R}) \xrightarrow[\simeq]{(-)} \mathbf{Alg}_{\text{noet.}}(\widehat{\mathbf{R}})$$

g) Si \mathbf{A} est une \mathbf{R} -algèbre, $\mathbf{I}\widehat{\mathbf{A}} \subseteq \text{Rad}(\widehat{\mathbf{A}})$, i.e. $z \in \widehat{\mathbf{A}}$ est inversible si et seulement si $\bar{z} \in \widehat{\mathbf{A}}/\mathbf{I}\widehat{\mathbf{A}}$ est inversible. De plus, si \mathbf{A} est noethérienne, $(\widehat{\mathbf{A}}, \mathbf{I}\widehat{\mathbf{A}})$ est de Zariski.

h) Si \mathbf{M} est un \mathbf{R} -module de type fini, le morphisme canonique $\widehat{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{M} \rightarrow \widehat{\mathbf{M}}$ est bijectif. En particulier, $\widehat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{M} = \widehat{\mathbf{M}}$ et le foncteur

$$\widehat{(-)} : \text{Mod}_{\text{tf}}(\mathbf{R}) \xrightarrow{\simeq} \text{Mod}_{\text{tf}}(\widehat{\mathbf{R}})$$

est exact.

⁶ Une « filtration (décroissante) » d'un \mathbf{R} -module \mathbf{M} est la donnée d'une famille de sous-modules $\mathcal{F} := \{\mathbf{M}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_i \supseteq \mathbf{M}_{i+1}$. Un module filtré se note aussi \mathbf{M}_* . La filtration est dite « séparée » si $\bigcap_i \mathbf{M}_i = \mathbf{0}$. Dans le cas des topologie I -adiques ces notions s'appliquent à la filtration $\{\mathbf{I}^i \mathbf{M}\}_{i \in \mathbb{N}}$. On appelle « module gradué associé au module filtré \mathbf{M}_* » la somme directe $\mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\mathbf{M}) := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{M}_i / \mathbf{M}_{i+1}$. Un « morphisme de \mathbf{R} -modules filtrés $\varphi_* : \mathbf{M}_* \rightarrow \mathbf{N}_*$ » est un morphisme $\varphi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ qui respecte la filtration, i.e. $\varphi(\mathbf{M}_i) \subseteq \mathbf{N}_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Un tel morphisme induit un morphisme $\mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\varphi) : \mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\mathbf{N})$. Un « anneau filtré » est un \mathbb{Z} -module filtré par une famille de parties (idéaux) $\{\mathbf{A}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \subseteq \mathbf{A}_{i+j}$. Si \mathbf{A}_* est un anneau filtré le module $\mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A})$ est muni d'une structure d'anneau en remarquant que si $\alpha \in \mathbf{A}_i / \mathbf{A}_{i+1}$ et $\beta \in \mathbf{A}_j / \mathbf{A}_{j+1}$ l'élément $ab \in \mathbf{A}_{i+j} / \mathbf{A}_{i+j+1}$ est indépendant des représentants $a, b \in \mathbf{A}$ des classes α, β , on pose donc $\alpha \cdot \beta := ab$, et $(\mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}), 0, \bar{1} \in \mathbf{A}_0 / \mathbf{A}_1, +, \cdot)$ est un anneau gradué, c'est « l'anneau gradué associé à l'anneau filtré \mathbf{A}_* ».

⁷ Cette assertion ne sera pas tout à fait vérifiée dans la complétion faible!

- i) Soit \mathbf{A} une \mathbf{R} -algèbre et soient $f, g \in \mathbf{A}$ tels que $D(\bar{g}) \subseteq D(\bar{f})$ dans $\text{Spec}(\mathbf{A}/\mathbf{IA})$, il existe alors un et un unique morphisme de \mathbf{A} -algèbres $\widehat{\rho}_{g,f} : \widehat{\mathbf{A}}_f \rightarrow \widehat{\mathbf{A}}_g$. De plus, si $\nu_f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_f$ et $\nu_g : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_g$ sont les morphismes de localisation, on a $\widehat{\nu}_g = \widehat{\rho}_{g,f} \circ \widehat{\nu}_f$.
- j) Si \mathbf{A} est une \mathbf{R} -algèbre de type fini, le morphisme naturel $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} \rightarrow \Omega_{\widehat{\mathbf{A}}/\mathbf{R}}$ induit un **isomorphisme**

$$\boxed{\widehat{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} \xrightarrow{\simeq} (\Omega_{\widehat{\mathbf{A}}/\mathbf{R}})_{\sigma}}$$

Indications

- a) Il est clair que tout élément de $\mathbf{I}^r \widehat{\mathbf{M}}$ se réalise comme série de Cauchy à termes dans $\mathbf{I}^r \mathbf{M}$. Réciproquement, si $\{t_1, \dots, t_\ell\}$ est un système de générateurs de \mathbf{I}^r , un élément $y \in \mathbf{I}^{r+t} \mathbf{M}$ s'écrit $\sum_{i=1}^{\ell} t_i y_i$ avec $y_i \in \mathbf{I}^t \mathbf{M}$ et donc $\text{ord}_{\mathbf{I}}(y_i) \geq \text{ord}_{\mathbf{I}}(y) - r$. Par conséquent, une série de Cauchy $\sum_{n \geq 0} x_n$ avec $x_n \in \mathbf{I}^r \mathbf{M}$ s'écrit aussi

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=1}^{\ell} t_i x_{n,i} \right) = \sum_{i=1}^{\ell} t_i \left(\sum_{n \geq 0} x_{n,i} \right)$$

où $\sum_{n \geq 0} x_{n,i}$ est de Cauchy puisque $\text{ord}_{\mathbf{I}}(x_{n,i}) \geq (\text{ord}_{\mathbf{I}}(x_n) - r) \rightsquigarrow +\infty$, donc $\sum_{n \geq 0} x_n \in \mathbf{I}^r \widehat{\mathbf{M}}$.

- b) L'assertion 0a montre l'égalité $\widehat{\mathbf{I}^r \mathbf{M}} = \mathbf{I}^r \widehat{\mathbf{M}}$ qui donne immédiatement la bijectivité de la deuxième flèche et l'injectivité de la première. Enfin, la surjectivité de $\mathbf{M} \rightarrow \widehat{\mathbf{M}}/\mathbf{I}^r \widehat{\mathbf{M}}$ est claire puisque d'après 0a une série de Cauchy modulo \mathbf{I}^r s'exprime comme somme finie d'éléments de \mathbf{M} donc comme un élément de \mathbf{M} .
- c) La proposition 1.4.8 a déjà donné l'inégalité $\|-\| \leq |-|$, autrement dit $\mathcal{B}_{|-|}(0; r) \subseteq \mathcal{B}_{\|-\|}(0; r)$. Réciproquement, un élément **non nul** w de $\mathcal{B}_{\|-\|}(0; r) \subseteq \widehat{\mathbf{M}}$ se représente par une suite de Cauchy $(x_n)_{n \geq 0}$ de \mathbf{M} qui ne converge pas vers zéro, et donc, telle que la suite $(|x_n|)_{n \geq 0}$ est stationnaire (1.4.4) et même **constante** car si $(y_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy, la différence $(y_n)_{n \geq 0} - (y_{n+N})_{n \geq 0}$ est une suite qui converge vers zéro. L'élément w se représente donc par une suite de Cauchy à termes dans $\mathbf{I}^r \mathbf{M}$, mais alors $w \in \mathbf{I}^r \widehat{\mathbf{M}} = \mathcal{B}_{|-|}(0; r)$ d'après 0a. Par conséquent $\mathcal{B}_{|-|}(0; r) = \mathcal{B}_{\|-\|}(0; r)$.
- d) L'assertion est équivalente à 1.4.22-0b. Autre preuve: — Le noyau du morphisme est $\mathbf{0} = \bigcap_r \mathbf{I}^r \widehat{\mathbf{M}}$ par 0b et 0c (cf. aussi 1.4.8) et la surjectivité se vérifie manuellement.
- e) Par 0d.
- f) L'assertion 0b affirme que les anneaux \mathbf{R} et $\widehat{\mathbf{R}}$, filtrés par la suite décroissante des puissance successives de \mathbf{I} , ont les mêmes gradués associés. On conclut alors à l'aide de deux résultats classiques⁽⁸⁾, “l'anneau gradué associé à un anneau noethérien est noethérien”, et “un anneau complet et séparé est noethérien si son gradué l'est”.
- g) Il suffit de vérifier que si $z \in \widehat{\mathbf{A}}$ et $y \in \mathbf{I}$, l'élément $1 - yz$ est inversible. Or, la série $\sum_{n \geq 0} (yz)^n$ converge dans $\widehat{\mathbf{A}}$ (car $\widehat{\widehat{\mathbf{A}}} = \widehat{\mathbf{A}}$) et $(1 - yz)(\sum_{n \geq 0} (yz)^n) = 1$. Ensuite, $\bar{z} \in \widehat{\mathbf{A}}/\mathbf{I}\widehat{\mathbf{A}}$ est inversible, si et seulement si, il existe $w \in \widehat{\mathbf{A}}$ tel que $wz \in 1 + \mathbf{I}\widehat{\mathbf{A}}$; or, nous avons vu que les éléments de $1 + \mathbf{I}\widehat{\mathbf{A}}$ sont tous inversibles. Enfin, si \mathbf{A} est noethérien, $\widehat{\mathbf{A}}$ l'est aussi (par 0f), et $(\widehat{\mathbf{A}}, \mathbf{I}\widehat{\mathbf{A}})$ est bien de Zariski.
- h) On procède un peu comme dans 0a. Si $\{m_1, \dots, m_r\}$ est un système de générateurs de \mathbf{M} , toute série de Cauchy $\sum_{n \geq 0} x_n$ s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^r (\sum_{n \geq 0} t_{i,n}) x_i$ avec $(\sum_{n \geq 0} t_{i,n}) \in \widehat{\mathbf{R}}$, et l'application $\widehat{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{M} \rightarrow \widehat{\mathbf{M}}$ est bien surjective. Ensuite, le $\widehat{\mathbf{R}}$ -module $\widehat{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{M}$ est séparé puisque

⁸ Voir [B₂] ch. III § 2.10 p. 183 et aussi [J] § 7.17 p. 456.

de type fini et que $\widehat{\mathbf{R}}$ est de Zariski (1.2.1-0j), mais alors et le morphisme $\widehat{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{M} \rightarrow \widehat{\mathbf{M}}$ est injectif s'il en est ainsi de son gradué, ce qui est évident.

- i) L'inclusion $D(\bar{f}) \supseteq D(\bar{g})$ équivaut à $\sqrt{(\bar{f})} \supseteq \sqrt{(\bar{g})}$ de sorte que \bar{f} est inversible dans $(\mathbf{A}/\mathbf{IA})_{\bar{g}}$. L'image de f par $\nu_g : \mathbf{A} \rightarrow \widehat{\mathbf{A}}_g$ est donc inversible (cf. 0g) d'où le morphisme induit $\rho_{g,f} : \mathbf{A}_f \rightarrow \widehat{\mathbf{A}}_g$ de complétion $\widehat{\rho}_{g,f}$.
- j) D'après 0e, le séparé \mathbf{I} -adique d'un $\widehat{\mathbf{A}}$ -module coïncide avec le séparé $\mathbf{I}\widehat{\mathbf{A}}$ -adique. D'autre part, comme \mathbf{A} est une \mathbf{R} -algèbre de type fini, $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}$ est un \mathbf{A} -module de type fini et donc $\widehat{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}^k$ est un $\widehat{\mathbf{A}}$ -module de type fini, \mathbf{I} -adiquement séparé en plus, puisque $\widehat{\mathbf{A}}$ est de Zariski (1.2.1-0j-01). Ainsi, l'assertion résultera, moyennant le critère de séparabilité 1.2.3, de vérifier que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{A}}}(\Omega_{\widehat{\mathbf{A}}/\mathbf{R}}^k, \mathbf{S}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{A}}}(\widehat{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}^k, \mathbf{S}) \quad (*)$$

induite par le morphisme canonique $\widehat{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} \rightarrow \Omega_{\widehat{\mathbf{A}}/\mathbf{R}}$ ⁽⁹⁾, est bijective pour tout $\widehat{\mathbf{A}}$ -module \mathbf{I} -adiquement séparé \mathbf{S} .

Lorsque $k = 1$, la propriété d'adjonction pour le module des différentielles relatives traduit la question de bijectivité de (*) en celle du morphisme canonique

$$\alpha : \mathrm{Der}_{\mathbf{R}}(\widehat{\mathbf{A}}; \mathbf{S}) \longrightarrow \mathrm{Der}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A}; \mathbf{S})$$

induit par $\iota(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \rightarrow \widehat{\mathbf{A}}$.

Notons $\{X_1, \dots, X_n\}$ un système de générateurs de \mathbf{A} en tant que \mathbf{R} -algèbre. Un élément de $\widehat{\mathbf{A}}$ s'écrit alors sous la forme $\sum_{n \geq 0} P_n(X_1, \dots, X_n)$ avec $P_n \in \mathbf{I}^n \mathbf{R}[\overline{X}]$ (cf. 1.4.22-0b). Ainsi, pour toute \mathbf{R} -dérivation $D : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{S}$, on a "formellement"

$$\begin{aligned} D\left(\sum_{n \geq 0} P_n(X_1, \dots, X_n)\right) &= \sum_{n \geq 0} D(P_n(X_1, \dots, X_n)) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^r \frac{\partial P_n}{\partial X_i}(X_1, \dots, X_n) D(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\partial P_n}{\partial X_i}(X_1, \dots, X_n)\right) D(X_i) \end{aligned} \quad (\diamond)$$

où chaque terme entre parenthèses appartient bien à $\widehat{\mathbf{A}}$, *i.e.* est une série de Cauchy de \mathbf{A} .

L'expression (\diamond) définit bien une application $\tilde{D} : \widehat{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{S}$ puisque $\sum_{n \geq 0} P_n = 0$, si et seulement si, les sommes partielles $\sum_{n \geq 0}^r P_n$ convergent vers 0, et cette dernière condition est évidemment préservée dans les suites des dérivées partielles $\sum_{n \geq 0}^r \frac{\partial P_n}{\partial X_i}$. On vérifie ensuite que \tilde{D} est \mathbf{R} -linéaire et que $\tilde{D}(z_1 x_2) = z_1 \tilde{D}(z_2) + z_2 \tilde{D}(z_1)$. On a ainsi défini une application \mathbf{R} -linéaire

$$\beta : \mathrm{Der}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A}; \mathbf{S}) \rightarrow \mathrm{Der}_{\mathbf{R}}(\widehat{\mathbf{A}}; \mathbf{S}), \quad \beta(D) := \tilde{D}.$$

La composée $\alpha \circ \beta$ est clairement l'identité, et α sera bijective si et seulement si $\beta \circ \alpha$ est injective. Or, pour $D \in \mathrm{Der}_{\mathbf{R}}(\widehat{\mathbf{A}}; \mathbf{S})$ la différence $\Delta := \widetilde{\alpha(D)} - D$ est nulle sur l'image de \mathbf{A} dans $\widehat{\mathbf{A}}$; cette image est dense dans $\widehat{\mathbf{A}}$, \mathbf{S} est séparé et Δ est continue, donc $\Delta = 0$ et $\beta \circ \alpha$ est l'identité. Ce qui termine la preuve de la bijectivité du morphisme $\widehat{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}^1 \rightarrow (\Omega_{\widehat{\mathbf{A}}/\mathbf{R}}^1)_{\sigma}$.

Lorsque $k > 1$, on a

$$\widehat{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}^k = \widehat{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{A}} \bigwedge_{\mathbf{A}}^k \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} = \bigwedge_{\widehat{\mathbf{A}}}^k \widehat{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} = \bigwedge_{\widehat{\mathbf{A}}}^k (\Omega_{\widehat{\mathbf{A}}/\mathbf{R}})_{\sigma} \rightarrow \left(\bigwedge_{\widehat{\mathbf{A}}}^k \Omega_{\widehat{\mathbf{A}}/\mathbf{R}}\right)_{\sigma}$$

et la flèche de droite est bijective par 1.2.3. ■

⁹ Voir les notes du cours "Cohomologie de de Rham dans la catégorie des Schémas" §1.5.

1.5.2. Exercice. Expliquer pourquoi 1.5.1-0j dit aussi que pour toute \mathbf{R} -algèbre de type fini \mathbf{A} l'application naturelle $\widehat{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}^* \xrightarrow{\cong} (\Omega_{\widehat{\mathbf{A}}/\widehat{\mathbf{R}}}^*)_{\sigma}$ est bijective. (Attention au ' $\widehat{\mathbf{R}}$ ' du second membre)

1.5.3. Exercice. Soit \mathbf{A} une \mathbf{R} -algèbre et $P \in \mathbf{A}[X]$. Donner des isomorphismes canoniques entre les algèbres

$$(\mathbf{A}[X]_P)^\wedge \quad (\widehat{\mathbf{A}}[X]_P)^\wedge \quad (((\widehat{\mathbf{A}}[X])^\wedge)_P)^\wedge$$

1.5.4. Exercice. Soient \mathbf{I}_1 et \mathbf{I}_2 deux idéaux de \mathbf{R} tels qu'il existe des entiers n_i avec $\mathbf{I}_1^{n_1} \subseteq \mathbf{I}_2$ et $\mathbf{I}_2^{n_2} \subseteq \mathbf{I}_1$. Montrer que pour tout \mathbf{R} -module \mathbf{M} les complétions \mathbf{I}_i -adiques de \mathbf{M} s'identifient canoniquement.

§2. Sur la topologie des limites projectives

2.1 Catégorie des systèmes projectifs

2.1.1. Systèmes projectifs. Dans ces notes un « *système projectif* » d'objets d'une catégorie \mathcal{C} est un foncteur contravariant de la catégorie \mathbb{N} ⁽¹⁰⁾ vers la catégorie \mathcal{C} . Ainsi, un système projectif dans \mathcal{C} est la donnée d'une famille d'objets $\{\mathbf{X}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et d'une famille de morphismes $\{\nu_n \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{X}_n)\}_n$ ce que l'on représente plus simplement par :

$$\cdots \xrightarrow{\nu_n} \mathbf{X}_n \xrightarrow{\nu_{n-1}} \mathbf{X}_{n-1} \xrightarrow{\nu_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\nu_2} \mathbf{X}_2 \xrightarrow{\nu_1} \mathbf{X}_1 \xrightarrow{\nu_0} \mathbf{X}_0$$

Un tel système sera noté $\{\mathbf{X}_n, \nu_n\}_n$.

2.1.2. Morphismes de systèmes projectifs. Un « *morphisme de systèmes projectifs* » de $\{\mathbf{X}_n, \nu_n\}_n$ vers $\{\mathbf{Y}_n, \mu_n\}_n$ est une famille de morphismes $\{\varphi_n \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)\}_n$ telle que le diagramme :

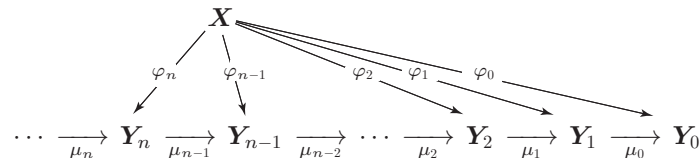
$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\nu_n} & \mathbf{X}_n & \xrightarrow{\nu_{n-1}} & \mathbf{X}_{n-1} & \xrightarrow{\nu_{n-2}} & \cdots & \xrightarrow{\nu_2} & \mathbf{X}_2 & \xrightarrow{\nu_1} & \mathbf{X}_1 & \xrightarrow{\nu_0} & \mathbf{X}_0 \\ & & \varphi_n \downarrow & & \varphi_{n-1} \downarrow & & & & \varphi_2 \downarrow & & \varphi_1 \downarrow & & \varphi_0 \downarrow \\ \cdots & \xrightarrow{\mu_n} & \mathbf{Y}_n & \xrightarrow{\mu_{n-1}} & \mathbf{Y}_{n-1} & \xrightarrow{\mu_{n-2}} & \cdots & \xrightarrow{\mu_2} & \mathbf{Y}_2 & \xrightarrow{\mu_1} & \mathbf{Y}_1 & \xrightarrow{\mu_0} & \mathbf{Y}_0 \end{array}$$

est commutatif.

Les systèmes projectifs d'objets de \mathcal{C} et leurs morphismes constituent une catégorie, la « *catégorie des systèmes projectifs de \mathcal{C}* » notée $\mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})$.

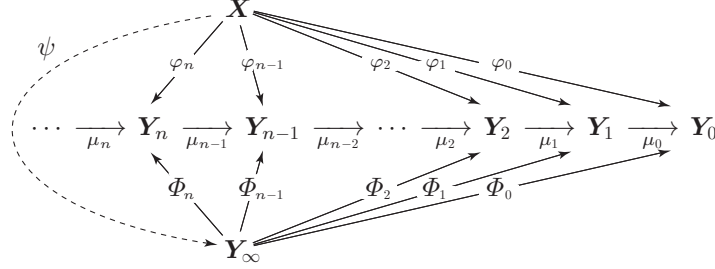
2.1.3. Limite projective. La correspondance de \mathcal{C} vers $\mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})$ qui fait correspondre à un objet \mathbf{X} le « *système projectif constant* » $\{\mathbf{X}_n = \mathbf{X}, \nu_n = \text{id}_{\mathbf{X}}\}_n$ et à un morphisme $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ le « *morphisme constant* » $\{\varphi_n = \varphi\}_n$ est un foncteur covariant $\iota(-) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})$.

On appelle « *morphisme de $\mathbf{X} \in \mathcal{C}$ vers un système projectif* » $\{\mathbf{Y}_n, \mu_n\}_n$ tout morphisme de $\iota(\mathbf{X})$ vers $\{\mathbf{Y}_n, \mu_n\}_n$, autrement dit toute famille de morphismes $\{\varphi_n : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}_n\}_n$ telle que $\varphi_n = \mu_n \circ \varphi_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



¹⁰ La « *catégorie associée à un ensemble partiellement ordonné $(\mathbf{E}; \preceq)$* » est la catégorie dont les objets sont les éléments $x \in \mathbf{E}$ et où $\text{Mor}(x_1, x_2)$ possède un unique élément lorsque $x_1 \preceq x_2$ et est vide autrement.

On dit que le système projectif $\{\mathbf{Y}_n, \mu_n\}_n$ admet une «*limite projective*» lorsqu'il existe $\mathbf{Y}_\infty \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et un morphisme $\{\Phi_n\}_n : \mathbf{Y}_\infty \rightarrow \{\mathbf{Y}_n, \mu_n\}_n$ tels que pour tout $\mathbf{X} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, tout morphisme $\{\varphi_n\}_n : \mathbf{X} \rightarrow \{\mathbf{Y}_n, \mu_n\}_n$ se factorise à travers un et un unique morphisme $\psi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}_\infty$, i.e. $\varphi_n = \Phi_n \circ \psi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



La proposition suivante est immédiate

2.1.4. Proposition et notation. *Le système projectif $\{\mathbf{Y}_n, \mu_n\}_n$ admet une limite projective, si et seulement si le foncteur d'ensembles $\text{Mor}_{\mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})}(\iota(-), \{\mathbf{Y}_n, \mu_n\}_n)$ est représentable. La limite projective de $\{\mathbf{Y}_n, \mu_n\}_n$, lorsqu'elle existe est donc unique à isomorphisme canonique près, elle sera notée $\varprojlim_n \{\mathbf{Y}_n, \mu_n\}_n$ et même $\varprojlim_n \mathbf{Y}_n$ lorsque les morphismes $\{\mu_n\}_n$ seront sous-entendus.*

2.1.5. Foncteur \varprojlim_n . On dit que la catégorie \mathcal{C} «*possède des limites projectives*» lorsque tout système projectif d'objets de \mathcal{C} admet une limite projective. Dans ce cas on dispose du foncteur $\varprojlim_n(-) : \mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C}) \rightsquigarrow \mathcal{C}$ adjoint à droite du foncteur $\iota(-) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})$, autrement dit l'application naturelle

$$\text{Mor}_{\mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})}(\iota(-), (-)) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}((-), \varprojlim_n(-))$$

est bijective.

2.1.6. Théorème. *Les catégories suivantes possèdent des limites projectives.*

- a) *La catégorie des ensembles **Ens**.*
- b) *La catégorie des espaces topologiques **Top**.*
- c) *Les catégories d'anneaux, d'algèbres, des modules sur un anneau.*

Démonstration. Soit $\{\mathbf{E}_n, \nu_n\}_n$ un système projectif d'ensembles. L'un des axiomes de la théorie des ensembles garantit l'existence de l'ensemble produit $\prod_n \mathbf{E}_n$. Notons $p_n : \prod_n \mathbf{E}_n \rightarrow \mathbf{E}_n$ la projection canonique. On vérifie alors aisément que le sous-ensemble $\mathbf{E}_\infty \subseteq \prod_n \mathbf{E}_n$ des suites $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\nu_n(e_{n+1}) = e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la famille d'applications $p_n : \mathbf{E}_\infty \rightarrow \mathbf{E}_n$ est une limite projective.

Si $\{\mathbf{T}_n, \nu_n\}_n$ un système projectif d'espaces topologiques, on muni l'ensemble $\prod_n \mathbf{T}_n$ de la «*topologie produit*», i.e. de la topologie la plus grossière rendant continues les projections canoniques; un ouvert de $\prod_n \mathbf{T}_n$ est alors une intersection finie de sous-ensembles de la forme $p_n^{-1}(U_n)$ où U_n est un ouvert de \mathbf{T}_n que l'on appelle «*ouvert élémentaire*» de $\prod_n \mathbf{T}_n$. L'ensemble $\varprojlim_n \mathbf{T}_n$ muni de la topologie induite par la topologie produit de $\prod_n \mathbf{T}_n$ est alors une limite projective dans la catégorie des espaces topologiques. En effet, étant donnée une famille d'applications continues $\{\varphi_n : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{T}_n\}_n$, l'application $\prod_n \varphi_n : \mathbf{X} \rightarrow \prod_n \mathbf{T}_n$, $x \mapsto \{\varphi_n(x)\}_n$, est continue puisque l'image inverse de l'ouvert élémentaire $p_n^{-1}(U_n)$ s'identifie à $\varphi_n^{-1}(U_n)$, ouvert par hypothèse.

Le cas des anneaux, algèbres et modules est laissé aux soins du lecteur. ■

2.1.7. Exercice. Montrer qu'une limite projective d'espaces topologiques séparés est séparée.

2.1.8. Proposition. Une suite décroissante de parties $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \supseteq \mathbf{X}_1 \supseteq \dots$ d'un ensemble (resp. espace topologique) \mathbf{X} défini de manière évidente un système projectif. Le sous-ensemble (resp. sous-espace) $\mathbf{X}_\infty = \bigcap_n \mathbf{X}_n$ muni des inclusions $\mathbf{X}_\infty \subseteq \mathbf{X}_n$ est une réalisation de $\varprojlim_n \mathbf{X}_n$.

Démonstration. La famille d'inclusions $\mathbf{X}_\infty \subseteq \mathbf{X}_n$ induit une application $\epsilon : \mathbf{X}_\infty \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{X}_n$ (continue dans le cas topologique) par la propriété universelle de la limite projective. L'application ϵ est injective, puisque la composée $\mathbf{X}_\infty \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{X}_n \xrightarrow{\phi_0} \mathbf{X}_0$ l'est, et surjective, puisque $\varprojlim_n \mathbf{X}_n$ se voit dans sa construction comme ensemble des suites constantes de terme (évidemment) dans \mathbf{X}_∞ . Ainsi, ϵ est bijective (bicontinue dans le cas topologique car ouverte). ■

2.2 Sur la topologie des complétions I -adiques formelles

2.2.1. Théorème. Soit M un R -module.

- L'isomorphisme $\widehat{M} = \varprojlim_n (M/I^n M)$ (1.5.1-0d) est un isomorphisme d'espaces topologiques. L'espace \widehat{M} est une limite projective d'espaces topologiques discrets et est « totalement discontinu »⁽¹¹⁾.
- Lorsque les modules $M/I^n M$ sont tous finis, le complété I -adique formel \widehat{M} est un espace topologique **compact** totalement discontinu.
- Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ l'anneau \mathbb{Z}_m , complété de \mathbb{Z} pour la topologie (m) -adique, appelé « anneau des entiers m -adiques » est compact et totalement discontinu.

Démonstration

- Nous avons déjà remarqué que la topologie I -adique de chaque $M/I^n M$ est discrète (ex. 1.1.5). D'autre part, la topologie I -adique de \widehat{M} est engendrée par les boules $\mathcal{B}(z; n)$ qui sont précisément les traces sur l'ensemble $\varprojlim_n M/I^n M$ de ouverts élémentaires de $\prod_n M/I^n M$.
Notons $\nu_n : \widehat{M} \rightarrow M/I^n M$ la projection canonique. Si $e_1 \neq e_2$ sont deux éléments de \widehat{M} , il existe N tel que $p_N(e_1) \neq p_N(e_2)$ et comme l'espace $M/I^n M$ est muni de la topologie discrète, il est réunion d'ouverts disjoints U_1, U_2 tels que $e_i \in U_i$, mais alors $\widehat{M} = p_N^{-1}(U_1) \amalg p_N^{-1}(U_2)$.
On en déduit que les seules parties connexes de \widehat{M} sont les singletons.
- c) Conséquence immédiate du théorème de Tykhonov.⁽¹²⁾ ■

2.2.2. Exercice. Montrer que \widehat{M} est compact si et seulement si M/IM est fini.

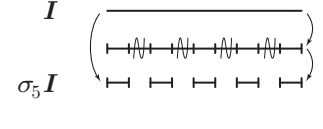
¹¹ On appelle ainsi un espace topologie dont les seules parties connexes sont les singletons.

¹² Le produit d'une famille quelconque de compacts muni de la topologie produit est un espace topologique compact.

2.3 Le cas des entiers p -adiques

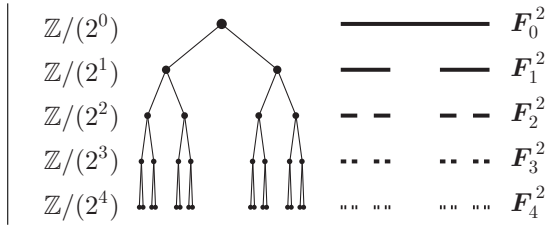
L'anneau \mathbb{Z}_m «des entiers (m)-adiques» a été introduit (2.2.1) comme le complété (séparé) (m)-adique de l'anneau des entiers \mathbb{Z} . Nous discutons dans cette section quelques unes de ses propriétés élémentaires.

2.3.1. \mathbb{Z}_m comme fermé totalement discontinu dans $[[0, 1]]$. On définit par récurrence une famille décroissante F_n^m de fermés de l'intervalle réel $[[0, 1]]$. Notons σ_m l'opérateur qui, appliqué à l'intervalle fermé $I = a + r[[0, 1]]$, donne les m sous-intervalles fermés

$$\sigma_m(a + r[[0, 1]]) = \prod_{i=1}^m \left(a + r \left[\frac{2i-2}{2m-1}, \frac{2i-1}{2m-1} \right] \right)$$


On étend ensuite la définition de σ_m à l'ensemble des réunions disjointes des sous-intervalles fermés de $[[0, 1]]$ en le faisant agir intervalle par intervalle.

On pose alors $F_0^m := [[0, 1]]$ et $F_{n+1}^m = \sigma_m(F_n^m)$. Le nombre $\pi_0(F_n^m)$ de composantes connexes de F_n^m est précisément m^n ce qui nous permet d'identifier $\mathbb{Z}/(m^n)$ à l'ensemble des extrémités de gauche de ces composantes et ceci de manière compatible aux applications $\nu_n : \mathbb{Z}/(m^{n+1}) \rightarrow \mathbb{Z}/(m^n)$ et $F_{n+1}^m \subseteq F_n^m$ (voir illustration) d'où l'inclusion $\iota_n : \mathbb{Z}/(m^n) \subseteq F_n^m$. Notons $p_n : F_n^m \rightarrow \mathbb{Z}/(m^n)$ la surjection qui fait correspondre à $x \in F_n^m$ l'extrémité gauche de la composante connexe de F_n^m contenant x . On munit $\mathbb{Z}/(m^n)$ de la topologie discrète et F_n^m de la topologie induite par \mathbb{R} , les applications ι_n et p_n sont alors continues et induisent des applications continues



$$\varprojlim_n \frac{\mathbb{Z}}{(m^n)} \xrightarrow{\varprojlim_n \iota_n} \varprojlim_n F_n^m \xrightarrow{\varprojlim_n p_n} \varprojlim_n \frac{\mathbb{Z}}{(m^n)}$$

dont la composée est l'identité puisque $p_n \circ \iota_n = \text{id}$ pour chaque n . Or, l'application $\varprojlim_n \iota_n$ est également surjective puisque $x \in \varprojlim_n F_n^m = \bigcap_n F_n^m$ (2.1.8) détermine pour chaque n la composante connexe de F_n^m à laquelle il appartient et donc l'extrémité gauche z_n de celle-ci ; l'élément x définit ainsi une famille $\{z_n \in \mathbb{Z}/(m^n)\}_n$ compatible aux applications ν_n , i.e. un élément $z \in \varprojlim_n \frac{\mathbb{Z}}{(m^n)}$ dont x est l'image par l'application $\varprojlim_n \iota_n$. On a ainsi démontré

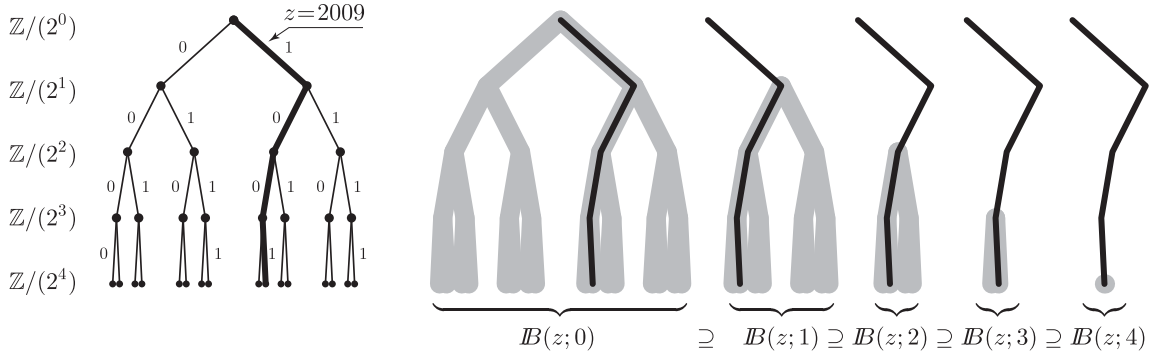
2.3.2. Proposition. Le complété (m)-adique de \mathbb{Z} , noté \mathbb{Z}_m , est homéomorphe au sous-espace compact et totalement discontinu $F^m = \bigcap_n F_n^m$ de l'intervalle réel $[[0, 1]]$.

2.3.3. Arbre des entiers m -adiques. Revenons à l'anneau des «entiers m -adiques» \mathbb{Z}_m (2.2.1-0c). On a $\mathbb{Z}_m = \varprojlim_n \mathbb{Z}/(m^n)$ (1.5.1-0d) et tout élément de \mathbb{Z}_m s'exprime d'une et d'une unique manière comme somme d'une série $\sum_n \theta_n m^n$ avec $\theta_n \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ (1.4.22-0b). L'itération de la division euclidienne permet la détermination de la suite $(\theta_n)_{n \geq 0}$. Par exemple, si $m = 2$, les divisions successives de 2009 par 2 donnent le tableau ci-contre, d'où le «développement diadique»

itération	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
nombre	2009	1004	502	251	125	62	31	15	7	3	1	0
reste de la division par 2	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	-

$$2009 = \sum_{n \geq 0} \theta_n 2^n = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^{10}$$

à ne pas confondre avec l'écriture en base 2 de 2009 qui se lit en sens inverse, à savoir 11111011001. Le dessin suivant illustre ce résultat numérique et la suite des boules centrées en $z = 2009$ (modulo 2^5).



2.3.4. Intégrité de \mathbb{Z}_m

Proposition. *L'anneau \mathbb{Z}_m est intègre si et seulement si m est une puissance d'un nombre premier.*

Preuve sous forme d'exercice

a) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{N}$ relativement premiers, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$1 + \alpha_n a^n \in b^n \mathbb{Z}$$

b) On munit \mathbb{Z} de la topologie (ab) -adique.

i) Montrer que la suite

$$(t_n(a))_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_0(a) = 1 \\ t_n(a) = \alpha_{2^0} \alpha_{2^1} \cdots \alpha_{2^n} a^{2^{n+1}} \end{cases}$$

est une suite de Cauchy de \mathbb{Z} qui ne converge pas vers zéro.

ii) En procédant de même pour b montrez que le produit des suites Cauchy $(t_n(a))_n \cdot (t_n(b))_n$ est nul dans \mathbb{Z}_{ab} . Conclure que \mathbb{Z}_{ab} n'est pas intègre.

c) Soit $I = (m) \subseteq \mathbb{Z}$. Montrer que $\text{ord}_I(_) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ est une valuation si et seulement si m est un nombre premier. En déduire une condition d'intégrité de \mathbb{Z}_m (cf. 1.3.8).

d) Conclure que \mathbb{Z}_m est intègre si et seulement si m est une puissance d'un nombre premier (cf. 1.5.4). ■

2.3.5. Anneaux de valuation discrète. On appelle ainsi tout anneau intègre principal ayant un unique idéal premier non nul (cf. [Ser] ch. I § 1,2).

Par exemple, si p est un nombre premier l'anneau \mathbb{Z}_p est un anneau de valuation discrète. En effet, son intégrité a été prouvée dans 2.3.4 et l'équivalence $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ (1.5.1-0b) montre que $p\mathbb{Z}_p$ est un idéal premier de \mathbb{Z}_p , et même que tout élément de valuation nulle est inversible (1.5.1-0g). Par conséquent, si l'on écrit $z \in \mathbb{Z}_p$ sous la forme $z = \sum \theta_n p^n$ avec $\theta_n \in \{0, \dots, p-1\}$ (1.4.22-0b), on voit que $z = p^{v_p(z)} u$ où u est un élément inversible de \mathbb{Z}_p . Les idéaux de \mathbb{Z}_p sont donc engendrés par les puissances de p et \mathbb{Z}_p est bien de valuation discrète.

2.3.6. Prolongement de la valuation p -adique. Nous avons les inclusions d'anneaux et corps

$$\boxed{\mathbb{Z} \underset{0}{\subseteq} \mathbb{Z}_{(p)} \underset{1}{\subseteq} \mathbb{Z}_p \underset{2}{\subseteq} \mathbb{Q}_p \underset{3}{\subseteq} \overline{\mathbb{Q}}_p \underset{4}{\subseteq} \mathbb{C}_p}$$

où 1 et 4 résultent de complétions topologiques alors que 0, 2 et 3 sont de nature algébrique. En effet, \mathbb{Z}_p est un anneau local d'idéal maximal $p\mathbb{Z}_p$ et le morphisme naturel $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$ se factorise canoniquement à travers le localisé $\mathbb{Z}_{(p)}$ ce qui donne les inclusions $\subseteq_{0,1}$. Ensuite, comme \mathbb{Z}_p est intègre, il s'injecte (\subseteq_2) dans son corps de fractions \mathbb{Q}_p lequel s'injecte à son tour (\subseteq_3) dans sa clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

La valuation $v_p : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{N}$ se prolonge à \mathbb{Q}_p car une fraction rationnelle s'écrit d'une manière unique sous la forme u/v avec u inversible dans \mathbb{Z}_p et $v \in \mathbb{Z}$; on pose alors $v_p(z) = m$ d'où la valuation $v_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Z}$ de valeur absolue associée $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}$. On démontre alors ([Ser]) que cette valeur absolue se prolonge d'une et une unique manière en une valeur absolue (ultramétrique) $|\cdot|_p : \overline{\mathbb{Q}}_p \rightarrow \mathbb{R}$ dont l'image est cette fois dense dans \mathbb{R} . Enfin, l'inclusion \subseteq_4 est l'inclusion de $(\overline{\mathbb{Q}}_p, |\cdot|_p)$ dans son complété topologique \mathbb{C}_p ; l'image de $|\cdot|_p : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{R}$ est alors la même que celle de $|\cdot|_p : \overline{\mathbb{Q}}_p \rightarrow \mathbb{R}$ (1.4.4). On démontre (*loc. cit.*) que \mathbb{C}_p est algébriquement clos.

2.3.7. Exercice. Montrer que $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ est localement compact.

§3. Remarques sur la cohomologie de de Rham en caractéristique zéro

Les techniques de complétion des sections précédentes trouvent l'une des principales motivations dans la problématique de la recherche d'une théorie cohomologique «à la de Rham» en caractéristique zéro pour les variétés (schémas en fait) algébriques en caractéristique positive. Nous allons regarder un exemple simple pour montrer à quel niveau la complétion intervient.

3.1 Cohomologies de de Rham associés à des ouverts principaux de $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$

L'anneau des fonctions régulières d'un ouvert principal de $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$ est de la forme $\mathbb{F}_p[X]_P$ avec $P \in \mathbb{F}_p[X]$, et la surjection canonique $\nu : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{F}_p[X]$, qui induit une surjection $\nu_{\tilde{P}} : \mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}} \rightarrow \mathbb{F}_p[X]_P$ pour chaque \tilde{P} vérifiant $\nu(\tilde{P}) = P$, identifie $\mathbb{F}_p[X]_P$ à la réduction modulo p de $\mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}}$, on dit alors que $\mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}}$ est un «relèvement (\mathbb{Z} -plat) de $\mathbb{F}_p[X]_P$ ». D'où l'idée de définir la cohomologie de de Rham (en caractéristique zéro) de l'ouvert $D(P) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$ comme la cohomologie de de Rham de l'une des algèbres $\mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}}$. Regardons d'un peu plus près cette idée.

3.1.1. Le cas $\tilde{P} = 1$. S'agissant de la cohomologie de l'espace affine, la nécessité de voir vérifié le lemme de Poincaré nous conduit à tensoriser le complexe de de Rham par le corps de fractions de l'anneau des coefficients. En effet, la cohomologie de $\Omega_{\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}}^*$, à savoir, la cohomologie du complexe à deux termes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \Omega_{\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}}^0 & \xrightarrow{d_0} & \Omega_{\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}}^1 & \rightarrow & \mathbf{0} \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \mathbb{Z}[X] & \xrightarrow{\partial/\partial X} & \mathbb{Z}[X] & & \end{array}$$

n'est jamais triviale en degré positif (X^n n'est pas la dérivée d'un polynôme si $n > 0$) alors que celle de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega_{\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}}^*$ l'est. Cette remarque est générale :

Proposition. *Pour toute algèbre A de caractéristique nulle, de corps de fractions K la cohomologie du complexe $K \otimes_A \Omega_{A[X]/A}^*$ est nulle en degrés positifs et s'identifie à K en degré 0.*

3.1.2. Le cas $\tilde{P} = 1 + pX$. Le polynôme \tilde{P} relève toujours $1 \in \mathbb{F}_p[X]$ et l'algèbre $\mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}}$ est un relèvement de $\mathbb{F}_p[X]$. Dans ce cas l'application $X \mapsto (Y - 1)/p$ identifie $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}}$ et $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}[Y]_Y$ de sorte que la cohomologie du complexe $\mathbb{Q} \otimes \Omega_{\mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}}/\mathbb{Z}}$ s'identifie à la cohomologie de la droite affine épointée, isomorphe à \mathbb{Q} en degré 1.

La cohomologie de de Rham (sur \mathbb{Q}) des algèbres $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Z}[X]_{1+pX}$ sont donc différentes, et ce procédé naïf de relèvement ne risque pas de produire des invariants cohomologiques pour les variétés en caractéristique positive.

3.1.3. Les anneaux de Zariski. Dans les exemples précédents, les polynômes \tilde{P} relèvent bien l'identité de $\mathbb{F}_p[X]$ mais ce qui les rend incomparables c'est le fait que l'un est inversible et l'autre non. Or, c'est précisément la propriété caractéristique des anneaux de Zariski d'assurer l'inversibilité des relèvement des éléments qui sont inversibles dans la réduction (1.5.1-0g), et c'est l'une caractéristique du procédé de complétion de fabriquer, fonctoriellement de surcroît, des anneaux de Zariski. Ainsi, et comme nous cherchons des relèvements d'algèbres de caractéristique p , nous sommes emmenés à nous intéresser à la complétion formelle p -adique où l'on a, toujours par 1.5.1-0g mais surtout par 1.5.1-0i, des égalités

$$\widehat{\mathbb{Z}[X]} = \widehat{\mathbb{Z}[X]_{1+pX}} = \widehat{\mathbb{Z}[X]_{1+pQ(X)}}, \quad \forall Q \in \mathbb{Z}[X].$$

Ces algèbres ⁽¹³⁾ fournissent, évidemment, la même cohomologie de de Rham, mais laquelle? Non pas celle du complexe de de Rham algébrique (car pathologique) mais plutôt celle du complexe de de Rham algébrique séparé (1.5.1-0j) et tensorisé par \mathbb{Q}_p pour tenir compte de 3.1.1. Nous sommes ainsi emmenés à comprendre la cohomologie du complexe à deux termes

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0} \rightarrow \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X]^\wedge \otimes_{\mathbb{Z}_p[X]} \Omega_{\mathbb{Z}_p[X]/\mathbb{Z}_p}^0 & \xrightarrow{d_0} & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X]^\wedge \otimes_{\mathbb{Z}_p[X]} \Omega_{\mathbb{Z}_p[X]/\mathbb{Z}_p}^1 \rightarrow \mathbf{0} \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X]^\wedge & \xrightarrow{\partial/\partial X} & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X]^\wedge \end{array} \quad (\ddagger)$$

3.1.4. Proposition. *L'image de la dérivation $\partial_X : \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X]^\wedge \rightarrow \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X]^\wedge$ ⁽¹⁴⁾ est le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel engendré par les séries $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ telles que*

$$\boxed{(v_p(a_n) - v_p(n+1)) \rightsquigarrow +\infty, \text{ lorsque } n \rightsquigarrow +\infty} \quad (\mathbf{C})$$

Démonstration. Les éléments de $\mathbb{Z}_p[X]^\wedge$ sont les séries $\sum_n b_n X^n$ avec $v_p(b_n) \rightsquigarrow +\infty$ d'après 1.4.23-0a, donc $z \in \partial_X \mathbb{Z}_p[X]^\wedge$ est une série $\sum_n a_n X^n$ avec $a_n = b_{n+1}(n+1)$ et alors $(v_p(a_n) - v_p(n+1)) \rightsquigarrow +\infty$. Réciproquement, étant donnée une série $z = \sum_n a_n X^n$ avec $a_n \in \mathbb{Q}_p$ et vérifiant la condition (C), ce qui implique que $a_n \in \mathbb{Z}_p$ pour $n \gg 0$, la série $\sum_n (a_n/(n+1))X^{n+1}$ a aussi ses coefficients dans \mathbb{Z}_p pour $n \gg 0$ et quitte à la multiplier par une puissance suffisante de p , non seulement tous ses coefficients sont dans \mathbb{Z}_p , en plus la série est de Cauchy et converge (donc) vers un élément $w \in \mathbb{Z}_p[X]^\wedge$. Ceci prouve que $p^{-N} \partial_X w = z$ pour $N \gg 0$. ■

¹³ Ces algèbres sont les mêmes que $(\mathbb{Z}_p[X])^\wedge = (\mathbb{Z}_p[X]_{1+pX})^\wedge = (\mathbb{Z}_p[X]_{1+pQ(X)})^\wedge, \quad \forall Q \in \mathbb{Z}_p[X]$.

¹⁴ La notation ∂_X est équivalente de $\frac{\partial}{\partial X}$.

3.1.5. Remarque. La proposition 3.1.4 et sa démonstration restent valables si l'on remplace \mathbb{Z}_p par un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique et de caractéristique résiduelle p .

3.1.6. Remarque. La condition (C) de la proposition précédente est plus forte que celle de convergence formelle qui demande seulement que $v_p(a_n) \rightsquigarrow +\infty$. Par exemple, la série $\sum_{i \geq 0} p^i X^{p^i - 1}$ est bien une série de Cauchy mais elle ne vérifie pas (C) puisque autrement la primitive

$$\int \sum_{i \geq 0} p^i X^{p^i - 1} = \sum_i p^i \frac{X^{p^i}}{p^i} = \sum_i X^{p^i}$$

serait sommable ce qui est de toute évidence impossible. Le complexe (†) possède donc bien de la cohomologie en degré un et c'est pour corriger ce défaut tout en gardant les bénéfices des anneaux de Zariski et les différentes fonctorialités des constructions jusqu'ici introduites que Dwork dans un premier temps et Monsky-Washnitzer ensuite ont introduit la notion de convergence faible.

3.1.7. La convergence faible. Une série $\sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbf{R}[X]^\wedge$ (1.4.23-0a) est dite «*faiblement convergente* (pour la topologie \mathbf{I} -adique)» s'il existe une constante positive C telle que

$$\boxed{n \leq C(\text{ord}_{\mathbf{I}}(a_n) + 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}} \quad (\mathbf{FC})$$

3.1.8. Proposition. Notons $\mathbf{R}[X]^\dagger$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}[X]^\wedge$ des séries faiblement convergentes.

- a) $\mathbf{R}[X]^\dagger$ est une \mathbf{R} -sous-algèbre de $\mathbf{R}[X]^\wedge$.
b) L'opérateur $\partial_X : \mathbb{Z}_p[X]^\wedge \rightarrow \mathbb{Z}_p[X]^\wedge$ induit une **surjection** $\partial_X : \mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Z}_p[X]^\dagger \rightarrow \mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Z}_p[X]^\dagger$ de noyau les séries constantes $\mathbb{Q}_p \cdot 1$.

Démonstration

- a) Si $z_1 = \sum_n a_n X^n$ et $z_2 = \sum_n b_n X^n$ sont faiblement convergentes, on prend la même constante C dans la condition **FC** pour les deux séries. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_p(a_n + x b_n) \geq \inf\{v_p(a_n), v_p(b_n)\} \geq C^{-1}n - 1$$

et la série $z_1 + x z_2$ est faiblement convergente, donc $\mathbf{R}[X]^\dagger$ est un sous- \mathbf{R} -module de $\mathbf{R}[X]^\wedge$. Le produit $z_1 z_2$ est la somme de la famille $\{a_n b_m X^{n+m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ (de Cauchy!). Notons $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ alors

$$v_p(c_k) \geq \inf\{v_p(a_i b_{k-i})\} = \inf\{v_p(a_i) + v_p(b_{k-i})\} \geq C^{-1}k - 2$$

donc $k \leq C(v_p(c_k) + 2) \leq 2C(v_p(c_k) + 1)$ et la série $z_1 z_2 = \sum_k c_k X^k$ est faiblement convergente.

- b) Si $\sum_n a_n X^n$ est faiblement convergente la condition (C) de la proposition 3.1.4 est

$$v_p(a_n) - v_p(n+1) \geq C^{-1}n - 1 - v_p(n+1) \geq C^{-1}n - 1 - \log_p(n+1)$$

et il est bien connu que la fonction $t \mapsto C^{-1}t - 1 - \log_p(t+1)$ tend vers $+\infty$ avec $t \in \mathbb{R}$. Il existe donc N tel que $p^N \sum_n a_n (n+1)^{-1} X^{n+1}$ appartient à $\mathbb{Z}_p[X]^\wedge$. Or, on a

$$v_p(a_n (n+1)^{-1}) = v_p(a_n) - v_p(n+1) \geq C^{-1}n - 1 - \log_p(n+1) \geq D^{-1}n - 1$$

si et seulement si $(C^{-1} - D^{-1})n \geq \log_p(n+1)$, et cette condition est vérifiée pour chaque $D > C$,

pour tout n assez grand (dépendant de D). Pour un tel choix de D il existe donc n_0 tel que

$$n \leq D(v_p(p^N a_n(n+1)) + 1), \text{ pour tout } n > n_0.$$

Mais alors la série $p^N \sum_n a_n(n+1)^{-1} X^{n+1}$ vérifie la condition **(FC)** avec la constante $C = \sup\{D, n_0\}$.

La détermination de $\ker(\partial_X)$ est laissée en exercice (cf. 1.4.23-0a). ■

3.1.9. Remarque. L'assertion 3.1.8-0b et sa démonstration restent valables si l'on remplace \mathbb{Z}_p par un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique et de caractéristique résiduelle p .

3.1.10. Remarque. On aura remarqué par la preuve de 3.1.8, l'équivalence entre **(FC)** et la condition

$$\boxed{\text{il existe } C, C' \in \mathbb{R}_+^* \text{ tels que } n \leq C \operatorname{ord}_I(a_n) + C', \text{ pour } n \gg 0} \quad \text{(FC')}$$

3.1.11. Commentaire. Les complétions formelles $\widehat{\mathbf{A}}$ des \mathbf{R} -algèbres de type fini \mathbf{A} ont le propriété fondamentale d'être de Zariski et de dépendre fonctoriellement de \mathbf{A} , mais la cohomologie de leurs complexes de de Rham séparés ne fournit pas les bons nombres de Betti. Les sous-algèbres \mathbf{A}^\dagger des séries faiblement convergentes de $\widehat{\mathbf{A}}$, corrigent ce défaut, mais pour qu'elles soient utiles pour une *théorie* cohomologique il faudra en donner une définition fonctorielle et prouver qu'elles vérifient la propriété d'être de Zariski. La section 4 est destinée à cette question où l'analogie des propriétés générales de la complétion formelle (th. 1.5.1) est démontré pour la complétion faible, ce qui est assez remarquable. Nous verrons aussi que pour une \mathbf{R} -algèbre de type fini \mathbf{A} , on a toujours $(\Omega_{\mathbf{A}^\dagger/\mathbf{R}}^*)_\sigma = \mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}^*$. On définira alors la « *cohomologie de de Rham †-adique* » d'une \mathbf{R} -algèbre de type fini \mathbf{A} par

$$H_{\text{DR}}^*(\mathbf{A}^\dagger/\mathbf{K}) := h^*(\mathbf{K} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{A}^\dagger \otimes \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}^*)$$

où \mathbf{K} désigne le corps des fractions de \mathbf{R} .

Les considérations du paragraphe 3.1.3 seront alors valables pour la complétion faible des algèbres $\mathbb{Z}_p[X]_{\widehat{P}}$ et la cohomologie de de Rham p -adique d'un ouvert principal $D(P) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$ sera, par définition,

$$H_{\text{DR}}(D(P)/\mathbb{Q}_p) := H_{\text{DR}}(\mathbb{Z}_p[X]_{\widehat{P}}^\dagger/\mathbb{Q}_p),$$

indépendante du relèvement \widetilde{P} de P . La proposition 3.1.8-0b montre déjà que cette définition donne les bons nombres de Betti pour $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$.

3.1.12. Heuristique autour du rayon de convergence. Pour chaque $a \in \widehat{\mathbf{R}}$, la complétion formelle du morphisme $\mathbf{R}[X] \rightarrow \widehat{\mathbf{R}}, P(X) \mapsto P(a)$, d'« *évaluation d'un polynôme en a* », donne le morphisme $\mathbf{R}[X]^\wedge \rightarrow \widehat{\mathbf{R}}, z \mapsto z(a)$, d'« *évaluation des séries en a* ». Une série $z \in \mathbf{R}[X]^\wedge$ définit ainsi une application $z : \widehat{\mathbf{R}} \rightarrow \widehat{\mathbf{R}}, a \mapsto z(a)$ de manière analogue aux séries entières sur \mathbb{C} .

Plus généralement, si $(\mathbf{A}, |\cdot|)$ est une \mathbf{R} -algèbre valuée non archimédienne complète, pour $a \in \mathbf{A}$ et chaque série de Cauchy $z = \sum_{n \geq 0} x_n X^n$, la série $\sum_{n \geq 0} x_n a^n$ est de Cauchy, et donc converge dans \mathbf{A} , si et seulement si la suite $|x_n| |a|^n$ converge vers zéro. En particulier, la convergence de la série dépend uniquement de la valeur absolue de $a \in \mathbf{A}$. Le « *domaine de définition* » de $z : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, i.e. l'ensemble des $a \in \mathbf{A}$ tels que la série $\sum_{n \geq 0} x_n a^n$ converge, est par conséquent une boule de \mathbf{A} centrée à l'origine.

Définition. On appelle «rayon de convergence» d'une série $z = \sum_{n \geq 0} x_n X^n$, et on note $\mathcal{R}(z)$, la borne supérieure de l'ensemble des $\rho \in \mathbb{R}^+$ tels que la suite $(|x_n| \rho^n)_{n \geq 0}$ converge vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$. On dit que «la série z converge en a » si la série $z(a) := \sum_n x_n a^n$ converge.

3.1.13. Proposition. Avec les données en cours,

a) Le rayon $\mathcal{R}(z)$ de la série $z = \sum_n x_n X^n$ est donnée par la formule ⁽¹⁵⁾

$$\mathcal{R}(z) = \liminf_n \frac{1}{\sqrt[n]{|x_n|}}$$

b) Si $|a| < \mathcal{R}(z)$ la série $z(a) = \sum_{n \geq 0} x_n a^n$ converge; si $|a| > \mathcal{R}(z)$ la série $z(a)$ ne converge pas; si $|a| = \mathcal{R}(z)$ on ne peut rien dire, mais si $z(a)$ converge, la série $z(b)$ converge dès que $|b| \leq |a|$.

Indication. Notons $\mathcal{R}_0(x)$ (resp. $\mathcal{R}_b(z)$) l'ensemble des $\rho \in \mathbb{R}_+$ tels que la suite $(|x_n| \rho^n)_{n \geq 0}$ tend vers 0 (resp. est bornée). On a bien $\mathcal{R}_0(z) \subseteq \mathcal{R}_b(z)$. Inversement, si $(|x_n| \rho_0^n)_{n \geq 0}$ est bornée, pour tout $\rho_1 < \rho_0$ on a $(|x_n| \rho_1^n)_{n \geq 0} = (|x_n| \rho_0^n (\rho_1/\rho_0)^n)_{n \geq 0}$ et donc $\rho_1 \in \mathcal{R}_0(z)$. Les bornes supérieures de ces deux ensembles sont donc bien égales. Or, $|x_n| \rho^n < C$ pour tout n équivaut à

$$\rho \leq \frac{\sqrt[n]{C}}{\sqrt[n]{|x_n|}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et la conclusion s'ensuit. L'assertion (b) est laissée en exercice. ■

3.1.14. Remarque. L'analogie avec le cas des séries entières est évident, mais il faut bien retenir une différence importante: dans le cas d'une valeur absolue non archimédienne, si une série converge en un point, elle converge en chaque point du cercle centré à l'origine contenant ce point.

3.1.15. Exercice. Donner une condition sur la constante C dans (FC) (1.4.23-0a) pour que $\mathcal{R}(z) > r > 1$.

3.1.16. Rayon et domaine de convergence. Dans ce qui précède nous avons défini le rayon de convergence d'une série mais nous n'avons encore rien dit à propos du «domaine de convergence d'une série». En effet, la valuation \mathbf{I} -adique étant à valeurs entières, les valeurs absolues associées sont discrètes. Par exemple, la série $\sum p^n X^n$ a un rayon de convergence égal à p ⁽¹⁶⁾ mais il n'existe aucun élément de \mathbb{Z}_p de valeur absolue plus grande que 1 et notre série converge sur \mathbb{Z}_p tout entier. Par contre, si nous nous plaçons sur \mathbb{Q}_p (2.3.6), la valuation p -adique $v_p(-) : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Z}$ est surjective et l'ensemble des valeurs absolues atteintes est $\{p^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, le cercle de rayon p est maintenant plus grand que celui de rayon 1, mais la série n'y converge pas car $\sum_n p^n (1/p)^n$ n'est de toute évidence pas convergente. Or, dans \mathbb{Q}_p le disque de rayon p privé du cercle de même rayon est le disque de rayon 1 donc exactement \mathbb{Z}_p ; il n'y a donc dans \mathbb{Q}_p aucun élément de valeur absolue plus grande que 1 rendant convergente notre série de rayon p . Il faut passer à la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ de \mathbb{Q}_p pour trouver assez de points pour que l'affirmation «Pour tout $\epsilon > 0$ il existe a tel que $0 \leq \mathcal{R}(z) - |a| < \epsilon$ et $\sum_n x_n a^n$ converge» soit vérifiée. En effet, l'application $|-| : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}$ est maintenant d'image dense. Par exemple, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\xi_n := \sqrt[n+1]{p^{-n}} \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ d'où

¹⁵ Formule dite «de Hadamard» cf. [C] I.§2.3 p. 20.

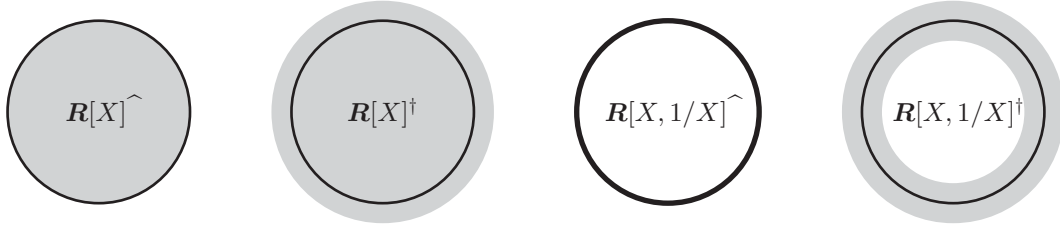
¹⁶ Dans le cas p -adique on pose $|x| = p^{-v_p(x)}$, donc $|p| = 1/p$.

$|\xi| = \sqrt[n+1]{p^n} < p$ et donc $|\xi_n| \rightsquigarrow p$ lorsque $n \rightsquigarrow +\infty$. Remarquons, pour terminer, que le passage de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ à \mathbb{C}_p ne fournit pas plus de valeurs absolues (1.4.4).

La conclusion de ces remarques est que, si le rayon de convergence d'une série est toujours bien défini, les assertions concernant son domaine de convergence peuvent exiger des extensions de l'espace pour prendre tout leur sens. La proposition suivante est un exemple typique de cette remarque.

3.1.17. Proposition

- a) Les séries $z \in \mathbf{R}[X]^\wedge$ sont les séries telles que $\mathcal{R}(z) \geq 1$ et qui convergent sur le cercle unité.
- b) Les séries $z \in \mathbf{R}[X]^\dagger$ sont les séries telles que $\mathcal{R}(z) > 1$.
- c) Les séries $z \in \mathbf{R}[X, 1/X]^\wedge$ sont les séries qui convergent sur le cercle unité.
- d) Les séries $z \in \mathbf{R}[X, 1/X]^\dagger$ sont les séries qui convergent sur une couronne autour du cercle unité.



Démonstration

- a) Une série $z = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ converge pour $X = 1$, si et seulement si $|a_n| \rightsquigarrow 0$, donc si et seulement si $z \in \mathbf{R}[X]^\wedge$.
- b) Dans une série $z = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ l'inégalité $n \leq C(\text{ord}_I(a_n) + 1)$ (FC) équivaut à $|a_n|_s \leq s s^{-n/C}$ (on rappelle que $s > 1$ (cf. 1.3)) auquel cas

$$\mathcal{R}(z) = \liminf_n \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|_s}} \geq s^{1/C} > 1.$$

- c-d) Les éléments de $\mathbf{R}[X, 1/X]$ sont les «*polynômes de Laurent*» i.e. sommes de deux polynômes $P(X) + Q(1/X)(1/X)$. Toute série à termes dans $\mathbf{R}[X, 1/X]$ se décompose alors en somme de deux séries $z = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ et $w = \sum_{n \geq 1} b_n (1/X)^n$; le domaine de convergence de $z + w$ est donc l'intersection des domaines respectifs de z et de w . D'après 1.4.24, $z + w \in \mathbf{R}[X]^\wedge$ si et seulement si $z \in \mathbf{R}[X]^\wedge$ et $w \in \mathbf{R}[1/X]^\wedge$ et l'on applique (a). La même idée prouve (d). ■

§4. Complétion †-adique

Les paragraphes §1,2 de [MW] et §0,1 de [M] constituent une très bonne référence pour cette section.

4.1 Complété †-adique des algèbres

4.1.1. Définition. Pour toute \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} , Monsky et Washnitzer définissent dans [MW] «*la complétion I-adique faible* \mathbf{A}^\dagger » que nous appellerons aussi «*complétion †-adique*», comme le sous-ensemble du complété (séparé) I-adique $\widehat{\mathbf{A}}$ de \mathbf{A} , des éléments z admettant une représentation

comme somme infinie :

$$z = \sum_{n \geq 0} P_n(x_1, \dots, x_\ell)$$

(l'entier r et les éléments x_1, \dots, x_ℓ sont fixes et indépendants de n mais dépendent de z) dans laquelle :

$$\begin{cases} \text{(a)} & x_1, \dots, x_\ell \in \mathbf{A}; \\ \text{(b)} & P_n \in \mathbf{I}^n \cdot \mathbf{R}[X_1, \dots, X_\ell], \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}; \\ \text{(c)} & \text{Il existe une constante } C \in \mathbb{R}_+, \text{ telle que } \deg P_n \leq C(n+1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (\mathbb{F}\mathbb{C})$$

4.1.2. Exercice. Montrer que si $z = \sum_{n \geq 0} P_n(x_1, \dots, x_\ell)$ vérifie les conditions $\mathbb{F}\mathbb{C}$ et si $x_i = Q_i(y_1, \dots, y_m)$ avec $Q_i \in \mathbf{R}[\bar{Y}] := \mathbf{R}[Y_1, \dots, Y_m]$, la somme $\sum_{n \geq 0} \tilde{P}_i(y_1, \dots, y_m)$, où $\tilde{P}_i(\bar{Y}) := P_y(Q_1(\bar{Y}), \dots, Q_\ell(\bar{Y}))$ vérifie aussi les conditions $\mathbb{F}\mathbb{C}$ (bien que la constante C puisse changer).

4.1.3. La proposition suivante exprime les éléments de \mathbf{A}^\dagger à l'aide des représentations des éléments de $\widehat{\mathbf{A}}$ en séries géométriques à plusieurs variables (*cf.* corollaire 1.4.23-0b).

4.1.4. Proposition. Avec les notation en cours, les éléments de \mathbf{A}^\dagger sont les éléments $z \in \widehat{\mathbf{A}}$ pour lesquels il existe une famille finie $\{\xi_1, \dots, \xi_\ell\}$ d'éléments de \mathbf{A} (dépendant de z) telle que

$$z = \sum_{J \in \mathbb{N}^\ell} a_J \xi^J, \text{ avec } a_J \in \widehat{\mathbf{R}} \text{ et } |J| \leq C(\text{ord}_{\mathbf{I}}(a_J) + 1), \quad (\mathbb{F}\mathbb{C}\star)$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}_+$ (dépendant de z).

Démonstration. Soit $z \in \mathbf{A}^\dagger$ et $z = \sum_{n \geq 0} P_n(x_1, \dots, x_\ell)$ une représentation de z vérifiant $(\mathbb{F}\mathbb{C})$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n = \sum_{J \in \mathbb{N}^\ell} a_{n,J} X^J$ le développement de $P_n \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_\ell]$ en somme de monômes. La famille $\mathcal{F} := \{a_{n,J} x^J \neq 0\}_{(n,J) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\ell}$ est une famille sommable de $\widehat{\mathbf{A}}$ de somme z . En effet, si $\varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que $|z - \sum_{n=0}^{N_\varepsilon+r} P_n(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon$, quel que soit $r \in \mathbb{N}$, et nous pouvons même prendre N_ε assez grand pour avoir, en plus, $|a_{n,J}| < \varepsilon$ pour tout $n > N_\varepsilon$ et ceci grâce à la condition (b) de $(\mathbb{F}\mathbb{C})$. La famille $\mathbf{F}(\varepsilon) := \{a_{n,J} x^J\}_{n \leq N_\varepsilon} \subseteq \mathcal{F}$ est finie puisqu'elle ne concerne qu'un nombre fini de polynômes P_n et que chacun d'eux fournit au plus un nombre fini de coefficients $a_{n,J}$ non nuls. Maintenant, pour toute sous-famille finie $\mathbf{F} \subseteq \mathcal{F}$ telle que $\mathbf{F} \supseteq \mathbf{F}(\varepsilon)$, on a par non archimédiannité :

$$\begin{aligned} \left| z - \sum_{\mathbf{F}} a_{n,J} x^J \right| &= \left| \left(z - \sum_{\mathbf{F}(\varepsilon)} a_{n,J} x^J \right) + \sum_{(n,J) \in \mathbf{F} \setminus \mathbf{F}(\varepsilon)} a_{n,J} x^J \right| \\ &\leq \sup \left\{ \left| z - \sum_{\mathbf{F}(\varepsilon)} a_{n,J} x^J \right|, |a_{n,J} x^J| \text{ t.q. } a_{n,J} x^J \in \mathbf{F} \setminus \mathbf{F}(\varepsilon) \right\} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve de la sommabilité de \mathcal{F} . Nous pouvons donc regrouper les termes de la série double $\sum_{n \geq 0} \sum_{J \in \mathbb{N}^\ell} a_{n,J} x^J$ sans en modifier la somme (*cf.* 1.4.18-0a), on a donc :

$$z = \sum_{J \in \mathbb{N}^\ell} \left(\sum_{n \geq 0} a_{n,J} \right) x^J,$$

où bien évidemment $(\sum_{n \geq 0} a_{n,J}) \in \widehat{\mathbf{R}}$, pour tout $J \in \mathbb{N}^\ell$.

Cela étant, dans les développements $P_n = \sum_{n \geq 0} a_{n,J} X^J$, la condition (c) de (FC) donne

$$|J| \leq \deg P_n \leq C(\text{ord}_I(a_{n,J}) + 1) \leq C(\text{ord}_I(\sum_n a_{n,J}) + 1), \quad \forall J \in \mathbb{N}^\ell,$$

puisque $\text{ord}_I(\sum_n a_{n,J}) \geq \inf_n \{\text{ord}_I(a_{n,J})\}$ (cf. 1.5.1-0a), et l'égalité

$$z = \sum_{J \in \mathbb{N}^\ell} a_J x^J, \quad \text{avec } a_J := \sum_{n \geq 0} a_{n,J},$$

est bien de la forme (FC★).

Réciproquement, soit $z \in \widehat{\mathbf{A}}$ vérifiant

$$z = \sum_{J \in \mathbb{N}^\ell} a_J \xi^J, \quad \text{avec } a_J \in \widehat{\mathbf{R}} \text{ et } |J| \leq C(\text{ord}_I(a_J) + 1), \quad (\diamond)$$

pour une certaine famille finie $\{\xi_1, \dots, \xi_\ell\} \subseteq \mathbf{A}$ et une certaine constante $C \in \mathbb{R}_+$.

Fixons pour chaque $J \in \mathbb{N}^\ell$, une égalité de la forme (cf. 1.4.22-0b et 1.5.1-0a)

$$a_J = \sum_{n \geq 0} a_{n,J}, \quad \text{avec } a_{n,J} \in \mathbf{I}^n \text{ et } a_{n,J} = 0 \text{ si } n < \text{ord}_I(a_J). \quad (\diamond\diamond)$$

La famille $\{a_{n,J} \xi^J\}$ est alors sommable de somme z (laissé en exercice) et nous pouvons regrouper les termes de la série double $\sum_{J \in \mathbb{N}^\ell} \sum_{n \geq 0} a_{n,J} x^J$ sans en modifier la somme, on a donc

$$z = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{J \in \mathbb{N}^\ell} a_{n,J} \xi^J \right),$$

où les termes entre parenthèses sont polynomiaux puisque, pour n donné, si nous avons $a_{n,J} \neq 0$, on a $\text{ord}_I(a_J) \leq n$ par ($\diamond\diamond$), et alors $|J| \leq C(n+1)$ par (\diamond). On pose alors

$$P_n(X_1, \dots, X_n) = \left(\sum_{J \in \mathbb{N}^\ell} a_{n,J} X^J \right) \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n].$$

On a clairement $P_n \in \mathbf{I}^n \mathbf{R}[\overline{X}]$ d'après le choix de $a_{n,J}$ dans ($\diamond\diamond$) et, d'autre part, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\deg(P_n) \leq \sup\{|J| \mid a_{n,J} \neq 0\} \leq C(n+1),$$

comme nous l'avons remarqué quelques lignes plus haut. Par conséquent, on a bien une expression de la forme

$$z = \sum_n P_n(\xi_1, \dots, \xi_\ell),$$

vérifiant les conditions (FC). ■

4.1.5. Exercice. Montrer que l'inclusion $\mathbf{R}^\dagger \subseteq \widehat{\mathbf{R}}$ est une égalité.

4.1.6. Proposition

- a) Les éléments de $\mathbf{I}^r \mathbf{A}^\dagger$ sont séries de \mathbf{A}^\dagger à termes dans $\mathbf{I}^r \mathbf{A}$.
- b) Le morphisme naturel $\mathbf{A}/\mathbf{I}^r \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger/\mathbf{I}^r \mathbf{A}^\dagger$ est bijectif et $\mathbf{Gr}^*(\mathbf{A}) = \mathbf{Gr}^*(\mathbf{A}^\dagger)$ (cf. ⁽⁶⁾ p. 14).
- c) Le morphisme canonique $\iota(\mathbf{A}^\dagger) : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow (\mathbf{A}^\dagger)^\dagger$ est bijectif.
- d) Le complété †-adique d'une \mathbf{R} -algèbre est une \mathbf{R} -sous-algèbre (\mathbf{I} -adiquement séparée) de $\widehat{\mathbf{A}}$.
- e) Si $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ est un morphisme de \mathbf{R} -algèbres, l'image de \mathbf{A}^\dagger par $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathbf{A}} \rightarrow \widehat{\mathbf{B}}$ est contenu dans \mathbf{B}^\dagger . Le morphisme $\varphi^\dagger : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$ défini par restriction de $\widehat{\varphi}$ est l'unique morphisme rendant

commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{\iota(\mathbf{A})} & \mathbf{A}^\dagger & \xrightarrow{\subseteq} & \widehat{\mathbf{A}} \\ \varphi \downarrow & & \varphi^\dagger \downarrow & & \widehat{\varphi} \downarrow \\ \mathbf{B} & \xrightarrow{\iota(\mathbf{B})} & \mathbf{B}^\dagger & \xrightarrow{\subseteq} & \widehat{\mathbf{B}} \end{array} \quad (\ddagger\ddagger)$$

f) La correspondance $(-)^{\dagger} : \mathbf{Alg}_{\text{tf}}(\mathbf{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Alg}_{\sigma}(\mathbf{R})$ (¹⁷) qui fait correspondre $\mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{A}^\dagger$ et φ^\dagger est fonctorielle, c'est le «foncteur de complétion \dagger -adique». Le diagramme $(\ddagger\ddagger)$ est fonctoriel.

Indications. Pour (a,b), on suit de près la preuve de 1.5.1-0a. Il est tout d'abord clair que tout élément de $\mathbf{I}^r \mathbf{A}^\dagger$ se réalise comme série de la forme $\mathbb{F}\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{F}\mathbb{C}^\star$) à coefficients dans $\mathbf{I}^r \mathbf{A}^\dagger$ l'inclusion $\mathbf{A}^\dagger \subseteq \widehat{\mathbf{A}}$ induit donc une application $\mu_r : \mathbf{A}^\dagger / \mathbf{I}^r \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \widehat{\mathbf{A}} / \mathbf{I}^r \widehat{\mathbf{A}}$ dont la composition avec le morphisme naturel $\nu_r : \mathbf{A} / \mathbf{I}^r \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger / \mathbf{I}^r \mathbf{A}^\dagger$, à savoir la composition

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}^r \mathbf{A}} \xrightarrow{\nu_r} \frac{\mathbf{A}^\dagger}{\mathbf{I}^r \mathbf{A}^\dagger} \xrightarrow{\mu_r} \frac{\widehat{\mathbf{A}}}{\mathbf{I}^r \widehat{\mathbf{A}}}, \quad (\diamond)$$

est bijective d'après 1.5.1-0b ; l'injectivité de ν_r s'ensuit et sa surjectivité résulte de ce que

$$\sum_{n \geq 0} P_n(x_1, \dots, x_\ell) = \sum_{r > n \geq 0} P_n(x_1, \dots, x_\ell) \bmod \mathbf{I}^r,$$

pour toute série $\sum_{n \geq 0} P_n(x_1, \dots, x_\ell)$ vérifiant les conditions $\mathbb{F}\mathbb{C}$. L'application ν_r dans (\diamond) est donc bijective d'inverse μ_r ; par conséquent

$$(\mathbf{A}^\dagger \cap \mathbf{I}^r \widehat{\mathbf{A}}) \subseteq \mathbf{I}^r \mathbf{A}^\dagger,$$

et toute série de \mathbf{A}^\dagger pouvant s'exprimer comme série de Cauchy à termes dans $\mathbf{I}^r \mathbf{A}$ appartient à $\mathbf{I}^r \mathbf{A}^\dagger$.

L'assertion 0c est plus délicate et nous conseillons vivement de lire la preuve de [MW] (th. 1.2), nous donnons à continuation une preuve différente. On commence par remarquer que l'inclusion $\iota : \mathbf{A}^\dagger \subseteq \widehat{\mathbf{A}}$ induit un morphisme canonique $\hat{\iota} : (\mathbf{A}^\dagger)^\wedge \rightarrow (\widehat{\mathbf{A}})^\wedge$ dont les réductions modulo \mathbf{I}^r sont bijectives d'après (b) et 1.5.1-0b ; on a donc $\ker(\hat{\iota}) \subseteq \bigcap_r \mathbf{I}^r ((\mathbf{A}^\dagger)^\wedge)$ et $\hat{\iota}$ est injective puisque $(\mathbf{A}^\dagger)^\wedge$ est séparé. Comme d'autre part $\widehat{\widehat{\mathbf{A}}} = \widehat{\mathbf{A}}$ d'après 1.4.22-0c, $\hat{\iota}$ est aussi surjective. Par conséquent $\mathbf{A}^{\dagger\wedge} = \widehat{\mathbf{A}}$, et un élément de $\mathbf{A}^{\dagger\wedge}$ est, d'après 4.1.4, une série $z \in \widehat{\mathbf{A}}$ de la forme

$$z = \sum_{J \in \mathbb{N}^\ell} a_J \xi^J, \quad \text{avec } |J| \leq C(\text{ord}_{\mathbf{I}}(a_J) + 1), \quad (*)$$

pour un certain $C \in \mathbb{R}_+$ et avec $\{\xi_1, \dots, \xi_\ell\} \subseteq \mathbf{A}^\dagger$.

Fixons maintenant, toujours par 4.1.4, une famille $\{\zeta_1, \dots, \zeta_s\} \subseteq \mathbf{A}$ et pour chaque $i = 1, \dots, \ell$ une expression

$$\xi_i = \sum_{K \in \mathbb{N}^s} b_{i,K} \zeta^K, \quad \text{avec } |K| \leq C(\text{ord}_{\mathbf{I}}(b_{i,K}) + 1), \quad (*')$$

pour une constante $C \in \mathbb{R}_+$ que nous pouvons prendre égale à celle de $(*)$ quitte à prendre des constantes plus grandes. On a alors pour chaque $m \in \mathbb{N}$:

$$\xi_i^m = \sum_{K_1, \dots, K_m \in \mathbb{N}^s} b_{i,K_1} \cdots b_{i,K_m} \zeta^{K_1 + \cdots + K_m}, \quad \forall i = 1, \dots, \ell, \quad (**)$$

où par les inégalités $(*)'$ on a

$$|K_1 + \cdots + K_m| \leq C(\text{ord}_{\mathbf{I}}(b_{i,K_1} \cdots b_{i,K_m}) + m), \quad (**')$$

¹⁷ On rappelle que par l'indice ' σ ' on désigne la sous-catégorie pleine des objets séparés (cf. 1.2.2).

de sorte que si nous reportons (**) dans (*), nous obtenons une famille sommable de termes de la forme

$$a_J \underbrace{(b_{1,K_{1,1}} \cdots b_{1,K_{1,j_1}}) \cdots (b_{r,K_{r,1}} \cdots b_{r,K_{r,j_\ell}})}_{\zeta^{(K_{1,1}+\cdots+K_{1,j_1})+\cdots+(K_{\ell,1}+\cdots+K_{r,j_\ell})}}, \quad (\diamond)$$

où par les inégalités (**') on a

$$\begin{aligned} |(K_{1,1} + \cdots + K_{1,j_1}) + \cdots + (K_{\ell,1} + \cdots + K_{\ell,j_\ell})| &\leq C(\text{ord}_I(b_{*,\bullet}) + j_1 + \cdots + j_\ell) \\ &\leq C(\text{ord}_I(b_{*,\bullet}) + C(\text{ord}_I(a_J) + 1)) \\ &\leq C^2(\text{ord}_I(a_J b_{*,\bullet}) + 1), \end{aligned}$$

si nous avons en plus pris le soin de prendre $C > 1$ ce qui est possible, et où la notation $b_{*,\bullet}$ désigne le termes soulignés dans (\diamond) . Le regroupement des termes (\diamond) suivant les sommes $K_{1,1} + \cdots + K_{\ell,j_\ell} \in \mathbb{N}^s$ montre alors que l'élément z de (*) admet une représentation sous la forme $\mathbb{F}\mathbb{C}^\star$ avec la constante C^2 . Par conséquent $z \in \mathbf{A}^\dagger$ et nous avons prouvé l'égalité $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{\dagger\dagger}$.

Pour prouver (d) on suit la même démarche que pour 3.1.8-0a, et (e) et (f) sont immédiates. ■

4.1.7. Algèbres faiblement complètes. Une \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} est dite « faiblement complète » lorsque le morphisme canonique $\iota(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$ est bijectif.

4.1.8. Exercices

- Les algèbres \mathbf{A}^\dagger sont faiblement complètes. (4.1.6-0c)
- Si $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ est un morphisme surjectif de \mathbf{R} -algèbres, le morphisme induit $\varphi^\dagger : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$ est surjectif.
- Un quotient séparé d'une algèbre faiblement complète est une algèbre faiblement complète. (cf. 1.4.25.)
- Les algèbres faiblement complètes sont les quotients *séparés* des complétions faibles des algèbres de polynômes. (cf. 1.4.23-0b.)

4.2 Complétion †-adique des algèbres de type fini

Lorsque l'algèbre \mathbf{A} est de type fini, la définition générale de la complétion faible admet une simplification importante dans la mesure où les systèmes de référence $\{x_1, \dots, x_\ell\}$ de 4.1.1, où $\{\xi_1, \dots, \xi_\ell\}$ de 4.1.4, peuvent être gardés fixes.

4.2.1. Proposition. Si \mathbf{A} est une \mathbf{R} -algèbre de type fini de générateurs algébriques $\{\xi_1, \dots, \xi_\ell\}$, les éléments de \mathbf{A}^\dagger sont les séries

$$\begin{aligned} z = \sum_{n \geq 0} P_n(\xi_1, \dots, \xi_\ell) \in \widehat{\mathbf{A}}, \quad \text{telles que} \quad & \boxed{P_n \in \mathbf{I}^n \mathbf{R}[\overline{X}] \text{ et } \deg P_n \leq C(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}} \quad (\dagger) \\ z = \sum_{J \in \mathbb{N}^\ell} a_J \xi^J \in \widehat{\mathbf{A}}, \quad \text{telles que} \quad & \boxed{|J| \leq C(\text{ord}_I(a_J) + 1), \quad \forall J \in \mathbb{N}^\ell} \quad (\dagger') \end{aligned}$$

Démonstration. Corollaire rapide de 4.1.4 modulo l'exercice 4.1.2. ■

4.3 Propriétés générales de la complétion †-adique

Le théorème suivant donne une liste de propriétés de la complétion †-adique partagées par la complétion formelle (1.5.1). Les démonstrations sont essentiellement les mêmes que pour 1.5.1 et sont laissées en exercice ou bien à consulter dans la référence [MW]. Une exception importante

concerne pourtant la preuve de la noéthérianité de \mathbf{A}^\dagger qui exige de nouvelles idées (*cf. loc.cit*). Enfin, tout comme dans le cas formel, ces propriétés jouent un rôle très important dans la théorie de la cohomologie de de Rham.

4.3.1. Théorème. *On suppose l'anneau \mathbf{R} noethérien.*

a) Si \mathbf{A} est une \mathbf{R} -algèbre de type fini et si \mathbf{B} est une \mathbf{A} -algèbre, on a :

- $(\mathbf{B})_{\mathbf{R}}^\dagger$: le complété \dagger -adique de \mathbf{B} en tant que \mathbf{R} -algèbre,
- $(\mathbf{B})_{\mathbf{A}}^\dagger$: le complété \dagger -adique de \mathbf{B} en tant que \mathbf{A} -algèbre.

Le morphisme naturel $(\mathbf{B})_{\mathbf{R}}^\dagger \rightarrow (\mathbf{B})_{\mathbf{A}}^\dagger$ est bijectif.

b) Si \mathbf{A} est une \mathbf{R} -algèbre de type fini, \mathbf{A}^\dagger est noethérienne ⁽¹⁸⁾, on a donc

$$(-)^\dagger : \mathbf{Alg}_{\text{if}}(\mathbf{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Alg}_{\text{noet.}}(\widehat{\mathbf{R}}).$$

c) Si \mathbf{A} est une \mathbf{R} -algèbre de type fini, $(\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{IA}^\dagger)$ est de Zariski, i.e. $\mathbf{IA}^\dagger \subseteq \text{Rad}(\mathbf{A}^\dagger)$. En particulier, $z \in \mathbf{A}^\dagger$ est inversible si et seulement si, $\bar{z} \in \mathbf{A}^\dagger/\mathbf{IA}^\dagger = \mathbf{A}/\mathbf{IA}$ est inversible.

d) Si $f, g \in \mathbf{A}$ sont tels que $D(\bar{g}) \subseteq D(\bar{f})$ dans $\text{Spec}(\mathbf{A}/\mathbf{IA})$, il existe un et un unique morphisme de \mathbf{A} -algèbres $\rho_{g,f}^\dagger : \mathbf{A}_f^\dagger \rightarrow \mathbf{A}_g^\dagger$. De plus si $\nu_f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_f$ et $\nu_g : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_g$ sont les morphismes de localisation, on a $\nu_g^\dagger = \rho_{g,f}^\dagger \circ \nu_f^\dagger$.

e) Si \mathbf{A} est une \mathbf{R} -algèbre de type fini, le morphisme naturel $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} \rightarrow \Omega_{\mathbf{A}^\dagger/\mathbf{R}}$ induit un **isomorphisme**

$$\boxed{\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}^* \xrightarrow{\simeq} (\Omega_{\mathbf{A}^\dagger/\mathbf{R}}^*)_\sigma}$$

Indication. Nous expliquons seulement l'inclusion $\mathbf{IA}^\dagger \subseteq \text{Rad}(\mathbf{A}^\dagger)$. Référons-nous au paragraphe 4.2 et reprenons ses notations. Pour $z = \sum_J a_J \xi^J \in \mathbf{A}^\dagger$ et $y \in \mathbf{I}$ nous devons montrer que $1 - yz$ est inversible dans \mathbf{A}^\dagger . Nous savons déjà que l'inverse de $1 - yz$ dans $\widehat{\mathbf{A}}$ est la série $\sum_{n \geq 0} y^n z^n$ (*cf.* la preuve de 1.5.1-0j p. 15) qui, par sommabilité, est aussi la somme de la famille

$$\mathcal{F} := \{a_{J_1} \cdots a_{J_n} y^{|J_1 + \cdots + J_n|} \xi^{J_1 + \cdots + J_n} \mid n \in \mathbb{N}, J \in \mathbb{N}^r\}$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned} |J_1 + \cdots + J_n| &= |J_1| + \cdots + |J_n| \leq C(\text{ord}_{\mathbf{I}}(a_{J_1}) + \cdots + \text{ord}_{\mathbf{I}}(a_{J_n}) + |J_1| + \cdots + |J_n|) \\ &\leq C(\text{ord}_{\mathbf{I}}(a_{J_1} \cdots a_{J_n} y^{|J_1 + \cdots + J_n|})) \end{aligned}$$

et si nous regroupons les termes de \mathcal{F} suivant la somme $J_1 + \cdots + J_n$, possible par la sommabilité des sous-familles d'une famille sommable dans un espace complet (1.4.20), nous constatons que la somme de \mathcal{F} dans $\widehat{\mathbf{A}}$ est une série $\sum_{J \in \mathbb{N}^r} b_J \xi^J$ telle que $|J| \leq C(\text{ord}_{\mathbf{I}}(b_J) + 1)$. ■

4.3.2. Exercice. Soit \mathbf{A} une \mathbf{R} -algèbre de type fini et $P \in \mathbf{A}[X]$. Donner des isomorphismes canoniques entre les algèbres suivantes

$$(\mathbf{A}[X]_P)^\dagger \quad (\mathbf{A}^\dagger[X]_P)^\dagger \quad (((\mathbf{A}^\dagger[X])^\dagger)_P)^\dagger$$

Indication. *cf.* 1.5.3.

¹⁸ C'est un résultat dû à Fulton ([MW] p. 185) qui prouve que \mathbf{A}^\dagger est noethérienne si \mathbf{A} est de type fini. Dans le cas général, l'implication " \mathbf{A} noethérienne $\Rightarrow \mathbf{A}^\dagger$ noethérienne" ne semble pas établie contrairement au cas de la complétion formelle.

§5. Cohomologie de de Rham †-adique des algèbres

Nous définissons la cohomologie de de Rham †-adique d'une \mathbf{R} -algèbre de type fini en général, nous introduisons la notion d'homotopie de morphismes d'algèbres et démontrons le «*théorème d'homotopie*» qui affirme que deux morphismes homotopes induisent le même morphisme en cohomologie.

À propos de la terminologie. La terminologie «†-adique» est la terminologie pour un couple $(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ générique. Dans le cas où \mathbf{R} est un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique et de caractéristique résiduelle p , on parle plutôt de topologie p -adique, complétion p -adique (toujours formelle), complétion p -adique faible où †-adique, complexe de de Rham p -adique et cohomologie de de Rham p -adique.

5.1 Foncteurs complexe et cohomologie de Rham †-adique

Le foncteur «*complexe de de Rham †-adique*» est le foncteur qui associe à une \mathbf{R} -algèbre de type fini \mathbf{A} le complexe (4.3.1-0e)

$$\boxed{(\Omega_{\mathbf{A}^\dagger/\mathbf{R}}^*)_\sigma = \mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}^*}$$

et à un morphisme de \mathbf{R} -algèbres $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ fait correspondre le morphisme de complexes

$$\Omega^*(\varphi)_\sigma : (\Omega_{\mathbf{A}^\dagger/\mathbf{R}}^*)_\sigma \rightarrow (\Omega_{\mathbf{B}^\dagger/\mathbf{R}}^*)_\sigma$$

La «*cohomologie de de Rham †-adique*» d'une \mathbf{R} -algèbre de type fini \mathbf{A} est par définition

$$\boxed{H_{\text{DR}}^*(\mathbf{A}^\dagger/\mathbf{K}) := h^*(\mathbf{K} \otimes_{\mathbf{R}} (\Omega_{\mathbf{A}^\dagger/\mathbf{R}}^*)_\sigma) = h^*(\mathbf{K} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}^*)} \quad (\text{DR}^\dagger)$$

où \mathbf{K} désigne le corps de fractions de \mathbf{R} .

5.1.1. Exemple : cohomologie de de Rham p -adique d'un ouvert principal de $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}_p}^n$.

Il s'agit de la cohomologie du complexe de de Rham p -adique de l'anneau $\mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n]_P$ pour $P \in \mathbb{Z}_p[\bar{X}]$. On pose donc

$$\Omega^*(D(P)/\mathbb{Q}_p) := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\bar{X}, 1/P]^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}_p[\bar{X}]_P} \Omega_{\mathbb{Z}_p[\bar{X}]_P/\mathbb{Z}_p}^*,$$

où $\Omega_{\mathbb{Z}_p[X]_P/\mathbb{Z}_p} = \mathbb{Z}_p[X]_P \otimes_{\mathbb{Z}_p[X]} \Omega_{\mathbb{Z}_p[X]/\mathbb{Z}_p}^*$ par la propriété universelle de la localisation des complexes de de Rham algébriques (¹⁹), donc

$$\Omega^*(D(P)/\mathbb{Q}_p) := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\bar{X}, 1/P]^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}_p[\bar{X}]} \Omega_{\mathbb{Z}_p[\bar{X}]/\mathbb{Z}_p}^*$$

et comme $\Omega_{\mathbb{Z}_p[\bar{X}]/\mathbb{Z}_p}^k = \mathbb{Z}_p[\bar{X}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge_{\mathbb{Z}_p}^k \mathbb{Z}_p^n$ on a

$$\boxed{\Omega^*(D(P)/\mathbb{Q}_p) := \mathbb{Z}_p[\bar{X}, 1/P]^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge_{\mathbb{Q}_p}^* \mathbb{Q}_p^n}$$

Ainsi, si $\{dX_1, \dots, dX_n\}$ désigne la base canonique de \mathbb{Q}_p^n , une k -forme différentielle p -adique

¹⁹ Voir les notes du cours «*Cohomologie de de Rham dans la catégorie des Schémas*» §1.4.4.

s'écrit

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} z_{i_1 \dots i_k}(\bar{X}, 1/P) dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}$$

où $z_{i_1 \dots i_k}(\bar{X}, 1/P) \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\bar{X}, 1/P]^\dagger$, et alors, tout comme dans le cas classique, on a

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial z}{\partial X_j}(\bar{X}, 1/P) dX_j \wedge (dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}).$$

5.1.2. Remarque. Bien que ce complexe ressemble beaucoup au complexe algébrique, sa cohomologie est bien différente. Par exemple, et c'est bien une propriété fondamentale, on aura

$$H_{\text{DR}}(D(P_1)/\mathbb{Q}_p) = H_{\text{DR}}(D(P_2)/\mathbb{Q}_p)$$

si $P_1 = P_2 \pmod{p}$, car $\mathbb{Z}_p[\bar{X}]_{P_1}^\dagger$ et $\mathbb{Z}_p[\bar{X}]_{P_2}^\dagger$ sont alors canoniquement isomorphes (4.3.1-0d), contrairement au cas algébrique (non complet) (cf. 3.1.2).

5.1.3. Un petit théorème de comparaison. Comme exemple du paragraphe 5.1.1, regardons la cohomologie p -adique de $D(X) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{Z}_p}^1$. Ici le complexe de de Rham \dagger -adique est réduit à deux termes :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger \xrightarrow{\partial_X} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger \rightarrow \mathbf{0}$$

et les éléments de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger$ sont somme de deux séries (cf. 1.4.24) $z \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X]^\dagger$ et $w \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X^{-1}\mathbb{Z}_p[1/X]^\dagger$. La série z admet toujours une primitive d'après 3.1.8-0b (en fait tout à été fait pour !). D'autre part, la série w se décompose en somme $w = a_1 X^{-1} + w'$ avec $w' := \sum_{n \geq 2} a_n X^{-n}$. Une primitive (formelle) pour w' est

$$\int w' = \sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{-n+1} X^{-n+1}$$

de rayon de convergence $\mathcal{R}(\int w') = \mathcal{R}(w') > 1$ par la formule d'Hadamard (3.1.13-0a). On voit donc bien que tout 1-cocycle est cohomologue à un multiple de $\frac{dX}{X}$ qui, lui, n'est pas un cobord (en exercice).

Enfin, l'unicité de l'écriture des éléments de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger$ (cf. 1.4.24) montre aussitôt que l'égalité $dw = 0$ ne peut se produire que si w est un multiple de 1.

Par conséquent $H_{\text{DR}}^0(D(X)^\dagger/\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p$, $H_{\text{DR}}^1(D(X)^\dagger/\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p$, $H_{\text{DR}}^k(D(X)^\dagger/\mathbb{Q}_p) = \mathbf{0}$, si $k > 1$.

Ces résultats numériques coïncident avec le cas algébrique, ce qui relève en fait d'un phénomène beaucoup plus intéressant : le *morphisme de complexes*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X] & \xrightarrow{\partial_X} & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X] & \rightarrow & \mathbf{0} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger & \xrightarrow{\partial_X} & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger & \rightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

induit par l'inclusion de \mathbb{Z}_p -algèbres $\mathbb{Z}_p[X, 1/X] \subseteq \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger$, est un quasi-isomorphisme. ⁽²⁰⁾

5.1.4. Exercice. Démontrez cette dernière affirmation.

²⁰ Plus généralement, si $\mathbf{A} := \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n, 1/X_1, \dots, 1/X_r]$, avec $r \leq n$, le morphisme $\mathbb{Q}_p \otimes \Omega_{\mathbf{A}/\mathbb{Z}_p}^* \rightarrow \mathbb{Q}_p \otimes \Omega_{\mathbf{A}^\dagger/\mathbb{Z}_p}^*$ est un quasi-isomorphisme. L'algèbre \mathbf{A} est l'algèbre des fonctions régulières d'un « diviseur à croisements normaux », ce résultat montre que les nombres de Betti p -adiques (6.4) d'un tel ouvert de $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$ coïncident avec ceux de l'ouvert équivalent de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$. C'est un résultat clef!

5.2 Homotopie de morphismes

La notion d'homotopie de morphismes est relative à une catégorie. Les paragraphes suivants rappellent sa définition dans les catégories des variétés différentielles, variétés algébriques, schémas et algèbres, et algèbres formellement et faiblement complètes.

5.2.1. Les cas topologique et différentiel. Deux morphismes de variétés différentielles (resp. espaces topologiques) $f_0, f_1 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ sont «*homotopes*» s'il existe un morphisme de variétés différentielles (resp. application continue) $h : \mathbf{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{Y}$ tel que, si nous notons $\iota_t : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbb{R}$ l'injection $x \mapsto (x, t)$, on a $f_i = h \circ \iota_i$

$$\begin{array}{ccc} & & f_1 \longrightarrow \\ & \swarrow & \downarrow \\ \mathbf{X} & \xrightarrow{\iota_1} & \mathbf{X} \times \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbf{Y} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & f_0 \longrightarrow \end{array}$$

5.2.2. Le cas algébrique affine. La définition est la même que dans les cas précédents. Deux morphismes de variétés sur un corps \mathbf{R} (resp. schémas sur un anneau \mathbf{R}) $f_0, f_1 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ sont «*homotopes*» s'il existe un morphisme de variétés (resp. de schémas) $h : \mathbf{X} \times_{\mathbf{R}} \mathbb{A}_{\mathbf{R}}^1 \rightarrow \mathbf{Y}$ tel que, si nous notons $\iota_t : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} \times_{\mathbf{R}} \mathbb{A}_{\mathbf{R}}^1$ l'immersion $x \mapsto (x, t)$, on a $f_i = h \circ \iota_i$

$$\begin{array}{ccc} & & f_1 \longrightarrow \\ & \swarrow & \downarrow \\ \mathbf{X} & \xrightarrow{\iota_1} & \mathbf{X} \times_{\mathbf{R}} \mathbb{A}_{\mathbf{R}}^1 \xrightarrow{h} \mathbf{Y} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & f_0 \longrightarrow \end{array}$$

Lorsque \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont affines d'anneaux de fonctions régulières les \mathbf{R} -algèbres \mathbf{B} et \mathbf{A} respectivement, la notion d'homotopie se traduit en : deux morphismes de \mathbf{R} -algèbres $\varphi_0, \varphi_1 : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ sont «*homotopes*» s'il existe un morphisme de \mathbf{R} -algèbres $\eta : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}[T]$ tel que, si nous notons $p_t : \mathbf{B}[T] \rightarrow \mathbf{B}$ la projection de $T \mapsto t$, on a $\varphi_i = p_i \circ \eta$

$$\begin{array}{ccc} & & \varphi_1 \longrightarrow \\ & \swarrow & \downarrow \\ \mathbf{A} & \xrightarrow{\eta} & \mathbf{B}[T] \xrightarrow{p_1} \mathbf{B} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbf{B} \\ & & \uparrow \\ & & p_0 \\ & \swarrow & \uparrow \\ & & \varphi_0 \longrightarrow \end{array}$$

5.2.3. Le cas des complétés. Comme dans le cas algébrique moyennant les complétions d'usage, tantôt la complétion formelle $\widehat{(-)}$, tantôt la complétion †-adique $(-)^\dagger$. Ainsi, deux morphismes de \mathbf{R} -algèbres $\varphi_1, \varphi_2 : \widehat{\mathbf{A}} \rightarrow \widehat{\mathbf{B}}$ (resp. $\mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$) sont «*homotopes*» s'il existe un morphisme $\eta : \widehat{\mathbf{A}} \rightarrow \widehat{\mathbf{B}}[T]^\wedge$ (resp. $\eta : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger[T]^\dagger$) tel que $\varphi_i = \widehat{p}_i \circ \eta$ (resp. $\varphi_i = p_i^\dagger \circ \eta$).

$$\begin{array}{ccc} & & \varphi_1 \longrightarrow \\ & \swarrow & \downarrow \\ \widehat{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\eta} & \widehat{\mathbf{B}}[T]^\wedge \xrightarrow{\widehat{p}_1} \widehat{\mathbf{B}} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \widehat{\mathbf{B}} \\ & & \uparrow \\ & & \widehat{p}_0 \\ & \swarrow & \uparrow \\ & & \varphi_0 \longrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \varphi_1 \longrightarrow \\ & \swarrow & \downarrow \\ \mathbf{A}^\dagger & \xrightarrow{\eta} & \mathbf{B}^\dagger[T]^\dagger \xrightarrow{p_1^\dagger} \mathbf{B}^\dagger \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbf{B}^\dagger \\ & & \uparrow \\ & & p_0^\dagger \\ & \swarrow & \uparrow \\ & & \varphi_0 \longrightarrow \end{array}$$

5.2.4. Théorème d'homotopie. Le résultat suivant est vrai dans tous les contextes, topologique, différentiel et algébriques et la démarche à suivre pour le prouver est toujours la même à quelques petits détails techniques près, ceci nous autorise d'une certaine manière (manque de temps oblige), à nous limiter à ne détailler que le cas †-adique qui intéresse plus particulièrement ces notes. Le «*Lemme de Poincaré*» en est un corollaire immédiat.

5.2.5. Théorème. Pour toute \mathbf{R} -algèbre de type fini \mathbf{B} , les morphismes $p_i^\dagger : \mathbf{B}[T]^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$, $p_i(T) = i$ et $i = 0, 1$, induisent le même morphisme en cohomologie de de Rham \dagger -adique.

$$H_{\text{DR}}(\mathbf{B}[T]^\dagger/\mathbf{K}) \xrightarrow[H_{\text{DR}}(p_0)]{H_{\text{DR}}(p_1)} H_{\text{DR}}(\mathbf{B}^\dagger/\mathbf{K}), \quad H_{\text{DR}}(p_0) = H_{\text{DR}}(p_1)$$

Démonstration. Le complexe de de Rham \dagger -adique de $\mathbf{B}[T]^\dagger$ (5.1) est

$$(\Omega_{\mathbf{B}[T]^\dagger/\mathbf{R}}^*)_\sigma = \mathbf{B}[T]^\dagger \otimes_{\mathbf{B}[T]} \Omega_{\mathbf{B}[T]/\mathbf{R}}^*$$

et comme $\mathbf{B}[T] = \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[T]$, on a l'égalité de complexes de de Rham ⁽²¹⁾

$$(\Omega_{\mathbf{B}[T]/\mathbf{R}}^*, d_*) = (\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{R}}^*, d_{\mathbf{B},*}) \otimes_{\mathbf{R}} (\Omega_{\mathbf{R}[T]/\mathbf{R}}^*, d_*)$$

et alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbf{B}[T]/\mathbf{R}}^{k+1} &= (\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{R}}^{k+1} \otimes_{\mathbf{R}} \Omega_{\mathbf{R}[T]/\mathbf{R}}^0) \oplus (\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{R}}^k \otimes_{\mathbf{R}} \Omega_{\mathbf{R}[T]/\mathbf{R}}^1) \\ &= (\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{R}}^{k+1} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[T]) \oplus (\Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{R}}^k \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[T] dT) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\Omega_{\mathbf{B}[T]^\dagger/\mathbf{R}}^{k+1} = \mathbf{B}[T]^\dagger \otimes_{\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[T]} \Omega_{\mathbf{B}[T]/\mathbf{R}}^{k+1} = (\mathbf{B}[T]^\dagger \otimes_{\mathbf{B}} \Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{R}}^{k+1}) \oplus (\mathbf{B}[T]^\dagger \otimes_{\mathbf{B}} \Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{R}}^k) dT$$

de sorte que $\omega \in \Omega_{\mathbf{B}[T]^\dagger/\mathbf{R}}^{k+1}$ se décompose canoniquement en

$$\omega = w\alpha + z\beta dT, \quad \text{avec } w, z \in \mathbf{B}[T]^\dagger, \quad \alpha \in \Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{R}}^{k+1}, \quad \beta \in \Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{R}}^k.$$

et alors

$$d\omega = d_{\mathbf{B}}(w\alpha) \pm \partial_T(w)\alpha dT + d_{\mathbf{B}}(z\beta) dT.$$

D'où l'implication

$$d\omega = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} d_{\mathbf{B}}(w\alpha) = 0 \\ \partial_T(w)\alpha = \mp d_{\mathbf{B}}(z\beta) \end{cases} \quad (*)$$

D'autre part, pour chaque $t \in \mathbf{R}$ on a

$$p_{t,*}(\omega) = w(t)\alpha + z(t)\beta dt = w(t)\alpha, \quad (\text{car } dt = 0),$$

et donc

$$p_{1,*}(\omega) - p_{0,*}(\omega) = (w(1) - w(0))\alpha$$

Or, comme l'application $\partial_T : \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{B}[T]^\dagger \rightarrow \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{B}[T]^\dagger$ est surjective! on peut écrire

$$p_{1,*}(\omega) - p_{0,*}(\omega) = (w(1) - w(0))\alpha = \int_0^1 \partial_T(w)\alpha dT \stackrel{\text{par } (*)}{=} \mp \int_0^1 d_{\mathbf{B}}(z\beta) dT \stackrel{(\infty)}{=} \mp d_{\mathbf{B}}\left(\int_0^1 z dT\right)\beta$$

où l'égalité $=_*$ résulte de la commutation $\partial_T d_{\mathbf{B}} = d_{\mathbf{B}} \partial_T$, car pour vérifier que sur $\mathbf{K} \otimes \mathbf{B}[T]^\dagger$ on a égalité d'opérateurs

$$\int_0^1 d_{\mathbf{B}} = d_{\mathbf{B}} \int_0^1$$

il suffit de vérifier l'égalité

$$\int_0^T d_{\mathbf{B}} = d_{\mathbf{B}} \int_0^T$$

²¹ Voir les notes du cours "Cohomologie de de Rham dans la catégorie des Schémas" §2.4.

et comme ces deux opérateurs produisent des fonctions qui s'annulent pour $T = 0$, il suffit de vérifier que composés à ∂_T on a l'égalité, et ceci est immédiat grâce à la commutation de ∂_T et d_B , en effet :

$$\partial_T \int_0^T d_B = d_B, \quad \text{et} \quad \partial_T d_B \int_0^T = d_B \partial_T \int_0^T = d_B.$$

Ainsi, l'égalité (\diamond) prouve que les cocycles $p_{t,*}(\omega)$ sont bien cohomologues dans $\mathbf{K} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}} \Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{R}}^*$.

Reste à regarder l'action de $p_{t,*}$ et degré 0. Dans ce cas, on remarque que, puisque $\mathbf{B}[T]^\dagger \subseteq \mathbf{B}[T]^\wedge$ et que $\mathbf{B}[T]^\wedge$ est le complété \mathbf{I} -adique par rapport au couple $(\mathbf{B}; \mathbf{I}\mathbf{B})$ (1.5.1-0e), les éléments de $\mathbf{B}[T]^\dagger$ ont une écriture unique comme séries $\sum_{n \geq 0} b_n T^n$ (1.4.23-0a) et alors, si $w \in \mathbf{B}[T]^\dagger$ est tel que $0 = d(w) = \partial_T(w) dT + d_B(w)$, on a $\partial_T(w) = 0$ et w est indépendant de T , donc $p_{1,*}(w) = p_{0,*}(w)$. ■

5.2.6. Corollaire. Soit \mathbf{A} une \mathbf{R} -algèbre de type fini. Les morphismes $\iota : \mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}[X]$ et $\pi_a : \mathbf{A}[X] \rightarrow \mathbf{A}$, pour tout $a \in \mathbf{A}$, induisent des morphismes inverses l'un de l'autre en cohomologie de de Rham †-adique.

$$\begin{array}{ccccc} H_{\text{DR}}(\mathbf{A}^\dagger/\mathbf{K}) & \xrightarrow{H_{\text{DR}}(\iota)} & H_{\text{DR}}(\mathbf{A}[X]^\dagger/\mathbf{K}) & \xrightarrow{H_{\text{DR}}(\pi_a)} & H_{\text{DR}}(\mathbf{A}^\dagger/\mathbf{K}) \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{id}} & & \uparrow \end{array}$$

Démonstration. Par le théorème 5.2.5, il suffit de regarder le cas $a = 0$. Soit $h : \mathbf{A}[X] \rightarrow \mathbf{A}[X, T]$, le morphisme de \mathbf{A} -algèbres défini par $X \mapsto XT$. Notons $p_i : \mathbf{A}[X, T] \rightarrow \mathbf{A}[X]$ les morphismes de $\mathbf{A}[X]$ -algèbres définis par $T \mapsto i$ pour $i = 0, 1$. Encore une fois par 5.2.5, les morphismes $\text{id}_{\mathbf{A}[X]} = p_1 \circ h$ et $p_0 \circ h$ induisent le même morphisme en cohomologie, donc $p_0 \circ h = \iota \circ \pi_0$ induit l'identité. Comme d'autre part $\pi_0 \circ \iota = \text{id}$, rien ne reste à prouver. ■

5.2.7. Corollaire (lemme de Poincaré). Si $\mathbf{R}[\bar{X}]$ est l'anneau de polynômes à n variables, les morphismes $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}[\bar{X}]$ et $\pi_{\bar{a}} : \mathbf{R}[\bar{X}] \rightarrow \mathbf{R}$, $X_i \mapsto a_i$, pour tout $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$, induisent des morphismes inverses l'un de l'autre en cohomologie de de Rham †-adique. En particulier

$$H_{\text{DR}}^0(\mathbf{R}[\bar{X}]^\dagger/\mathbf{K}) = \mathbf{K}, \quad H_{\text{DR}}^i(\mathbf{R}[\bar{X}]^\dagger/\mathbf{K}) = \mathbf{0}, \quad \forall i > 0.$$

§ 6. Cohomologie de de Rham †-adique des schémas affines en caractéristique positive

6.1. Esquisse. Plaçons-nous dans le cadre de la catégorie des schémas affines de type fini sur un corps k de caractéristique positive p , ou ce qui revient au même, de la catégorie $\mathbf{Alg}_{\text{tf}}(k)$ des k -algèbres de type fini. On cherche une définition fonctorielle d'une cohomologie de de Rham en caractéristique 0 sur $\mathbf{Alg}_{\text{tf}}(k)$. Comme le corps k est le corps résiduel d'un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique $(\mathbf{R}; \mathbf{I})$ (l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt par exemple) on cherche pour chaque k -algèbre, notée $\bar{\mathbf{A}}$, un « relèvement » \mathbf{A} de $\bar{\mathbf{A}}$, i.e. une \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} dont la réduction modulo \mathbf{I} coïncide avec $\bar{\mathbf{A}}$. On pourrait prendre $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$, mais alors \mathbf{A} , et donc $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}$ aussi, seraient de torsion sur \mathbf{R} et alors $H_{\text{DR}}(\mathbf{A}^\dagger/\mathbf{K}) = 0$ puisque $\mathbf{K} \otimes_{\mathbf{R}} \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ (cf. 5.1 (DR[†])). On est ainsi

emmené à chercher des relèvements «*plats sur \mathbf{R}* »⁽²²⁾, mais cette contrainte ne peut pas toujours être satisfaite ! Elle l'est pourtant pour une classe suffisamment riche de k -algèbres, les « *k -algèbres lisses*» dont les exemples les plus immédiats sont précisément les algèbres $k[\overline{X}]_P$. Nous ne pouvons malheureusement pas les définir dans ces notes, mais il suffira de dire qu'elles constituent les modèles locaux pour les schémas lisses sur k , analogues des variétés algébriques non singulières, pour comprendre leur intérêt, tout comme dans le cadre différentiel ou algébrique ou analytique complexe, la connaissance du complexe de de Rham local permet d'atteindre la cohomologie de de Rham globale via le formalisme de Čech-de Rham.

Le résultat général concernant la problématique des relèvements plats est le suivant ([Ar,E]).

Théorème. *Pour toute algèbre $\overline{\mathbf{A}}$ lisse sur \mathbf{R}/\mathbf{I} , il existe un relèvement \mathbf{A} plat et de type fini sur \mathbf{R} . Pour deux tels relèvements \mathbf{A}_i , les algèbres \mathbf{A}_i^\dagger sont isomorphes (non canoniquement !).*

De plus, pour tout morphisme de k -algèbres lisses $\overline{\varphi} : \overline{\mathbf{A}} \rightarrow \overline{\mathbf{B}}$, il existe un morphisme $\varphi^\dagger : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$ dont la réduction coïncide avec $\overline{\varphi}$. Ce morphisme n'est pas unique, mais deux tels morphismes sont toujours homotopes.

6.2. Foncteur de cohomologie de de Rham \dagger -adique. Au vu du dernier théorème, on définit la cohomologie de de Rham \dagger -adique d'une \mathbf{R}/\mathbf{I} -algèbre lisse $\overline{\mathbf{A}}$ par

$$H_{\text{DR}}(\overline{\mathbf{A}}/\mathbf{K}) := H_{\text{DR}}(\mathbf{A}^\dagger/\mathbf{K})$$

et le théorème d'homotopie 5.2.5 intervient maintenant de manière décisive pour démontrer

6.3. Théorème. *La correspondance qui associe*

$$\overline{\mathbf{A}} \rightsquigarrow H_{\text{DR}}(\overline{\mathbf{A}}/\mathbf{K}), \quad (\overline{\varphi} : \overline{\mathbf{A}} \rightarrow \overline{\mathbf{B}}) \rightsquigarrow (H_{\text{DR}}(\varphi^\dagger) : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger)$$

est fonctorielle sur la catégorie des \mathbf{R}/\mathbf{I} -algèbres lisses.

6.4. Nombres de Betti. On rappelle pour terminer la notation pour les «*nombres de Betti*», *i.e.* les dimensions des groupes de cohomologie :

- $\mathbf{B}_{\text{top},i}(\mathbf{X}/\mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}}(H^i(\mathbf{X}; \underline{\mathbb{Q}}_{\mathbf{X}}))$ cohomologie de faisceaux sur un espace topologique \mathbf{X} du faisceau constant $\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbf{X}}$.
- $\mathbf{B}_{\text{diff},i}(\mathbf{X}) = \dim_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR}}^i(\mathbf{X}))$ cohomologie du complexe des formes différentielles réelles d'une variété différentielle \mathbf{X} .
- $\mathbf{B}_{\text{an},i}(\mathbf{X}) = \dim_{\mathbb{C}}(H_{\text{DR}}^i(\mathbf{X}))$ hypercohomologie du complexe des faisceaux des formes différentielles holomorphes d'une variété analytique complexe \mathbf{X} .
- $\mathbf{B}_{K,i}(\mathbf{X}) = \dim_K(H_{\text{DR}}^i(\mathbf{X}/K))$ hypercohomologie du complexe des faisceaux des formes différentielles algébrique d'une variété algébrique \mathbf{X} sur un corps K de caractéristique nulle.
- $\mathbf{B}_{\ell,i}(\mathbf{X}) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell}(H^i(\mathbf{X}; \underline{\mathbb{Q}}_\ell))$ cohomologie de faisceaux pour la topologie étale sur une variété \mathbf{X} sur un corps de caractéristique positive p à coefficients dans le faisceau constant $\underline{\mathbb{Q}}_\ell$ avec $\ell \neq p$.

²² Sur un anneau principal \mathbf{R} (anneaux des vecteurs de Witt par exemple) il y a équivalence entre «*plat sur \mathbf{R}* » et «*sans \mathbf{R} -torsion*»

- $\mathbf{B}_{p,i}(\mathbf{X}) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(H_{\text{DR}}^i(\mathbf{X}/\mathbb{Q}_p))$ cohomologie p -adique pour un schéma lisse \mathbf{X} sur un corps de caractéristique positive p .

6.5. Exercice. Montrer que $\mathbf{B}_{p,i}(\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^n) = \mathbf{B}_{\mathbb{C},i}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) = \mathbf{B}_{\text{an},i}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) = \mathbf{B}_{\text{top},i}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$.

§ 7. Références bibliographiques

- [Ar] A. ARABIA. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes ; *Commentarii Mathematici Helvetici* 76 (2001) 607–639. (avril 2000).
- [B₂] N. BOURBAKI. “*Commutative algebra*” ; Elements of mathematics. Herman (1972).
- [C] H. CARTAN. “*Théorie élémentaire des fonctions analytiques d’une ou plusieurs variables complexes*” ; Enseignement des Sciences. Hermann, Paris (1961).
- [E] R. ELKIK. Solutions d’équations à coefficients dans un anneau hensélien ; *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, quatrième série, tome 6, pp. 553–604, (1973).
- [J] N. JACOBSON. “*Basic algebra II (second edition)*” ; W. H. Freeman and Company, New York, (1989).
- [M] D. MEREDITH. Weak formal schemes ; *Nagoya Math. Journal*. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).
- [MW] P. MONSKY, G. WASHNITZER. Formal cohomology : I ; *Ann. of Math.* (2) **88**, pp. 181–217, (1968).
- [Ser] J.-P. SERRE. “*Corps locaux*” ; *Actualités scientifiques et industrielles* 1296. Hermann (1962).

§ 8. Index terminologique

écart,	6	convergence	
élémentaire (ouvert),	18	domaine,	26
évaluation (morphisme),	25	rayon),	26
absolument convergente,	11	convergence faible,	24
adhérence \mathbf{I} -adique,	3	critère de Cauchy pour les familles,	11
adhérence de l’origine,	3	†-adique,	33
algèbre faiblement complète,	31	(cohomologie de de Rham),	33
anneau de valuation discrète,	21	(cohomologie),	25
anneau de Zariski,	4	(complétion),	27
archimédien (non),	6	(complexe de de Rham),	33
boule \mathbf{I} -adique,	2	∂_X ,	23
catégorie des systèmes projectifs,	17	diadique (développement),	20
Cauchy		discontinu (totalement),	19
critère de,	7	distance,	6
série,	10	distance ultramétrique,	6
suite,	8	distances équivalentes,	7
\mathbb{C}_p ,	22	diviseur à croisements normaux,	34
commensurables,	7	domaine	
complété (séparé) \mathbf{I} -adique,	9	de convegence,	26
complétion \mathbf{I} -adique,	9	de définition,	25
complétion formelle,	10	entiers m -adiques,	19, 20
complet (espace),	11, 12	espace	
constant		complet,	11, 12
(morphisme),	17	métrique,	6
(système projectif),	17	faiblement complète (algèbre),	31

faiblement convergent,	24	radical (de Jacobson),	3
filtré (module),	5	rayon de convergence,	26
filtration,	14	relèvement,	22, 37
séparée,	14	plat,	38
Hadamard,	26	séparé (filtration),	14
homotopes,	38	séparation I -adique,	3
I -adiquement séparé,	3	série,	10
Laurent		converge en a ,	26
polynômes,	27	convergente,	10
série,	13	de Cauchy,	10
lemme de Poincaré,	35	de Laurent,	13
limite		de terme général x_n ,	10
d'une suite,	8	sommable (famille),	11
projective,	18	sommes partielles,	10
métrique,	6	sous-additivité,	8
module filtré,	5	suite	
morphisme		constante,	9
constant,	17	convergente,	8
d'évaluation,	25	de Cauchy,	8
de systèmes projectifs,	17	limite,	8
morphismes homotopes,	35	système projectif,	17
ordre I -adique,	5	catégorie,	17
ouvert I -adique,	3	constant,	17
ouvert élémentaire,	18	topologie produit,	18
plat (relèvement),	38	totalement discontinu,	19
Poincaré (lemme),	35	trigonalisation,	4
polynômes de Laurent,	27	valeur absolue,	7
posséder des limites projectives,	18	valuation,	7
$\mathbb{Q}_p \subseteq \overline{\mathbb{Q}_p}$,	22	discrète,	21
		\mathbb{Z}_m ,	19–21
		$\mathbb{Z}_{(p)} \subseteq \mathbb{Z}_p$,	22
		\mathbb{Z}_p ,	21, 22, 26

— × —

Alberto Arabia
 CNRS
 Institut de Mathématiques de Jussieu
 Théorie des Groupes
 2008

Cohomologie de de Rham p -adique

“Contextes : différentiel, analytique et algébrique”

Alberto Arabia

Table des matières

§1. Préliminaires	2
1.1. Rappel sur les catégories d'objets au-dessus d'un objet donné	2
1.2. Catégories des espaces annelés	2
1.3. Catégories des espaces localement annelés	4
§2. Tableau de catégories d'espaces localement annelés	6
2.1. [I] Variétés topologiques	9
2.1.1. [I] \mathcal{C} . Objets et morphismes	9
2.1.1.1. Une équivalence de catégories	9
2.1.2. [I] $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Modèles locaux des variétés topologiques	9
2.2. [II] Variétés différentielles	9
2.2.1. [II] \mathcal{C} . Objets et morphismes	9
2.2.2. [II] $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Modèles locaux des variétés différentielles	10
2.2.3. [II] $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^*$. Complexe de de Rham	10
2.2.4. [II] Acyc. Acyclicité de chaque $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^i$	11
2.2.5. [II] Ampl. Amplitude du complexe de de Rham	11
2.2.6. [II] LPG. Lemme de Poincaré global pour l'espace affine	11
2.2.7. [II] LPL. Lemme de Poincaré local	11
2.2.8. Récapitulatif	11
2.3. [III] Variétés analytiques complexes	11
2.3.1. [III] \mathcal{C} . Objets et morphismes	11
2.3.2. [III] $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Modèles locaux	12
2.3.3. [III] $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^*$. Complexe de de Rham	13
2.3.4. [III] Acyc. Acyclicité de chaque $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^i$	13
2.3.4.1. Exemples d'espaces de Stein	13
2.3.4.2. Critère cohomologique pour être de Stein	13
2.3.5. [III] Ampl. Amplitude du complexe de de Rham	14
2.3.6. [III] LPG. Lemme de Poincaré global pour l'espace affine	14
2.3.7. [III] LPL. Lemme de Poincaré local	14
2.3.8. Récapitulatif	14
2.4. [IV] Variétés algébriques	14
2.4.1. Préliminaires	14
2.4.1.1. Fonctions régulières de l'espace affine	15
2.4.1.2. Ensembles algébriques affines sur k	15
2.4.1.3. Topologie de Zariski de \mathbf{X}	15
2.4.1.5. Hypersurfaces et ouverts principaux de \mathbf{X}	15
2.4.7. Fonctions régulières sur un ouvert principal de \mathbf{X}	16
2.4.8. Faisceau des fonctions régulières sur \mathbf{X}	16
2.4.9. Fonctions régulières sur un fermé de Zariski \mathbf{Y} de \mathbb{A}_k^n	17
2.4.10. Espace annelé associé à un fermé de Zaiski	17
2.4.1.11. Catégorie des variétés affines sur k	17
2.4.1.12. Une équivalence de catégories	18
2.4.14. Une autre équivalence de catégories	18
2.4.15. Affinité des ouverts principaux d'une variété affine	18
2.4.16. Variétés quasi-affines sur k	19
2.4.2. [IV] \mathcal{C} . Objets et morphismes	19
2.4.2.1. Variété algébrique sur k , par atlas	19
2.4.3. [IV] $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Modèles locaux	20
2.4.4. [IV] $\mathcal{M}(\mathcal{C})'$. Modèles locaux (équivalence)	20
2.4.5. [IV] $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^*$. Complexe de de Rham	20

2.4.6. [IV] Acyc. Acyclicité de chaque $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^i$	20
2.4.7. [IV] Ampl. Amplitude du complexe de de Rham	20
2.4.8. [IV] LPL. Lemme de Poincaré local	20
2.4.9. [IV] LPG. Lemme de Poincaré global	21
2.4.10. Récapitulatif	21
2.5. [V] Schémas	21
§ 3. Références bibliographiques	21
§ 4. Index terminologique	21

§ 1. Préliminaires

On décrit les sous-catégories pleines de la catégorie d'espaces localement annelés respectivement des : variétés topologiques, variétés différentielles réelles, variétés analytiques complexes, variétés algébriques sur un corps algébriquement clos, et catégories des schémas sur un anneau.

1.1 Rappel sur les catégories d'objets au-dessus d'un objet donné

Soit \mathcal{S} un objet d'une catégorie \mathcal{C} . La catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ des « objets de \mathcal{C} de base \mathcal{S} » ou des « objets de \mathcal{C} au-dessus de \mathcal{S} », est la catégorie dont les objets sont les morphismes de but \mathcal{S} , *i.e.* les éléments $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{S})$, où \mathcal{X} désigne un objet quelconque de \mathcal{C} , et où les morphismes de $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ vers $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Y}, \mathcal{S})$ sont les éléments $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ vérifiant $\alpha = \beta \circ \gamma$, soit

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{X} \\ \alpha \downarrow \\ \mathcal{S} \end{array} \right) \xrightarrow{\gamma} \left(\begin{array}{c} \mathcal{Y} \\ \beta \downarrow \\ \mathcal{S} \end{array} \right) \iff_{\text{def}} \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{Y} \\ \alpha \downarrow & \oplus & \downarrow \beta \\ \mathcal{S} & \equiv & \mathcal{S} \end{array}$$

1.1.1. Remarque. Le foncteur « source » de $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ vers \mathcal{C} qui fait correspondre à $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ l'objet \mathcal{X} et à $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}_{\mathcal{S}}}(\alpha, \beta)$ le morphisme $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, est *fidèle*⁽¹⁾ mais la catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ n'est pas une sous-catégorie de \mathcal{C} .

1.2 Catégories des espaces annelés

On appelle ainsi la catégorie des « espaces annelés », *i.e.* des couples $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ où \mathbf{X} est un espace topologique et $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ est un faisceau d'anneau sur \mathbf{X} . On dit alors que \mathbf{X} est l'« espace topologique sous-jacent » et $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ le « faisceau structural » de l'espace annelé $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$; on dira aussi que « l'espace topologique \mathbf{X} est annelé par le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ ». Un morphisme de $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ vers $(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ est la donnée d'un couple (f, f^{\natural}) où $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ est une application continue et $f^{\natural} = f^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ (ou, ce qui revient au même $f_* : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow f_*\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$) est un morphisme de faisceaux d'anneaux.

¹ Un foncteur « covariant » $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ entre deux catégories est une correspondance qui associe à chaque objet $\mathbf{O} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ un objet $\mathcal{F}(\mathbf{O}) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ et à chaque morphisme $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2)$ un morphisme $\mathcal{F}(\alpha) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(\mathbf{O}_1), \mathcal{F}(\mathbf{O}_2))$ de sorte que $\mathcal{F}(\text{id}_{\mathbf{O}}) = \text{id}_{\mathcal{F}(\mathbf{O})}$ et $\mathcal{F}(\alpha \circ \beta) = \mathcal{F}(\alpha) \circ \mathcal{F}(\beta)$ à chaque fois que la composition a un sens. Le foncteur \mathcal{F} est dit « fidèle » (resp. « plein », « pleinement fidèle ») lorsque l'application $\mathcal{F} : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(\mathbf{O}_1), \mathcal{F}(\mathbf{O}_2))$ est injective (resp. surjective, bijective) quels que soient $\mathbf{O}_i \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Un foncteur $\mathcal{G} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ est dit « contravariant » lorsque la correspondance induite $\mathcal{G}^{\text{op}} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$, où \mathcal{D}^{op} désigne la catégorie opposée de \mathcal{D} , est un foncteur covariant ; il est alors dit *fidèle*, *plein*, *pleinement fidèle* lorsque \mathcal{G}^{op} l'est.

1.2.1. Exemples. Les exemples suivants représentent deux situations opposées. Dans la première l'espace topologique ne joue aucun rôle tandis que dans la seconde la topologie détermine le faisceau d'anneaux.

a) Le couple $(\bullet; \mathbf{A})$ où ' \bullet ' désigne l'espace topologique réduit à un point et \mathbf{A} est un anneau, est un espace annelé. Dans ce contexte, un morphisme d'espaces annelés de $(\bullet; \mathbf{A})$ vers $(\bullet; \mathbf{B})$ est juste un morphisme d'anneaux $\alpha : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$. La correspondance

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightsquigarrow (\bullet; \mathbf{A}) \\ (\alpha : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}) &\rightsquigarrow \left((\text{id}_\bullet; \alpha) : (\bullet; \mathbf{A}) \rightarrow (\bullet; \mathbf{B}) \right) \end{aligned}$$

est un foncteur **contravariant et pleinement fidèle** de la catégorie des anneaux vers la catégorie des espaces annelés.

b) Pour tout espace topologique \mathbf{X} notons $\mathbb{Z}_{\mathbf{X}}$ le «*faisceau des fonctions localement constantes*» à valeurs dans \mathbb{Z} . Si $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ est continue, le faisceau $f^{-1}\mathbb{Z}_{\mathbf{Y}}$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{Z}_{\mathbf{X}}$ et la composée d'une section σ de $\mathbb{Z}_{\mathbf{Y}}$ avec f est une section, notée $f^\sharp\sigma$, de $\mathbb{Z}_{\mathbf{X}}$; l'application $f^\sharp : \mathbb{Z}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathbf{X}}$ est alors un morphisme de faisceaux d'anneaux canoniquement associé à f . La correspondance

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &\rightsquigarrow (\mathbf{X}; \mathbb{Z}_{\mathbf{X}}), \\ (f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}) &\rightsquigarrow \left((f; f^\sharp) : (\mathbf{X}; \mathbb{Z}_{\mathbf{X}}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathbb{Z}_{\mathbf{Y}}) \right) \end{aligned}$$

est un foncteur **covariant et pleinement fidèle** de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des espaces annelés.

1.2.2. Notation. On notera **Esp-ann** la catégorie des espaces annelés. Si $(\mathcal{S}; \mathcal{O}_{\mathcal{S}})$ est un espace annelé, on notera **Esp-ann** $_{(\mathcal{S}; \mathcal{O}_{\mathcal{S}})}$ la catégorie des espaces annelés au-dessus de $(\mathcal{S}; \mathcal{O}_{\mathcal{S}})$. Pour tout anneau \mathbf{A} , on note **Esp-ann** $_{\mathbf{A}}$ la catégorie des espaces annelés au-dessus de $(\bullet; \mathbf{A})$ (cf. 1.2.1-0a), on l'appelle aussi la «*catégorie des espaces annelés de base \mathbf{A}* ».

1.2.3. Proposition. Soit \mathbf{A} un anneau. La catégorie **Esp-ann** $_{\mathbf{A}}$ est équivalente à la catégorie des espaces annelés par un faisceau de \mathbf{A} -algèbres et où les morphismes $(f, f^\sharp) : (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ sont les morphismes d'espaces annelés tels que $f^\sharp : f^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ est un morphisme de faisceaux de \mathbf{A} -algèbres.

Indications. Un morphisme d'espaces annelés $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \rightarrow (\bullet; \mathbf{A})$ est simplement la donnée d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $c^{-1}\mathbf{A} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ où $c : \mathbf{X} \rightarrow \bullet$ est l'application constante et $c^{-1}(\mathbf{A}) = \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}}$ est le faisceau constant de fibre \mathbf{A} . Or, la donnée d'un homomorphisme de faisceaux d'anneaux de $\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}}$ vers $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ équivaut à la donnée, pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, d'un homomorphisme d'anneaux $\mathbf{A} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$, i.e. d'une structure de \mathbf{A} -algèbre sur $\Gamma(U; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$, de manière compatible aux morphismes de restriction $\Gamma(U; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \rightarrow \Gamma(V; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ pour $U \supseteq V$, c'est ce que l'on appelle la donnée d'une structure de faisceau de \mathbf{A} -algèbres sur $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$. La donnée d'un diagramme commutatif dans la catégorie **Esp-ann**

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) & \xrightarrow{(f, f^\sharp)} & (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) \\ (\alpha, \alpha^\sharp) \downarrow & & \downarrow (\beta, \beta^\sharp) \\ (\bullet; \mathbf{A}) & \equiv & (\bullet; \mathbf{A}) \end{array}$$

équivaut au fait que le morphisme d'espaces annelés (f, f^\sharp) rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{A}_X & \xlongequal{\quad} & \mathbf{A}_X \\
f^{-1}(\beta^\natural) \downarrow & & \downarrow \alpha^\natural \\
f^{-1}\mathcal{O}_Y & \xrightarrow{f^\natural} & \mathcal{O}_X
\end{array}$$

autrement dit, que f^\natural est un morphisme de faisceaux de \mathbf{A} -algèbres. \blacksquare

1.3 Catégories des espaces localement annelés

Un espace annelé $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ est dit «*localement annelé*» lorsque, pour tout $x \in \mathbf{X}$ l'anneau $\mathcal{O}_{X;x}$ des germes de \mathcal{O}_X en x , est un anneau *local*. Un «*morphisme d'espaces localement annelés*» est un morphisme d'espaces annelés $(f, f^\natural) : (\mathbf{X}; \mathcal{O}_X) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_Y)$ tel que pour tout $x \in \mathbf{X}$ le morphisme induit $f_x^\natural : \mathcal{O}_{Y;f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X;x}$ est *local*, i.e. vérifie

$$(f_x^\natural)^{-1}(\mathfrak{M}_{X;x}) = \mathfrak{M}_{Y;f(x)},$$

où $\mathfrak{M}_{X;x}$ (resp. $\mathfrak{M}_{Y;f(x)}$) désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X;x}$ (resp. de $\mathcal{O}_{Y;f(x)}$).

1.3.1. Notation. On notera **Loc-ann** la catégorie des espaces localement annelés. Si $(\mathbf{S}; \mathcal{O}_S)$ et un espace localement annelé, on notera **Loc-ann** $_{(\mathbf{S}; \mathcal{O}_S)}$ la catégorie des espaces localement annelés au-dessus de $(\mathbf{S}; \mathcal{O}_S)$. Pour tout anneau local \mathbf{A} , on note **Loc-ann** $_{\mathbf{A}}$ la catégorie des espaces annelés au-dessus de $(\bullet; \mathbf{A})$ (cf. 1.2.1-0a), on l'appelle aussi la «*catégorie des espaces localement annelés de base \mathbf{A}* ».

1.3.2. Remarque. Soit $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ un espace localement annelé et, pour $x \in \mathbf{X}$, notons $\mathcal{K}_{X;x}$ «*le corps résiduel*» de $\mathcal{O}_{X;x}$, i.e. $\mathcal{K}_{X;x} := \mathcal{O}_{X;x}/\mathfrak{M}_{X;x}$. Alors, le morphisme d'espaces annelés $(f, f^\natural) : (\mathbf{X}; \mathcal{O}_X) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_Y)$ est un morphisme de la catégorie **Loc-ann**, si et seulement si, le morphisme de corps $f_x^\natural : \mathcal{K}_{Y;f(x)} \rightarrow \mathcal{K}_{X;x}$, induit par $f_x^\natural : \mathcal{O}_{Y;f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X;x}$, est **injectif**, et ceci quel que soit $x \in \mathbf{X}$.

1.3.3. Commentaires. Dans ce qui précède il faut être prudent avec les notations $\mathfrak{M}_{X;x}$ et $\mathcal{K}_{X;x}$ qui pourraient laisser penser à l'existence d'un sous-faisceau \mathfrak{M}_X de \mathcal{O}_X de fibres $\mathfrak{M}_{X;x}$ tel que les fibres du faisceaux quotient $\mathbf{K}_X = \mathcal{O}_X/\mathfrak{M}_X$ s'identifient aux corps $\mathbf{K}_{X;x}$. Nous donnons à continuation un exemple et un contreexemple à cette propriété.

- a) Soit \mathbf{A} un anneau local d'idéal maximal \mathfrak{M} . Pour tout espace topologique \mathbf{X} notons $\mathcal{O}_X := \underline{\mathbf{A}}_X$ le faisceau d'applications localement constantes de \mathbf{X} à valeurs dans \mathbf{A} ⁽²⁾. L'espace annelé $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ est localement annelé de fibres canoniquement isomorphes à \mathbf{A} . Montrer que les sections de \mathcal{O}_X à valeurs dans \mathfrak{M} constituent un faisceau \mathfrak{M}_X sur \mathbf{X} dont les fibres s'identifient aux idéaux maximaux $\mathfrak{M}_{X;x}$ de $\mathcal{O}_{X;x}$; le quotient $\mathcal{O}_X/\mathfrak{M}_X$ est alors le faisceau de corps $\underline{\mathbf{K}}_X$, où \mathbf{K} désigne le corps résiduel de \mathbf{A} .
- b) Soit \mathbb{R} le corps des nombres réels muni de sa topologie habituelle. Pour tout espace topologique \mathbf{X} notons maintenant \mathcal{O}_X le faisceau d'applications continues de \mathbf{X} à valeurs dans \mathbb{R} (des «*fonctions réelles*»). Pour chaque $x \in \mathbf{X}$, l'anneau $\mathcal{O}_{X;x}$ est l'anneau des germes de fonctions réelles définies au voisinage de x et l'application d'évaluation $e_x : \mathcal{O}_{X;x} \rightarrow \mathbb{R}$, $e_x(g) := g(x)$, est surjective de noyau l'idéal maximal $\mathfrak{M}_{X;x} \subseteq \mathcal{O}_{X;x}$. D'autre part, une fonction $f \in \mathcal{O}_{X;x}$ vérifiant $f(x) \neq 0$ étant inversible au voisinage de x , admet un inverse dans $\mathcal{O}_{X;x}$. L'anneau $\mathcal{O}_{X;x}$ est donc local d'idéal maximal $\mathfrak{M}_{X;x}$ et le couple $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ est bien un espace *localement annelé*. Soient maintenant U un ouvert de \mathbf{X} et $\sigma \in \Gamma(U; \mathcal{O}_X)$ telle que $\sigma_u \in \mathfrak{M}_{X;u}$ pour tout $u \in U$. Compte tenu des définitions on a alors $\sigma(u) = 0$ pour tout $u \in U$, autrement dit $\sigma = 0$. Il n'existe donc pas de sous-faisceau $\mathfrak{N}_X \subseteq \mathcal{O}_X$ tel que $\mathfrak{N}_x = \mathfrak{M}_{X;x}$ pour tout $x \in \mathbf{X}$.

² On rappelle que l'expression «*faisceau d'applications de \mathbf{X} à valeurs dans...*» est un raccourci pour «*faisceau des applications définies sur les ouverts de \mathbf{X} à valeurs dans... dont les morphismes de restriction correspondent à la restriction d'applications*».

1.3.4. Exemples d'espaces localement annelés

- a) Un espace topologique muni du faisceau des fonctions continues à valeurs dans un corps muni de la topologie discrète (cf. 1.3.3-0a).
- b) Une variété différentielle munie du faisceau des fonctions réelles (ou complexes) différentiables.
- c) Une variété analytique complexe munie du faisceau des fonctions holomorphes.
- d) Une variété algébrique sur un corps algébriquement clos munie du faisceau des fonctions régulières.

Ces exemples relèvent de la propriété générale suivante

1.3.5. Proposition. Soit k un corps.

- a) Soit $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ un espace annelé par un sous-faisceau du faisceau de toutes les application ensembles de \mathbf{X} à valeurs dans k . On suppose que si g est une fonction de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ définie et non nulle en $x \in \mathbf{X}$, il existe une fonction h de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ définie en x et telle que gh est l'application constante égale à 1_k sur un voisinage de x . Alors,
 - i) $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est localement annelé.
 - ii) Si de plus $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ est un faisceau de k -algèbres, les corps résiduels $\mathcal{K}_{\mathbf{X},x}$ sont tous canoniquement isomorphes à k , quel que soit $x \in \mathbf{X}$.
- b) Soient $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ et $(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ des espaces annelés au-dessus de k vérifiant les hypothèses de 0a. Le couple (f, f^{\natural}) est un morphisme de $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ vers $(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$, dans la catégorie **Loc-ann $_k$** , si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :
 - i) $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ est continue.
 - ii) Pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{Y}$ et $g \in \Gamma(U; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$, on a $g \circ f \in \Gamma(U; f_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$.
 - iii) f^{\natural} est un morphisme de faisceaux de k -algèbres et $f^{\natural}(g) = g \circ f$.

Démonstration

- a) Soit $e_x : \mathcal{O}_{\mathbf{X};x} \rightarrow k$ l'application qui évalue une fonction au point x . Lorsque $g \notin \ker(e_x)$, l'hypothèse dit que g est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathbf{X};x}$. L'anneau $\mathcal{O}_{\mathbf{X};x}$ est alors local d'idéal maximal $\ker(e_x)$ puisque e_x n'est pas nulle. L'application naturelle $\mathcal{K}_{\mathbf{X},x} \rightarrow k$ est donc injective, et sera surjective si, de plus, $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ est un faisceau de k -algèbres.
- b) La suffisance est claire (cf. 1.2.3). Réciproquement, pour $x \in \mathbf{X}$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_{\mathbf{Y},f(x)} & \xrightarrow{f_x^{\natural}} & \mathcal{O}_{\mathbf{X},x} \\
 e_{f(x)} \downarrow & & \downarrow e_x \\
 k & \xrightarrow{\xi} & k
 \end{array}$$

et l'existence (et unicité) de ξ résulte de ce que f_x^{\natural} est local (cf. 1.3.2). Lorsque (f, f^{\natural}) est, en plus, un morphisme d'espaces annelés au-dessus de k , le morphisme ξ est l'identité, on a donc :

$$f_x^{\natural}(g)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in \mathbf{X}. \quad \blacksquare$$

1.3.6. Remarque. La proposition 1.3.5 montre que dans le cas d'espaces annelés au-dessus d'un corps k et annelés par un faisceau de fonctions sur le même corps k , un morphisme d'espaces localement annelés est entièrement déterminé par l'application continue sous-jacente. Plus précisément ce théorème dit qu'une application continue $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ dont les composées avec les fonctions de $\mathcal{O}_{\mathbf{Y}}$ sont des fonctions de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ détermine entièrement f^{\natural} . On aura ainsi remarqué la condition habituelle dans la définition des applications

différentiables (resp. holomorphes, algébriques, ...) entre variétés différentielles (resp. analytiques complexes, algébriques, ...) où une telle application est justement une application continue dont la composée avec les fonctions différentiables (resp. holomorphes, algébriques, ...) est du même type.

Le corollaire suivant de 1.3.5 est laissé en exercice.

1.3.7. Corollaire. *Les catégories suivantes sont équivalentes*

- a) *La catégorie des espaces topologiques et la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc-ann}_k$ des espaces annelés par le faisceau des applications localement constantes à valeurs dans le corps k .*
- b) *La catégorie des variétés différentielles et la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc-ann}_{\mathbb{R}}$ des variétés différentielles annelées par leur faisceaux des fonctions réelles différentiables.*
- c) *La catégorie des variétés analytiques complexes et la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc-ann}_{\mathbb{C}}$ des variétés analytiques complexes annelées par leur faisceaux des fonctions holomorphes.*
- d) *La catégorie des variétés algébriques sur un corps algébriquement clos k et la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc-ann}_k$ des variétés algébriques annelées par leur faisceaux des fonctions régulières.*

§ 2. Tableau de catégories d'espaces localement annelés

Dans le tableau ci-contre, la ligne **[A]** représente la catégorie des espaces annelés (resp. de base $(\mathcal{S}; \mathcal{O}_{\mathcal{S}})$) qui a fait l'objet de la section 1.2. La ligne **[B]** est la sous-catégorie des espaces *localement* annelés (resp. de base $(\mathcal{S}; \mathcal{O}_{\mathcal{S}})$) de la section 1.3. Les autres lignes concernent cinq sous-catégories pleines d'espaces localement annelés qui intéressent notre cours.

Les objets de l'une de ces catégories \mathcal{C} s'obtiennent par recollement d'espaces d'une certaine sous-catégorie pleine $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ que l'on appelle «*sous-catégorie des modèles locaux de \mathcal{C}* ». Tout ouvert de $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \in \mathcal{C}$ isomorphe à un modèle local est dit «*distingué (relativement à $\mathcal{M}(\mathcal{C})$)*». Il y a bien entendu beaucoup de sous-catégories de modèles locaux, et l'intérêt pour l'une ou l'autre dépend fortement des questions que l'on étudie. L'objectif de notre cours étant la comparaison de différentes théories cohomologiques sur chacune des catégories \mathcal{C} , le choix des modèles locaux est alors guidé par deux critères :

- “Simplicité” dans le calcul de ces cohomologies ; p.ex. trivialité ou simplifications dues à certaines équivalences de catégories remarquables (ligne $\mathcal{M}(\mathcal{C})'$ du tableau).
- Possibilité de passer fonctoriellement, des cohomologies des modèles locaux (cohomologies locales) aux cohomologies de l'espace tout entier (cohomologies globales), via un formalisme combinatoire commun (cohomologie de Čech en l'occurrence).

Cette condition se traduira dans notre cas par la recherche de l'acyclicité des termes des complexes de de Rham et par l'existence de recouvrements par des ouverts distingués dont les intersections finies sont également distinguées.

Dans chaque cas où cela a un sens nous indiquons le complexe de de Rham à considérer et en rappelons quelques propriétés importantes.

A	Espaces annelés				V
	(Esp-ann, Esp-ann $_{(S; \mathcal{O}_S)}$, Esp-ann $_A$)		(Loc-ann, Loc-ann $_{(S; \mathcal{O}_S)}$, Loc-ann $_A$)		
B	Espaces localement annelés				IV
C	I	II	III	IV	V
	$\mathcal{M}(\mathbb{C})$	X^{top} = variété topologique. $\mathcal{O}_{X^{\text{top}}}$ = faisceau des fonctions réelles continues.	X^{diff} = variété différentielle ; topologie ordinaire. $\mathcal{O}_{X^{\text{diff}}}$ = faisceau des fonctions réelles différentiables.	X^{an} = variété analytique complexe ; topologie ordinaire. $\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$ = faisceau des fonctions complexes holomorphes.	
$\mathcal{M}(\mathbb{C})'$	Ouverts de \mathbb{R}^n L'espace \mathbb{R}^n	Ouverts de \mathbb{R}^n L'espace \mathbb{R}^n	Ouverts de \mathbb{C}^n L'espace \mathbb{D}^n	Variétés algébriques affines sur $k = \bar{k}$ Fermés algébriques de \mathbb{A}_k^n	Schémas affines sur un anneau R Spectre d'un anneau ; topologie de Zariski ; localisation.
$(\underline{\Omega}_X^*, d_*)$	Complexe de de Rham $(\underline{\Omega}_{X^{\text{diff}}}^*; d_*)$ Formes différentielles \mathcal{C}^∞ réelles.	Complexe de de Rham $(\underline{\Omega}_{X^{\text{diff}}}^*; d_*)$ Formes différentielles \mathcal{C}^∞ réelles.	Complexe de de Rham $(\underline{\Omega}_{X^{\text{an}}}^*; d_*)$ Formes différentielles holomorphes complexes.	Complexe de de Rham $(\underline{\Omega}_X^*/k; d_*)$ Formes différentielles algébriques relatives à k .	Complexe de de Rham $(\underline{\Omega}_X^*/R; d_*)$ Formes différentielles algébriques relatives à R .
Acyc. de $\underline{\Omega}^i$	Chaque $\underline{\Omega}_{X^{\text{diff}}}^i$ est acyclique, quelle que soit X^{diff} , puisque module sur le faisceau d'anneaux $\Omega_{X^{\text{diff}}}^0$ qui est « <i>mou</i> ».	Chaque $\underline{\Omega}_{X^{\text{diff}}}^i$ est acyclique, quelle que soit X^{diff} , puisque module sur le faisceau d'anneaux $\Omega_{X^{\text{diff}}}^0$ qui est « <i>mou</i> ».	Chaque $\underline{\Omega}_{X^{\text{an}}}^i$ est acyclique si X est une variété de Stein.	Chaque $\underline{\Omega}_X^i/k$ est acyclique lorsque X est une variété affine.	Chaque $\underline{\Omega}_X^i/R$ est acyclique lorsque X est un schéma affine.
Ampl. de $\underline{\Omega}_X^*$	$\Omega_{X^{\text{diff}}}^n = 0$ si $n > \dim_{\mathbb{R}}(X)$	$\Omega_{X^{\text{diff}}}^n = 0$ si $n > \dim_{\mathbb{C}}(X)$	$\Omega_{X^{\text{an}}}^n = 0$ si $n > \dim_{\mathbb{C}}(X)$	$\Omega_X^n/k = 0$ si $n > \dim_k(X)$	$\Omega_X^n/R = 0$ si $n > \dim_R(X)$
LPG	vrai	vrai	vrai	vrai si $\text{car}(k) \neq 0$	vrai si $\mathbb{Q} \subseteq R$
LPL	vrai	vrai	vrai	faux	faux

Ampl. : Amplitude du complexe. LPG : Lemme de Poincaré global pour l'espace affine. LPL : Lemme de Poincaré local.

2.1 [I] Variétés topologiques

2.1.1 [I] C. Objets et morphismes. Une «variété topologique de dimension n » est la donnée d'un espace topologique \mathbf{X} et d'un «atlas n -dimensionnel continu \mathcal{A} pour \mathbf{X} », i.e. :

- i) D'un recouvrement ouvert de \mathbf{X} , $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$.
- ii) D'une famille $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ d'homéomorphismes $\left[\begin{smallmatrix} (3) \\ \end{smallmatrix} \right]$ telle que les bijections, appelées «applications de transition»,

$$\Phi_{\beta,\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha,\beta}) \longrightarrow \phi_\beta(U_{\beta,\alpha})$$

sont *bicontinues* quels que soient $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$.]

Un «morphisme de variétés topologiques» $\varphi : (\mathbf{X}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbf{Y}, \mathcal{B})$ est alors une application continue $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ $\left[\begin{smallmatrix} (3) \\ \end{smallmatrix} \right]$ telle que pour tout $x \in \mathbf{X}$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que $x \in U_\alpha$, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$ tel que $\varphi(x) \in U_\beta$, l'application

$$\phi_\beta \circ \varphi \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

qui est définie au voisinage de $\phi_\alpha(x)$, est *continue* au voisinage de $\phi_\alpha(x)$.]

2.1.1.1. Une équivalence de catégories. Faisons correspondre à une variété topologique $(\mathbf{X}; \mathcal{A})$ le couple $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ où \mathcal{O}_X est le «faisceau d'applications continues de \mathbf{X} à valeurs dans \mathbb{R} » (les fonctions réelles). On vérifie qu'une application entre variétés topologiques $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ est continue, si et seulement si, $f \circ \varphi$ est continue pour toute $f \in \mathcal{O}_Y$. Le morphisme de faisceaux $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$, $f \mapsto f \circ \varphi$ est alors un morphisme de faisceaux de k -algèbres, et la correspondance

$$(\mathbf{X}, \mathcal{A}) \rightsquigarrow (\mathbf{X}; \mathcal{O}_X), \quad (\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}) \rightsquigarrow (\varphi^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X)$$

est fonctorielle et pleinement fidèle dans **Loc-ann** $_{\mathbb{R}}$, d'après la proposition 1.3.5.

!!

La catégorie des variétés topologiques coïncide avec la catégorie d'espaces localement annelés localement isomorphes à l'espace annelé associé à l'un des espaces topologiques \mathbb{R}^n .

!!

2.1.2 [I] M(C). Modèles locaux des variétés topologiques. Bien évidemment la famille d'espaces affines $\{\mathbb{R}^n \mid n = 0, 1, \dots\}$ suffit, mais on rajoute souvent les parties ouvertes des \mathbb{R}^n de sorte que si U et V sont des ouverts distingués de $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ l'intersection $U \cap V$ l'est aussi.

—————×—————

2.2 [II] Variétés différentielles

2.2.1 [II] C. Objets et morphismes. Une «variété différentielle de dimension n » est la donnée d'un espace topologique \mathbf{X} et d'un «atlas n -dimensionnel différentiable \mathcal{A} pour \mathbf{X} », i.e. :

- i) D'un recouvrement ouvert de \mathbf{X} , $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$.
- ii) D'une famille $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ d'homéomorphismes telle que les bijections, appelées «applications de transition»,

$$\Phi_{\beta,\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha,\beta}) \longrightarrow \phi_\beta(U_{\beta,\alpha})$$

sont des *difféomorphismes* de classe \mathcal{C}^∞ quels que soient $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$.

³ Partie entre parenthèses superflue, on la laisse uniquement pour insister sur l'analogie avec les catégories des variétés différentielles, analytiques complexes, algébriques, ...

Un « *morphisme* » entre variétés différentielles $\varphi : (\mathbf{X}; \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{B})$ est alors la donnée d'une application continue $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ telle que pour tout $x \in \mathbf{X}$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que $x \in U_\alpha$, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$ tel que $\varphi(x) \in U_\beta$, l'application

$$\phi_\beta \circ \varphi \circ \phi_{\alpha^{-1}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

qui est définie au voisinage de $\phi_\alpha(x)$, est *différentiable* au voisinage de $\phi_\alpha(x)$.

2.2.1.1. La structure « *standard* » de variété différentielle sur $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$ est celle donnée par l'atlas $\mathcal{A} = \{\text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$. Plus généralement, la structure standard de variété différentielle d'un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est celle induite par la structure standard de \mathbb{R}^n .

2.2.1.2. On appelle « *fonction réelle d'une variété* $(\mathbf{X}; \mathcal{A})$ » tout morphisme de variétés de $(\mathbf{X}; \mathcal{A})$ vers \mathbb{R} muni de sa structure standard de variété différentielle. Le « *faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ de fonctions réelles sur \mathbf{X}* » est le faisceau dont les sections au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ est l'ensemble des fonctions réelles sur U . Comme la multiplication $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application différentiable, le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ est stable par multiplication de fonctions et c'est ainsi un faisceau de \mathbb{R} -algèbres.

On vérifie qu'une application continue $\varphi : (\mathbf{X}; \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{B})$ est un morphisme de variétés différentielles, si pour toute fonction réelle $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}$ la composée $f \circ \varphi$ est une fonction réelle sur $(\mathbf{X}; \mathcal{A})$, *i.e.* $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$. Le morphisme de faisceaux $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$, $f \mapsto f \circ \varphi$ est alors un morphisme de faisceaux de k -algèbres, et la correspondance

$$(\mathbf{X}; \mathcal{A}) \rightsquigarrow (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}), \quad \left(\varphi : (\mathbf{X}; \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{B}) \right) \rightsquigarrow \begin{cases} \varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y} \\ \varphi^\sharp : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}}, \quad f \mapsto f \circ \varphi \end{cases}$$

est fonctorielle et pleinement fidèle dans la catégorie $\mathbf{Loc-ann}_{\mathbb{R}}$, d'après la proposition 1.3.5.

!!

La catégorie des variétés différentielles coïncide avec la catégorie d'espaces localement annelés localement isomorphes à l'espace annelé associé à l'une des variétés \mathbb{R}^n .

!!

2.2.2 [II] $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. Modèles locaux des variétés différentielles. Comme dans le cas topologique on peut tantôt se limiter à la catégorie des espaces affines $\{\mathbb{R}^n \mid n = 0, 1, \dots\}$ munis de leur structure standard de variété différentielle pour le cas des variétés séparés, tantôt considérer la catégorie des ouverts des espaces affines munis de leurs structures standard des variétés différentielles.

On démontre que toute variété différentielle connexe séparée localement difféomorphe à \mathbb{R}^n admet des recouvrements localement finis par des ouverts difféomorphes à \mathbb{R}^n dont les intersections (finies) sont également difféomorphes à \mathbb{R}^n . De tels recouvrements sont appelés des « *bons recouvrements* ».

2.2.3 [II] $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^*$. Complexe de de Rham. C'est le complexe $(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^*, d_*)$ des « *formes différentielles réelles sur \mathbf{X}* »; où $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^*$ est le faisceau des sections différentiables de l'« *algèbre extérieure réelle $\bigwedge_{\mathbb{R}}^*(\mathcal{T}^*\mathbf{X})$* » du fibré cotangent $\mathcal{T}^*\mathbf{X}$, et où d_* est la « *différentielle extérieure* » qui est un morphisme de faisceaux de \mathbb{R} -espaces vectoriels $d_i : \underline{\Omega}^i \rightarrow \underline{\Omega}^{i+1}$ vérifiant $d_{i+1} \circ d_i = 0$. (Chaps. §1 et §2 du cours.)

Pour tout ouvert d'un espace affine $U \subseteq \mathbb{R}^n$, on a $\underline{\Omega}_U^j = \mathcal{O}_U \otimes_{\mathbb{R}} (\bigwedge_{\mathbb{R}}^j \mathbb{R}^n)$, soit :

$$\underline{\Omega}_U^j = \bigoplus_{0 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} \mathcal{O}_U dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_j}$$

2.2.4 [II] Acyc. Acyclicité de chaque $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^i$. Résulte de prouver que le faisceau d'anneaux $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}}^0$ est mou, de faire appel au théorème qui affirme que tout $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}}^0$ -module, par exemple chaque $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^i$, est mou aussi, et enfin à utiliser le théorème qui affirme qu'un faisceau mou est $\Gamma(\mathbf{X}; -)$ -acyclique. On trouvera dans le chapitre §13 du cours une preuve de l'acyclité des faisceaux $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}}^k$ qui ne fait pas allusion aux faisceaux mous mais qui en utilise les propriétés les plus importantes. Par conséquent, l'application canonique :

$$\boxed{h \cdot \Gamma(\mathbf{X}^{\text{diff}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}}^*) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H} \cdot (\mathbf{X}^{\text{diff}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}}^*)} \quad (*_{\mathbb{R}})$$

est **bijective**.

2.2.5 [II] Ampl. Amplitude du complexe de de Rham. ⁽⁴⁾ Dans le cas connexe c'est évidemment l'intervalle $[0, \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{X})]$.

2.2.6 [II] LPG. Lemme de Poincaré global pour l'espace affine. Le lemme est vrai, se reporter au chapitre §6 du cours.

2.2.7 [II] LPL. Lemme de Poincaré local. Vrai également puisque tout point admet une base de voisinages difféomorphes à l'espace affine.

Par conséquent, si \mathbf{X}^{diff} est une variété différentielle de dimension n , le complexe de faisceaux

$$\mathbf{0} \longrightarrow \underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}}^0 \xrightarrow{d_0} \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}}^1 \xrightarrow{d_1} \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}}^2 \xrightarrow{d_2} \dots \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}}^{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{X})} \longrightarrow \mathbf{0}$$

est exact et l'application induite par ε :

$$\boxed{H \cdot (\mathbf{X}^{\text{top}}; \underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{X}}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H} \cdot (\mathbf{X}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}}^*)} \quad (**_{\mathbb{R}})$$

est **bijective**.

2.2.8 Récapitulatif. Pour les variétés différentielles on a des isomorphismes canoniques :

$$\boxed{H \cdot (\mathbf{X}^{\text{diff}}; \underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{X}}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H} \cdot (\mathbf{X}^{\text{diff}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}}^*) \xleftarrow{\simeq} h \cdot \Gamma(\mathbf{X}^{\text{diff}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}}^*) = (\Omega(\mathbf{X}^{\text{diff}})^*, d_*)}$$

—————×—————

2.3 [III] Variétés analytiques complexes

2.3.1 [III] C. Objets et morphismes. Les définitions sont identiques à celles des variétés différentielles à quelques différences près ; à savoir :

- Le corps des nombres réels \mathbb{R} est remplacé par le corps des nombres complexes \mathbb{C} . La topologie des espaces affines \mathbb{C}^n est la topologie séparée de la métrique réelle habituelle.
- La « différentiabilité » est remplacée par « différentiabilité complexe » (ou « holomorphic »).

2.3.1.1. Une « variété analytique complexe de dimension n » est la donnée d'un espace topologique \mathbf{X} et d'un « atlas n -dimensionnel holomorphe \mathcal{A} pour \mathbf{X} », i.e. :

i) D'un recouvrement ouvert de \mathbf{X} , $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$.

⁴ On appelle « amplitude » d'un module \mathbb{Z} -gradué C^* (et donc d'un complexe (C^*, d_*)) le plus petit intervalle entier $I = [m, n]$ tel que $C^i = 0$ pour tout $i \notin I$. On appelle « amplitude cohomologique » d'un complexe (C^*, d_*) l'amplitude du module de cohomologie $\{h^k(C^*, d_*)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

ii) D'une famille $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow W_\alpha \subseteq \mathbb{C}^n\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ d'homéomorphismes sur de parties ouvertes W_α de \mathbb{C}^n , telle que les bijections, appelées «*applications de transition*»,

$$\Phi_{\beta,\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha,\beta}) \longrightarrow \phi_\beta(U_{\beta,\alpha})$$

sont des *homéomorphismes biholomorphes* quels que soient $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$.

Un «*morphisme de variétés analytiques complexes*» $\varphi : (\mathbf{X}; \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{B})$ est alors la donnée d'une application continue $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ telle que pour tout $x \in \mathbf{X}$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que $x \in U_\alpha$, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$ tel que $f(x) \in U_\beta$, l'application

$$\phi_\beta \circ \varphi \circ \phi_\alpha^{-1} : W_\alpha \rightarrow W_\beta,$$

définie *a priori* seulement au voisinage de $\phi_\alpha(x)$, est *holomorphe* en $\phi_\alpha(x)$.

2.3.1.2. La structure «*standard*» de variété analytique complexe sur $\mathbf{X} = \mathbb{C}^n$ est celle donnée par l'atlas $\mathcal{A} = \{\text{id} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n\}$. Plus généralement, la structure standard de variété analytique complexe d'un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}^n$ est celle induite par la structure standard de \mathbb{C}^n .

2.3.1.3. On appelle «*fonction holomorphe d'une variété* $(\mathbf{X}; \mathcal{A})$ » tout morphisme de variétés de $(\mathbf{X}; \mathcal{A})$ vers \mathbb{C} muni de sa structure standard de variété analytique complexe. Le «*faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ de fonctions holomorphes sur \mathbf{X}* » est le faisceau dont les sections au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur U . Comme la multiplication $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une application holomorphe, le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ est stable par multiplication de fonctions et c'est donc un faisceau de \mathbb{C} -algèbres.

On vérifie qu'une application continue $\varphi : (\mathbf{X}; \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{B})$ est un morphisme de variétés analytiques complexes, si et seulement si pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}$ la composée $f \circ \varphi$ est une fonction holomorphe sur $(\mathbf{Y}, \mathcal{B})$, *i.e.* $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$. Le morphisme de faisceaux $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$, $f \mapsto f \circ \varphi$ est alors un morphisme de faisceaux de k -algèbres, et la correspondance

$$(\mathbf{X}; \mathcal{A}) \rightsquigarrow (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}), \quad \left(\varphi : (\mathbf{X}; \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{B}) \right) \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y} \\ \varphi^\sharp : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}}, \quad f \mapsto f \circ \varphi \end{array} \right.$$

est fonctorielle et pleinement fidèle dans la catégorie $\mathbf{Loc-ann}_{\mathbb{C}}$, d'après la proposition 1.3.5.

!!

La catégorie des variétés analytiques complexes coïncide avec la catégorie d'espaces localement annelés localement isomorphes à l'espace annelé associé à un ouvert de l'une des variétés analytiques complexes \mathbb{C}^n .

!!

2.3.2 [III] $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. Modèles locaux. Contrairement au cas topologique et différentiel, les espaces affines $\{\mathbb{C}^n \mid n = 0, 1, \dots\}$ munis de leurs structures standard de variétés analytiques complexes ne suffisent plus à décrire toutes les variétés analytiques complexes. En effet, déjà sur la droite complexe \mathbb{C} , on sait d'après le théorème d'uniformisation de Riemann, que le disque unité ouvert \mathbb{D} n'est pas biholomorphiquement isomorphe à \mathbb{C} tout entier, mais deux disques bornés sont toujours biholomorphiquement isomorphes. Il s'ensuit que pour les variétés analytiques complexes de dimension 1, *i.e.* les surfaces de Riemann, le disque unité ouvert \mathbb{D} est un modèle local suffisant. Plus généralement, le produit \mathbb{D}^n est un modèle local pour les variétés analytiques complexes de dimension n . La catégorie des modèles locaux pour les variétés analytiques complexes est la catégorie des ouverts des espaces affines \mathbb{C}^n (où des \mathbb{D}^n) munis de leurs structures standard des variétés analytiques complexes.

2.3.3 [III] $\underline{\Omega}_X^*$. Complexe de de Rham

- L'algèbre extérieure réelle $\bigwedge_{\mathbb{R}}(\mathcal{T}^*\mathbf{X})$ du fibré cotangent est remplacée par algèbre extérieure complexe $\bigwedge_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}^*\mathbf{X})$. En particulier,

$$\bigwedge_{\mathbb{C}}^j(\mathcal{T}^*\mathbf{X}) = 0, \quad \text{si } j > \dim_{\mathbb{C}}(\mathbf{X}),$$

à la différence du cas réel où l'on aurait $\bigwedge_{\mathbb{R}}^j(\mathcal{T}^*\mathbf{X}) = 0$, seulement pour $j > 2 \dim_{\mathbb{C}}(\mathbf{X})$.

2.3.3.1. Le complexe de de Rham à considérer est celui des « formes différentielles holomorphes », c'est à dire le faisceau $\underline{\Omega}_{X^{\text{an}}}^*$ des sections holomorphes du fibré $\bigwedge_{\mathbb{C}}^{\bullet}(\mathcal{T}^*\mathbf{X})$. La « différentielle extérieure complexe » est un morphisme de faisceaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels $d_i : \underline{\Omega}_{X^{\text{an}}}^i \rightarrow \underline{\Omega}_{X^{\text{an}}}^{i+1}$ vérifiant $d_{i+1} \circ d_i = 0$.

Pour tout ouvert d'un espace affine $U \subseteq \mathbb{C}^n$, on a $\underline{\Omega}_U^j = \mathcal{O}_U \otimes_{\mathbb{C}} (\bigwedge_{\mathbb{C}}^j \mathbb{C}^n)$, soit :

$$\underline{\Omega}_U^j = \bigoplus_{0 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} \mathcal{O}_U dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_j}.$$

2.3.3.2. Suite à la remarque précédente, le faisceau $\underline{\Omega}_{X^{\text{an}}}^j$ est un $\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$ -module cohérent.

2.3.4 [III] Acyc. Acyclicité de chaque $\underline{\Omega}_X^i$. À la différence du cas différentiel réel, il n'existe pas dans le contexte holomorphe des fonctions à support compact non nulles, ni donc pas, non plus, des partitions de l'unité, de sorte que le faisceau $\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$ n'a aucune chance d'être mou. Il existe par contre une vaste catégorie d'espaces annelés sur lesquels les faisceaux $\underline{\Omega}_{X^{\text{an}}}^j$ sont acycliques, il s'agit des « espaces de Stein »⁽⁵⁾. On a :

Théorème B de Cartan. Soit $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ un espace de Stein. Soit \mathcal{M} un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules. Alors $H^{>0}(\mathbf{X}; \mathcal{M}) = 0$.

2.3.4.1. Exemples d'espaces de Stein.

- Les espaces affines \mathbb{C}^n .
- Les fermés algébriques de \mathbb{C}^n ⁽⁶⁾.
- Les ouverts algébriques principaux de \mathbb{C}^n .

2.3.4.2. Critère cohomologique pour être de Stein. Le critère pour être de Stein suivant est l'analogue exact du critère d'affinité de Serre (2.4.6) en géométrie algébrique et en théorie des schémas. C'est une réciproque du théorème **B** de Cartan.

Théorème. Soit $(X^{\text{an}}; \mathcal{O}_{X^{\text{an}}})$ un espace analytique complexe irréductible. Les assertions suivantes sont équivalentes⁽⁷⁾.

- a) $(X^{\text{an}}; \mathcal{O}_{X^{\text{an}}})$ est un espace de Stein.

⁵ Voir chapitres VII et VIII (pp. 209, 243) de [GR]. On pourra s'y reporter également pour la définition de la catégorie d'« espaces analytiques complexes », sous-catégorie pleine de **Loc-ann $_{\mathbb{C}}$** dont les espaces sont plus généraux que les « variétés analytiques complexes » en ce sens qu'ils peuvent être singuliers. La définition de la catégorie des espaces analytiques complexes est identique à celle des variétés algébriques complexes à ceci près que l'on remplace l'algébricité des fonctions par leur analyticité. L'article [GaGa] donne un aperçu très rapide de cette catégorie.

⁶ La plupart du temps il s'agit d'espaces singuliers.

⁷ Voir chap. VIII thm. 20 (p. 246) de [GR].

- b) $H^{>0}(\mathbf{X}^{\text{an}}; \mathcal{M}) = 0$ pour tout $\mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}$ -module cohérent \mathcal{M} .
c) $H^{>0}(\mathbf{X}^{\text{an}}; \mathcal{I}) = 0$ pour tout sous- $\mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}$ -module cohérent \mathcal{I} de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}$.

2.3.4.3. La remarque 2.3.3.2 et le théorème **B** de Cartan donnent l'acyclicité des $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^j$ lorsque \mathbf{X}^{an} est un ouvert algébrique principal d'un espace affine complexe. Par conséquent, l'application canonique :

$$\boxed{h \cdot \Gamma(\mathbf{X}^{\text{an}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H}^*(\mathbf{X}^{\text{an}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*)} \quad (*_{\mathbb{C}})$$

est **bijective** pour tout ouvert algébrique principal $\mathbf{X}^{\text{an}} \subseteq \mathbb{C}^n$.

2.3.5 [III] Ampl. Amplitude du complexe de de Rham. Il s'agit de $[0, \dim_{\mathbb{C}}(\mathbf{X}^{\text{an}})]$. Le complexe de de Rham holomorphe d'une variété analytique complexe a donc une amplitude à priori moitié que celle du complexe de de Rham différentiel réel du même espace vu comme variété différentielle réelle.

2.3.6 [III] LPG. Lemme de Poincaré global pour l'espace affine. Il est vérifié et pour essentiellement les mêmes raisons que dans le cas réel.

2.3.7 [III] LPL. Lemme de Poincaré local. Vrai également puisque tout point admet une base de voisinages isomorphes à l'espace affine.

Par conséquent, si \mathbf{X}^{an} est une variété analytique complexe, le complexe de faisceaux

$$\mathbf{0} \longrightarrow \underline{\mathbb{C}}_{\mathbf{X}^{\text{an}}} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^0 \xrightarrow{d_0} \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^1 \xrightarrow{d_1} \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^2 \xrightarrow{d_2} \dots \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\dim_{\mathbb{C}}(\mathbf{X})} \longrightarrow \mathbf{0}$$

est exact et l'application induite par ε :

$$\boxed{H^*(\mathbf{X}^{\text{top}}; \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H}^*(\mathbf{X}^{\text{an}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*)} \quad (**_{\mathbb{C}})$$

est **bijective**.

2.3.8 Récapitulatif

- a) Soit \mathbf{X}^{an} une variété analytique complexe, notons \mathbf{X}^{diff} la variété différentielle réelle sous-jacente. On a des isomorphismes canoniques (cf. $(**_{\mathbb{R}})$ et $(**_{\mathbb{C}})$)

$$\boxed{\mathbb{H}^*(\mathbf{X}^{\text{diff}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}}^*) \xleftarrow{\simeq} H^*(\mathbf{X}^{\text{top}}; \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H}^*(\mathbf{X}^{\text{an}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*)}$$

- b) Pour les variétés analytiques complexes **de Stein** on a des isomorphismes canoniques :

$$\boxed{H^*(\mathbf{X}^{\text{top}}; \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H}^*(\mathbf{X}^{\text{an}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*) \xleftarrow{\simeq} h \cdot \Gamma(\mathbf{X}^{\text{an}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*) = (\Omega(\mathbf{X}^{\text{an}})^*, d_*)}$$

Par conséquent : *La cohomologie de de Rham d'une variété différentielle admettant une structure complexe qui en fait une variété analytique complexe de Stein est toujours nulle en degrés supérieurs à la moitié de la dimension.*

—————×—————

2.4 [IV] Variétés algébriques

2.4.1 Préliminaires. À la différence des catégories précédentes, les variétés algébriques ne sont pas *uniquement* des recollements d'un même espace (\mathbb{R}^n dans le cas topologique ou différentiel réels,

\mathbb{D}^n dans le cas analytique complexe) on recolle des espaces plus généraux appelés des «variétés (algébriques) affines (sur k)». Les paragraphes suivants rappellent leur définition.

2.4.1.1. Fonctions régulières de l'espace affine. On note \mathbb{A}_k^n le « k -espace affine de dimension n ». On appelle «fonction régulière» sur \mathbb{A}_k^n toute «application polynomiale» $f : \mathbb{A}_k^n \rightarrow k$. Si nous fixons un repère affine pour \mathbb{A}_k^n de coordonnées (x_1, \dots, x_n) l'application f s'exprime sous la forme d'un polynôme unique $F(X_1, \dots, X_n) \in k[\overline{X}]$ (puisque k est infini). La multiplication des fonctions régulières est une fonction régulière et l'ensemble $\mathcal{R}(\mathbb{A}_k^n)$ de telles applications est muni d'une structure canonique d'anneau isomorphe à l'anneau $k[\overline{X}]$ des polynômes à n variables et coefficients dans k .

! Dans les sous-paragraphes suivants nous notons provisoirement $\mathbf{X} := \mathbb{A}_k^n$ et donc $\mathcal{R}(\mathbf{X}) := \mathcal{R}(\mathbb{A}_k^n)$. !

2.4.1.2. Ensembles algébriques affines sur k . On appelle «sous-ensemble algébrique de \mathbf{X} » toute partie $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ pour laquelle il existe une famille de fonctions $\{f_\alpha \in \mathcal{R}(\mathbf{X})\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ telle que :

$$\mathbf{Y} = \{x \in \mathbf{X} \mid f_\alpha(x) = 0, \forall \alpha \in \mathfrak{A}\}.$$

Il est clair que \mathbf{Y} est aussi l'«ensemble des zéros» des fonctions de l'idéal $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A} \rangle$ engendré par la famille $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$; nous pouvons donc tout aussi bien déclarer qu'un sous-ensemble algébrique de \mathbf{X} est l'ensemble des «zéros d'un idéal \mathbf{I} de $\mathcal{R}(\mathbf{X})$ » noté :

$$\mathbf{Z}(\mathbf{I}) = \{x \in \mathbf{X} \mid f(x) = 0, \forall f \in \mathbf{I}\}.$$

Lemme. Soient $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{I}_\alpha$ des idéaux. On a ⁽⁸⁾ :

$$\bullet \mathbf{Z}(\langle 1 \rangle) = \emptyset \text{ et } \mathbf{Z}(\langle 0 \rangle) = \mathbf{X}, \quad \bullet \mathbf{Z}(\mathbf{I}) \cup \mathbf{Z}(\mathbf{J}) = \mathbf{Z}(\mathbf{IJ}), \quad \bullet \bigcap_\alpha \mathbf{Z}(\mathbf{I}_\alpha) = \mathbf{Z}(\sum_\alpha \mathbf{I}_\alpha)$$

Par conséquent, les sous-ensembles algébriques de \mathbf{X} sont les fermés d'une topologie.

2.4.1.3. Topologie de Zariski de \mathbf{X} . On appelle ainsi la topologie de \mathbf{X} dont les fermés sont ses sous-ensembles algébriques, appelés dorénavant «les fermés de Zariski de \mathbf{X} ».

2.4.1.4. Exercice. Montrer que si k est un corps infini (p.ex. algébriquement clos), la topologie de Zariski de \mathbf{X} n'est jamais séparée. Qu'en est-t-il si k est un corps fini?

2.4.1.5. Hypersurfaces et ouverts principaux de \mathbf{X} . On appelle «hypersurface de \mathbf{X} » l'ensemble des zéros d'une seule fonction $f \in \mathcal{R}(\mathbf{X})$, on la note $\mathbf{Z}(f)$, son complémentaire est un «ouvert principal» et est noté $D(f)$.

2.4.1.6. Proposition

- Pour tous $f, g \in \mathcal{R}(\mathbf{X})$ on a $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.
- Les ouverts principaux de \mathbf{X} constituent une base d'ouverts pour la topologie de Zariski.
- \mathbf{X} est quasi-compacte.

⁸ On note \mathbf{IJ} l'ensemble des sommes finies $\sum_i f_i g_i$ avec $f_i \in \mathbf{I}$ et $g_i \in \mathbf{J}$; c'est un idéal de $\mathcal{R}(\mathbf{X})$. Si $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{J}$ sont des idéaux, on a $(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)\mathbf{J} = \mathbf{I}_1\mathbf{J} + \mathbf{I}_2\mathbf{J}$.

d) Si k est algébriquement clos on a $D(f) \supseteq D(g)$, si et seulement si $g \in \sqrt{\langle f \rangle}$ ⁽⁹⁾. En particulier, $D(f) = \mathbf{X}$, si et seulement si f est inversible.

Commentaires sur la preuve. L'assertion (a) résulte aussitôt du fait que k est un corps. (b) puisque si $x \notin \mathbf{Z}(\mathbf{I})$, il existe $f \in \mathbf{I}$ telle que $f(x) \neq 0$ auquel cas $x \in D(f) \subseteq \mathbf{CZ}(\mathbf{I})$. (c) Admet deux justifications, la «quasi-compacité» est la propriété qui dit que de tout recouvrement ouvert de \mathbf{X} on peut extraire un sous-recouvrement fini, propriété équivalente à dire que si une famille décroissante de fermés est d'intersection vide alors l'un des fermés de la famille est vide. Or, à une suite décroissante de fermés correspond une suite croissante d'idéaux de $\mathcal{R}(\mathbf{X})$ est comme cet anneau est noethérien, la suite d'idéaux est stationnaire de même alors que la suite de fermés; etc. Une autre preuve (valable dans le cas non noethérien et plus généralement dans le contexte des schémas affines) repose sur (b), en effet tout recouvrement ouvert admet un raffinement par des ouverts principaux et si $\mathbf{X} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} D(f_\alpha)$, alors $\emptyset = \mathbf{Z}(\langle f_\alpha \rangle)$ et $\langle f_\alpha \rangle = \langle 1 \rangle$ (car k est algébriquement clos), mais alors $1 \in \langle f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_r} \rangle$ pour une certaine famille finie $\{f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_r}\}_{\alpha_i \in \mathfrak{A}}$, autrement dit $\mathbf{X} = \bigcup_{1 \leq i \leq r} D(f_{\alpha_i})$. (d) est conséquence du théorème des zéros de Hilbert qui affirme que la correspondance bijective entre les sous-ensembles algébriques de \mathbf{X} et les idéaux *radicaux* de $\mathcal{R}(\mathbf{X})$. L'assertion (d) est fautive si k n'est pas algébriquement clos, par exemple dans $\mathbb{R}[X]$ on a $D(X^2 + 1) = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$. ■

2.4.1.7. Fonctions régulières sur un ouvert principal de \mathbf{X} . Soit f une fonction régulière non nulle de \mathbf{X} . Toute fonction régulière $g : \mathbf{X} \rightarrow k$ donne, par restriction, une application $g : D(f) \rightarrow k$ et cette correspondance est injective puisque k est infini. De plus l'application $f : D(f) \rightarrow k$ est nulle part nulle. On définit alors l'anneau des «fonctions régulières sur l'ouvert principal $D(f)$ » comme le localisé de $\mathcal{R}(\mathbf{X})$ en f , on pose donc $\mathcal{R}(D(f)) := \mathcal{R}(\mathbf{X})_f$ ⁽¹⁰⁾. On a ainsi le morphisme canonique de «restriction de fonctions régulières» $\rho_f^1 : \mathcal{R}(D(1)) \rightarrow \mathcal{R}(D(f))$ défini par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(\mathbf{X}) & \xrightarrow{\rho_f^1} & \mathcal{R}(D(f)) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{R}(\mathbf{X}) & \xrightarrow{\nu_f} & \mathcal{R}(\mathbf{X})_f, \quad x \mapsto \frac{x}{1} \end{array} \quad (\rho)$$

2.4.1.8. Faisceau des fonctions régulières sur \mathbf{X} . D'après 2.4.1.6-0d, l'inclusion $D(f) \supseteq D(g)$ implique que f est inversible dans $\mathcal{R}(\mathbf{X})_g$ de sorte que le morphisme canonique de restriction d'algèbres $\rho : \mathcal{R}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{R}(D(g))$ se factorise d'une et une unique manière à travers $\mathcal{R}(D(f))$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(\mathbf{X}) = \mathcal{R}(D(1)) & \xrightarrow{\rho_g^1} & \mathcal{R}(D(g)) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{R}(D(1)) & \xrightarrow{\rho_f^1} \mathcal{R}(D(f)) \xrightarrow{\rho_g^f} & \mathcal{R}(D(g)) \end{array}$$

La correspondance $D(f) \rightsquigarrow \mathcal{R}(\mathbf{X})_f$, $(D(f) \supseteq D(g)) \rightsquigarrow \rho_g^f$ est un préfaisceau de k -algèbres $\mathcal{A}_{\mathbf{X}}$ sur la catégorie des ouverts principaux de \mathbf{X} et comme ces ouverts sont une base pour la topologie de Zariski de \mathbf{X} (2.4.1.6-0b), les germes de $\mathcal{A}_{\mathbf{X}}$ définissent un «espace étalé au-dessus de \mathbf{X} » ⁽¹¹⁾

⁹ Pour tout idéal \mathbf{I} on note $\sqrt{\mathbf{I}}$ son «radical», i.e. l'ensemble des f telles que $f^N \in \mathbf{I}$ pour $N \gg 0$. On a $\sqrt{\mathbf{I}} = \sqrt{\sqrt{\mathbf{I}}}$. On appelle «radical» tout idéal \mathbf{I} tel que $\mathbf{I} = \sqrt{\mathbf{I}}$.

¹⁰ Se reporter au chapitre §16 du cours.

¹¹ Voir [Go] chap. II §1.2 p. 110.

dont les sections locales continues donnent le « faisceau des fonctions régulières de \mathbf{X} » noté $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$. Le couple $(\mathbf{X}^{\text{zar}}, \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est l'espace annelé associé à l'espace affine $\mathbf{X} = \mathbb{A}_k^n$.

2.4.1.9. Fonctions régulières sur un fermé de Zariski \mathbf{Y} de \mathbb{A}_k^n . On procède comme pour les ouverts principaux 2.4.1.7. Soit \mathbf{Y} un fermé de Zariski de \mathbf{X} . On appelle « fonction régulière sur \mathbf{Y} » et l'on note $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ leur ensemble, toute application de \mathbf{Y} vers k induite par une application régulière de \mathbf{X} . Si nous notons $\mathcal{I}(\mathbf{Y})$ l'idéal des fonctions de $\mathcal{R}(\mathbf{X})$ qui s'annulent sur \mathbf{Y} , on a clairement

$$\mathcal{R}(\mathbf{Y}) = \frac{\mathcal{R}(\mathbf{X})}{\mathcal{I}(\mathbf{Y})} \quad (\diamond)$$

Proposition. *L'anneau $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ est une k -algèbre de type fini réduite, i.e. sans élément nilpotent.*

2.4.1.10. Espace annelé associé à un fermé de Zariski. La démarche pour définir la topologie de Zariski de \mathbf{Y} , puis le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{Y}}$ des k -algèbres régulières sur \mathbf{Y} , est rigoureusement la même que celle des paragraphes précédents en remplaçant \mathbf{X} par \mathbf{Y} .

Théorème (¹⁴)

- a) Pour tout ouvert principal $D(f) \subseteq \mathbf{Y}$, on a $\Gamma(D(f); \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) = \mathcal{R}(\mathbf{Y})_f$.
- b) L'anneau des germes du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{Y}}$ en $y \in \mathbf{Y}$ est isomorphe à l'anneau local $\mathcal{R}(\mathbf{Y})_{\mathfrak{M}_y}$ où \mathfrak{M}_y désigne l'idéal (maximal) de $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ des fonctions qui s'annulent en y (¹⁵).

! À partir de maintenant la notation ' \mathbf{X} ' cesse de référer uniquement aux espaces affines. !

2.4.1.11. Catégorie des variétés affines sur k . Nous appellerons « variété (algébrique) affine sur k » la donnée d'un fermé de Zariski d'un espace affine sur k muni de sa topologie de Zariski (¹⁶). Un « morphisme de variétés affines de \mathbf{X} vers \mathbf{Y} » est une application continue $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ telle que pour toute fonction régulière $f : \mathbf{Y} \rightarrow k$ la composée $f \circ \varphi : \mathbf{X} \rightarrow k$ soit une fonction régulière. On remarquera le lemme suivant qui donne une définition alternative de morphisme entre variétés algébriques affines.

Lemme. *Supposons $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{A}_k^n$ et $\mathbf{Y} \subseteq \mathbb{A}_k^m$. Un morphisme de variétés algébriques de \mathbf{X} vers \mathbf{Y} est la restriction d'une application polynomiale de \mathbb{A}_k^n vers \mathbb{A}_k^m .*

Indication. Soit $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ un morphisme de variétés affines. Fixons un repère affine sur \mathbb{A}_k^n (resp. sur \mathbb{A}_k^m) de coordonnées $\bar{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ (resp. $\bar{Y} := \{Y_1, \dots, Y_m\}$). Pour chaque $x \in \mathbf{X}$ on a

$$\varphi(x) = (Y_1(\varphi(x)), \dots, Y_m(\varphi(x)))$$

Or, chaque $Y_i \circ \varphi$ étant une fonction régulière de \mathbf{X} par définition de morphisme, c'est la restriction d'une fonction régulière de \mathbb{A}_k^n (2.4.1.9-(\diamond)) par exemple de la fonction polynomiale $P_i(\bar{X}) \in \mathcal{R}(\mathbb{A}_k^n)$.

¹⁴ Voir [Har] chap. I §3 th. 3.2 p. 17, et chap II §2 prop. 2.2 p. 71.

¹⁵ Ce que nous notons $\mathcal{I}(y)$ en 2.4.1.9.

¹⁶ On définit parfois une variété affine comme un fermé de Zariski irréductible, i.e. tel qu'il ne peut être réalisé comme réunion de deux fermés plus petits (cf. [Har] chap. I §1 p. 3)

On a donc

$$\varphi(x) = ((Y_1 \circ \varphi)(x), \dots, (Y_m \circ \varphi)(x)) = (P_1(\bar{X}(x)), \dots, P_m(\bar{X}(x))),$$

où, bien évidemment, l'application $x \mapsto (P_1(\bar{X}(x)), \dots, P_m(\bar{X}(x)))$ est une application polynomiale de \mathbb{A}_k^n vers \mathbb{A}_k^m . \blacksquare

2.4.1.12. Une équivalence de catégories. Dans le paragraphe 2.4.1.10 nous avons associé à chaque variété affine \mathbf{X} l'espace localement annelé sur k noté $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$. Si maintenant on se donne un morphisme de variétés algébriques $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$, la composition par φ définit, pour chaque $f \in \mathcal{R}(\mathbf{Y})$, un morphisme de k -algèbres $\varphi^\sharp(D(f)) : \mathcal{R}(D(f)) \rightarrow \mathcal{R}(D(f \circ \varphi)) = \mathcal{R}(\varphi^{-1}(D(f)))$, tel que les diagrammes pour $D(f) \supseteq D(g)$:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(D(f); \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) & \xrightarrow{\varphi^\sharp(D(f))} & \Gamma(D(f); \varphi_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \\ \rho_g^f \downarrow & & \downarrow \rho_{g \circ \varphi}^{f \circ \varphi} \\ \Gamma(D(g); \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) & \xrightarrow{\varphi^\sharp(D(g))} & \Gamma(D(g); \varphi_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \end{array}$$

sont commutatifs. La correspondance $D(f) \rightsquigarrow \varphi^\sharp(D(f))$ est un morphisme de préfaisceaux de k -algèbres de $\mathcal{A}_{\mathbf{Y}}$ vers $\varphi_* \mathcal{A}_{\mathbf{X}}$ (cf. 2.4.1.8) induisant un morphisme de faisceau de k -algèbres $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$.

La proposition suivante résulte d'appliquer la proposition 1.3.5.

2.4.1.13. Proposition. *La correspondance de la catégorie des variétés affines sur k qui associe*

$$\mathbf{X} \rightsquigarrow (\mathbf{X}^{\text{zar}}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}), \quad (\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}) \rightsquigarrow (\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$$

est un foncteur covariant pleinement fidèle dans la catégorie $\mathbf{Loc-ann}_k$.

2.4.1.14. Une autre équivalence de catégories

Théorème (¹⁹). *La correspondance de la catégorie des variétés affines sur k qui associe*

$$\mathbf{X} \rightsquigarrow \mathcal{R}(\mathbf{X}), \quad (\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}) \rightsquigarrow (\varphi^\sharp(D(1)) : \mathcal{R}(\mathbf{Y}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{X}))$$

est une équivalence de catégories sur la catégorie des k -algèbres de type fini réduites.

2.4.1.15. Affinité des ouverts principaux d'une variété affine. Étant donnée une variété affine sur k , notée \mathbf{Y} , d'anneau de fonctions régulières $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$, le produit cartésien $\mathbf{Y} \times \mathbb{A}_k^1$ est une variété affine et l'on a

$$\mathcal{R}(\mathbf{Y} \times \mathbb{A}_k^1) \simeq \mathcal{R}(\mathbf{Y})[T].$$

On remarque alors que pour $f \in \mathcal{R}(\mathbf{Y})$ non nulle, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{Y} \times k \\ y & \longmapsto & (y, f(y)) \end{array}$$

est un morphisme de variétés algébriques admettant comme inverse à gauche la projection sur la première coordonnée $p_1 : \mathbf{Y} \times k \rightarrow \mathbf{Y}$, $(y, t) \mapsto y$. Il s'ensuit que φ induit un homéomorphisme entre l'ouvert $D(f) \subseteq \mathbf{Y}$ et l'image de φ qui n'est autre que l'hypersurface $\mathbf{Z}(Tf - 1) \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbb{A}_k^1$. Ces remarques prouvent la proposition très utile suivante.

¹⁹ Voir [Har] chap. I §3 cor. 3.8 p. 20, qui montre l'équivalence entre la catégorie des variétés algébriques irréductibles et celle des algèbres de type fini intègres.

Proposition. *Les ouverts principaux des variétés affines sont des variétés affines.*

2.4.1.16. Variétés quasi-affines sur k . On appelle ainsi tout ouvert d'une variété affine $U \subseteq \mathbf{X}$. Étant donnés $U \subseteq \mathbf{X}$ et $V \subseteq \mathbf{Y}$, un « *morphisme* » $\varphi : U \rightarrow V$ est alors une application continue telle que $\mathcal{O}_{\mathbf{Y}}|_V \circ \varphi \subseteq \mathcal{O}_{\mathbf{X}}|_U$.

Contrairement au cas affine, les fonctions régulières globales d'une variété quasi-affine ne déterminent pas toujours l'espace. Par exemple, si $\mathbf{X} = \mathbb{C}^2$ et $U = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, l'application de restriction $\mathcal{R}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{R}(U)$ est bijective alors que l'inclusion $U \subseteq \mathbf{X}$ est stricte.

2.4.2 [IV] C. Objets et morphismes. L'idée est de recoller les variétés affines, soit en tant qu'espaces annelés, soit à l'aide d'atlas comme pour les catégories des variétés : topologiques, différentiables et analytiques complexes. Mais à la différence de ces catégories, il n'est plus vrai que tout point admette une base de voisinages isomorphes à un espace affine. Cette différence vient non seulement du fait que maintenant nous admettons les singularités, mais aussi parce que, en géométrie algébrique même sans singularités, l'assertion n'est plus vraie. Par exemple, dans la droite affine $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ avec $\mathcal{R}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1) = \mathbb{C}[X]$, le complémentaire d'un point x est isomorphe à l'ouvert principal $U := D(X)$ et c'est une variété affine d'après 2.4.1.15. Mais alors, tout morphisme $\varphi : \mathbb{A}^1 \rightarrow U$ est déterminé par le morphisme de k -algèbres $\varphi^\sharp : \mathcal{R}(U) \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{A}_k^1)$ (2.4.1.14), c'est-à-dire par un morphisme de \mathbb{C} -algèbres de $\mathbb{C}[X]_X$ vers $\mathbb{C}[X]$. Or, un tel morphisme est entièrement déterminé par l'image du monôme X qui doit être un polynôme *inversible* de $\mathbb{C}[X]$, donc constant non nul. Ceci signifie que les seuls morphismes de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ dans U sont les applications constantes.

2.4.2.1. Variété algébrique sur k , par atlas. Une « *variété algébrique sur k* » est la donnée d'un espace topologique \mathbf{X} et d'un « *atlas algébrique affine \mathcal{A} pour \mathbf{X}* », *i.e.* :

- i) D'un recouvrement ouvert de \mathbf{X} , $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$.
- ii) D'une famille $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbf{Y}_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ d'homéomorphismes sur des variétés algébriques affines sur k telle que les bijections, appelées « *applications de transition* »,

$$\Phi_{\beta,\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha,\beta}) \longrightarrow \phi_\beta(U_{\beta,\alpha})$$

sont des *isomorphismes de variétés quasi-affines* quels que soient $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$.

Un « *morphisme* » entre variétés algébriques $\varphi : (\mathbf{X}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbf{Y}, \mathcal{B})$ est alors la donnée d'une application continue $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ telle que pour tout $x \in \mathbf{X}$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que $x \in U_\alpha$, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$ tel que $\varphi(x) \in U_\beta$, l'application

$$\phi_\beta \circ \varphi \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

qui est définie au voisinage de $\phi_\alpha(x)$, est un morphisme de variétés quasi-affines au voisinage de $\phi_\alpha(x)$.

On appelle « *fonction régulière d'une variété algébrique $(\mathbf{X}; \mathcal{A})$ sur k* » tout morphisme de variétés de $(\mathbf{X}; \mathcal{A})$ vers \mathbb{A}_k^1 . Le « *faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ de fonctions régulières sur \mathbf{X}* » est le faisceau dont l'ensemble des sections au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ est l'ensemble des fonctions régulières sur U . Comme la multiplication $\cdot : k \times k \rightarrow k$ est une application polynomiale, le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ est stable par multiplication de fonctions et c'est ainsi un faisceau de k -algèbres.

Une application continue $\varphi : (\mathbf{X}; \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{B})$ est un morphisme de variétés algébriques, si pour toute fonction régulière $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}$ la composée $f \circ \varphi$ est une fonction régulière sur $(\mathbf{Y}, \mathcal{B})$, *i.e.*

$f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X$. Le morphisme de faisceaux $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$, $f \mapsto f \circ \varphi$ est alors un morphisme de faisceaux de k -algèbres, et la correspondance

$$(\mathbf{X}; \mathcal{A}) \rightsquigarrow (\mathbf{X}; \mathcal{O}_X), \quad \left(\varphi : (\mathbf{X}; \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{B}) \right) \rightsquigarrow \begin{cases} \varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y} \\ \varphi^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X, \quad f \mapsto f \circ \varphi \end{cases}$$

est fonctorielle et pleinement fidèle dans la catégorie $\mathbf{Loc-ann}_k$, d'après la proposition 1.3.5.

!!

La catégorie des variétés algébriques coïncide avec la catégorie d'espaces localement annelés localement isomorphes aux espaces annelés associés aux variétés affines.

!!

2.4.3 [IV] $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Modèles locaux. Il s'agit de la catégorie des variétés affines sur k .

2.4.4 [IV] $\mathcal{M}(\mathcal{C})'$. Modèles locaux (équivalence). Catégorie des k -algèbres de type fini réduites, d'après le théorème 2.4.1.14.

2.4.5 [IV] $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^*}$. Complexe de de Rham. Soit $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ une variété algébrique sur k . Le foncteur « complexe des formes différentielles relatives à k », $\text{deRham}_k : \mathbf{Alg}(k) \rightsquigarrow \mathbf{Adg}(k)$, permet d'associer au faisceau de k -algèbres \mathcal{O}_X le complexe de préfaisceaux $\text{deRham}_k(\mathcal{O}_X)$ de faisceau associé noté $(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/R}, d_*)$ et appelé « complexe de de Rham (algébrique) de $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ ».

2.4.6 [IV] Acyc. Acyclicité de chaque $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/k}^i$. Chaque faisceau $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/k}^i$ est un \mathcal{O}_X -module cohérent (car deRham d'un localisé = localisé du deRham) et l'on dispose du critère d'affinité de Serre ([S₁]) :

Théorème (2²). Soit $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ une variété algébrique sur k . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) \mathbf{X} est affine.
- b) $H^{>0}(\mathbf{X}; \mathcal{M}) = 0$ pour tout \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent \mathcal{M} .
- c) $H^{>0}(\mathbf{X}; \mathcal{I}) = 0$ pour tout sous- \mathcal{O}_X -module cohérent $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$.

2.4.6.1. Par conséquent, l'application canonique :

$$\boxed{h^* \Gamma(\mathbf{X}^{\text{zar}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/k}^*) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H}^*(\mathbf{X}^{\text{zar}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/k}^*)} \quad (*_k)$$

est **bijective** pour toute variété algébrique affine sur k .

2.4.7 [IV] Ampl. Amplitude du complexe de de Rham. Dans le cas affine, si $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{A}_k^n$ on sait que $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/k}^*$ est un quotient de $\underline{\Omega}_{\mathbb{A}_k^n}^* = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n} \otimes \bigwedge_k^* k^n$. Dans ce cas l'amplitude de $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^*$ est contenue dans l'intervalle $[0, n]$.

2.4.8 [IV] LPL. Lemme de Poincaré local. Il est faux en général, car autrement la cohomologie du complexe de de Rham calculerait la cohomologie du faisceau constant $\underline{k}_{\mathbf{X}}$ (si car $k = 0$) sur les variétés affines. Or, le faisceau constant est flasque (si \mathbf{X} est irréductible) alors que la cohomologie de de Rham est généralement non nulle en degrés positifs.

²² Voir [Har] chap. III §3 th. 3.7 p. 215

2.4.9 [IV] LPG. Lemme de Poincaré global. Vrai si car $k = 0$.

2.4.10 Récapitulatif

a) Soit X une variété algébrique sur $k = \bar{k}$. Le morphisme canonique :

$$\boxed{H^\bullet(X^{\text{zar}}; \underline{k}_X) \xrightarrow{\neq} \mathbb{H}^\bullet(X^{\text{zar}}; \underline{\Omega}_{X^{\text{an}}}^*)}$$

induit par l'augmentation $\varepsilon : \underline{k}_X \rightarrow \underline{\Omega}_{X/k}^*$, **n'est pas** toujours un isomorphisme.

b) Pour les variétés **affines** sur k on a un isomorphisme canonique :

$$\boxed{\mathbb{H}^\bullet(X^{\text{zar}}; \underline{\Omega}_{X/k}^*) \xleftarrow{\simeq} h^\bullet \Gamma(X^{\text{zar}}; \underline{\Omega}_{X/k}^*) = (\bigwedge_k^* \Omega(X/k), d_*)}$$

—————×—————

2.5 [V] Schémas

Même démarche et théorèmes que dans le cas algébrique.

§ 3. Références bibliographiques

- [Go] R. GODEMENT. “*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*” ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).
- [GR] R.C. GUNNING, H. ROSSI. “*Analytic functions of several complex variables*” ; Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1965).
- [Har] R. HARTSHORNE. “*Algebraic Geometry*” ; Graduate texts in mathematics **52**. Springer-Verlag, (1977).
- [GaGa] J.-P. SERRE. Géométrie algébrique et géométrie analytique ; Ann. Inst. Fourier, Grenoble 6, pp. 1–42, (1955–1956).
- [S₁] J.-P. SERRE. Sur la cohomologie des variétés algébriques ; J. Math. Pures Appl. (9) 36, 1–16, (1957).

§ 4. Index terminologique

algèbre		de transition	
extérieure		algébrique,	19
complexe,	13	continue,	9
réelle,	10	différentiable,	9
réduite,	17	holomorphe,	12
amplitude,	11	polynomiale,	15
cohomologique,	11	atlas	
annelé		algébrique affine,	19
localement,	4	continu,	9
morphisme d'espace,	4	différentiel,	9
annelé (espace),	2	holomorphe,	11
application			
		base,	2
		base (espace annelé de),	3
		bon recouvrement,	10

catégorie		holomorphie,	11
d'espaces localement annelés,	4	hypersurface,	15
des espaces topologiques,	6		
des variétés algébriques,	6, 19	idéal engendré,	15
des variétés analytiques complexes,	6, 11	idéal radical,	16
des variétés différentielles,	6, 9		
des variétés topologiques,	9	local (modèle),	6
complexe de de Rham algébrique,	20		
contravariant (foncteur),	2	modèles locaux,	6
corps résiduel,	4	module cohérent,	20
covariant (foncteur),	2	morphisme	
		d'espace annelé,	4
différentielle extérieure		de transition	
complexe,	13	algébrique,	19
réelle,	10	continu,	9
distingué (ouvert),	6	différentiable,	9
		holomorphe,	12
ensemble algébrique,	15	de variétés	
ensemble des zéros d'un idéal,	15	affines,	17
espace		algébriques,	19
étalé,	17	analytiques complexes,	12
affine,	15	différentielles,	10
algébrique affine,	15	quasi-affines,	19
analytique complexe,	13	topologiques,	9
annelé,	2		
de base,	au-dessus de, 3	objet	
de Stein,	13	au-dessus de,	2
localement annelé,	4	de base,	2
		ouvert	
faisceau		principal,	15
d'applications,	4	ouvert distingué,	6
de fonctions			
continues,	9	plein,	pleinement fidèle (foncteur), 2
holomorphes,	12		
localement constantes,	3	quasi-compacité,	16
réelles,	10		
régulières,	20	résiduel (corps),	4
des fonctions régulières,	17	radical d'un idéal,	16
structural,	2	restriction de fonctions régulières,	16
fermés de Zariski,	15		
fidèle (foncteur),	2	sous-ensemble algébrique,	15
foncteur fidèle,	plein, pleinement fidèle, 2	sous-jacent (espace topologique),	2
foncteur source,	2	standard,	12
fonction		structure de variété,	10
holomorphe,	12	analytique complexe,	12
réelle,	5	Stein,	13
continue,	9	structural (faisceau),	2
d'une variété différentielle,	10		
régulière,	15	topologie de Zariski,	15
d'une variété algébrique sur k ,	20	transition,	9, 19
sur un fermé de Zariski,	17		
sur un ouvert principal,	16	variété	
formes différentielles		algébrique,	19
holomorphes,	13	affine,	15, 17
réelles,	10	analytique complexe,	11, 13
		différentielle,	9

quasi-affine,	19	zéros d'un idéal,	15
topologique,	9	Zariski (fermés),	15

—————×—————

Alberto Arabia
 CNRS
 Institut de Mathématiques de Jussieu
 Théorie des Groupes
 2009