

**Faisceaux pervers
sur les variétés
algébriques complexes**

—

**Correspondance
de Springer**

Alberto Arabia

(Prépublication)

**Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Paris 7 - Denis Diderot**

U.F.R. DE MATHÉMATIQUES

Sixième étage, plateau D, bureau 6D15.

175, rue du Chevaleret

75013 Paris

– 15 mars 2003 –

Faisceaux pervers

sur les variétés algébriques complexes

Correspondance de Springer

§0. Table des matières détaillée

§0. Introduction	3
§1. Préliminaires	3
1.1. Anneaux et espaces topologiques	3
1.2. Catégories de faisceaux	4
1.2.1. Quelques notations	4
1.2.2. Foncteurs associés aux sous-espaces de \mathbf{X}	4
1.2.3. Exactitudes de foncteurs	5
1.2.4. Adjonctions	5
1.2.6. Suite exacte courte fondamentale	6
1.2.7. Foncteurs dérivés à droite	6
1.2.8. Résolutions	6
1.2.10. Dimension cohomologique d'un espace topologique	7
1.2.11. Dimension injective de $\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$	7
1.2.13. Le bifoncteur $\mathcal{H}om$ sur $\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$	8
1.3. Catégorie des complexes de faisceaux	8
1.3.1. Catégorie des complexes	8
1.3.2. Foncteur de translation	9
1.3.3. Complexes concentrés en un seul degré	9
1.3.5. Foncteurs induits	9
1.3.6. Objets dérivés	9
1.3.9. Troncatures intelligentes	10
1.3.12. Cône d'un morphisme de complexes	11
1.4. Catégorie dérivée	11
1.4.4. Triangles exacts	12
1.4.6. Catégories triangulées	12
1.4.9. Amplitude cohomologique d'un complexe	13
1.4.10. Support cohomologique d'un complexe de faisceaux	13
1.4.14. Foncteurs dérivés à droite	13
1.4.19. Changement de base pour les inclusions localement fermées	14
1.4.20. Faisceaux dérivés à supports dans un localement fermé	15
1.4.24. Un triangle exact fondamental	16
1.4.25. Troncatures intelligentes dans $D(\mathbf{X})$	16
1.4.27. Complexes cohomologiquement concentrés en un seul degré	16
1.4.28. Le bifoncteur $\mathcal{H}om^{\bullet}$ sur $D_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$	17
1.5. Dualité de Grothendieck-Verdier	17
1.5.1. Image directe à supports propres	17
1.5.3. Image inverse exceptionnelle	18
1.6. Complexes dualisants	19
1.6.6. Dual d'un complexe de faisceaux	20
1.7. Pseudovariétés et bidualité	20
1.7.1. Espace topologique stratifié	20
1.7.2. Pseudovariétés	21
1.7.5. Stabilité de la catégorie $D_{\mathbf{x}-c}^b(\mathbf{X})$	21
1.7.9. Amplitude cohomologique des complexes dualisants	22

1.8. Homologie de Borel-Moore sur les pseudovariétés	23
1.8.1. Constructions explicites de $c^! \mathcal{M}$	23
1.8.2. Homologie de Borel-Moore à coefficients dans un \mathcal{A} -module	23
1.8.3. Subdivision barycentrique du simplexe standard	24
1.8.4. Faisceau des chaînes singulières localement finies	24
1.9. Stratifications algébriques, conditions de Whitney et pseudovariétés	27
1.9.1. Stratifications	27
1.9.2. Filtration associée à une stratification	27
1.9.6. Instabilité de la catégorie $D_{\mathfrak{X}-c}^b(\mathbf{X})$	29
1.9.7. A propos des conditions de Whitney	30
1.10. Complexes à cohomologie constructible sur les variétés algébriques complexes	30
1.11. Systèmes locaux sur une variété topologique	31
1.11.7. Invariance de la monodromie	33
§2. Prolongement intermédiaire relatif à une filtration fermée	33
2.1. Filtrations fermées	33
2.2. L'équivalence de catégories de Deligne	34
§3. Homologie d'intersection sur une variété algébrique complexe	37
3.1. Complexes d'intersection sur une variété algébrique complexe	37
3.1.8. Description intrinsèque des complexes d'intersection	40
3.1.9. Généralisation de la dualité de Poincaré	40
3.1.10. A propos du $IH^0(\mathbf{X}; \mathcal{A})$	40
3.2. Homologie d'intersection du parapluie de Whitney	40
§4. Faisceaux pervers sur une variété algébrique complexe	41
4.1. Complexes de Deligne-Goresky-MacPherson	41
4.1.1. Images directes des complexes d'intersection	41
4.1.2. Complexes de Deligne-Goresky-MacPherson	42
4.2. Faisceaux \mathfrak{X} -pervers	42
4.2.3. Supports et amplitude cohomologiques des faisceaux \mathfrak{X} -pervers	42
4.2.7. Restrictions et prolongements de faisceaux \mathfrak{X} -pervers	43
4.2.9. Complexes d'intersection et faisceaux \mathfrak{X} -pervers	44
4.2.10. Théorème de structure de la catégorie des faisceaux \mathfrak{X} -pervers	45
4.2.11. Simplicité des complexes de $\mathbf{DGM}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ dans $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$	47
4.3. Faisceaux pervers	47
4.3.2. Théorème de structure de la catégorie des faisceaux pervers	48
4.4. Image directe des faisceaux pervers par un morphisme propre	49
4.4.1. Morphismes stratifiés	49
4.4.4. Morphismes (semi-)petits	50
4.4.10. Théorème de décomposition	51
§5. Correspondance de Springer	52
5.1. Notations et données	52
5.2. Stratifications de \mathcal{N} et de \mathfrak{g}	53
5.2.1. Stratification de \mathcal{N}	53
5.2.2. Stratification de \mathfrak{g}	53
5.3. Résolution de Springer du cône nilpotent	54
5.4. Décomposition de $R\pi_* \mathbb{Q}_{\tilde{\mathcal{V}}}$	55
5.4.1. Quelques égalités de dimensions	55
5.5. Représentations du groupe de Weyl d'après Lusztig	58
5.5.2. Représentations du groupe de Weyl	59
5.5.3. Représentations du groupe de Weyl dans la cohomologie des variétés de Steinberg	59
5.6. Correspondance de Springer d'après Borho-MacPherson	60
5.6.4. Autres constructions	61
§6. Références bibliographiques	61

– Samedi 30 juillet 2018 –

§ 0. Introduction

Ces notes traitent des sujets abordés dans la série d'exposés que j'ai donnés dans le Groupe de travail "*Correspondance de Springer*" organisé par MICHEL DUFLO, CAROLINE GRUSON et MARC ROSSO à l'Institut de Mathématiques de Jussieu (février-mars 2001).

Les quatre premières sections constituent une introduction à la théorie des faisceaux pervers sur les espaces localement compacts singuliers (pseudovariétés, espaces analytiques, variétés algébriques complexes, ...) et pour la perversité moyenne. Dans la dernière section on donne les détails de la démarche suivie par WALTER BORHO et ROBERT MACPHERSON dans [BoMc₁] pour démontrer la « *Correspondance de Springer* ».

Dans la préparation de ces notes j'ai bénéficié de la lecture de nombreux articles, certains de nature informelle mais très intéressants pour un aperçu rapide à la fois de l'histoire et des possibilités des faisceaux pervers. L'article de STEVEN KLEIMAN [Kl] en est le meilleur exemple, ceux de JEAN-LUC BRYLINSKI [Bry] et ARMAND BOREL [Bo₂] brossent les grands traits de la théorie, enfin celui de TONNY SPRINGER [Spr_B] parle des applications à la théorie des groupes. Dans un tout autre registre, les "*Notes du Séminaire d'homologie d'intersection*" [BoAl] et bien évidemment la référence incontournable : l'Astérisque N^o 100 de BEĪLSON, BERNSTEIN ET DELIGNE [BBD], donnent respectivement, en détail, les fondements de l'homologie d'intersection sur les espaces localement compacts et des faisceaux pervers.

§ 1. Préliminaires

Cette première section est destinée uniquement à fixer des notations, rappeler des définitions et faire quelques rappels, en ce sens, elle n'a aucune prétention d'exhaustivité dans les explications et indications des quelques démonstrations que nous donnons. Pour plus de détails, nous renvoyons aux deux références qui nous semblent le mieux couvrir l'ensemble des sujets abordés, à savoir : [BoAl] et [KS], et à [Ha₁] pour une introduction rapide et efficace aux catégories dérivées.

1.1 Anneaux et espaces topologiques

Bien de constructions et résultats dans ces notes sont valables pour des anneaux et espaces topologiques très généraux, mais plutôt que d'alourdir le texte en précisant à chaque fois les limitations d'un énoncé, nous préférons nous placer d'emblée dans un cadre restreint, mais néanmoins très large, garantissant sans plus leur validité.

- Un anneau $\mathcal{A}, \mathcal{B} \dots$ est supposé commutatif, muni d'une identité multiplicative, noethérien et de dimension cohomologique finie.
- Un espace topologique $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \dots$ sera *localement compact (donc séparé), dénombrable à l'infini, métrisable* ⁽¹⁾ et de dimension cohomologique finie (1.2.10).

¹ Les deux premières conditions impliquent la paracompacité des parties fermées et la dernière la paracompacité de ses ouverts ; on dit alors que l'espace est *totalemtent paracompact* (cf. [Go] §3.2 p. 149). Lorsque un espace topologique \mathbf{X} vérifie ces trois conditions, toute partie localement fermée \mathbf{S} de \mathbf{X} les vérifie également et, de plus, la dimension cohomologique de \mathbf{S} est bornée par celle de \mathbf{X} (cf. 1.2.10).

Lorsque \mathbf{X} désigne une variété algébrique complexe, la topologie induite sur un ouvert affine $U \subseteq \mathbf{X}$ par un plongement algébrique fermé $\varphi : U \hookrightarrow \mathbb{C}^m$, où \mathbb{C}^m est muni de la topologie de la métrique hermitienne usuelle de \mathbb{C}^m , est indépendante de φ ; on note alors U^{an} l'ensemble U muni de cette topologie. On appelle «*topologie transcendante sur \mathbf{X}* » la topologie engendrée par les U^{an} , où U parcourt l'ensemble des ouverts affines de \mathbf{X} . La topologie transcendante sur \mathbf{X} vérifie les conditions du paragraphe précédent et est plus fine que la topologie de Zariski de \mathbf{X} . On note \mathbf{X}^{an} la variété algébrique complexe \mathbf{X} munie de sa topologie transcendante. Tous les énoncés topologiques sur une variété algébrique complexe seront relatifs à sa topologie transcendante sauf mention explicite du contraire.

- Un foncteur $F : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ entre deux catégories additives est dit «*additif*» si l'application induite $\text{Mor}_{\mathcal{A}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \xrightarrow{F} \text{Mor}_{\mathcal{B}}(F\mathbf{A}, F\mathbf{B})$ est un homomorphisme de groupes (abéliens) pour tous $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Ob}(\mathcal{A})$; ce sera le cas de tous les foncteurs que nous allons considérer. Les catégories abéliennes $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$ sont supposées posséder suffisamment d'objets injectifs.

1.2 Catégories de faisceaux

1.2.1 Quelques notations. Pour tout anneau \mathcal{A} et tout espace topologique \mathbf{X} , on note $\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ la catégorie des faisceaux de \mathcal{A} -modules sur \mathbf{X} . Le faisceau constant de fibre \mathcal{A} sera noté $\underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{X}}$. On note $\text{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{X}}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ l'ensemble des morphismes de faisceaux de \mathcal{A} -modules de source \mathcal{F} et de but \mathcal{G} ; cet ensemble est muni d'une structure naturelle de \mathcal{A} -module. La catégorie $\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ est abélienne et possède suffisamment d'injectifs.

On omettra souvent de préciser l'anneau \mathcal{A} dans ces notations et lorsque \mathbf{X} sera réduit à un point, la notation $\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\bullet)$ sera remplacée par $\text{Mod}(\mathcal{A})$ pour des raisons évidentes.

Pour tout $\mathcal{F} \in \text{Faisc}(\mathbf{X})$ et toute section $\sigma \in \Gamma(U; \mathcal{F})$, on appelle «*support de σ* » : l'ensemble $|\sigma|$ des points $x \in U$ tels que le germe σ_x de σ en x est non nul. Le support de σ est toujours fermé dans U . Dans le même ordre d'idées, on appelle «*support de \mathcal{F}* » : l'ensemble $|\mathcal{F}|$ des points $x \in \mathbf{X}$ tels que le module \mathcal{F}_x des germes des sections de \mathcal{F} en x , appelé aussi «*la fibre de \mathcal{F} en x* », est non nul. Contrairement aux supports des sections, le support d'un faisceau n'est généralement pas localement fermé dans \mathbf{X} .

1.2.2 Foncteurs associés aux sous-espaces de \mathbf{X} . Pour toute partie \mathbf{A} d'un espace topologique \mathbf{X} , on note $i_{\mathbf{A}}^{\mathbf{X}} : \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{X}$ l'inclusion (on omettra souvent certains indices). On rappelle maintenant les définitions de quatre foncteurs additifs très courants en indiquant brièvement leur action sur les faisceaux.

$i_{\mathbf{A}*} : \text{Faisc}(\mathbf{A}) \rightsquigarrow \text{Faisc}(\mathbf{X})$ est le foncteur «*image directe*» qui associe à un faisceau \mathcal{F} sur \mathbf{A} , le faisceau $i_{\mathbf{A}*}\mathcal{F}$:

$$\mathbf{X} \supseteq U \rightsquigarrow \Gamma(\mathbf{A} \cap U; \mathcal{F}) =: \Gamma(U; i_{\mathbf{A}*}\mathcal{F})$$

Pour $\mathbf{A}_1 \subseteq \mathbf{A}_2$, on a $i_{\mathbf{A}_1*}^{\mathbf{X}} = i_{\mathbf{A}_2*}^{\mathbf{X}} \circ i_{\mathbf{A}_1*}^{\mathbf{A}_2}$.

$i_{\mathbf{A}}^{-1} : \text{Faisc}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Faisc}(\mathbf{A})$ est le foncteur «*image inverse*» qui associe à un faisceau \mathcal{G} sur \mathbf{X} , le faisceau $i_{\mathbf{A}}^{-1}\mathcal{G}$ associé au *préfaisceau* :

$$\mathbf{A} \supseteq V \rightsquigarrow \varinjlim_{V \subseteq U} \Gamma(U; \mathcal{G})$$

Le foncteur $i_{\mathbf{A}}^{-1}\mathcal{G}$ est également noté $\mathcal{G}|_{\mathbf{A}}$ et appelé «*restriction de \mathcal{G} à \mathbf{A}* ».

Pour $\mathbf{A}_1 \subseteq \mathbf{A}_2$, on a $\iota_{\mathbf{A}_1}^{X-1} = \iota_{\mathbf{A}_1}^{\mathbf{A}_2-1} \circ \iota_{\mathbf{A}_2}^{X-1}$.

Et pour tout sous-espace \mathbf{S} , *localement fermé* dans \mathbf{X} :

$\iota_{\mathbf{S}!} : \mathbf{Faisc}(\mathbf{S}) \rightsquigarrow \mathbf{Faisc}(\mathbf{X})$ est le foncteur «*image directe à supports fermés*» qui associe à un faisceau \mathcal{F} sur \mathbf{S} , le faisceau $\iota_{\mathbf{S}!}\mathcal{F}$:

$$\mathbf{X} \supseteq U \rightsquigarrow \{ \sigma \in \Gamma(\mathbf{S} \cap U; \mathcal{F}) \mid |\sigma| \text{ est fermé dans } U \} =: \Gamma(U; \iota_{\mathbf{S}!}\mathcal{F})$$

On a une inclusion naturelle de foncteurs $\iota_{\mathbf{S}!} \subseteq \iota_{\mathbf{S}*}$ qui est une égalité lorsque \mathbf{S} est fermé. Pour tout $x \in \mathbf{X}$, on a $(\iota_{\mathbf{S}!}\mathcal{F})_x = 0$ pour $x \notin \mathbf{S}$ et $(\iota_{\mathbf{S}!}\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_x$ autrement, raison pour laquelle on appelle $\iota_{\mathbf{S}!}\mathcal{F}$ «*le prolongement par zéro de \mathcal{F}* ».

Pour $\mathbf{S}_1 \subseteq \mathbf{S}_2$, on a $\iota_{\mathbf{S}_1!}^X = \iota_{\mathbf{S}_2!}^X \circ \iota_{\mathbf{S}_1!}^{\mathbf{S}_2}$.

$\underline{\Gamma}_{\mathbf{S}} : \mathbf{Faisc}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \mathbf{Faisc}(\mathbf{S})$ est le foncteur «*sections à supports dans \mathbf{S}* » qui associe à un faisceau \mathcal{G} sur \mathbf{X} , le faisceau $\underline{\Gamma}_{\mathbf{S}}\mathcal{G}$:

$$\mathbf{S} \supseteq V \rightsquigarrow \Gamma_{\mathbf{S}}(W; \mathcal{G}) = \{ \sigma \in \Gamma(W; \mathcal{G}) \mid |\sigma| \subseteq \mathbf{S} \} =: \Gamma(V; \underline{\Gamma}_{\mathbf{S}}\mathcal{G})$$

où W est un ouvert dans \mathbf{X} tel que V est fermé dans W et $V = \mathbf{S} \cap W$ (le terme de droite est alors indépendant du choix d'un tel W).

Remarque. Un ouvert V de \mathbf{S} admet toujours une base de voisinages W ouverts dans \mathbf{X} tels que V est fermé dans W et $V = \mathbf{S} \cap W$; on a donc

$$\Gamma(V; \iota_{\mathbf{S}}^{-1}\mathcal{G}) = \varinjlim_{V \subseteq W} \Gamma(W; \mathcal{G})$$

d'où une injection canonique de foncteurs $\underline{\Gamma}_{\mathbf{S}} \hookrightarrow \iota_{\mathbf{S}}^{-1}$ qui est bijective lorsque \mathbf{S} est ouvert.

Pour $\mathbf{S}_1 \subseteq \mathbf{S}_2$, on a $\underline{\Gamma}_{\mathbf{S}_1} = \underline{\Gamma}_{\mathbf{S}_1} \circ \underline{\Gamma}_{\mathbf{S}_2}$.

1.2.3 Exactitudes de foncteurs. Avec les notations précédentes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \iota_{\mathbf{S}!}, \iota_{\mathbf{A}}^{-1} & \text{exact ;} \\ \underline{\Gamma}_{\mathbf{S}}, \iota_{\mathbf{A}*} & \text{exact à gauche ;} \\ \underline{\Gamma}_{\mathbf{S}} = \iota_{\mathbf{S}}^{-1} & \text{lorsque } \mathbf{S} \text{ est ouverte, donc } \underline{\Gamma}_{\mathbf{S}} \text{ est exact dans ce cas.} \\ \iota_{\mathbf{S}*} = \iota_{\mathbf{S}!} & \text{lorsque } \mathbf{S} \text{ est fermée, donc } \iota_{\mathbf{S}*} \text{ est exact dans ce cas.} \end{array} \right.$$

1.2.4 Adjonctions. On a des isomorphismes naturels ⁽²⁾ :

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{X}}}(\iota_{\mathbf{S}!}-, -) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{S}}}(-, \underline{\Gamma}_{\mathbf{S}}-) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{A}}}(\iota_{\mathbf{A}}^{-1}-, -) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{X}}}(-, \iota_{\mathbf{A}*}-)$$

et $\underline{\Gamma}_{\mathbf{S}}$ (resp. $\iota_{\mathbf{A}*}$) est adjoint à droite de $\iota_{\mathbf{S}!}$ (resp. $\iota_{\mathbf{A}}^{-1}$). En particulier, pour tout $\mathcal{G} \in \mathbf{Faisc}_{\underline{\mathcal{A}}}(\mathbf{X})$, l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{S}}}(\underline{\Gamma}_{\mathbf{S}}\mathcal{G}, \underline{\Gamma}_{\mathbf{S}}\mathcal{G}) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{X}}}(\iota_{\mathbf{S}!}\underline{\Gamma}_{\mathbf{S}}\mathcal{G}, \mathcal{G})$ fait correspondre à $\mathrm{id}_{\underline{\Gamma}_{\mathbf{S}}\mathcal{G}}$ un morphisme de faisceaux $\iota_{\mathbf{S}!}\underline{\Gamma}_{\mathbf{S}}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ dit «*d'adjonction*». On obtient par ce procédé quatre morphismes d'adjonction dont deux sont *a priori* des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \iota_{\mathbf{S}!}\underline{\Gamma}_{\mathbf{S}} \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{Faisc}(\mathbf{X})} & \text{et} & \mathrm{id}_{\mathbf{Faisc}(\mathbf{X})} \longrightarrow \iota_{\mathbf{A}*}\iota_{\mathbf{A}}^{-1} \\ \mathrm{id}_{\mathbf{Faisc}(\mathbf{S})} \xrightarrow{\cong} \underline{\Gamma}_{\mathbf{S}}\iota_{\mathbf{S}!} & \text{et} & \iota_{\mathbf{A}}^{-1}\iota_{\mathbf{A}*} \xrightarrow{\cong} \mathrm{id}_{\mathbf{Faisc}(\mathbf{A})} \end{array} \quad (*)$$

²Le terme “naturel” est employé au sens de “transformation naturelle entre foncteurs”. Les isomorphismes naturels seront indiqués par le symbole ‘ \cong ’.

1.2.5 Compte tenu de l'exactitude des foncteurs $\iota_{\mathcal{S}!}$ et $\iota_{\mathcal{A}}^{-1}$, leurs adjoints à droite $\Gamma_{\mathcal{S}}$ et $\iota_{\mathcal{A}*}$ transforment un faisceau injectif en faisceau injectif. En effet, un faisceau $\mathcal{F} \in \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ est injectif si et seulement si le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{F}) : \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{A})$ est exact. En composant ce foncteur avec le foncteur exact $\iota_{\mathcal{S}!} : \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) \rightsquigarrow \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$, on obtient un foncteur exact $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\iota_{\mathcal{S}!}(-), \mathcal{F}) : \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{A})$ qui est isomorphe à $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \Gamma_{\mathcal{S}}\mathcal{F})$. Par conséquent $\Gamma_{\mathcal{S}}\mathcal{F}$ est injectif dans $\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S})$. La même idée s'applique pour $\iota_{\mathcal{A}*}$.

1.2.6 Suite exacte courte fondamentale. Pour toute partie localement fermée \mathcal{S} dans \mathbf{X} de complémentaire noté $\mathcal{A} := \mathbf{X} \setminus \mathcal{S}$, les morphismes d'adjonction 1.2.4-(*) donnent lieu, pour $\mathcal{F} \in \text{Faisc}(\mathbf{X})$, à une suite exacte à gauche :

$$0 \rightarrow \iota_{\mathcal{S}!}\Gamma_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \iota_{\mathcal{A}*}\iota_{\mathcal{A}}^{-1}(\mathcal{F}) \rightarrow 0 \quad (*)$$

qui est exacte lorsque \mathcal{S} est ouverte dans \mathbf{X} , ou bien pour tout \mathcal{S} , lorsque \mathcal{F} est *injectif* (plus généralement *flasque*).

1.2.7 Foncteurs dérivés à droite. Pour tout foncteur additif $\mathbf{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ entre deux catégories abéliennes, et pour chaque $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}^m \mathbf{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ le «*m*-ième foncteur dérivé à droite de \mathbf{F} ». On rappelle que pour tout $\mathbf{A} \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et toute suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{I}^0 \xrightarrow{d_0} \mathbf{I}^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{m-1}} \mathbf{I}^m \xrightarrow{d_m} \dots, \quad (\ddagger)$$

où les \mathbf{I}^k sont injectifs, l'objet $\mathbb{R}^m \mathbf{F} \mathbf{A}$ est canoniquement isomorphe au *m*-ième objet de cohomologie, appelé aussi «*m*-ième objet dérivé», du complexe

$$0 \rightarrow \mathbf{F}\mathbf{I}^0 \xrightarrow{\mathbf{F}d_0} \mathbf{F}\mathbf{I}^1 \xrightarrow{\mathbf{F}d_1} \dots \xrightarrow{\mathbf{F}d_{m-1}} \mathbf{F}\mathbf{I}^m \xrightarrow{\mathbf{F}d_m} \dots,$$

soit :

$$\mathbb{R}^m \mathbf{F} \mathbf{A} \equiv H^m(\mathbf{F}\mathbf{I}^\bullet) := \frac{\ker \mathbf{F}d_m}{\text{im } \mathbf{F}d_{m-1}}.$$

Lorsque \mathbf{F} est exact à gauche on a toujours $\mathbb{R}^0 \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$, et lorsque \mathbf{F} est exact on a, en plus, $\mathbb{R}^m \mathbf{F} = 0$ pour tout $m > 0$.

1.2.8 Résolutions. Les suites exactes (\ddagger) , notées $\mathbf{A} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{I}^\bullet$, sont appelés «*résolutions injectives de \mathbf{A}* » et le morphisme ε l'«*augmentation*» de la résolution. Lorsque les termes \mathbf{I}^k sont *F*-acycliques, *i.e.* tels que $\mathbb{R}^m \mathbf{F} \mathbf{I}^k = 0$ pour tout $m > 0$, la résolution est dite «*F*-acyclique». Un théorème de Leray démontre que $\mathbb{R}^m \mathbf{F} \mathbf{A}$ est également canoniquement isomorphe au *m*-ième objet de cohomologie du complexe $\mathbf{F}\mathbf{K}^\bullet$ pour toute résolution *F*-acyclique $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{K}^\bullet$.

1.2.9 Les foncteurs dérivés du foncteur des sections globales $\Gamma(\mathbf{X}; -) : \text{Faisc}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbb{Z})$ sont notés $H^m(\mathbf{X}; -)$. Il est important d'observer que dans la mesure où pour tout anneau \mathcal{A} on a l'inclusion de catégories abéliennes $\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}) \subseteq \text{Faisc}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{X})$, le foncteur $\Gamma(\mathbf{X}; -)$ est aussi naturellement défini sur $\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ et a des foncteurs dérivés par rapport à cette catégorie qui sont canoniquement isomorphes aux foncteurs $H^m(\mathbf{X}; -)$; c'est une conséquence du fait que tout faisceau injectif de $\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ est flasque donc $\Gamma(\mathbf{X}; -)$ -acyclique dans $\text{Faisc}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{X})$.

1.2.10 Dimension cohomologique d'un espace topologique.⁽³⁾ Un espace topologique \mathbf{X} général (*i.e.* non soumis aux conditions 1.1) est dit «*de dimension cohomologique finie*» lorsqu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que pour **tout** faisceau $\mathcal{F} \in \text{Faisc}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{X})$ on ait :

$$H^m(\mathbf{X}; \mathcal{F}) = 0, \text{ pour tout } m > n.$$

Le plus petit de tels entiers n est «*la dimension cohomologique de \mathbf{X}* » notée $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X})$.

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème.⁽⁴⁾ Soit \mathbf{X} une variété topologique de dimension n ⁽⁵⁾. Pour tout $\mathcal{F} \in \text{Faisc}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{X})$:

- a) Il existe une résolution $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{K}^0 \rightarrow \mathcal{K}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{K}^n$ où chaque \mathcal{K}^j est un faisceau *c-mou* ⁽⁶⁾.
- b) Il existe une résolution $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}^0 \rightarrow \mathcal{G}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{G}^{n+1}$ où chaque \mathcal{G}^j est un faisceau flasque.
- c) $H^m(\mathbf{X}; \mathcal{F}) = 0 = H_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{F})$ pour tout $m > n$.

On en déduit :

Proposition. Soit \mathbf{X} un espace topologique admettant une filtration fermée finie :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \supseteq \mathbf{X}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathbf{X}_r \supseteq \mathbf{X}_{r+1} = \emptyset$$

où, $\mathbf{X}_i \setminus \mathbf{X}_{i+1}$ est une variété topologique de dimension d_i . Alors $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}) = \sup\{d_i\}$.

Indications. En raisonnant par récurrence, on suppose la proposition vérifiée pour \mathbf{X}_1 . Notons $U := \mathbf{X} \setminus \mathbf{X}_1$. La suite exacte à gauche 1.2.6-(*) avec $\mathbf{S} = U$ et $\mathbf{A} := \mathbf{F}$, donne lieu à une suite exacte longue de cohomologie :

$$H^{i-1}(\mathbf{X}_1; \mathcal{F}|_{\mathbf{X}_1}) \rightarrow H^i(\mathbf{X}; \iota_{U!}\mathcal{F}|_U) \rightarrow H^i(\mathbf{X}; \mathcal{F}) \rightarrow H^i(\mathbf{X}_1; \mathcal{F}|_{\mathbf{X}_1}) \rightarrow H^{i+1}(\mathbf{X}; \iota_{U!}\mathcal{F}|_U)$$

Il suffit donc de montrer que $H^i(\mathbf{X}; \iota_{U!}\mathcal{F}|_U) = 0$ pour $i > d_0$. Or, $\mathcal{F}|_U$ admet une résolution *c-molle* $\mathcal{F}|_U \hookrightarrow \mathcal{K}^\bullet$ de longueur d_0 d'après le théorème précédent; $\iota_{U!}$ est exact et transforme *c-mou* en *c-mou* (*loc.cit.* §2.5.7); et, pour terminer, un faisceau *c-mou* sur \mathbf{X} est acyclique pour le foncteur des sections globales (*loc.cit.* §2.5.10). Par conséquent $H^i(\mathbf{X}; \iota_{U!}\mathcal{F}|_U)$ est isomorphe au i -ième groupe de cohomologie du complexe $\Gamma(\mathbf{X}; \iota_{U!}\mathcal{K}^\bullet)$ dont les termes sont nuls en tout degré supérieur à d_0 . On en déduit que $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}) \leq \sup\{d_i\}$. La majoration inverse est laissée au soins du lecteur. ■

1.2.11 Dimension injective de $\text{Faisc}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{X})$. On dit qu'une catégorie abélienne \mathcal{A} est de «*dimension injective finie*» lorsqu'il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que **tout** objet $\mathbf{A} \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ admet une résolution injective finie: $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{I}^0 \rightarrow \mathbf{I}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{I}_r$ avec $r \leq d$. Le plus petit des tels

³ Cf. [Go] §4.13–14 pp. 194–197.

⁴ Cf. [KS] prop. §3.2.2 p. 149.

⁵ On appellera «*variété topologique de dimension n* » tout espace topologique dénombrable à l'infini et localement homéomorphe à \mathbb{R}^n .

⁶ On rappelle que un faisceau \mathcal{F} sur \mathbf{X} est dit «*c-mou*» lorsque pour toute partie compacte $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{X}$, le morphisme de restriction $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{K}; \mathcal{F})$ est *surjectif* ([KS] def. §2.5.5 p. 104). Une application continue $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ entre deux espaces métrisables et localement compacts respecte la propriété d'être *c-mou*, autrement dit $f_!(c\text{-mou}) = c\text{-mou}$, et un faisceau *c-mou* sur \mathbf{X} est toujours $f_!$ -acyclique (*cf.* 1.5.1 puis [BoAl] Grivel §2.10 et suivants). Enfin, si \mathbf{X} est en plus dénombrable à l'infini, un faisceau *c-mou* est aussi f_* -acyclique ([KS] prop. §2.5.10, p. 106).

entiers d est « la dimension injective de \mathcal{A} » notée $\dim_{\text{inj}}(\mathcal{A})$. Dans le cas où $\mathcal{A} = \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$, on notera $\dim_{\text{inj}}(\mathbf{X}/\mathcal{A})$ plutôt que $\dim_{\text{inj}}(\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}))$.

Théorème.⁽⁷⁾ $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}) \leq \dim_{\text{inj}}(\mathbf{X}/\mathcal{A}) \leq \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}) + \dim_{\text{ch}} \mathcal{A} + 1$.

1.2.12 Remarque. Soulignons que lorsque une catégorie abélienne \mathcal{A} est de dimension injective finie d , on a $\mathbb{R}^m F = 0$ pour tout $m > d$ et pour **tout foncteur additif** $F : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$. Dans le cas où $\mathcal{A} = \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ on a mieux : si le foncteur F est de « nature topologique », par exemple $\Gamma_{\Phi}(\mathbf{X}; -)$ où Φ désigne une famille de supports, la dimension cohomologique de \mathbf{X} donne des conditions d'annulation des foncteurs dérivés *a priori* plus fortes et indépendantes de l'anneau \mathcal{A} dans la mesure où $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}) \leq \dim_{\text{inj}}(\mathbf{X}/\mathcal{A})$ d'après le théorème précédent⁽⁸⁾.

1.2.13 Le bifoncteur $\mathcal{H}om$ sur $\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$. Pour $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$, on note $\mathcal{H}om_{\underline{\mathcal{A}}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ (et même $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ lorsque \mathcal{A} est sous-entendu) le faisceau associé au préfaisceau qui fait correspondre à un ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ le \mathcal{A} -module $\text{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$. On obtient ainsi un bifoncteur biadditif $\mathcal{H}om : \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}) \times \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ contravariant par rapport à la première coordonnée et covariant par rapport à la seconde coordonnée. Pour tout $\mathcal{F} \in \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$, le foncteur $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, -) : \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ est exact à gauche et inversement pour $\mathcal{H}om(-, \mathcal{F})$.

1.2.14 On prendra garde du fait que pour $x \in \mathbf{X}$, le morphisme naturel :

$$\mathcal{H}om_{\underline{\mathcal{A}}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \xrightarrow{\varepsilon_x(\mathcal{F}, \mathcal{G})} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$$

n'est généralement pas un isomorphisme, mais il l'est lorsque \mathcal{F} est un faisceau localement constant de fibres de type fini sur \mathcal{A} ⁽⁹⁾, ce qu'on appellera un « système local ». En effet, si \mathcal{L} est un système local, il admet des présentations finies locales (\mathcal{A} est supposé noethérien!), *i.e.* pour tout $x \in \mathbf{X}$, il existe un voisinage ouvert $x \in U \subseteq \mathbf{X}$ et une suite exacte à droite $\mathcal{A}_U^r \rightarrow \mathcal{A}_U^s \rightarrow \mathcal{L}|_U \rightarrow 0$; d'autre part, les foncteurs $\mathcal{H}om_{\underline{\mathcal{A}}_U}(-, \mathcal{G})_x$ et $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-x, \mathcal{G}_x)$ sont exacts à droite et alors $\varepsilon_x(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est un isomorphisme si $\varepsilon_x(\mathcal{A}_U^n, \mathcal{G}|_U)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui est évident puisque $\mathcal{H}om_{\underline{\mathcal{A}}_U}(\mathcal{A}_U^n, \mathcal{G}|_U) = (\mathcal{G}|_U)^n$ (cf. 1.11.2).

1.2.15 Dans le même ordre d'idées, on démontre (cf. [Go] §7.4 p. 265) que pour tout système local \mathcal{L} localement libre, le foncteur $\mathcal{H}om_{\underline{\mathcal{A}}_X}(\mathcal{L}, -) : \text{Faisc}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Faisc}(\mathbf{X})$ est exact, donc

$$\mathbb{R}^m \mathcal{H}om_{\underline{\mathcal{A}}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{G}) = \text{Ext}_{\underline{\mathcal{A}}_X}^m(\mathcal{L}, \mathcal{G}) = 0, \quad \text{pour tout } m > 0,$$

et alors $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\underline{\mathcal{A}}_X}(\mathcal{L}, -) \equiv \mathcal{H}om_{\underline{\mathcal{A}}_X}(\mathcal{L}, -)$.

1.3 Catégorie des complexes de faisceaux

1.3.1 Catégorie des complexes. Soit \mathcal{A} une catégorie additive. On note $C(\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont les « complexes d'objets de \mathcal{A} » :

$$\mathbf{A}^\bullet = (\mathbf{A}^m; d_{\mathbf{A}, m})_{m \in \mathbb{Z}} : \left(\cdots \xrightarrow{d_{\mathbf{A}, m-1}} \mathbf{A}^m \xrightarrow{d_{\mathbf{A}, m}} \mathbf{A}^{m+1} \xrightarrow{d_{\mathbf{A}, m+1}} \mathbf{A}^{m+2} \xrightarrow{d_{\mathbf{A}, m+2}} \cdots \right)$$

⁷ Cf. [BoAl] Borel §V.1.17–18 pp. 55–59, et [Ha1] §I.4.6 p. 42.

⁸ Voir l'exercice §II.9, p. 132 de [KS].

⁹ Ce qui n'est pas sans rappeler les faisceaux \mathcal{O}_X -cohérents sur les variétés algébriques, auquel cas l'assertion est vraie pour les mêmes raisons.

où $d_{A,m} \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(\mathbf{A}^m, \mathbf{A}^{m+1})$ et $d_{A,m} \circ d_{A,m-1} = 0$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Un «*morphisme de complexes*» $\alpha_{\bullet} : \mathbf{A}^{\bullet} \rightarrow \mathbf{B}^{\bullet}$ est une famille $\{\alpha_m \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(\mathbf{A}^m, \mathbf{B}^m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ vérifiant $\alpha_{m+1} \circ d_{A,m} = d_{B,m} \circ \alpha_m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$; on note $\text{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\mathbf{A}^{\bullet}, \mathbf{B}^{\bullet})$ l'ensemble de tels morphismes muni de sa structure naturelle de groupe abélien. La catégorie $C(\mathcal{A})$ est abélienne lorsque \mathcal{A} l'est.

Dans le cas où $\mathcal{A} = \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$, on notera $C_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ plutôt que $C(\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}))$. Le groupe abélien $\text{Mor}_{C_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})}(\mathcal{F}^{\bullet}, \mathcal{G}^{\bullet})$ est muni d'une structure naturelle de \mathcal{A} -module. On omettra souvent de préciser l'anneau \mathcal{A} dans ces notations et lorsque \mathbf{X} sera réduit à un point, la notation $C_{\mathcal{A}}(\bullet)$ sera abrégée à $C_{\mathcal{A}}$.

1.3.2 Foncteur de translation. Soit \mathcal{A} une catégorie additive. Le foncteur de «*translation*» $T : C(\mathcal{A}) \rightsquigarrow C(\mathcal{A})$ associe à $\mathbf{A}^{\bullet} = (\mathbf{A}^m; d_{A,m})_{m \in \mathbb{Z}}$ le complexe $T\mathbf{A}^{\bullet} = (\mathbf{B}^m; d_{B,m})_{m \in \mathbb{Z}}$, avec $\mathbf{B}^m = \mathbf{A}^{m+1}$ et $d_{B,m} = -d_{A,m+1}$, et à $\alpha_{\bullet} \in \text{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\mathbf{A}^{\bullet}, \mathbf{B}^{\bullet})$ le morphisme de complexes $T\alpha_{\bullet} := \beta_{\bullet} : T\mathbf{A}^{\bullet} \rightarrow T\mathbf{B}^{\bullet}$, avec $\beta_m = \alpha_{m+1}$.

Nous adoptons la notation très répandue suivante pour l'itération $T^d = \overbrace{T \circ \dots \circ T}^d$:

$$\mathbf{A}^{\bullet}[d] := T^d \mathbf{A}^{\bullet} \quad \text{et} \quad \alpha_{\bullet}[d] := T^d \alpha_{\bullet}.$$

L'entier d est le «*décalage*» (vers la gauche si $d > 0$) de la translation T^d .

1.3.3 Complexes concentrés en un seul degré. Soient \mathcal{A} une catégorie additive et $d \in \mathbb{Z}$. Un complexe \mathbf{A}^{\bullet} de $C(\mathcal{A})$ est dit «*concentré en degré d* », lorsque $\mathbf{A}^m = 0$ pour tout $m \neq d$.

1.3.4 Remarque et notation. Soient \mathcal{A} une catégorie additive et $d \in \mathbb{Z}$. Pour tout $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$, on note $\mathbf{A}[d]$ le complexe $(\mathbf{A}^m; d_m)$ où $\mathbf{A}^{-d} = \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^m = 0$ pour tout $m \neq -d$, puis $d_m = 0$, pour tout m . Pour $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, on note $\alpha[d] : \mathbf{A}[d] \rightarrow \mathbf{B}[d]$ le morphisme de complexes nul en tous degrés sauf en $-d$ où il est égal à α . On obtient ainsi un foncteur pleinement fidèle $(-)[d] : \mathcal{A} \rightsquigarrow C(\mathcal{A})$ d'inverse à gauche le foncteur $(-)^{-d} : C(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}$ qui fait correspondre $\mathbf{A}^{\bullet} \rightsquigarrow \mathbf{A}^{-d}$ et $\alpha_{\bullet} \rightsquigarrow \alpha_{-d}$. L'image essentielle du foncteur $(-)[d]$ est la sous-catégorie pleine des complexes concentrés en degré $-d$. Lorsque $d = 0$, on omettra souvent la notation; par exemple, on écrira $\text{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\mathbf{A}, \mathbf{B}^{\bullet})$ à la place de $\text{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\mathbf{A}[0], \mathbf{B}^{\bullet})$.

1.3.5 Foncteurs induits. Un foncteur additif entre deux catégories additives $F : \mathcal{A}_1 \rightsquigarrow \mathcal{A}_2$ induit naturellement un foncteur additif entre les catégories des complexes $C(\mathcal{A}_i)$. En effet, si $\mathbf{A}^{\bullet} := (\mathbf{A}^m, d_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ est un complexe d'objets de \mathcal{A}_1 , la famille $F\mathbf{A}^{\bullet} := (F\mathbf{A}^m, Fd_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ est un complexe d'objets de \mathcal{A}_2 et si $\varphi_{\bullet} := \{\varphi_m : \mathbf{A}_1^m \rightarrow \mathbf{A}_2^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ est un morphisme de complexes, il en est de même de $F\varphi_{\bullet} := \{F\varphi_m : F\mathbf{A}_1^m \rightarrow F\mathbf{A}_2^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$. Le foncteur ainsi défini sera désigné (par abus) par la même notation $F : C(\mathcal{A}_1) \rightsquigarrow C(\mathcal{A}_2)$; c'est un foncteur additif qui a le même type d'exactitude que $F : \mathcal{A}_1 \rightsquigarrow \mathcal{A}_2$ lorsque les catégories \mathcal{A}_i sont abéliennes.

1.3.6 Objets dérivés. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Pour tout complexe de $C(\mathcal{A})$:

$$\mathbf{A}^{\bullet} = (\dots \mathbf{A}^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \mathbf{A}^m \xrightarrow{d_m} \mathbf{A}^{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \dots),$$

et tout $m \in \mathbb{Z}$, on appelle « *m -ième objet dérivé de \mathbf{A}^{\bullet}* » l'objet :

$$H^m \mathbf{A}^{\bullet} := \frac{\ker(d_m)}{\text{im}(d_{m-1})}$$

Pour tout morphisme de complexes (de degré 0) $\alpha_\bullet : \mathbf{A}^\bullet \rightarrow \mathbf{B}^\bullet$, on note

$$H^m \alpha_\bullet : H^m \mathbf{A}^\bullet \rightarrow H^m \mathbf{B}^\bullet$$

le morphisme induit en cohomologie par α_\bullet . Ces définitions font de $H^m : C(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}$ un foncteur additif.

Dans le cas où $\mathcal{A} = \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$, on note $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet$ plutôt que $H^m \mathcal{F}^\bullet$ pour insister sur le fait que $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet$ est un faisceau sur \mathbf{X} et pour éviter une éventuelle confusion avec $H^m(\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet))$.

1.3.7 Définitions. Soit \mathcal{A} une catégorie additive.

1) Un morphisme $\alpha_\bullet \in \text{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\mathbf{A}^\bullet, \mathbf{B}^\bullet)$ est dit «*homotope à zéro*» lorsqu'il existe une famille de morphismes $\{h_m \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(\mathbf{A}^m, \mathbf{B}^{m-1})\}_{m \in \mathbb{Z}}$, telle que

$$\alpha_m = h_{m+1} \circ d_{\mathbf{A},m} - d_{\mathbf{B},m-1} \circ h_m, \text{ pour tout } m \in \mathbb{Z}.$$

Deux morphismes $\alpha_\bullet, \beta_\bullet \in \text{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\mathbf{A}^\bullet, \mathbf{B}^\bullet)$ sont dits «*homotopes*» lorsque leur différence $(\alpha_\bullet - \beta_\bullet)$ est homotope à zéro, on note alors $\alpha_\bullet \sim \beta_\bullet$. La relation ' \sim ' est une congruence de groupe abélien sur $\text{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\mathbf{A}^\bullet, \mathbf{B}^\bullet)$ qui possède deux propriétés fondamentales :

a) Si $\alpha_\bullet \sim \beta_\bullet \in \text{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\mathbf{A}^\bullet, \mathbf{B}^\bullet)$ alors $\mathbf{F}(\alpha_\bullet) \sim \mathbf{F}(\beta_\bullet) \in \text{Mor}_{C(\mathcal{B})}(\mathbf{F}\mathbf{A}^\bullet, \mathbf{F}\mathbf{B}^\bullet)$, pour *tout* foncteur additif $\mathbf{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$.

b) Lorsque \mathcal{A} est abélienne, si $\alpha_\bullet \sim \beta_\bullet \in \text{Mor}_{C(\mathbf{X})}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)$ alors $H^m \alpha_\bullet = H^m \beta_\bullet$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

2) Lorsque \mathcal{A} est abélienne, deux complexes \mathbf{A}^\bullet et \mathbf{B}^\bullet sont dits «*quasi-isomorphes*» s'il existe $\alpha_\bullet \in \text{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\mathbf{A}^\bullet, \mathbf{B}^\bullet)$ tel que $H^m \alpha_\bullet : H^m \mathbf{A}^\bullet \rightarrow H^m \mathbf{B}^\bullet$ est un isomorphisme pour tout m . Un tel morphisme est appelé «*un quasi-isomorphisme*».

3) Lorsque \mathcal{A} est abélienne, un quasi-morphisme $\alpha_\bullet \in \text{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\mathbf{A}^\bullet, \mathbf{B}^\bullet)$ où chaque terme de \mathcal{G}^\bullet est injectif est appelé «*une résolution injective de \mathbf{A}^\bullet* ».

Lorsque $\mathcal{A} = \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$, un quasi-morphisme $\alpha_\bullet \in \text{Mor}_{C(\mathbf{X})}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)$ où chaque terme de \mathcal{G}^\bullet est flasque, c -mou, \dots , est appelé «*une résolution flasque, c -molle, \dots , de \mathcal{F}^\bullet* »

1.3.8 Pour tout foncteur additif et **exact** entre catégories abéliennes $\mathbf{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$, le foncteur induit $\mathbf{F} : C(\mathcal{A}) \rightsquigarrow C(\mathcal{B})$ transforme morphismes homotopes en morphismes homotopes et quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes.

1.3.9 Troncatures intelligentes. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. On rappelle la définition du foncteur de «*troncature (intelligente) à l'ordre m* », noté $\tau_{\leq m} : C(\mathcal{A}) \rightsquigarrow C(\mathcal{A})$, pour $m \in \mathbb{Z}$.

Pour tout complexe de $C(\mathcal{A})$:

$$\mathbf{A}^\bullet = \left(\dots \mathbf{A}^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \mathbf{A}^m \xrightarrow{d_m} \mathbf{A}^{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \mathbf{A}^{m+2} \xrightarrow{d_{m+2}} \dots \right),$$

on pose :

$$\tau_{\leq m} \mathbf{A}^\bullet := \left(\dots \mathbf{A}^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \mathbf{A}^m \xrightarrow{d_m} \text{im}(d_m) \xrightarrow{0} \mathbf{0} \xrightarrow{0} \dots \right),$$

(¹⁰). Pour tout morphisme de complexes $\alpha_\bullet : \mathbf{A}^\bullet \rightarrow \mathbf{B}^\bullet$, on note $\tau_{\leq m} \alpha_\bullet : \tau_{\leq m} \mathbf{A}^\bullet \rightarrow \tau_{\leq m} \mathbf{B}^\bullet$ le morphisme de complexes défini par :

$$\begin{cases} (\tau_{\leq m} \alpha_\bullet)_k = \alpha_k & \text{si } k \leq m, \\ (\tau_{\leq m} \alpha_\bullet)_{m+1} = \alpha_{m+1}|_{\text{im}(d_m)} \\ (\tau_{\leq m} \alpha_\bullet)_k = 0 & \text{si } k > m + 1. \end{cases}$$

1.3.10 Le complexe $\tau_{\leq m} \mathbf{A}^\bullet$ est un sous-complexe de \mathbf{A}^\bullet qui vérifie par construction

$$\begin{cases} H^k(\tau_{\leq m} \mathbf{A}^\bullet) \equiv H^k \mathbf{A}^\bullet, & \text{si } k \leq m, \\ H^k(\tau_{\leq m} \mathbf{A}^\bullet) = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'injection $\tau_{\leq m} \mathbf{A}^\bullet \subseteq \mathbf{A}^\bullet$ est naturelle par rapport à \mathbf{A}^\bullet , *i.e.* provient d'un morphisme de foncteurs qu'on notera ' $\subseteq : \tau_{\leq m} \rightarrow \text{id}$ '.

1.3.11 Les foncteurs de troncature *ne sont pas exacts* ; en effet, après troncature des termes d'une suite exacte de complexes la suite de complexes obtenue n'est pas toujours exacte.

1.3.12 Cône d'un morphisme de complexes. Soit \mathcal{A} une catégorie additive. Pour tout $\alpha_\bullet \in \text{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\mathbf{A}^\bullet, \mathbf{B}^\bullet)$, on appelle «*cône de α_\bullet* », la donnée du complexe $\mathbf{C}(\alpha_\bullet)^\bullet$ de termes $\mathbf{C}(\alpha_\bullet)^k = \mathbf{A}^k \oplus \mathbf{B}^{k+1}$ et de différentielle $(f, e) \mapsto (d_{\mathbf{A}}(f) - \alpha(e), -d_{\mathbf{B}}(e))$, et des morphismes de complexes $\beta_\bullet : \mathbf{B}^\bullet \rightarrow \mathbf{C}(\alpha_\bullet)^\bullet$, $\beta(f) = (f, 0)$, et $\gamma_\bullet : \mathbf{C}(\alpha_\bullet)^\bullet \rightarrow \mathbf{A}^\bullet[1]$, $\gamma(f, e) = e$. On représente ces données sous la forme :

$$\mathbf{A}^\bullet \xrightarrow{\alpha_\bullet} \mathbf{B}^\bullet \xrightarrow{\beta_\bullet} \mathbf{C}(\alpha_\bullet)^\bullet \xrightarrow{\gamma_\bullet} \mathbf{A}^\bullet[1] \quad (\diamond)$$

Deux propriétés du cône d'un morphisme de complexes :

- $\mathbf{F}(\mathbf{C}(\alpha_\bullet)^\bullet) = \mathbf{C}(\mathbf{F}\alpha_\bullet)^\bullet$, pour tout foncteur additif $\mathbf{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$.
- Lorsque \mathcal{A} est abélienne, la suite longue qui se déduit de (\diamond) :

$$H^{m-1} \mathbf{C}(\alpha_\bullet)^\bullet \xrightarrow{H^{m-1} \gamma_\bullet} H^m \mathbf{A}^\bullet \xrightarrow{H^m \alpha_\bullet} H^m \mathbf{B}^\bullet \xrightarrow{H^m \beta_\bullet} H^m \mathbf{C}(\alpha_\bullet)^\bullet \xrightarrow{H^m \gamma_\bullet} H^{m+1} \mathbf{A}^\bullet$$

est **exacte**.

1.4 Catégorie dérivée(¹¹)

1.4.1 Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. On note $D(\mathcal{A})$ la catégorie dérivée de \mathcal{A} . On rappelle que les objets de $D(\mathcal{A})$ sont les mêmes que pour $C(\mathcal{A})$ et que $\text{Mor}_{D(\mathcal{A})}(\mathbf{A}^\bullet, \mathbf{B}^\bullet)$ est défini à partir de $\text{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\mathbf{A}^\bullet, \mathbf{B}^\bullet)$ en identifiant les morphismes homotopes et en inversant formellement ses quasi-isomorphismes. Les quasi-isomorphismes de complexes sont donc des isomorphismes en catégorie dérivée.

Lorsque $\mathcal{A} = \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$, on notera $D_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ plutôt que $D(\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}))$. Le groupe abélien $\text{Mor}_{D_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)$ est muni d'une structure de \mathcal{A} -module. On omettra souvent de préciser l'anneau \mathcal{A} dans ces notations et lorsque \mathbf{X} sera réduit à un point, la notation $D_{\mathcal{A}}(\bullet)$ sera abrégée à $D_{\mathcal{A}}$.

¹⁰ L'appellation de «*troncature intelligente*» est par opposition à la troncature dite «*bête*» qui diffère de $\tau_{\leq m} \mathbf{A}^\bullet$ par le fait que tous les termes en degrés supérieurs à m sont nuls.

¹¹ Cf. [Ha₁] chapitre I, pp. 19–84.

1.4.2 Le foncteur de translation $T : C(\mathcal{A}) \rightsquigarrow C(\mathcal{A})$ est clairement une équivalence de catégories qui passe en catégorie dérivée $T : D(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D(\mathcal{A})$.

1.4.3 Lorsque $\alpha_\bullet, \beta_\bullet : \mathbf{A}^\bullet \rightarrow \mathbf{B}^\bullet$ sont deux morphismes homotopes, on a $H^m \alpha_\bullet = H^m \beta_\bullet$. et comme H^m transforme (par définition) un quasi-isomorphisme en isomorphisme, le foncteur $H^m : C(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}$ induit un foncteur $H^m : D(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}$.

1.4.4 Triangles exacts. Un «triangle» de $D(\mathcal{A})$ est la donnée d'un triplet $(\alpha_\bullet, \beta_\bullet, \gamma_\bullet)$ de morphismes de $D(\mathcal{A})$ dont les sources et buts se correspondent de la manière suivante :

$$\mathbf{A}^\bullet \xrightarrow{\alpha_\bullet} \mathbf{B}^\bullet \xrightarrow{\beta_\bullet} \mathbf{C}^\bullet \xrightarrow{\frac{\gamma_\bullet}{[+1]}} \mathbf{A}^\bullet[1]$$

Les complexes $\mathbf{A}^\bullet, \mathbf{B}^\bullet, \mathbf{C}^\bullet$ sont appelés les «sommets» du triangle. Un morphisme d'un triangle $(\alpha_{1\bullet}, \beta_{1\bullet}, \gamma_{1\bullet})$ vers un triangle $(\alpha_{2\bullet}, \beta_{2\bullet}, \gamma_{2\bullet})$ est la donnée d'un triplet $(a_\bullet, b_\bullet, c_\bullet)$ de morphismes de $D(\mathcal{A})$ dont les sources et buts correspondent au diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{A}_1^\bullet & \xrightarrow{\alpha_{1\bullet}} & \mathbf{B}_1^\bullet & \xrightarrow{\beta_{1\bullet}} & \mathbf{C}_1^\bullet & \xrightarrow{\frac{\gamma_{1\bullet}}{[+1]}} & \mathbf{A}_1^\bullet[1] \\ \downarrow a_\bullet & & \downarrow b_\bullet & & \downarrow c_\bullet & & \downarrow a_\bullet[1] \\ \mathbf{A}_2^\bullet & \xrightarrow{\alpha_{2\bullet}} & \mathbf{B}_2^\bullet & \xrightarrow{\beta_{2\bullet}} & \mathbf{C}_2^\bullet & \xrightarrow{\frac{\gamma_{2\bullet}}{[+1]}} & \mathbf{A}_2^\bullet[1] \end{array}$$

et tels que ce diagramme est commutatif (dans $D(\mathcal{A})$). Le morphisme $(a_\bullet, b_\bullet, c_\bullet)$ est un «isomorphisme de triangles» lorsque ses composantes sont des isomorphismes (dans $D(\mathcal{A})$).

Définition. Un triangle de $D(\mathcal{A})$ est dit «exact» (ou «distingué») s'il est isomorphe au triangle associé au cône d'un morphisme de $C(\mathcal{A})$ (1.3.12-(\diamond)).

1.4.5 Dans un triangle exact $(\alpha_\bullet, \beta_\bullet, \gamma_\bullet)$ la composition de deux morphismes consécutifs est toujours nulle et dans un morphisme de triangles exacts $(a_\bullet, b_\bullet, c_\bullet)$, il suffit que deux morphismes soient des isomorphismes pour que le troisième le soit.

1.4.6 Catégories triangulées. On rappelle de manière très succincte que l'on appelle «catégorie triangulée» une catégorie additive munie d'un automorphisme de «translation» T et d'une classe de «triangles exacts» le tout satisfaisant quatre axiomes (cf. [Ha₁] ch. I §1 p. 20). La catégorie $D(\mathcal{A})$ munie de la classe des «triangles exacts» est une catégorie triangulée (*loc.cit.* I §2 p. 25).

1.4.7 Un foncteur additif entre deux catégories triangulées est dit «exact» lorsque : (a) il commute aux foncteur de translation, et (b) il transforme un triangle exact en un triangle exact.

1.4.8 Comme dans 1.3.12, tout triangle exact de $D(\mathcal{A})$:

$$\mathbf{A}^\bullet \xrightarrow{\alpha_\bullet} \mathbf{B}^\bullet \xrightarrow{\beta_\bullet} \mathbf{C}^\bullet \xrightarrow{\frac{\gamma_\bullet}{[+1]}} \mathbf{A}^\bullet[1]$$

donne lieu à une suite exacte longue de \mathcal{A} :

$$\dots \xrightarrow{H^{m-1}\gamma_\bullet} H^m \mathbf{A}^\bullet \xrightarrow{H^m \alpha_\bullet} H^m \mathbf{B}^\bullet \xrightarrow{H^m \beta_\bullet} H^m \mathbf{C}^\bullet \xrightarrow{H^m \gamma_\bullet} \mathcal{H}^{m+1} \mathbf{A}^\bullet \xrightarrow{H^{m+1} \alpha_\bullet} \dots$$

Propriété qui est également vérifiée par les foncteurs $\text{Mor}_{D(\mathcal{A})}(\mathbf{M}^\bullet, -)$ et $\text{Mor}_{D(\mathcal{A})}(-, \mathbf{M}^\bullet)$ pour tout $\mathbf{M}^\bullet \in D(\mathcal{A})$; a savoir, la suite longue :

$$\dots \rightarrow \text{Mor}_{D(\mathcal{A})}(\mathbf{M}^\bullet, \mathbf{A}^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{D(\mathcal{A})}(\mathbf{M}^\bullet, \mathbf{B}^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{D(\mathcal{A})}(\mathbf{M}^\bullet, \mathbf{C}^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{D(\mathcal{A})}(\mathbf{M}^\bullet, \mathbf{A}^\bullet[1]) \rightarrow \dots$$

est exacte de même que celle (contravariante) associée à $\text{Mor}_{D(\mathcal{A})}(-, \mathbf{M}^\bullet)$.

1.4.9 Amplitude cohomologique d'un complexe. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Pour tout $\mathbf{A}^\bullet \in D(\mathcal{A})$, on appelle «*amplitude cohomologique de \mathbf{A}^\bullet* », notée $[[\mathbf{A}^\bullet]]_{\text{coh}}$, le plus grand intervalle $[[a, b]] \subseteq \mathbb{Z}$ tel que $H^a \mathbf{A}^\bullet \neq 0$ et $H^b \mathbf{A}^\bullet \neq 0$. On a

$$[[\mathbf{A}^\bullet[m]]]_{\text{coh}} + m = [[\mathbf{A}^\bullet]]_{\text{coh}}.$$

1.4.10 Support cohomologique d'un complexe de faisceaux. Pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in D(\mathbf{X})$, on appelle «*support cohomologique de \mathcal{F}^\bullet* » : l'ensemble $|\mathcal{F}^\bullet| := \cup_{m \in \mathbb{Z}} |\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet|$ (1.2.1). Comme dans le cas des faisceaux, le support cohomologique d'un complexe de faisceaux n'a aucune raison *a priori* d'être localement fermé.

1.4.11 Lorsque $\mathbf{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ est un foncteur additif et exact, son action sur les complexes passe en catégories dérivées $\mathbf{F} : D(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D(\mathcal{B})$ (1.3.8) et l'on a un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} D(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathbf{F}} & D(\mathcal{B}) \\ H^m \downarrow & & \downarrow H^m \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathcal{B} \end{array}$$

En particulier, lorsque $\mathcal{A} = \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$, on a pour toute partie $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{X}$ et tout localement fermé $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{X}$:

$$\boxed{\iota_{\mathbf{S}!}(\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet) \equiv \mathcal{H}^m(\iota_{\mathbf{S}!} \mathcal{F}^\bullet)} \quad \text{et} \quad \boxed{(\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet)|_{\mathbf{A}} \equiv \mathcal{H}^m(\mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{A}})}$$

(La notation $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{A}}$ sera donc non ambiguë.)

1.4.12 Notation. Pour toute catégorie abélienne \mathcal{A} , on note on note $D^+(\mathcal{A})$ (resp. $D^-(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$ dont les objets sont les complexes \mathbf{A}^\bullet vérifiant $H^m \mathbf{A}^\bullet = 0$, pour $m \ll 0$ (resp. $m \gg 0$). On pose alors $D^b(\mathcal{A}) := D^+(\mathcal{A}) \cap D^-(\mathcal{A})$.

1.4.13 La catégorie $D^+(\mathcal{A})$ est clairement stable par le foncteur de translation de $D(\mathcal{A})$ et, munie des triangles exacts de $D(\mathcal{A})$ à sommets dans $D^+(\mathcal{A})$, c'est une catégorie triangulée et même une «*sous-catégorie triangulée de $D(\mathcal{A})$* », ce qui signifie que si deux sommets d'un triangle exact de $D(\mathcal{A})$ appartiennent à $D^+(\mathcal{A})$, le troisième sommet lui appartient également. Cette remarque s'applique également aux sous-catégories $D^-(\mathcal{A})$ et $D^b(\mathcal{A})$.

1.4.14 Foncteurs dérivés à droite. Pour tout foncteur $\mathbf{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$, additif et exact à gauche entre catégories abéliennes, il existe un «*le foncteur dérivé à droite de \mathbf{F}* », noté $\mathbb{R}\mathbf{F}$, défini de $D^+(\mathcal{A})$ vers $D^+(\mathcal{B})$. Le foncteur $\mathbb{R}\mathbf{F} : D^+(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D^+(\mathcal{B})$ est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

IR-i) $\mathbb{R}\mathbf{F}$ est exact entre catégories triangulées (1.4.7,1.4.13).

IR-ii) $\mathbb{R}\mathbf{F}$ «*prolonge*» les foncteurs $\mathbb{R}^m \mathbf{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$, i.e. il existe un isomorphisme naturel

$$\mathbb{R}^m \mathbf{F}(\mathbf{A}) \equiv H^m \mathbb{R}\mathbf{F}(\mathbf{A}[0]),$$

pour tout $\mathbf{A} \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ (1.2.7,1.3.4).

Pour tout complexe $I^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$ à termes injectifs, on a $\mathbb{R}F(I^\bullet) = F(I^\bullet)$. En particulier pour chaque $A^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$, tout quasi-isomorphisme de complexes $\varepsilon : A^\bullet \rightarrow I^\bullet$ détermine un isomorphisme :

$$\mathbb{R}F(A^\bullet) \xrightarrow[\varepsilon]{\sim} F(I^\bullet) \in D^+(\mathcal{A}).$$

De même, un quasi-isomorphisme $\varepsilon : A^\bullet \rightarrow K^\bullet$, où $K^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$ et où chaque terme de K^\bullet est F -acyclique (1.2.8), donne lieu à un isomorphisme $(\varepsilon) : \mathbb{R}F(A^\bullet) \sim F(K^\bullet)$.

1.4.15 L'exactitude des foncteurs $\mathbb{R}F$ à une conséquence pratique très utile qui relève de la propriété générale suivante. Étant donné un morphisme $\Xi : F_1 \rightarrow F_2$ entre deux foncteurs exacts de catégories triangulées $F_1, F_2 : D^+(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D(\mathcal{B})$, le morphisme Ξ est un isomorphisme si et seulement si $\Xi(A[0]) : F_1(A[0]) \rightarrow F_2(A[0])$ est un isomorphisme pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, et même pour tout $A \in \mathcal{A}$ *injectif*.

1.4.16 Subtilité. Soient $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ deux foncteurs additifs exacts à gauche entre catégories abéliennes. Il existe un morphisme naturel de foncteurs $\mathbb{R}(G \circ F) \rightarrow \mathbb{R}G \circ \mathbb{R}F$. Ce morphisme est un isomorphisme si et seulement si F transforme un objet injectif de \mathcal{A} en un objet G -acyclique de \mathcal{B} .

1.4.17 Lorsque \mathcal{A} est de dimension injective finie d (1.2.11), tout objet de \mathcal{A} admet des résolutions injectives de longueur bornées par d . On en déduit que tout complexe de $C(\mathcal{A})$ à cohomologie bornée est isomorphe dans $D(\mathcal{A})$ à un complexe de longueur finie à termes injectifs. Dans ce cas, pour **tout** foncteur additif exact à gauche $F : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$, le foncteur dérivé $\mathbb{R}F : D^+(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D^+(\mathcal{B})$ vérifie $\mathbb{R}F(D^b(\mathcal{A})) \subseteq D^b(\mathcal{B})$.

1.4.18 Comme conséquence des deux dernières remarques, les foncteurs additifs exacts à gauche $\iota_{A^*} : \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(A) \rightsquigarrow \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(X)$ et $\underline{\Gamma}_S : \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(X) \rightsquigarrow \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(S)$ (1.2.3), vérifient pour tous $F : \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(X) \rightsquigarrow \mathcal{A}$ et $G : \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(S) \rightsquigarrow \mathcal{A}$ additifs et exacts à gauche :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \mathbb{R}\iota_{A^*} : D^+(A) \rightsquigarrow D^+(X) \\ \text{ii) } \mathbb{R}\iota_{A^*}(D^b(A)) \subseteq D^b(X) \\ \text{iii) } \mathbb{R}F \circ \mathbb{R}\iota_{A^*} \equiv \mathbb{R}(F \circ \iota_{A^*}) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \mathbb{R}\underline{\Gamma}_S : D^+(X) \rightsquigarrow D^+(S) \\ \text{ii) } \mathbb{R}\underline{\Gamma}_S(D^b(X)) \subseteq D^b(S) \\ \text{iii) } \mathbb{R}G \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}_S \equiv \mathbb{R}(G \circ \underline{\Gamma}_S) \end{array} \right.$$

puisque les foncteurs ι_{A^*} et $\underline{\Gamma}_S$ transforment injectifs en injectifs (1.2.5) et compte tenu des hypothèses de finitude cohomologique imposées à X (1.1).

Notation. Le foncteur dérivé $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_S$ sera noté $\iota_S^!$ conformément à l'usage (*cf.* 1.5.4).

1.4.19 Changement de base pour les inclusions localement fermées. On reprend les notations de 1.2.2. Soient S et T deux parties localement fermées de X et considérons le diagramme d'inclusions :

$$\begin{array}{ccc} S \cap T & \xleftarrow{\iota_{S \cap T}^T} & T \\ \iota_{S \cap T}^S \downarrow \subseteq & \square & \subseteq \downarrow \iota_T^X \\ S & \xleftarrow{\iota_S^X} & X \end{array}$$

Pour tout $\mathcal{F} \in \text{Faisc}(S)$ la restriction d'une section de $\iota_{S!}^X \mathcal{F}$ à T est clairement, par définition, une section de $\iota_{S \cap T!}^T(\mathcal{F}|_{S \cap T})$. On a ainsi un morphisme naturel dans $\text{Faisc}(T)$:

$$\iota_T^{X-1} \iota_{S!}^X \mathcal{F} \xrightarrow[\equiv]{\circlearrowleft} \iota_{S \cap T!}^T \iota_{S \cap T}^{S-1} \mathcal{F}$$

qui est bijectif d'après l'inspection de son action sur les fibres (les foncteurs v_i sont des prolongements par zéro!). On a donc un isomorphisme naturel, pour tout $\mathcal{G} \in \text{Faisc}(\mathbf{T})$:

$$\text{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}_T}(i_{S \cap T!}^T i_{S \cap T}^{S-1} \mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}_T}(i_T^{X-1} i_{S!}^X \mathcal{F}, \mathcal{G})$$

et par adjonction :

$$\text{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}_S}(\mathcal{F}, i_{S \cap T*}^S \Gamma_{S \cap T}^T \mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}_S}(\mathcal{F}, \Gamma_S^X i_{T*}^X \mathcal{G})$$

d'où un isomorphisme naturel dans $\text{Faisc}(\mathbf{S})$:

$$i_{S \cap T*}^S \Gamma_{S \cap T}^T \mathcal{G} \xrightarrow[\cong]{\diamond_*} \Gamma_S^X i_{T*}^X \mathcal{G}$$

Proposition. *Les parties \mathbf{S} et \mathbf{T} étant localement fermées dans \mathbf{X} :*

a) *Les morphismes (\diamond_*) et $(\diamond_!)$ induisent des isomorphismes de foncteurs de catégories dérivées :*

$$\mathbb{R}i_{S \cap T*}^S \circ i_{S \cap T}^{T!} \equiv i_S^{X!} \circ \mathbb{R}i_{T*}^X \quad \text{et} \quad i_{S \cap T!}^S \circ i_{S \cap T}^{T-1} \equiv i_S^{X-1} \circ i_{T!}^X$$

b) $i_S^{X!} \circ i_{T!}^X = \mathbf{0}$ lorsque $\mathbf{S} \cap \overline{\mathbf{T}} = \emptyset$.

c) $i_S^{X!} \circ \mathbb{R}i_{T*}^X = \mathbf{0}$ lorsque $\mathbf{S} \cap \mathbf{T} = \emptyset$.

d) *On a un isomorphisme canonique $i_{S \cap T!}^S \circ i_{S \cap T}^{T!} \equiv i_S^{X!} \circ i_{T!}^X$, lorsque \mathbf{T} est fermé, ou bien lorsque \mathbf{S} est ouvert.*

Indications. D'après 1.4.15, il suffit de vérifier chaque isomorphisme en calculant sur un complexe concentré en degré 0, *i.e.* sur un faisceau. La première équivalence est conséquence immédiate de 1.4.18-(iii); la seconde est un relettrage de $(\diamond_!)$. L'assertion (c) en découle aussitôt. Pour (b), on a $i_{T!}^X = i_{T*}^X \circ i_{T!}^{\overline{\mathbf{T}}}$ et donc $i_S^{X!} \circ i_{T!}^X = (i_S^{X!} \circ i_{T*}^X) \circ i_{T!}^{\overline{\mathbf{T}}}$; on applique alors (c). Enfin pour (d), si \mathbf{T} est fermé, on a $i_{S \cap T!}^S = i_{S \cap T*}^S$ et $i_{T!}^X = i_{T*}^X$; et si \mathbf{S} est ouvert, on a $i_{S \cap T!}^S = i_{S \cap T}^{T-1}$ et $i_S^{X!} = i_S^{X-1}$, dans les deux cas on est ramené à (a). ■

1.4.20 Faisceaux dérivés à supports dans un localement fermé. Pour toute partie \mathbf{S} localement fermée dans \mathbf{X} , on note \mathcal{H}_S^m la composée des deux foncteurs $i_S^! : D^+(\mathbf{X}) \rightsquigarrow D^+(\mathbf{S})$ et $\mathcal{H}^m : D^+(\mathbf{S}) \rightsquigarrow \text{Faisc}(\mathbf{S})$:

$$\boxed{\mathcal{H}_S^m \mathcal{F}^\bullet := \mathcal{H}^m(i_S^! \mathcal{F}^\bullet) \in \text{Faisc}(\mathbf{S})}$$

Cette définition généralise celle de \mathcal{H}^m puisque $\mathcal{H}_X^m = \mathcal{H}^m$ de manière évidente.

1.4.21 Comme dans le cas des foncteurs \mathcal{H}^m (1.4.8), tout triangle exact de $D^+(\mathbf{X})$:

$$\mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}^\bullet \xrightarrow{[+1]},$$

donne lieu à une suite exacte longue de $\text{Faisc}(\mathbf{S})$:

$$\dots \longrightarrow \mathcal{H}_S^{m-1} \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \mathcal{H}_S^m \mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \mathcal{H}_S^m \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{H}_S^m \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \mathcal{H}_S^{m+1} \mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \dots$$

1.4.22 Soit U un ouvert de \mathbf{X} contenant \mathbf{S} . L'inclusion $i_S : \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{X}$ se factorise à travers U en deux inclusions localement fermées $\mathbf{S} \xrightarrow{i_1} U \xrightarrow{i_2} \mathbf{X}$, et $i_S^! = i_1^! i_2^{-1}$ car i_2 est ouvert (1.2.3). Par conséquent, pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in D^+(\mathbf{X})$:

$$\boxed{\mathcal{H}_S^m \mathcal{F}^\bullet \equiv \mathcal{H}_S^m(\mathcal{F}^\bullet|_U), \text{ lorsque } \mathbf{S} \subseteq U \subseteq \mathbf{X}}$$

Et lorsque $S = U$:

$$\boxed{\mathcal{H}_U^m \mathcal{F}^\bullet \equiv \mathcal{H}^m(\mathcal{F}^\bullet|_U) \equiv \mathcal{H}^m(\mathcal{F}^\bullet)|_U}$$

1.4.23 Soient S et T deux parties localement fermées de X . D'après 1.4.19, on a, pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in D^+(X)$ et tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_S^m(\mathbb{R}i_{T*}^X \mathcal{F}^\bullet) \equiv \mathbb{R}i_{S \cap T*}^S \mathcal{H}_{S \cap T}^m \mathcal{F}^\bullet; \\ \mathcal{H}_S^m(i_{T!}^X \mathcal{F}^\bullet) = 0, \quad \text{lorsque } S \cap \bar{T} = \emptyset; \\ \mathcal{H}_S^m(\mathbb{R}i_{T*}^X \mathcal{F}^\bullet) = 0, \quad \text{lorsque } S \cap T = \emptyset; \end{cases}$$

de même qu'un isomorphisme naturel :

$$\mathcal{H}_S^m(i_{T!}^X \mathcal{F}^\bullet) \equiv i_{S \cap T!}^S \mathcal{H}_{S \cap T}^m \mathcal{F}^\bullet$$

lorsque T est fermée ou bien lorsque S est ouverte.

1.4.24 Un triangle exact fondamental. Soient S une partie localement fermée de X , $A := X \setminus S$ et $\iota_A : A \hookrightarrow X$ l'inclusion. La suite 1.2.6-(*) donne lieu, en catégorie dérivée maintenant, au triangle exact de $D^+(X)$:

$$\iota_{S!} \iota_S^! \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}i_{A*} \iota_A^{-1}(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{[+1]}, \quad (*)$$

dont on déduit la suite exacte longue (1.4.11) :

$$\rightarrow \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}i_{A*}(\mathcal{F}^\bullet|_A)) \rightarrow \iota_{S!} \mathcal{H}_S^m \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{H}^m(\mathbb{R}i_{A*}(\mathcal{F}^\bullet|_A)) \rightarrow \iota_{S!} \mathcal{H}_S^{m+1} \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \quad (\diamond)$$

1.4.25 Troncatures intelligentes dans $D(X)$. Comme la troncature de deux morphismes de complexes homotopes donne des morphismes homotopes et que deux complexes quasi-isomorphes restent quasi-isomorphes après troncature, le foncteur $\tau_{\leq m} : C(X) \rightsquigarrow C(X)$ induit bien un foncteur $\tau_{\leq m} : D(X) \rightsquigarrow D(X)$.

1.4.26 Les foncteurs de troncature *ne sont pas exacts*, en effet, après troncature des sommets d'un triangle exact le triangle obtenu n'est pas toujours exact (cf. 1.3.11).

1.4.27 Complexes cohomologiquement concentrés en un seul degré. Soit $d \in \mathbb{Z}$. Un complexe $\mathcal{F}^\bullet \in C(X)$ est dit «*cohomologiquement concentré en degré d* », lorsque $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet = 0$ pour tout $m \neq d$, autrement dit lorsque, $\llbracket \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} \subseteq \llbracket d \rrbracket$.

La composée du foncteur $(-)[0] : \text{Faisc}(X) \rightarrow C(X)$ (1.3.4) et de l'inclusion $C(X) \subseteq D(X)$ donne le foncteur $(-)[0] : \text{Faisc}(X) \rightarrow D(X)$ pleinement fidèle d'inverse à gauche \mathcal{H}^0 et d'image essentielle : la sous-catégorie pleine des complexes cohomologiquement concentrés en degré 0. En effet, pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in C(X)$ on a la suite exacte de complexes :

$$0 \rightarrow \tau_{\leq -1} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\subseteq} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{q} \tau_{\geq 0} \mathcal{F}^\bullet := \frac{\mathcal{F}^\bullet}{\tau_{\leq -1} \mathcal{F}^\bullet} \rightarrow 0$$

où q désigne la surjection canonique, et un morphisme de complexes ε

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_{\geq 0}\mathcal{F}^\bullet & = & \left(0 \rightarrow \frac{\mathcal{F}^0}{\text{im}(d_{-1})} \xrightarrow{\bar{d}_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{d_2} \dots \right) \\ \varepsilon \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\ (\mathcal{H}^0 \mathcal{F}^\bullet)[0] & = & \left(0 \rightarrow \frac{\ker(d_0)}{\text{im}(d_{-1})} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \right) \end{array}$$

induit par l'inclusion $\ker(d_0) \subseteq \mathcal{F}^0$. On a donc, dans la catégorie $C(\mathbf{X})$:

$$\mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{q} \tau_{\geq 0}\mathcal{F}^\bullet \xleftarrow{\varepsilon} (\mathcal{H}^0 \mathcal{F}^\bullet)[0].$$

Cela étant, lorsque \mathcal{F}^\bullet est cohomologiquement concentré en degré 0, les morphismes q et ε sont des quasi-isomorphismes et \mathcal{F}^\bullet et $(\mathcal{H}^0 \mathcal{F}^\bullet)[0]$ sont isomorphes **dans la catégorie $D(\mathbf{X})$** .

1.4.28 Le bifoncteur $\mathcal{H}om^\bullet$ sur $D_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$. Soient $(\mathcal{F}^\bullet, d(\mathcal{F})_\bullet)$ et $(\mathcal{G}^\bullet, d(\mathcal{G})_\bullet)$ deux complexes de faisceaux. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on note :

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}^m(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) := \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(\mathcal{F}^k, \mathcal{G}^{m+k}),$$

et l'on définit les morphismes de faisceaux :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}^m(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) & \xrightarrow{D(\mathcal{F}, \mathcal{G})_m} & \mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}^{m+1}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \\ (k \mapsto \alpha_k) & \longmapsto & (k \mapsto d(\mathcal{G})_{m+k} \circ \alpha_k) - (-1)^m (k \mapsto \alpha_{k+1} \circ d(\mathcal{F})_k) \end{array}$$

qui vérifient $D(\mathcal{F}, \mathcal{G})_m \circ D(\mathcal{F}, \mathcal{G})_{m-1} = 0$. On obtient par ce procédé un complexe de faisceaux $(\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet), D(\mathcal{F}, \mathcal{G})_\bullet)$ et un bifoncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}^\bullet : C(\mathbf{X}) \times C(\mathbf{X}) \rightsquigarrow C(\mathbf{X})$ induisant, en catégories dérivées, un bifoncteur

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}^\bullet : D_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}) \times D_{\mathcal{A}}^+(\mathbf{X}) \rightsquigarrow D_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$$

'défini' par $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = \mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathbf{I}^\bullet(\mathcal{G}))$, où $\mathcal{G}^\bullet \rightarrow \mathbf{I}^\bullet(\mathcal{G})$ est une résolution injective. Il existe alors un isomorphisme naturel, pour tous $\mathcal{F}^\bullet \in D_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ et $\mathcal{G}^\bullet \in D_{\mathcal{A}}^+(\mathbf{X})$ ⁽¹²⁾ :

$$\boxed{\text{Mor}_{D_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \cong H^0\left(\mathbb{R}\Gamma(\mathbf{X}, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet))\right)} \quad (\diamond)$$

1.5 Dualité de Grothendieck-Verdier

Dans cette section on rappelle l'extension des définitions des foncteurs $f_!$ et $f^!$, du cas où $f : \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{X}$ est une inclusion localement fermée, au cas où f est uniquement supposée continue.

1.5.1 Image directe à supports propres.⁽¹³⁾ Soit $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ une application continue. Pour $\mathcal{F} \in \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Y})$, la correspondance qui associe à un ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, le module des sections $\sigma \in \Gamma(f^{-1}(U); \mathcal{F})$ telles que $f|_{|\sigma|} : |\sigma| \rightarrow U$ est propre, est un faisceau sur \mathbf{X} noté $f_!\mathcal{F}$. On obtient ainsi un foncteur $f_! : \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Y}) \rightsquigarrow \text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$.

¹² Cf. [Ha₁] §I.6 th. 6.4 (Yoneda) p. 66, et [BoAl] Borel §5.16–18 pp. 110–112. D'après [Spa₂] le complexe \mathcal{G}^\bullet pourrait être illimité grâce aux restrictions imposées aux anneaux et espaces topologiques, mais cette généralisation n'est pas triviale et nous n'en aurons par ailleurs pas besoin.

¹³ Cf. [BoAl] Grivel et Borel §V.10.4–7. Egalement, [KS] §2.5 pp. 102–109 et §3.1 pp. 140–149.

1.5.2 Dans le cas de l'application constante $c_X : \mathbf{X} \rightarrow \{\bullet\}$, on a $c_X! \mathcal{F} = \Gamma_c(\mathbf{X}; \mathcal{F}) \in \text{Mod}(\mathcal{A})$.

1.5.3 Image inverse exceptionnelle. La proposition suivante rappelle (*cf. loc.cit.*) les principales propriétés du foncteur $f_!$ et introduit l'adjoint à droite **en catégorie dérivée** du foncteur $\mathbb{R}f_!$, noté $f^!$ et appelé «*image inverse exceptionnelle*».

Proposition. Soient $g : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Y}$ et $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ des applications continues.

- a) Le foncteur $f_! : \text{Faisc}(\mathbf{Y}) \rightsquigarrow \text{Faisc}(\mathbf{X})$ est additif et exact à gauche.
- b) Le foncteur $\mathbb{R}f_! : D^+(\mathbf{Y}) \rightsquigarrow D^+(\mathbf{X})$ vérifie $\mathbb{R}f_!(D^b(\mathbf{Y})) \subseteq D^b(\mathbf{X})$.
- c) Pour tout $\mathcal{F} \in \text{Faisc}(\mathbf{Y})$ et tout $x \in \mathbf{X}$, on a un isomorphisme naturel

$$(\mathbb{R}^m f_!(\mathcal{F}))_x \cong H_c^m(f^{-1}(x); \mathcal{F}|_{f^{-1}(x)}).$$

- d) Il existe un foncteur additif et exact $f^! : D^+(\mathbf{X}) \rightsquigarrow D^+(\mathbf{Y})$, appelé «*image inverse exceptionnelle*» vérifiant $f^!(D^b(\mathbf{X})) \subseteq D^b(\mathbf{Y})$, et un morphisme naturel :

$$\text{Mor}_{D(\mathbf{X})}(\mathbb{R}f_! \mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \xleftarrow{(\cong)} \text{Mor}_{D(\mathbf{Y})}(\mathcal{F}^\bullet; f^! \mathcal{G}^\bullet),$$

qui est un isomorphisme pour tous $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(\mathbf{Y})$ et $\mathcal{G}^\bullet \in D^+(\mathbf{X})$ ⁽¹⁴⁾. Le foncteur $f^!$ est unique à isomorphisme canonique près.

- e) $\mathbb{R}(f \circ g)_! = \mathbb{R}f_! \circ \mathbb{R}g_!$ et $\mathbb{R}(f \circ g)^! = \mathbb{R}g^! \circ \mathbb{R}f^!$.

- f) **Changement de base.** Étant donné un diagramme cartésien⁽¹⁵⁾ d'applications continues :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}' & \xrightarrow{g'} & \mathbf{Y} \\ f' \downarrow & \square & \downarrow f \\ \mathbf{X}' & \xrightarrow{g} & \mathbf{X} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{on a des} \\ \text{isomorphismes} \\ \text{canoniques} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} g^{-1} \circ \mathbb{R}f_! \cong \mathbb{R}f'_! \circ g'^{-1} : D^+(\mathbf{Y}) \rightsquigarrow D^+(\mathbf{X}') \\ \mathbb{R}g'_* \circ f'^! \cong f^! \circ \mathbb{R}g_* : D^+(\mathbf{X}') \rightsquigarrow D^+(\mathbf{Y}) \end{array} \right.$$

1.5.4 Lorsque $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ est une inclusion fermée, le foncteur des section à support $\underline{\Gamma}_{\mathbf{Y}}$ est adjoint à droite de $f_!$, il existe donc un isomorphisme naturel de foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathbf{Y}} \cong f^!$.

1.5.5 L'isomorphisme (d) de la proposition précédente est obtenu *via* l'isomorphisme naturel $\text{Mor}_{D(\mathbf{X})}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \cong H^0\Gamma(\mathbf{X}, \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet))$ (1.4.28), à partir d'un isomorphisme naturel plus fin connu sous le nom de «*dualité de Grothendieck-Verdier*»⁽¹⁴⁾, à savoir :

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathbb{R}f_! \mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \cong \mathbb{R}f_* \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, f^! \mathcal{G}^\bullet)$$

dont on déduit :

$$f^! \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \cong \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(f^{-1} \mathcal{F}^\bullet, f^! \mathcal{G}^\bullet)$$

¹⁴ Le théorème est démontré pour $\mathcal{F}^\bullet \in D(\mathbf{Y})$ et $\mathcal{G}^\bullet \in D^b(\mathbf{X})$ dans [BoAl] (Borel §7.17, p. 130) et pour $\mathcal{F}^\bullet \in D^-(\mathbf{Y})$ et $\mathcal{G}^\bullet \in D^+(\mathbf{X})$ dans [Ha₁] (§III.11 p. 210) sans les restrictions 1.1 mais uniquement sous réserve que le foncteur $\mathbb{R}f_!$ est de dimension cohomologique finie. Enfin, Spaltenstein donne un sens et démontre la formule sans aucune restriction sur les complexes dans [Spa₂] prop. 6.15 p. 151.

¹⁵ Par «*cartésien*» on signifie que ce diagramme est isomorphe au diagramme analogue du produit fibré $\mathbf{X}' \times_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = \{(x', y) \mid g(x') = f(y)\}$. Le diagramme est commutatif et l'application induite $g' : f'^{-1}(x') \rightarrow f^{-1}(g(x'))$ est un homéomorphisme pour tout $x' \in \mathbf{X}'$. Le diagramme de 1.4.19 est cartésien.

1.5.6 Soit U un ouvert de \mathbf{X} . Pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in D^+(\mathbf{X})$, on a des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\Gamma(U; \mathcal{F}^\bullet) &\equiv \mathbb{R}c_{U*} \iota_U^{X-1} \mathcal{F}^\bullet \equiv \mathbb{R}c_{U*} \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\underline{\mathcal{A}}_U, \iota_U^{X-1} \mathcal{F}^\bullet) \\ &\equiv \mathbb{R}c_{X*} \mathbb{R}\iota_U^X \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\underline{\mathcal{A}}_U, \iota_U^{X-1} \mathcal{F}^\bullet) \equiv \mathbb{R}c_{X*} \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\iota_U^X \underline{\mathcal{A}}_U, \mathcal{F}^\bullet) \end{aligned}$$

où la deuxième ligne est un cas particulier de la dualité de Grothendieck-Verdier.

1.6 Complexes dualisants⁽¹⁶⁾

1.6.1 Définition. On appelle « *complexe dualisant à coefficients dans \mathcal{A}* » tout complexe de $D_{\mathcal{A}}^b(\mathbf{X})$ isomorphe à $c_X^! \mathcal{A}$, où c_X désigne l'application constante $c_X : \mathbf{X} \rightarrow \{\bullet\}$. On désigne par $\mathbb{D}_{\mathbf{X}|\mathcal{A}}^\bullet$ (et $\mathbb{D}_{\mathbf{X}}^\bullet$ lorsque \mathcal{A} est sous-entendu) un tel complexe.

1.6.2 Pour toute application continue $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$, on a $c_{\mathbf{Y}} = c_{\mathbf{X}} \circ f$, donc $c_{\mathbf{Y}}^! \mathcal{A} \equiv f^!(c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{A})$ (1.5.3-(e)), autrement dit $\mathbb{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet = f^! \mathbb{D}_{\mathbf{X}}^\bullet$.

1.6.3 Soit $\mathbb{D}_{\mathbf{X}|\mathcal{A}}^\bullet$ un complexe dualisant à termes injectifs. Pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ d'inclusion notée $\iota_U : U \hookrightarrow \mathbf{X}$, on a (1.5.6) :

$$\Gamma(U; \mathbb{D}_{\mathbf{X}|\mathcal{A}}^\bullet) \equiv \mathbb{R}c_{X*} \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\iota_{U!} \underline{\mathcal{A}}_U, c_{X^!}^! \mathcal{A}) \equiv \mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet(\mathbb{R}c_{U!} \underline{\mathcal{A}}_U, \mathcal{A}) \equiv \mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma_c(U; \mathcal{I}^\bullet), \mathbf{I}^\bullet)$$

où le premier isomorphisme est 1.5.6 puisque $\Gamma(\mathbf{X}; \mathbb{D}_{\mathbf{X}|\mathcal{A}}^\bullet) = \mathbb{R}\Gamma(\mathbf{X}; \mathbb{D}_{\mathbf{X}|\mathcal{A}}^\bullet)$ ($\mathbb{D}_{\mathbf{X}|\mathcal{A}}^\bullet$ est à termes injectifs!), le deuxième est la dualité de Grothendieck-Verdier et le troisième est déterminé par un choix de résolutions injectives de longueur finie $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathbf{I}^\bullet$ et $\underline{\mathcal{A}}_X \hookrightarrow \mathcal{I}^\bullet$ respectivement dans $\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ et $\mathrm{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ (1.2.11, 1.4.17).

Cette explicitation de $\Gamma(U; \mathbb{D}_{\mathbf{X}|\mathcal{A}}^\bullet)$ est à la base des constructions explicites de complexes dualisants. En effet, on montre aisément que pour tout faisceau injectif \mathcal{I} et tout \mathcal{A} -module injectif \mathbf{I} , le préfaisceau

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathcal{I}; \mathbf{I}) : U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Gamma_c(U; \mathcal{I}); \mathbf{I})}$$

est un faisceau injectif. Par conséquent, étant données des résolutions injectives de longueur finie $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathbf{I}^\bullet$ et $\underline{\mathcal{A}}_X \hookrightarrow \mathcal{I}^\bullet$, le complexe simple associé au bicomplexe de faisceaux $\mathcal{P}(\mathcal{I}^\bullet, \mathbf{I}^\bullet)$ est dualisant à termes injectifs.

1.6.4 La description 1.6.3 montre que pour une variété topologique \mathbf{M} de dimension d_M , le complexe de \mathbb{Z} -modules des germes de $\mathbb{D}_{\mathbf{M}|\mathbb{Z}}^\bullet$ en chaque point $x \in \mathbf{M}$ est concentré en degré $-d_M$. En effet, pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{M}$, l'équivalence $\Gamma(U; \mathbb{D}_{\mathbf{M}|\mathbb{Z}}^\bullet) \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}^\bullet(\Gamma_c(U; \mathcal{I}^\bullet), \mathbf{I}^\bullet)$ de 1.6.3 est à l'origine d'une suite spectrale :

$$\mathbb{E}_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^p(H_c^{-q}(U; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \implies H^{p+q}(U; \mathbb{D}_{\mathbf{M}|\mathbb{Z}}^\bullet) \quad (*)$$

et l'on sait que $H_c^{d_M}(U; \mathbb{Z}) \sim \mathbb{Z}$ et $H_c^i(U; \mathbb{Z}) = 0$ si $i \neq d_M$, pour tout ouvert U homéomorphe à \mathbb{R}^{d_M} . La conclusion s'ensuit puisque $\mathcal{H}^m(\mathbb{D}_{\mathbf{M}|\mathbb{Z}}^\bullet)_x = \varinjlim_{U \ni x} H^m(U; \mathbb{D}_{\mathbf{M}|\mathbb{Z}}^\bullet)$, où U parcourt une base de voisinages de x homéomorphes à \mathbb{R}^{d_M} .

¹⁶ Cf. [BoAl] exposé de Borel §V-7 p. 119.

Le faisceau $\underline{\mathcal{O}}_{M|\mathbb{Z}} := \mathcal{H}^{-d_M} \mathcal{D}_{M|\mathbb{Z}}^\bullet$ est donc un \mathbb{Z}_M -module localement libre de rang 1 et

$$\mathcal{D}_{M|\mathbb{Z}}^\bullet \equiv \underline{\mathcal{O}}_{M|\mathbb{Z}}[\dim_{\mathbb{R}}(M)]$$

Par ailleurs, la même suite spectrale (*) sert à calculer le groupe des sections globales de $\underline{\mathcal{O}}_{M|\mathbb{Z}}$. On obtient $H^0(\mathbf{X}; \underline{\mathcal{O}}_{M|\mathbb{Z}}) \equiv H^{-d_M}(\mathbf{X}; \mathcal{D}_{M|\mathbb{Z}}^\bullet) \equiv \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_c^{d_M}(\mathbf{X}; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ et l'on sait par ailleurs que $H_c^{d_M}(\mathbf{M}; \mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{Z} lorsque M est connexe et orientable, et est nul sinon. Autrement dit, $\underline{\mathcal{O}}_{M|\mathbb{Z}}$ est isomorphe au faisceau $\underline{\mathbb{Z}}_M$ si et seulement si M est orientable. On a donc toujours :

$$\mathcal{D}_{M|\mathcal{A}}^\bullet \equiv \underline{\mathcal{A}}_M[\dim_{\mathbb{R}}(M)]$$

lorsque M est orientable et pour tout anneau de coefficients \mathcal{A} . Le faisceau $\underline{\mathcal{O}}_{M|\mathbb{Z}}$ est appelé «le faisceau d'orientation de M ».

1.6.5 Ce qui précède s'applique également pour le complexe $c_X^! \mathcal{M}$ où \mathcal{M} est un \mathcal{A} -module de type fini. Lorsque M est orientable on a donc $c_X^! \mathcal{M} \equiv \underline{\mathcal{M}}_X[\dim_{\mathbb{R}}(M)]$.

1.6.6 Dual d'un complexe de faisceaux. Pour $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(\mathbf{X})$, on note :

$$\mathcal{D}_X \mathcal{F}^\bullet := \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{D}_X^\bullet)$$

On définit ainsi un foncteur *contravariant* exact $\mathcal{D}_X : D^b(\mathbf{X}) \rightarrow D^b(\mathbf{X})$. D'après 1.5.5 et 1.6.2, on a pour toute application continue $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$:

$$\mathcal{D}_X \circ \mathbb{R}f_! \equiv \mathbb{R}f_* \circ \mathcal{D}_Y \quad \text{et} \quad f^! \circ \mathcal{D}_X \equiv \mathcal{D}_Y \circ f^{-1}$$

En particulier,

$$\begin{cases} \mathcal{D}_X \circ \mathbb{R}f_* \equiv \mathbb{R}f_* \circ \mathcal{D}_Y, & \text{si } f \text{ est propre;} \\ f^{-1} \circ \mathcal{D}_X \equiv \mathcal{D}_Y \circ f^{-1}, & \text{si } f \text{ est un plongement ouvert.} \end{cases}$$

1.7 Pseudovariétés et bidualité

1.7.1 Espace topologique stratifié. La définition d'«*espace topologique stratifié de dimension d* » est de nature inductive (cf. [GoMc₁, GoMc₂]) :

- En dimension 0. Il s'agit des ensembles finis ou dénombrables munis de la topologie discrète ;
- En dimension positive d , un «*espace topologique stratifié de dimension d* » est la donnée d'un espace topologique \mathbf{X} muni d'une filtration par des parties fermées :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_d \supseteq \mathbf{X}_{d-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{X}_1 \supseteq \mathbf{X}_0 \supseteq \mathbf{X}_{-1} = \emptyset,$$

telle que pour chaque $i = 0, \dots, d$ tel que $\mathbf{X}_i \setminus \mathbf{X}_{i-1} \neq \emptyset$ et chaque $x \in \mathbf{X}_i \setminus \mathbf{X}_{i-1}$, il existe un voisinage N_x de x dans \mathbf{X} , un espace topologique *compact* $\mathbb{L}(x)$ stratifié de dimension $d - i - 1$:

$$\mathbb{L}(x) = \mathbb{L}(x)_{d-i-1} \supseteq \mathbb{L}(x)_{d-i-2} \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{L}(x)_1 \supseteq \mathbb{L}(x)_0 \supseteq \mathbb{L}(x)_{-1} = \emptyset,$$

et un homéomorphisme

$$\phi : \mathbb{R}^i \times \overset{\circ}{\text{cône}}(\mathbb{L}(x)) \xrightarrow{\sim} N_x$$

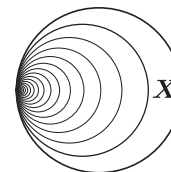
dont la restriction à chaque sous-espace $\mathbb{R}^i \times \overset{\circ}{\text{cône}}(\mathbb{L}(x)_j)$ est une bijection sur $N_x \cap \mathbf{X}_{i+j+1}$.⁽¹⁷⁾ En particulier, on a $(N_x \cap \mathbf{X}_i) \sim \mathbb{R}^i$.

Le sous-espace $S_i := \mathbf{X}_i \setminus \mathbf{X}_{i-1}$ est donc une partie localement fermée de \mathbf{X} qui est une variété topologique de dimension réelle i lorsque non vide.

Les composantes connexes des S_i sont les « strates (i -dimensionnelles) » de l'espace topologique stratifié \mathbf{X} (cf. 1.9.1).

1.7.2 Pseudovariétés. On appelle « pseudovariété de dimension d » la donnée d'un espace topologique \mathbf{X} admettant une structure d'espace topologique stratifié de dimension d ⁽¹⁸⁾. L'ensemble des strates $\mathfrak{X} := \{S_i\}$ est appelé (par abus) « la stratification de la pseudovariété ». La pseudovariété sera notée $(\mathbf{X}; \mathfrak{X})$ lorsque l'on aura besoin de désigner sa stratification. Enfin, on note $\text{Str}_{\text{psv}}(\mathbf{X})$ l'ensemble des stratifications des structures de pseudovariété sur \mathbf{X} .

1.7.3 Remarque. Une pseudovariété de dimension d est de dimension cohomologique égale à d (cf. 1.2.10); un espace topologique ne peut donc pas admettre des structures de pseudovariété de dimensions différentes. La cohomologie (singulière) d'une pseudovariété compacte est toujours de dimension finie. L'espace topologique $\mathbf{X} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \mathbb{S}^1(1/n, 1/n)$ n'admet donc pas de structure de pseudovariété et alors $\text{Str}_{\text{psv}}(\mathbf{X}) = \emptyset$. Par contre, les variétés algébriques ou analytiques complexes, les variétés analytiques réelles, les ensembles semi-algébriques, semi-analytiques ou sous-analytiques, les espaces linéaires par morceaux, sont des exemples d'espaces topologiques admettant des structures de pseudovariété.



1.7.4 Notation. Soit \mathfrak{X} une stratification de pseudovariété de \mathbf{X} . Pour toute partie \mathbf{Y} localement fermée dans \mathbf{X} et réunion de strates de \mathfrak{X} , l'ensemble $\mathfrak{X}|_{\mathbf{Y}}$ des strates de \mathfrak{X} contenues dans \mathbf{Y} définit une structure de pseudovariété sur \mathbf{Y} que nous noterons simplement $(\mathbf{Y}; \mathfrak{X})$.

1.7.5 Stabilité de la catégorie $D_{\mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X})$

Définition. Pour toute stratification $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{psv}}(\mathbf{X})$, on note $D_{\mathcal{A}; \mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X})$ la sous-catégorie pleine de $D_{\mathcal{A}}^b(\mathbf{X})$ des complexes de faisceaux \mathcal{F}^\bullet dont les faisceaux dérivés $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet$ sont localement constants de fibres de type fini sur chaque strate de \mathfrak{X} . On omettra souvent de préciser l'anneau \mathcal{A} dans la notation $D_{\mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X})$.

1.7.6 Le cône d'un morphisme de complexes $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet \in D_{\mathcal{A}; \mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X})$ (1.3.12) appartient à $D_{\mathcal{A}; \mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X})$. La catégorie $D_{\mathcal{A}; \mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X})$ est une sous-catégorie triangulée de $D_{\mathcal{A}}^b(\mathbf{X})$ (1.4.13, 1.11.2).

¹⁷ On a noté $\overset{\circ}{\text{cône}}(\mathbb{L})$ le « cône ouvert » : $(\mathbb{L} \times [0, 1]) / (\mathbb{L} \times \{0\})$ et pris par convention $\overset{\circ}{\text{cône}}(\emptyset) = \text{pt}$.
On notera $\overline{\text{cône}}(\mathbb{L})$ le « cône fermé » : $(\mathbb{L} \times [0, 1]) / (\mathbb{L} \times \{0\})$.

¹⁸ Dans [GoMc₁, GoMc₂] Goresky et MacPherson définissent une structure de pseudovariété de la même manière mais en exigeant, en plus, l'égalité que $\mathbf{X}_{d-1} = \mathbf{X}_{d-2}$. C'est une hypothèse qui sera automatiquement vérifiée dans le cas des variétés algébriques complexes et qui n'est pas nécessaire pour bien de résultats généraux concernant les catégories $D_{\mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X})$ (1.7.5). Nous reviendrons sur cette question dans le bas de page ⁽⁴¹⁾.

1.7.7 Théorème.⁽¹⁹⁾ Soit \mathfrak{X} une stratification de pseudovariété de \mathbf{X} .

a) La catégorie $D_{\mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X})$ est stable par dualité de Grothendieck-Verdier, i.e.

$$\mathbb{D}_{\mathbf{X}}(D_{\mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X})) \subseteq D_{\mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X}).$$

b) $\mathbb{D}_{\mathbf{X}} : D_{\mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X}) \rightsquigarrow D_{\mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X})$ est une équivalence de catégories contravariante.

c) La restriction de $\mathbb{D}_{\mathbf{X}} \circ \mathbb{D}_{\mathbf{X}}$ à $D_{\mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X})$ est isomorphe au foncteur identité.

1.7.8 Théorème. Soient \mathfrak{X} une stratification de pseudovariété de \mathbf{X} et $\iota_Y : Y \hookrightarrow \mathbf{X}$ l'inclusion d'une partie localement fermée réunion de strates de \mathfrak{X} . Alors, (Y, \mathfrak{X}) est une pseudovariété et l'on a des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\iota_{Y!} &\equiv \mathbb{D}_{\mathbf{X}} \circ \mathbb{R}\iota_{Y*} \circ \mathbb{D}_Y & \mathbb{R}\iota_{Y*} &\equiv \mathbb{D}_{\mathbf{X}} \circ \mathbb{R}\iota_{Y!} \circ \mathbb{D}_Y \\ \mathbb{R}\iota_Y^! &\equiv \mathbb{D}_Y \circ \mathbb{R}\iota_Y^{-1} \circ \mathbb{D}_{\mathbf{X}} & \mathbb{R}\iota_Y^{-1} &\equiv \mathbb{D}_Y \circ \mathbb{R}\iota_Y^! \circ \mathbb{D}_{\mathbf{X}} \end{aligned}$$

respectivement sur les catégories $D_{\mathfrak{X}\text{-c}}^b(Y)$ et $D_{\mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X})$.

1.7.9 Amplitude cohomologique des complexes dualisants

Proposition. Soit \mathbf{X} un espace topologique admettant une structure de pseudovariété de dimension d . Alors

$$\boxed{\llbracket \mathbb{D}_{\mathbf{X}|\mathcal{A}}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} \subseteq \llbracket -d, 0 \rrbracket}$$

Démonstration. Par induction croissante sur $d := \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{X}$. Le résultat est évident lorsque $d = 0$. dans le cas général on a le triangle exact associé à la donnée d'un ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ de complémentaire le fermé F :

$$\iota_F! \iota_F^! \mathbb{D}_{\mathbf{X}|\mathcal{A}}^\bullet \longrightarrow \mathbb{D}_{\mathbf{X}|\mathcal{A}}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}\iota_{U*} \iota_U^{-1} \mathbb{D}_{\mathbf{X}|\mathcal{A}}^\bullet \xrightarrow{[+1]} \quad (*)$$

où $\mathbb{D}_{F|\mathcal{A}}^\bullet = \iota_F^! \mathbb{D}_{\mathbf{X}|\mathcal{A}}^\bullet$ et $\mathbb{D}_{U|\mathcal{A}}^\bullet = \iota_U^! \mathbb{D}_{\mathbf{X}|\mathcal{A}}^\bullet = \iota_U^{-1} \mathbb{D}_{\mathbf{X}|\mathcal{A}}^\bullet$ d'après 1.6.2 et puisque $\iota_U^{-1} = \iota_U^!$ car U est ouvert.

Soit maintenant \mathfrak{X} une stratification de pseudovariété de dimension d sur \mathbf{X} . Lorsque U est la réunion des strates de dimension d de \mathfrak{X} , on a $\llbracket \mathbb{D}_{U|\mathcal{A}}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} = \llbracket -d \rrbracket$ puisque $\mathbb{D}_{U|\mathcal{A}}^\bullet \equiv \underline{\text{Qr}}_{U|\mathcal{A}}[d]$ (1.6.4) ; en particulier $\llbracket \mathbb{R}\iota_{U*} \mathbb{D}_{U|\mathcal{A}}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} \subseteq \llbracket -d, 0 \rrbracket$. En effet, pour $x \in \mathbf{X}$, le germe $(\mathbb{R}\iota_{U*} \underline{\text{Qr}}_{U|\mathcal{A}})_x$ est la limite inductive des groupes $H^m(U \cap V; \underline{\text{Qr}}_{U|\mathcal{A}})$ avec $x \in V$ et V ouvert dans \mathbf{X} ; or, $H^m(U \cap V; \underline{\text{Qr}}_{U|\mathcal{A}}) = 0$, pour tout $m > d$, car $U \cap V$ est de dimension cohomologique d (1.2.10). D'autre part, F est une pseudovariété de dimension $d' < d$ et alors $\llbracket \mathbb{D}_{F|\mathcal{A}}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} \subseteq \llbracket -d'; 0 \rrbracket$ par hypothèse de récurrence. En reportant ces encadrements sur le triangle (*), la proposition résulte. ■

1.7.10 La démonstration précédente prouve également l'inclusion $\llbracket c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{M} \rrbracket_{\text{coh}} \subseteq \llbracket -d, 0 \rrbracket$ pour tout \mathcal{A} -module de type fini \mathcal{M} (cf. 1.6.5).

¹⁹ Les deux théorèmes sont démontrés dans le §8 de l'exposé de Borel de [BoAl] pp. 133–142..

1.8 Homologie de Borel-Moore sur les pseudovariétés

Les résultats de cette section, dont le seul but est de rappeler le lien existant entre l'homologie de Borel-Moore et la cohomologie du complexe dualisant sur une pseudovariété (1.8.6), ne seront pas utilisés dans les autres sections.⁽²⁰⁾

1.8.1 Constructions explicites de $c^! \mathcal{M}$. Les remarques de 1.6.3 à propos des constructions explicites des complexes dualisants s'appliquent également à $c^! \mathcal{M}$ pour tout \mathcal{A} -module de type fini \mathcal{M} . De plus, la résolution injective $\underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{X}} \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ peut être remplacée (cf. [BoAl] V-§7-B p. 129) par une résolution $\underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{X}} \hookrightarrow \mathcal{K}^\bullet$ où chaque \mathcal{K}^m est plat et c -mou ; par exemple : la résolution par le complexe de faisceaux des cochaînes singulières $\underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{X}} \hookrightarrow \underline{C}_{\mathbf{X}; \mathcal{A}}^\bullet$, où $\underline{C}_{\mathbf{X}; \mathcal{A}}^\bullet$ est engendré par le complexe de préfaisceaux⁽²¹⁾ :

$$\begin{array}{ccccccc} U & \mapsto & C^0(U; \mathcal{A}) & \xrightarrow{d_0} & C^1(U; \mathcal{A}) & \xrightarrow{d_1} & C^2(U; \mathcal{A}) & \xrightarrow{d_2} \\ \subseteq \uparrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ V & \mapsto & C^0(V; \mathcal{A}) & \xrightarrow{d_0} & C^1(V; \mathcal{A}) & \xrightarrow{d_1} & C^2(V; \mathcal{A}) & \xrightarrow{d_2} \end{array}$$

où $C^p(U; \mathcal{A})$ désigne le groupe des p -cochaînes singulières sur U et a coefficients dans \mathcal{A} . La correspondance $U \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\Gamma_c(U; \underline{C}_{\mathbf{X}; \mathcal{A}}^p); \mathcal{M})$ est alors un faisceau qui est injectif lorsque \mathcal{M} l'est (cf. [BoAl] *loc.cit.*). Le complexe de faisceaux injectifs :

$$\mathcal{Q}(\mathbf{I}^\bullet(\mathcal{M})) : U \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}}^\bullet(\Gamma_c(U; \underline{C}_{\mathbf{X}; \mathcal{A}}^\bullet); \mathbf{I}^\bullet(\mathcal{M}))$$

est ainsi une réalisation de $c^! \mathcal{M}$ pour chaque résolution injective de \mathcal{A} -module $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathbf{I}^\bullet(\mathcal{M})$.

1.8.2 Homologie de Borel-Moore à coefficients dans un \mathcal{A} -module. Notons Δ_p le p -simplexe standard et, pour tout espace topologique \mathbf{Y} , soit $\Delta_p(\mathbf{Y})$ l'ensemble des « p -simplexes singuliers de \mathbf{Y} », i.e. des applications continues $\sigma : \Delta_p \rightarrow \mathbf{Y}$. Pour tout \mathcal{A} -module de type fini \mathcal{M} , on note $A_p(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$ le \mathcal{A} -module de toutes les applications de l'ensemble $\Delta_p(\mathbf{Y})$ vers \mathcal{M} (somme et produit étant définis point par point).

Avec ces données, le \mathcal{A} -module des « p -chaînes singulières sur \mathbf{Y} à coefficients dans \mathcal{M} », noté $S_p(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$, est le sous- \mathcal{A} -module de $A_p(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$ des applications à support fini. On notera $S_p^{\text{loc}}(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$ le sous- \mathcal{A} -module de $A_p(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$ des application $\gamma : \Delta_p(\mathbf{Y}) \rightarrow \mathcal{M}$ vérifiant la propriété suivante :

LF. Pour tout $u \in \mathbf{Y}$, il existe un voisinage ouvert $V_u \subseteq \mathbf{Y}$ tel que l'ensemble des éléments $\sigma \in \Delta_p(\mathbf{Y})$ vérifiant $\gamma(\sigma) \neq 0$ et $\text{im}(\sigma) \cap V_u \neq \emptyset$ est fini.

On appellera « *constituant de γ* » tout simplexe singulier $\sigma \in \Delta_p(\mathbf{Y})$ tel que $\gamma(\sigma) \neq 0$.

Les éléments de $S_p^{\text{loc}}(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$ sont appelés les « p -chaînes singulières localement finies sur \mathbf{Y} à coefficients dans \mathcal{M} ». On a une inclusion évidente $S_p(\mathbf{Y}; \mathcal{M}) \subseteq S_p^{\text{loc}}(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$ qui est une égalité lorsque \mathbf{Y} est compact.

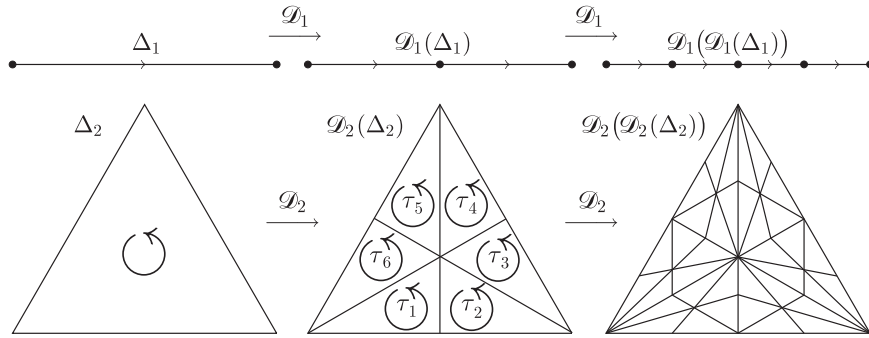
²⁰ Il existe au moins trois constructions de l'homologie de Borel-Moore : par des chaînes singulières (que nous allons rappeler), par des chaînes simpliciales géométriques ([BoAl] Haefliger §I.2 p. 5), et par des chaînes sous-analytiques ([KS] §9.2 p. 366). Chaque construction donne une réalisation différente du complexe dualisant.

²¹ Cf. [Go] §3.9.1, pp. 159–161. On rappelle que pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ l'application canonique $C^\bullet(U; \mathcal{A}) \rightarrow \Gamma(U; \underline{C}_{\mathbf{X}; \mathcal{A}}^\bullet)$ est une *surjection* de complexes et un quasi-isomorphisme (*loc.cit.*).

Le morphisme «bord» habituel $\delta_p : S_p(\mathbf{Y}; \mathcal{M}) \rightarrow S_{p-1}(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$ se prolonge naturellement en un morphisme $\delta_p : S_p^{\text{loc}}(\mathbf{Y}; \mathcal{M}) \rightarrow S_{p-1}^{\text{loc}}(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$ que vérifie $\delta_{p-1} \circ \delta_p = 0$.

Définition. On appelle «homologie de Borel-Moore de \mathbf{Y} à coefficients dans \mathcal{M} » l'homologie du complexe $(S_*^{\text{loc}}(\mathbf{Y}; \mathcal{M}), \delta_*)$; elle sera notée $H_*^{\text{BM}}(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$.

1.8.3 Subdivision barycentrique du simplexe standard. Il s'agit de l'opération \mathcal{D}_p qui subdivise le p -simplexe standard en réunion de p -simplexes standard plus petits. Plutôt que de donner la définition précise pour tout p , nous indiquons dans une illustration l'effet de cette opération sur les 1 et 2-simplexes standard.



Étant donné un p -simplexe singulier $\sigma : \Delta_p \rightarrow \mathbf{Y}$ on obtient, par restriction à chaque composante τ_i de $\mathcal{D}_p(\Delta_p)$, un p -simplexe $\sigma_i : \tau_i \rightarrow \mathbf{Y}$. Un élément $\gamma \in A_p(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$ est représenté par une somme formelle infinie $\gamma = \sum_{\sigma \in \Delta_p(\mathbf{Y})} m_\sigma \cdot \sigma$ et il est facile de voir que la somme

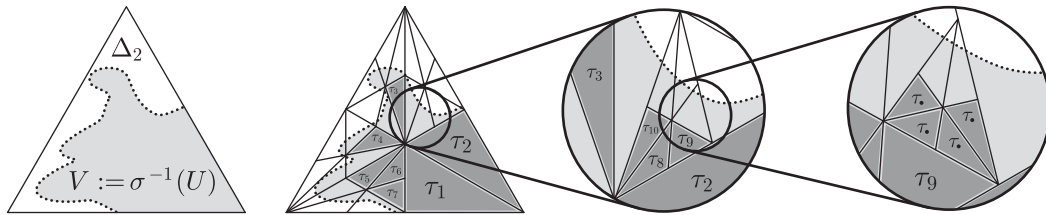
$$\mathcal{D}_p(\gamma) = \sum_{\sigma \in \Delta_p(\mathbf{Y})} m_\sigma \cdot (\sum_i \sigma_i)$$

représente encore un élément de $A_p(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$ lorsque γ vérifie la condition **LF**. On obtient de cette manière un opérateur de \mathcal{A} -module $\mathcal{D}_p : S_p^{\text{loc}}(\mathbf{Y}; \mathcal{M}) \rightarrow S_p^{\text{loc}}(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$ qui laisse stable le sous-module $S_p(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$. On a $\delta_p \mathcal{D}_p = \mathcal{D}_{p-1} \delta_p$.

1.8.4 Faisceau des chaînes singulières localement finies. L'intérêt principal des chaînes localement finies réside dans le fait que l'on peut définir un morphisme de restriction à un ouvert $U \subseteq \mathbf{Y}$:

$$\rho_{U*}^{\mathbf{Y}} : (S_*^{\text{loc}}(\mathbf{Y}; \mathcal{M}), \delta_*) \xrightarrow{\text{restriction de } \mathbf{Y} \text{ à } U} (S_*^{\text{loc}}(U; \mathcal{M}), \delta_*)$$

De manière succincte, l'idée est la suivante: Pour $\sigma : \Delta_p \rightarrow \mathbf{Y}$ continue, $V := \sigma^{-1}(U)$ est un ouvert de Δ_p qui admet une décomposition canonique en réunion de simplexes des décompositions barycentriques successives. Plutôt que donner des formules, nous illustrons le procédé sur Δ_2 .



Recette : à chaque division barycentrique on garde (en gris foncé) les sous-simplexes τ_i complètement contenus dans V . On continue tant qu'il reste des points de V non couverts.

Au bout du procédé on obtient un recouvrement $V = \cup_n \tau_n$ dénombrable *localement fini* en sous- p -simplexes τ_n de Δ_p , et si l'on note σ_n la restriction de σ à τ_n , la p -chaîne singulière infinie $\rho_{U_p}^Y(\sigma) = \sum_n \sigma_n$ appartient à $S_p^{\text{loc}}(U; \mathcal{M})$. Par linéarité, et moyennant de petites vérifications, on obtient le morphisme annoncé $\rho_{U_*}^Y : (S_*^{\text{loc}}(\mathbf{Y}; \mathcal{M}), \delta_*) \rightarrow (S_*^{\text{loc}}(U; \mathcal{M}), \delta_*)$. Il convient de souligner que lorsque l'image d'un simplexe singulier $\sigma : \Delta_p \rightarrow \mathbf{Y}$ est contenue dans l'ouvert U , la subdivision barycentrique est inutile et alors $\rho_{U_p}^Y(\sigma) = \sigma$.

On a $\rho_{Y_*}^Y = \text{id}$, et $\rho_{U_1^*}^Y = \rho_{U_2^*}^Y \circ \rho_{U_1^*}^{U_2}$, pour tous ouverts $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \mathbf{Y}$, ce qui définit un préfaisceau de complexes $\underline{S}_{\mathbf{Y}; \mathcal{M}, * }^{\text{loc}}$ (de différentielle de degré -1) sur \mathbf{Y} . On vérifie que le préfaisceau $\underline{S}_{\mathbf{Y}; \mathcal{M}, p}^{\text{loc}}$ est un faisceau (exercice) c -mou et donc $\Gamma_c(U; -)$ et $\Gamma(U; -)$ -acyclique pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{Y}$ (cf. (6)). En effet, les sections de $\underline{S}_{\mathbf{Y}; \mathcal{M}, * }^{\text{loc}}$ au-dessus d'un compact sont représentées par des chaînes singulières **finies** définies sur un voisinage du compact en question et donc sur \mathbf{Y} tout entier (22). On remarquera que pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{Y}$, le complexe $\Gamma_c(U; \underline{S}_{\mathbf{Y}; \mathcal{M}, * }^{\text{loc}})$ coïncide avec le complexe des chaînes singulières sur U à coefficients dans \mathcal{M} .

1.8.5 On note $\underline{S}_{\mathbf{Y}; \mathcal{M}}^{\text{loc}, \bullet}$ le complexe de faisceaux de différentielle de degré $+1$ obtenu par rénumérotation $\underline{S}_{\mathbf{Y}; \mathcal{M}}^{\text{loc}, -p} := \underline{S}_{\mathbf{Y}; \mathcal{M}, p}^{\text{loc}}$.

Exercice

- Montrer que le foncteur $\underline{S}_{\mathbf{Y}; \mathcal{A}}^{\text{loc}, \bullet} : \text{Mod}_{\text{t.f.}}(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D_{\mathcal{A}}^+(\mathbf{Y})$, $\mathcal{M} \mapsto \underline{S}_{\mathbf{Y}; \mathcal{M}}^{\text{loc}, \bullet}$, transforme une suite exacte de modules en un triangle exact.
- Montrer que $\underline{S}_{\mathbf{Y}; \mathcal{M}}^{\text{loc}, p}$ est un $\mathcal{A}_{\mathbf{Y}}$ -module plat pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
- Donner un isomorphisme canonique naturel $\underline{S}_{\mathbf{Y}; \mathcal{M}}^{\text{loc}, p} \cong \underline{S}_{\mathbf{Y}; \mathcal{A}}^{\text{loc}, p} \otimes_{\mathbb{L}} c_{\mathbf{Y}}^{-1} \mathcal{M}$.

1.8.6 Théorème. Soient $(\mathbf{X}; \mathfrak{X})$ une pseudovariété, \mathcal{A} un anneau noëthérien de dimension homologique finie et \mathcal{M} un \mathcal{A} -module de type fini.

- Le complexe $\underline{S}_{\mathbf{X}; \mathcal{M}}^{\text{loc}, \bullet}$ appartient à $D_{\mathfrak{X}\text{-cle}}^b(\mathbf{X})$ et :

$$\underline{S}_{\mathbf{X}; \mathcal{M}}^{\text{loc}, \bullet} \cong c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{M}$$

En particulier, $\underline{S}_{\mathbf{X}; \mathcal{A}}^{\text{loc}, \bullet} \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{X}; \mathcal{A}}^{\bullet}$, et $[\underline{S}_{\mathbf{X}; \mathcal{A}}^{\text{loc}, \bullet}]_{\text{coh}} \subseteq [-\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{X}, 0]$;

- Il existe une suite spectrale canonique :

$$E_2^{p, -q} = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^p(H_c^q(\mathbf{X}; \mathcal{A}), \mathcal{M}) \implies H_{q-p}^{\text{BM}}(\mathbf{X}; \mathcal{M})$$

- Lorsque \mathcal{A} est un corps k , on a

$$H_m^{\text{BM}}(\mathbf{X}; k) \cong \text{Hom}_k(H_c^m(\mathbf{X}; k), k)$$

²² On démontre plus généralement que $\underline{S}_{\mathbf{Y}; \mathcal{M}, p}^{\text{loc}}$ est Φ -mou pour toute famille paracompactifiante Φ .

Indications. Soit U un ouvert de \mathbf{X} . D'après la description des sections du faisceau $\underline{C}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^p$ ([Go] *loc.cit.*), une section $\lambda \in \Gamma_c(U; \underline{C}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^p)$ s'annule sur tout p -simplexe singulier dont l'image n'est pas entièrement contenue dans $|\lambda|$. En particulier, si $\xi = \sum_{\sigma \in \Delta_p(U)} m_\sigma \cdot \sigma$ est un élément de $S_p^{\text{loc}}(U; \mathcal{M})$, seul un nombre fini de valeurs $\lambda(\sigma)$ seront non nulles et l'expression

$$\langle \lambda, \xi \rangle = \sum_{\sigma \in \Delta_p(U)} \lambda(\sigma) m_\sigma \in \mathcal{M}$$

est bien définie. On obtient ainsi des morphismes de \mathcal{A} -modules pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc} S_p^{\text{loc}}(U; \mathcal{M}) & \xrightarrow{\alpha_p(U)} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\Gamma_c(U; \underline{C}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^p); \mathcal{M}) \\ \xi & \xrightarrow{\alpha_p(U)} & \langle -, \xi \rangle \end{array}$$

compatibles aux différentielles.

Soit $V \subseteq U$ et $\mu \in \Gamma_c(V; \underline{C}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^p)$. L'inclusion $\Gamma_c(V; \underline{C}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^p) \subseteq \Gamma_c(U; \underline{C}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^p)$ est donnée par prolongement par zéro, de sorte que lorsque $\xi \in S_p^{\text{loc}}(U; \mathcal{M})$, la valeur $\langle \mu, \xi \rangle$ est déterminée uniquement par les constituants de ξ dont l'image est entièrement contenue dans $|\mu| \subseteq V$; en particulier, $\rho_V^U(\sigma) = \sigma$ pour de tels constituants et alors:

$$\langle \mu, \xi \rangle = \langle \mu, \rho_V^U \xi \rangle, \quad \text{pour tout } \mu \in \Gamma_c(V; \underline{C}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^p).$$

Autrement dit, la famille de morphismes $\alpha_\bullet(U)$ est un morphisme de faisceaux (1.8.1); il sera noté $\underline{\alpha}_\bullet$. En composant $\underline{\alpha}_\bullet$ avec le morphisme $\underline{\varepsilon}$ induit par l'augmentation $\varepsilon: \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{I}^\bullet(\mathcal{M})$, on obtient un morphisme de complexes de faisceaux $\underline{\beta}_\bullet$:

$$\begin{array}{ccc} \underline{S}_{\mathbf{X};\mathcal{M}}^{\text{loc},\bullet} & \xrightarrow{\underline{\alpha}_\bullet} & \mathcal{D}^\bullet(\underline{C}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^\bullet; \mathcal{M}) & \xrightarrow{\underline{\varepsilon}} & \mathcal{D}^\bullet(\underline{C}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^\bullet; \mathbf{I}^\bullet(\mathcal{M})) = c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{M} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\underline{\beta}_{\mathbf{X},\bullet}} & & \uparrow & & \end{array}$$

(1.8.1) pour toute résolution injective de \mathcal{A} -module $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathbf{I}^\bullet(\mathcal{M})$.

Nous avons ainsi construit un morphisme $\underline{\beta}_{\mathbf{X};\mathcal{M},\bullet}: \underline{S}_{\mathbf{X};\mathcal{M}}^{\text{loc},\bullet} \rightarrow c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{M}$ **naturel**, à la fois par rapport à \mathcal{M} et à \mathbf{X} .

Ceci étant, on a déjà signalé l'existence d'un quasi-isomorphisme $\underline{S}_{\mathbf{X};\mathcal{M}}^{\text{loc},\bullet} \otimes^{\mathbb{L}} c_{\mathbf{X}}^{-1} \mathcal{M} \rightarrow \underline{S}_{\mathbf{X};\mathcal{M}}^{\text{loc},\bullet}$ et des raisonnements généraux donnent un morphisme canonique $c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{A} \otimes^{\mathbb{L}} c_{\mathbf{X}}^{-1} \mathcal{M} \rightarrow c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{M}$ qui est un quasi-isomorphisme dans notre cas puisque \mathcal{A} est supposé noethérien et que \mathcal{M} est de type fini⁽²³⁾. On en déduit (après vérification de compatibilités des constructions) un isomorphisme de foncteurs

$$\underline{\beta}_{\mathbf{X};\bullet,\bullet} \equiv \underline{\beta}_{\mathbf{X};\mathcal{A},\bullet} \otimes^{\mathbb{L}} \text{id}_{c_{\mathbf{X}}^{-1}(_)}$$

Par conséquent, $\underline{\beta}_{\mathbf{X};\mathcal{M},\bullet}$ est un isomorphisme si $\underline{\beta}_{\mathbf{X};\mathcal{A},\bullet}$ l'est.

²³ Le morphisme en question provient de $\text{id} \otimes \text{id} \in \mathbb{R}\text{Hom}(c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{A}, c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{A}) \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ par les équivalences en catégories dérivées suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\text{Hom}(c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{A} \otimes^{\mathbb{L}} c_{\mathbf{X}}^{-1} \mathcal{M}, c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{M}) &\equiv \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{A}}(c_{\mathbf{X}}!(c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{A} \otimes^{\mathbb{L}} c_{\mathbf{X}}^{-1} \mathcal{M}), \mathcal{M}) \equiv \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{A}}(c_{\mathbf{X}}! c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{A} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{M}, \mathcal{M}) \equiv \\ &\equiv \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{A}}(c_{\mathbf{X}}! c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{A}, \mathcal{A}) \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \equiv \mathbb{R}\text{Hom}(c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{A}, c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{A}) \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}). \end{aligned}$$

L'inspection de l'action de ce morphisme au niveau des germes en $x \in \mathbf{X}$, conduit au morphisme canonique (‡) $\mathbb{R}\text{Hom}(\mathbb{R}\Gamma_{x,\mathcal{A}} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}\text{Hom}(\mathbb{R}\Gamma_{x,\mathcal{A}}, \mathcal{M})$ qui est un quasi-isomorphisme dans notre cas puisque \mathcal{M} admet une résolution à gauche par des \mathcal{A} -modules libres de rang fini (\mathcal{A} est noethérien!) et alors (‡) est réduit à l'équivalence $\text{Hom}(_, \mathcal{A}^r) \equiv \text{Hom}(_, \mathcal{A}) \otimes \mathcal{A}^r$.

La condition d'équisingularité locale vérifiée par \mathbf{X} montre aussitôt que le complexe $\underline{S}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^{\text{loc},\bullet}$ est \mathfrak{X} -cohomologiquement localement constant. D'autre part, le dual $\mathbb{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet}(\underline{S}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^{\text{loc},\bullet})$ est le complexe de faisceau :

$$U \mapsto \mathbb{R}\text{Hom}^*(\Gamma_c(U; \underline{S}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^{\text{loc},\bullet}), I^{\bullet})$$

où $\mathcal{A} \xrightarrow{\varepsilon} I^{\bullet}$ est une résolution injective (de longueur finie) de \mathcal{A} ⁽²⁴⁾.

On a $\mathbb{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet}(\underline{S}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^{\text{loc},\bullet}) \equiv \underline{\mathbb{D}}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(\mathcal{A}^{[0]})_{\mathbf{X}} \equiv \mathcal{A}_{\mathbf{X}}$ puisque $\Gamma_c(U; \underline{S}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^{\text{loc},\bullet})$ calcule l'homologie singulière de U à coefficients dans \mathcal{A} et que \mathbf{X} est localement contractile. En particulier, $\underline{S}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^{\text{loc},\bullet}$ est \mathfrak{X} -cohomologiquement constructible puisque sont dual l'est. Par bidualité on a donc un isomorphisme canonique

$$\underline{S}_{\mathbf{X};\mathcal{A}}^{\text{loc},\bullet} \equiv c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{A} \quad (*)$$

qui coïncide avec $\underline{\beta}_{\mathbf{X};\mathcal{A},\bullet}$ modulo des équivalences naturelles.

L'assertion concernant $\llbracket \underline{S}_{\mathbf{X};\mathcal{M}}^{\text{loc},\bullet} \rrbracket_{\text{coh}}$ est maintenant claire (cf. 1.7.9) et la suite spectrale annoncée dans (b) résulte de dualité de Grothendieck-Verdier (tout comme dans 1.6.4) :

$$\mathbb{R}\Gamma(\mathbf{X}; \underline{S}_{\mathbf{X};\mathcal{M}}^{\text{loc},\bullet}) \equiv \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbf{X}}}^{\bullet}(\mathcal{A}_{\mathbf{X}}, c_{\mathbf{X}}^! \mathcal{M}) \equiv \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbf{X}}}^{\bullet}(\mathbb{R}c_! \mathcal{A}_{\mathbf{X}}, \mathcal{M}). \quad \blacksquare$$

1.9 Stratifications algébriques, conditions de Whitney et pseudovariétés

Soit \mathbf{X} une variété algébrique complexe de dimension $d_{\mathbf{X}}$ ⁽²⁵⁾. La notation $\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ sera synonyme de $\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}^{\text{an}})$.

1.9.1 Stratifications. Suivant Whitney ⁽²⁶⁾ on appelle « *stratification de \mathbf{X}* » la donnée ' \mathfrak{X} ' d'une partition $\mathbf{X} = S_0 \amalg \dots \amalg S_{\dim \mathbf{X}}$, où chaque $S_k \neq \emptyset$ est une sous-variété algébrique non singulière localement fermé de \mathbf{X} de codimension k dans \mathbf{X} , et telle que si C_i est une composante connexe de S_i vérifiant $C_i \cap \overline{S}_k \neq \emptyset$ pour un certain k , alors $C_i \subseteq \overline{S}_k$ et $i > k$ ⁽²⁷⁾.

Les composantes connexes des S_k sont appelés les « *strates (de codimension k) de \mathfrak{X}* » ⁽²⁸⁾. On notera $\text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$ l'ensemble des stratifications de \mathbf{X} .

1.9.2 Filtration associée à une stratification. Pour chaque $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}$ on appellera « *filtration associée à \mathfrak{X}* », la filtration croissante :

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{X}} := \left(\emptyset = \mathbf{F}_{-1} \subseteq \mathbf{F}_0 \subseteq \mathbf{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathbf{F}_{d_{\mathbf{X}}-1} \subseteq \mathbf{F}_{d_{\mathbf{X}}} = \mathbf{X} \right)$$

où \mathbf{F}_k est la réunion des strates de \mathfrak{X} de dimension inférieure ou égale à k . La condition frontière assure que chaque \mathbf{F}_k est un fermé de Zariski de \mathbf{X} .

²⁴ Cf. [BoAl] §V.7.7, p. 121.

²⁵ Dans le cadre de variétés algébriques complexes toute dimension ou codimension sera relative à la structure complexe à moins que la notation précise une interprétation différente, p. ex. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{X}) = 2d_{\mathbf{X}}$.

²⁶ [W] §18 p. 535.

²⁷ Whitney appelle cette condition « *la condition frontière* » ; lorsqu'elle est satisfaite, la frontière d'une strate de codimension k est réunion de strates de codimension supérieure à k .

²⁸ On identifie souvent \mathfrak{X} et l'ensemble de ses strates.

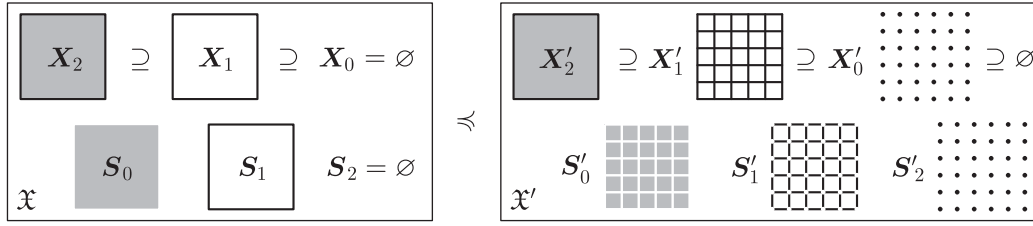
1.9.3 Exemple. L'ensemble $\Sigma(\mathbf{X})$ des points singuliers de \mathbf{X} est un fermé de Zariski qui vérifie $\text{codim}_{\mathbf{X}} \Sigma(\mathbf{X}) > 0$ ⁽²⁹⁾. La stratification associée à la filtration fermée $\mathbf{X} \supseteq \Sigma(\mathbf{X}) \supseteq \Sigma(\Sigma(\mathbf{X})) \cdots$ appartient clairement à $\text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$, on l'appellera la stratification «*par lieu singulier de \mathbf{X}* » et sera notée \mathfrak{X}_{Σ} . En particulier $\text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X}) \neq \emptyset$ (cf. 1.7.3).

1.9.4 Définitions

- Soient \mathbf{Z} un fermé de Zariski de \mathbf{X} , $\mathfrak{Z} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{Z})$ et $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$. On dit que « *\mathfrak{X} est un raffinement de \mathfrak{Z}* », et l'on note $\mathfrak{Z} \preceq \mathfrak{X}$, lorsque chaque strate de \mathfrak{Z} est réunion (disjointe) de strates de \mathfrak{X} .
- Plus généralement, si $\mathcal{F} := \{F_i\}$ et $\mathcal{G} := \{G_i\}$ sont deux suites croissantes de fermés de \mathbf{X} , on notera $\mathcal{F} \preceq \mathcal{G}$ lorsque chaque partie $F_i \setminus F_{i-1}$ est réunion de composantes connexes des parties $G_k \setminus G_{k-1}$.

En reprenant les données de l'alinéa précédent, on a donc $\mathfrak{Z} \preceq \mathfrak{X} \Leftrightarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{Z}} \preceq \mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$.

Les figures suivantes illustrent cette définition dans le cas réel où \mathbf{X} est la pseudovariété compacte $\mathbf{X} = [0, 1] \times [0, 1]$ et où $\mathbf{Z} = \mathbf{X}$.



On a les décompositions :

$$S_0 = \begin{array}{c} \text{grid} \\ S_0 \cap S' \end{array} \amalg \begin{array}{c} \text{grid} \\ S_0 \cap S'_1 \end{array} \amalg \begin{array}{c} \text{dots} \\ S_0 \cap S'_2 \end{array} \quad S_1 = \emptyset \amalg \begin{array}{c} \text{dashed box} \\ S_1 \cap S'_0 \end{array} \amalg \begin{array}{c} \text{dashed box} \\ S_1 \cap S'_1 \end{array} \amalg \begin{array}{c} \text{dashed box} \\ S_1 \cap S'_2 \end{array}$$

1.9.5 Proposition. Soit \mathbf{X} une variété algébrique complexe.

- Pour toute suite finie et croissante de fermés de Zariski $\emptyset = F_{-1} \subseteq F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbf{X}$ il existe une stratification $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$, telle que pour chaque i , l'ensemble $F_i \setminus F_{i-1}$ est réunion de strates de \mathfrak{X} . En particulier, pour tout fermé de Zariski $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}$ et toute $\mathfrak{Z} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{Z})$, il existe $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$ telle que $\mathfrak{Z} \preceq \mathfrak{X}$.
- Soient $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2$ deux fermés de Zariski de \mathbf{X} et $\mathfrak{Z}_i \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{Z}_i)$. Il existe $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$ raffinement commun des \mathfrak{Z}_i , i.e. $\mathfrak{Z}_i \preceq \mathfrak{X}$.
- L'ensemble $\text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$ est partiellement ordonné filtrant supérieurement par la relation « \preceq ».

Indications

- On raisonnera par récurrence sur $\dim \mathbf{X}$; l'assertion est clairement vérifiée pour $\dim \mathbf{X} = 0$. Dans le cas général, notons $\mathbf{X} =: F_m$. Pour chaque $i = 0, \dots, m$, U_i désigne l'intérieur de $(F_i \setminus F_{i-1}) \cap (\mathbf{X} \setminus \Sigma(\mathbf{X}))$. Les U_i sont des ouverts de Zariski de \mathbf{X} , deux-à-deux disjoints et

²⁹ [Ha₂] p. 33.

ne sont pas tous vides. Chaque composantes connexe de $S_0 := \coprod_i U_i$ est donc entièrement contenue dans l'un des U_i . Comme $Y := X \setminus S_0$ est de codimension positive dans X , l'hypothèse de récurrence s'applique à Y muni de la filtration induite $(F_i \cap Y)_i$ et donne une stratification $\mathfrak{Y} \in \text{Str}_{\text{alg}}(Y)$. L'ensemble $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} \cup \Pi_0(S_0)$ est alors, par construction, une stratification de $\text{Str}_{\text{alg}}(X)$ vérifiant (a).

- b) Notons $Y := Z_1 \cup Z_2$, $m := \dim Y$ et $S_{i,0}$ ($i = 1, 2$) la réunion des strates de dimension m de \mathfrak{Z}_i ; $S_{i,0}$ est un ouvert de points non singuliers de Y . Soit

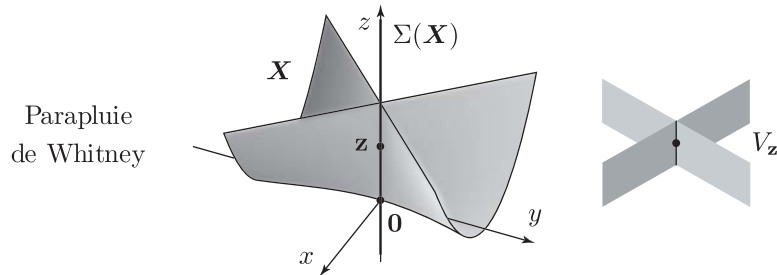
$$S_0 := (S_{1,0} \setminus Z_2) \amalg U_{12} \amalg (S_{2,0} \setminus Z_1), \tag{*}$$

où U_{12} désigne l'intérieur de $S_{1,0} \cap S_{2,0} \cap (Y \setminus \Sigma(Y))$. Chaque composante connexe de S_0 est alors entièrement contenue dans l'un des trois termes de (*) puisque S_0 est la réunion disjointe des ces trois ouverts. La stratification \mathfrak{Z}_i induit une filtration fermée sur $Z'_i := Z_i \setminus S_0$. On note $\mathfrak{Z}'_i \in \text{Str}_{\text{alg}}(Z'_i)$ la stratification donnée par (a) appliquée à cette filtration. Cela étant, comme $Y' := Z'_1 \cup Z'_2$ est de codimension positive dans Y , on peut raisonner par récurrence et supposer (b) vérifiée par les nouvelles données Y' , Z'_i et \mathfrak{Z}'_i . Il existe donc une stratification $\mathfrak{Y}' \in \text{Str}_{\text{alg}}(Y')$ telle que $\mathfrak{Z}'_i \preceq \mathfrak{Y}'$. Alors $\mathfrak{Y} := \mathfrak{Y}' \cup \Pi_0(S_0)$ appartient à $\text{Str}_{\text{alg}}(Y)$ et vérifie par construction $\mathfrak{Z}_i \preceq \mathfrak{Y}$. L'assertion (b) découle alors d'une nouvelle application de la dernière partie (a) appliquée à \mathfrak{Y} .

- c) Conséquence immédiate de (b) en prenant $Z_i = X$. ■

1.9.6 Instabilité de la catégorie $D_{\mathfrak{X}-c}^b(X)$. Soient $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}(X)$ et $\iota_S : S \hookrightarrow X$ l'inclusion d'une partie localement fermée réunion de strates de \mathfrak{X} . L'ensemble $\mathfrak{X}|_S$ de strates de \mathfrak{X} contenues dans S appartient évidemment à $\text{Str}_{\text{alg}}(S)$; on notera $D_{\mathfrak{X}-c}^b(S) := D_{\mathfrak{X}|_S-c}^b(S)$.

Les foncteurs $\iota_S^{-1}, \iota_{S!}$ sont bien définis entre les catégories $D_{\mathfrak{X}-c}^b(S)$ et $D_{\mathfrak{X}-c}^b(X)$, mais l'image du foncteur $R\iota_{S*} : D_{\mathfrak{X}-c}^b(S) \rightsquigarrow D^b(X)$ n'est généralement pas contenue dans $D_{\mathfrak{X}-c}^b(X)$ lorsque \mathfrak{X} n'est pas une stratification de pseudovariété pour X . C'est une conséquence du fait que $\mathcal{D}_X(D_{\mathfrak{X}-c}^b(X)) \not\subseteq D_{\mathfrak{X}-c}^b(X)$, raison pour laquelle nous qualifions ce phénomène d'instabilité de $D_{\mathfrak{X}-c}^b(X)$ par dualité de Grothendieck-Verdier (1.7.8). Un contreexemple classique est celui du «parapluie de Whitney»⁽³⁰⁾ que nous rappelons maintenant.



Dans cette figure, X est la sous-variété algébrique de \mathbb{C}^3 définie par les zéros du polynôme $P(x, y, z) = zy^2 - x^2$. Le lieu des points singuliers de X est la droite $\Sigma(X) = (x = 0, z = 0)$. Pour tout $z \neq 0$, le polynôme P se factorise en $P = (uy - x)(uy + x)$, où $z = u^2$. Il s'ensuit que le point $z = (0, 0, z)$ admet une base de voisinages V_z dans X^{an} homéomorphes à $\mathbb{R}^2 \times Y$, où Y

³⁰ [W] ex. 18.7 p. 537.

est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant $xy = 0$; de plus, $V_{\mathbf{z}} \setminus \Sigma(\mathbf{X})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{C}^* \amalg \mathbb{C}^*)$. On vérifie également que l'origine $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ admet une base de voisinages $V_{\mathbf{0}}$ tels que $V_{\mathbf{0}} \setminus \Sigma(\mathbf{X})$ est connexe.

Soient $\mathfrak{X}_{\Sigma} = \{\mathcal{S}, \Sigma(\mathbf{X})\}$ la stratification par lieu singulier de \mathbf{X} et $\iota : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathbf{X}$ l'inclusion. Il résulte des remarques précédentes que l'espace vectoriel des germes du faisceau $\mathcal{H}^0 \mathbb{R}\iota_{\mathcal{S}*} \underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{S}} = \iota_{\mathcal{S}*} \underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{S}}$ au point \mathbf{z} est isomorphe à \mathbb{Q}^2 lorsque $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ et à \mathbb{Q} autrement. Le faisceau $\iota_{\mathcal{S}*} \underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{S}}$ n'est donc pas localement constant sur $\Sigma(\mathbf{X})$ et $\mathbb{R}\iota_{\mathcal{S}*} \underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{S}}$ n'appartient pas à $D_{\mathfrak{X}_{\Sigma}\text{-c}}(\mathbf{X})$.

1.9.7 A propos des conditions de Whitney. C'est par ces conditions, connues sous le nom des « conditions (a) et (b) de Whitney »⁽³¹⁾, que Whitney introduit la notion de « stratification régulière » (aujourd'hui appelée « stratification de Whitney »). Ces conditions énoncent des propriétés géométriques d'une stratification $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$ suffisantes pour que \mathfrak{X} définisse une structure de pseudovariété sur toute partie localement fermée \mathcal{S} de \mathbf{X} réunion de strates de \mathfrak{X} . La proposition suivante est démontrée dans [BoAl] (A'Campo §IV.2 p. 43) :

1.9.8 Proposition. *Toute stratification de Whitney d'une variété algébrique complexe \mathbf{X} munit l'espace topologique \mathbf{X}^{an} d'une structure de pseudovariété à strates de dimension paire.*

1.9.9 Notre principal intérêt dans les stratification de Whitney réside dans la validité des théorèmes de stabilité des catégories $D_{\mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X})$ et $D_{\mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathcal{S})$ par les foncteurs image directe, inverse, et dualité de Grothendieck-Verdier (1.7.7, 1.7.8).

Dans l'exemple du parapluie de Whitney, la stratification \mathfrak{X}_{Σ} ne vérifie donc pas les conditions de Whitney. On voit bien que c'est l'origine qui pose un problème et le complexe $\mathbb{R}\iota_{\mathcal{S}*} \underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{S}_0}$ appartient à $D_{\mathfrak{X}}^b(\mathbf{X})$, où \mathfrak{X} est le raffinement de \mathfrak{X}_{Σ} défini par $\mathfrak{X} = \{\mathcal{S}_0, \Sigma(\mathbf{X}) \setminus \{\mathbf{0}\}, \{\mathbf{0}\}\}$.⁽³²⁾

Notons $\text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$ le sous-ensemble de $\text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$ des stratifications vérifiant les conditions de Whitney. Le théorème suivant est dû à Whitney.

1.9.10 Théorème.⁽³³⁾ *Pour toute $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$, il existe $\mathfrak{X}' \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$ telle que $\mathfrak{X} \preceq \mathfrak{X}'$. Autrement dit, $\text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$ est une partie cofinale dans $(\text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X}), \preceq)$.*

1.9.11 Par conséquent, on a $\text{Str}_{\text{psv}}(\mathbf{X}^{\text{an}}) \supseteq \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X}) \neq \emptyset$ pour toute variété algébrique complexe \mathbf{X} (comparer à 1.7.3).

1.10 Complexes à cohomologie constructible sur les variétés algébriques complexes

1.10.1 Soient \mathbf{X} une variété algébrique complexe et $\mathfrak{X}_1 \preceq \mathfrak{X}_2$ un raffinement de stratifications de \mathbf{X} . L'inclusion

$$D_{\mathfrak{X}_1\text{-c}}^b(\mathbf{X}) \subseteq D_{\mathfrak{X}_2\text{-c}}^b(\mathbf{X})$$

³¹ [W] §19 p. 540, ou bien [BoAl] A'Campo §IV.1 p. 41, ou le très joli article de Lipman [Li] §1–2.

³² On peut aisément vérifier que la stratification \mathfrak{X} vérifie les conditions de Whitney; il est par ailleurs clair qu'elle définit une structure de pseudovariété sur \mathbf{X} .

³³ [W] Th. 19.2 p. 540.

est immédiate d'après la définition même des catégories $D_{\mathfrak{X}-c}^b(\mathbf{X})$ (1.7.5). On pose alors :

$$D_c(\mathbf{X}) := \varinjlim_{\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})} D_{\mathfrak{X}-c}^b(\mathbf{X})$$

c'est la sous-catégorie triangulée et pleine de $D(\mathbf{X})$ des complexes de faisceaux à cohomologie « *constructible* », *i.e.* localement constante sur les strates d'une stratification de $\text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$.

1.10.2 Suite au théorème (1.9.10), on a aussi $D_c(\mathbf{X}) = \varinjlim_{\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})} D_{\mathfrak{X}-c}^b(\mathbf{X})$.

1.10.3 Les analogues des théorèmes 1.7.7 et 1.7.8 sont évidemment vérifiés sur $D_c(\mathbf{X})$.

1.10.4 On insiste sur le fait que, étant donnés $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$ et $\mathcal{F}^\bullet \in D_{\mathfrak{X}-c}^b(\mathbf{X})$, le dual $\mathbb{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}^\bullet$ n'appartient pas forcément à $D_{\mathfrak{X}-c}^b(\mathbf{X})$, mais il existe toujours un raffinement \mathfrak{X}' de \mathfrak{X} définissant une structure de pseudovariété sur \mathbf{X} (1.9.10, 1.9.8), auquel cas $\mathcal{F}^\bullet \in D_{\mathfrak{X}'-c}^b(\mathbf{X})$ et :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}^\bullet \in \mathbb{D}_{\mathbf{X}}(D_{\mathfrak{X}'-c}^b(\mathbf{X})) = D_{\mathfrak{X}'-c}^b(\mathbf{X}) \subseteq D_c(\mathbf{X}),$$

d'après 1.7.7.

Le fait que nous disposions de “suffisamment” de catégories $D_{\mathfrak{X}-c}^b(\mathbf{X})$ stables par la dualité de Grothendieck-Verdier jouera un rôle important dans l'étude des catégories des complexes d'intersection et de faisceaux pervers.

1.11 Systèmes locaux sur une variété topologique

1.11.1 Définition. Soient \mathcal{A} un anneau et \mathbf{M} une variété topologique. On appelle « *système local de \mathcal{A} -modules sur \mathbf{M}* » tout faisceau localement constant de \mathcal{A} -modules sur \mathbf{M} de fibres de type fini. On notera $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{M})$ la sous-catégorie pleine de $\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{M})$ dont les objets sont les systèmes locaux sur \mathbf{M} .

1.11.2 Supposons \mathbf{M} connexe (pour simplifier) et choisissons un point de base $x \in \mathbf{M}$. Il est facile de voir que pour tout $\mathcal{L} \in \text{Loc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{M})$, l'espace étalé $\tilde{\mathcal{L}}$ au-dessus de \mathbf{M} est un revêtement de fibre en x le \mathcal{A} -module \mathcal{L}_x . Le groupe fondamental $\Pi_1(\mathbf{M}; x)$ agit sur \mathcal{L}_x par une représentation $\rho_{\mathcal{L}} : \Pi_1(\mathbf{M}; x) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_x)$ dite « *de monodromie* ». Un morphisme de faisceaux entre deux systèmes locaux $\alpha : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ induit de même le morphisme $\alpha_x : \mathcal{L}_{1x} \rightarrow \mathcal{L}_{2x}$ de $\Pi_1(\mathbf{M}; x)$ -modules à coefficients dans \mathcal{A} . La correspondance $\mathcal{L} \rightsquigarrow \rho_{\mathcal{L}}$ est un équivalence de catégories entre $\text{Loc}(\mathbf{M})$ et la catégorie $\text{Mod}_{\mathcal{A}}(\Pi_1(\mathbf{M}; x))$ ⁽³⁴⁾. Pour tous $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \text{Loc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{M})$, cette équivalence donne un isomorphisme :

$$\text{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{M}}}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}, \Pi_1(\mathbf{M}; x)}(\mathcal{L}_{1x}, \mathcal{L}_{2x}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_{1x}, \mathcal{L}_{2x})^{\Pi_1(\mathbf{M}; x)}.$$

Comme d'habitude, le choix du point de base est inessentiel et nous pouvons effacer la référence à x dans ce qui précède ; on écrira donc $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{M}) \sim \text{Mod}_{\mathcal{A}}(\Pi_1(\mathbf{M}))$.

Lorsque \mathbf{M} n'est pas connexe, $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{M})$ est clairement équivalente au produit des catégories $\text{Mod}_{\mathcal{A}}(\Pi_1(\mathbf{M}_i))$ où \mathbf{M}_i décrit $\Pi_0(\mathbf{M})$. La catégorie $\text{Loc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{M})$ est une sous-catégorie pleine et abélienne de $\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ qui est, en plus, stable par extensions dans $\text{Faisc}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ ⁽³⁵⁾.

³⁴ Cf. [C] article de Mebkhout-Narváez-Macarro : “*Le théorème de constructibilité de Kashiwara*”, §I.1–2, pp. 50–57, pour une démonstration détaillée de cette équivalence de catégories.

³⁵ cf. [C] *loc.cit.* prop. I.1.11 p. 53.

1.11.3 Une variété topologique est une pseudovariété relativement à la stratification triviale $\mathfrak{M}_0 = \{M\}$ et le théorème 1.7.7 s'applique au couple $(M; \mathfrak{M})$. Les objets de la catégorie $D_{\mathfrak{M}_0\text{-c}}^b(M)$ sont alors les complexes de faisceaux \mathcal{F}^\bullet sur M dont les faisceaux dérivés $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet$ sont des systèmes locaux sur M et sont presque tous nuls. Il faut prendre garde du fait que les termes \mathcal{F}^k de \mathcal{F}^\bullet peuvent, non seulement ne pas être des systèmes locaux, mais peuvent également être non nuls pour une infinité de valeurs de k .

1.11.4 Proposition. *Soit M une variété topologique équidimensionnelle. Alors, pour tout corps k et tout $\mathcal{F}^\bullet \in D_{k; \mathfrak{M}_0\text{-c}}^b(M)$:*

$$\boxed{\llbracket \mathcal{D}_M \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} = -\llbracket \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} - \dim_{\mathbb{R}}(M)} \quad (\diamond)$$

Démonstration. Lorsque $\llbracket \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} = \llbracket a \rrbracket$, on a $\mathcal{H}^a \mathcal{F}^\bullet[-a] \equiv \mathcal{F}^\bullet$ dans $D(M)$ (1.4.27) et donc

$$\mathcal{D}_M \mathcal{F}^\bullet \equiv \mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{H}^a \mathcal{F}^\bullet[-a], \underline{\mathcal{Q}}_{M|k}[\dim_{\mathbb{R}}(M)]) = \mathcal{H}om(\mathcal{H}^a \mathcal{F}^\bullet, \underline{\mathcal{Q}}_{M|k}[\dim_{\mathbb{R}}(M) + a]),$$

d'après 1.2.13 puisque un système local de k -espaces vectoriels est localement libre. Dans le cas général, supposons $\llbracket \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} = \llbracket a, b \rrbracket$ avec $a < b$. Le triangle exact :

$$\tau_{\leq b-1} \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{H}^b \mathcal{F}^\bullet[-b] \xrightarrow{[+1]}$$

donne lieu au triangle exact :

$$\mathcal{D}_M(\mathcal{H}^b \mathcal{F}^\bullet[-b]) \longrightarrow \mathcal{D}_M \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{D}_M(\tau_{\leq b-1} \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{[+1]}$$

d'où :

$$\llbracket \mathcal{D}_M \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} \subseteq \llbracket \mathcal{D}_M(\mathcal{H}^b \mathcal{F}^\bullet[-b]) \rrbracket_{\text{coh}} \cup \llbracket \mathcal{D}_M(\tau_{\leq b-1} \mathcal{F}^\bullet) \rrbracket_{\text{coh}}$$

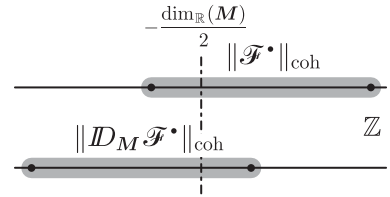
et donc $\llbracket \mathcal{D}_M \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} \subseteq -\llbracket \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} - \dim_{\mathbb{R}}(M)$, en raisonnant par induction sur $b - a$. La proposition résulte alors de l'involutivité de \mathcal{D}_M . \blacksquare

1.11.5 Pour $\mathcal{G}^\bullet \in D_{k; \mathfrak{M}\text{-c}}^b(M)$ notons $\llbracket \mathcal{G}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} = \llbracket a(\mathcal{G}^\bullet), b(\mathcal{G}^\bullet) \rrbracket$.

L'égalité (\diamond) s'écrit de la manière plus suggestive suivante :

$$\frac{a(\mathcal{D}_M \mathcal{F}^\bullet) + b(\mathcal{F}^\bullet)}{2} = \frac{b(\mathcal{D}_M \mathcal{F}^\bullet) + a(\mathcal{F}^\bullet)}{2} = -\frac{\dim_{\mathbb{R}}(M)}{2}$$

qui montre que \mathcal{D}_M opère comme une symétrie par rapport à $-\frac{\dim_{\mathbb{R}}(M)}{2}$.



On prendra garde du fait que toutes ces remarques sont uniquement valables sur une variété topologique et pour des complexes de faisceaux à cohomologie bornée et dont les faisceaux dérivés sont localement constants de fibres vectorielles de dimension finie.

1.11.6 Pour toute variété topologique M de dimension paire et orientable, $\underline{\mathcal{Q}}_M[\dim_{\mathbb{R}}(M)/2]$ est isomorphe à son dual $\mathcal{D}_M(\underline{\mathcal{Q}}_M[\dim_{\mathbb{R}}(M)/2])$ (cf. 1.6.4).

1.11.7 Invariance de la monodromie. Dans cette partie M est un ouvert non singulier d'une variété algébrique complexe et $Z \subseteq M$ est un fermé de Zariski de codimension positive d'ouvert complémentaire noté U ⁽³⁶⁾.

1.11.8 Lemme. Soit $\mathcal{L} \in \text{Loc}_{\mathcal{A}}(M)$. Le morphisme d'adjonction $\mathcal{L} \rightarrow v_{U*}(\mathcal{L}|_U)$ est un isomorphisme de faisceaux.

Démonstration. En effet, on a la suite exacte longue fondamentale :

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}_Z \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow v_{U*}(\mathcal{L}|_U) \longrightarrow \mathcal{H}_Z^1 \mathcal{L} \longrightarrow \dots$$

où $\underline{\Gamma}_Z \mathcal{L} = 0$ par vérification directe à partir de la définition du foncteur $\underline{\Gamma}_Z$. Le lemme résulte de prouver que $(\mathcal{H}_Z^1 \mathcal{L})_z = 0$, pour tout système local \mathcal{L} et tout $z \in Z$. Or, au voisinage de z dans M le système local est trivial et nous pouvons supposer que $\mathcal{L} = c_M^! \mathcal{M}[-\dim_{\mathbb{R}} M]$ pour un certain \mathcal{A} -module de type fini \mathcal{M} (1.6.5). Dans ce cas $v_Z^! \mathcal{L} = c_Z^! \mathcal{M}[-\dim_{\mathbb{R}} M]$ (1.6.2) et alors $[[v_Z^! \mathcal{L}]_{\text{coh}}] = [[c_Z^! \mathcal{M}]_{\text{coh}}] + \dim_{\mathbb{R}} M \subseteq [[\dim_{\mathbb{R}} M - \dim_{\mathbb{R}} Z, \dim_{\mathbb{R}} M]]$ (1.7.10). Le lemme résulte maintenant de la minoration $1 < \dim_{\mathbb{R}} M - \dim_{\mathbb{R}} Z$. ■

1.11.9 Proposition. Les données étant comme ci-dessus, le foncteur $v_U^{-1} : \text{Loc}(M) \rightsquigarrow \text{Loc}(U)$ est pleinement fidèle et transforme irréductible en irréductible.

Démonstration. Pour $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \text{Loc}(M)$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}_U}(\mathcal{L}_1|_U, \mathcal{L}_2|_U) &= \Gamma(U; \mathcal{H}om(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)|_U) \\ &= \Gamma(M; v_{U*} \mathcal{H}om(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)|_U) \\ &= \Gamma(M; \mathcal{H}om(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)) = \text{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}_M}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \end{aligned}$$

puisque $\mathcal{H}om(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ est un système local sur M et grâce au lemme précédent. La pleine fidélité de v_U^{-1} en découle.

Soient $\mathcal{L} \in \text{Loc}(M)$ un système local irréductible, et $\mathcal{L}' \in \text{Loc}(U)$ tel que $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}|_U$. Pour tout $z \in Z$, il existe un voisinage ouvert connexe V_z au-dessus duquel \mathcal{L} est trivial. L'ouvert $V'_z = V_z \cap U$ est connexe et l'inclusion $\mathcal{L}'|_{V'_z} \subseteq \mathcal{L}|_{V'_z}$ est un inclusion de systèmes locaux triviaux (penser aux espaces étalés). Il existe alors un et un seul système local trivial $\overline{\mathcal{L}}'_z \in \text{Loc}(V_z)$ tel que $\mathcal{L}'|_{V'_z} = \overline{\mathcal{L}}'_z|_{V'_z}$ et $\overline{\mathcal{L}}'_z \subseteq \mathcal{L}|_{V_z}$; autrement dit le système local \mathcal{L}' admet des prolongements locaux *uniques* autour des points de Z . C'est tout ce qu'il faut pour montrer que le système local \mathcal{L}' admet un prolongement global en un sous-système local de \mathcal{L} , mais comme \mathcal{L} est supposé irréductible ceci n'est possible que si $\mathcal{L}' = 0$ ou si $\mathcal{L}' = \mathcal{L}|_U$. ■

§ 2. Prolongement intermédiaire relatif à une filtration fermée

2.1 Filtrations fermées

Soit \mathcal{F} une filtration finie d'un espace topologique X par des parties fermées :

$$\mathcal{F} = \left(X = X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq X_{n-2} \supseteq \dots \supseteq X_1 \supseteq X_0 \supseteq X_{-1} = \emptyset \right) \quad (*)$$

³⁶ Il suffirait de supposer que M est une variété topologique de dimension d et que Z est une partie fermée de M admettant une structure de pseudovariété de dimension au plus $d - 2$.

Chaque partie $S_k := X_{n-k} \setminus X_{n-(k+1)}$ ($k = 0, \dots, n$) est localement fermée. On note :

$$U_k := X_n \setminus X_{n-(k+1)} = S_0 \amalg S_1 \amalg \dots \amalg S_k, \quad \text{pour } k = 0, \dots, n.$$

(en part. $U_0 = S_0$); on a donc $U_{k+1} = U_k \amalg S_{k+1}$ et les inclusions i_k et j_{k+1} (resp. ouverte et fermée) :

$$U_k \xrightarrow[\subseteq]{i_k} U_{k+1} \xleftarrow[\supseteq]{j_{k+1}} S_{k+1}.$$

2.2 L'équivalence de catégories de Deligne

2.2.1 Définition. Les données étant comme ci-dessus, on appelle «prolongement intermédiaire relatif à la filtration \mathcal{F} », le foncteur :

$$i_{!*}^{\mathcal{F}} : \text{Faisc}(S_0) \rightsquigarrow D^b(X)$$

défini par :

$$i_{!*}^{\mathcal{F}} := (\tau_{\leq n-1} \mathbb{R}i_{n-1*}) \circ \dots \circ (\tau_{\leq 1} \mathbb{R}i_{1*}) \circ (\tau_{\leq 0} \mathbb{R}i_{0*})$$

2.2.2 Théorème (Deligne).⁽³⁷⁾ Le foncteur $i_{!*}^{\mathcal{F}}$ établit une équivalence de catégories entre $\text{Faisc}(S_0)$ et la sous-catégorie pleine $\mathcal{JC}_{\mathcal{F}}(X) \subseteq D^b(X)$ des complexes de faisceaux \mathcal{F}^\bullet vérifiant les trois conditions suivantes.

(0) $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet|_{S_0} = 0$, pour tout $m \neq 0$;

et pour chaque $k = 1, 2, \dots, n$, les conditions de «support» (S) et de «cosupport» (S') :

(S) $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet|_{S_k} = 0$, pour tout $m \geq k$; (S') $\mathcal{H}_{S_k}^m \mathcal{F}^\bullet = 0$, pour tout $m \leq k$.

En particulier, l'image essentielle⁽³⁸⁾ de $i_{!*}^{\mathcal{F}}$ est une sous-catégorie pleine abélienne de $D^b(X)$.

Les tableaux ci-dessous illustrent ces conditions; les parties grisées correspondent aux degrés cohomologiques où les faisceaux dérivés peuvent être a priori non nuls.

	-1	0	1	2	3	4	...
$\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_0}$	0	●	0	0	0	0	0
$\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_1}$	■	■	0	0	0	0	0
$\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_2}$	■	■	■	0	0	0	0
$\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_3}$	■	■	■	■	0	0	0
$\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_4}$	■	■	■	■	■	0	0

	-1	0	1	2	3	4	...
$\mathcal{H}_{S_0}^* \mathcal{F}^\bullet$	0	●	0	0	0	0	0
$\mathcal{H}_{S_1}^* \mathcal{F}^\bullet$	0	0	0	■	■	■	■
$\mathcal{H}_{S_2}^* \mathcal{F}^\bullet$	0	0	0	0	0	■	■
$\mathcal{H}_{S_3}^* \mathcal{F}^\bullet$	0	0	0	0	0	0	■
$\mathcal{H}_{S_4}^* \mathcal{F}^\bullet$	0	0	0	0	0	0	●

Démonstration. Considérons chaque ouvert U_k muni de la filtration \mathcal{F}_k induite par \mathcal{F} :

$$U_k = S_0 \amalg \dots \amalg S_k$$

et notons \mathcal{C}_k la sous-catégorie pleine de $D^b(U_k)$ des complexes de faisceaux sur U_k vérifiant les conditions (0), (S) et (S') pour \mathcal{F}_k . On a clairement $\mathcal{C}_0 \equiv \text{Faisc}(S_0)$ (1.4.27) et le théorème résultera

³⁷ Cf. [GoMc₂] §3.5.

³⁸ On rappelle qu'on appelle «image essentielle» d'un foncteur $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ la classe d'objets de \mathcal{C}_2 isomorphes aux objets de la forme $F(O)$ où $O \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1)$.

de prouver que chaque foncteur

$$\tau_{\leq k} \mathbb{R}i_{k*} : \mathcal{C}_k \rightsquigarrow \mathcal{C}_{k+1}$$

est une équivalence de catégorie.

Commençons par vérifier qu'ils sont bien définis. Fixons l'entier $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Soit $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{C}_k$ et notons $\mathcal{G}^\bullet := \tau_{\leq k} \mathbb{R}i_{k*} \mathcal{F}^\bullet \in D^b(\mathbf{U}_{k+1})$. Le foncteur de restriction i_k^{-1} étant exact, il commute à la troncature, donc :

$$\mathcal{G}^\bullet|_{\mathbf{U}_k} = \tau_{\leq k} i_k^{-1} \mathbb{R}i_{k*} \mathcal{F}^\bullet \stackrel{=}{=} \mathcal{F}^\bullet. \quad (*)$$

En particulier,

$$\mathcal{H}^m \mathcal{G}^\bullet|_{\mathbf{U}_k} = \mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{\mathbf{S}}^m \mathcal{G}^\bullet = \mathcal{H}_{\mathbf{S}}^m \mathcal{F}^\bullet, \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{Z},$$

où \mathbf{S} désigne une partie localement fermée de \mathbf{U}_{k+1} contenue dans \mathbf{U}_k . Les conditions (0), (S) et (S') sont donc bien vérifiées par les parties $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k$ et il ne reste qu'à vérifier les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (\mathbf{S}_{k+1}) & \mathcal{H}^m \mathcal{G}^\bullet|_{\mathbf{S}_{k+1}} = 0, \quad \text{pour } m \geq k+1, \\ (\mathbf{S}'_{k+1}) & \mathcal{H}_{\mathbf{S}_{k+1}}^m \mathcal{G}^\bullet = 0, \quad \text{pour } m \leq k+1, \end{cases}$$

La condition (\mathbf{S}_{k+1}) est trivialement satisfaite car \mathcal{G}^\bullet est donné par la troncature $\tau_{\leq k}$.

La condition (\mathbf{S}'_{k+1}) sera testée à l'aide du triangle exact de $D^+(\mathbf{U}_{k+1})$ associé à la décomposition $\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k \amalg \mathbf{S}_{k+1}$:

$$j_{k+1!} j_{k+1}^! \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}i_{k*}(\mathcal{G}^\bullet|_{\mathbf{U}_k}) \xrightarrow{[-1]} \mathcal{G}^\bullet, \quad (**)$$

où le terme de droite n'est autre que $\mathbb{R}i_{k*} \mathcal{F}^\bullet$ d'après (*). On a donc dans $D^+(\mathbf{U}_{k+1})$:

$$j_{k+1!} j_{k+1}^! \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}^\bullet = \tau_{\leq k} \mathbb{R}i_{k*} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\xi} \mathbb{R}i_{k*} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{[-1]} \mathcal{G}^\bullet,$$

où ξ s'identifie au morphisme canonique du complexe tronqué dans le complexe total. Comme ξ est un quasi-isomorphisme en degrés $\leq k$, on a aussitôt par la suite exacte longue de cohomologie (1.4.24-(\diamond)) :

$$\begin{cases} j_{k+1!} \mathcal{H}_{\mathbf{S}_{k+1}}^m \mathcal{G}^\bullet = 0, \quad \text{pour tout } m \leq k, \\ j_{k+1!} \mathcal{H}_{\mathbf{S}_{k+1}}^{k+1} \mathcal{G}^\bullet \subseteq \mathcal{H}^{k+1} \mathcal{G}^\bullet = 0, \end{cases}$$

et la condition (\mathbf{S}'_{k+1}) résulte par restriction à \mathbf{S}_{k+1} (en effet, comme cette partie est fermée dans \mathbf{U}_{k+1} , on a $j_{k+1!} = j_{k+1*}$ et $j_{k+1}^{-1} j_{k+1!} = \text{id}$). Le foncteur $\tau_{\leq k} \mathbb{R}i_{k*} : \mathcal{C}_k \rightsquigarrow \mathcal{C}_{k+1}$ est donc bien défini.

Dans ce qui précède, nous avons montré que le foncteur $i_k^{-1} : \mathcal{C}_{k+1} \rightsquigarrow \mathcal{C}_k$ est également bien défini et que la composée

$$\mathcal{C}_k \xrightarrow{\tau_{\leq k} \mathbb{R}i_{k*}} \mathcal{C}_{k+1} \xrightarrow{i_k^{-1}} \mathcal{C}_k$$

s'identifie naturellement au foncteur identité. Ceci implique que $\tau_{\leq k} \mathbb{R}i_{k*}$ est *fidèle*, i.e. que le morphisme

$$\text{Mor}_{D(\mathbf{U}_k)}(\mathcal{F}_1^\bullet, \mathcal{F}_2^\bullet) \longrightarrow \text{Mor}_{D(\mathbf{U}_{k+1})}(\tau_{\leq k} \mathbb{R}i_{k*} \mathcal{F}_1^\bullet, \tau_{\leq k} \mathbb{R}i_{k*} \mathcal{F}_2^\bullet) \quad (\ddagger)$$

défini par le foncteur $\tau_{\leq k} \mathbb{R}i_{k*}$, est *injectif* pour tous $\mathcal{F}_1^\bullet, \mathcal{F}_2^\bullet \in \mathcal{C}_k$.

Nous allons étudier maintenant la composée :

$$\mathcal{C}_{k+1} \xrightarrow{i_k^{-1}} \mathcal{C}_k \xrightarrow{\tau_{\leq k} \mathbb{R}i_{k*}} \mathcal{C}_{k+1}.$$

Soit $\mathcal{G}^\bullet \in \mathcal{C}_{k+1}$ et considérons à nouveau le triangle exact de $D^+(\mathbf{U}_{k+1})$ (**):

$$j_{k+1!} j_{k+1}^! \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}^\bullet \xrightarrow{\zeta} \mathbb{R}i_{k*}(\mathcal{G}^\bullet|_{\mathbf{U}_k}) \xrightarrow{[-1]} \mathcal{G}^\bullet$$

Comme $\mathcal{H}^m(j_{k+1}!j_{k+1}^!\mathcal{G}^\bullet)$ ($= j_{k+1}!\mathcal{H}_{S_{k+1}}^m\mathcal{G}^\bullet$) est nul pour $m \leq k+1$ (puisqu'il en est ainsi de $\mathcal{H}_{S_{k+1}}^m\mathcal{G}^\bullet$ par hypothèse), le morphisme ζ est un quasi-isomorphisme en degrés $\leq k$ et induit un quasi-isomorphisme $\tau_{\leq k}\mathcal{G}^\bullet \sim \tau_{\leq k}\mathbb{R}i_{k*}(\mathcal{G}^\bullet|_{U_k})$.

On a un diagramme de morphismes de complexes (bornés) :

$$\begin{array}{ccc} & \tau_{\leq k}\mathcal{G}^\bullet & \\ \cong \swarrow & & \searrow \zeta \\ \mathcal{G}^\bullet & \xrightarrow{T(\mathcal{G}^\bullet)} & \tau_{\leq k}\mathbb{R}i_{k*}(\mathcal{G}^\bullet|_{U_k}) \end{array}$$

où l'inclusion $\tau_{\leq k}\mathcal{G}^\bullet \subseteq \mathcal{G}^\bullet$ est un quasi-isomorphisme puisque $\mathcal{H}^m\mathcal{G}^\bullet = \mathbf{0}$ pour tout $m \geq k+1$; car $\mathcal{H}^m\mathcal{G}^\bullet|_{S_*} = \mathbf{0}$, indépendamment de la partie S_* de U_{k+1} . Nous faisons donc correspondre à chaque $\mathcal{G}^\bullet \in \mathcal{C}_{k+1}$ l'isomorphisme ⁽³⁹⁾ :

$$T(\mathcal{G}^\bullet) := (\zeta \circ \cong^{-1}) \in \text{Mor}_{D^+(U_{k+1})}(\mathcal{G}^\bullet, \tau_{\leq k}\mathbb{R}i_{k*}i_k^{-1}\mathcal{G}^\bullet).$$

En particulier, le foncteur $\tau_{\leq k}\mathbb{R}i_{k*} : \mathcal{C}_k \rightsquigarrow \mathcal{C}_{k+1}$ est *surjectif*.

La transformation $T : \text{id}_{\mathcal{C}_{k+1}} \rightarrow (\tau_{\leq k}\mathbb{R}i_{k*}) \circ i_k^{-1}$ est *naturelle*.

En effet, étant donnés $\mathcal{G}_1^\bullet, \mathcal{G}_2^\bullet \in \mathcal{C}_{k+1}$ et un morphisme de complexes $\alpha_\bullet : \mathcal{G}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{G}_2^\bullet$ avec $\mathcal{G}_i^\bullet \in \mathcal{C}_{k+1}$, nous devons vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1^\bullet & \xrightarrow[\sim]{T(\mathcal{G}_1^\bullet)} & \tau_{\leq k}\mathbb{R}i_{k*}i_k^{-1}\mathcal{G}_1^\bullet \\ \alpha_\bullet \downarrow & & \downarrow \tau_{\leq k}\mathbb{R}i_{k*}i_k^{-1}\alpha_\bullet \\ \mathcal{G}_2^\bullet & \xrightarrow[\sim]{T(\mathcal{G}_2^\bullet)} & \tau_{\leq k}\mathbb{R}i_{k*}i_k^{-1}\mathcal{G}_2^\bullet \end{array} \quad (\diamond)$$

est commutatif dans $D^+(U_{k+1})$. Ceci est conséquence immédiate du fait que (\diamond) se factorise **naturellement** en deux diagrammes commutatifs **dans la catégorie des complexes**, à savoir :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}_1^\bullet & \xleftarrow[\sim]{\cong_1} & \tau_{\leq k}\mathcal{G}_1^\bullet & \xrightarrow{\zeta_1} & \tau_{\leq k}\mathbb{R}i_{k*}i_k^{-1}\mathcal{G}_1^\bullet \\ \alpha_\bullet \downarrow & \oplus & \downarrow \tau_{\leq k}\alpha_\bullet & \oplus & \downarrow \tau_{\leq k}\mathbb{R}i_{k*}i_k^{-1}\alpha_\bullet \\ \mathcal{G}_2^\bullet & \xleftarrow[\sim]{\cong_2} & \tau_{\leq k}\mathcal{G}_2^\bullet & \xrightarrow{\zeta_2} & \tau_{\leq k}\mathbb{R}i_{k*}i_k^{-1}\mathcal{G}_2^\bullet \end{array}$$

On en déduit que la composée des morphismes :

$$\begin{array}{c} \text{Mor}_{D(U_{k+1})}(\mathcal{G}_1^\bullet, \mathcal{G}_2^\bullet) \\ \downarrow i_k^{-1} \\ \text{Mor}_{D(U_k)}(i_k^{-1}\mathcal{G}_1^\bullet, i_k^{-1}\mathcal{G}_2^\bullet) \\ \downarrow \tau_{\leq k}\mathbb{R}i_{k*} \\ \text{Mor}_{D(U_{k+1})}(\tau_{\leq k}\mathbb{R}i_{k*}i_k^{-1}\mathcal{G}_1^\bullet, \tau_{\leq k}\mathbb{R}i_{k*}i_k^{-1}\mathcal{G}_2^\bullet) \end{array}$$

est bijective. Le morphisme (\ddagger) est par conséquent *bijectif* et ceci termine la démonstration du théorème. ■

³⁹ On rappelle que la notation « \cong^{-1} » n'a de sens qu'en catégorie dérivée.

§3. Homologie d'intersection sur une variété algébrique complexe

3.1 Complexes d'intersection sur une variété algébrique complexe

Le théorème 2.2.2 est trop général pour que l'on puisse raisonnablement comparer les images essentielles dans $D^b(\mathbf{X})$ des prolongements intermédiaires $i_{!*}^{\mathcal{F}_1}$ et $i_{!*}^{\mathcal{F}_2}$ lorsque $\mathcal{F}_1 \preccurlyeq \mathcal{F}_2$ (1.9.4). En effet, s'il est immédiat de constater que les conditions de support relatives au raffinement \mathcal{F}_2 sont satisfaites par tout $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{JC}_{\mathcal{F}_1}(\mathbf{X}) := \text{im}_{\text{ess}}(i_{!*}^{\mathcal{F}_1})$, il n'en est pas de même en général des conditions de cosupport. Cette situation se simplifie de manière remarquable lorsque l'on se restreint aux filtrations fermées associées aux stratifications de Whitney d'une variété algébrique complexe et aux systèmes locaux sur les strates ouvertes.

3.1.1 À partir de maintenant \mathbf{X} désigne une variété algébrique complexe. L'anneau \mathcal{A} sera le corps de nombres rationnels \mathbb{Q} . Pour tout $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{X}$ localement fermé pour la topologie de Zariski de \mathbf{X} , on note $d_{\mathbf{S}} := \dim_{\mathbb{C}}(\mathbf{S})$. Les notations $\text{Faisc}(\mathbf{S})$ et $\text{Loc}(\mathbf{S})$ seront synonymes de $\text{Faisc}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{S}^{\text{an}})$ et $\text{Loc}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{S}^{\text{an}})$ respectivement. Enfin, pour toute stratification $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$, on notera $i_{!*}^{\mathfrak{X}}$ le foncteur de prolongement intermédiaire relatif à la filtration fermée associée à \mathfrak{X} .

3.1.2 Théorème. Soit $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$. Notons \mathbf{S}_0 la réunion des strates de dimension $d_{\mathbf{X}}$. Le prolongement intermédiaire $i_{!*}^{\mathfrak{X}}$ établit une équivalence de catégories entre $\text{Loc}(\mathbf{S}_0)$ et la sous-catégorie pleine de $D_{\mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{X})$ des complexes de faisceaux \mathcal{F}^\bullet tels que $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet = 0$ pour $m < 0$ et qui vérifient les trois conditions suivantes :

$$(0) \quad \mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet[d_{\mathbf{X}}]_{|\mathbf{S}_0} = 0, \text{ pour tout } m > -d_{\mathbf{X}}, \text{ et } \mathcal{H}^0 \mathcal{F}^\bullet \in \text{Loc}(\mathbf{S}_0),$$

et pour chaque strate $\mathbf{S} \in \mathfrak{X}$ de codimension positive dans \mathbf{X} :

$$(S) \quad \mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet[d_{\mathbf{X}}]_{|\mathbf{S}} = 0, \text{ pour tout } m \geq -d_{\mathbf{S}};$$

$$(S') \quad \mathcal{H}^m(\mathbb{D}_{\mathbf{X}}(\mathcal{F}^\bullet[d_{\mathbf{X}}]))_{|\mathbf{S}} = 0, \text{ pour tout } m \geq -d_{\mathbf{S}}.$$

Démonstration. L'assertion $[[\mathcal{F}^\bullet]_{\text{coh}}] \subseteq \llbracket 0, +\infty \llbracket$ résulte de ce que $i_{!*}^{\mathfrak{X}}$ est composée de foncteurs dérivés de foncteurs exact à gauche et de troncatures. D'après les résultats de stabilité des catégories $D_{\mathfrak{X}\text{-c}}^b(\mathbf{S})$ par rapport à la dualité de Grothendieck-Verdier et aux différents foncteurs d'image directe ou image inverse (cf. 1.9.6), le théorème 2.2.2 donne l'équivalence de catégories annoncée mais avec la condition de cosupport pour chaque $\mathbf{S} \in \mathfrak{X}$ de codimension positive :

$$\mathcal{H}_{\mathbf{S}}^m \mathcal{F}^\bullet = 0, \text{ pour tout } m \leq d_{\mathbf{X}} - d_{\mathbf{S}}.$$

Or, $\mathcal{H}_{\mathbf{S}}^m \mathcal{F}^\bullet = \mathcal{H}^m i_{\mathbf{S}}^! \mathcal{F}^\bullet = \mathcal{H}^m \mathbb{D}_{\mathbf{S}} i_{\mathbf{S}}^{-1} \mathbb{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}^\bullet$ (1.7.8), et alors (1.11.4)

$$\llbracket d_{\mathbf{X}} - d_{\mathbf{S}}, +\infty \llbracket \supseteq \llbracket i_{\mathbf{S}}^! \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} = \llbracket \mathbb{D}_{\mathbf{S}} i_{\mathbf{S}}^{-1} \mathbb{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} = -\llbracket i_{\mathbf{S}}^{-1} \mathbb{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} - \boxed{2d_{\mathbf{S}}},$$

(⁴⁰) de sorte que

$$\llbracket i_{\mathbf{S}}^{-1} \mathbb{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{coh}} \subseteq \llbracket -\infty, -d_{\mathbf{X}} - d_{\mathbf{S}} \llbracket = \llbracket -\infty, -d_{\mathbf{S}} \llbracket - d_{\mathbf{X}}.$$

⁴⁰ Il est opportun de remarquer que le terme encadré provient de la dualité de Grothendieck-Verdier sur \mathbf{S} et sa valeur $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{S})$ est fixée par la géométrie de \mathbf{S} (1.11.4). Il en est de même, par ailleurs, du nombre $d_{\mathbf{X}}$ qui vaut $\frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{X})$ (1.11.5). Dans le théorème de Deligne (2.2.2) les indices qui contrôlent les troncatures sont les indices des différences $\mathbf{S}_k := \mathbf{X}_{n-k} \setminus \mathbf{X}_{n-(k+1)}$ a priori sans rapport avec leur dimension. Dans ce contexte, i.e. si l'on pose $d_{\mathbf{S}_k} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{X}) - k$, le présent théorème reste inchangé sauf pour la condition de cosupport qui devient : (S'') $\mathcal{H}^m(\mathbb{D}_{\mathbf{X}}(\mathcal{F}^\bullet[d_{\mathbf{X}}]))_{|\mathbf{S}_k} = 0$, pour tout $m \geq d_{\mathbf{S}_k} - \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{S}_k)$.

La condition (S') résulte alors simplement des égalités (1.4.9) :

$$\llbracket \iota_S^{-1} \mathcal{D}_X(\mathcal{F}^\bullet[d_X]) \rrbracket_{\text{coh}} = \llbracket \iota_S^{-1} \mathcal{D}_X(\mathcal{F}^\bullet)[-d_X] \rrbracket_{\text{coh}} = \llbracket \iota_S^{-1} \mathcal{D}_X(\mathcal{F}^\bullet) \rrbracket_{\text{coh}} + d_X. \quad \blacksquare$$

3.1.3 Notations et remarques. On note $\underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{L})$ le complexe $i_{1*}^{\mathfrak{X}} \mathcal{L}$ où $\mathcal{L} \in \text{Loc}(S_0)$. On note $\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ l'image essentielle de $i_{1*}^{\mathfrak{X}}$ dans $D(\mathbf{X})$. Le théorème précédent prouve que si $\mathbf{Y} := \cup_i \mathbf{Y}_i$ est la réunion des composantes irréductibles de \mathbf{X} de dimension d_X , alors :

$$\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X}) \equiv \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{Y}) = \bigoplus_i \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{Y}_i).$$

Le théorème montre également l'intérêt d'introduire un décalage dans nos constructions. On notera $i_{1*}^{\mathfrak{X}}[d_X]$ le foncteur de prolongement intermédiaire suivi du décalage (vers la gauche) de longueur d_X ; l'image essentielle de $i_{1*}^{\mathfrak{X}}[d_X]$ sera alors notée $\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})[d_X]$. Le tableau ci-dessous illustre les conditions de support vérifiées par $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})[d_X]$.

$\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})[d_X]$	$-d_X-1$	$-d_X$	$-d_X+1$	$-d_X+2$	$-d_X+3$	$-d_X+4$	\dots
$\mathcal{H}^* \mathcal{D}_X(\mathcal{F}^\bullet) _{S_0}$ et $\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_0}$	0	●	0	0	0	0	0
$\mathcal{H}^* \mathcal{D}_X(\mathcal{F}^\bullet) _{S_1}$ et $\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_1}$	0	●	0	0	0	0	0
$\mathcal{H}^* \mathcal{D}_X(\mathcal{F}^\bullet) _{S_2}$ et $\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_2}$	0	■		0	0	0	0
$\mathcal{H}^* \mathcal{D}_X(\mathcal{F}^\bullet) _{S_3}$ et $\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_3}$	0	■			0	0	0
$\mathcal{H}^* \mathcal{D}_X(\mathcal{F}^\bullet) _{S_4}$ et $\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_4}$	0	■				0	0

3.1.4 Corollaire. Soit \mathbf{X} une variété algébrique complexe.

a) Pour $\mathfrak{X} \preccurlyeq \mathfrak{X}' \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$, notons $j : S'_0 \hookrightarrow S_0$ l'inclusion de la réunion des strates de dimension d_X de \mathfrak{X}' dans celle de \mathfrak{X} . On a $\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}_1}(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}_2}(\mathbf{X})$ et le diagramme de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} \text{Loc}(S_0) & \xrightarrow[\sim]{i_{1*}^{\mathfrak{X}}} & \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X}) \\ j^{-1} \downarrow & \bigoplus & \downarrow \subseteq \\ \text{Loc}(S'_0) & \xrightarrow[\sim]{i_{1*}^{\mathfrak{X}'}} & \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}'}(\mathbf{X}) \end{array}$$

est commutatif.

b) Pour toute $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$ la sous-catégorie $\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})[d_X]$ de $D_{\mathfrak{X}-c}^b(\mathbf{X})$ est abélienne et stable sous l'action du foncteur de dualité \mathcal{D}_X .

c) Pour $\mathfrak{X} \preccurlyeq \mathfrak{X}' \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$, l'inclusion $\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})[d_X] \subseteq \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}'}(\mathbf{X})[d_X]$ est un foncteur pleinement fidèle et exact de catégories abéliennes.

d) Pour chaque système local $\mathcal{L} \in \text{Loc}(S_0)$, on a un isomorphisme canonique :

$$\boxed{\mathcal{D}_X(\underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{L})[d_X]) \equiv \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{L}^\vee)[d_X]}$$

où \mathcal{L}^\vee désigne le système local $\mathcal{H}om(\mathcal{L}; \underline{\mathbb{Q}}_{S_0}) \in \text{Loc}(S_0)$.

Démonstration. (a) résulte de ce que les conditions (0), (S) et (S'), étant de conditions de support, elles sont *a fortiori* vérifiées par les strates d'un raffinement ⁽⁴¹⁾. La commutativité du diagramme est alors claire puisque $i_{!*}^{\mathfrak{X}}$ et $i_{!*}^{\mathfrak{X}'}$ sont des équivalences de catégories.

La catégorie $\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ est abélienne puisque équivalente à une catégorie abélienne et l'inclusion $\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}'}(\mathbf{X})$ est un foncteur exact puisqu'il correspond par l'équivalence de catégories au foncteur exact de restriction $j^{-1} : \text{Loc}(S_0) \rightsquigarrow \text{Loc}(S'_0)$.

La stabilité de $\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})[d_{\mathbf{X}}]$ par $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}$ est évidente d'après l'énoncé même du théorème 3.1.2, on a donc $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}(\underline{IC}_{\mathfrak{X}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{L})[d_{\mathbf{X}}]) \equiv \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{M})[d_{\mathbf{X}}]$ pour un certain $\mathcal{M} \in \text{Loc}(\mathbf{X})$ et alors

$$(\mathcal{D}_{S_0} \mathcal{L})[-d_{\mathbf{X}}] = \mathcal{D}_{S_0}(\mathcal{L}[d_{\mathbf{X}}]) \equiv \mathcal{D}_{\mathbf{X}}(\underline{IC}_{\mathfrak{X}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{L})[d_{\mathbf{X}}])|_{S_0} \equiv \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{M})[d_{\mathbf{X}}]|_{S_0} \equiv \mathcal{M}[d_{\mathbf{X}}].$$

Par conséquent, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{H}om(\mathcal{L}; \mathcal{D}_{S_0})[-2d_{\mathbf{X}}] \equiv \mathcal{H}om(\mathcal{L}; \underline{\mathbb{Q}}_{S_0}) = \mathcal{L}^{\vee}$ puisque S_0 est orientable car ouvert non singulier d'une variété algébrique complexe. ■

3.1.5 Il est important d'observer que d'après ce corollaire, lorsque \mathbf{X} est non singulière, le faisceau constant $\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbf{X}}$ est canoniquement isomorphe à chaque complexe $\underline{IC}_{\mathfrak{X}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \underline{\mathbb{Q}}|_{S_0})$, quelle que soit $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$. Plus généralement, si \mathcal{L} est un système local sur un ouvert de Zariski U de \mathbf{X} , il définit un système local sur la réunion des strates de dimension $d_{\mathbf{X}}$ de toute stratification $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$ telle que U est réunion de strates de \mathfrak{X} ⁽⁴²⁾. Le corollaire précédent montre que les complexes $\underline{IC}_{\mathfrak{X}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{L}_{S_0})$ ainsi obtenus sont deux-à-deux canoniquement isomorphes et définissent un objet de $D_c(\mathbf{X})$ *indépendant de la stratification*; on pourra donc effacer toute référence à la stratification et noter simplement $\underline{IC}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{L})$.

3.1.6 Définitions

1) La « *catégorie des complexes d'intersection sur \mathbf{X}* » est la sous-catégorie pleine de $D_c(\mathbf{X})$:

$$\boxed{\mathcal{J}\mathcal{C}(\mathbf{X}) := \varinjlim_{\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})} \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})}$$

2) Pour tout système local \mathcal{L} sur un ouvert de Zariski de \mathbf{X} , on appelle « *complexe d'intersection de \mathbf{X} à coefficients dans \mathcal{L}* » le complexe $\underline{IC}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{L})$ du paragraphe précédent.

⁴¹ Reprenons la discussion générale du bas de page ⁽⁴⁰⁾. Comme les conditions (0) et (S) concernent le nombre d_S qui ne peut que diminuer lors d'un raffinement, elles seront effectivement automatiquement vérifiées par les strates d'un raffinement. Par contre la condition (S') dépend du nombre $d_{S_k} - \dim_{\mathbb{R}}(S_k)$ et l'inclusion $\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}_1}(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}_2}(\mathbf{X})$ n'est assurée que lorsque :

$$\begin{cases} \text{a) } & -\frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{X}) < d_{T_k} - \dim_{\mathbb{R}}(T_k), \quad \text{pour tout } T_k \in \mathfrak{X}_2 \text{ et } T \subseteq S_0 \in \mathfrak{X}_1; \\ \text{b) } & d_{S_\ell} - \dim_{\mathbb{R}}(S_\ell) \leq d_{T_k} - \dim_{\mathbb{R}}(T_k), \quad \text{pour tout } T_k \in \mathfrak{X}_2 \text{ et } T_k \subseteq S_\ell \in \mathfrak{X}_1. \end{cases}$$

La condition (a) implique que la codimension réelle de T_1 doit être strictement plus grande que 1, c'est là l'origine de la restriction imposée aux structures de pseudovariété par Goresky-MacPherson (*cf.* bas de page ⁽¹⁸⁾). La condition (b) est, quand à elle, à l'origine des conditions de croissance imposées aux perversités générales, *i.e.* autres que la perversité moyenne. On peut dire de manière heuristique que l'indépendance de l'homologie d'intersection par rapport aux stratifications repose, pour l'essentiel, sur la validité des ces conditions.

⁴² De telles stratifications existent toujours d'après 1.9.5.

3) Pour \mathcal{L} comme dans (2), on appelle «*homologie d'intersection de \mathbf{X} à coefficients dans \mathcal{L}* », l'hypercohomologie de $\underline{IC}^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{L})$. On note :

$$IH^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{L}) := \mathbb{R}\Gamma(\mathbf{X}; \underline{IC}^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{L})) \quad \text{et} \quad IH_c^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{L}) := \mathbb{R}\Gamma_c(\mathbf{X}; \underline{IC}^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{L}))$$

3.1.7 Remarque. La catégorie $\mathcal{JC}(\mathbf{X})$ est une sous-catégorie strictement pleine (cf. ⁽⁴⁷⁾) de $D^b(\mathbf{X})$ et c'est une catégorie abélienne puisque limite d'un système inductif filtrant supérieurement de foncteurs pleinement fidèles et exacts entre catégories abéliennes (3.1.4-(c)).

3.1.8 Description intrinsèque des complexes d'intersection. Les objets de $\mathcal{JC}(\mathbf{X})$ admettent une description indépendante des choix de stratifications. La proposition suivante, laissée en exercice, donne une telle description.

Proposition. Soit \mathbf{X} une variété algébrique complexe. Un complexe $\mathcal{F}^\bullet \in D_c(\mathbf{X})$ appartient à $\mathcal{JC}(\mathbf{X})$ si et seulement si, il existe un ouvert non singulier $U \subseteq \mathbf{X}$ tel que :

- (0) $\mathcal{F}^\bullet|_U$ est cohomologiquement concentré en degré 0 et $\mathcal{H}^0 \mathcal{F}^\bullet|_U$ est un système local.
- (S) Pour chaque fermé de Zariski irréductible \mathbf{Z} tel que $\mathbf{Z} \cap U = \emptyset$, il existe $V \subseteq \mathbf{Z}$, ouvert et dense dans \mathbf{Z} , tel que

$$\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet[d_{\mathbf{X}}]|_V = \mathcal{H}^m \mathbb{D}_{\mathbf{X}}(\mathcal{F}^\bullet[d_{\mathbf{X}}])|_V = 0, \quad \text{pour tout } m \geq -d_{\mathbf{Z}}.$$

3.1.9 Généralisation de la dualité de Poincaré. L'assertion (b) du corollaire 3.1.4 donne un isomorphisme canonique : $IH_c^k(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \cong IH^{2d_{\mathbf{X}}-k}(\mathbf{X}; \mathcal{L}^\vee)$. Lorsque $\mathcal{L} = \underline{\mathbb{Q}}_{\mathbf{X}}$ cet isomorphisme généralise la dualité de Poincaré aux les variétés algébriques complexes, **même singulières!**

$$\boxed{IH_c^k(\mathbf{X}; \mathbb{Q}) \cong IH^{2d_{\mathbf{X}}-k}(\mathbf{X}; \mathbb{Q})}$$

3.1.10 A propos du $IH^0(\mathbf{X}; \mathcal{A})$. Soit \mathbf{X} est une variété algébrique complexe. Étant donnée $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$, notons \mathbf{S} la réunion des strates de dimension $d_{\mathbf{X}}$ de \mathfrak{X} . On vérifie aisément, par induction sur le nombre de strates par exemple, que

$$H^0(\mathbf{X}; \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{L})) = \mathbb{R}^0\Gamma(\mathbf{X}; \iota_{\mathfrak{X}}^* \mathcal{L}) = \Gamma(\mathbf{X}; \iota_* \mathcal{L}) = \Gamma(\mathbf{S}; \mathcal{L})$$

pour tout système local $\mathcal{L} \in \text{Loc}(\mathbf{S})$. En particulier, si r désigne le nombre des composantes irréductibles de \mathbf{X} de dimension égale à $d_{\mathbf{X}}$, on a un isomorphisme

$$\boxed{IH^0(\mathbf{X}; \underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{S}}) \cong \mathcal{A}^r}$$

pour tout anneau \mathcal{A} .

3.2 Homologie d'intersection du parapluie de Whitney

Le parapluie de Whitney est l'hypersurface \mathbf{X} de \mathbb{C}^3 d'équation $zy^2 = x^2$ (cf. p. 29). On vérifie aisément que l'application $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$, définie par $\pi(u, y) = (uy, y, u^2)$, se surjecte sur \mathbf{X} et que pour tout $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbf{X}$ la fibre $\pi^{-1}(\mathbf{x})$ est réduite à un point sauf si $y = 0$ et $x \neq 0$ auquel cas elle possède deux points. L'application $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbf{X}$ est donc une désingularisation propre et finie de \mathbf{X} ; en particulier $\pi_* = \pi_!$ est un foncteur exact et

$$\pi_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2]) \cong \mathbb{R}\pi_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2]) \quad \text{et} \quad \pi_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2])|_{\mathbf{X} \setminus \Sigma(\mathbf{X})} \cong \underline{\mathbb{Q}}_{\mathbf{X} \setminus \Sigma(\mathbf{X})}[2].$$

D'autre part, le complexe $R\pi_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2])$ est autodual dans $D^b(\mathbf{X})$ puisque :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{X}}R\pi_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2]) \equiv R\pi_!D_{\mathbb{C}^2}(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2]) \equiv R\pi_!(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2]) = R\pi_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2]).$$

et comme il est par ailleurs évident que $\mathcal{H}^m\pi_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2]) = 0$, pour tout $m > 0$, on a (3.1.2)

$$\boxed{IC^\bullet(\mathbf{X}; \mathbb{Q}) \equiv \pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} IH^\bullet(\mathbf{X}; \mathbb{Q}) = H^\bullet(\mathbb{C}^2; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[0] \\ IH_c^\bullet(\mathbf{X}; \mathbb{Q}) = H_c^\bullet(\mathbb{C}^2; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[-4] \end{cases}$$

3.2.1 Il faut se méfier de cet exemple qui est trompeur dans le fait que nous avons

$$\underline{IC}^\bullet(\mathbf{X}; \mathbb{Q}) = \pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2} = \iota_*\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbf{X} \setminus \Sigma(\mathbf{X})} = i_{!*}^{\mathfrak{X}_\Sigma}\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbf{X} \setminus \Sigma(\mathbf{X})}$$

alors que \mathfrak{X}_Σ ne vérifie pas les conditions de Whitney. En règle générale, $\underline{IC}^\bullet(\mathbf{X}; \mathbb{Q})$ doit être défini par des stratifications dans $\text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$.

§4. Faisceaux pervers sur une variété algébrique complexe

4.1 Complexes de Deligne-Goresky-MacPherson

4.1.1 Images directes des complexes d'intersection. Dans 3.1.5 nous avons défini le complexe $\underline{IC}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})$ pour tout fermé de Zariski $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}$ et tout système local \mathcal{L} sur un ouvert non singulier de \mathbf{Z} . Notons $\nu_{\mathbf{Z}} : \mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{X}$ l'inclusion. Comme $\nu_{\mathbf{Z}}$ est un plongement fermé le foncteur image directe commute à la dualité (1.6.6) et le complexe $\nu_{\mathbf{Z}*}\underline{IC}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})[d_{\mathbf{Z}}] \in D_c(\mathbf{X})$ vérifie des conditions identiques à celles qui caractérisent les objets de $\mathcal{JC}(\mathbf{X})$ (cf. 3.1.2) à l'exception des strates de dimension supérieure ou égale à $d_{\mathbf{Z}}$. Le tableau suivant illustre les contributions des faisceaux dérivés de $\nu_{\mathbf{Z}*}\underline{IC}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})[d_{\mathbf{Z}}]$ sur les strates d'un raffinement $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$ d'une stratification $\mathfrak{Z} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{Z})$ telle que $\underline{IC}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L}) = \underline{IC}_{\mathfrak{Z}}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})$.

$\nu_{\mathbf{Z}*}\underline{IC}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})[d_{\mathbf{Z}}]$	$-d_{\mathbf{X}} \quad -d_{\mathbf{X}}+1$	$-d_{\mathbf{Z}} \quad -d_{\mathbf{Z}}+1 \quad -d_{\mathbf{Z}}+2 \quad \dots$
$\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_0}$	0	0
$\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_1}$	0	0
$\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_{d_{\mathbf{X}}-d_{\mathbf{Z}}}}$	0	0
$\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_{d_{\mathbf{X}}-d_{\mathbf{Z}}+1}}$	0	0
$\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_{d_{\mathbf{X}}-d_{\mathbf{Z}}+2}}$	0	0
$\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_{d_{\mathbf{X}}-d_{\mathbf{Z}}+3}}$	0	0

(\mathcal{F}^\bullet désigne à la fois $\nu_{\mathbf{Z}*}\underline{IC}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})[d_{\mathbf{Z}}]$ et son dual dans $D_c(\mathbf{X})$.)

On peut dire de manière heuristique que l'image directe décalée d'un complexe d'intersection d'un fermé de Zariski \mathbf{Z} de \mathbf{X} comble le zéro correspondant à la dimension de \mathbf{Z} de la diagonale du tableau .

4.1.2 Complexes de Deligne-Goresky-MacPherson. Un complexe $\mathcal{F}^\bullet \in D_c(\mathbf{X})$ est dit «*de Deligne-Goresky-MacPherson de \mathbf{X} relatif à \mathfrak{X}* », et l'on note $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ s'il est quasi-isomorphe à un complexe de la forme $\iota_{Z*} \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})[d_Z]$, où \mathbf{Z} est un fermé irréductible de \mathbf{X} réunion de strates de \mathfrak{X} , et où \mathcal{L} est un système local **irréductible** sur un ouvert non singulier de \mathbf{Z} . Lorsque $\mathfrak{X} \preceq \mathfrak{X}'$, tout objet de $\mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ appartient aussi à $\mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}'}(\mathbf{X})$ puisque la restriction d'un système local irréductible d'un ouvert non singulier d'une variété algébrique complexe à un sous-ouvert reste irréductible! (1.11.9).

4.2 Faisceaux \mathfrak{X} -pervers⁽⁴³⁾

4.2.1 Définition. Soient \mathbf{X} une variété algébrique complexe et $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$. Un complexe de faisceaux \mathcal{F}^\bullet de $D_{\mathfrak{X},c}^b(\mathbf{X})$ est dit « *\mathfrak{X} -pervers*» lorsque pour chaque strate $S \in \mathfrak{X}$ on a :

$$(S) \quad \mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet[d_X]|_S = 0, \text{ pour tout } m > -d_S;$$

$$(S') \quad \mathcal{H}^m \mathbb{D}_X(\mathcal{F}^\bullet[d_X])|_S = 0, \text{ pour tout } m > -d_S.$$

La sous-catégorie pleine de $D_{\mathfrak{X},c}^b(\mathbf{X})$ des faisceaux \mathfrak{X} -pervers est notée $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$.

4.2.2 La définition précédente est à comparer avec la caractérisation des objets de $\mathcal{JC}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ du théorème 3.1.2 où les inégalités dans les conditions (S) (S') apparaissaient au sens large. En particulier, si $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}$ est un fermé réunion de strates de \mathfrak{X} , on a

$$\iota_{Z*} \mathcal{JC}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{Z})[d_Y] \subseteq \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$$

4.2.3 Supports et amplitude cohomologique des faisceaux \mathfrak{X} -pervers. Le tableau ci-dessous illustre les conditions de support qui caractérisent les objets de $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$. Le fait qu'un faisceau \mathfrak{X} -pervers n'ait pas de cohomologie en degrés inférieurs à $-d_X$ est prouvé dans 4.2.5.

$\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$	$-d_X-1$	$-d_X$	$-d_X+1$	$-d_X+2$	$-d_X+3$	$-d_X+4$	\dots
$\mathcal{H}^* \mathbb{D}_X(\mathcal{F}^\bullet) _{S_0}$ et $\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_0}$	0	●	0	0	0	0	0
$\mathcal{H}^* \mathbb{D}_X(\mathcal{F}^\bullet) _{S_1}$ et $\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_1}$	0	■	■	0	0	0	0
$\mathcal{H}^* \mathbb{D}_X(\mathcal{F}^\bullet) _{S_2}$ et $\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_2}$	0	■	■	■	0	0	0
$\mathcal{H}^* \mathbb{D}_X(\mathcal{F}^\bullet) _{S_3}$ et $\mathcal{H}^* \mathcal{F}^\bullet _{S_3}$	0	■	■	■	■	0	0

4.2.4 Notations. Pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$, le support cohomologique $|\mathcal{F}^\bullet|$ (1.4.10) est une réunion de strates de \mathfrak{X} . On notera $d_{|\mathcal{F}^\bullet|}$ (resp. $\varepsilon_{|\mathcal{F}^\bullet|}$) la plus grande (resp. petite) des dimensions des strates de \mathfrak{X} contenues dans $|\mathcal{F}^\bullet|$.

4.2.5 Proposition. Pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ on a :

$$[\mathcal{F}^\bullet]_{\text{coh}} \subseteq [-d_{|\mathcal{F}^\bullet|}, -\varepsilon_{|\mathcal{F}^\bullet|}]$$

⁴³ Cf. [BBD] §2.1 p. 56.

Démonstration. Par induction sur $\#\mathfrak{X}$. Lorsque $\#\mathfrak{X} = 1$, \mathbf{X} est non singulier et $[\mathcal{F}^\bullet]_{\text{coh}} \subseteq [-d_{\mathbf{X}}]$ d'après 1.11.4, et il est par ailleurs clair que $|\mathcal{F}^\bullet| = \mathbf{X}$ si et seulement si $\mathcal{F}^\bullet \neq \mathbf{0}$ dans $D(\mathbf{X})$. Dans le cas général, on note \mathbf{Y} l'adhérence de $|\mathcal{F}^\bullet|$ dans \mathbf{X} qui est clairement une réunion de strates de \mathfrak{X} . Soit $\iota : \mathbf{Y} \hookrightarrow \mathbf{X}$ l'inclusion ; le morphisme d'adjonction $\mathcal{F}^\bullet \rightarrow \iota_* \iota^{-1} \mathcal{F}^\bullet$ est un quasi-isomorphisme et donc $\mathbb{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}^\bullet \equiv \iota_* \mathbb{D}_{\mathbf{Y}} \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{Y}}$ (1.6.6). Par conséquent $\mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{Y}} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{Y})$ et \mathcal{F}^\bullet vérifie la proposition lorsque $\mathbf{Y} \neq \mathbf{X}$, par hypothèse inductive.

Supposons maintenant $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ et $\#\mathfrak{X} > 1$. On sait, par définition de faisceau pervers, que $[\mathcal{F}^\bullet]_{\text{coh}} \subseteq [-\infty, \varepsilon_{\mathbf{X}}]$; nous avons donc à vérifier uniquement que $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet = 0$ pour $m < d_{\mathbf{X}}$. Soit $\mathbf{S} \in \mathfrak{X}$ une strate de dimension minimum donc fermée dans \mathbf{X} d'ouvert complémentaire U . Comme $\mathbb{D}_U(\mathcal{F}^\bullet|_U) = (\mathbb{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}^\bullet)|_U$ (1.6.6) et que U est réunion de strates de \mathfrak{X} , on a $\mathcal{F}^\bullet|_U \in \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(U)$ et donc $[\mathcal{F}^\bullet|_U]_{\text{coh}} \subseteq [-d_{\mathbf{X}}, -d_{\mathbf{S}}]$ (\diamond) par hypothèse inductive. Le triangle exact fondamental :

$$\iota_{\mathbf{S}*} \iota_{\mathbf{S}}^! \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow R\iota_{U*} \mathcal{F}^\bullet|_U \xrightarrow{[+1]}$$

donne, par dualité :

$$\iota_U^! \mathbb{D}_U(\mathcal{F}^\bullet|_U) \longrightarrow \mathbb{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \iota_{\mathbf{S}*} \mathbb{D}_{\mathbf{S}} \iota_{\mathbf{S}}^! \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{[+1]}$$

et $[\iota_U^! \mathbb{D}_U(\mathcal{F}^\bullet|_U)]_{\text{coh}} \subseteq [-d_{\mathbf{X}}, -d_{\mathbf{S}}]$ par exactitude de $\iota_U^!$. On en déduit une surjection

$$\mathcal{H}^m \mathbb{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \iota_{\mathbf{S}*} \mathcal{H}^m \mathbb{D}_{\mathbf{S}} \iota_{\mathbf{S}}^! \mathcal{F}^\bullet, \text{ pour tout } m \geq -d_{\mathbf{S}},$$

et $[\mathbb{D}_{\mathbf{S}} \iota_{\mathbf{S}}^! \mathcal{F}^\bullet]_{\text{coh}} \subseteq [-\infty, -d_{\mathbf{S}}]$, puisque \mathcal{F}^\bullet vérifie la condition de cosupport. Par conséquent $[\iota_{\mathbf{S}}^! \mathcal{F}^\bullet]_{\text{coh}} \subseteq [-d_{\mathbf{S}}, \infty[$ (1.11.4). Or, le morphisme naturel $\mathcal{H}^m \iota_{\mathbf{S}}^! \tau_{< -d_{\mathbf{X}}} \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{H}^m \iota_{\mathbf{S}}^! \mathcal{F}^\bullet$ est un isomorphisme pour tout $m < -d_{\mathbf{X}}$ puisque $\iota_{\mathbf{S}}^! = \mathbb{R}\Gamma_{\mathbf{S}}$ et que $\Gamma_{\mathbf{S}}$ est exact à gauche, de sorte que $\mathcal{H}^m \iota_{\mathbf{S}}^! \tau_{< -d_{\mathbf{X}}} \mathcal{F}^\bullet = 0$, pour $m < -d_{\mathbf{X}}$. D'autre part, le morphisme canonique $\iota_{\mathbf{S}}^! \tau_{< -d_{\mathbf{X}}} \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \iota_{\mathbf{S}}^{-1} \tau_{< -d_{\mathbf{X}}} \mathcal{F}^\bullet$ est un isomorphisme puisque $|\tau_{< -d_{\mathbf{X}}} \mathcal{F}^\bullet| \subseteq \mathbf{S}$, d'après (\diamond). Par conséquent, $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{S}} = \mathcal{H}^m \iota_{\mathbf{S}}^! \tau_{< -d_{\mathbf{X}}} \mathcal{F}^\bullet = 0$, pour tout $m < -d_{\mathbf{X}}$. ■

4.2.6 Remarque. On prendra garde du fait que si le support d'un faisceau \mathfrak{X} -pervers est toujours une réunion de strates, il n'est pas nécessairement localement fermé (cf. 4.2.8).

4.2.7 Restrictions et prolongements de faisceaux \mathfrak{X} -pervers

Proposition. Soit \mathbf{Z} une partie localement fermée dans \mathbf{X} réunion de strates de $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$.

- Si \mathbf{Z} est fermé $\iota_{\mathbf{Z}*}(\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{Z})) \subseteq \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$.
- Si \mathbf{Z} est ouvert $\iota_{\mathbf{Z}}^{-1}(\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})) \subseteq \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{Z})$.
- Soit $\mathbf{Z} = \coprod_i S_i$ une réunion de strates S_i ouvertes dans \mathbf{X} . Alors, pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$, on a $\iota^{-1} \mathcal{F}^\bullet \equiv \bigoplus_i \mathcal{L}_i[d_{S_i}]$, où \mathcal{L}_i est un système local sur S_i .
- Lorsque $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ vérifie $|\mathcal{F}^\bullet| \subseteq \mathbf{Z}$, on a $\iota_{\mathbf{Z}}^{-1} \mathcal{F}^\bullet = \iota_{\mathbf{Z}}^! \mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{Z})$.
- Soit \mathbf{Z} un ouvert affine et non singulier de \mathbf{X} . On a :

$$R\iota_{\mathbf{Z}*}^{\mathbf{X}}(\text{Loc}(\mathbf{Z})[d_{\mathbf{Z}}]) \subseteq \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X}) \quad \text{et} \quad \iota_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{X}}(\text{Loc}(\mathbf{Z})[d_{\mathbf{Z}}]) \subseteq \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X}).$$

Démonstration

- Résulte de la commutation du foncteur $\iota_{\mathbf{Z}*}$ (resp. $\iota_{\mathbf{Z}}^{-1}$) avec la dualité de Grothendieck-Verdier (1.6.6) pour \mathbf{Z} fermée (resp. ouverte).
- Conséquence de (b) et 4.2.5.

- d) Lorsque $|\mathcal{F}^\bullet| \subseteq \mathbf{Z}$, on prouve facilement que le morphisme canonique $\iota_T^! \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \iota_T^{-1} \mathcal{F}^\bullet$ est un isomorphisme pour tout $T \supseteq \mathbf{Z}$ ouvert ou fermé dans \mathbf{X} , en donc pour T localement fermé. Le reste est immédiat.
- e) Il suffit de prouver l'énoncé concernant $\mathbb{R}\iota_{\mathbf{Z}*}$ puisque $\iota_{\mathbf{Z}!} = \mathbb{D}_{\mathbf{X}} \mathbb{R}\iota_{\mathbf{Z}*} \mathbb{D}_{\mathbf{Z}}$ (1.6.6).

Soit $\mathcal{L} \in \text{Loc}(\mathbf{Z})$ et notons $\mathcal{F}^\bullet := \mathbb{R}\iota_{\mathbf{Z}*} \mathcal{L}[d_{\mathbf{Z}}]$. La condition de cosupport sur \mathcal{F}^\bullet est la condition de support pour le prolongement par zéro $\iota_{\mathbf{Z}!} \mathcal{L}[d_{\mathbf{Z}}]$ qui est immédiate. La condition de support sur \mathcal{F}^\bullet dit que pour toute strate $S \in \mathfrak{X}$ on doit avoir $[\mathcal{F}^\bullet|_S]_{\text{coh}} \subseteq [-d_{\mathbf{X}}, -d_S]$ ce qui est clair lorsque $S \cap \overline{\mathbf{Z}} = \emptyset$ car alors $\mathcal{F}^\bullet|_S = 0$, ou bien lorsque $S \subseteq \mathbf{Z}$ car alors $[\mathcal{F}^\bullet|_S]_{\text{coh}} \subseteq [-d_{\mathbf{X}}]$.

Lorsque $S \subseteq \overline{\mathbf{Z}} \setminus \mathbf{Z}$ la structure de pseudovariété définie par \mathfrak{X} donne pour chaque $t \in S$, un voisinage V_t ouvert dans $\overline{\mathbf{Z}}$ homéomorphe à $\mathbb{C}^{d_S} \times N(t)$ où $N(t)$ est un espace analytique complexe de dimension $d_{\mathbf{Z}} - d_S$ (cf. [BoAl] A'Campo). L'intersection $V_t \cap \mathbf{Z}$ est alors homéomorphe à $\mathbb{C}^{d_S} \times N'(t)$, où $N'(t)$ est une sous-variété analytique (non singulière) de $N(t)$ de dimension $d_{\mathbf{Z}} - d_S$ admettant des plongements fermés dans \mathbb{C}^m (pour m assez grand) puisque \mathbf{Z} est supposée affine. En appliquant le théorème de Lefschetz :

⁽⁴⁾ Une variété analytique complexe de dimension k admettant un plongement fermé analytique dans un \mathbb{C}^m possède le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension k .

on conclut que $N'(t)$ est homotope à un espace de dimension cohomologique $d_{\mathbf{Z}} - d_S$. Alors :

$$H^m(V_t, \mathcal{F}^\bullet) \simeq H^m(V_t \cap \mathbf{Z}, \mathcal{L}[d_{\mathbf{Z}}]) \simeq H^m(\mathbb{C}^{d_S} \times N'(t), \mathcal{L}[d_{\mathbf{Z}}]) \simeq H^m(N'(t), \mathcal{L}[d_{\mathbf{Z}}]|_{N'(t)}) = 0$$

pour tout $m > -d_S$, autrement dit $[\mathcal{F}^\bullet|_S]_{\text{coh}} \subseteq [-d_{\mathbf{Z}}, -d_S]$. \blacksquare

4.2.8 Remarque. Pour $\mathbf{X} := \mathbb{C}^2$, soient $\mathbf{X}_1 = (y = 0)$ et $\mathbf{X}_0 = \{0\}$, puis $\mathbf{S}_0 := \mathbf{X} \setminus \mathbf{X}_1$, $\mathbf{S}_1 := \mathbf{X}_1 \setminus \mathbf{X}_0$ et $\mathbf{S}_2 := \mathbf{X}_0$. La stratification $\mathfrak{X} := \{\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2\}$ est de Whitney et les strates sont affines. Le complexe de faisceaux $\mathcal{F}^\bullet := \iota_{\mathbf{S}_0!} \mathbb{Q}_{\mathbf{S}_0}[2] \oplus \iota_{\mathbf{S}_2*} \mathbb{Q}$ est \mathfrak{X} -pervers puisque chaque facteur l'est d'après la proposition précédente. Le support $|\mathcal{F}^\bullet| = \mathbf{S}_0 \amalg \mathbf{S}_2$ n'est pas localement fermé.

4.2.9 Complexes d'intersection et faisceaux \mathfrak{X} -pervers. La proposition suivante sera utilisée pour prouver que les complexes de $\mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ sont des faisceaux pervers **simples**.

Proposition. Soient $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$ et $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}$ un fermé réunion de strates de \mathfrak{X} . Notons $\mathbf{S}_{\mathbf{Z},0}$ la réunion des strates de \mathfrak{X} de dimension $d_{\mathbf{Z}}$ contenues dans \mathbf{Z} . Alors, pour tout $\mathcal{L} \in \text{Loc}(\mathbf{S}_{\mathbf{Z},0})$ et pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$, les morphismes canoniques :

$$\begin{cases} \text{Mor}_{D(\mathbf{X})}(\mathcal{F}^\bullet, \iota_{\mathbf{Z}*} \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})[d_{\mathbf{Z}}]) \longrightarrow \text{Mor}_{D(\mathbf{S}_{\mathbf{Z},0})}(\iota_{\mathbf{S}_{\mathbf{Z},0}}^{-1} \mathcal{F}^\bullet, \mathcal{L}[d_{\mathbf{Z}}]) \\ \text{Mor}_{D(\mathbf{X})}(\iota_{\mathbf{Z}*} \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})[d_{\mathbf{Z}}], \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \text{Mor}_{D(\mathbf{S}_{\mathbf{Z},0})}(\mathcal{L}[d_{\mathbf{Z}}], \iota_{\mathbf{S}_{\mathbf{Z},0}}^! \mathcal{F}^\bullet) \end{cases} \quad (*)$$

sont injectifs.

En particulier, si $\overline{|\mathcal{F}^\bullet|} \cap \mathbf{Z}$ est de codimension positive dans \mathbf{Z} ,

$$\text{Mor}_{D(\mathbf{X})}(\mathcal{F}^\bullet, \iota_{\mathbf{Z}*} \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})[d_{\mathbf{Z}}]) = \mathbf{0} = \text{Mor}_{D(\mathbf{X})}(\iota_{\mathbf{Z}*} \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})[d_{\mathbf{Z}}], \mathcal{F}^\bullet).$$

⁴⁴ Cf. [Mi] §7 théorème 7.2.

Démonstration. Il suffit de vérifier l'injectivité de la première ligne de $(*)$, l'autre s'en déduira alors par dualité. Notons pour simplifier $\mathcal{G}^\bullet := \iota_{Z^*} \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})[d_Z]$, puis $Z' := Z \setminus S_{Z,0}$. Soit F une strate fermée de Z' , donc de X , notons $U := X \setminus F$, et considérons le triangle exact :

$$\iota_{F^*} \iota_F^! \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow R\iota_{U^*} \mathcal{G}^\bullet|_U \xrightarrow{[+1]} \cdot \quad (\diamond)$$

On a

$$\mathrm{Mor}_{D(X)}(\mathcal{F}^\bullet, \iota_{F^*} \iota_F^! \mathcal{G}^\bullet) \equiv \mathrm{Mor}_{D(F)}(\mathcal{F}^\bullet|_F, \iota_F^! \mathcal{G}^\bullet) \equiv \mathrm{Mor}_{D(F)}(\mathcal{F}^\bullet|_F, \mathbb{D}_F \iota_F^{-1} \mathbb{D}_X \mathcal{G}^\bullet). \quad (\ddagger)$$

Or, d'après 3.1.4-(b)

$$\mathbb{D}_X \mathcal{G}^\bullet \equiv \iota_{Z^*} \mathbb{D}_Z(\underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})[d_Z]) \equiv \iota_{Z^*} \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L}^\vee)[d_Z]$$

et alors $[[\iota_F^{-1} \mathbb{D}_X \mathcal{G}^\bullet]]_{\mathrm{coh}} \subseteq [[-\infty, -d_F - 1]]$. Donc $[[\iota_F^! \mathcal{G}^\bullet]]_{\mathrm{coh}} \subseteq [[-d_F + 1, +\infty[[$ (1.11.4), et comme d'autre part $[[\mathcal{F}^\bullet|_F]]_{\mathrm{coh}} \subseteq [[-\infty, -d_F]]$, on conclut que $\mathrm{Mor}_{D(F)}(\mathcal{F}^\bullet|_F, \iota_F^! \mathcal{G}^\bullet) = \mathbf{0}$ dans (\ddagger) et alors la suite exacte longue des $\mathrm{Mor}_{D(X)}(\mathcal{F}^\bullet, -)$ associée au triangle (\diamond) s'annule en $\iota_{F^*} \iota_F^! \mathcal{G}^\bullet$, d'où une injection :

$$\mathrm{Mor}_{D(X)}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \hookrightarrow \mathrm{Mor}_{D(X)}(\mathcal{F}^\bullet, R\iota_{U^*} \mathcal{G}^\bullet|_U) \equiv \mathrm{Mor}_{D(U)}(\mathcal{F}^\bullet|_U, \mathcal{G}^\bullet|_U)$$

L'itération de cette idée donne l'injection :

$$\mathrm{Mor}_{D(X)}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \hookrightarrow \mathrm{Mor}_{D(X \setminus Z')}(\mathcal{F}^\bullet|_{X \setminus Z'}, \mathcal{G}^\bullet|_{X \setminus Z'})$$

dont on déduit aussitôt la proposition. ■

4.2.10 Théorème de structure de la catégorie des faisceaux \mathfrak{X} -pervers.

Théorème [BBD]. Soit X une variété algébrique complexe. Pour toute stratification $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}^W(X)$, la sous-catégorie pleine $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(X) \subseteq D_{\mathfrak{X},c}^b(X)$ est abélienne admissible, stable par extensions et par dualité de Grothendieck-Verdier dans $D^b(X)$.

Rappelons la terminologie utilisée dans cet énoncé :

- **Stable par extensions dans $D(X)$.** Ceci signifie que pour tout triangle exact de $D(X)$: $\mathcal{E}^\bullet \rightarrow \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{G}^\bullet \rightarrow$ avec \mathcal{E}^\bullet et \mathcal{G}^\bullet dans $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(X)$, le complexe \mathcal{F}^\bullet appartient aussi à $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(X)$.
- **Sous-catégorie abélienne admissible de $D(X)$.**⁽⁴⁵⁾ Ceci signifie que $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(X)$ est abélienne et que une suite $0 \rightarrow \mathcal{E}^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\beta} \mathcal{G}^\bullet \rightarrow 0$ avec $\beta \circ \alpha = 0$, est exacte dans $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(X)$ si et seulement si, il existe $\gamma \in \mathrm{Mor}_{D(X)}(\mathcal{G}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet[1])$ telle que

$$\mathcal{E}^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\beta} \mathcal{G}^\bullet \xrightarrow{[\gamma]_{[+1]}}$$

est un triangle exact de $D(X)$. Autrement dit, les suites exactes courtes de $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(X)$ proviennent des triangles exacts de $D(X)$ à sommets dans $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(X)$ en effaçant le morphisme de degré $+1$.

Démonstration. Nous allons nous limiter à rappeler les étapes de la démonstration.

- 1) LES t -STRUCTURES. On appelle ainsi ⁽⁴⁶⁾ la donnée d'une catégorie triangulée \mathcal{D} munie de deux sous-catégories strictement pleines⁽⁴⁷⁾ $\mathcal{D}^{\leq 0}$ et $\mathcal{D}^{\geq 0}$, telles que, posant $\mathcal{D}^{\leq n} := \mathcal{D}^{\leq 0}[-n]$ et

⁴⁵ [BBD] §1.2.5 p. 28.

⁴⁶ [BBD] §1.3 p. 29.

⁴⁷ Une sous-catégorie \mathcal{C}' d'une catégorie \mathcal{C} est dite « *strictement pleine* » lorsqu'elle est pleine et que tout objet de \mathcal{C} isomorphe à un objet de \mathcal{C}' est un objet de \mathcal{C}' .

$\mathcal{D}^{\geq n} := \mathcal{D}^{\geq 0}[-n]$, on ait :

$$\begin{cases} \text{a) } \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 1}) = 0. \\ \text{b) } \mathcal{D}^{\leq 0} \subseteq \mathcal{D}^{\leq 1} \text{ et } \mathcal{D}^{\geq 0} \supseteq \mathcal{D}^{\geq 1}. \\ \text{c) } \text{Pour tout } X \in \mathcal{D} \text{ il existe un triangle exact } (A, X, B) \\ \text{avec } A \in \mathcal{D}^{\leq 0} \text{ et } B \in \mathcal{D}^{\geq 1}. \end{cases}$$

On note $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ la t -structure. On appelle «*cœur de la t -structure*» la sous-catégorie pleine $\mathcal{C} = \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$.

Théorème (loc.cit. 1.3.6 p. 31). Le cœur \mathcal{C} d'une t -structure $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ est une sous-catégorie abélienne admissible stable par extensions dans \mathcal{D} .

- 2) RECOLLEMENT DE t -STRUCTURES. Soit U un ouvert de \mathbf{X} réunion de strates de \mathfrak{X} et notons F le fermé complémentaire. Soient $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},U}^{\leq 0}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},U}^{\geq 0})$ et $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},F}^{\leq 0}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},F}^{\geq 0})$ des t -structures sur $D_{\mathfrak{X}-c}^b(U)$ et $D_{\mathfrak{X}-c}^b(F)$ respectivement. Posons :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{\mathfrak{X},X}^{\leq 0} := \{ \mathcal{F}^\bullet \in D(X) \mid i_U^{-1} \mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}_U^{\leq 0} \text{ et } i_F^{-1} \mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}_F^{\leq 0} \} \\ \mathcal{D}_{\mathfrak{X},X}^{\geq 0} := \{ \mathcal{F}^\bullet \in D(X) \mid i_U^! \mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}_U^{\geq 0} \text{ et } i_F^! \mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}_F^{\geq 0} \} \end{cases}$$

Le couple $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},X}^{\leq 0}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},X}^{\geq 0})$ est appelé «*le recollement de $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},U}^{\leq 0}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},U}^{\geq 0})$ et $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},F}^{\leq 0}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},F}^{\geq 0})$* ».

Théorème (loc.cit. 1.4.10 p. 48). Avec les données ci-dessus, le recollement $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},X}^{\leq 0}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},X}^{\geq 0})$ est une t -structure sur $D_{\mathfrak{X}-c}^b(X)$.

- 3) PREUVE DU THÉORÈME. Pour toute partie S localement fermée dans \mathbf{X} réunion de strates de \mathfrak{X} , on pose :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{\mathfrak{X},S}^{\leq 0} := \{ \mathcal{F}^\bullet \in D_{\mathfrak{X}-c}^b(S) \mid \mathcal{H}^m \mathcal{F}|_T = 0, \text{ pour tout } m > -d_T \text{ et tout } T \in \mathfrak{X}|_S \} \\ \mathcal{D}_{\mathfrak{X},S}^{\geq 0} := \{ \mathcal{F}^\bullet \in D_{\mathfrak{X}-c}^b(S) \mid \mathcal{H}^m(\mathcal{D}_S \mathcal{F})|_T = 0, \text{ pour tout } m > -d_T \text{ et tout } T \in \mathfrak{X}|_S \} \end{cases}$$

On a donc $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(S) = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},S}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_{\mathfrak{X},S}^{\geq 0} =: \mathcal{C}_{\mathfrak{X},S}$.

Théorème (loc.cit. 2.1.3 p. 57). Le couple $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},S}^{\leq 0}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},S}^{\geq 0})$ est une t -structure sur $D_{\mathfrak{X}-c}^b(S)$.

Démonstration. Par récurrence sur le nombre de strates de $\mathfrak{X}|_S$. Lorsque $\#\mathfrak{X}|_S = 1$, la catégorie $D_{\mathfrak{X}-c}^b(S)$ est la catégorie des complexes de $\Pi_1(S)$ - \mathbb{Q} -modules cohomologiquement bornés et à cohomologie de dimension finie. La sous-catégorie $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},S}^{\leq 0}$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},S}^{\geq 0}$) est celle des complexes \mathcal{M}^\bullet vérifiant $[\mathcal{M}^\bullet]_{\text{coh}} \subseteq [-\infty, -d_S]$ (resp. $[\mathcal{M}^\bullet]_{\text{coh}} \subseteq [-d_S, \infty[$). La vérification des axiomes d'une t -structure de (1) est élémentaire.⁽⁴⁸⁾

Dans le cas général $\#\mathfrak{X}|_S > 1$, on choisit une strate fermée F d'ouvert complémentaire U . Les couples $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},U}^{\leq 0}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},U}^{\geq 0})$ et $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},F}^{\leq 0}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},F}^{\geq 0})$ sont alors des t -structures sur $D_{\mathfrak{X}-c}^b(U)$ et $D_{\mathfrak{X}-c}^b(F)$ respectivement, par hypothèse inductive. On a d'autre part les équivalences :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}-c}^{\leq 0}(X) &\iff i_U^{-1} \mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}-c}^{\leq 0}(U) \text{ et } i_F^{-1} \mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}-c}^{\leq 0}(F) \\ \mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}-c}^{\geq 0}(X) &\iff i_U^! \mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}-c}^{\geq 0}(U) \text{ et } i_F^! \mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}-c}^{\geq 0}(F) \end{aligned}$$

⁴⁸Le cœur de cette t -structure est la sous-catégorie des complexes concentrés en degré $-d_S$. Le foncteur $H^{-d_S} : \mathcal{C}_{\mathfrak{X},S} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Q}}(\Pi(S))$ est une équivalence de catégories.

où la première ligne est évidente et la seconde résulte des égalités :

$$\begin{cases} (\mathbb{D}_X \mathcal{F}^\bullet)|_T = (\iota_U^{-1} \mathbb{D}_X \mathcal{F}^\bullet)|_T = (\mathbb{D}_U \iota_U^! \mathcal{F}^\bullet)|_T, & \text{si } T \subseteq U, \\ (\mathbb{D}_X \mathcal{F}^\bullet)|_T = (\iota_F^{-1} \mathbb{D}_X \mathcal{F}^\bullet)|_T = (\mathbb{D}_F \iota_F^! \mathcal{F}^\bullet)|_T, & \text{si } T \subseteq F. \end{cases}$$

Il s'ensuit que le couple $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathcal{S}}^{\leq 0}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathcal{S}}^{\geq 0})$ est une t -structure d'après le théorème de (2).

En particulier, si $\mathcal{S} = \mathbf{X}$ la catégorie $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ est une sous-catégorie abélienne admissible stable par extensions dans $D_{\mathfrak{X}-c}^b(\mathbf{X})$ d'après le théorème de (1). ■

4.2.11 Simplicité des complexes de $\mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ dans $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$

Proposition. Soient \mathbf{X} une variété algébrique complexe et $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^W(\mathbf{X})$.

- a) Pour toute suite exacte de $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X}) : 0 \rightarrow \mathcal{E}^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\beta} \mathcal{G}^\bullet \rightarrow 0$, on a $|\overline{\mathcal{F}^\bullet}| = |\overline{\mathcal{E}^\bullet}| \cup |\overline{\mathcal{G}^\bullet}|$.
b) Un complexe de $\mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ est un objet simple de $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$.

Démonstration

- a) Par admissibilité de la catégorie $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$, il existe $\gamma \in \text{Mor}_{D(\mathbf{X})}(\mathcal{G}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet[1])$ tel que

$$\mathcal{E}^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\beta} \mathcal{G}^\bullet \xrightarrow{[\gamma]_{+1}} \mathcal{E}^\bullet \quad (\ddagger)$$

est un triangle exact. Notons U l'ouvert complémentaire de $|\overline{\mathcal{F}^\bullet}|$. Par restriction à U le triangle (\ddagger) donne un isomorphisme $\gamma|_U : \mathcal{G}^\bullet|_U \simeq \mathcal{F}^\bullet[1]|_U$ dans $D(U)$ et $\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet \in \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(U)$ (4.2.7). Or, $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(U)$ est le cœur d'une t -structure et donc $\gamma = 0$ par l'axiome (a) des t -structures (cf. dem. p. 45). Par conséquent $\mathcal{E}^\bullet|_U = \mathcal{G}^\bullet|_U = 0$ et donc $|\overline{\mathcal{F}^\bullet}| \supseteq |\overline{\mathcal{E}^\bullet}| \cup |\overline{\mathcal{G}^\bullet}|$. La même idée appliquée à l'ouvert complémentaire de $|\overline{\mathcal{E}^\bullet}|$ donne l'inclusion réciproque.

- b) Soit $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$. D'après (a) les complexes d'une suite exacte de faisceaux pervers

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\beta} \mathcal{G}^\bullet \rightarrow 0$$

sont à cohomologie à support dans $\mathbf{Z} := |\overline{\mathcal{F}^\bullet}|$, et la suite $0 \rightarrow \mathcal{E}^\bullet|_{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\alpha|_{\mathbf{Z}}} \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\beta|_{\mathbf{Z}}} \mathcal{G}^\bullet|_{\mathbf{Z}} \rightarrow 0$ (*) est une suite exacte de $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{Z})$ par admissibilité et d'après 4.2.7-(d). D'autre part, on a $\mathcal{F}^\bullet = \iota_{\mathbf{Z}*} \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})[d_{\mathbf{Z}}]$ et (*) s'écrit aussi :

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^\bullet|_{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\alpha|_{\mathbf{Z}}} \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})[d_{\mathbf{Z}}] \xrightarrow{\beta|_{\mathbf{Z}}} \mathcal{G}^\bullet|_{\mathbf{Z}} \rightarrow 0$$

Notons \mathcal{S} la strate de dimension $d_{\mathbf{X}}$. Comme \mathcal{S} est ouverte dans \mathbf{Z} la restriction à \mathcal{S} donne une suite exacte de systèmes locaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^\bullet|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\alpha|_{\mathcal{S}}} \mathcal{L}[d_{\mathbf{Z}}] \xrightarrow{\beta|_{\mathcal{S}}} \mathcal{G}^\bullet|_{\mathcal{S}} \rightarrow 0$$

et comme \mathcal{L} est simple, ou bien $\alpha|_{\mathcal{S}} = 0$ ou bien $\beta|_{\mathcal{S}} = 0$. La proposition 4.2.9 affirme alors que $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ et donc β ou α est un isomorphisme puisque $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ est une catégorie abélienne. ■

4.3 Faisceaux pervers

Soient \mathbf{X} une variété algébrique complexe et $\mathfrak{X} \preccurlyeq \mathfrak{X}' \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$. Il est immédiat d'après la définition de faisceau pervers que tout objet de $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ appartient à $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}'}(\mathbf{X})$. L'inclusion

de catégories $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathfrak{X}'}(\mathbf{X})$ est un foncteur pleinement fidèle qui “prolonge” les inclusions $\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathfrak{X}'}(\mathbf{X})$ et $\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{M}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{M}_{\mathfrak{X}'}(\mathbf{X})$ (cf. 3.1.4-(a) et 4.1.2).

4.3.1. Définitions. Soit \mathbf{X} une variété algébrique complexe.

- On appelle « *catégorie des faisceaux pervers sur \mathbf{X}* » la sous-catégorie pleine de $D_c(\mathbf{X})$ définie par :

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}) := \varinjlim_{\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})} \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$$

- On appelle « *complexe de Deligne-Goresky-MacPherson de \mathbf{X}* » tout objet de

$$\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{M}(\mathbf{X}) := \varinjlim_{\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})} \mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{M}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X}).$$

La proposition suivante, à rapprocher de 3.1.8, donne des caractérisations des faisceaux pervers indépendantes des stratifications ; sa démonstration est laissée en exercice.

4.3.1 Proposition. Soit \mathbf{X} une variété algébrique complexe. Un complexe $\mathcal{F}^\bullet \in D_c(\mathbf{X})$ est pervers si et seulement si il vérifie l’une des deux conditions équivalentes suivantes.

- a) Dans tout fermé de Zariski irréductible $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}$, il existe une partie U ouverte et dense dans \mathbf{Z} , telle que :

$$\mathcal{H}^m \mathcal{F}|_U = \mathcal{H}^m \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}^\bullet|_U = 0, \text{ pour tout } m > -d_{\mathbf{Z}}.$$

- b) Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\dim_{\mathbb{C}}(\overline{|\mathcal{H}^{-m} \mathcal{F}^\bullet|}) \leq m$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\overline{|\mathcal{H}^{-m} \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}^\bullet|}) \leq m$.

4.3.2 Théorème de structure de la catégorie des faisceaux pervers

Théorème [BBD]⁽⁴⁹⁾. Soit \mathbf{X} une variété algébrique complexe.

- a) La catégorie $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ est une sous-catégorie pleine de $D_c(\mathbf{X})$ abélienne admissible, noéthérienne, artinienne, stable par extensions et par dualité de Grothendieck-Verdier dans $D^b(\mathbf{X})$.
- b) Pour tout fermé irréductible $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}$ et tout système local irréductible \mathcal{L} sur un ouvert non singulier dense dans \mathbf{Z} , le complexe $\iota_{\mathbf{Z}*} \mathcal{I}\mathcal{C}^\bullet(\mathbf{Z}; \mathcal{L})[d_{\mathbf{Z}}]$ est un objet irréductible dans $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ et tout objet irréductible de $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ est de cette forme. Autrement dit, $\text{Simples}(\mathcal{P}(\mathbf{X})) = \mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{M}(\mathbf{X})$.
- c) Tout objet de $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ est extension finie successive d’objets de $\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{M}(\mathbf{X})$.

Démonstration. Pour $\mathfrak{X} \preccurlyeq \mathfrak{X}' \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$ le foncteur d’inclusion $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathfrak{X}'}(\mathbf{X})$ est un foncteur exact de catégories abéliennes. En effet, par l’admissibilité de $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ (4.2.10), toute suite exacte courte de $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ se complète en un triangle exact de $D(\mathbf{X})$ dont les objets appartiennent également à la sous-catégorie abélienne admissible $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}'}(\mathbf{X})$, la suite en question est donc exacte dans $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}'}(\mathbf{X})$. On conclut que $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ est une sous-catégorie abélienne admissible de $D(\mathbf{X})$ puisque limite d’un système inductif filtrant supérieurement de foncteurs pleinement fidèles et exacts entre sous-catégories pleines abéliennes admissibles de $D(\mathbf{X})$.

Soient maintenant $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$ et $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$ et notons $\mathbf{Y} := \overline{|\mathcal{F}^\bullet|}$ et $\mathcal{G}^\bullet := \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{Y}}$. On a $\mathcal{G}^\bullet \in \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{Y})$ d’après 4.2.7-(d). Soit $U \subseteq \mathbf{Y}$ ouvert et dense dans \mathbf{Y} , affine et contenu dans la réunion des strates de dimension $d_{\mathbf{Y}}$. Fixons un raffinement $\mathfrak{X}|_{\mathbf{Y}} \preccurlyeq \mathfrak{Y} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{Y})$ tel que U est une réunion des strates de \mathfrak{Y} . Alors, dans le morphisme d’adjonction : $\mathcal{G}^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}\iota_{U*}^{\mathbf{Y}} \mathcal{G}^\bullet|_U$, les complexes

⁴⁹ [BBD]. §4.3.1 p. 112.

\mathcal{G}^\bullet et $Ru_{U^*}^Y \mathcal{G}^\bullet|_U$ sont des objets de $\mathcal{P}_{\mathfrak{Y}}(\mathbf{Y})$ (4.2.7-(e)) et nous avons le diagramme ci-après, où \mathcal{S} désigne la réunion des strates de \mathfrak{Y} de dimension d_Y , et β est la composée des morphismes

$$\begin{aligned} \underline{IC}_{\mathfrak{Y}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{G}^\bullet|_{\mathcal{S}}) &\xrightarrow{(1)} Ru_{U^*}^Y \underline{IC}_{\mathfrak{Y}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{G}^\bullet|_{\mathcal{S}})|_U \\ Ru_{U^*}^Y \underline{IC}_{\mathfrak{Y}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{G}^\bullet|_{\mathcal{S}})|_U &\xrightarrow[\cong]{(2)} Ru_{U^*}^Y \mathcal{G}^\bullet|_U \end{aligned}$$

(1) d'adjonction et (2) induit par l'isomorphisme canonique $\underline{IC}_{\mathfrak{Y}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{G}^\bullet|_{\mathcal{S}})|_U \cong \mathcal{G}^\bullet|_U$ qui résulte du fait que U est non singulier (cf. 3.1.4-(a), 3.1.5).

$$\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ \text{coker } \beta \\ \uparrow \\ \ker \alpha \hookrightarrow \mathcal{G}^\bullet \xrightarrow{\alpha} Ru_{U^*}^Y \mathcal{G}^\bullet|_U \xrightarrow{\gamma} \text{coker } \alpha \\ \beta \uparrow \\ \underline{IC}_{\mathfrak{Y}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{G}^\bullet|_{\mathcal{S}})[d_Y] \\ \uparrow \\ 0 \end{array}$$

Le morphisme β est un monomorphisme dans la catégorie abélienne $\mathcal{P}_{\mathfrak{Y}}(\mathbf{Y})$. En effet, par admissibilité, il suffit de prouver que son cône $C(\beta)^\bullet$ est pervers (1.3.12). La condition de support sur $C(\beta)^\bullet$ est immédiate et celle de cosupport résulte des conditions d'annulation cohomologique renforcées des complexes d'intersection.

On conclut que $\ker \alpha$, $\text{coker } \alpha$ et $\text{coker } \beta$ sont des faisceaux pervers de $\mathcal{P}_{\mathfrak{Y}}(\mathbf{Y})$ à support dans le fermé de codimension positive $\mathbf{Y}' := \mathbf{Y} \setminus U$ puisque les restrictions de α et β à U sont des isomorphismes. Ces remarques démontrent, en raisonnant par récurrence sur la dimension des supports des faisceaux pervers, que tout faisceau pervers de \mathbf{X} admet une suite de décomposition finie à quotients dans $\mathcal{DSM}(\mathbf{X})$, en particulier un faisceau pervers simple appartient à $\mathcal{DSM}(\mathbf{X})$. Le reste des énoncés de ce théorème résulte alors aisément. ■

4.3.3 Remarque importante. Dans la démonstration précédente, notons $\mathcal{S}_{\mathfrak{X}}$ la réunion des strates de $\mathfrak{X}|_{\mathbf{Y}}$ dimension d_Y . On a les inclusions $\mathcal{S} \subseteq U \subseteq \mathcal{S}_{\mathfrak{X}}$ d'ouverts non singuliers de \mathbf{Y} , d'où un isomorphisme canonique $\underline{IC}_{\mathfrak{Y}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{G}^\bullet|_{\mathcal{S}}) \cong \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{G}^\bullet|_{\mathcal{S}_{\mathfrak{X}}})$ (cf. 3.1.4-(a), 3.1.5). En particulier, lorsque \mathcal{G}^\bullet est un faisceau pervers simple de $\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{Y})$, le morphisme α est injectif, la composée $q \circ \beta$ est nulle d'après 4.2.9 et donc β se relève en un morphisme $\beta' : \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{G}^\bullet|_{\mathcal{S}_{\mathfrak{X}}}) \rightarrow \mathcal{G}^\bullet$ qui est nécessairement un isomorphisme. Par conséquent, \mathcal{G}^\bullet est bien dans $\mathcal{DSM}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{Y})$, pour la même stratification $\mathfrak{X}|_{\mathbf{Y}}$! A partir de là, il est aisé de prouver par induction sur la longueur des faisceaux pervers que les constituants irréductibles de $\mathcal{G}^\bullet \in \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{Y})$ sont tous dans $\mathcal{DSM}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{X})$. Les analogues des assertions (b) et (c) de 4.3.2 sont donc également vrais dans le cadre du théorème 4.2.10 relatif à une stratification fixe.

4.4 Image directe des faisceaux pervers par un morphisme propre

4.4.1 Morphismes stratifiés.⁽⁵⁰⁾ Soit $(\mathbf{Y}, \mathfrak{Y})$ et $(\mathbf{X}, \mathfrak{X})$ deux pseudovariétés (1.7.1). Une application continue $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ est dite « stratifiée relativement à $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$ » lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- Pour chaque strate $S_X \in \mathfrak{X}$, l'ensemble $f^{-1}(S_X)$ est une réunion de strates de \mathfrak{Y} .
- Pour chaque $S_X \in \mathfrak{X}$ et tout $x \in S_X$, il existe un voisinage N_x de x dans S_X , une pseudovariété $(\mathbf{F}, \mathfrak{F})$ et un homéomorphisme $h : \mathbf{F} \times N_x \xrightarrow{\sim} f^{-1}N_x$, tels que :
 - $f \circ h : \mathbf{F} \times N_x \rightarrow N_x$ est la projection canonique sur la deuxième coordonnée ;

⁵⁰[GoMc₂] §1.2, [BoAl] Borel §V.10.B p. 163.

ii) pour chaque strate $S_F \in \mathfrak{F}$, il existe $S_Y \in \mathfrak{Y}$ telle que $h(S_F \times N_x) = f^{-1}(N_x) \cap S_Y$.

La proposition suivante est conséquence du “premier lemme d’isotopie de Thom”.⁽⁵¹⁾

4.4.2 Proposition. *Étant donnés deux variétés algébriques complexes \mathbf{X} et \mathbf{Y} , des stratifications $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$, $\mathfrak{Y} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{Y})$, et un morphisme algébrique et propre $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$, il existe des stratifications $\mathfrak{Y}' \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{Y})$ et $\mathfrak{X}' \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$ telles que :*

$$\begin{cases} 1) \mathfrak{X} \preceq \mathfrak{X}', \mathfrak{Y} \preceq \mathfrak{Y}'; \\ 2) f \text{ est stratifiée relativement à } (\mathfrak{Y}', \mathfrak{X}'). \end{cases}$$

La conséquence la plus importante de cette proposition dans notre contexte, démontrée dans [BoAl] (Borel §V.10.17 p. 168), est la suivante.

4.4.3 Théorème. *Soit $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ un morphisme algébrique et propre entre deux variétés algébriques complexes. Soient $\mathfrak{Y} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{Y})$ et $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$ telles que f est stratifiée relativement à $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$. Alors*

$$\begin{aligned} f^{-1}D_{\mathfrak{X}-c}^b(\mathbf{X}) &\subseteq D_{\mathfrak{Y}-c}^b(\mathbf{Y}), & f^!D_{\mathfrak{X}-c}^b(\mathbf{X}) &\subseteq D_{\mathfrak{Y}-c}^b(\mathbf{Y}) \\ \mathbb{R}f_*D_{\mathfrak{Y}-c}^b(\mathbf{Y}) &\subseteq D_{\mathfrak{X}-c}^b(\mathbf{X}), & \mathbb{R}f_!D_{\mathfrak{Y}-c}^b(\mathbf{Y}) &\subseteq D_{\mathfrak{X}-c}^b(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

et (donc) de même en remplaçant $D_{\mathfrak{X}-c}^b$ et $D_{\mathfrak{X}-c}^b$ par D_c .

4.4.4 Morphismes (semi-)petits.⁽⁵²⁾ Soit $\pi : \mathbf{Y}^{\text{an}} \rightarrow \mathbf{X}^{\text{an}}$ une application continue entre deux variétés algébriques complexes. Soit $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$ telle pour chaque $s \in \mathbf{S} \in \mathfrak{X}$, la dimension de la fibre $\pi^{-1}s$ ne dépende pas de $s \in \mathbf{S}$, on note alors $d_\pi(\mathbf{S}) := \dim(\pi^{-1}s)$ pour un $s \in \mathbf{S}$ quelconque.

Définition. Avec les données ci-dessus, on dit que l’application π est «*semi-petite*» lorsque pour toute $\mathbf{S} \in \mathfrak{X}$ on a :

$$\boxed{2d_\pi(\mathbf{S}) \leq \dim \mathbf{X} - \dim \mathbf{S}} \quad (\diamond)$$

On dit que π est «*petite*» lorsqu’elle est semi-petite et que l’égalité (\diamond) se produit uniquement lorsque $\dim \mathbf{X} = \dim \mathbf{S}$.

4.4.5 Reprenons les données de 4.4.4. Lorsque l’application $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ est un morphisme algébrique et propre, il existe des stratifications $\mathfrak{Y} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{Y})$ et $\mathfrak{X}' \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$ telles que $\mathfrak{X} \preceq \mathfrak{X}'$ et telles que f est stratifiée relativement à $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}')$ (4.4.2). La condition (\diamond) ci-dessus est alors *a fortiori* vérifiée par les strates $\mathbf{S}' \in \mathfrak{X}'$. Or, f est une fibration localement triviale au-dessus de $\mathbf{S}' \in \mathfrak{X}'$ et si f est semi-petite, c’est un revêtement fini sur chaque strate de \mathfrak{X}' de dimension $d_{\mathbf{X}}$; en particulier, lorsque f est en plus surjective on a $\dim \mathbf{Y} = \dim \mathbf{X}$. La proposition suivante est conséquence facile de ces remarques.

⁵¹ Le lemme d’isotopie apparaît pour la première fois dans [Th]; il est repris dans beaucoup d’autres articles généralement cités, p.ex. [Ma,Hd,GWPL]. Le livre de Dimca donne un aperçu rapide du lemme d’isotopie et une esquisse de démonstration pour la proposition 4.4.2 ([Di] §1.3 p. 14–16, prop. 3.6) sous une forme à peine plus faible; sa démonstration prouve que pour toute stratification $\mathfrak{Y} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{Y})$ il existe un raffinement $\mathfrak{Y} \preceq \mathfrak{Y}' \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{Y})$ et une stratification $\mathfrak{X}' \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$ tels que f est stratifiée relativement à $(\mathfrak{Y}', \mathfrak{X}')$. Dans 4.4.2 on se donne une stratification supplémentaire $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathbf{X})$, mais il est clair que pour toute stratification $\mathfrak{X}'' \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$, raffinement commun de \mathfrak{X} et \mathfrak{X}' , f est *a fortiori* stratifiée relativement à $(\mathfrak{Y}', \mathfrak{X}'')$.

⁵² [GoMc₂] §6.2, [BoMc₂] §1.1 p. 30.

4.4.6 Proposition. *Un morphisme algébrique surjectif et propre entre deux variétés algébriques complexes $f : Y \rightarrow X$ est semi-petit si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

- a) $\dim \{x \in X \mid \dim f^{-1}(x) \geq i\} \leq \dim X - 2i$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.
- b) Il existe une filtration par des fermés algébriques $X := F_0 \supseteq F_1 \supseteq \dots \supseteq F_r = \emptyset$ telle que pour tout $i = 0, \dots, r$ et tout $x \in F_i \setminus F_{i+1}$ on a $2 \dim f^{-1}(x) \leq \dim X - \dim F_i$.

Voici maintenant un complément au théorème 4.4.3.

4.4.7 Proposition. *Soit $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ un morphisme algébrique surjectif et propre entre deux variétés algébriques complexes où \tilde{X} est non singulière. Alors,*

- a) si π est semi-petit : $\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{X}}[d_X] \in \mathcal{P}(X)$,
- b) si π est petit : $\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{X}} \equiv \underline{IC}^\bullet(X; \pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{X}}|_U)$, pour tout ouvert non singulier $U \subseteq X$ tel que π est un revêtement au-dessus de U .

Démonstration. Il suffit de vérifier les conditions de support pour $\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{X}}[d_X]$ dans la mesure où $\mathbb{D}_X \mathbb{R}\pi_* = \mathbb{R}\pi_* \mathbb{D}_{\tilde{X}}$ puisque π est propre, et que $\mathbb{D}_{\tilde{X}}(\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{X}}[d_X]) \equiv \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{X}}[d_X]$ (1.11.6).

Soient $\tilde{\mathfrak{X}} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\tilde{X})$ et $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}(X)$ telles que π est stratifiée relativement à $(\tilde{\mathfrak{X}}, \mathfrak{X})$ et telles que l'inégalité (\diamond) de la définition de 4.4.4 soit vérifiée pour les strates de \mathfrak{X} . Comme π est propre, on a $(\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{X}})_s \equiv \mathbb{R}\Gamma(\pi^{-1}s; \underline{\mathbb{Q}}_{\pi^{-1}s})$ (prop. 1.5.3-(c)), pour $s \in \mathbf{S} \in \mathfrak{X}$, et donc

$$[(\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{X}})_s[d_X]]_{\text{coh}} \subseteq [-d_X, -d_X + 2 \dim \pi^{-1}s] \subseteq [-d_X, -d_S] \quad (*)$$

puisque $\dim_{\mathbb{R}} \pi^{-1}s \leq (\dim X - \dim \mathbf{S})$. On a donc $\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{X}}[d_X] \in \mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(X)$, d'où l'assertion (a).

Lorsque π est petite l'inclusion (*) devient

$$[(\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{X}})_s[d_X]]_{\text{coh}} \subseteq [-d_X, -d_S - 1]$$

pour toute strate $\mathbf{S} \in \mathfrak{X}$ de codimension positive. D'autre part, si $\mathbf{S} \in \mathfrak{X}$ est de dimension d_X , le morphisme π est un revêtement fini au-dessus de \mathbf{S} et $\pi_* : \text{Faisc}(\pi^{-1}(\mathbf{S})) \rightsquigarrow \text{Faisc}(\mathbf{S})$ est un foncteur exact. Dans ce cas $\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{X}}|_{\mathbf{S}} \equiv \pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{X}}|_{\mathbf{S}} \in \text{Loc}(\mathbf{S})$ et alors

$$\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{X}} \equiv \underline{IC}_{\mathfrak{X}}^\bullet(X; \pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{X}}|_{S_0}),$$

où S_0 est la réunion des strates de dimension d_X dans \mathfrak{X} . L'assertion (b) en découle (3.1.5). ■

4.4.8 La proposition précédente est également vraie si l'on remplace $\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{X}}$ par un système local \mathcal{L} défini sur l'espace \tilde{X} tout entier.

4.4.9 Exercice

Proposition. *Soit $\pi : Y \rightarrow X$ un morphisme algébrique surjectif, propre et fini entre deux variétés algébriques complexes. Alors $\mathbb{R}\pi_* \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X)$ et $\mathbb{R}\pi_* \mathcal{J}\mathcal{C}(Y) \subseteq \mathcal{J}\mathcal{C}(X)$.*

4.4.10 Théorème de décomposition. Le théorème suivant, connu sous le nom de «*théorème de décomposition*» reprend l'assertion (a) de 4.4.7 dans la situation plus générale où le morphisme π est supposé uniquement propre. Il s'agit probablement du théorème le plus profond de la théorie

des faisceaux pervers à l'heure actuelle. Il est démontré dans [BBD] (§6.2.5 p. 163) par des techniques de cohomologie étale qui dépassent largement le cadre de ces notes (⁵³); nous nous limitons à l'énoncer.

4.4.11 Théorème [BBD]. *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme algébrique propre entre deux variétés algébriques complexes. Pour tout faisceau pervers simple $\iota_{Y*} \underline{IC}^\bullet(Y; \mathcal{L})[d_Y] \in \mathcal{P}(Y)$ il existe une famille finie $\{\iota_{Z_i} \underline{IC}^\bullet(Z_i; \mathcal{L}_i)\}_{i=1, \dots, r}$ de faisceaux pervers simples de $\mathcal{P}(X)$ et des nombres entiers $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Z}$ tels que l'on a dans $D_c(X)$:*

$$\mathbb{R}f_* \iota_{Y*} \underline{IC}^\bullet(Y; \mathcal{L})[d_Y] \simeq \bigoplus_{i=1}^r \iota_{Z_i*} \underline{IC}^\bullet(Z_i; \mathcal{L}_i)[c_i] \quad (\star)$$

4.4.12 Remarque. Ce théorème renforce la proposition 4.4.7, en effet, comme $\mathbb{R}\pi_* \mathbb{Q}_{\bar{X}}[d_X]$ est pervers, chaque facteur $\iota_{Z_i*} \underline{IC}^\bullet(Z_i; \mathcal{L}_i)[c_i]$ dans (\star) est nécessairement pervers et $c_i = d_{Z_i}$. Le faisceau pervers $\mathbb{R}\pi_* \mathbb{Q}_{\bar{X}}[d_X]$ est donc une **somme directe** d'objets de $\mathcal{DSM}(X)$. En dehors de ce cas, le théorème ne prévoit aucune valeur *a priori* pour les décalages $[c_i]$, en particulier l'image directe d'un faisceau pervers simple peut ne pas être un faisceau pervers.

§ 5. Correspondance de Springer

Dans cette dernière section nous introduisons les représentations du groupe de Weyl d'un groupe algébrique semisimple complexe connexe sur les variétés de Steinberg à l'aide du foncteur prolongement intermédiaire d'après une idée de Lusztig ([Lu] §3 p. 176). Nous explicitons également la démarche suivie par Borho-MacPherson dans [BoMc₁] pour démontrer, par les techniques de la théorie des faisceaux pervers, le théorème de Springer (⁵⁴) connu sous le nom de « *correspondance de Springer* ».

5.1 Notations et données

- \mathbf{G} : groupe algébrique sur \mathbb{C} , semisimple et connexe ;
- \mathbf{B} : un sous-groupe de Borel de \mathbf{G} , de tore maximal \mathbf{H} et radical unipotent \mathbf{U} .
- $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{h}, \mathfrak{n}$: algèbres de Lie de $\mathbf{G}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{U}$;
- $\mathbf{W} = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{H})/\mathbf{H}$: le groupe de Weyl correspondant aux choix précédents.
- $\widehat{\mathbf{W}}_k$: caractères irréductibles de \mathbf{W} sur un corps k
- $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$: ouvert des éléments semisimples réguliers de \mathfrak{g} .
- \mathbf{G} opère à gauche sur \mathfrak{g} par la représentation adjointe, et de même pour \mathbf{B} sur \mathfrak{b} et \mathfrak{n} ;
- $\mathcal{B} := \mathbf{G}/\mathbf{B}$: variété des sous-groupes de Borel de \mathbf{G} ;
- $\widetilde{\mathfrak{g}} := \mathbf{G} \times_{\mathbf{B}} \mathfrak{b}$, $\widetilde{\mathcal{N}} := \mathbf{G} \times_{\mathbf{B}} \mathfrak{n}$: quotients de $\mathbf{G} \times \mathfrak{b}$ et de $\mathbf{G} \times \mathfrak{n}$ par l'action de \mathbf{B} à droite : $(g, X) \cdot b := (gb, \text{Ad } b^{-1}(X))$. Ces espaces sont munis de l'action naturelle de \mathbf{G} à gauche, *i.e.* $g' \cdot (g, x) := (\overline{g'g}, x)$.
- $p_1 : \widetilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{B}$, $p_1 : \widetilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{B}$: projections canoniques $p_1(\overline{g, x}) = g \cdot \mathbf{B}$.
- $Z_{\mathbf{G}}(X)$: le centralisateur dans \mathbf{G} de $X \in \mathfrak{g}$, *i.e.* $\{g \in \mathbf{G} \mid \text{Ad } g(X) = X\}$.

⁵³ Saito démontre le théorème de décomposition dans [Sa] à l'aide de la notion de modules de Hodge polarisables dans le cas d'un morphisme propre entre variétés analytiques complexes irréductibles en supposant que l'espace de départ est l'image d'une variété de Kähler par un morphisme propre et surjectif.

⁵⁴ [Spr₁] §6 th. 6.10 p. 198 et [Spr₂] §1 th. 1.13 p. 283 et §3.11 p. 290.

- $Z_G^0(X)$: la composante connexe de l'élément neutre de $Z_G(X)$.
- $Z_{\mathfrak{g}}(X)$: le centralisateur dans \mathfrak{g} de $X \in \mathfrak{g}$, *i.e.* $\{Y \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0\}$.
- \mathcal{N} : cône des éléments nilpotents de \mathfrak{g} muni de l'action de G à gauche: $g \cdot X := \text{Ad } g(X)$; c'est un fermé de Zariski irréductible de \mathfrak{g} de dimension $\dim \mathfrak{g} - \text{rang } \mathfrak{g}$.
- $\text{Irr}(\mathbf{X})$: l'ensemble des composantes irréductibles d'une variété algébrique \mathbf{X} .
- $\text{irr}(\mathbf{X})$: cardinal de $\text{Irr}(\mathbf{X})$.

5.2 Stratifications de \mathcal{N} et de \mathfrak{g}

5.2.1 Stratification de \mathcal{N} . La décomposition de \mathcal{N} est G -orbites est une partition finie en parties localement fermées pour la topologie de Zariski de \mathcal{N} . On notera $\mathfrak{N} := \{\mathcal{O}_\xi\}_\xi$ l'ensemble des G -orbites de \mathcal{N} , chaque orbite étant indexée par un de ses éléments arbitrairement choisi. L'orbite \mathcal{O}_ξ est évidemment non singulière de dimension $\dim G - \dim Z_G(\xi)$ et l'adhérence $\overline{\mathcal{O}}_\xi$ est un fermé de Zariski irréductible de \mathcal{N} (G est connexe!) et c'est une réunion d'orbites, on a donc $\mathfrak{N} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathcal{N})$. Nous donnons une explication heuristique du fait que $\mathfrak{N} \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathcal{N})$. Soit $\mathfrak{N}' \in \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathcal{N})$ un raffinement de \mathfrak{N} . Pour toute orbite \mathcal{O}_ξ il existe une strate $S \in \mathfrak{N}'$ telle que $S \subseteq \mathcal{O}_\xi$, $d_S = \dim \mathcal{O}_\xi$ et telle que les conditions de Whitney pour le couple $(\mathcal{O}_\xi, \mathcal{N})$ sont vérifiées en chaque point de S . Comme G opère algébriquement sur \mathcal{N} , le domaine de validité des ces conditions est G -stable et contient donc $G \cdot S = \mathcal{O}_\xi$.

5.2.2 Stratification de \mathfrak{g} . ⁽⁵⁵⁾Dans ce cas, la décomposition de \mathfrak{g} en G -orbites ne convient pas puisque il y a une infinité d'orbites. Pour chaque $x \in \mathfrak{g}$ on sait que $\dim Z_{\mathfrak{g}}(x) \geq \text{rang } \mathfrak{g}$. Nous notons alors $K_m := \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim Z_{\mathfrak{g}}(x) \geq \text{rang } \mathfrak{g} + m\}$ pour $m \in \mathbb{N}$. Les éléments de K_m sont les $x \in \mathfrak{g}$ tels que l'opérateur linéaire $\text{ad } x$ est de rang majoré par $\dim \mathfrak{g} - \text{rang } \mathfrak{g} - m$. On obtient ainsi une suite décroissante de fermés de Zariski :

$$\mathfrak{g} = K_0 \supseteq K_1 \supseteq \cdots \supseteq K_{\dim \mathfrak{g} - \text{rang } \mathfrak{g}} = \{0\}.$$

Notons de même $L_m := \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim(\ker(\text{ad } x)^{\dim \mathfrak{g}}) \geq \text{rang } \mathfrak{g} + m\}$. On a $K_m \subseteq L_m$ et L_m est un fermé de Zariski vérifiant $\text{codim}_{\mathfrak{g}} L_m \geq m$ (penser aux coefficients du polynôme caractéristique de $\text{ad } x$). On a donc la filtration fermée :

$$\mathfrak{g} = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_{\dim \mathfrak{g} - \text{rang } \mathfrak{g}} = \mathcal{N},$$

où

$$x \in L_m \setminus L_{m+1} \implies \left(\dim Z_{\mathfrak{g}}(x) - \text{rang } \mathfrak{g} \underset{(\star)}{\leq} \dim \mathfrak{g} - \dim L_m \right),$$

et l'inégalité (\star) est une égalité si et seulement si

$$\dim(\ker \text{ad}(x)) = \dim(\ker \text{ad}(x)^{\dim \mathfrak{g}}), \quad (\diamond)$$

auquel cas $Z_{\mathfrak{g}}(x) = Z_{\mathfrak{g}}(x_s)$, où x_s désigne la partie semisimple de x . En effet, on a $Z_{\mathfrak{g}}(x) \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(x_s)$ et $\ker \text{ad } x_s \subseteq \ker(\text{ad } x)^{\dim \mathfrak{g}}$ puisque $\text{ad } x_s$ est facteur à droite de $(\text{ad } x)^{\dim \mathfrak{g}}$, on conclut alors grâce à l'égalité $\ker(\text{ad } x)^{\dim \mathfrak{g}} = \ker(\text{ad } x)$ d'après (\diamond) . Il s'ensuit que $Z_{\mathfrak{g}}(x)$ est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} réductive de dimension $\text{rang } \mathfrak{g} + m$ et contient, par conséquent, des éléments nilpotents non

⁵⁵ Je remercie Olaf M. Schnürer de m'avoir indiqué la présence de quelques erreurs dans une version précédente de ces paragraphes. Il a également attiré mon attention sur les premiers paragraphes de §I.1 de [Sh] qui donnent une autre justification de ces stratifications.

centraux **lorsque** $m > 0$. Dans ce cas, soit η un tel élément nilpotent. On a alors $x + \varepsilon\eta \in \mathbf{L}_m$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et

$$Z_{\mathfrak{g}}(x + \varepsilon\eta) \subsetneq Z_{\mathfrak{g}}(x), \quad \forall \varepsilon \neq 0.$$

En effet, $Z_{\mathfrak{g}}(x + \varepsilon\eta) \subseteq Z_{\mathfrak{g}}((x + \varepsilon\eta)_s) = Z_{\mathfrak{g}}(x_s) = Z_{\mathfrak{g}}(x)$ et l'inclusion est stricte puisque η n'est pas central dans $Z_{\mathfrak{g}}(x)$.

Ces remarques montrent que pour toute strate \mathbf{S} de toute stratification algébrique de $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_{\text{reg}}$ subordonnée aux filtration \mathbf{K}_* et \mathbf{L}_* , on aura

$$x \in \mathbf{S} \implies \left(\dim Z_{\mathfrak{g}}(x) - \text{rang } \mathfrak{g} < \dim \mathfrak{g} - \dim \mathbf{S} \right).$$

Énonçons ceci sous forme de proposition pour future référence.

5.2.3 Proposition. *Il existe une stratification $\mathfrak{G} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\mathfrak{g})$ dont la strate ouverte est $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$ et telle que pour toute strate $\mathbf{S} \in \mathfrak{G}$ de codimension positive et tout $x \in \mathbf{S}$ on ait :*

$$\dim Z_{\mathfrak{g}}(x) - \text{rang } \mathfrak{g} < \dim \mathfrak{g} - \dim \mathbf{S}.$$

5.3 Résolution de Springer du cône nilpotent

Soit $\iota_{\tilde{\mathcal{N}}} : \mathbf{G} \times_B \mathfrak{n} \hookrightarrow \mathbf{G} \times_B \mathfrak{b}$ le morphisme de fibrés au-dessus de \mathbf{G}/\mathbf{B} associé à l'inclusion de \mathbf{B} -modules $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{b}$. Soit $\phi : \mathbf{G} \times_B \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{g}$ le morphisme $\phi(g, X) := \text{Ad } g(X)$; la composée $\pi := \phi \circ \iota_{\tilde{\mathcal{N}}}$ est donc à valeurs dans \mathcal{N} et nous avons un diagramme cartésien de morphismes \mathbf{G} -équivariants :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{N}} := \mathbf{G} \times_B \mathfrak{n} & \xleftarrow[\text{fermé}]{\iota_{\tilde{\mathcal{N}}}} & \mathbf{G} \times_B \mathfrak{b} =: \tilde{\mathfrak{g}} \\ \pi \downarrow & \square & \downarrow \phi \\ \mathcal{N} & \xleftarrow[\text{fermé}]{\iota_{\mathcal{N}}} & \mathfrak{g} \end{array} \quad (\mathcal{D})$$

5.3.1 Notation et terminologie. Pour chaque $x \in \mathfrak{g}$, on note $\mathcal{B}_x := \phi^{-1}x$. Cette variété algébrique est connue dans la littérature sous les noms de « *variété de Springer* » (généralement lorsque $x \in \mathcal{N}$), « *variété de Steinberg* » et « *variété des points fixes de x dans \mathcal{B}* ».

5.3.2 Proposition. *Les données étant comme ci-dessus,*

- π est propre surjective et désingularise \mathcal{N} .
- ϕ est propre surjective et c'est un revêtement galoisien ⁽⁵⁶⁾ de groupe \mathbf{W} au-dessus de $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$.
- Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, la variété \mathcal{B}_x est équidimensionnelle et $\dim \mathcal{B}_x = \frac{1}{2}(\dim Z_{\mathfrak{g}}(x) - \text{rang } \mathfrak{g})$.
- Le morphisme $\pi : \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$ est semi-petit et :

$$\boxed{\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathcal{N}}}[d_{\mathcal{N}}] \in \mathcal{P}(\mathcal{N})}$$

⁵⁶Rappel : un revêtement $p : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ est dit « *galoisien* » lorsque \mathbf{E} est connexe et que le groupe $\text{Aut}(p)$ des automorphismes du revêtement agit transitivement sur les fibres de p . On démontre que lorsque un groupe discret \mathbf{W} opère de manière proprement discontinue et sans point fixe sur une variété topologique connexe \mathbf{E} , la projection canonique $p : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}/\mathbf{W}$ est un revêtement galoisien et $\text{Aut}(p) = \mathbf{W}$.

e) Le morphisme $\phi : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$ est petit et :

$$\mathbb{R}\phi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathfrak{g}}} = \underline{IC}^\bullet(\mathfrak{g}; \phi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathfrak{g}}}|_{\mathfrak{g}_{\text{reg}}}) \in \mathcal{JC}(\mathfrak{g})$$

Démonstration

a) Résultat bien connu et documenté (cf. [Sl₂] p.43). Le morphisme π est « la résolution de singularités de Springer de \mathcal{N} ». C'est également une conséquence du fait que π est semi-petit (d) et que π est bijective au-dessus de la \mathbf{G} -orbite dense de \mathcal{N} .

b) (D'après [Spr_B] p. 18). Soit $\psi : \mathbf{G} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbf{G} \times_B \mathfrak{b}$ l'application $\psi(g, h) = \overline{(g, h)}$. Notons $\mathfrak{h}_{\text{reg}}$ l'ensemble des éléments de \mathfrak{h} dont le stabilisateur dans \mathbf{W} est trivial. Pour $x \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}$ donné, fixons un élément $g_0 \in \mathbf{G}$ tel que $\text{Ad } g_0(x) \in \mathfrak{h}_{\text{reg}}$. L'ensemble des éléments $g \in \mathbf{G}$ vérifiant $g \cdot x \in \mathfrak{b}$ est alors $N_{\mathbf{G}}(\mathfrak{h})g_0$ puisque x est semisimple régulier. En particulier, la fibre $\phi^{-1}(x)$ est contenue dans l'image de ψ et $\psi^{-1}\phi^{-1}(x) = \{(g_0^{-1}n^{-1}, ng_0x) \mid n \in N_{\mathbf{G}}(\mathfrak{h})\}$. L'hypothèse de régularité intervient une fois de plus pour montrer que ψ induit un isomorphisme $\bar{\psi} : \mathbf{G}/\mathbf{H} \times \mathfrak{h}_{\text{reg}} \cong \tilde{\mathfrak{g}}_{\text{reg}}$. En faisant opérer le groupe de Weyl à droite sur \mathbf{G}/\mathbf{H} et diagonalement sur $\mathbf{G}/\mathbf{H} \times \mathfrak{h}_{\text{reg}}$ on obtient le diagramme commutatif ci-après.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}/\mathbf{H} \times \mathfrak{h}_{\text{reg}} & \xrightarrow[\cong]{\bar{\psi}} & \tilde{\mathfrak{g}}_{\text{reg}} \\ \text{mod } \mathbf{W} \downarrow & & \phi|_{\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{reg}}} \downarrow \\ \mathbf{G}/\mathbf{H} \times_{\mathbf{W}} \mathfrak{h}_{\text{reg}} & \xrightarrow[\cong]{} & \mathfrak{g}_{\text{reg}} \end{array}$$

c) Ce résultat est dû à Spaltenstein ([Spa₁, Spa₀]) (on ne le redémontre pas), mais non pas pour \mathcal{B}_ξ mais plutôt pour sa projection $p_1(\mathcal{B}_x)$ dans \mathcal{B} . Or, on vérifie aisément que $p_1|_{\mathcal{B}_x}$ est injective et donc $\mathcal{B}_x \simeq p_1\mathcal{B}_x$.

d) π est semi-petit puisque : $2 \dim \pi^{-1}\xi = \dim \mathbf{G} - \dim \mathcal{O}_\xi - \text{rang } \mathfrak{g} = \dim \mathcal{N} - \dim \mathcal{O}_\xi$, d'après l'assertion (c). On conclut par 4.4.7-(a).

e) En appliquant (c) et en considérant la stratification \mathfrak{G} de \mathfrak{g} de la proposition 5.2.3-(b), on obtient aussitôt la majoration $2 \dim \phi^{-1}x < \dim \mathfrak{g} - \dim \mathcal{S}$, pour toute strate de codimension positive $\mathcal{S} \in \mathfrak{G}$ et tout $x \in \mathcal{S}$. Les fibres au-dessus de $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$ sont de dimension nulle d'après (c) et la condition (\diamond) de 4.4.4 est alors vérifiée par \mathfrak{G} . Ceci prouve que ϕ est petite. On conclut par 4.4.7-(b). ■

5.4 Décomposition de $\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathcal{N}}}^{(57)}$

5.4.1 Quelques égalités de dimensions. On a

$$\begin{cases} \dim \mathcal{N} = \dim \mathbf{G} - \text{rang } \mathfrak{g}, \\ \dim \mathcal{O}_\xi = \dim \mathbf{G} - \dim Z_{\mathbf{G}}(\xi), \\ 2 \dim \mathcal{B}_\xi = \dim Z_{\mathbf{G}}(\xi) - \text{rang } \mathfrak{g} = \text{codim}_{\mathcal{N}} \mathcal{O}_\xi. \end{cases}$$

5.4.2 Théorème ([BoMc]). On note $j_\xi : \bar{\mathcal{O}}_\xi \hookrightarrow \mathcal{N}$ l'inclusion.

a) Le complexe $\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathcal{N}}}$ se décompose dans $D(\mathcal{N})$ en une somme directe :

$$\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathcal{N}}} = \bigoplus_{\xi, \phi_\xi} j_{\xi*} \underline{IC}^\bullet(\bar{\mathcal{O}}_\xi; \phi_\xi)[-2 \dim \mathcal{B}_\xi] \otimes_{\mathbb{Q}} V_{\xi, \phi_\xi}$$

où la sommation est indexée par tous les couples (ξ, ϕ_ξ) où ξ parcourt les points de base des orbites nilpotentes, et pour chaque ξ donné ϕ_ξ est une représentation irréductible intervenant

⁵⁷ [BoMc₁] théorème 2-(c) et théorème 3-(a). Voir aussi [BoMc₂] §1–2.

dans la représentation par monodromie de $\Pi_1(\mathcal{O}_\xi)$ sur $H^{2 \dim \mathcal{B}_\xi}(\mathcal{B}_\xi; \mathbb{Q})$ avec multiplicité égale à la dimension de l'espace vectoriel V_{ξ, ϕ_ξ} .

- b) Pour chaque ξ , les représentations irréductibles intervenant dans la représentation naturelle de $Z_{\text{Ad } \mathbf{G}}(\xi)/Z_{\text{Ad } \mathbf{G}}^0(\xi)$ sur $H^{2 \dim \mathcal{B}_\xi}(\mathcal{B}_\xi; \mathbb{Q})$, de même que leur multiplicité, correspondent bijectivement à celles de la représentation par monodromie de $\Pi_1(\mathcal{O}_\xi)$. La correspondance est donnée par $\phi \mapsto \phi \circ \alpha$ où α est l'homomorphisme de groupes d'homotopie $\alpha : \Pi_1(\mathcal{O}_\xi) \rightarrow \Pi_0(Z_{\mathbf{G}}(\xi)) = Z_{\mathbf{G}}(\xi)/Z_{\mathbf{G}}^0(\xi)$ associé à la fibration $Z_{\text{Ad } \mathbf{G}}(\xi) \rightarrow \text{Ad } \mathbf{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_\xi$, où $\beta(g) = g \cdot \xi$.

c)

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\text{End}_{D(\mathcal{N})}(\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathcal{V}}})) = |\mathbf{W}|$$

Démonstration

- a) Par le théorème de décomposition (4.4.11) il existe une famille finie $\{\mathbf{Z}_i\}$ de fermés irréductibles de \mathcal{N} et pour chaque i un système local irréductible \mathcal{S}_i défini sur un ouvert non singulier de \mathbf{Z}_i tels que :

$$\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{N}}[d_{\mathcal{N}}] \equiv \bigoplus_i \iota_{\mathbf{Z}_i} \underline{\text{IC}}^\bullet(\mathbf{Z}_i, \mathcal{S}_i)[d_{\mathbf{Z}_i}] \quad (\ddagger)$$

où les décalages correspondent exactement aux dimensions des fermés en question puisque le complexe $\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{N}}[d_{\mathcal{N}}]$ est un faisceau pervers d'après 5.3.2-(d).

Ceci étant, pour chaque $g \in \mathbf{G}$ notons $\mu_g : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, l'application $\mu_g n := g \cdot n$ induite par l'action de \mathbf{G} . Le foncteur $\mu_{g*} : \text{Faisc}(\mathcal{N}) \rightsquigarrow \text{Faisc}(\mathcal{N})$ est un automorphisme de catégories abéliennes et

$$\mu_{g*} \iota_{\mathbf{Z}_i} \underline{\text{IC}}^\bullet(\mathbf{Z}_i, \mathcal{S}_i) \equiv \iota_{g \cdot \mathbf{Z}_i} \underline{\text{IC}}^\bullet(g \cdot \mathbf{Z}_i, \mu_{g*} \mathcal{S}_i)$$

d'autre part $\mu_{g*} \mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathcal{V}}} \equiv \mathbb{R}\pi_* \mu_{g*} \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathcal{V}}}$ puisque π est \mathbf{G} -équivariante et $\mu_{g*} \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathcal{V}}} \equiv \underline{\mathbb{Q}}_{t\mathcal{N}}$ bien évidemment. On a donc, pour chaque $g \in \mathbf{G}$ un isomorphisme de faisceaux pervers semisimples :

$$\bigoplus_i \iota_{\mathbf{Z}_i} \underline{\text{IC}}^\bullet(\mathbf{Z}_i, \mathcal{S}_i)[d_{\mathbf{Z}_i}] \equiv \bigoplus_i \iota_{g \cdot \mathbf{Z}_i} \underline{\text{IC}}^\bullet(g \cdot \mathbf{Z}_i, \mu_{g*} \mathcal{S}_i)[d_{\mathbf{Z}_i}] \quad (*)$$

Par conséquent, pour chaque $g \in \mathbf{G}$ et chaque i il existe j tel que $g \cdot \mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_j$; autrement dit, le groupe \mathbf{G} opère sur l'ensemble fini des fermés de la famille $\{\mathbf{Z}_i\}_i$. Comme \mathbf{G} est connexe cette action est triviale et chaque \mathbf{Z}_i est un fermé irréductible \mathbf{G} -stable de \mathcal{N} , i.e. l'adhérence d'une orbite nilpotente \mathcal{O}_i . En reportant cette information sur (*) on voit que pour chaque \mathcal{S}_i il existe \mathcal{S}_j tel que $\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_j$ et $\mathcal{S}_i \equiv \mu_{g*} \mathcal{S}_j$ sur l'ouvert commun de définition; en particulier, chaque système local \mathcal{S}_i est défini sur l'orbite dense \mathcal{O}_i toute entière et équivaut à la donnée d'une représentation ϕ_i de $\Pi_1(\mathcal{O}_i)$ irréductible sur \mathbb{Q} (1.11.9). La décomposition (\ddagger) se réécrit alors sous la forme :

$$\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{N}}[d_{\mathcal{N}}] \equiv \bigoplus_{\xi, \phi_\xi} \mathcal{J}_{\xi*} \underline{\text{IC}}^\bullet(\overline{\mathcal{O}}_\xi, \phi_\xi)[\dim \mathcal{O}_\xi] \otimes_{\mathbb{Q}} V_{\xi, \phi_\xi},$$

où V_{ξ, ϕ_ξ} est un espace vectoriel sur \mathbb{Q} dont la dimension rend compte de la multiplicité de $\mathcal{J}_{\xi*} \underline{\text{IC}}^\bullet(\overline{\mathcal{O}}_\xi, \phi_\xi)[\dim \mathcal{O}_\xi]$ dans $\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{N}}[d_{\mathcal{N}}]$. Nous allons identifier maintenant les représentations ϕ_ξ . Pour toute orbite nilpotente \mathcal{O} , on a :

$$\begin{cases} \text{(i)} & (\mathcal{J}_{\xi*} \underline{\text{IC}}^\bullet(\overline{\mathcal{O}}_\xi, \phi_\xi)[\dim \mathcal{O}_\xi])|_{\mathcal{O}} = 0, \quad \text{lorsque } \mathcal{O} \not\subseteq \overline{\mathcal{O}}_\xi; \\ \text{(ii)} & \mathcal{H}^{-\dim \mathcal{O}} (\mathcal{J}_{\xi*} \underline{\text{IC}}^\bullet(\overline{\mathcal{O}}_\xi, \phi_\xi)[\dim \mathcal{O}_\xi])|_{\mathcal{O}} = 0, \quad \text{lorsque } \overline{\mathcal{O}} \subsetneq \overline{\mathcal{O}}_\xi; \end{cases}$$

(i) pour une simple raison de supports et (ii) d'après la propriété des images directes des complexes d'intersection (4.1.1). On en déduit l'égalité suivante pour chaque orbite \mathcal{O}_ξ :

$$(\mathbb{R}^{-\dim \mathcal{O}_\xi} \pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{N}}[d_{\mathcal{N}}])|_{\mathcal{O}_\xi} \equiv \bigoplus_{\phi_\xi} \phi_\xi \otimes_{\mathbb{Q}} V_{\xi, \phi_\xi}.$$

Le terme de gauche est un système local sur \mathcal{O}_ξ et comme π est propre, sa fibre en ξ est donnée par la cohomologie de \mathcal{B}_ξ (1.5.3-(c)); nous avons donc :

$$(\mathbb{R}^{-\dim \mathcal{O}_\xi} \pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{N}}[d_{\mathcal{N}}])_\xi \cong H^{d_{\mathcal{N}} - \dim \mathcal{O}_\xi}(\mathcal{B}_\xi; \mathbb{Q}) = H^{2 \dim \mathcal{B}_\xi}(\mathcal{B}_\xi; \mathbb{Q}),$$

et l'assertion (a) est prouvée.

b,c) Par semisimplicité dans $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ et compte tenu de précisions apportées par (a), on a

$$\begin{aligned} \text{End}_{D(\mathcal{N})}(\mathbb{R} \pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{N}}[d_{\mathcal{N}}]) &\stackrel{=}{=} \bigoplus_{\xi} \text{End}_{D(\mathcal{N})}(\bigoplus_{\phi_\xi} \mathcal{J}_{\xi*} \underline{IC}^\bullet(\overline{\mathcal{O}}_\xi, \phi_\xi)[\dim \mathcal{O}_\xi] \otimes_{\mathbb{Q}} V_{\xi, \phi_\xi}) \\ &\stackrel{=}{=} \bigoplus_{\xi} \text{End}_{D(\overline{\mathcal{O}}_\xi)}(\bigoplus_{\phi_\xi} \underline{IC}^\bullet(\overline{\mathcal{O}}_\xi, \phi_\xi) \otimes_{\mathbb{Q}} V_{\xi, \phi_\xi}) \\ &\stackrel{=}{=} \bigoplus_{\xi} \text{End}_{\mathbb{Q}, \Pi_1(\mathcal{O}_\xi)}(\bigoplus_{\phi_\xi} \phi_\xi \otimes_{\mathbb{Q}} V_{\xi, \phi_\xi}) \\ &\stackrel{=}{=} \bigoplus_{\xi} \text{End}_{\mathbb{Q}}(H^{2 \dim \mathcal{B}_\xi}(\mathcal{B}_\xi; \mathbb{Q}))^{\Pi_1(\mathcal{O}_\xi)} \end{aligned}$$

par les égalités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \stackrel{=}{=} \text{d\'ecomposition par rapport aux supports irr\'eductibles;} \\ \stackrel{=}{=} \text{puisque } \mathcal{J}_{\xi*} : \text{Faisc}(\overline{\mathcal{O}}_\xi) \rightsquigarrow \text{Faisc}(\mathcal{N}) \text{ est pleinement fid\`ele;} \\ \stackrel{=}{=} \text{par les \'equivalences des cat\'egories (3.1.4-(a)) :} \\ \text{Mod}_{\mathbb{Q}}(\Pi_1(\mathcal{O}_\xi)) \cong \text{Loc}(\mathcal{O}_\xi) \cong \mathcal{IC}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{O}}_\xi); \\ \stackrel{=}{=} \text{\'evident (1.11.2).} \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{B}_\xi = \mathcal{B}_{\xi,1} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{\xi,r}$ la d\'ecomposition de \mathcal{B}_ξ en composantes irr\'eductibles. Pour chaque $i = 1, \dots, r$, soit U_i la partie (ouverte) non singuli\`ere de $\mathcal{B}_{\xi,i} \setminus (\cup_{j \neq i} \mathcal{B}_{\xi,j})$. Les ouverts U_i sont les composantes connexes de $\mathcal{B}_\xi^0 := \cup_i U_i$ et comme le ferm\'e $\mathcal{B}_\xi \setminus \mathcal{B}_\xi^0$ est alg\`ebrique et de codimension positive dans \mathcal{B}_ξ , il est de dimension cohomologique major\'ee par $2 \dim \mathcal{B}_\xi - 2$. Le morphisme naturel $H_c^{2 \dim \mathcal{B}_\xi}(\mathcal{B}_\xi^0; \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2 \dim \mathcal{B}_\xi}(\mathcal{B}_\xi; \mathbb{Q})$ est donc bijectif et $H_c^{2 \dim \mathcal{B}_\xi}(\mathcal{B}_\xi^0; \mathbb{Q}) \cong H^0(\mathcal{B}_\xi^0; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^{\text{Irr}(\mathcal{B}_\xi)}$ par dualit\'e de Poincar\'e. Ces \'equivalences munissent $\mathbb{Q}^{\text{Irr}(\mathcal{B}_\xi)}$ d'une structure de $\Pi_1(\mathcal{O}_\xi)$ -module que nous explicitons.

La suite longue de groupes d'homotopie associ\'ee \`a la fibration $Z_{\text{Ad } \mathbf{G}}(\xi) \hookrightarrow \text{Ad } \mathbf{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_\xi$, avec $\beta(g) = g \cdot \xi$, donne la suite exacte

$$\Pi_1(\mathbf{G}) \xrightarrow{\gamma} \Pi_1(\mathcal{O}_\xi) \xrightarrow{\alpha} \Pi_0(Z_{\text{Ad } \mathbf{G}}(\xi)) = Z_{\text{Ad } \mathbf{G}}(\xi) / Z_{\text{Ad } \mathbf{G}}^0(\xi).$$

En composant l'action de $\Pi_1(\mathcal{O}_\xi)$ sur $H^*(\mathcal{B}_\xi, \mathbb{Q})$ avec l'homomorphisme γ on obtient une action de $\Pi_1(\mathbf{G})$ sur $H^*(\mathcal{B}_\xi, \mathbb{Q})$ qui est triviale puisqu'elle provient de l'action de \mathbf{G} sur $\tilde{\mathcal{N}}$ (π est \mathbf{G} -\'equivariante) qui fait d\'ecrire \`a \mathcal{B}_ξ le chemin $g \cdot \mathcal{B}_\xi$ o\`u g parcourt un lacet de \mathbf{G} bas\'e en $\mathbf{1}_{\mathbf{G}}$.

La conclusion de ces derniers paragraphes est que les repr\'esentations irr\'eductibles et leur multiplicit\'e qui interviennent dans la formule de d\'ecomposition sont celles de l'action naturelle du groupe $Z_{\text{Ad } \mathbf{G}}(\xi) / Z_{\text{Ad } \mathbf{G}}^0(\xi)$ sur $\mathbb{Q}^{\text{Irr}(\mathcal{B}_\xi)}$.

Notons $\{\mathbf{e}_{\mathcal{B}_{\xi,i}}\}_{i=1,\dots,r}$ la base canonique de $\mathbb{Q}^{\text{Irr}(\mathcal{B}_\xi)}$ de base duale $\{\mathbf{e}^{\mathcal{B}_{\xi,i}}\}_{i=1,\dots,r}$. Un \'el\'ement $\lambda \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^{\text{Irr}(\mathcal{B}_\xi)})$ se d\'ecompose alors en $\lambda = \sum_{i,j} \ell_{ij} \mathbf{e}_{\mathcal{B}_{\xi,i}} \otimes \mathbf{e}^{\mathcal{B}_{\xi,j}}$ avec $\ell_{i,j} \in \mathbb{Q}$, et nous avons $g \cdot \lambda = \sum_{i,j} \ell_{ij} \mathbf{e}_{g \cdot \mathcal{B}_{\xi,i}} \otimes \mathbf{e}^{g \cdot \mathcal{B}_{\xi,j}}$ pour tout $g \in Z_{\text{Ad } \mathbf{G}}(\xi)$. Par cons\'equent :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Q}} \text{End}_{\mathbb{Q}}(H^{2 \dim \mathcal{B}_\xi}(\mathcal{B}_\xi; \mathbb{Q}))^{\Pi_1(\mathcal{O}_\xi)} &= \dim_{\mathbb{Q}} \text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^{\text{Irr}(\mathcal{B}_\xi)})^{Z_{\text{Ad } \mathbf{G}}(\xi)} \\ &= \#(\text{Irr}(\mathcal{B}_\xi) \times \text{Irr}(\mathcal{B}_\xi) / Z_{\text{Ad } \mathbf{G}}(\xi)) \end{aligned}$$

ce qui report\'e dans $\stackrel{=}{=}$ donne :

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{End}_{D(\mathcal{N})}(\mathbb{R} \pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{N}}[d_{\mathcal{N}}]) \stackrel{=}{=} \sum_{\xi} \#(\text{Irr}(\mathcal{B}_\xi) \times \text{Irr}(\mathcal{B}_\xi) / Z_{\text{Ad } \mathbf{G}}(\xi)).$$

Considérons le diagramme d'applications \mathbf{G} -équivariantes :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{m} & (\mathbf{G} \times_B \mathfrak{n}) \times (\mathbf{G} \times_B \mathfrak{n}) \xrightarrow{p_1 \times p_1} \mathcal{B} \times \mathcal{B} \\ q \downarrow & \square & \pi \downarrow \pi \\ \mathcal{N} & \xleftarrow{\Delta} & \mathcal{N} \times \mathcal{N} \end{array}$$

où $\Delta(n) = (n, n)$ et $q := \Delta^{-1}(\pi \times \pi)$. Pour chaque $\xi \in \mathcal{N}$, on a $q^{-1}\xi = \mathcal{B}_\xi \times \mathcal{B}_\xi$ de composantes irréductibles les produits $\mathcal{B}_{\xi,i} \times \mathcal{B}_{\xi,j}$. On note alors

$$S(\xi, i, j) := \overline{\mathbf{G}(\mathcal{B}_{\xi,i} \times \mathcal{B}_{\xi,j})} \subseteq S$$

où l'on remarque que $S(\xi, i, j) = S(\xi, i', j')$ si et seulement si le couple $(\mathcal{B}_{\xi,i}, \mathcal{B}_{\xi,j})$ est dans la même $Z_{\text{Ad } \mathbf{G}}(\xi)$ -orbite que $(\mathcal{B}_{\xi,i'}, \mathcal{B}_{\xi,j'})$. A ce propos Steinberg démontre ([St] §3.1 et §3.3 p. 213) que $S(\xi, i, j)$ est une composante irréductible de S , que les composantes irréductibles de S sont de cette forme et, enfin, que $\text{irr}(S) = |\mathbf{W}|$. Par conséquent, l'égalité ' $\stackrel{=}{=}$ ' donne :

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{End}_{D(\mathcal{N})}(\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{N}}[d_{\mathcal{N}}]) = \text{irr}(S) = |\mathbf{W}|,$$

ce qui termine la démonstration du théorème. ■

5.5 Représentations du groupe de Weyl d'après Lusztig⁽⁵⁸⁾

Reprenons le diagramme \mathcal{D} de 5.3 en le complétant à droite par les plongements ouverts :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathcal{N}} & \xrightarrow[\subseteq \text{ fermée}]{i_{\tilde{\mathcal{N}}}} & \tilde{\mathfrak{g}} & \xleftarrow[\supseteq \text{ ouverte}]{\tilde{j}} & \tilde{\mathfrak{g}}_{\text{reg}} \\ \pi \downarrow & \square & \downarrow \phi & \square & \downarrow \phi_{\text{reg}} \\ \mathcal{N} & \xrightarrow[\subseteq \text{ fermée}]{i_{\mathcal{N}}} & \mathfrak{g} & \xleftarrow[\supseteq \text{ ouverte}]{j} & \mathfrak{g}_{\text{reg}} \end{array} \quad (\mathcal{D}')$$

Comme ϕ_{reg} est un revêtement galoisien de groupe \mathbf{W} (5.3.2(b)), on a une représentation ρ_0 de \mathbf{W} dans le système local $\phi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{reg}}}$ et, suite à l'équivalence de catégories 3.1.4 et à 5.3.2-(e), une représentation $\rho : \mathbf{W} \rightarrow \text{End}_{D(\mathfrak{g})}(\mathbb{R}\phi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathfrak{g}}})$ en composant ρ_0 avec les isomorphismes :

$$\begin{array}{c} \mathbf{W} \xrightarrow{\rho_0} \text{End}_{\mathbb{Q}_{\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{reg}}}}(\phi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathfrak{g}}_{\text{reg}}}) \cong \text{End}_{D(\mathfrak{g})}(\underline{IC}^\bullet(\mathfrak{g}; \phi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathfrak{g}}}|_{\mathfrak{g}_{\text{reg}}})) \cong \text{End}_{D(\mathfrak{g})}(\mathbb{R}\phi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathfrak{g}}}) \\ \underbrace{\hspace{15em}}_{\rho} \uparrow \end{array}$$

5.5.1 Pour toute partie $\mathbf{S} \subseteq \mathfrak{g}$, notons $\tilde{\mathbf{S}} = \phi^{-1}\mathbf{S}$ et $\phi_{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{S}$ la restriction de ϕ à $\tilde{\mathbf{S}}$. Lorsque \mathbf{S} est localement fermé, on a l'isomorphisme de changement de base (1.5.3-(f)) :

$$i_{\tilde{\mathbf{S}}}^{-1} \circ \mathbb{R}\phi_* \xrightarrow[\cong]{} \mathbb{R}\phi_{\mathbf{S}*} \circ i_{\mathbf{S}}^{-1},$$

⁵⁸ Cf. [Lu] §3 p. 176.

et donc des homomorphismes d'anneaux :

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_{D(\mathfrak{g})}(\mathbb{R}\phi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathfrak{g}}}) &\longrightarrow \mathrm{End}_{D(S)}(i_S^{-1}\mathbb{R}\phi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathfrak{g}}}) \\
&\downarrow \cong \\
&\mathrm{End}_{D(S)}(\mathbb{R}\phi_{S*}\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{S}}) \\
&\downarrow \\
\prod_{m \in \mathbb{Z}} \mathrm{End}_{\underline{\mathbb{Q}}_S}(\mathbb{R}^m\phi_{S*}\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{S}}) &\longrightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\mathbb{R}\Gamma_{\tilde{S}}} \prod_{m \in \mathbb{Z}} \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(H_c^m(\tilde{S}; \mathbb{Q})) \\ \xrightarrow{\mathbb{R}\Gamma} \prod_{m \in \mathbb{Z}} \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(H^m(\tilde{S}; \mathbb{Q})) \end{cases}
\end{aligned} \tag{\mathcal{L}}$$

5.5.2 Représentations du groupe de Weyl. Pour toute partie localement fermée $S \subseteq \mathfrak{g}$, on note :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(S) : \mathbb{Q}[\mathbf{W}] \rightarrow \mathrm{End}_{D(S)}(\mathbb{R}\phi_{S*}\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{S}}) \\ L^m(S) : \mathbb{Q}[\mathbf{W}] \rightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(H^m(\tilde{S}; \mathbb{Q})) \\ L_c^m(S) : \mathbb{Q}[\mathbf{W}] \rightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(H_c^m(\tilde{S}; \mathbb{Q})) \end{cases}$$

les homomorphismes qui résultent de composer $\rho : \mathbf{W} \rightarrow \mathrm{End}_{D(\mathfrak{g})}(\mathbb{R}\phi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathfrak{g}}})$ avec la suite d'homomorphisme correspondants dans le diagramme (\mathcal{L}) ci-dessus.

5.5.3 Représentations du groupe de Weyl dans la cohomologie des variétés de Steinberg. Un cas particulier des constructions précédentes est celui où $S = \mathcal{O}_\xi$ pour $\xi \in \mathcal{N}$. Dans ce cas $\phi_{\mathcal{O}_\xi}$ est une fibration localement triviale \mathbf{G} équivariante de fibre \mathcal{B}_ξ et le faisceau dérivé $\mathbb{R}^m\phi_{\mathcal{O}_\xi,*}\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathcal{O}}_\xi}$ est un système local de fibre $H^m(\mathcal{B}_\xi, \mathbb{Q})$. Le terme $\mathrm{End}_{\underline{\mathbb{Q}}_S}(\mathbb{R}^m\phi_{S*}\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{S}})$ du diagramme (\mathcal{L}) est donc isomorphe à $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}, \Pi_1(\mathcal{O}_\xi)}(H^m(\mathcal{B}_\xi; \mathbb{Q}))$ ce qui permet de préciser l'image de l'homomorphisme $L^m(\mathcal{O}_\xi)$; on a :

$$\boxed{L^m(\mathcal{O}_\xi) : \mathbb{Q}[\mathbf{W}] \rightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}, \Pi_1(\mathcal{O}_\xi)}(H^m(\mathcal{B}_\xi; \mathbb{Q}))}$$

Par conséquent, la représentation du groupe de Weyl sur chaque $H^m(\mathcal{B}_\xi; \mathbb{Q})$ commute à la représentation par monodromie de $\Pi_1(\mathcal{O}_\xi)$.

5.5.4 Proposition. La représentation $L^*(\{0\}) : \mathbb{Q}[\mathbf{W}] \rightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(H^*(\mathcal{B}_0; \mathbb{Q}))$ est isomorphe à la représentation régulière de \mathbf{W} . En particulier, $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ est injective.

Démonstration. Munissons \mathfrak{g} d'une métrique euclidienne ; soit $B(0, \varepsilon)$ la boule ouverte de rayon $\varepsilon > 0$ centrée en 0 et notons $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}, \varepsilon} := B(0, \varepsilon) \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. La représentation $L^*(\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}, \varepsilon})$ est isomorphe à la représentation $L^*(\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}})$ puisque $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}, \varepsilon}$ est un retract de \mathfrak{g} et $L^*(\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}, \varepsilon})$ se factorise à travers $L^*(B(0, \varepsilon))$. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
H^*(\mathcal{B}_0; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{\cong_1} & H^*(\tilde{B}(0, \varepsilon); \mathbb{Q}) & \xrightarrow{r^*} & H^*(\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathrm{reg}, \varepsilon}; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{\cong_2} & H^*(\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathrm{reg}}; \mathbb{Q}) \\
& & \uparrow & & & & \uparrow \cong_3 (\mathbf{W}) \\
& & \cong_4 \uparrow p^* & & & & H^*(\mathbf{G}/\mathbf{H} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}; \mathbb{Q}) \\
& & & & & & \uparrow q^* [\mathbf{W}] \\
H^*(\mathbf{G}/\mathbf{B}; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{\cong} & & \xrightarrow{\cong} & H^*(\mathbf{G}/\mathbf{B}; \mathbb{Q}) & &
\end{array}$$

Tous les morphismes proviennent des inclusions d'ensembles à l'exception de l'équivalence ' \cong_3 ' qui résulte de 5.3.2-(b), de p^* qui correspond à l'application $p : \tilde{B}(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$ restriction de la projection $p_1 : \tilde{\mathfrak{g}} = \mathbf{G} \times_{\mathbf{B}} \mathfrak{b} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$ et de q^* qui correspond à $q : \mathbf{G}/\mathbf{H} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$, définie par

$q(x, h) = \bar{x}$. Nous indiquons par ‘ (\mathbf{W}) ’ les applications compatibles aux actions du groupe de Weyl données par les représentations \mathcal{L} et par ‘ $[\mathbf{W}]$ ’ celles compatibles à l’action de \mathbf{W} à droite sur \mathbf{G}/\mathbf{B} . Enfin, \equiv_1 et \equiv_4 sont bijectives puisque \mathcal{B}_0 est retract de $\tilde{B}(0, \varepsilon)$.

Cela étant, le morphisme q^* (et donc r^*) est **injectif**. En effet, l’application q se factorise à travers les projections $\pi_1 : \mathbf{G}/\mathbf{H} \times \mathfrak{h}_{\text{reg}} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$ et $\pi_2 : \mathbf{G}/\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$. Le morphisme π_1^* est injectif d’après la formule de Künneth (par exemple) et π_2^* est bijectif car π_2 est de fibre \mathbf{B}/\mathbf{H} acyclique.

Par conséquent, le morphisme p^* du diagramme est compatible aux actions de \mathbf{W} et la structure de \mathbf{W} -module de $H^*(\mathcal{B}_0; \mathbb{Q})$ est celle qui provient de l’action à droite de \mathbf{W} sur \mathbf{G}/\mathbf{B} . Il est bien connu que cette représentation est isomorphe à la représentation régulière de \mathbf{W} ⁽⁵⁹⁾; en particulier, l’homomorphisme $L^*(\{0\}) : \mathbb{Q}[\mathbf{W}] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}}(H^*(\mathcal{B}_0; \mathbb{Q}))$ est injectif.

L’injectivité de $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ résulte de ce que $L^*(\{0\})$ se factorise à travers $\mathcal{L}(\mathcal{N})$. ■

5.5.5 Corollaire. *L’homomorphisme $\mathcal{L}(\mathcal{N}) : \mathbb{Q}[\mathbf{W}] \rightarrow \text{End}_{D(\mathcal{N})}(\mathbb{R}\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathcal{N}}})$ est bijectif.*

Démonstration. $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ est une injection (5.5.4) entre deux espaces vectoriels de même dimension (5.4.2-(c)). ■

5.6 Correspondance de Springer d’après Borho-MacPherson

D’après l’égalité ‘ \equiv_3 ’ de démonstration du théorème 5.4.2, et compte tenu du corollaire précédent, on a les isomorphismes d’anneaux :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[\mathbf{W}] &\xrightarrow[\equiv_3]{\mathcal{L}(\mathcal{N})} \text{End}_{D(\mathcal{N})}(\mathbb{R}\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathcal{N}}}) \xrightarrow[\equiv_3]{} \bigoplus_{\xi} \text{End}_{\mathbb{Q}, \Pi_1(\mathcal{O}_{\xi})} \left(\bigoplus_{\phi_{\xi}} \phi_{\xi} \otimes_{\mathbb{Q}} V_{\xi, \phi_{\xi}} \right) \\ &\quad \parallel \\ &\quad \bigoplus_{\xi, \phi_{\xi}} \text{End}_{\mathbb{Q}, \Pi_1(\mathcal{O}_{\xi})}(\phi_{\xi}) \otimes_{\mathbb{Q}} \text{End}_{\mathbb{Q}}(V_{\xi, \phi_{\xi}}) \\ &\quad \parallel * \\ &\quad \bigoplus_{\xi, \phi_{\xi}} \text{End}_{\mathbb{Q}}(V_{\xi, \phi_{\xi}}) \end{aligned}$$

où l’égalité marquée d’un astérisque résulte de ce que les représentations ϕ_{ξ} sont des représentations irréductibles sur \mathbb{Q} du groupe $Z_{\text{Ad}G}(\xi)/Z_{\text{Ad}G}(\xi)^0$ (5.4.2-(b)) et sont donc absolument irréductibles⁽⁶⁰⁾. Par conséquent chaque espace vectoriel $V_{\xi, \phi_{\xi}}$ apparaît muni d’une représentations du groupe de Weyl que l’on note $\rho_{(\xi, \phi_{\xi})}$.

5.6.1 Définition. L’application

$$\left\{ \begin{array}{l} (\xi, \phi_{\xi}) \left| \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\xi} \text{ est une orbite nilpotente de } \mathfrak{g} \text{ et } \phi_{\xi} \text{ est une représentation irréductible de } \Pi_1(\mathcal{O}_{\xi}) \text{ dont la multiplicité dans la représentation par monodromie de } \Pi_1(\mathcal{O}_{\xi}) \text{ dans } H^{2 \dim(\mathcal{B}_{\xi})}(\mathcal{B}_{\xi}, \mathbb{Q}) \text{ est non nulle} \end{array} \right. \end{array} \right\} \xrightarrow{\rho} \text{Mod}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{W})$$

définie par $(\xi, \phi_{\xi}) \mapsto \rho_{(\xi, \phi_{\xi})}$ est appelée «*la correspondance de Springer*».

⁵⁹ Cf. la thèse de Borel [Bo₁] lemme 27.1 p. 193.

⁶⁰ Cf. [Spr_B] p. 589-21, où Springer écrit : “Si G est adjoint et $\xi \in \mathcal{N}$ le groupe $Z_G(\xi)/Z_G^0(\xi)$ a la propriété que toutes ses représentations irréductibles sont définies sur \mathbb{Q} . C’est démontré par une analyse cas par cas dans [BoAl₀] (E 4) et dans [Al] pour les types exceptionnels.”

5.6.2 La formule (c) de 5.4.2 s'écrit maintenant :

$$\boxed{|\mathbf{W}| = \sum_{(\xi, \phi_\xi)} \dim(\rho_{(\xi, \phi_\xi)})^2} \quad (\diamond)$$

et comme $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ est injective, chaque représentation de \mathbf{W} irréductible sur \mathbb{Q} intervient avec multiplicité non nulle dans au moins une représentation $\rho_{(\xi, \phi_\xi)}$.

Cela étant, tout ce que nous avons fait en travaillant sur la catégorie de faisceaux de \mathbb{Q} -espaces vectoriels, se transpose *sans autre changement que l'extension de scalaires* au contexte des faisceaux des \mathbb{C} -espaces vectoriels. En particulier la formule (\diamond) reste essentiellement inchangée et nous avons maintenant

$$\boxed{\sum_{\chi \in \widehat{\mathbf{W}}_{\mathbb{C}}} \dim(\chi)^2 = |\mathbf{W}| = \sum_{(\xi, \phi_\xi)} \dim(\rho_{(\xi, \phi_\xi)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^2} \quad (\diamond\diamond)$$

où, encore une fois, chaque $\chi \in \widehat{\mathbf{W}}_{\mathbb{C}}$ intervient avec multiplicité non nulle dans au moins une représentation $\rho_{(\xi, \phi_\xi)} \otimes \mathbb{C}$.

L'égalité de gauche dans $(\diamond\diamond)$ est bien connue et correspond à la décomposition de $\mathbb{C}[\mathbf{W}]$ en composantes isotypiques sous l'action de la représentation régulière de \mathbf{W} . On comprend alors aisément que $(\diamond\diamond)$ n'est possible que si chaque représentation $\rho_{(\xi, \phi_\xi)} \otimes \mathbb{C}$ est elle-même irréductible et si la correspondance de Springer est une bijection sur $\widehat{\mathbf{W}}_{\mathbb{C}}$. L'égalité $(\diamond\diamond)$ donne alors un renseignement supplémentaire important, à savoir : les caractères irréductibles sur \mathbb{C} de \mathbf{W} sont définis sur \mathbb{Q} ; ou encore : les représentations $\rho_{(\xi, \phi_\xi)}$ (définies sur \mathbb{Q}) sont absolument irréductibles.

5.6.3 Les remarques précédentes prouvent le célèbre théorème de Springer⁽⁶¹⁾ :

Théorème. *Soit \mathbf{W} le groupe de Weyl d'un groupe algébrique complexe semisimple connexe.*

- a) *La correspondance de Springer est une bijection sur $\widehat{\mathbf{W}}_{\mathbb{Q}}$.*
- b) *Les représentation irréductibles sur \mathbb{Q} de \mathbf{W} sont absolument irréductibles.*

5.6.4 Autres constructions. En dehors de Springer ([Spr₁] '76, [Spr₂] '78), les auteurs suivants ont construit des représentations de \mathbf{W} dans $H^*(\mathcal{B}_\xi; \mathbb{Q})$ par des méthodes ou des approches différentes : Kazhdan-Lusztig ([Ka] '80), Slodowy ([Sl₁] '80), Lusztig ([Lu] '81), Rossmann ([Ro] '91). Les représentations obtenues par ces dernières méthodes coïncident entre elles et diffèrent de celles de Springer par le caractère signature (*cf.* [Ho]).

§ 6. Références bibliographiques

- [Al] ALEXEEVSKY. Groupe des composantes de centralisateurs d'éléments unipotents dans les groupes algébriques semisimples ; (En russe). Pub. Inst. Math. Tbilisi 52, 5–27, (1979).
- [BBD] BEĬLISON, BERNSTEIN, DELIGNE. “*Faisceaux pervers*” ; Analyse et topologie sur les espaces singuliers, I (Luminy, 1981). Astérisque, 100, Soc. Math. France, Paris, (1982).
- [Bo₁] BOREL. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts ; Ann. of Math. (2) 57, (1953).

⁶¹ [Spr₁] §6 th. 6.10 p. 198 et [Spr₂] §1 th. 1.13 p. 283 et §3.11 p. 290.

- [Bo₂] BOREL. Introduction to middle intersection cohomology and perverse sheaves; Algebraic groups and their generalizations: classical methods (University Park, PA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., 56, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 25–52 (1994).
- [BoAl₀] BOREL ET AL. “*Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups*”; (The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1968/69). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 131 Springer, Berlin (1970).
- [BoAl] BOREL ET AL. “*Intersection Cohomology*”; Progress in mathematics 50. Birkhäuser (1984).
- [BoMo] BOREL, MOORE. Homology theory for locally compact spaces; Michigan Math. J. 7, 137–159 (1960).
- [BoMc₁] BORHO, MACPHERSON. Représentations des groupes de Weyl et homologie d’intersection pour les variétés nilpotentes; C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292, no. 15, 707–710 (1981).
- [BoMc₂] BORHO, MACPHERSON. Partial resolutions of nilpotent varieties; Analysis and topology on singular spaces, II, III (Luminy, 1981), Astérisque, 101-102, Soc. Math. France, Paris, (23–74) (1983).
- [Br] BREDON. “*Sheaf theory*”; Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 170. Springer-Verlag, New York, (1997).
- [Bry] BRYLINSKI. (Co)-homologie d’intersection et faisceaux pervers; Séminaire Bourbaki, 34^e année, 1981/82 n° 585, février (1982).
- [C] LES COURS DU CIMPA. “*Images directes et constructibilité. Éléments de la théorie des systèmes différentiels*”; Papers from the CIMPA Summer School held in Nice, August and September 1990. Edited by Philippe Maisonobe and Claude Sabbah. Travaux en Cours, 46. Hermann, Paris, (1993).
- [Di] DIMCA. “*Singularities and topology of hypersurfaces*”; Universitext. Springer-Verlag, New York, (1992).
- [GWPL] GIBSON, WIRTHMÜLLER, DU PLESSIS, LOOIJENGA. “*Topological stability of smooth mappings*”; Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1976).
- [Go] GODEMENT. “*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*”; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).
- [GoMc₁] GORESKY, MACPHERSON. Intersection homology theory; Topology 19, no. 2, 135–162 (1980).
- [GoMc₂] GORESKY, MACPHERSON. Intersection homology II; Inventiones Mathematicae 71, 77–129 (1983).
- [Hd] HARDT. Semi-algebraic local-triviality in semi-algebraic mappings; Amer. J. Math. 102, no. 2, 291–302 (1980).
- [Ha₁] HARTSHORNE. “*Residues and duality*”; Lect. notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20 Springer-Verlag, Berlin-New York (1966).
- [Ha₂] HARTSHORNE. “*Algebraic Geometry*”; Graduate texts in mathematics 52. Springer-Verlag (1977).
- [Ho] HOTTA. On Springer’s representations; J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 28 (1981), no. 3, 863–876 (1982)
- [KS] KASHIWARA, SCHAPIRA. “*Sheaves on manifolds*”; Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292. Springer-Verlag, Berlin, (1990).
- [Ka] KAZHDAN, LUSZTIG. A topological approach to Springer’s representations; Adv. in Math. 38, no. 2, 222–228 (1980).
- [Kl] KLEIMAN. The development of intersection homology theory; A century of mathematics in America, Part II, 543–585, Hist. Math., 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1989).
- [Li] LIPMAN. Equisingularity and simultaneous resolution of singularities; Resolution of singularities (Obergrugl, 1997). Progr. Math., 181, Birkhäuser, Basel, 485–505 (2000).
- [Lu] LUSZTIG. Green polynomials and singularities of unipotent classes; Adv. in Math. 42, no. 2, 169–178 (1981).

- [Ma] MATHER. Stratifications and mappings; Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971), pp. 195–232. Academic Press, New York, (1973).
- [Mi] MILNOR. “*Morse theory.*”; Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963 vi+153 pp.
- [Ro] ROSSMANN. Invariant eigendistributions on a semisimple Lie algebra and homology classes on the conormal variety. II. Representations of Weyl groups; J. Funct. Anal. 96, no. 1, 155–193 (1991).
- [Sa] SAITO. Decomposition theorem for proper Kähler morphisms; Tohoku Math. J. (2) 42, no. 2, 127–147 (1990).
- [Sh] SHOJI. Geometry of orbits and Springer correspondence.; Orbites unipotentes et représentations, I. Astérisque No. 168, 9, 61–14 (1988).
- [Sl₁] SLODOWY. “*Four lectures on simple groups and singularities*”; Communications of the Math. Institute, Rijksuniversiteit Utrecht, 11. Rijksuniversiteit Utrecht, Mathematical Institute, Utrecht, (1980).
- [Sl₁] SLODOWY. “*Four lectures on simple groups and singularities*”; Communications of the Math. Institute, Rijksuniversiteit Utrecht, 11. Rijksuniversiteit Utrecht, Mathematical Institute, Utrecht, (1980).
- [Sl₂] SLODOWY. “*Simple singularities and simple algebraic groups*”; Lecture Notes in Mathematics, 815. Springer, Berlin, (1980).
- [Spa₀] SPALTENSTEIN. The fixed point set of a unipotent transformation on the flag manifold; Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 79. Indag. Math. 38, no. 5, 452–456 (1976).
- [Spa₁] SPALTENSTEIN. On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroups; Topology 16, no. 2, 203–204 (1977).
- [Spa₂] SPALTENSTEIN. Resolutions of unbounded complexes; Compositio Math. 65, no. 2, 121–154 (1988).
- [Spr₁] SPRINGER. Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups; Invent. Math. 36, 173–207 (1976).
- [Spr₂] SPRINGER. A construction of representations of Weyl groups; Invent. Math. 44, no. 3, 279–293 (1978).
- [Spr_B] SPRINGER. Quelques applications de la cohomologie d’intersection; Séminaire Bourbaki, 34^e année, 1981/82 n° 589, février (1982).
- [St] STEINBERG. On the desingularization of the unipotent variety; Invent. Math. 36, 209–224 (1976).
- [Te₁] TEISSIER. Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney; Algebraic geometry (La Rabida, 1981), Lecture Notes in Math., 961, Springer, Berlin, 314–491 (1982).
- [Te₂] TEISSIER. Sur la classification des singularités des espaces analytiques complexes; Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983), 763–781, PWN, Warsaw, (1984).
- [Th] THOM. Ensembles et morphismes stratifiés.; Bull. Amer. Math. Soc. 75, 240–284 (1969).
- [W] WHITNEY. Tangents to an analytic variety; Ann. of Math. (2) 81, 496–549 (1965).

—————×—————

Alberto Arabia
 CNRS
 Institut de Mathématiques de Jussieu
 Théorie des Groupes
 Samedi 30 juillet 2018