



**DOSSIER DE
DEMANDE D'AVANCEMENT
AU TITRE DE LA CAMPAGNE
2018**

Indiquez le grade pour lequel vous demandez un avancement

X CRHC	<input type="checkbox"/> DR1	<input type="checkbox"/> DRCE1	<input type="checkbox"/> DRCE2
Attention : si vous demandez un avancement au titre de la commission interdisciplinaire « Gestion de la recherche » (CID 50), merci de vous reporter à la fiche-résumé en page 4.			

Nom d'usage : Arabia

Prénom : Alberto

Date de naissance : 26 février 1953 (65 ans)

Section(s) du Comité national : 41, Mathématiques et interactions des mathématiques

Affectation (code et intitulé de l'unité de recherche) : : Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive gauche (IMJ-PRG) - UMR 7586. Projet : Groupes, représentations et géométrie (Responsables : Éric Vasserot et Emmanuel Letellier). Université Paris Diderot. Bâtiment Sophie Germain, 6^{ème} étage, bureau 608.

Ville : Paris 75013

Nom du directeur : Loïc Merel

Merci de renseigner la fiche-résumé ci-dessous et de joindre à votre dossier de candidature une notice de vos titres et travaux.

FICHE - RÉSUMÉ

1 – Contributions scientifiques

(A) Cohomologie équivariante de la variété des drapeaux (avant 1995). Je me suis formé à la cohomologie équivariante dans les années 1985, alors que Michèle Vergne dirigeait mes recherches dans le prolongement de deux très beaux articles de Berline-Vergne, ceux où elles redécouvrent la cohomologie équivariante et l'appliquent à la théorie des représentations des groupes de Lie. À l'époque, elles venaient de trouver la version *équivariante* de l'homomorphisme de Chern-Weil $S(\mathfrak{t}^*) \rightarrow H(K/T)$ pour la variété des drapeaux K/T d'un groupe de Lie compact connexe K de tore maximal T d'algèbre de Lie \mathfrak{t} . Michèle Vergne me demande de revoir le célèbre article « *Schubert cells and the cohomology of the spaces K/T* » de Bernstein-Gelfand-Gelfand, (BGG) sous l'angle de la cohomologie K -équivariante de K/T , au sens de Berline-Vergne. Dans ma thèse, je prouve que cet homomorphisme $S(\mathfrak{t}^*) \rightarrow H_K(K/T)$ est un *isomorphisme*, et que les opérateurs de BGG d'intégration $\int_{X(w)} : H_K(K/T) \rightarrow H_K(\cdot)$ sur les cycles de Schubert $X(w) \subseteq K/T$, où $w \in W = T(K/T)$, s'interprètent comme des morphismes $L(w) : S(\mathfrak{t}^*) \rightarrow S(\mathfrak{t}^*)^W$ de $S(\mathfrak{t}^*)^W$ -modules que j'explicité. Je montre que la famille $\{L(w) : S(\mathfrak{t}^*) \rightarrow S(\mathfrak{t}^*)^W \mid w \in W\}$ est une base duale de $H_K(K/T)$ en tant que $S(\mathfrak{t}^*)^W$ -module et, surtout, qu'elle peut être construite de manière entièrement combinatoire à partir d'une formule de Demazure qui suggère que l'on a $L(r_\alpha w) = A_\alpha(L(w))$, lorsque $r_\alpha w > w$, où A_α l'opérateur aux différences divisées dont l'action sur un polynôme P est donnée par $A_\alpha(P) = (P - r_\alpha(P))/\alpha$. C'était le cas et c'était le but fixé pour ma thèse publiée aux *Inventiones Mathematicae* dans [1]. Comme retombées immédiates, moyennant la formule de localisation de Berline-Vergne, on avait (i) une formule d'Harish Chandra, (ii) la formule de caractères d'Hermann Weyl, (iii) la transformée de Fourier de la mesure de Liouville des orbites coadjointes régulières de K . Peu après, Michèle Vergne attire mon attention sur la note de Kostant-Kumar « *The nil-Hecke ring and cohomology of G/P* », où ils introduisent une certaine sous-algèbre Λ de l'algèbre $F(W, S(\mathfrak{t}^*))$ des fonctions rationnelles sur le groupe de Weyl W stable par les opérateurs de différences divisées A_α . En peu de temps, je comprends qu'il s'agit de l'algèbre de cohomologie non pas K -équivariante, mais « T -équivariante » de K/T , et je suis emmené à déterminer explicitement les classes d'Euler équivariantes pour la première fois dans l'histoire du sujet. Ces découvertes ont été exposées au MIT en 1986, devant Kostant et Kumar, qui très rapidement publièrent la version K -théorie équivariante. (Mes articles (1) et (2) ont été cités plus de 70 fois.)

(B) Application de la cohomologie équivariante à l'étude des singularités (95-2000). La détermination de formules explicites pour les classes d'Euler T -équivariantes des points fixes isolés des variétés des drapeaux et autres variétés différentiables annexes, p.e. les variétés de Bott-Samelson, était une question très importante puisque, comme l'avaient déjà observé Berline-Vergne, ces classes sont un ingrédient fondamental de leur célèbre *formule de localisation*. Il s'agissait dans tous les cas étudiés de polynômes homogènes dont le nombre de variables est le rang du tore T . En m'intéressant aux variétés de Schubert, j'ai été amené à sortir du cadre différentiel et à m'intéresser aux variétés algébriques singulières munies d'une action d'un tore T . Là aussi, on disposait d'une formule de localisation (Borel, Atiyah-Segal, Quillen). J'ai alors remarqué que lorsque les points fixes étaient isolés, comme c'est le cas dans les variétés de Schubert, on pouvait encore définir l'analogue des classes d'Euler équivariantes, mais, au lieu d'être des polynômes, elles se présentaient comme des *fractions rationnelles*. Dans une discussion avec Michèle Vergne autour de ces résultats, l'idée que leur forme pouvait renseigner sur le type de singularité des points fixes prit la forme d'une conjecture : *le point fixe isolé x est rationnellement lisse si et seulement si la classe d'Euler T -équivariante en x est polynomiale*. Peu après, lors ma visite au MIT, j'en ai parlé à Shrawan Kumar, qui réussira à le prouver pour les variétés de Schubert des groupes semi-simples complexes de rang ≤ 2 par des méthodes algébriques. De mon côté, j'ai développé une théorie cohomologique sur le sujet dans [2] (1998), cité plus bas, où je donne un critère de lissité rationnelle assez général qui s'applique aux actions d'un tore T à points fixes isolés sur une pseudovariété orientable quelconque et pas seulement aux variétés de Schubert. Ce critère m'a permis, dans le même article, de démontrer la conjecture en toute généralité, quoiqu'après une preuve algébrique de Carrel-Peterson et une seconde démonstration, plus générale cette fois, de Kumar lui-même, leurs travaux étant tous les deux restreints aux variétés de Schubert. Mon point de vue, fut repris par d'autres, notamment Michel Brion dans « *Equivariant cohomology and equivariant intersection theory* » (1998). (L'article [2] a été cité par 20 autres articles.)

Quelques années plus tard, en 2004, j'ai eu l'agréable surprise de pouvoir utiliser mon critère de lissité dans un contexte éloigné de celui des variétés de Schubert, celui des variétés de représentation d'un carquois. Dans deux articles assez longs de plus de 80 pages, basés sur l'étude de Lusztig des bases canoniques, Bédard-Schiffler et Caldéro-Schiffler, démontraient, pour les carquois *de type Dynkin*, l'équivalence qui affirme qu'une variété de représentation du carquois est rationnellement lisse si et seulement si c'est un espace affine. Grâce à mon critère, j'ai pu redémontrer ce résultat dans « *Lissité rationnelle des variétés de représentations d'un carquois* » [ici], en seulement quatre pages et surtout en m'affranchissant de l'hypothèse « de type Dynkin ».

(C) Recollement en catégorie dérivée de la cohomologie de De Rham p -adique de Monsky Washnitzer (2002-2013). Avec Zoghman Mebkhout, nous avons réussi entre 2003 et 2007 à mener à terme les idées de Grothendieck de son article « *Crystals and the De Rham Cohomology of schemes* » (1966), qui devaient conduire à une définition intrinsèque de la cohomologie de de Rham p -adique basée sur la cohomologie de Monsky-Washnitzer des variétés affines lisses sur un corps de caractéristique positive, introduite à l'époque (avec, entre autres, la cohomologie étale), comme un outil pour démontrer les conjectures de Weil. Bien que très prometteuse, la théorie de Monsky-Washnitzer(-Meredith) restera inachevée suite au succès de la cohomologie étale dans les années 70. Mebkhout me propose en 2001/2 de réfléchir au problème du recollement de la cohomologie de Monsky-Washnitzer. Je l'ai fait en me concentrant sur le cas le plus simple possible, celui d'un recouvrement affine de la droite affine en caractéristique positive, où le problème est déjà non trivial. En décembre 2004, le problème avait été résolu. J'ai rédigé un compte rendu des idées et résultats principaux [ici], après quoi, nous avons entrepris la rédaction de deux articles pour le cas général, c'est-à-dire celui d'un schéma lisse et séparé sur un corps de caractéristique positive (donc pas nécessairement propre). Dans ces articles, soumis en 2007, nous construisons un foncteur de cohomologie de la catégorie des schémas lisses et séparés sur un corps de caractéristique positive fournissant les bon nombres de Betti et prolongeant le foncteur de cohomologie de Monsky-Washnitzer défini sur la sous-catégorie des schémas affines. Les opérations cohomologiques pour la cohomologie de de Rham p -adique pour un morphisme de variétés algébriques sont ensuite définies *sans aucune hypothèse restrictive*.

C'était une avancée extraordinaire. Parmi les retombées :

- La finitude des nombres de Betti p -adiques pour les variétés algébres non singulières sur un corps fini.
- L'existence d'une suite spectrale de Cech-de Rham reliant les cohomologies de de Rham p -adique locales et globale.
- La suite exacte longue de Gysin pour la cohomologie de de Rham p -adique pour tout couple de variétés.
- Opérations cohomologiques associées aux morphismes. On définit les images inverses et directes pour les D^\dagger -modules *spéciaux*, ces opérations sont à la base de la fonctorialité de la cohomologie de de Rham p -adique.
- La suite exacte de Gysin en cohomologie de de Rham p -adique et la classe de cohomologie d'un cycle.
- La fonctorialité de la cohomologie p -adique. En particulier, *l'action du Frobenius sur les groupes de cohomologie en résulte, que le Frobenius admette ou non des relèvements globaux !*
- La factorisation p -adique de la fonction $Z\eta$ d'une variété algébrique non singulière sur un corps fini par les polynômes caractéristiques de l'action du Frobenius en cohomologie, sans aucune restriction sur les singularités à l'infini ou de relèvement. Auparavant on connaissait le cas affine de Monsky-Washnitzer complété par le théorème de finitude de Mebkhout et le cas propre et lisse par la théorie cristalline de Berthelot.

(D) (2000) Ce travail a exigé de compléter les travaux de Renée Elkik sur les relèvements des algèbres lisses de la caractéristique positive à la caractéristique nulle. Je démontre dans [3] que pour *tout* anneau R , et *tout* idéal $I \subseteq R$, le foncteur de réduction modulo I , de la catégorie des R -algèbres lisses vers la catégorie de R/I -algèbres lisses est surjectif et *plein*, de plus, deux morphismes qui relèvent un même morphisme sont toujours homotopes. Je résolvais ainsi un problème qui avait beaucoup bloqué les fondements de la théorie de Monsky-Washnitzer (y compris dans le cas affine) où la question de l'existence de relèvements lisses et homotopes est cruciale. Il est surprenant qu'aucune hypothèse de finitude n'ait été nécessaire pour établir ces propriétés. (L'article [3] est cité par 28 d'autres articles.)

(E) (2013) Plus tard, la généralité et le caractère intrinsèque de notre définition de la cohomologie de de Rham p -adique m'a été indispensable pour établir un théorème de points fixes de Lefschetz pour les variétés algébriques lisses en caractéristique positive, propres ou non [ici].

Choix de 5 publications les plus significatives (références complètes)

- 1) [Cycles de Schubert et cohomologie équivariante de \$K/T\$. Invent. Math. 85 \(1986\), no. 1, 39–52.](#)
- 2) [Cohomologie T-équivariante de la variété de drapeaux d'un groupe de Kac-Moody. Bull. SMF 117 \(1989\), no. 2, 129-165.](#)
- 3) [Classes d'Euler équivariantes et points rationnellement lisses. Ann. Inst. Fourier \(Grenoble\) 48 \(1998\), no. 3, 861–912.](#)
- 4) [Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes. Comment. Math. Helv. 76 \(2001\), no. 4, 607–639.](#)
- 5) [Sur le topos infinitésimal \$p\$ -adique d'un schéma lisse I Ann. Inst. Fourier \(Grenoble\) 60 \(2010\), no. 6, 1905–2094 \(189 pages\).](#)

Production scientifique	depuis le début de votre carrière	dont ces 10 dernières années	dont ces 4 dernières années
Nombre de publications dans des revues avec comité de lecture	9	1	0
Nombre de publications dans des actes de colloque avec comité de lecture			
Nombre de brevets			
Nombre de conférences invitées dans des congrès internationaux	6	2	0
Nombre d'ouvrages ou de participations importantes à des ouvrages	2	2	2

Programme de recherche

Représentation des groupes symétriques sur la cohomologie des espaces de configuration généralisés et suites spectrales "basiques". [arXiv:1609.00522 \[math.AT\]](#) septembre 2016 (191 pages). (Article soumis pour publication.)

Étant donné un espace topologique localement compact X , le produit cartésien X^n est filtré par les parties fermées $\Delta(\leq k, n, X)$ qui consistent en les n -uplets (x_1, \dots, x_n) avec au plus k coordonnées distinctes. On définit alors l'ensemble $\Delta(k, n, X)$ comme la différence $\Delta(\leq k, n, X) \setminus \Delta(< k, n, X)$. Tous ces espaces, que je désigne par la notation générique $\Delta(?k, n, X)$, sont, ce que j'appelle, les espaces de configuration « généralisés ». Cette définition étend celle d'espace de configurations non ordonnées, noté classiquement $F(n, X)$, qui correspond dans ma notation à l'ouvert $\Delta(n, n, X)$ de X^n .

Les espaces de configuration généralisés sont munis de l'action du groupe symétrique S_n par permutation des coordonnées. Ma première motivation dans ces espaces a été d'y transposer des questions classiques sur la cohomologie des espaces de configuration $F(n, X)$, et de tenter de les résoudre pour de larges familles d'espaces à l'aide de méthodes uniformes. Parmi ces questions, je me suis particulièrement intéressé aux suivantes.

1. Calcul du caractère de la représentations de S_n sur $H(\Delta(?k, n, X))$.
2. Calcul le polynôme de Poincaré des quotients de $\Delta(?k, n, X)/S_n$.
3. Déterminer, pour un nombre naturel a fixé, les nombres de Betti de $\Delta(?n-a, n, X)$ par un polynôme « universel », dépendant uniquement de n et des nombres de Betti de X .
4. Montrer que la suite spectrale de Leray des fibrations $F(b+a, X) \rightarrow F(a, X)$ dégénère.
5. Pour un nombre naturel a fixé, estimer les rangs « de stabilité de représentation » et « de polynomialité de caractère », au sens de Church-Farb, de la famille de représentations $\{H(\Delta(?n-a, n, X))\}_n$.

Je donne des réponses complètes à ces questions lorsque la cohomologie *intérieure* de X est nulle, propriété caractéristique de l'exactitude du complexe de S_n -modules gradués suivant, que j'appelle « *complexe fondamental pour le triplet (k, n, X)* » :

$$0 \rightarrow H_c^{*-k+1}(\Delta(1, n, \mathbf{X})) \rightarrow \dots \rightarrow H_c^{*-1}(\Delta(k-1, n, \mathbf{X})) \rightarrow H_c^*(\Delta(k, n, \mathbf{X})) \rightarrow H_c^*(\Delta(\leq k, n, \mathbf{X})) \rightarrow 0$$

Je rappelle que la cohomologie *intérieure* d'un espace est, par définition, l'image de la cohomologie à support compact dans la cohomologie ordinaire. J'appelle alors « *i-acycliques* » les espaces dont la cohomologie intérieure est nulle. Il s'agit clairement d'espaces non compacts, parmi lesquels on compte : les espaces contractiles non compacts, les groupes de Lie réels connexes non compacts, et, si X est *i-acyclique*, tout ouvert U de X , tout quotient X/W par un groupe fini W , et tout produit $X \times Y$ où Y est arbitraire.

L'exactitude du complexe fondamental permet de démontrer rapidement des théorèmes nouveaux importants pour les fondements de l'étude cohomologique des espaces de configuration sur un corps de caractéristique quelconque. Par exemple, il donne une réponse à la question de savoir de quoi dépendent les cohomologies des espaces de configuration relativement à celle de l'espace considéré. On savait que des espaces homotopes peuvent avoir des espaces de configuration de cohomologies incomparables. Maintenant, on est en mesure de dire que si deux espaces *i-acycliques* ont la même cohomologie à support compact, il en sera de même de leurs espaces de configuration, c'est un résultat assez remarquable pour lequel il n'y avait pas de conjecture auparavant.

L'exactitude du complexe fondamental me permet aussi de généraliser la formule de caractères de Macdonald du produit cartésien aux espaces de configuration. Je démontre ce qui suit.

Théorème. Soit \mathbf{X} un espace *i-acyclique*. Si $\alpha \in S_m$, on a

$$\frac{\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(\alpha, T)}{T^m} = \prod_{d=1}^m d^{x_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(-T^e)}{dT^e} \right)^{x_d},$$

où $\chi_c(\mathbf{F}_m)(\alpha, T) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{tr}(\alpha: H_c^i(\mathbf{F}_m))(-T)^i$, et où $(1^{x_1}, 2^{x_2}, \dots, m^{x_m}) \vdash m$ est le type de la permutation α , $\mu(_)$ est la fonction de Möbius, $\mathcal{P}_c(_)$ est le polynôme de Poincaré de $H_c(_)$, et $(_)!$ est la factorielle décroissante.

Dans un deuxième temps, et dans le but d'étudier la possibilité d'étendre certains résultats aux espaces X généraux, en particulier compacts, j'introduis une suite spectrale que j'appelle « *basique* », qui converge vers la cohomologie de $F(n, X)$, et est telle que les termes de ses différentes pages E_i , pour $i \geq 2$, ne font intervenir que des espaces *i-acycliques*. La construction de la suite spectrale étant naturelle par rapport à X , les réponses explicites aux questions de la liste précédente s'appliquent aux termes E_i , fournissant des réponses pour un espace X général. C'est ainsi que j'ai réussi à étendre les questions concernant la stabilité des nombres de Betti et la polynomialité des caractères de S_n aux familles $\{F(n, X)\}_n$ pour toute pseudovariété réelle X orientable. Je généralise ainsi largement les résultats de Church dont les méthodes (p.e. la suite spectrale de Totaro) sont limitées au cadre des variétés lisses. Mon approche montre donc, comme cas particulier, que les mêmes résultats sont valables pour toute variété algébrique complexe, qu'elle soit lisse ou singulière !

Ces méthodes m'ont permis d'aller plus loin en conjecturant et démontrant d'autres résultats de stabilité, notamment pour les familles de représentations $\{H^i(\Delta(?)(n-a), n, X)\}_n$, avec i et a fixés et où X est une pseudovariété réelle X orientable (lisse ou non), pour lesquelles il n'existait précédemment aucune conjecture. Par exemple, je démontre que la famille de caractères correspondante est polynomiale pour $n \geq 4i + 4a$, si $\dim(X) = 2$, et pour $n \geq 2i + 4a$, si $\dim(X) \geq 3$.

Mon article, cité en intitulé, rend compte de ce long travail. Comme il est dit [ici], le nombre important de résultats que j'ai pu démontrer témoigne de l'utilité et du bien-fondé de mes idées. Il y a encore beaucoup de questions ouvertes accessibles par cette approche.

Dan Petersen, qui est une autorité reconnue dans la discipline, a utilisé une partie de mes résultats dans un article qui vient de paraître (19-07-2018) : *Cohomology of generalized configuration spaces*, [arXiv:1807.07293 [math.AT]].

En février 2018, j'ai donné un minicours sur ce travail dans un workshop en topologie organisé par l'université de LUMS et par l'Abdus Salam School of Mathematics de Lahore, Pakistan, expérience qui sera reconduite en 2019. Pendant l'élaboration de ce cours, j'ai précisé certains aspects de la théorie générale des familles de représentations de groupes symétriques, les FB-modules, qui a donné lieu à un nouvel article : *On the equivalence of two stability conditions of FB-modules*. [arXiv:1807.05032v2]. (Article soumis pour publication.)

2 - Enseignement, formation et diffusion de la culture scientifique

• Cours de Troisième Cycle :

1. Introduction à la cohomologie de de Rham des variétés algébriques (avec Mebkhout) (1998-2000).
2. Faisceaux pervers et la correspondance de Springer (2001).
3. Introduction à l'homologie d'intersection et aux faisceaux pervers (2002).
4. Introduction à la cohomologie p -adique (avec Mebkhout), entre 2007 et 2010.
5. Stages de DEA (2009-2010). Théorème de comparaison entre cohomologies de de Rham analytique et algébrique, d'après Grothendieck (2009). Dégénérescence de la suite spectrale de Hodge-de Rham, d'après Deligne-Illusie (2010).
6. Isospectralité et Transplantations (2014-2018). Stages de M1-M2.
7. Lahore (Pakistan) février 2018. Minicours au Center for Advanced Studies in Mathematics (CASM) et université de LUMS *Representation stability of the cohomology of generalized configuration spaces*.
8. Lahore (Pakistan) février 2019. Invité par l'Abdus Salam School et pour une période d'un mois, dans le but de donner un cours plus approfondi sur les espaces de configuration et d'encadrer un ou deux étudiants en thèse.

• Faisceaux pervers sur les variétés algébriques complexes et Correspondance de Springer (d'après Borho-MacPherson). Il s'agit d'un mini-cours donné dans le Groupe de travail sur la *Correspondance de Springer* organisé par Michel Duflo, Caroline Gruson et Marc Rosso à l'Institut de Mathématiques de Jussieu en février-mars 2001. Les notes du cours ont servi pendant plusieurs années comme une introduction rapide à la fois aux faisceaux pervers et à la correspondance de Springer. On peut les consulter [ici].

• **Introductory Lectures on Equivariant Cohomology.** Livre de Loring Tu, sous presse à Princeton University Press. J'y participe

(i) En fournissant des démonstrations manquantes dans la littérature, par exemple, celle du théorème de comparaison entre la cohomologie équivariante singulière d'une variété différentielle et la cohomologie de de Rham équivariante du modèle de Cartan ; résultat annoncé sans preuve par Atiyah-Bott (*The moment map and equivariant cohomology*. Topology 23, no. 1, 1–28 (1984)). Ou encore, d'un autre théorème, dû à Cartan, au Colloque de Topologie de Bruxelles (1951) [ici].

(ii) En rédigeant le chapitre *dualité de Poincaré et morphismes de Gysin équivariants* ; (arXiv:1702.03889 [math.AT], 72 pages, (2017)).

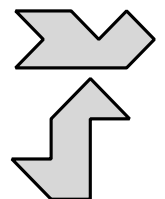
• **Livre sur l'Isospectralité et Transplantations.** Commandé par Springer pour être publié dans la collection Universitext, le livre est basé sur mon cours (6), dont les notes sont [ici].

Le livre commence par un chapitre de rappels historiques depuis Newton, autour des *problèmes directs et inverses* en sciences physiques. J'aborde ensuite le thème central livre : celui de la recherche de deux membranes de tambours de formes différentes produisant les mêmes sons, autrement dit, ayant le même ensemble de vibrations propres, le même *spectre sonore*. Grâce à la modélisation des *membranes vibrantes* par l'équation aux dérivées partielles d'*Euler-Lagrange*, je conduis le lecteur vers la question, équivalente de l'existence de domaines du plan euclidien R^2 non isométriques possédant un même *spectre étendu* de l'*opérateur de Laplace* sur l'espace des fonctions différentiables nulles au bord du domaine, des domaines dits *isospectraux*.

Ainsi formulées, le lecteur comprend que les questions d'isospectralité peuvent se poser plus généralement pour toute variété riemannienne à bord M , et ce, indépendamment de sa dimension. Cela donne l'occasion de rappeler la gestation du vaste champ d'études qu'est la *géométrie spectrale*, dont l'objet est la recherche des propriétés géométriques « nichées » dans le spectre d'opérateurs différentiels remarquables, en particulier le *Laplacien*. Je rappelle le cas de dimension 1 ; les *cordes vibrantes*, et le travail pionnier de d'Alembert de 1747, qui montre clairement que toute la géométrie d'une corde se lit dans son spectre. J'aborde ensuite le cas de la dimension 2, où je rappelle le résultat d'Hermann Weyl de 1911, qui prouve qu'il en est de même, en toute dimension, du *volume*. C'est un résultat incontournable, vu l'énorme impact qu'il a eu dans la recherche des 80 années suivantes. Car, en effet, il aura renforcé l'espoir, assez répandu à l'époque, de pouvoir retrouver toute la géométrie d'un espace à partir de son spectre étendu. Je rappelle comment cet espoir s'effondre en 1964 avec le contre-exemple de John Milnor de deux tores isospectraux de dimension 16, et comment, par la suite, la conjecture va, peu à peu, voir ses ambitions s'effondrer, pour finalement se concentrer sur les membranes planes. Un chapitre est alors consacré à *La méthode de Sunada*. Mise au point par Toshikazu Sunada, la méthode est basée sur l'idée clef de l'article célèbre de Marie-France Vigneras intitulé « *Variétés Riemanniennes isospectrales et non isométriques*, Ann. of Math. (1980), qui consiste à utiliser une propriété algébrique remarquable de sous-groupes d'un groupe G , celle d'être *presque-conjugués*. Plus faible que la propriété d'être *conjugués*, elle suffit pour établir que si V est une représentation de G , de dimension finie ou non, alors les sous-espaces de vecteurs invariants V^H et $V^{H'}$ sont isomorphes pour toute paire de sous-groupe presque-conjugués (H, H') de G . Lorsque G est un groupe fini d'isométries de M , la méthode permet alors de conclure que les variétés quotient M/H et M/H' sont isospectrales, *a priori*, c'est-à-dire sans que l'on ait à calculer explicitement le spectre des opérateurs des Laplaciens, ce qui est remarquable. Mais, sans plus, la méthode produit généralement des variétés inintéressantes car isométriques, notamment lorsque les sous-groupes en question sont *conjugués*, situation qu'il faut éviter. Le problème de la recherche de surfaces plates isospectrales prend alors une nouvelle direction, celle de trouver une variété riemannienne plate dont le groupe d'isométries comporte deux sous-groupes finis presque-conjugués *et non conjugués*. Un chapitre est alors consacré au problème inverse qui consiste à se donner un groupe fini abstrait G , dont on sait d'avance qu'il possède de tels sous-groupes, par exemple $G := SI(3, F_2)$, et de lui associer une surface plate M dont le groupe d'isométries contient un sous-groupe isomorphe à G . C'est « *la méthode de l'épaississement du graphe de Cayley de G* », due à Buser. Elle répond simplement et efficacement à cette demande, et c'est l'objet du chapitre en question.



Les méthodes de Sunada et Buser convergent au chapitre suivant pour retracer la construction des deux premières surfaces à bord isospectrales non isométriques connues, les célèbres surfaces de Buser, au-dessus, construites à partir du groupe $SI(3, F_2)$. Mais, ces variétés, bien que de dimension 2, ne sont pas des domaines du plan euclidien. Le dernier chapitre du livre décrit la généralisation de la méthode de Sunada par Pierre Bérard (1988) qui permet de pousser plus en avant le contre-exemple de Buser en montrant que l'aplatissement des surfaces de Buser par rapport au plan de symétrie, manifeste sur l'image, reste isospectral. Cela conduit à la « *méthode de transplantations* » et aux célèbres surfaces de Gordon, Webb et Wolpert ci-contre, qui, en 1992, apportent, enfin, une réponse définitive à la question que Mark Kac posait quelque trente ans plus tôt, en 1966 : *Can one hear the shape of a drum ?*



Il est assez rare que la nature des mathématiques utilisées pour la compréhension des idées centrales de trente années de recherche autour d'une conjecture n'exige au final qu'un bagage relativement réduit de connaissances. En algèbre : la partie élémentaire de théorie des représentations des groupes finis, et en géométrie riemannienne : les surfaces plates à bord, c'est-à-dire celles que l'on peut construire à la main en découpant et recollant des morceaux de papier. C'est à partir de ce constat qu'il m'est venu l'idée de rédiger un texte sur l'histoire de la question de Mark Kac qui soit mathématiquement complet et accessible aux étudiants de Master en Mathématiques, et qui, en même temps, serve d'introduction à des mathématiques plus profondes des années ultérieures, le tout motivé par la résolution d'un très beau problème mathématique. C'est le but du livre que je rédige actuellement et dont on peut déjà avoir un aperçu [ici].

3 - Transfert technologique, relations industrielles et valorisation. À la demande de feu Jean-Jacques Risler, alors qu'il était président de la SMF (96-98), j'ai été à l'origine de la première informatisation globale de la gestion de l'*Officiel des Mathématiques*. En 2001, j'ai créé le format *KAI* pour la composition en TeX de textes mathématiques bilingues chinois/anglais ; le livre de Lluís Puig : « *Blocks of Finite Groups* » (Springer, 2002) témoigne de l'efficacité du procédé ([échantillon](#), [mode d'emploi](#)). J'ai également participé, en tant que consultant en informatique et PAO, au lancement des maisons d'édition CASSINI et CALVAGE-et-MOUNET, aujourd'hui bien connues dans le milieu mathématique français.

