Dossier Scientifique

Candidature pour une promotion
(CRCN vers CRHC)
Automne 2018

Alberto Arabia

2018

Institut de Mathématiques
de Jussieu – Paris Rive Gauche
UMR-7586

Université Paris 7 – Denis Diderot

Bâtiment Sophie Germain, 75013, Paris

Alberto ARABIA
Université Paris Diderot – CNRS
alberto.arabia@imi-prg.fr

Paris, 29 Août 2018

Avant-propos

Le but de ces pages préliminaires est de mettre en relief certains éléments dans mon activité de recherches qui ont eu une réelle incidence sur sa visibilité et son évolution. Ce devrait contribuer à nuancer l'évaluation de carrière donnée par les indicateurs habituels, ce qui permettrait une plus juste appreciation de l'ensemble de mon travail mathématique.

Contenu du dossier scientifique

Il comporte 23 documents. Les 4 premiers constituent mon rapport d'activité.

1. Curriculum vitae 1
2. Mes publications et prépublications 7
3. Rapport sur mes recherches avant 2002 9
4. Rapport sur mes recherches après 2002 37

Dans les rapports [3,4], je décris en détail mes travaux de recherche publiés ou en cours. Les 19 autres documents, présentés rapidement dans les pages suivantes, sont des articles terminés, certains soumis, mais tous non encore publiés, dont je ne parle guère dans ces rapports. Ces prépublications, qui totalisent plus de 1300 pages sont individuellement accessibles sur mon site web [ici].

Thèmes de Recherche

Je peux résumer à cinq le nombre de thèmes où j'ai fait des contributions reconnues. Bien qu'en apparence éloignés les uns des autres, il y a bien un sujet commun en filigrane, c'est la cohomologie, sous ses diverses facettes.

– *Groupes de Lie et cohomologie équivariante*, dans le prolongement des travaux pionniers de Michèle Vergne et Nicole Berline des années 80. Probablement, mes deux contributions les plus remarquées sont : (i) la première détermination de l'anneaux de cohomologie équivariante $H_T(K/T)$, et (ii) l'explicitation de la formule de localisation de Berline-Vergne pour l'intégrale $\int_{\overline{X}(w)} : H_T(K/T) \to H_T(\bullet)$, où j'ai noté $\overline{X}(w)$ un cycle de Schubert de la variété des drapeaux K/T d'un groupe de Lie compact K de tore maximal T. Plus précisément, j'ai été le premier à expliciter les classes d'Euler équivariantes de $\overline{X}(w)$ aux différents points fixes $x \in \overline{X}(w)^T$. Auparavant, on ne connaissait que le cas où $\overline{X}(w) = K/T$, dû à Berline-Vergne. Mes travaux dans ce sujet ont été cités plus de 70 fois ([1]). Parmi les auteurs de ces citations on trouve, entre autres, Duflo, Kac, Kostant, Kumar, Lascoux, Rossmann, Soergel, Vergne, et bien plus récemment Terence Tao.

– *Singularités d'une pseudovariété munie de l'action d'un tore.* J'ai apporté l'idée, nouvelle à l'époque, qui consiste à repérer dans l'expression de la classe d'Euler équivariante d'un point fixe isolé, le type de singularité de ce même point. Je suis

1. Les statistiques sur le nombre de citations proviennent du site scholar.google.fr.

à l'origine d'un critère de lissité rationnelle efficace en particulier pour les variétés de Schubert et les variétés de représentations de carquois. Mes travaux ont été cités plus de 20 fois et ont inspiré des généralisations par Carrell, Kumar et Brion.

– *Algèbre commutative.* J'ai résolu le problème des relèvements, de la caractéristique positive vers la caractéristique nulle, des algèbres lisses sur un anneau arbitraire (pas nécessairement noethérien), ainsi que de leurs morphismes, et ce dans la plus grande généralité possible. Mon travail est une importante généralisation des théorèmes de Renée Elkik sur les relèvements des algèbres lisses sur des anneaux henséliens. Mes résultats sont très utiles en cohomologie adique et rigide, ils on été cités plus de 20 fois par divers auteurs, dont Ayoub, Caro, Cisinki, Déglise, Kedlaya, Levine.

– *Site infinitésimal p-adique de Grothendieck – 2010.* Avec Zoghman Mebkhout, on a mené à terme le programme de Grothendieck pour les fondements d'une nouvelle théorie cohomologique de type de Rham adaptée aux conjectures de Weil, dont la factorisation de la fonction Zéta d'une variété algébrique non singulière en caractéristique positive. J'en parlerai davantage plus loin.

– *Topologie algébrique et théorie de représentation des groupes symétriques – 2017.* Mes contributions concernent plusieurs sujets, dont : i) la détermination de formules explicites pour les caractères des groupes symétriques agissant sur la cohomologie des espaces de configuration. On ne disposait jusqu'alors que la formule de caractères de Macdonald pour les produits finis d'un espace par lui-même. ii) L'extention aux pseudovariétés (par exemple les variétés algébriques complexes) des théorèmes de stabilité cohomologique des espaces de configuration, précédemment vérifiés uniquement pour des variétés différentielles.

Changements thématiques

Au cours de ma carrière de chargé de recherches, j'ai été amené à changer plusieurs fois de sujet. C'est un exercice qui peut s'avérer assez éprouvant, dans la mesure où il faut du temps pour devenir performant et faire des contributions originales permettant de percer dans un nouveau milieu. Chaque changement est accompagné de son lot de solitude et de doutes, mais c'est aussi la source d'une grande exaltation lorsque l'on atteint son but.

La division de mon rapport en deux parties [3] et [4], correspond à ma première grande transition thématique. Elle a eu lieu en 2002/2003, alors que je m'intéressais à l'homologie d'intersection et aux applications des faisceaux pervers, et que je donnais des cours de troisième cycle à Paris-Diderot sur ce thème.

C'est par les discussions fréquentes que j'avais avec Zoghman Mebkhout, avec qui je partageais le même bureau, que je me suis intéressé pour les questions ouvertes dans le programme de recherches de Monsky-Washnitzer (∼1970) pour une cohomologie de Weil à la de Rham. Il faut dire que j'avais déjà repris en 2001, avec succès, une de ces questions : celle du relèvement des algèbres lisses et de leur morphismes. J'avais montré que l'on disposait d'un *foncteur* $\overline{X} \rightsquigarrow \mathcal{X}^\dagger$ défini, *sans restriction aucune*, de la catégorie de tous les schémas affines lisses $\overline{X}$ sur R/I ([2]) vers la catégorie des $R^\dagger$-algèbres †-adiques plates $\mathcal{X}^\dagger$ et morphismes à homotopie près. Ce foncteur, qui prolongeait celui que Monsky-Washntizer avaient défini, au mieux, pour les intersections complètes, prolongeait le foncteur de cohomologie (de Rham) de

2. Ici, R est un anneau quelconque et I un idéal dans R.

Monsky-Washniter à la catégorie de *tous* les schémas *affines*, atteignant ainsi la limite absolue du procédé car, en dehors du cas affine il n'existe pas de relèvements des schémas lisses systématique et donc a fortiori pas de leurs morphismes.

À ce stade, la question fondamentale a toujours été, suivant les idées directrices de Grothendieck de la fin des 60, de comprendre comment on peut étendre de tels foncteurs de cohomologie à la catégorie de *tous* les schémas lisses et séparés sur R/I. Mebkhout voulait reprendre cette question depuis les fondements de la cohomologie de Monsky-Washntizer, car, bien que la cohomologie rigide proposait déjà une réponse, la manière dont certaines questions techniques y sont traitées (la fonctorialité par exemple), la rendait inadaptée à ses recherches. Il fallait trouver de nouvelles idées. La perpective de pouvoir reprendre une théorie depuis ses fondements et de chercher des voies inexplorées m'a tout de suite attiré et je me suis voué à cette question que je trouvais à la fois accessible et très intéressante.

Après une première année où l'ai lu des articles et suivi quelques fausses pistes, je me suis concentré sur l'exemple le plus simple possible, celui de la droite affine munie d'un recouvrement affine. Quelques mois plus tard, se dégageaient trois propriétés surprenantes qui allaient apporter une simplification conceptuelle inédite. Pour tout schéma †-adique $\mathcal{X}^\dagger$ plat sur $R^\dagger$, de réduction modulo I, le schéma $\overline{X}$ lisse sur R/I de site infinitésimal $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ de relèvements plats sur $R^\dagger$, ces propriétés sont les suivantes.

i) Le faisceau $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}^\dagger}$ des automorphismes locaux de $R^\dagger$-algèbre du faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}$ de $\mathcal{X}^\dagger$ dont la réduction modulo I est l'identité, est un sous-faisceau de groupes du faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\dagger/R^\dagger}$ des opérateurs différentiels †-adiques sur $\mathcal{X}^\dagger$;

ii) Si $\overline{X}$ est affine, on a une équivalence de catégories

$$\mathcal{M}\mathit{od}(\mathcal{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R^\dagger},\mathrm{Sp}) \xrightarrow{\text{restriction}} \mathcal{M}\mathit{od}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\dagger/R^\dagger})$$

où $\mathcal{M}\mathit{od}(\mathcal{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R^\dagger},\mathrm{Sp})$ est la à la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R^\dagger}$-modules sur le site infinitésimal $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ dont l'action structurelle de $\mathcal{G}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ provient de l'inclusion $\mathcal{G}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}} \subseteq \mathcal{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R^\dagger}$. Catégorie que nous avons appelée de $\mathcal{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R^\dagger}$-modules ***spéciaux****.*
En particulier, on a l'égalité :

$$H^i_{\mathrm{dR}}(\overline{X}/K) = \mathrm{R}^{\mathrm{i}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\big(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}\big). \qquad (\diamond)$$

où $H^i_{\mathrm{dR}}(\overline{X}/K)$ est la cohomologie de Monsky-Washnitzer.

iii) Si $\overline{X}$ est quelconque, la catégorie $\mathcal{M}\mathit{od}(\mathcal{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R^\dagger},\mathrm{Sp})$, intrinsèquement définie comme dans (ii), est une catégorie abélienne qui possède suffisamment d'objets injectifs et d'objets plats. La formule $(\diamond)$ a donc un sens en toute généralité et peut être proposée comme définition de la cohomologie de de Rham de $\overline{X}$ sur K.

La définition $(\diamond)$ étend, a priori, la définition de la cohomologie de Monsky-Washnitzer, et, de plus, elle est conforme au formalisme de la cohomologie de de Rham.

Dans l'article [12] de 49 pages, que j'ai écrit en 2005, je rends compte de ces résultats qui répondaient pleinement aux attentes de Mebkhout. Mais, bien sûr, à ce stade, on n'avait qu'un nouveau point de vue et qu'une jolie définition, qui,

bien que de très bon augure pour la suite, étaient largement insuffisants pour une communication. On a donc décidé de ne rien publier avant d'avoir développé la théorie, du moins suffisamment pour la valider par des applications non triviales, p. e. la factorisation de la fonction Zéta, et pour convaincre la communauté de l'intérêt de ces découvertes.

Le développement de notre théorie allait nous occuper, Mebkhout et moi-même, pendant encore deux années supplémentaires durant lesquelles nous avons rédigé deux très beaux articles, l'un de 190 pages, l'autre de 50 pages ([9]), totalisant ensemble plus de 70 théorèmes inédits, mais aussi durant lesquelles nous avons enseigné et encadré des étudiants, avec, bien sûr, rédaction des cours correspondants à l'appui.

Ce travail, dont je parle en détail dans mon rapport [4], par des idées totalement nouvelles, donne la première preuve explicite et complète de l'existence d'un foncteur de cohomologie de la catégorie des schémas lisses et séparés sur un corps de caractéristique positive fournissant les bons nombres de Betti et prolongeant le foncteur de cohomologie de de Rham p-adique défini sur la sous-catégorie des schémas affines. Il s'agit d'un résultat clé que l'on attendait depuis les années 70, et qui donnait beaucoup de souplesse à la théorie. On trouve également dans ce travail, la construction, en toute généralité, de la suite exacte de Gysin, encore un thème ouvert sur lequel on ne trouvait que des résultats fragmentaires dans la littérature.

Le processus de publication prit plusieurs années. Tendancieusement rapportés et injustement rejetés dans une première soumission, je réalise que, malgré la beauté des mathématiques qui y figurent, des inimités anciennes dont Mebkhout était l'objet, auxquelles je me trouvais malgré moi mêlé, prenaient le devant et venaient ternir ce qui aurait dû être une fête collective. L'article fini bien par trouver un rapporteur impartial dans un autre journal. Ce fut le début une période longue et usante pour moi, car j'avais urgence d'étoffer mon dossier en vue du concours CNRS de DR auquel je me présentais année après année depuis mon habilitation (2002).

C'est en 2010, au terme de trois ans, que le premier article est finalement publié, mais pas le second ([9]), qui, bien que nous n'ayons jamais reçu de commentaire du rapporteur, est *retiré de soumission* par le comité éditorial (sic) et, ce, sans rapport, sans explication et sans appel. C'était incompréhensible, car sans cette partie, l'article publié restait mathématiquement bancal. J'ai essayé par la suite de le faire publier ailleurs, mais vainement car il était systématiquement affublé de refus lapidaires, et, bien sûr, toujours sans appel. C'était très frustrant et humiliant.

C'est à cette même époque que l'étudiant le plus prometteur de Mebkhout (un normalien), se voyant flécher sa bourse doctorale vers d'autres directeurs de thèse, est contraint de changer de sujet. Bien sûr, on a tout de suite contacté l'alors directeur du DMA, mais rien n'y a fait.

C'était dur à admettre, malgré des mathématiques superbes, un très long article renfermant une myriade de questions ouvertes à la portée des étudiants en thèse, trois congrès internationaux et des séminaires spécialisés en France, malgré tout cela, notre travail semblait déranger et l'on assistait à une dégradation des relations d'avec le reste de la communauté mathématique concernée par le sujet. Nous avions besoin de plus de solidarité, plus de curiosité et surtout plus de « sympathie » du milieu, non seulement pour publier mais aussi pour avoir de bons étudiants, car le sujet était mathématiquement très exigeant. Ce n'est pourtant pas faute d'avoir essayé, j'y ai

même vraiment cru à certain moment, mais, hélas, le facteur humain à pris le dessus, et pour de tristes raisons cela n'a pas fonctionné.

Nous avons été très affectés par cette situation. De son côté, Mebkhout, dont le regard portait vers le développement de la nouvelle théorie, et qui, conscient du fait que il y avait beaucoup trop de travail pour seulement deux chercheurs, songeait à créer une petite équipe avec des étudiants et un groupe de travail, projet pour lequel il fallait un minimum de caution du milieu, ne serait-ce que en considération du futur professionnel des étudiants, abandonne le projet et se referme sur lui-même. De mon côté, avec seulement deux publications effectives depuis sept ans, sans étudiants, avec de plus en plus de difficultés à travailler avec Mebkhout, qui prenait ouvertement ses distances, je voyais s'évanouir mes perspectives de recherche dans ce domaine où je n'étais pas encore véritablement autonome. Mes espoirs de continuer de progresser dans les activités de direction et devenir à terme DR partaient ainsi irrémédiablement en vrille. J'ai été très déçu après tant d'années de travail et de si belles mathématiques ! Cela finit par détériorer ma relation avec Mebkhout, la détériorer jusqu'à la précipiter à sa fin.

Par la suite, j'ai, tant bien que mal, cherché à terminer mes recherches les plus avancées, l'une autour de la cohomologie du foncteur *section globales continues* sur le site infinitésimal †-adique, et l'autre sur une formule de points fixes de Lefschetz [13]. Mais le coeur n'y était plus. Totalement isolé, déprimé même, j'étais persuadé que j'allais au-devant de difficultés insurmontables pour publier dans ce domaine. Le temps était venu pour moi de chercher, une fois encore, de nouveaux horizons.

En guise d'interlude, j'ai repris en 2011/2012 des questions en cohomologie équivariante sur lesquelles je travaillais avant de m'intéresser à la cohomologie p-adique. Je collabore alors avec Loring Tu dans l'écriture du livre *Introductory Lectures in Equivariant Cohomology* pour Princeton University Press. Je lui communique l'ensemble de textes [16], qui lui permettront de combler quelques lacunes pour lesquelles il m'avait sollicité. Enfin, je rédige le long appendice [8] (80 pages), ce qui m'amène à faire l'étude [14] (74 pages), dont je parlerai plus loin.

Mon intérêt pour l'isospectralité, dont le cours [7], vient aussi de cette époque, mais c'est finalement en 2013/14, au hasard de mes discussions avec Haniya Azam autour de questions ouvertes sur le comportement asymptotique de la cohomologie des espaces de configuration, que je m'enthousiasme pour ce thème qui deviendra un sujet de recherches à temps plein. Cela aboutira en 2017 en un assez long article de presque 200 pages (déjà soumis), où, au delà de résultats nouveaux, j'apporte un point de vue original et beaucoup de questions ouvertes. Point de vue qui suscite déjà de l'intérêt, voir par exemple l'article de Dan Petersen arXiv:1807.07293 (juillet 2018). C'est pour ce travail que j'ai été invité au Pakistan en février 2018 et le suis de nouveau pour février 2019.

Travaux soumis à publication

Les articles suivants ont été soumis a des journaux avec comité de lecture. L'entrée 7 est un échantillon d'un livre au stade final de rédaction pour Springer.

5. On the equivalence of two stability conditions of FB-modules [25 pages] 69
6. Espaces de configuration généralisés ..... [195 pages] 95
7. Isospectralité et Transplantations ..... [120 pages] 291
8. Equivariant Poincaré duality and Gysin morphisms ..... [99 pages] 411

– [5,6] Derniers articles de recherche de 2018 et de 2016 respectivement, tous deux sur arXiv et soumis à des revues avec comité de lecture, en attente des rapports.
Un des points forts dans [6] est d'avoir pour la première fois relevé l'importance de la classe d'espaces localement compacts X que j'appelle « i-acycliques ». Caractérisés par le fait que l'application naturelle $H_c(X) \to H(X)$ est nulle, les suites spectrales de Leray pour les supports compacts de leurs espaces de configuration dégénèrent, ce qui détermine aussitôt leur polynôme de Poincaré pour les supports compacts. En particulier, *la cohomologie à support compact de l'espace de configuration $F(n,X)$ associé à un espace i-acyclique X seul dépend de la cohomologie à support compact de X*. Il s'agit là d'une énoncé que l'on cherche classiquement à établir pour la cohomologie ordinaire, auquel cas il est rarement vérifié. Mon approche montre que la bonne formulation de l'énoncé est plutôt pour la cohomologie de Borel-Moore, auquel cas la réponse est positive pour tout espace i-acyclique. À signaler que cette classe d'espaces est très large, par exemple, pour tout espace localement compact Y, le produit $\mathbb{R} \times Y$ est i-acyclique, et, de même, tout ouvert d'un espace i-acyclique est i-acyclique, et donc aussi tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour $n > 0$.

– [7] Il s'agit de notes de mes cours d'isospectralité, dont je me sers actuellement pour écrire un livre en anglais de même titre, d'environ 250 pages, pour Springer dans la collection *Universitext*. Sortie prévue en 2019-20.

– [8] Originellement écrit comme appendice du livre *Introductory Lectures in Equivariant Cohomology* de la série *Annals of Mathematics Studies* de Princeton University Press (à paraître), il a été considéré d'un niveau et d'un nombre de pages dépassant les limites imposées par les choix éditoriaux, j'ai donc décidé d'en faire un ouvrage indépendant. Il est actuellement soumis à Springer pour un *Lecture Notes*, et en attente des évaluations des rapporteurs.

Autres Travaux

Le sommaire qui suit est une liste de travaux terminés non publiés.

9. Sur le Topos infinitésimal p-adique d'un schéma lisse II ..... [50 pages] 511
10. Affinité des schémas †-adiques de réduction affine ..... [24 pages] 561
11. Produits fibrés dans la catégorie des schémas †-adiques ..... [19 pages] 585
12. Une Équivalence de Catégories ..... [49 pages] 605
13. Un théorème de Lefschetz p-adique ..... [18 pages] 655
14. Scindage des complexes en catégorie dérivée ..... [74 pages] 673
15. « Algèbre et Géométrie », une interview ..... [17 pages] 747
16. Sur les exposés de Cartan au Colloque de Bruxelles 1950 [4+4+4+8 pages] 765
17. Calculs par ordinateur des Équations différentielles p-adiques . [21 pages] 785
18. Conditions d'Hiraï et chaînes sous-analytiques ..... [27 pages] 807

– ([9], 2007) Deuxième volet de l'article publié de même nom. J'y réponds à plusieurs questions ouvertes dans les travaux de Monsky-Washnitzer-Meredith des années 70, travaux subitement interrompus après le succès de Pierre Déligne à démontrer les conjectures de Weil à l'aide de cohomologie étale, théorie concurrente de celle de Monsky-Washnitzer. J'y démontre, entre autres, que *la catégorie des schémas †-adiques possède des produits fibrés* et aussi que *l'affinité d'une schéma †-adique $\mathcal{X}^\dagger$, au sens de Meredith, équivaut à l'affinité du schéma réduit $\overline{\mathcal{X}^\dagger}$, au sens classique.*

Ce sont des propriétés que l'on utilise constamment et qui donnent une grande souplesse au topos infinitésimal p-adique. Cet article condense [10] et [11] (2006) dans lesquels je donnais les premières preuves de ces propriétés. C'est un très beau travail, malheureusement plus d'actualité.

– ([12], 2005) Ce travail est important pour moi, car il résume mes deux années de recherches personnelles sur le topos infinitésimal p-adique. Il contient les théorèmes qui ont permis de lever les obstructions que l'on rencontrait pour recoller naturellement la cohomologie de Monsky-Washnitzer en catégorie dérivée. C'est un travail fondamental, à la base des articles en collaboration avec Mebkhout.

– ([13], 2012) Cet article était une application des articles avec Mebkhout. J'y démontre un théorème de points fixes de Lefschetz sur les variétés algébriques non singulières en caractéristique positive et surtout *sans hypothèse de propreté*, ce qui distingué notre théorie de celle de la cohomologie rigide. L'article est terminé et aurait pu être publié.

– ([14], 2012) J'y étudie la question du scindage d'un complexe en catégorie dérivée, c'est-à-dire le fait qu'un complexe est isomorphe en catégorie dérivée à sa cohomologie. Je démontre le critère qui dit que *les modules différentiels gradués, bornés à gauche, sur un anneau positivement gradué sont tous scindés en catégorie dérivée si et seulement si l'anneau est héréditaire*. Le cas particulier qui m'avait amené à faire ce travail est celui de la cohomologie T-équivariante, notamment parce que lorsque T est le tore de dimension 1, l'anneau H_T est héréditaire. Cela expliquait un paradoxe dans mon travail sur la dualité de Poincaré équivariante [8].

– [15] Interview à laquelle je me suis prêté en 2015.

– [16] Compilation de textes autour de deux exposés célèbres d'Henri Cartan. J'y donne les preuves manquantes de deux théorèmes fondamentaux énoncés sans démonstration par Cartan, à la base de ce que l'on appelle le modèle des formes différentielles équivariantes, modèle qui fut indépendamment découvert dans les années 80 par Berline-Vergne pour les variétés différentielles. Ces textes ont été rédigés à l'intention de Loring Tu pour le livre d'introduction à la cohomologie équivariante.

– ([17], 2000) Rapport détaillé des programmes que j'avais fait tourner dans les machines du centre Médicis, alors à Polytechnique, pour tester des conjectures cruciales dans les travaux de Mebkhout-Christol (∼2000) sur les rayons de convergence des solutions aux équations différentielles p-adiques. Certains calculs avaient demandé sur les ordinateurs de l'époque (gérés par Joël Marchand) plus d'un mois de calculs ininterrompus.

– ([18], 1990) Contribution à un recueil de textes des participants au Groupe de travail *Conditions d'Hirai, d'après Kashiwara*. Le projet de publication n'a pas aboutit. J'ai été le seul à avoir rédigé son travail.

Cours de troisième cycle à Paris-Diderot

Il s'agit des textes de quelques-uns mes cours à Paris-Diderot de même titres.

19. Cours sur la cohomologie de de Rham des variétés différentielles [244 pages] . . . 835
20. Cours sur la cohomologie de de Rham des schémas . . . . . [90 pages] . . . 1081
21. Trois textes sur la cohomologie de de Rham p-adique . [38+22+30 pages] . . . 1173
22. Homologie d'intersection . . . . . [100 pages] . . . 1269
23. Faisceaux pervers et Correspondance de Springer . . . . . [65 pages] . . . 1371

– [20,19,21,9] Matériel d'un livre intitulé *Cohomologie de de Rham*, dont le but est l'introduction de la cohomologie de de Rham dans tous les contextes où elle a un sens, c'est-à-dire : différentiel, analytique, algébrique en caractéristique nulle et en caractéristique positive. Des théorèmes de comparaison pour les espaces disposant de plusieurs structures à la fois y sont démontrés. Par exemple, le théorème de comparaison de Grothendieck pour une variété algébrique complexe non singulière, vue aussi comme variété analytique, et encore comme variété différentielle, et qui montre que les différentes complexes de de Rham calculent la même cohomologie.
– [22,23] Matériel du livre *Introduction à l'homologie d'intersection et aux faisceaux pervers*, proposé à Calvage & Mounet pour la collection Nano. A noter que la prépublication [23] à été très citée à l'époque de sa publication (∼2001) comme référence de texte rapide et efficace pour entrer en thème.

Conclusion

Au delà d'un certain éclectisme dans le choix de mes sujets de recherche qui, de mon point de vue, est une forme de richesse, je ne cesse d'être tristement perplexe devant le constat de ce que les meilleures mathématiques que j'ai faites, celles en collaboration avec Mebkhout, celles pour lesquelles j'ai abandonné mes sujets personnels, aient pu avoir un si piètre impact dans les mathématiques de mon époque. Un travail de cette qualité, avec de telles perspectives de développement, qui n'ait suscité, depuis huit ans, aucun travail, aucune citation, aucune thèse, cela ne me paraît vraiment pas normal. Bien sûr, on pourra arguer que c'est le propre de tout un chacun de surestimer un travail dont il est fier, mais là, l'explication ne tient pas.

En science, une découverte est aussi importante que sa diffusion, mais alors que la première est l'aventure d'un petit cercle de personnes, la seconde est un épiphénomène qui implique toute une communauté avec des motivations qui lui sont propres et qui ne vont pas forcément dans le sens de favoriser le développement d'une découverte. Des motivations qui, sans nécessairement être ni bonnes ni mauvaises dans l'absolu, sont néanmoins déterminantes.

De toute cette aventure, je garde en moi l'intime conviction d'avoir positivement contribué à résoudre un problème mathématiquement hautement non trivial. Je garde en moi tout le plaisir que j'ai pu ressentir en participant au programme de recherches de Mebkhout. Ce sont de très belles mathématiques. Je suis persuadé qu'avec le temps nos découvertes prévaudront.

Alberto Arabia
CNRS
29 Août 2018

Alberto ARABIA
Institut de Mathématiques de Jussieu (IMJ)
CNRS / Université Paris Diderot – Paris 7
UFR de Mathématiques
Bât. Sophie Germain. Bureau 608.
8 place Aurélie Nemours 75205. PARIS cedex 13

Paris, 20 juillet 2018

Curriculum Vitae

Nom, prénoms : ARABIA Alberto Darío.
Lieu de naissance : Buenos Aires, Argentine.
date de naissance : 26 février 1953.
État Civil : Marié le 16-08-1983, divorcé le 3-10-1997. Un fils né le 18-12-1980.
Nationalités : Argentine et Française.
Résidence : 40, rue Pascal, 75013, Paris. France.
Adresse professionnelle :
Université Paris 7– Denis Diderot
Institut de Mathématiques de Jussieu
Bâtiment Sophie Germain, 75013. Paris.
Bureau 608. Téléphone 01 57 27 91 54.
Adresse électronique : `alberto.arabia@imj-prg.fr`
URL : `http://math.jussieu.fr/~arabia`

Langues écrites et parlées : espagnol, français, anglais.
Arrivée en France : octobre 1977.

Diplômes de l'Université Paris 7

- **1979 :** DEUG.
- **1980 :** Licence de Mathématiques.
- **1981 :** Maîtrise de Mathématiques.
- **1983 :** DEA sous la direction de Paul Gérardin ; mention très bien.
- **Novembre 1983 :** Boursier (pendant trois ans) de la Direction Générale pour la Recherche Scientifique et Technologique (D.G.R.S.T.).
- **Juillet 1985 :** Doctorat de Mathématiques de l'Université Paris 7 sous la direction de Michèle Vergne ; mention très honorable.
- **21 octobre 2002 :** Habilitation à diriger la recherche soutenue devant le jury composé de : Michèle Vergne et Zoghman Mebkhout et de Michel Brion, Michel Duflo, Patrick Polo et Eric Vasserot. Mention très honorable.

Évolution Professionnelle

- **1985–1986.** Chargé de recherches de l'École Polytechnique.
- **1985.** Séjour au M.I.T. (U.S.A).
- **1986–1988.** Stagiaire de recherches du CNRS. Rattaché au laboratoire de "Théorie des Groupes" dirigé par Alain Guichardet, Unité Associée 169 du Département de Mathématiques de l'École Polytechnique, .
- **Novembre 1986.** Séjour au M.I.T. (U.S.A).
- **Janvier 1988.** Changement d'affectation : de l'École Polytechnique à l'Équipe de "Théorie des Groupes, Représentations et Applications" dirigée par Michel Duflo ; Unité de Recherches Associée URA 748 du Département de Mathématiques de l'Université Paris 7.

- **Février 1988.** Titularisé Chargé de recherches deuxième classe (CR2) au CNRS.
- **1989.** Promu au poste de Chargé de recherches première classe (CR1) au CNRS.
- **1993.** Responsable informatique du Département de Mathématiques de l'Université Paris 7.
- **Mai 1995.** Membre du Conseil Scientifique de la Société Mathématique de France.
- **Décembre 1995.** Responsable informatique pour l'édition de « Officiel des Mathématiques » de la Société Mathématique de France.
- **Février 1998.** Membre externe du Comité des Spécialistes du Département de Mathématiques de l'Université Paris 7.
- **21 octobre 2002.** Habilité à diriger la recherche.

Situation Professionnelle actuelle

- Chargé de recherches première classe CNRS. Grade CRT1.
- Habilité à diriger la recherche depuis octobre 2002.
- N° d'agent : 179254.
- Section du Comité National : 41, Mathématiques et interactions des mathématiques.
- Délégation de l'unité : Paris B.
- Unité de Rech. : Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR7586).
- Projet : Groupes, représentations et géométrie.

Thèmes de mes travaux mathématiques

- Représentations et applications des Groupes de Lie.
- Cohomologie Équivariante des pseudovariétés et singularités.
- Faisceaux Pervers. Homologie d'intersection.
- Singularités des Variétés de représentations de Carquois.
- Dualité de Poincaré et Morphisme de Gysin en cohomologie équivariante.
- Cohomologie de de Rham p-adique. Factorisation de la fonction Zêta d'une variété algébrique sur un corps fini. Théorèmes de Lefschetz de points fixes.
- Théorèmes de points fixes de Lefschetz en cohomologie p-adique pour les variétés ouvertes.
- Représentations des groupes symétriques sur les espaces de configuration.

Congrès internationaux et Cours et Conférences à l'étranger

05/1985. "*Schubert Cycles and* **K***-equivariant cohomology of the flag variety.*" Lie Groups Seminar, M.I.T., Massachusetts. (U.S.A.)

11/1986. "*The nil-Hecke ring and the* **T***-Equivariant cohomology of the flag variety.*" Lie Groups Seminar, M.I.T., Massachusetts. (U.S.A.)

09/1998. "*Equivariant Euler classes and rationaly smooth points.*" Congrès international "Homologie et théorie des représentations" Sept. 1998, Vaquerías, Cordoba, (Argentine).

08/2001. "*Lifting smooth algebras and their morphisms.*", au 14^e Colloque latino-américain d'algèbre. La Falda, Cordoba, (Argentine).

12/2003. "On the cohomology of the group of automorphisms of Monsky-Washnitzer algebras", au *XI Encuentro Rioplatense de Algebra y Geometría Algebraica* à Solis, (Uruguay).

01/2009. *A new definition for the de Rham p-adic cohomology*. International Conference on $\mathcal{D}$-modules. Sevilla (2009) (Spain).

10/2009. *On the de Rham p-adic cohomology*. Conférence internationale : *Théorie locale, groupes finis et représentations*. CIRM, Marseille, (France).

10/2010. *Weil conjectures and progress in the foundations of the de Rham p-adic cohomology*. Colloquium at TUFTS University, Medford, Massachusetts (U.S.A.).

02/2018. *Cohomology of Generalized Configuration Spaces*. Invité par le Center for Advanced Studies in Mathematics (CASM), Lahore (Pakistan).

02/2019. *Cohomology of Generalized Configuration Spaces*. Invité par l'Abdus Salam School, Lahore (Pakistan), pour une période dun mois, dans le but de donner un cours plus approfondi sur les espaces de configuration et d'encadrer un ou deux étudiants en thèse.

Enseignement en troisième cycle

- Introduction à la cohomologie de de Rham des variétés algébriques (1995–1999).
- Faisceaux pervers et correspondance de Springer (2001-2002).
- Introduction à l'homologie d'intersection et aux faisceaux pervers (2002-2003).
- Introduction à la cohomologie p-adique (avec Mebkhout) (2007-2010). Deux étudiants de Master deuxième année en 2008 et 2009. Akila Hafian : *Théorème de comparaison entre cohomologies de de Rham analytique et algébrique d'une variété algébrique complexe non singulière, d'après Grothendieck.* Matthieu Rambaud : *Dégénérescence de la suite spectrale de Hodge-de Rham, d'après Deligne-Illusie.*
- Isospectralité et technique de transplantation (2014). Une étudiante en M2 à l'université de Lyon : Bahia Boukriba.
- Encadrement de stagiaires de recherche de l'université Paris-Diderot (2016-).

Principaux titres de conférences

Groupe de Travail sur les $\mathcal{D}$-Modules Paris 7.

05/1986. "*Complexe de Grothendieck–Cousin I, d'après Kempf.*"

06/1986. "*Complexe de Grothendieck–Cousin II, d'après Kempf.*"

06/1986. "*Differential Operators over the flag manifolds, d'après J.-L. Brylinski.*"

10/1987. "*Homologie d'Intersection. Point de vue Simplicial.*"

11/1987. "*Homologie d'Intersection. Point de vue de Borel-Moore.*"

11/1987. "*Homologie d'Intersection. Point de vue de Deligne.*"

11/1987. "*Homologie d'Intersection. Synthèse.*"

01/1987. "*Faisceaux Pervers. Première partie de Astérisque #100.*"

02/1987. "*Faisceaux Pervers. Dualité de Grothendieck-Verdier. Dualité de Poincaré en Homologie d'Intersection.*"

Formule de Lefschetz et représentations des groupes de Lie

Séminaire de Michèle Vergne et Pierre Schapira à l'Ecole Normale Supérieure (88/1989).

01/1989. "*Chaînes Sous-Analytiques et Conditions de Hirai I.*"

02/1989. "*Chaînes Sous-Analytiques et Conditions de Hirai II.*"

03/1989. "*Formalisme de Grothendieck pour la Formule des Points Fixes de Lefschetz sur les espaces analytiques réels. D'après M. Kashiwara. Première partie.*"

03/1989. "*Formalisme de Grothendieck pour la Formule des Points Fixes de Lefschetz sur les espaces analytiques réels. D'après M. Kashiwara. Fin.*"

04/1989. "*Fixed Point Theorem and Group Representations. D'après M. Kashiwara.*"

Groupe de travail sur les $\mathcal{D}$-Modules Paris 7.

12/1989. "*Catégories Dérivées Equivariantes. D'après Bernstein–Luntz. Introduction.*"

12/1989. "*Catégories Dérivées Equivariantes. D'après Bernstein–Luntz. Propriétés générales.*"

01/1990. "*Catégories Dérivées Equivariantes pour les $\mathcal{D}$-Modules. Construction de Beilinson-Ginzburg. Equivalence avec la présentation de Bernstein–Luntz, d'après J. Bernstein.*"

12/1990. "*Irréductibilité de la Variété Caractéristique d'un Idéal Primitif de l'Algèbre Enveloppante d'une Algèbre de Lie Réductive Complexe. D'après D. Vogan. Première Partie : Théorèmes Principaux.*"

01/1991. "*Irréductibilité de la Variété Caractéristique d'un Idéal Primitif de l'Algèbre Enveloppante d'une Algèbre de Lie Réductive Complexe. D'après D. Vogan. Deuxième Partie : Localisation des Bonnes Filtrations.*"

Dans le cadre d'un cours de Troisième cycle de Michèle Vergne.

04/1991. "*Homomorphisme de Chern-Weil.*" Deux exposés où je présente une démonstration originale de la surjectivité de cet homomorphisme sur la cohomologie de la variété des drapeaux.

Cohomologie Équivariante.

Séminaire de Michèle Vergne et Michel Duflo à l'École Normale Supérieure (depuis 1991).

12/1993. "*Cohomologie* **T***-équivariante des variétés de drapeaux.*"

02/1994. "**K***-Théorie* **T***-équivariante des variétés de drapeaux.*"

Cohomologie équivariante et singularités

04/1995. "*Critère de lissité rationnelle sur les variétés de Schubert et cohomologie équivariante.*" "Journées de Cohomologie équivariante", 6, 7 et 8 avril 1995 à Poitiers, organisées par M. Duflo, P. Torasso et M. Vergne. Deux exposés d'introduction et résultats partiels.

02/1996. "*Critère de lissité rationnelle sur les variétés de Schubert et cohomologie équivariante.*" Séminaire d'Algèbres Enveloppantes de Paris-6 du 23/02/96. Résultats complets pour la lissité rationnelle.

09/1998. "*Classes d'Euler équivariantes et points rationnellement lisses.*" Congrès international "Homologie et théorie des représentations" Sept. 1998, Vaquerías, Cordoba, Argentine.

01/1999. "*Classes d'Euler équivariantes et points algébriquement lisses.*" Séminaire de Géométrie algébrique de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, organisé par Joseph Le Potier.

Cohomologie de de Rham p-adique

03/2000. "*Relèvement des algèbres lisses et de leurs morphismes.*" Au Séminaire d'Algèbre de l'IHP organisé par B. Keller.

08/2001. Même titre, au 14^e Colloque latino-américain d'algèbre. La Falda, Cordoba, Argentine.

Faisceaux pervers et Correspondance de Springer.

Groupe de travail de Michel Duflo, Caroline Gruson et Marc Rosso à l'IIMJ (2001)

02/2001. "*Faisceaux pervers.*" Minicours de quatres exposés.

03/2001. "*Application à la correspondance de Springer*". D'après Borho-MacPherson.

Cohomologie de de Rham p-adique

11/2003. "Sur la cohomologie des groupes d'automorphismes des algèbres de Monsky-Washnitzer". *Séminaire de Théorie des Représentations de l'Institut de Mathématiques de Jussieu.*

12/2003. Même titre, au *XI Encuentro Rioplatense de Algebra y Geometría Algebraica* à Solis, Uruguay.

01/2009. *A new definition for the de Rham p-adic cohomology*. International Conference on $\mathcal{D}$-modules in honor of Zoghman Mebkhout. Sevilla (2009) Spain.

10/2009. *On the de Rham p-adic cohomology*. Conférence internationale : *Théorie locale, groupes finis et représentations*. CIRM, Marseille, France.

11/2009. *On the de Rham p-adic cohomology*. Conférence internationale : *Théorie locale, groupes finis et représentations*. Séminaire sur les Algèbres Enveloppantes et Théorie des Représentations, IMJ, France.

10/2010. Weil conjectures and progress in the foundations of the de Rham p-adic cohomology. Colloquium at TUFTS University, Medford, Massachusetts (USA).

11/2010. *Topos infinitésimal p-adique.* Université de Caen, France.

01/2011. *Topos infinitésimal p-adique.* Université de Strasbourg, France.

Espaces de configuration généralisés

06/2016. *Espaces de configuration généralisés. Espaces topologiques i-acycliques. Suites spectrales basiques.* Séminaire de l'équipe "Groupes, Représentations et Géométrie" de l'université Paris 7 – Denis Diderot.

02/2018. *Cohomology of Generalized Configuration Spaces*. The Center for Advanced Studies in Mathematics (CASM). Lahore, (Pakistan).

02/2019. *Cohomology of Generalized Configuration Spaces*. Abdus Salam School, Lahore (Pakistan).

Publications dans des revues avec comité de lecture

[A$_0$] A. Arabia. "Thèse de doctorat". Université Paris 7 – Denis Diderot (1985).

[A$_0$] *'Cycles de Schubert et cohomologie équivariante de $\boldsymbol{K/T}$'*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **301** (1985), no. 2, 45–48.

[A$_1$] *'Cycles de Schubert et cohomologie équivariante de $\boldsymbol{K/T}$'*. Invent. Math. **85** (1986), no. 1, 39–52.

[A$_2$] *'Cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante de $\boldsymbol{G/B}$ pour un groupe $\boldsymbol{G}$ de Kac-Moody'*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **302** (1986), no. 17, 631–634.

[A$_3$] *'Cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante de la variété de drapeaux d'un groupe de Kac-Moody'*. Bull. Soc. Math. France **117** (1989), no. 2, 129–165.

[A$_4$] *'Classes d'Euler équivariantes et points rationnellement lisses'*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), no. 3, 861–912.

[A$_5$] *'Appendice à l'article de M.-F. Vignéras : "Induced R-representations of p-adic reductive groups"'*. Selecta Mathematica, new series, **4** (1998) 549–623.

[A$_6$] *'Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes'*. Commentarii Mathematici Helvetici **76** (2001) 607–639.

[A$_7$] *'Lissité rationnelle des variétés de représentations dun carquois'*. (août 2003). C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **338** (2004) 267–270.

[AM$_1$] A. Arabia, Z. Mebkhout. *'Sur le Topos infinitésimal p-adique d'une variété algébrique non singulière I'*. Avec Z. Mebkhout. Ann. Inst. Fourier 60 (2010), 194 pages.

[A$_8$] *'Espaces de configuration généralisés Espaces topologiques i-acycliques Suites spectrales basiques'*. soumis aux Mémoires de la Société Mathématique de France (2017), 195 pages.

[A$_9$] *'On the equivalence of two stability conditions of FB-modules'*. soumis au Journal of Algebra (2018), 25 pages.

Prépublications

Tous les documents sont accessibles par internet à l'adresse :

http://webusers.imj-prg.fr/~alberto.arabia/

[A$_{10}$] *'Conditions de Hiraï et chaînes sous-analytiques (d'après Masaki Kashiwara)'*. Notes d'exposés (27 pages), *prépublication* (mars 1990).

[A$_{11}$] *'Calcul formel et équations différentielles p-adiques'*. Aperçu des algorithmes utilisés dans les tests numériques des conjectures de Mebkhout. *prépublication* (juillet 1995).

[A$_{12}$] *'Introduction à la cohomologie de de Rham'*. Notes de cours (260 pages), *prépublication* (1997).

[A$_{13}$] *'Cohomologie de de Rham dans la catégorie des schémas'*. Notes de cours (107 pages), *prépublication*, (sept. 1999).

[A$_{14}$] *'Faisceaux pervers sur les variétés algébriques complexes. Correspondance de Springer (d'après Borho-MacPherson)'*. Notes de cours (67 pages), *prépublication* (mai 2001).

[A$_{15}$] *'Introduction à l'homologie d'intersection'*. Notes du cours (102 pages), *prépublication* (septembre 2002).

[A$_{16}$] *'Mémoire d'habilitation à diriger des recherches'*. (octobre 2002).

[A$_{17}$] *'À propos d'un théorème d'Henri Cartan'*. (fevrier 2003).

[A$_{18}$] *'Cohomologie de Monsky-Washnitzer dans la catégorie des schémas lisses et séparés sur $\overline{\boldsymbol{R}}$'*. prépublication (2002-2007).

[A$_{19}$] *'Affinité des schémas †-adiques de réduction affine'*. *prépublication* (août 2005).

[A$_{20}$] *'Produits fibrés dans la catégorie des schémas dag-adiques localement de type fini'*. *prépublication* (juillet 2006).

[A$_{21}$] *'Introduction à la cohomologie de de Rham p-adique'*. Notes supplémentaires du cours, *prépublication*, (2008, 2009).

[AM_2] A. Arabia, Z. Mebkhout. *'Sur le Topos infinitésimal p-adique d'une variété algébrique non singulière II'*. Avec Zoghman Mebkhout. 50 pages (novembre 2008).

[A_{22}] *'On Equivariant Poincaré Duality, Gysin Morphisms and Euler Classes'*. Prépublication (2010). arXiv : 1702.03889 [math.AT], 72 pages, 4 figures (2017).

[A_{23}] *'Un théorème des points fixes de Lefschetz p-adique pour les variétés ouvertes'*. (2011).

[A_{24}] *'Un critère général de scindage en catégorie dérivée'*. (2012).

[A_{25}] *'Polynômes de Poincaré des espaces de configuration des groupes de Lie'*. (2012).

[A_{26}] *'Isospectralité et Transplantations'*. Introduction à la géométrie riemannienne et l'isospectralité de domaines plans (2013).

[A_{27}] *'Sur la cohomologie locale des faisceaux'*. Notes de cours (2015).

[A_{28}] *'Restriction de faisceaux injectifs'*. Notes de cours (2015).

[A_{29}] *'Espaces de configuration généralisés. Espaces topologiques i-acycliques. Suites spectrales basiques'*. arXiv : 1609.00522, 195 pages (2016).

[A_{30}] *'On the equivalence of two stability conditions of FB-modules'*. 25 pages (mai 2018). arXiv : 1807.05032 (juillet 2018).

———————×———————

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes

Samedi 26 octobre 2018

Travaux Antérieurs à 2003

Alberto Arabia*

§1. **Cohomologie équivariante (1985-2003)** **1**
1.1. Cohomologie singulière équivariante 1
1.2. Cohomologie de de Rham équivariante 3
1.3. Cohomologie de de Rham équivariante des variétés de drapeaux (1985–1989) 4
1.4. Anneau de cohomologie singulière $\boldsymbol{T}$-équivariante des variétés de Schubert (1989) 9
1.5. Classes d'Euler équivariantes et singularités (1998) 18
1.6. Critères de lissité rationnelle et algébrique (1998) 20
1.7. Critères de lissité (rationnelle) des variétés de Schubert (1998) 20
1.8. Critères de lissité des variétés de représentations d'un carquois (2003) 21
§2. **Équivalence de Green et objets quasi-projectifs (1998)** **21**
§3. **Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes (2001)** **22**
3.1. Relèvements algébriques 22
3.2. Relèvements faiblement complets très lisses 25
3.3. Critère d'affinité des schémas †-adiques 25
§4. **Références bibliographiques** **26**

§1. Cohomologie équivariante (1985-2003)

Mes contributions en cohomologie équivariante concernent les trois thèmes suivants :

- Interprétation des opérateurs de Bernstein-Gelfand-Gelfand et des polynômes de Schubert en cohomologie de de Rham équivariante des variétés de drapeaux.
- Détermination explicite de l'anneau de cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante à coefficients entiers des sous-variétés de Schubert des variétés de drapeaux des groupes de Kač-Moody. Interprétation des opérateurs de Demazure et de Bernstein-Gelfand-Gelfand.
- Introduction de la classe d'Euler équivariante en un point fixe isolé (pas nécessairement lisse) d'une variété algébrique complexe munie de l'action d'un tore.
- Etude du rapport entre la classe d'Euler équivariante en un point isolé et la lissité rationnelle au voisinage de ce point. La classe d'Euler équivariante généralisée d'un point fixe isolé d'une variété algébrique complexe est représentée par une fraction rationnelle à un nombre fini de variables et coefficients rationnels. Je donne quelques critères de lissités algébrique et rationnelle en termes de ces classes. Dans le cas des variétés de Schubert, les descriptions explicites des classes d'Euler équivariantes généralisées que j'avais données dans ma thèse rendent ces critères de lissité effectifs.

La suite décrit avec beaucoup plus de précisions chacun de ces sujets.

1.1 Cohomologie singulière équivariante

Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe topologique. Un «*$\boldsymbol{G}$-espace (à droite, à gauche)*» est un espace topologique muni d'une action continue de $\boldsymbol{G}$ (à droite, à gauche). Un «*fibré principal de groupe $\boldsymbol{G}$*» est

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 6e étage, bureau 6D15, 75013 Paris.
Adresse électronique : arabia@math.jussieu.fr

un $\boldsymbol{G}$-espace à droite $\mathbb{E}$ sur lequel $\boldsymbol{G}$ opère librement ; le quotient $\mathbb{B} := \mathbb{E}/\boldsymbol{G}$ est la «*base du fibré principal*». Un «*espace universel pour* $\boldsymbol{G}$», est un fibré principal $\mathbb{E}\boldsymbol{G}$, topologiquement contractile, sur lequel $\boldsymbol{G}$ opère librement (il en existe toujours d'après Milnor [Mil]) ; sa base $\mathbb{B}\boldsymbol{G}$ est un «*espace classifiant pour* $\boldsymbol{G}$». Cette terminologie provient de la théorie des fibrés principaux. Un fibré universel pour $\boldsymbol{G}$ possède la propriété fondamentale suivante. *Pour tout fibré principal* $\mathbb{E}$ *de groupe* $\boldsymbol{G}$ *et base* $\mathbb{B}$*, il existe une application continue* $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}\boldsymbol{G}$*, unique à homotopie près, telle que* $\mathbb{E} \simeq f^{-1}\mathbb{E}\boldsymbol{G}$ *:*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E} \simeq f^{-1}\mathbb{E}\boldsymbol{G} & \dashrightarrow & & & \mathbb{E}\boldsymbol{G} \\ \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{G}} & & \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{G}} & & \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{G}} \\ \mathbb{B} & = & \mathbb{B} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{B}\boldsymbol{G} \end{array}$$

L'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de $\mathbb{B}$ vers $\mathbb{B}\boldsymbol{G}$ paramètre ainsi les classes d'isomorphie de fibrés principaux de groupe $\boldsymbol{G}$ et base $\mathbb{B}$, ce qui justifie d'appeler «*classifiant*» l'espace $\mathbb{B}\boldsymbol{G}$.

Une conséquence de cette propriété universelle est que deux espaces classifiants pour $\boldsymbol{G}$ sont toujours homotopiquement équivalents et leurs cohomologies sont canoniquement isomorphes. Plus généralement, pour tout fibré principal $\mathbb{E}$ de groupe $\boldsymbol{G}$ et base $\mathbb{B}$, le homomorphisme $H^*(f) : H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{G}) \to H^*(\mathbb{B})$ est canonique, c'est le «*homomorphisme caractéristique de* $\mathbb{E}$», il sera noté :

$$\gamma_{\mathbb{E}}^{\boldsymbol{G}} : H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{G}) \to H^*(\mathbb{B})\,.$$

L'image de $\gamma_{\mathbb{E}}^{\boldsymbol{G}}$ est la «*sous-algèbre caractéristique de* $\mathbb{E}$ *dans* $H^*(\mathbb{B})$», ses éléments sont les «*classes caractéristiques de* $\mathbb{E}$».

Pour tout $\boldsymbol{G}$-espace $\boldsymbol{X}$, l'action «*diagonale*» de $\boldsymbol{G}$ sur $\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{X}$, *i.e.* l'action définie par $(m, x) \cdot g := (mg, g^{-1}x)$, fait de $\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{X}$ un fibré principal de groupe $\boldsymbol{G}$; la classe d'homotopie de sa base $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{G}}$ (notée et aussi $\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{X}$) est indépendante du choix du fibré universel $\mathbb{E}\boldsymbol{G}$. Lorsque $\boldsymbol{X}$ est le $\boldsymbol{G}$-espace réduit à un point '$\bullet$', on a $\bullet_{\boldsymbol{G}} = \mathbb{B}\boldsymbol{G}$. Enfin, pour toute application continue $\boldsymbol{G}$-équivariante entre $\boldsymbol{G}$-espaces $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, l'application $f_{\boldsymbol{G}} : \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{G}} \to \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{G}}$ définie par $f_{\boldsymbol{G}}\big(\overline{(m, x)}\big) := \overline{(m, f(x))}$ est continue. On a des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \boldsymbol{Y} \\ {\scriptstyle c_{\boldsymbol{X}}}\downarrow & \oplus & \downarrow{\scriptstyle c_{\boldsymbol{Y}}} \\ \bullet & \xrightarrow[\mathrm{id}]{} & \bullet \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{G}} & \xrightarrow{\quad f_{\boldsymbol{G}} \quad} & \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{G}} \\ {\scriptstyle c_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{G}}}\downarrow & \oplus & \downarrow{\scriptstyle c_{\boldsymbol{Y};\boldsymbol{G}}} \\ \bullet_{\boldsymbol{G}} & \xrightarrow[\mathrm{id}]{} & \bullet_{\boldsymbol{G}} \end{array}$$

La correspondance $\boldsymbol{X} \rightsquigarrow \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{G}}$, $f \rightsquigarrow f_{\boldsymbol{G}}$ est fonctorielle de la catégorie $\mathscr{T}\!\mathscr{o}\!\mathscr{p}_{\bullet}(\boldsymbol{G})$ des $\boldsymbol{G}$-espaces (basés sur un point), où les morphismes sont les applications continues $\boldsymbol{G}$-équivariantes, vers la catégorie $\mathscr{T}\!\mathscr{o}\!\mathscr{p}_{\bullet_{\boldsymbol{G}}}$ des espaces topologiques basés sur $\bullet_{\boldsymbol{G}}$.

La «*cohomologie (singulière)* $\boldsymbol{G}$*-équivariante à coefficients dans un anneau* $\boldsymbol{A}$» est, par définition, la cohomologie singulière de $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{G}}$ à coefficients dans $\boldsymbol{A}$, *i.e.*

$$\boxed{H^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{A}) := H^*(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{G}}; \boldsymbol{A})}$$

La cohomologie $\boldsymbol{G}$-équivariante est un foncteur contravariant de $\mathscr{T}\!\mathscr{o}\!\mathscr{p}_{\bullet}(\boldsymbol{G})$ vers la catégorie des $H^*_{\boldsymbol{G}}$-algèbres ; où $H^*_{\boldsymbol{G}}$ est une notation abrégée pour $H^*_{\boldsymbol{G}}(\bullet; \boldsymbol{A})$.

Remarques

- *Lorsque* $\boldsymbol{G} = \{1\}$, *on a trivialement* $H^*_{\{1\}}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}) = H^*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$. *Plus généralement, la projection* $p_2 : \mathbb{E}\times\boldsymbol{X} \twoheadrightarrow \boldsymbol{X}$, $p_2(m,x) = x$, *induit une surjection* $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{G}} \twoheadrightarrow \boldsymbol{G}\backslash\boldsymbol{X}$ *d'où l'homomorphisme canonique* $H^*(\boldsymbol{G}\backslash\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}) \to H^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$ *qui relie la cohomologie ordinaire de l'espace* $\boldsymbol{G}\backslash\boldsymbol{X}$ *des* $\boldsymbol{G}$*-orbites de* $\boldsymbol{X}$ *à la cohomologie* $\boldsymbol{G}$*-équivariante de* $\boldsymbol{X}$. *Ce morphisme est bijectif lorsque* $\boldsymbol{G}$ *opère librement sur* $\boldsymbol{X}$.
- *Pour tout* $\boldsymbol{G}$*-espace* $\boldsymbol{X}$, *le morphisme structural de la* $H^*_{\boldsymbol{G}}$*-algèbre* $H^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$ *est l'homomorphisme caractéristique* $\gamma^{\boldsymbol{G}}_{\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{X}} : H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{G};\boldsymbol{A}) \to H^*(\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$.

1.1.1 Restriction de groupes en cohomologie équivariante. Un fibré universel $\mathbb{E}\boldsymbol{G}$ pour $\boldsymbol{G}$ est également universel pour tout sous-groupe $\boldsymbol{G}'$ de $\boldsymbol{G}$. En particulier, pour tout $\boldsymbol{G}$-espace $\boldsymbol{X}$, on a une surjection canonique $\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}'}\boldsymbol{X} \twoheadrightarrow \mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{X}$ induisant l'«*homomorphisme de restriction*» entre les cohomologies équivariantes $H^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}) \to H^*_{\boldsymbol{G}'}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$

1.2 Cohomologie de de Rham équivariante

Lorsque $\boldsymbol{G}$ est un groupe de Lie agissant différentiablement sur une variété différentielle $\boldsymbol{M}$, on a la notion de la «*cohomologie de de Rham* $\boldsymbol{G}$*-équivariante de* $\boldsymbol{M}$» définie par les méthodes décrites par Henri Cartan dans [Crt].

Soient $S(\mathfrak{g}^*)$ l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{g}$ à coefficients complexes et $(\Omega^*(\boldsymbol{M}), d)$ le complexe des formes différentielles sur $\boldsymbol{M}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Le produit tensoriel $S(\mathfrak{g}^*)\otimes_{\mathbb{C}}\Omega^*(\boldsymbol{M})$ est l'algèbre des formes différentielles $\mu(Y) \in \Omega^*(\boldsymbol{M})$, dépendant polynomialement de $Y \in \mathfrak{g}$; elle est munie d'une graduation en posant $\deg(P\otimes\mu) = 2d(P) + d(\mu)$, pour $P \in S(\mathfrak{g}^*)$ et $\mu \in \Omega^*(\boldsymbol{M})$ homogènes de degrés $d(P)$ et $d(\mu)$ respectivement.

L'application $\delta_{\boldsymbol{G}} : S(\mathfrak{g}^*)\otimes\Omega^*(\boldsymbol{M}) \to S(\mathfrak{g}^*)\otimes\Omega^*(\boldsymbol{M})$, définie par :

$$\delta_{\boldsymbol{G}}(\mu)(Y) = d(\mu(Y)) + 2\pi i\, c_Y\mu(Y)\,, \qquad \text{pour chaque } Y \in \mathfrak{g},$$

où c_Y désigne la contraction par le champ de vecteurs associé à l'action infinitésimale de Y sur $\boldsymbol{M}$, est une antidérivation de degré $+1$ qui commute à l'action de $\boldsymbol{G}$ sur $S(\mathfrak{g}^*)\otimes\Omega^*(\boldsymbol{M})$ induite par l'action coadjointe sur $S(\mathfrak{g}^*)$ et par images inverses sur $\Omega^*(\boldsymbol{M})$. La restriction de $\delta_{\boldsymbol{G}}$ à la sous-algèbre des $\boldsymbol{G}$-invariants :

$$\Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}) := [S(\mathfrak{g}^*)\otimes\Omega^*(\boldsymbol{M})]^{\boldsymbol{G}}\,,$$

c'est-à-dire à la sous-algèbre des formes différentielles $\mu(Y)$ vérifiant :

$$g\cdot(\mu(Y)) = \mu(\mathrm{ad}(g)(Y))\,, \qquad \text{pour tous } g \in \boldsymbol{G} \text{ et } Y \in \mathfrak{g},$$

vérifie $\delta^2_{\boldsymbol{G}} = 0$ puisque $\delta^2_{\boldsymbol{G}}(\mu(Y)) = 2\pi i\, L_Y(\mu(Y))$, où L_Y désigne la dérivée de Lie. Le couple $\big(\Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M});\delta_{\boldsymbol{G}}\big)$ est une algèbre différentielle graduée, c'est l'«*algèbre des formes différentielles* $\boldsymbol{G}$*-équivariantes de* $\boldsymbol{M}$», sa cohomologie $H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})$, est l'«*algèbre de cohomologie de de Rham* $\boldsymbol{G}$*-équivariante de* $\boldsymbol{M}$».

Les propriétés suivantes découlent aussitôt des définitions :

- $H^*_{DR,\boldsymbol{G}}(\bullet;\mathbb{C}) = S(\mathfrak{g}^*)^{\boldsymbol{G}}$.

- La structure de $H^*_{DR,\boldsymbol{G}}(\bullet;\mathbb{C})$-module de $H^*_{DR,\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})$ est celle induite par la structure de $S(\mathfrak{g}^*)^{\boldsymbol{G}}$-module de $\Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})$.
- $H^*_{DR,\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) = S(\mathfrak{g}^*)^{\boldsymbol{G}} \otimes_{\mathbb{C}} H_{DR}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})$, lorsque $\boldsymbol{G}$ opère trivialement sur $\boldsymbol{M}$.
- $H^*_{DR,\{1\}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) = H_{DR}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})$.

Remarque. *Lorsque $\boldsymbol{G}$ est compact, l'identification classique pour une variété différentiable entre sa cohomologie de de Rham et sa cohomologie singulière (à coefficients complexes) se généralise au contexte équivariant à l'aide des méthodes de* [Crt] *; on a donc un isomorphisme canonique*

$$H^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) \simeq H^*_{DR,\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})\,,$$

et en particulier $H^*_{\boldsymbol{G}}(\bullet;\mathbb{C}) \simeq S(\mathfrak{g}^*)^{\boldsymbol{G}}$.

1.2.1 Restriction de groupes en cohomologie de de Rham équivariante. Soit $\boldsymbol{G}'$ un sous-groupe fermé du groupe de Lie $\boldsymbol{G}$. La restriction des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}'$ induit un morphisme de complexes : $(\Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}), \delta_{\boldsymbol{G}}) \to (\Omega^*_{\boldsymbol{G}'}(\boldsymbol{X}), \delta_{\boldsymbol{G}'})$ qui donne lieu à l'«*homomorphisme de restriction de groupes en cohomologie de de Rham équivariante*» $\rho^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{G}'}$: $H^*_{DR,\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) \to H^*_{DR,\boldsymbol{G}'}(\boldsymbol{X})$ correspondant, modulo l'isomorphisme de le remarque précédente, à l'homomorphisme de restriction de groupes en cohomologie singulière équivariante de la section 1.1.1.

Lorsque $\boldsymbol{G}' = \{1\}$, on a $S(\mathfrak{g}') = \mathbb{C}$ et la restriction de $S(\mathfrak{g}^*)$ à $S(\mathfrak{g}'^*)$ coïncide avec le morphisme d'évaluation à l'origine $P \mapsto P(0)$, pour cette raison on notera 'v_0' ce qu'on aurait dû noter $\rho^{\boldsymbol{G}}_{\{1\}}$.

1.3 Cohomologie de de Rham équivariante des variétés de drapeaux (1985–1989)

Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe de Lie complexe semi-simple connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient $\boldsymbol{K}$ un sous-groupe compact maximal de $\boldsymbol{G}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ et σ l'involution associée. Soient $\boldsymbol{H}$ un sous-groupe de Cartan de $\boldsymbol{G}$, σ-invariant, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et $\boldsymbol{B}$ un sous-groupe de Borel de $\boldsymbol{G}$ contenant $\boldsymbol{H}$, on note Δ_+ et Σ respectivement les systèmes de racines positives et simples correspondants à ces choix. Soient $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{H}$, tore maximal de $\boldsymbol{K}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$, de normalisateur $\boldsymbol{T}' = N_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{T})$, et $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{T}'/\boldsymbol{T}$ le groupe de Weyl muni de l'ordre de Bruhat-Ehresmann '$\preccurlyeq$' défini par Σ. On note $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{G}/\boldsymbol{B} = \boldsymbol{K}/\boldsymbol{T}$ la «*variété des drapeaux de $\boldsymbol{G}$*», elle est munie de l'action naturelle de $\boldsymbol{K}$ (et donc de $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}'$) à gauche. L'ensemble $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$ des points fixes de $\boldsymbol{X}$ sous l'action de $\boldsymbol{T}$ est $\boldsymbol{T}'/\boldsymbol{T} = \boldsymbol{W}$.

Dans [A$_1$,A$_0$], on généralise les constructions et théorèmes de l'article de Bernstein-Gelfand-Gelfand [BGG], qui concerne la cohomologie ordinaire de $\boldsymbol{X}$, au contexte de la cohomologie de de Rham équivariante de $\boldsymbol{X}$.

1.3.1 La famille des formes linéaires $\mathscr{L}_{\boldsymbol{w}}$. La décomposition $\boldsymbol{X} = \coprod_{w\in\boldsymbol{W}} \boldsymbol{X}_w$, où $\boldsymbol{X}_w = \boldsymbol{B}w\boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}$ est une «*cellule de Schubert*» : espace affine isomorphe à $\mathbb{C}^{\ell(w)}$, munit $\boldsymbol{X}$ d'une structure de CW-complexe où toutes les cellules sont de dimension paire. L'adhérence $\overline{\boldsymbol{X}}_w$ d'une cellule $\boldsymbol{X}_w$ définit le «*cycle de Schubert*» $\sigma_w \in H_{2\ell(w)}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$ et la famille $\{\sigma_w\}_{w\in\boldsymbol{W}}$ est une base (homogène) du $\mathbb{Z}$-module $H^*(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$.

Les formes $\mathbb{C}$-linéaires

$$\begin{array}{ccc} H_{DR}^{2\ell(w)}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) & \xrightarrow{\langle \sigma_w, - \rangle} & \mathbb{C} \\ \mu & \longmapsto & \displaystyle\int_{\boldsymbol{X}_w} \mu|_{\boldsymbol{X}_w} \end{array}$$

jouent un rôle central dans [BGG] et leurs analogues en cohomologie de de Rham équivariante sont les formes $S(\mathfrak{t}^*)$-linéaires notées $\mathscr{L}_w$:

$$\begin{array}{ccc} H_{DR,\boldsymbol{T}}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) & \xrightarrow[\langle \sigma_w, - \rangle]{\mathscr{L}_w} & H_{DR,\boldsymbol{T}}^{*-2\ell(w)}(\bullet;\mathbb{C}) \subseteq S(\mathfrak{t}^*) \\ \mu(Y) & \longmapsto & \displaystyle\int_{\boldsymbol{X}_w} \mu(Y)|_{\boldsymbol{X}_w} \end{array}$$

1.3.2 Homomorphisme de Chern-Weil en cohomologie équivariante. L'autre ingrédient fondamental dans [BGG] est l'homomorphisme de Chern-Weil qui réalise $H_{DR}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$ comme quotient de l'anneau $S(\mathfrak{t}^*)$. On rappelle à continuation sa définition habituelle et sa généralisation en cohomologie équivariante.

Soit θ une connexion $\boldsymbol{K}$-invariante de la fibration principale $\pi : \boldsymbol{K} \twoheadrightarrow \boldsymbol{K}/\boldsymbol{T} = \boldsymbol{X}$, de dérivée covariante ∇ et courbure $\nabla(\theta)$. Pour tout $P \in S(\mathfrak{t}^*)$ le cocycle $P(-\nabla(\theta)/2\pi i) \in \Omega^*(\boldsymbol{K})$ provient de $\boldsymbol{X}$, *i.e.* est de la forme $\pi^*\mu$ pour un (unique) cocycle $\mu \in \Omega^*(\boldsymbol{X})$. On note $\overline{P}(-\nabla(\theta)/2\pi i) \in H_{DR}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$ la classe de cohomologie déterminée par μ. L'application :

$$\begin{array}{ccc} S(\mathfrak{t}^*) & \xrightarrow{\mathscr{Ch}} & H_{DR}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) \\ P & \longmapsto & \overline{P}\big(-\nabla(\theta)/2\pi i\big)\,, \end{array}$$

est un homomorphisme indépendant de la connexion θ choisie ; c'est l'«*homomorphisme de Chern-Weil*».

Nicole Berline et Michèle Vergne généralisent cette construction au contexte équivariant en faisant intervenir l'application moment $\boldsymbol{K} \ni k \xmapsto{J_Y} \theta(Y_{\boldsymbol{K}})(k) \in \mathfrak{t}$, où $Y_{\boldsymbol{K}}$ dénote le champ de vecteurs associé à l'action infinitésimale à gauche de $Y \in \mathfrak{k}$ sur $\boldsymbol{K}$. Elles remarquent que pour $P \in S(\mathfrak{t}^*)$ et $Y \in \mathfrak{k}$, la forme différentielle $P\big(-J_Y - \nabla(\theta)/2\pi i\big) \in \Omega^*(\boldsymbol{K})$ est de la forme $\pi^*(\mu(Y))$, où $\mu(Y)$ est un cocycle du complexe $\big(\Omega_{\boldsymbol{K}}^*(\boldsymbol{X}), \delta_{\boldsymbol{K}}\big)$. Notons $\overline{P}\big(-J_Y - \nabla(\theta)/2\pi i\big)$ la classe de cohomologie de de Rham $\boldsymbol{K}$-équivariante de $\boldsymbol{X}$ déterminée par $\mu(Y)$. Comme dans le cas classique, l'application :

$$\begin{array}{ccc} S(\mathfrak{t}^*) & \xrightarrow{\mathscr{Ch}_{\boldsymbol{K}}} & H_{DR,\boldsymbol{K}}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) \\ P & \longmapsto & \overline{P}\big(-J_Y - \nabla(\theta)/2\pi i\big)\,, \end{array}$$

est un homomorphisme indépendant de la connexion choisie ([BV]) ; c'est l'«*homomorphisme de Chern-Weil en cohomologie $\boldsymbol{K}$-équivariante*».

Pour tout sous-groupe fermé $\boldsymbol{K}' \subseteq \boldsymbol{K}$, le même procédé donne lieu à l'homomorphisme de Chern-Weil en cohomologie $\boldsymbol{K}'$-équivariante $\mathscr{Ch}_{\boldsymbol{K}'} : S(\mathfrak{t}^*) \to H_{DR,\boldsymbol{K}'}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$; il coïncide avec la composée

$$\begin{array}{ccccc} S(\mathfrak{t}^*) & \xrightarrow{\mathscr{Ch}_{\boldsymbol{K}}} & H_{DR,\boldsymbol{K}}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) & \xrightarrow{\rho_{\boldsymbol{K}'}^{\boldsymbol{K}}} & H_{DR,\boldsymbol{K}'}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) \\ & \searrow^{\mathscr{Ch}_{\boldsymbol{K}'}} & & & \uparrow \end{array}$$

En particulier, $\mathscr{Ch}$ et $\mathscr{Ch}_{\boldsymbol{K}}$ sont reliés par $v_0 : H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) \to H^*_{DR}(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$ et le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccccc} S(\mathfrak{t}^*) & \xrightarrow{\mathscr{Ch}_{\boldsymbol{K}}} & H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) & \ni & \mu(Y) \\ \| & \oplus & \downarrow{\scriptstyle v_0} & & \downarrow \\ S(\mathfrak{t}^*) & \xrightarrow{\mathscr{Ch}} & H^*_{DR}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) & \ni & \mu(0) \end{array}$$

1.3.3 Le programme de [$\mathbf{A_1}$,$\mathbf{A_0}$]. Les éléments introduits dans les paragraphes précédents se retrouvent rassemblés dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} S(\mathfrak{t}^*) & \xrightarrow{\mathscr{Ch}_{\boldsymbol{K}}} & H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) & \xrightarrow{\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}}} & H^*_{DR,\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) & \xrightarrow[\langle\sigma_w,-\rangle]{\mathscr{L}_w} & S(\mathfrak{t}^*) & \ni & P(Y) \\ \| & \oplus & \downarrow{\scriptstyle v_0} & \oplus & \downarrow{\scriptstyle v_0} & \oplus & \downarrow{\scriptstyle v_0} & & \downarrow \\ S(\mathfrak{t}^*) & \xrightarrow{\mathscr{Ch}} & H^*_{DR}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) & = & H^*_{DR}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) & \xrightarrow{\langle\sigma_w,-\rangle} & \mathbb{C} & \ni & P(0)\,, \end{array} \qquad (\mathscr{D})$$

où la deuxième ligne, qui représente le cas classique (non équivariant) a été étudiée par Bernstein-Gelfand-Gelfand ([BGG]). L'objet principal de leur travail est la détermination d'une famille de polynômes $\{P^w\}_{w\in\boldsymbol{W}} \subseteq S(\mathfrak{t}^*)$, les «*polynômes de Schubert*», réalisant la base duale de la base des cycles de Schubert via l'homomorphisme de Chern-Weil $\mathscr{Ch}$ dont on connaissait la surjectivité et le noyau depuis la thèse de A. Borel ([B_0]). Les polynômes de Schubert vérifient :

$$\langle \sigma_v, \mathscr{Ch}(P^w)\rangle = \delta^w_v\,, \quad \text{pour tous } v, w \in \boldsymbol{W}.$$

Le but de [A_1,A_0] est l'étude du diagramme $(\mathscr{D})$ dans sa globalité en portant un intérêt particulier à la ligne équivariante où les généralisations équivariantes des définitions et théorèmes de [BGG] sont traitées. Le passage du cas équivariant au cas classique se fait à l'aide du résultat suivant :

Proposition ([$\mathbf{A_0}$]). *Soit $\boldsymbol{K}$ un groupe de Lie compact et connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ opérant à gauche sur une variété $\boldsymbol{M}$ dont la cohomologie rationnelle est nulle en degrés impaires. L'homomorphisme :*

$$\begin{array}{ccc} H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) & \xrightarrow{v_0} & H^*_{DR}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) \\ \mu(Y) & \longmapsto & \mu(0)\,, \end{array}$$

est alors surjectif *et* $\ker\big(v_0\big) = S(\mathfrak{k}^*)^{\boldsymbol{K}}_0 \cdot H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})$, *où* $S(\mathfrak{k}^*)^{\boldsymbol{K}}_0$ *est l'idéal de* $S(\mathfrak{k}^*)^{\boldsymbol{K}}$ *des polynômes s'annulant à l'origine.*

Nous passons maintenant en revue les propriétés les plus remarquables des morphismes de la première ligne du diagramme $(\mathscr{D})$ dans les trois sections suivantes.

1.3.4 Homomorphisme $\mathscr{Ch}_{\boldsymbol{K}}$. A la différence du cas classique, cet homomorphisme est bijectif. A ce sujet, les méthodes de [Crt] appliquées à la définition de Berline-Vergne permettent de démontrer le résultat général suivant qui couvre le cas des groupes de Lie compacts.

Proposition ([$\mathbf{A_0}$]). *Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe de Lie, $\boldsymbol{H}$ un Sous-groupe fermé de $\boldsymbol{G}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On suppose que le fibré principal $\boldsymbol{G} \twoheadrightarrow \boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$ admet une connexion $\boldsymbol{G}$-invariante θ, de*

dérivée covariante ∇ *et courbure* $\nabla(\theta)$*. Alors l'homomorphisme de Chern-Weil équivariant*

$$\begin{array}{rcl} S(\mathfrak{h}*)^{\boldsymbol{H}} & \xrightarrow{\mathscr{Ch}_{\boldsymbol{G}}} & H^*_{DR,\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H};\mathbb{C}) \\ P & \longmapsto & \overline{P}\big(-J_Y - \nabla(\theta)/2\pi i\big)\,, \end{array}$$

est un isomorphisme indépendant de la connexion choisie.

1.3.5 Morphisme de restriction de $\boldsymbol{K}$ à $\boldsymbol{T}$ en cohomologies de de Rham équivariante. Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable munie d'une action à gauche de $\boldsymbol{K}$. Le morphisme de restriction de groupes $\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}}$ se factorise à travers $H^*_{DR,\boldsymbol{T}'}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})$ en $\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}} = \rho^{\boldsymbol{T}'}_{\boldsymbol{T}} \circ \rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}'}$:

$$\begin{array}{ccccc} H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) & \xrightarrow{\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}'}} & H^*_{DR,\boldsymbol{T}'}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) & \xrightarrow{\rho^{\boldsymbol{T}'}_{\boldsymbol{T}}} & H^*_{DR,\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) \\ & \searrow & & & \uparrow \\ & & \rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}} & & \end{array}$$

Les méthodes de [Crt] permettent de démontrent que $\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}'}$ est bijectif ([A$_0$]) ([1]), et le $\rho^{\boldsymbol{T}'}_{\boldsymbol{T}}$ s'identifie, par ailleurs, à l'inclusion $H^*_{DR,\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})^{\boldsymbol{W}} \subseteq H^*_{DR,\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})$ dans la mesure où $\Omega^*_{\boldsymbol{T}'}(\boldsymbol{M})$ est homotope à $\Omega^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{W}}$ et donc $H^*_{DR,\boldsymbol{T}'}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) = H^*_{DR,\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})^{\boldsymbol{W}}$.

1.3.6 Applications $\mathscr{L}_{\boldsymbol{w}}$ et opérateurs de Bernstein-Gelfand-Gelfand. Le théorème suivant, résultat principal de [A$_0$,A$_1$], répond à une question de Michèle Vergne à propos des applications $\mathscr{L}_w$.

Théorème ([A$_0$,A$_1$])

a) *Soient* $\alpha \in \Sigma$, $r_\alpha \in \boldsymbol{W}$ *la réflexion associée à* α *et* $w \in \boldsymbol{W}$*. On suppose que* $r_\alpha w > w$ *avec, alors :*

$$\boxed{\mathscr{L}_{r_\alpha w} = A_\alpha \circ \mathscr{L}_w}$$

où A_α *est l'opérateur agissant sur* $S(\mathfrak{t}^*)$ *défini dans* [BGG] *par :*

$$A_\alpha(P) = \frac{r_\alpha \cdot P - P}{\alpha}\,, \quad \textit{pour tout } P \in S(\mathfrak{t}^*).$$

b) *Si* $r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell}$ *est une décomposition réduite de* w*, alors :*

$$\boxed{\mathscr{L}_w \circ \mathscr{Ch}_{\boldsymbol{T}} = A_{\alpha_1} \circ \cdots \circ A_{\alpha_\ell}}$$

L'assertion (b) de ce théorème explique très simplement le résultat, démontré dans [BGG] par des méthodes combinatoires, qui établit l'égalité entre les composées

$$A_{\alpha_1} \circ \cdots \circ A_{\alpha_\ell} = A_{\alpha'_1} \circ \cdots \circ A_{\alpha'_\ell}$$

lorsque $r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell}$ et $r_{\alpha'_1}\cdots r_{\alpha'_\ell}$ sont des décompositions réduites d'un même $w \in \boldsymbol{W}$, ce qui justifie de noter A_w ces composées. Notons $A_e = \mathrm{id}_{S(\mathfrak{t}^*)}$. Les éléments de la famille $\{A_w\}_{w\in\boldsymbol{W}}$ sont les «*opérateurs de Bernstein-Gelfand-Gelfand*». Les égalités encadrées du théorème précédent

[1] Lorsque $\boldsymbol{M}$ est réduite à un point, on retrouve l'isomorphisme de Chevalley $S(\mathfrak{t}^*)^{\boldsymbol{K}} = H^*_{\boldsymbol{K}}(\bullet;\mathbb{C}) \simeq H^*_{\boldsymbol{T}'}(\bullet;\mathbb{C}) = S(\mathfrak{t}^*)^{\boldsymbol{W}}$, bien connu en théorie des groupes.

admettent donc la réécriture :

$$\boxed{\mathscr{L}_w = A_w \circ \mathscr{L}_e \quad \text{et} \quad \mathscr{L}_w \circ \mathscr{C}\!\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{T}} = A_w} \qquad \text{pour tout } w \in \boldsymbol{W}.$$

1.3.7 L'opérateur $\boldsymbol{A_s}$. Soit s l'élément de plus grande longueur de $\boldsymbol{W}$. Pour tout $P \in S(\mathfrak{t}^*)$, on a : $A_s(P) = \mathscr{L}_s \circ \mathscr{C}\!\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{T}}(P)$ d'après l'assertion (b) du théorème précédent. Mais $\mathscr{L}_s$ est l'intégrale sur la variété différentiable et compacte $\boldsymbol{X}$ et s'explicite à l'aide de la formule de localisation de Berline-Vergne ([BV]) en une somme finie ([A$_0$]) :

$$\boxed{A_s(P) = \frac{\sum_{w\in\boldsymbol{W}}(-1)^{\ell(w)}\, w\cdot P}{\prod_{\alpha\in\Delta_+} -\alpha} = \sum_{w\in\boldsymbol{W}} w\left(\frac{P}{\prod_{\alpha\in\Delta_+} -\alpha}\right)}$$

1.3.8 Polynômes de Schubert. La famille $\{P^w\}_{w\in\boldsymbol{W}} \subseteq S(\mathfrak{t}^*)$ des «*polynômes de Schubert*» est définie dans [BGG] par :

$$\begin{cases} P^s := \dfrac{\prod_{\alpha\in\Delta_+} -\alpha}{|\boldsymbol{W}|}\,, \\ P^w = A_{w^{-1}s}(P^s)\,, \qquad \text{pour tout } w \in \boldsymbol{W}. \end{cases}$$

où $P^e = A_s(P^s) = 1$, d'après 1.3.7. La proposition suivante, transposition au contexte équivariant de résultat principal de [BGG], devient un corollaire immédiat du théorème 1.3.6.

Proposition ([BGG]). *Pour tous $v, w \in \boldsymbol{W}$, on a :*

$$\mathscr{L}_v(\mathscr{C}\!\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{T}}(P^w)) = A_v(P^w) = \begin{cases} P^{wv^{-1}} & \textit{lorsque} \quad \ell(wv^{-1}) = \ell(w) - \ell(v), \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

En particulier :

$$\langle \sigma_v, \mathscr{C}\!\boldsymbol{h}(P^w)\rangle = \langle \sigma_v, \mathscr{C}\!\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{T}}(P^w)\rangle(0) = A_v(P^w)(0) = P^{wv^{-1}}(0) = \delta_v^w\,.$$

Remarque. *La famille des polynômes de Schubert $\{P^w\}_{w\in\boldsymbol{W}}$ qui réalise la base de $H^*_{DR}(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$ duale de la base des cycles de Schubert de $H_*(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$, n'est pas unique dans la mesure où le morphisme de Chern-weyl $\mathscr{C}\!\boldsymbol{h} : S(\mathfrak{t}^*) \to H^*_{DR}(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$ à un noyau non trivial égal à $S(\mathfrak{t}^*)\cdot S(\mathfrak{t}^*)_0^{\boldsymbol{W}}$. La proposition précédente montre que cette famille est une base de $H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$, pour sa structure de $S(\mathfrak{k}^*)^{\boldsymbol{K}}$-module. Le fait que $H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$ est un $S(\mathfrak{k}^*)^{\boldsymbol{K}}$-module libre de rang $|\boldsymbol{W}|$, se traduit modulo l'isomorphisme $\mathscr{C}\!\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{K}} : S(\mathfrak{t}^*) \xrightarrow{\simeq} H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$, par le théorème bien connu qui affirme que $S(\mathfrak{t}^*)$ est un $S(\mathfrak{t}^*)^{\boldsymbol{W}}$-module libre de rang $|\boldsymbol{W}|$.*

1.3.9 A propos de l'anneau des coefficients. Les résultats de [A$_0$,A$_1$] sont aussi vrais en cohomologie rationnelle où il convient de remplacer $H_{DR,\boldsymbol{K}}$ par $H_{\boldsymbol{T}'}(\bullet;\mathbb{Q})$ et $S(\mathfrak{t}^*)$ par $\mathbb{Q}\otimes \mathscr{R}(\boldsymbol{T})$, où $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$ ($\sim \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{\dim \boldsymbol{T}}]$) désigne l'anneau des représentations de dimension finie de $\boldsymbol{T}$, canoniquement isomorphe à $H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{T};\mathbb{Z})$ (*cf.* 1.4.1). Le cas des coefficients entiers mérite quelques commentaires. Le diagramme ($\mathscr{D}$) garde un sens en cohomologie entière, en effet, les applications $\langle \sigma_w, _\rangle$ et $\mathscr{L}_w$ sont définies sur $\mathbb{Z}$ (les opérateurs A_w laissent stable $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$) et les homomorphismes de Chern-Weil $\mathscr{C}\!\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{K}}$ et $\mathscr{C}\!\boldsymbol{h}$ peuvent être remplacés par les homomorphismes

caractéristiques des $\boldsymbol{T}$-espaces à droite $\mathbb{E}\boldsymbol{K}\times_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{K}$ ($\sim \mathbb{E}\boldsymbol{K}$) et $\boldsymbol{K}$ respectivement :

$$\begin{cases} \gamma^{\boldsymbol{T}}_{\mathbb{E}\boldsymbol{K}} : \mathscr{R}(\boldsymbol{T}) = H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{T};\mathbb{Z}) \to H^*_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \\ \gamma^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{K}} : \mathscr{R}(\boldsymbol{T}) = H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{T};\mathbb{Z}) \to H^*(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \end{cases}$$

Mais si le morphisme $\gamma^{\boldsymbol{T}}_{\mathbb{E}\boldsymbol{K}}$ est toujours bijectif, le morphisme $\gamma^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{K}}$ *n'est plus nécessairement surjectif* et on ne peut plus espérer paramétrer la base duale de la base des cycles de Schubert à l'aide des éléments de $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$. Il est d'autre part clair que le conoyau de $\gamma^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{K}}$ est un $\mathbb{Z}$-module de torsion et que les points fermés de son support sont précisément les nombres premiers que l'on doit inverser pour donner un sens au polynôme de Schubert P^s. La torsion de $\operatorname{coker}(\gamma^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{K}})$ a été étudiée par ailleurs par M. Demazure dans [Dem$_1$] et A. Borel dans [B$_1$].

1.3.10 Transformée de Fourier de la mesure de Liouville. Une autre application suggérée par Michèle Vergne du lien qui relie l'intégration sur les cycles de Schubert et les opérateurs A_w est donnée dans [A$_1$]. Soit f une forme réelle sur $\mathfrak{k}$ nulle sur $\mathfrak{t}^\perp$, telle que $-if$ soit dominante régulière, c'est-à-dire $-if(h^\vee_\alpha) > 0$ pour toute coracine $h^\vee_\alpha$. L'orbite $\boldsymbol{K}\cdot f$ de f dans la représentation coadjointe de $\boldsymbol{K}$ dans $\mathfrak{k}^*$, est munie d'une forme symplectique $\boldsymbol{K}$-invariante canonique σ_f qui est la forme fondamentale d'une structure kählérienne sur $\boldsymbol{K}\cdot f$. D'autre part, l'identification $\boldsymbol{K}\cdot f = \boldsymbol{K}/\boldsymbol{T} = \boldsymbol{X}$ permet de poser $(\boldsymbol{K}\cdot f)_w := \boldsymbol{X}_w$, et les couples $\big((\boldsymbol{K}\cdot f)_w, \sigma_f\big)$ sont des variétés complexes symplectiques. Notons $\widehat{\sigma}^w_f$ la transformée de Fourier de leur mesure de Liouville ([BV]) . On a alors pour tout $Y \in \mathfrak{t}$ ([A$_1$]) :

$$\boxed{\begin{aligned} \widehat{\sigma}^w_f(Y) = \int_{(\boldsymbol{K}\cdot f)_w} e^{i\langle Y,x\rangle}\, e^{\sigma_f(x)} = \int_{(\boldsymbol{K}\cdot f)_w} e^{if(-J_Y - \frac{\omega}{2\pi i})} = \\ = \mathscr{L}_w\, \mathscr{C}\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{T}}\left(e^{if}\right) = A_w\big(e^{if}\big)(Y) \end{aligned}}$$

où le terme de droite fait apparaître le prolongement naturel de l'action de A_w à l'algèbre des fonctions entières sur $\mathfrak{t}$. Dans le cas particulier où $w = s$, on retrouve la formule d'Harish-Chandra ([Hrs]) (*cf.* 1.3.7) :

$$\int_{\boldsymbol{K}\cdot f} e^{i\langle Y,x\rangle}\, e^{\sigma_f(x)} = \frac{\sum_{w\in\boldsymbol{W}}(-1)^{\ell(w)}\, e^{if(w^{-1}Y)}}{\prod_{\alpha\in\Delta_+} -\alpha}\,.$$

1.4 Anneau de cohomologie singulière $\boldsymbol{T}$-équivariante des variétés de Schubert (1989)

1.4.1 Cohomologie singulière $\boldsymbol{T}$-équivariante. L'objet de [A$_1$,A$_0$] était l'étude des anneaux de cohomologie de de Rham $\boldsymbol{K}$-équivariante et ordinaire de $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{T}$, ou, ce qui revient au même, des anneaux de cohomologie singulière $\boldsymbol{K}$-équivariante et ordinaire de $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{T}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Dans ces travaux l'homomorphisme de Chern-Weil joue un rôle fondamental dans la mesure où il réalise ces anneaux comme quotients de l'algèbre $S(\mathfrak{t}^*)$ (resp. $\mathbb{Q}\otimes\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$). Mais cette propriété cesse d'être vérifiée dans le cas des cohomologies $\boldsymbol{T}$-équivariante et ordinaire à coefficients entiers. L'article [A$_3$], qui s'intéresse à cette situation, fait alors appel au théorème de localisation de Borel-Atiyah-Segal qui permet de réaliser $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$ plutôt comme *sous-anneau* d'un anneau de structure très simple. Le paragraphes suivant expliquent les bases de la mé-

thode utilisée dans [A$_3$] qui mène la détermination de la loi multiplicative de $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$ et plus généralement de $H^*_{\boldsymbol{T}}(\overline{\boldsymbol{X}}_w;\mathbb{Z})$, pour tout $w \in \boldsymbol{W}$.

1.4.2 L'anneau $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$ et le théorème de localisation. La cohomologie singulière $\boldsymbol{T}$-équivariante possède quelques propriétés qui la rendent particulièrement agréable. Tout d'abord, l'isomorphisme $S(\mathfrak{t}^*) \simeq H^*_{DR,\boldsymbol{T}}(\bullet,\mathbb{C}) = H^*_{\boldsymbol{T}}(\bullet;\mathbb{C})$ (*cf.* 1.2) résulte par changement de base d'un isomorphisme à coefficients entiers $ch : \mathscr{R}(\boldsymbol{T}) \xrightarrow{\cong} H^*_{\boldsymbol{T}}(\bullet;\mathbb{Z})$, où $\mathscr{R}(\boldsymbol{T}) \simeq \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_{\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})}]$ désigne l'anneau des représentations de dimension finie de $\boldsymbol{T}$. Le morphisme ch fait correspondre à une représentation irréductible complexe $\mathbb{C}_\lambda$ de $\boldsymbol{T}$ de poids λ, la première classe de Chern du fibré en droites $\mathbb{E}\boldsymbol{T} \otimes_{\boldsymbol{T}} \mathbb{C}_\lambda \twoheadrightarrow \mathbb{B}\boldsymbol{T}$. Ensuite, on a une propriété considérablement plus intéressante qui relève du fait que pour tout sous-groupe fermé $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{T}$ tel que $\dim \boldsymbol{H} < \dim \boldsymbol{T}$, le morphisme de restriction de groupe $H^*_{\boldsymbol{T}}(\bullet;\mathbb{Z}) \to H^*_{\boldsymbol{H}}(\bullet;\mathbb{Z})$ a un noyau non trivial, autrement dit, $H^*_{\boldsymbol{H}}(\bullet;\mathbb{Z})$ est un $H^*_{\boldsymbol{T}}(\bullet;\mathbb{Z})$-module de torsion. La propriété en question connue sous le nom de «*théorème de localisation*», est la suivante.

Théorème ([B-al,AS]). *Soit $\boldsymbol{Y}$ un $\boldsymbol{T}$-espace de dimension cohomologique finie, notons $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ le sous-espace des points fixes de $\boldsymbol{Y}$ sous l'action de $\boldsymbol{T}$. Alors, les noyau et conoyau de l'homomorphisme de restriction aux points fixes $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \to H^*_{\boldsymbol{T}}\big(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathbb{Z}\big)$ sont des $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-modules de torsion. Autrement dit, le morphisme :*

$$\boxed{\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}) \otimes_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})} H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \xrightarrow[\text{aux points fixes}]{\text{restriction}} \mathscr{Q}(\boldsymbol{T}) \otimes_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})} H^*_{\boldsymbol{T}}\big(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathbb{Z}\big)}$$

où $\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$ désigne le corps de fractions de $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$, est un isomorphisme.

En particulier, lorsque $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ est discret, on a :

$$\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}) \otimes_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})} H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{Q}(\boldsymbol{T}) \otimes_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})} H^*_{\boldsymbol{T}}\big(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathbb{Z}\big) = \mathrm{App}(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$$

où $\mathrm{App}(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$ désigne l'algèbre des applications de $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ à valeurs dans $\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$.

1.4.3 Détermination de l'anneau de cohomologie ($\boldsymbol{T}$-équivariante) entière. Le théorème de localisation s'avère très utile lorsque le $\boldsymbol{T}$-espace $\boldsymbol{Y}$ est compact, que $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ est fini et que $\boldsymbol{Y}$ admet une décomposition en CW-complexe dont les cellules sont $\boldsymbol{T}$-stables, de dimension paire et possèdent un unique point fixe. Pour chaque $w \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$, on note alors $\boldsymbol{Y}_w$ la cellule contenant w ; on a $\boldsymbol{Y} = \coprod_{w\in\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}} \boldsymbol{Y}_w$. Ces conditions sont vérifiées notamment dans le cas des variétés de Schubert et des variétés de Bott-Samelson. Dans ces cas :

D-1) $H^*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $|\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}|$.

D-2) $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$ est un $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-module libre de rang $|\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}|$.

D-3) L'homomorphisme de restriction aux points fixes $\Theta : H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \to H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathbb{Z})$ est *injectif* de conoyau de $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-torsion (théorème de localisation) ; il identifie donc $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathbb{Z})$ à une certaine sous-algèbre de $\mathrm{App}(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$.

D-4) L'accouplement naturel $\langle _,_\rangle : H_d(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \otimes H^d(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, entre les groupes d'homologie et cohomologie entières de $\boldsymbol{Y}$ de même degré d, s'étend à la cohomologie équivariante

$$\langle _,_\rangle : H_d(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \otimes H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \to H^{*-d}_{\boldsymbol{T}}(\bullet;\mathbb{Z})\,.$$

On note $\mathscr{L}_\sigma : H_{\boldsymbol{T}}^*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \to \mathscr{R}(\boldsymbol{T})$ la forme $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-linéaire définie par un élément homogène $\sigma \in H_*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$.
Pour toute base homogène $\{\sigma_1,\dots,\sigma_s\}$ de $H_*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$, la famille $\{\mathscr{L}_{\sigma_1},\dots,\mathscr{L}_{\sigma_s}\}$ est une base du $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-module $\mathrm{Hom}_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})}\big(H_{\boldsymbol{T}}^*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}),\mathscr{R}(\boldsymbol{T})\big)$. Les formes linéaires $\mathscr{L}_\sigma$ se prolongent de manière unique, d'après le théorème de localisation, en des formes $\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$-linéaires $L_\sigma : \mathrm{App}\left(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})\right) \to \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$.

$$\begin{array}{ccccc} H_{\boldsymbol{T}}^*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) & \xhookrightarrow{\ \Theta\ } & H_{\boldsymbol{T}}^*\big(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathbb{Z}\big) = \mathrm{App}\left(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{R}(\boldsymbol{T})\right) & \subseteq & \mathrm{App}\left(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}},\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})\right) \\ {\scriptstyle \mathscr{L}_\sigma}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle L_\sigma} \\ \mathscr{R}(\boldsymbol{T}) & & \xhookrightarrow{\qquad\qquad\subseteq\qquad\qquad} & & \mathscr{Q}(\boldsymbol{T}) \end{array}$$

$$\mathscr{L}_\sigma(\mu) = L_\sigma(\Theta(\mu)),\ \text{pour tout}\ \mu \in H_{\boldsymbol{T}}^*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})\,.$$

Proposition ([A$_3$]). *L'image de Θ est la sous-algèbre de $\mathrm{App}(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ des éléments f vérifiant :*

$$L_\sigma(f) \in \mathscr{R}(\boldsymbol{T})$$

pour tout $\sigma \in H_*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$, ou, ce qui revient au même, pour tout σ dans une base (homogène) de $H_*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$.

D-5) L'ensemble $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ est muni d'un ordre partiel '$\preccurlyeq$' en posant $u \preccurlyeq w$ lorsque $u \in \overline{\boldsymbol{Y}}_w$. Pour chaque $w \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$, l'adhérence $\overline{\boldsymbol{Y}}_w$ est $\boldsymbol{T}$-stable et définit le cycle $\sigma_w \in H_{\dim \boldsymbol{Y}_w}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$ et la famille $\{\sigma_w\}_{w\in\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}}$ est une base de $\mathbb{Z}$-module de $H_*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$. Pour chaque $w \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$, la forme linéaire L_{σ_w}, notée désormais L_w, se factorise à travers le morphisme de restriction

$$\mathrm{App}\left(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{R}(\boldsymbol{T})\right) \xrightarrow[\text{de } \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}} \text{ à } \overline{\boldsymbol{Y}}_w^{\boldsymbol{T}}]{\text{restriction}} \mathrm{App}\left(\overline{\boldsymbol{Y}}_w^{\boldsymbol{T}};\mathscr{R}(\boldsymbol{T})\right) \subseteq \mathrm{App}\left(\overline{\boldsymbol{Y}}_w^{\boldsymbol{T}};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})\right)$$

où $\overline{\boldsymbol{Y}}_w^{\boldsymbol{T}} = \{u \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}} \mid u \preccurlyeq w\}$.

Pour chaque $u \preccurlyeq w$, notons $\lambda_u : \mathrm{App}\left(\overline{\boldsymbol{Y}}_w^{\boldsymbol{T}};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})\right) \to \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$ l'évaluation au point u, *i.e.* $\lambda_u(f) = f(u)$. La famille $\{\lambda_u\}_{u\preccurlyeq w}$ est une base de l'espace des formes $\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$-linéaires sur $\mathrm{App}\left(\overline{\boldsymbol{Y}}_w^{\boldsymbol{T}};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})\right)$ de sorte que pour chaque $w \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ donné, il existe une unique famille $\{q_w^u\}_{u\preccurlyeq w} \subseteq \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$, telle que, pour tout $f \in \mathrm{App}(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$,

$$\boxed{L_w(f) = \sum_{u\preccurlyeq w} q_w^u\, \lambda_u(f) = \sum_{u\preccurlyeq w} q_w^u\, f(u)}$$

Soit Q la matrice dont les lignes et colonnes sont indexées par les éléments de $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ et dans laquelle le coefficient $Q_{w,u}$ en ligne w et colonne u est

$$Q_{w,u} = \begin{cases} q_w^u & \text{lorsque } u \preccurlyeq w, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

D-6) La matrice Q est inversible d'inverse notée $R := Q^{-1}$.

Théorème. *Pour $w \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$, soit $\tilde{P}^w : \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}} \to \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$ l'application donnée par la colonne d'indice w de la matrice R,* i.e.

$$\boxed{\tilde{P}^w(u) = R_{u,w}}$$

Alors

a) *Pour tous* $u, w \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$, *on a* $L_u(\tilde{P}^w) = \delta_u^w$ *et la famille* $\{\Theta^{-1}(\tilde{P}^w)\}_{w\in \boldsymbol{W}}$ *est duale de la base* $\{\sigma_w\}_{w\in \boldsymbol{Y}^T}$ *de* $H_*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$.

b) *La famille* $\{\tilde{P}^w\}_{w\in \boldsymbol{Y}^T}$ *est une base du* $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$*-module* $\Theta(H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}))$ *; en particulier, les coefficients de la matrice* R *appartiennent à* $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$.

c) *Pour tous* $u, w_1, w_2 \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$, *le coefficient du produit* $\tilde{P}^{w_1}\tilde{P}^{w_2}$ *en* $\tilde{P}^u$ *est donné par la formule :*

$$L_u(\tilde{P}^{w_1}\tilde{P}^{w_2}) = \sum_{v\preccurlyeq u} q_u^v\, \tilde{P}^{w_1}(v)\, \tilde{P}^{w_2}(v) = \sum_{v\preccurlyeq u} q_u^v\, R_{v,w_1}\, R_{v,w_2}$$

d) *Soient* $A_{\boldsymbol{Y}}$ *l'ensemble des variables* $\{A_w\}_{w\in \boldsymbol{Y}^T}$ *et* $I_{\boldsymbol{Y}}$ *l'idéal de l'anneau des polynômes* $\mathbb{Z}[A_{\boldsymbol{Y}}]$ *engendré par les relations*

$$\mathscr{R}(w_1, w_2) := A_{w_1}A_{w_2} - \sum\nolimits_{u\in \boldsymbol{Y}^T} L_u(\tilde{P}^{w_1}\tilde{P}^{w_2})\, A_u$$

L'homomorphisme de $\mathbb{Z}[A_{\boldsymbol{Y}}]$ *vers* $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$ *qui associe* $A_w \mapsto \tilde{P}^w$ *induit un isomorphisme de* $\mathbb{Z}[A_{\boldsymbol{Y}}]/I_{\boldsymbol{Y}}$ *sur* $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$.

L'anneau de cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante de $\boldsymbol{Y}$ est donc entièrement déterminé par la connaissance de la famille des fractions rationnelles $\{q_w^u\}_{u\preccurlyeq w} \subseteq \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$.

Remarque. *La matrice* Q *est, dans notre convention, triangulaire inférieure, de même donc que la matrice* R. *Les applications* $\tilde{P}^w$ *sont par conséquent, nulles partout sauf au point* w, *lorsque* w *est maximal pour l'ordre '*$\preccurlyeq$*', en particulier lorsque la cellule* $\boldsymbol{Y}_w$ *est de dimension maximum.*

D-7) On a un isomorphisme $H^*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\otimes_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})} H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$ (suite spectrale d'Eilenberg-Moore) et le cup produit de la cohomologie ordinaire $H^*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$ découle de celui de $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$.

1.4.4 Opérateurs de Demazure $\mathscr{D}_w$. La démarche décrite dans la section précédente est appliquée dans [A$_3$] pour déterminer l'algèbre $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$, où $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{G}/\boldsymbol{B}$ est la variété des drapeaux d'un groupe $\boldsymbol{G}$ de Kač-Moody (en particulier, d'un groupe semi-simple complexe) ([2]). Une partie important du travail concerne les applications $\mathscr{L}_w$ de (1.4.3 (4)), cas particuliers d'une opération plus générale abordée en appendice de [A$_3$]. Cette opération est l'opération π_* d'«*intégration sur les fibres*» pour une fibration $\boldsymbol{T}$-équivariante $\pi : M \twoheadrightarrow N$ dont la fibre F admet une structure de CW-complexe fini orienté mais où la base N n'est pas supposée de dimension cohomologique finie. L'intégration sur les fibres définit un morphisme de $H^*_{\boldsymbol{T}}(N)$-modules $\pi_* : H^*_{\boldsymbol{T}}(M) \to H^{*-\dim(F)}_{\boldsymbol{T}}(N)$, qui intervient dans la généralisation au contexte équivariant des opérateurs cohomologiques $\{\mathscr{D}_w\}_{w\in \boldsymbol{W}}$ de Demazure, eux mêmes intimement liés aux applications $\mathscr{L}_w$. Dans la suite on décrit la version équivariante de ces opérateurs.

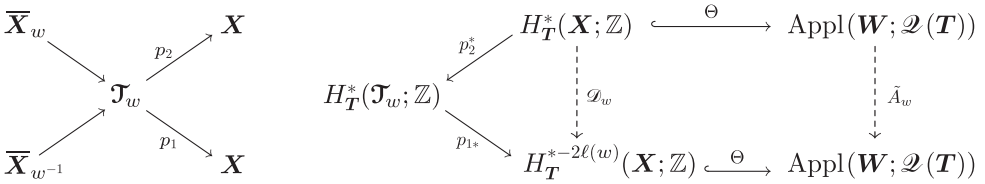
[2] Comme dans le cas des groupes semi-simples complexes, la variété de drapeaux $\boldsymbol{X}$ d'un groupe de Kač-Moody admet une décomposition cellulaire $\boldsymbol{T}$-stable dont les cellules sont de dimension paire et contiennent un unique point fixe identifié à un élément du groupe de Weyl $\boldsymbol{W}$. En contrepartie, $\boldsymbol{X}$ peut ne pas être de dimension cohomologique finie, cela se produit exactement lorsque $\boldsymbol{W}$ est infini. Dans ces cas, $\boldsymbol{X}$ est néanmoins limite inductive de $\boldsymbol{T}$-espaces conformes aux hypothèses de 1.4.3 et la démarche en question s'applique moyennant de petites précautions.

Considérons $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ muni de la structure produit de $\boldsymbol{G}$-espaces à gauche. Pour chaque $w\in\boldsymbol{W}$, notons $\mathfrak{T}_w$ l'adhérence de l'orbite $\boldsymbol{G}\cdot(e,w)$. Les projections canoniques $p_1,p_2:\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}\twoheadrightarrow\boldsymbol{X}$ sont $\boldsymbol{G}$-équivariantes et leurs restrictions à $\mathfrak{T}_w$ sont des fibrations de base $\boldsymbol{X}$ de fibres isomorphes aux variétés de Schubert $\overline{\boldsymbol{X}}_w$ et $\overline{\boldsymbol{X}}_{w^{-1}}$ respectivement. On définit l'opérateur

$$\mathscr{D}_w : H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \to H^{*-2\ell(w)}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$$

par $\mathscr{D}_w := p_{1*}\circ p_2^*$; c'est un opérateur $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-linéaire homogène de degré $-2\ell(w)$.

Notons $\mathrm{App}_b(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ l'algèbre des applications $f:\boldsymbol{W}\to\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$ de degrés bornés ([3]), *i.e.* telles qu'il existe $N_f\in\mathbb{N}$ vérifiant $\deg(f(w))<N_f$ pour tout $w\in\boldsymbol{W}$. L'homomorphisme de restriction $\Theta : H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})\hookrightarrow H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{W};\mathbb{Z}) = \mathrm{Appl}_b(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ est injectif de conoyau de $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-torsion ((3)). Les opérateurs $\mathscr{D}_w$ se prolongent donc de manière unique en des opérateurs $\tilde{A}_w$ agissant sur $\mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$.



Le théorème suivant donne les propriétés fondamentales des opérateurs $\mathscr{D}_w$ et précise leurs liens avec les applications $\mathscr{L}_w$ et L_w (*cf.* (4)).

1.4.4-1. Théorème ([A$_3$]). *Soient $w,w_1,w_2\in\boldsymbol{W}$, alors*

a) $\mathscr{D}_{w_1}\circ\mathscr{D}_{w_2} = \begin{cases} \mathscr{D}_{w_1w_2} & \text{lorsque } \ell(w_1w_2)=\ell(w_1)+\ell(w_2)\,; \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

b) $\mathscr{D}_w = \mathscr{D}_{r_{\alpha_1}}\circ\cdots\circ\mathscr{D}_{r_{\alpha_\ell}}$, *pour toute décomposition réduite* $r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell}$ *de* w.

c) *Pour* $w\in\boldsymbol{W}$, *soit* $\tilde{A}_w$ *l'opérateur sur* $\mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$ *vérifiant* $\Theta\circ\mathscr{D}_w=\tilde{A}_w\circ\Theta$.

i) *Pour chaque* $\alpha\in\Pi$, *l'opérateur* $\tilde{A}_{r_\alpha}$ *fait correspondre à* $f\in\mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$ *l'application*

$$\boldsymbol{W}\ni w\longmapsto \tilde{A}_{r_\alpha}(f)(w) := \frac{f(wr_\alpha)-f(w)}{w\cdot\alpha}.$$

ii) $\tilde{A}_{r_{\alpha_1}}\circ\cdots\circ\tilde{A}_{r_{\alpha_\ell}} = \begin{cases} \tilde{A}_{r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell}} & \text{lorsque } r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell} \text{ est une expression réduite}\,; \\ 0 & \text{autrement.}\end{cases}$

d) $\mathscr{L}_w = \mathscr{L}_e\circ\mathscr{D}_w = L_w\circ\Theta = L_e\circ\tilde{A}_w\circ\Theta$.

Le théorème suivant, corollaire de l'assertion (d) ci-dessus, traduit la proposition de ((4)) qui décrit $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$ comme sous-algèbre de $\mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$.

[3] Condition toujours satisfaite lorsque $\boldsymbol{G}$ est un groupe semi-simple complexe ; $\boldsymbol{W}$ étant alors fini.

1.4.4-2. Théorème ([A$_3$]). *Le morphisme* $\Theta : H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \to \mathrm{App}_b(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ *établit un isomorphisme entre* $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$ *et l'ensemble des applications* f *de* $\mathrm{App}_b(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ *satisfaisant à l'une quelconque des deux conditions suivantes :*
A-a) $\tilde{A}_w(f)(e) \in \mathscr{R}(\boldsymbol{T})$, *pour tout* w *dans* $\boldsymbol{W}$, *où* e *désigne l'élément neutre de* $\boldsymbol{W}$;
A-b) $\tilde{A}_w(f) \in \mathrm{App}_b(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$, *pour tout* w *dans* $\boldsymbol{W}$.

En particulier, $\mathrm{im}(\Theta)$ *est la plus grande partie de* $\mathrm{App}_b(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ *stable sous l'action des opérateurs* $\tilde{A}_{r_\alpha}$.

1.4.5 Base duale de la base des cycles de Schubert. Comme expliqué en ((5)), les applications L_w se décomposent suivant des sommes finies :

$$L_w(f) = \sum_{u \preccurlyeq w} q_w^u \, f(u)\,, \qquad \text{pour } f \in \mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})).$$

avec $\{q_w^u\} \subseteq \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$ uniquement déterminé. Dans le cas des variétés de drapeaux, des descriptions explicites de ces fractions sont obtenues à l'aide de désingularisations des variétés de Schubert par des variétés de Bott-Samelson. On a :

Théorème ([A$_3$,A$_0$]). *Soit* $r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell}$ *une décomposition réduite de* w. *Pour chaque* $i = 1,\dots,\ell$, *notons* ε_i *l'un des éléments de* $\{1, r_{\alpha_i}\} \subseteq \boldsymbol{W}$. *Alors :*

$$\boxed{q_w^u = \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\ell)} \frac{1}{\prod_{j=1}^{\ell} -\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j(\alpha_j)}}$$

où la sommation est indexée par les ℓ*-uplets* $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\ell)$ *vérifiant* $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_\ell = u$.

Les coefficients de la matrice $Q = [\![q_w^u]\!]_{w,u}$ sont donc connus dans le cas des variétés de drapeaux. La colonne d'indice $u = s$ de Q est nulle sauf sur la dernière ligne $w = s$ où l'on trouve le coefficient :

$$q_s^s = \frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta_+}\alpha}\,.$$

Ceci étant, la base duale de la base des cycles de Schubert se lit dans les colonnes de la matrice inverse $R = Q^{-1}$ (*cf.* (5)). Pour $w \in \boldsymbol{W}$, notons $\tilde{P}^w \in \mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ l'application donnée par la colonne d'indice w de R, *i.e.* $\tilde{P}^w : u \mapsto R_{u,w}$. On a :

$$\tilde{P}^s(u) = \left\{ \begin{array}{ll} \prod_{\alpha\in\Delta_+}\alpha & \text{lorsque } u = s, \\ 0 & \text{autrement.} \end{array} \right\} \qquad \text{et} \quad \tilde{P}^e(u) = 1\,, \text{ pour tout } u\ ([4]).$$

Le théorème suivant, corollaire des théorèmes 1 et 2 de 1.4.4, est l'analogue exact du théorème de [BGG] concernant les polynômes de Schubert (*cf.* 1.3.8), il s'en distingue sur deux points qui nous semblent essentiels. Premièrement : les polynômes $P^w \in S(\mathfrak{t}^*)$ sont remplacés par des applications $\tilde{P}^w : \boldsymbol{W} \to S(\mathfrak{t}^*)$, et deuxièmement : nous nous intéressons maintenant à la cohomologie à coefficients *entiers* plutôt que rationnels.

[4] Inutile pour la suite (*cf.* 1.5.2-2).

Théorème. *La famille* $\{\tilde{P}^w\}_{w\in \boldsymbol{W}}$ *d'applications de* $\boldsymbol{W}$ *à valeurs dans* $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$*, caractérisée par les égalités :*

$$L_u(\tilde{P}^w) = \delta_u^w\,, \quad \textit{pour tous } u, w \in \boldsymbol{W}\,,$$

est stable sous l'action des opérateurs $\tilde{A}_v$*. Pour tous* $v, w \in \boldsymbol{W}$*, on a :*

$$\tilde{A}_v(\tilde{P}^w) = \begin{cases} \tilde{P}^{wv^{-1}} & \textit{lorsque} \quad \ell(wv^{-1}) = \ell(w) - \ell(v), \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

En particulier : $\boxed{\tilde{P}^w = \tilde{A}_{w^{-1}s}(\tilde{P}^s)}$

1.4.6 Structure de W-module de App(W; $\mathscr{R}(T)$). L'action diagonale du groupe de Weyl sur $\mathbb{E}\boldsymbol{K}\times_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}$, donnée par $w\cdot\overline{(m,x)} = \overline{(mw^{-1},wx)}$, induit une action sur $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$. En faisant opérer $\boldsymbol{W}$ sur $\mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ par l'action

$$(w\cdot f)(u) = w\cdot(f(w^{-1}u))\,,$$

l'application $\Theta : H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \to \mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ est un morphisme de $\boldsymbol{W}$-modules et l'image de la composée Ξ des homomorphismes :

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{T}) \xrightarrow[\simeq]{\gamma^{\boldsymbol{T}}_{\mathbb{E}\boldsymbol{K}}} H^*_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}}} H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \xhookrightarrow{\Theta} \mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$$
$$\lfloor \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \uparrow$$
$$\Xi$$

est contenue dans $\mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))^{\boldsymbol{W}}$.

Or, $f \in \mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))^{\boldsymbol{W}}$, si et seulement si, $f(w) = w(f(e))$, pour tout $w \in \boldsymbol{W}$, autrement dit, une application invariante est entièrement déterminée par sa valeur au point $e \in \boldsymbol{W}$. Comme d'autre part $L_e \circ \Xi = \mathrm{id}_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})}$, l'homomorphisme Ξ est injectif et son image est la sous-algèbre $\mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))^{\boldsymbol{W}}$. On a donc des identifications

$$\boxed{\mathscr{R}(\boldsymbol{T}) \overset{\gamma^{\boldsymbol{T}}_{\mathbb{E}\boldsymbol{K}}}{=\!=} H^*_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \overset{\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}}}{=\!=} H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})^{\boldsymbol{W}} \xrightarrow[\Theta]{\subseteq} \mathrm{App}_b(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))}$$

et l'égalité, pour tout $w \in \boldsymbol{W}$,

$$\boxed{\Xi \circ A_w = \tilde{A}_w \circ \Xi}$$

qui montre que $\tilde{A}_w$ prolonge l'opérateur A_w de Bernstein-Gelfand-Gelfand défini dans 1.3.6.

La proposition suivante explique maintenant le lien entre les familles

$$\{P^w\}_{w\in\boldsymbol{W}} \subseteq \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{R}(\boldsymbol{T}) \quad \text{et} \quad \{\tilde{P}^w\}_{w\in\boldsymbol{W}} \subseteq \mathrm{App}_b(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$$

Elle montre que d'un point de vue heuristique, P^w correspond, via l'homomorphisme de Chern-Weil $\mathscr{C}\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{T}}$, au symétrisé de $\tilde{P}^w$ sous l'action de $\boldsymbol{W}$.

Proposition. *Pour tout* $w \in \boldsymbol{W}$*, on a :*

$$P^w = \Big(\frac{1}{|\boldsymbol{W}|}\sum_{u\in\boldsymbol{W}} u\cdot\tilde{P}^w\Big)(e) = \frac{1}{|\boldsymbol{W}|}\sum_{u\in\boldsymbol{W}} u\big(\tilde{P}^w(u^{-1})\big)\,.$$

Par exemple (*cf.* 1.3.8) :

$$P^s = \frac{1}{|\boldsymbol{W}|}\sum_{u\in\boldsymbol{W}} u\big(\tilde{P}^s(u^{-1})\big) = \frac{s\big(\prod_{\alpha\in\Delta_+}\alpha\big)}{|\boldsymbol{W}|} = \frac{\prod_{\alpha\in\Delta_+}-\alpha}{|\boldsymbol{W}|}\,.$$

1.4.7 Explicitation des opérateurs $\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{w}}$. L'action du groupe de Weyl s'avère également très utile pour la description des opérateurs $\tilde{A}_w$. La proposition suivante est conséquence immédiate du fait que ces opérateurs sont $\boldsymbol{W}$-équivariants (il suffit de le vérifier pour les $\tilde{A}_{r_\alpha}$ ce qui est très simple).

Proposition ([A$_3$]). *Pour $w\in\boldsymbol{W}$ et $f\in\mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$ on a :*

$$\boxed{\tilde{A}_w(f)(v) = v\big(L_w(v^{-1}\cdot f)\big) = \sum\nolimits_{u\preccurlyeq w} v(q_w^u)\, f(vu)} \qquad \textit{pour tout } v\in\boldsymbol{W}.$$

1.4.8 La matrice $\boldsymbol{R}$ et le cup produit de $\boldsymbol{H_T^*(X;\mathbb{Z})}$. Les remarques de 1.4.6 et la proposition précédente interviennent dans une jolie description des coefficients de la matrice $R=Q^{-1}$. En effet :

$$\begin{aligned}\delta_v^u = L_v(\tilde{P}^u) = \sum_a q_v^a\,\tilde{P}^u(a) &= \sum_a q_v^a\,\big(\tilde{A}_{u^{-1}s}(\tilde{P}^s)\big)(a)\\ &= \sum_a q_v^a\,\Big(\sum_b a\big(q^b_{u^{-1}s}\big)\,\tilde{P}^s(ab)\Big)\\ &= \sum_a q_v^a\, a\big(q^{a^{-1}s}_{u^{-1}s}\big)\,\tilde{P}^s(s)\end{aligned}$$

et le coefficient de la matrice R en ligne v et colonne w vaut ([5]) :

$$R_{v,w} = v(q^{v^{-1}s}_{w^{-1}s})\big(\textstyle\prod_{\alpha\in\Delta_+}\alpha\big)\,.$$

En appliquant le théorème de ((6)) le cup produit de $H_{\boldsymbol{T}}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$ devient explicite.

Théorème. *Pour tous $w_1,w_2\in\boldsymbol{W}$, on a*

$$\boxed{\tilde{P}^{w_1}\tilde{P}^{w_2} = \big(\textstyle\prod_{\alpha\in\Delta_+}\alpha\big)^2\displaystyle\sum_{u\in\boldsymbol{W}}\Big(\sum_{v\in\boldsymbol{W}} q_u^v\, v(q^{v^{-1}s}_{w_1^{-1}s})\, v(q^{v^{-1}s}_{w_2^{-1}s})\Big)\,\tilde{P}^u}$$

où l'on convient que $q_u^v=0$ pour tous $v\not\preccurlyeq u$.

1.4.9 Le cup produit de $\boldsymbol{H_T^*(\overline{X}_\varpi;\mathbb{Z})}$. Fixons un élément $\varpi\in\boldsymbol{W}$. Tout ce qui a été dit à propos de $H_{\boldsymbol{T}}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$ s'applique à $H_{\boldsymbol{T}}^*(\overline{\boldsymbol{X}}_\varpi;\mathbb{Z})$ à de petites modifications près.

1) Les éléments de la base $\{\tilde{P}^w_\varpi\}_{w\preccurlyeq\varpi}$ de $H_{\boldsymbol{T}}^*(\overline{\boldsymbol{X}})$, duale de la base $\{\sigma_w\}_{w\preccurlyeq\varpi}$ de cycles de Schubert de $\overline{\boldsymbol{X}}_\varpi$, sont les restriction des applications $\tilde{P}^w$ de 1.4.5 à l'ensemble $\{u\mid u\preccurlyeq\varpi\}$.
2) Le cup produit de $H_{\boldsymbol{T}}^*(\overline{\boldsymbol{X}}_\varpi;\mathbb{Z})$ est donné par la même formule du théorème 1.4.8 dans laquelle les indices w_1,w_2,u,v parcourent maintenant l'ensemble $\{u\mid u\preccurlyeq\varpi\}$.

[5] Je remercie Alain Lascoux de m'avoir fait part de ces égalités qu'il avait observées en 1986 dans le cas des variétés de drapeaux des groupes $\mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$.

1.4.10 Liens avec l'article de Kostant-Kumar [KK$_1$]. Notons $\mathbb{Z}[\boldsymbol{W}]$ la $\mathbb{Z}$-algèbre de $\boldsymbol{W}$. On munit $\mathscr{Q}[\boldsymbol{W}] = \mathbb{Z}[\boldsymbol{W}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$ de la structure d'algèbre donnée par le produit

$$(\delta_w \otimes Q_1)\cdot(\delta_v \otimes Q_2) = \delta_{wv} \otimes (v^{-1} \cdot Q_1)\, Q_2\,.$$

Kostant et Kumar s'intéressent au $\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$-module à gauche $\Omega = \mathrm{Hom}^{\delta}_{\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})}(\mathscr{Q}[\boldsymbol{W}], \mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$ des homomorphismes de $\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$-modules à *droite* sur lequel ils font opérer $\mathscr{Q}[\boldsymbol{W}]$ par la formule

$$(a \cdot \psi)(b) = \psi(a^t \cdot b)\,, \qquad \text{pour tous } a, b \in \mathscr{Q}[\boldsymbol{W}],\ \psi \in \Omega,$$

où $a \mapsto a^t$ est l'anti-automorphisme de $\mathscr{Q}[\boldsymbol{W}]$ donné par $(\delta_w \otimes Q)^t = \delta_{w^{-1}} \otimes w \cdot Q$. Or, Ω est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Appl}(\boldsymbol{W}; \mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$ et l'action de $\tilde{A}_\alpha$ sur ce dernier correspond alors à l'action de l'élément $x_\alpha \in \mathscr{Q}[\boldsymbol{W}]$ définit par Kostant-Kumar :

$$x_\alpha := -(\delta_{r_\alpha} + \delta_e) \otimes \alpha^{-1}\,.$$

Grâce à cette observation simple, la proposition suivante, démontrée par des méthodes combinatoires dans [KK$_1$], apparaît comme corollaire immédiat du théorème 1.4.4-1-(b).

Proposition. *Soient $r_{\alpha_i}, r_{\beta_i}$ des réflexions simples.*
a) *Lorsque $\ell(r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell}) = \ell$, on a $x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_\ell} = x_{\beta_1}\cdots x_{\beta_\ell}$, pour toute décomposition réduite $r_{\beta_1}\cdots r_{\beta_\ell}$ de $r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell}$.*
b) *Lorsque $\ell(r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell}) < \ell$, on a $x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_\ell} = 0$.*

Pour chaque $w \in \boldsymbol{W}$, Kostant-Kumar notent x_w l'élément de $\mathscr{Q}[\boldsymbol{W}]$, défini d'après l'assertion (a), à l'aide d'une décomposition réduite quelconque $r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell}$ de w. L'action de x_w sur Ω correspond donc exactement à l'action de $\tilde{A}_w$ sur $\mathrm{Appl}(\boldsymbol{W}; \mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$. Les opérateurs x_w, considérés pour la première fois dans la note [KK$_1$], apparaissent ainsi comme les localisations des opérateurs de Demazure $\mathscr{D}_w$ en cohomologie équivariante.

1.4.11 Sous-module Λ et cohomologie T-équivariante de X. Un objet important de [KK$_1$] est la partie $\Lambda \subseteq \Omega$ définie comme l'ensemble des $h \in \Omega$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :
a) $h(x_w^t) \in \mathscr{R}(\boldsymbol{T})$, pour tout $w \in \boldsymbol{W}$;
b) $h(x_w^t) = 0$ pour presque tout $w \in \boldsymbol{W}$.

On reconnaît dans (a) la condition (A-b) du théorème 1.4.4-2 qui caractérise l'image du morphisme de restriction aux points fixes $\Theta : H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}; \mathbb{Z}) \to H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{W}; \mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$. Par conséquent, $\Lambda = H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}; \mathbb{Z})$ et le théorème suivant est immédiat.

Théorème ([KK$_1$]). *On munit Ω de la structure d'algèbre de $\mathrm{App}(\boldsymbol{W}; \mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$.*
1) *Λ est une $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-sous-algèbre de Ω ;*
2) *Λ est un $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-module libre admettant une base $\{\xi^w\}_{w\in\boldsymbol{W}}$ vérifiant $\xi^w(x_v^t) = \delta_v^w$, pour tous $v, w \in \boldsymbol{W}$.*
3) *Λ est stable sous l'action des $x_w \in \mathscr{Q}[\boldsymbol{W}]$;*
4) *L'application $\theta : \Lambda \otimes_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})} \mathbb{Z} \to H^*(\boldsymbol{X}; \mathbb{Z})$ définie par $\theta(\xi^w \otimes 1) = \mu^w$, où μ^w est la classe de cohomologie duale du cycle de Schubert σ_w, est un isomorphisme d'algèbres graduées.*

Remarque. L'identification faite dans [A$_3$] entre l'algèbre Λ et la cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante de $\boldsymbol{X}$ est à la base de l'article [KK$_2$] consacré à la K-théorie $\boldsymbol{T}$-équivariante de $\boldsymbol{X}$.

1.5 Classes d'Euler équivariantes et singularités (1998)

1.5.1 Classes d'Euler équivariantes. Revenons sur l'expression des fractions rationnelles q_w^u de la section 1.4.5 :

$$q_w^u = \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\ell)} \frac{1}{\prod_{j=1}^{\ell} -\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j(\alpha_j)}\,, \qquad \text{pour tous } u \preccurlyeq w \in \boldsymbol{W}.$$

Ce qui nous intéresse dans ces expressions maintenant, c'est la fait qu'il s'agit d'une somme finie d'inverses de produits de $\ell(w)$ poids de $\boldsymbol{T}$. Il est *a priori* très surprenant que le résultat final d'une telle somme, qui comporte la plupart du temps beaucoup de termes additifs, puisse être l'inverse d'un seul produit de $\ell(w)$ poids. C'est pourtant bien ce que l'on constate lorsque $\overline{\boldsymbol{X}}_w = \boldsymbol{X}$, autrement dit, lorsque où $w = s$ (l'élément de plus grande longueur de $\boldsymbol{W}$). Dans ce cas, la formule localisation de Berline-Vergne donne :

$$q_s^u = (-1)^{\ell(u)} \frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta_+} -\alpha}\,, \quad \text{pour tout } u \in \boldsymbol{W}.$$

La raison de cette simplification est intimement liée au fait que $\overline{\boldsymbol{X}}_s$ est une variété lisse. En effet, dans ce cas, $1/q_s^u$ correspond à la classe d'Euler $\boldsymbol{T}$-équivariante du plongement $\{u\} \subseteq \boldsymbol{X}$ dont je rappelle à continuation l'idée générale de la construction.

Pour fixer les idées, donnons-nous une variété algébrique complexe $\boldsymbol{Y}$ de dimension d munie de la topologie transcendante et orientée par sa structure complexe. Un point $y \in \boldsymbol{Y}$ est dit «*rationnellement lisse dans* $\boldsymbol{Y}$» s'il existe un voisinage $U_y \subseteq \boldsymbol{Y}$ tel que, pour tout $z \in U_y$:

$$H_z^i\big(\boldsymbol{Y};\mathbb{Q}\big) = 0 \text{ si } i \neq 2d, \quad \text{et} \quad H_z^{2d}\big(\boldsymbol{Y};\mathbb{Q}\big) \equiv \mathbb{Q}\,.$$

Lorsque tout $y \in \boldsymbol{Y}$ est rationnellement lisse dans $\boldsymbol{Y}$, on dit que $\boldsymbol{Y}$ est «*rationnellement lisse*».

Supposons $\boldsymbol{Y}$ munie d'une action de $\boldsymbol{T}$ à gauche (action continue pour la topologie transcendante suffit). Pour tout point fixe $y \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ rationnellement lisse dans $\boldsymbol{Y}$, le morphisme de Thom-Gysin : $\int_{\boldsymbol{Y}} : H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Q})[2d] \equiv H^*_{\boldsymbol{T}}(\{y\};\mathbb{Q})$ est bien défini et c'est un isomorphisme. Notons $\Phi_{y,\boldsymbol{Y}}$ son inverse, puis $\tau(y,\boldsymbol{Y}) = \Phi_{y,\boldsymbol{Y}}(1)$ la «*classe de Thom*».

$$\begin{array}{ccccc}
\tau(y,\boldsymbol{Y}) \in H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Q}\,) & & \xrightarrow[\text{de } \boldsymbol{Y} \text{ à } \{y\}]{\text{restriction}} & & H^*_{\boldsymbol{T}}(\{y\};\mathbb{Q}) \ni \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(y,\boldsymbol{Y}\big) \\
\uparrow & & & & \\
\Phi_{y,\boldsymbol{Y}} & \uparrow \equiv & \Big\downarrow \int_{\boldsymbol{Y}} & \overset{\mathrm{m}(\mathrm{Eu}(y,\boldsymbol{Y}))}{\nearrow} & \\
1 \in H^*_{\boldsymbol{T}}(\{y\};\mathbb{Q})[-2d] & & & &
\end{array}$$

La «*classe d'Euler équivariante de* y *dans* $\boldsymbol{Y}$» est l'élément de $H^{2\dim_{\mathbb{C}}\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{T}}(\{y\};\mathbb{Q})$ défini par la restriction de la classe de Thom au point y, *i.e.*

$$\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(y,\boldsymbol{Y}\big) := \tau(y,\boldsymbol{Y})|_y\,,$$

L'identification canonique entre $H^*_{\boldsymbol{T}}(\{y\};\mathbb{Q})$ et $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$ réalise la classe d'Euler équivariante d'un point fixe rationnellement lisse comme un polynôme homogène de degré $\dim_{\mathbb{C}}\boldsymbol{Y}$ à

coefficients dans $\mathbb{Q}$. On a par construction

$$\mu|_y = \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(y, \boldsymbol{Y}\right) \int_{\boldsymbol{Y}} \mu\,, \quad \text{pour tout } \mu \in H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y}).$$

En particulier, lorsque $\boldsymbol{Y} = \overline{\boldsymbol{X}}_s$, on a $q_s^u = 1/\,\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(u, \boldsymbol{X}\right)$, pour tout $u \in \boldsymbol{W}$.

1.5.2 Classes d'Euler équivariantes généralisées. Lorsque y *n'est pas rationnellement lisse dans* $\boldsymbol{Y}$, l'application $\int_{\boldsymbol{Y}} : H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Q}) \to H^*_{\boldsymbol{T}}(\{y\};\mathbb{Q})$ n'est pas nécessairement surjective ou injective et le formalisme précédent ne s'applique plus tel quel. Maintenant, ***si*** $\boldsymbol{y}$ ***est isolé dans*** $\boldsymbol{Y^T}$, le théorème de localisation permet de prouver que $\int_{\boldsymbol{Y}}$ est néanmoins bijective modulo $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-torsion, de même par ailleurs que la restriction $H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Q}) \to H^*_{\boldsymbol{T}}(\{y\};\mathbb{Q})$. Il s'ensuit que pour tout élément *sans torsion* $\mu \in H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y})$, la fraction $\mu|_y{}^{-1} \int_{\boldsymbol{Y}} \mu \;\in \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$, est *non nulle et ne dépend pas du choix d'un tel* μ, d'où la définition suivante.

Définition ([A$_4$]). *Soit* $\boldsymbol{Y}$ *une variété algébrique complexe munie d'une action de* $\boldsymbol{T}$ *continue pour la topologie transcendante. Pour tout point* $y \in \boldsymbol{Y^T}$ ***isolé****, la fraction rationnelle :*

$$\boxed{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(y, \boldsymbol{Y}\right) := \frac{\mu|_y}{\int_{\boldsymbol{Y}} \mu} \in \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})}$$

où μ *est un élément sans torsion arbitrairement choisi dans* $H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y})$*, est appelée la «classe d'Euler* $\boldsymbol{T}$*-équivariante (généralisée) de* y *dans* $\boldsymbol{T}$*». Lorsque* $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(y, \boldsymbol{Y}\right) \in \mathbb{Q} \otimes \mathscr{R}(\boldsymbol{T})$ *on dit que cette classe est «polynomiale».*

Il est clair que lorsque $y \in \boldsymbol{Y^T}$ est rationnellement lisse dans $\boldsymbol{Y}$, la classe d'Euler équivariante généralisée est polynomiale et coïncide avec la classe d'Euler équivariante classique.

Avec cette définition l'égalité dans la proposition suivante, connue sous le nom de «*formule de localisation*» dans le contexte différentiable est toujours vérifiée lorsque $\boldsymbol{Y^T}$ est discret, *même si* $\boldsymbol{Y}$ *est singulière*.

1.5.2-1. Proposition ([A$_4$]). *Les données étant comme ci-dessus,*

$$\int_{\boldsymbol{Y}} \mu = \sum_{y \in \boldsymbol{Y^T}} \frac{\mu|_y}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(y, \boldsymbol{Y}\right)}\,, \quad \textit{pour tout } \mu \in H^*_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}, \mathbb{Q}).$$

En particulier, si $\boldsymbol{Y}$ *est compacte connexe de dimension strictement positive*

$$0 = \sum_{y \in \boldsymbol{Y^T}} \frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(y, \boldsymbol{Y}\right)}\,.$$

1.5.2-2. Exemple. *Dans le cas où* $\boldsymbol{Y} = \overline{\boldsymbol{X}}_w$*, on a*

$$\begin{cases} q_w^u = 1/\,\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(u, \overline{\boldsymbol{X}}_w\right) & \textit{pour tout } u \preccurlyeq w. \\ 0 = \sum_{u \preccurlyeq w} q_w^u & \textit{lorsque } w \neq e. \end{cases}$$

Et la fraction q_w^u *est l'inverse d'un polynôme homogène de degré* $\ell(w)$ *lorsque* u *est rationnellement lisse dans la variété de Schubert* $\overline{\boldsymbol{X}}_w$.

1.6 Critères de lissité rationnelle et algébrique (1998)

Dans [A$_4$] on introduit le formalisme du morphisme de Thom-Gysin équivariant dans la catégorie de $\boldsymbol{T}$-pseudovariétés dans le but d'étudier les propriétés des classes d'Euler équivariantes généralisés liées à la géométrie des espaces sous-jacents. On obtient alors des conditions assurant l'équivalence, pour un point fixe isolé y d'une variété algébrique $\boldsymbol{Y}$ munie d'une action de $\boldsymbol{T}$, entre le fait d'être rationnellement lisse et le fait d'avoir une classe d'Euler équivariante polynomiale. L'un des principaux résultats de ce travail est le critère de lissité suivant.

Théorème ([A$_4$]). *Soit $\boldsymbol{T} := (\mathbb{S}^1)^r \subseteq (\mathbb{C}^*)^r =: \boldsymbol{H}$. On considère une représentation linéaire algébrique de $\boldsymbol{H}$ dans $\mathbb{C}^n$ à poids dans un même demi-espace ouvert, de multiplicité 1 et deux-à-deux non colinéaires. Soit $\boldsymbol{Y}$ un fermé de Zariski dans $\mathbb{C}^n$, équidimensionnel et $\boldsymbol{H}$-stable. Soit $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$ le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par les droites vectorielles $\boldsymbol{H}$-stables contenues dans $\boldsymbol{Y}$. Notons $d_{\boldsymbol{Y}} := \dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{Y})$, $d_{\mathbb{E}} := \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}})$ et $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{d_{\mathbb{E}}}\}$ la liste des poids de $\boldsymbol{T}$ dans $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$.*

a) *Alors :*
$$\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(0, \boldsymbol{Y}\right)} = (-1)^{d_{\mathbb{E}}} \frac{P}{\alpha_1 \cdots \alpha_{d_{\mathbb{E}}}}, \qquad \text{avec } P \in H_{\boldsymbol{T}}^{2(d_{\mathbb{E}} - d_{\boldsymbol{Y}})}.$$
De plus : $P = 1$, si et seulement si, *0 est algébriquement lisse dans $\boldsymbol{Y}$.*

b) *Supposons qu'il existe un plongement $\jmath : \mathbb{C}^* \hookrightarrow \boldsymbol{H}$ tel que les poids α_i restreints à $\mathbb{C}^*$ soient* strictement positifs *et tel que le quotient $(\boldsymbol{Y}\backslash\{0\})/\jmath(\mathbb{C}^*)$ soit rationnellement lisse et sans cohomologie rationnelle en degrés impairs. Alors :*
$$\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(0, \boldsymbol{Y}\right)} = (-1)^{d_{\mathbb{E}}} \frac{P}{\alpha_1 \cdots \alpha_{d_{\mathbb{E}}}}, \qquad \text{avec } P \in H_{\boldsymbol{T}}^{2(d_{\mathbb{E}} - d_{\boldsymbol{Y}})} \backslash \{0\} \text{ sans facteur linéaire.}$$
De plus : P est scalaire, si et seulement si, *0 est rationnellement lisse dans $\boldsymbol{Y}$.*

1.7 Critères de lissité (rationnelle) des variétés de Schubert (1998)

Dans le cas des variétés de Schubert, la démarche de Kazhdan-Lusztig de l'appendice de [KL] conduit à une situation où l'on peut appliquer directement le critère 1.6-(b) pour démontrer le théorème suivant.

Théorème ([A$_4$]). *Soient $v \preccurlyeq w \in \boldsymbol{W}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *Le point v est rationnellement lisse dans $\overline{\boldsymbol{X}}_w$.*

b) $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(y, \overline{\boldsymbol{X}}_w\right)$ *est polynomiale, pour tout $y \in \boldsymbol{W}$ vérifiant $v \preccurlyeq y \prec w$.*

Les méthodes de [A$_4$] redémontrent les critères de lissité précédemment connus suivants.

Théorème. *Soient $v \preccurlyeq w \in \boldsymbol{W}$.*
On note $\boldsymbol{S}(v, w)$ l'ensemble des réflexions $r \in \boldsymbol{W}$ vérifiant $rv \preccurlyeq w$, et $\mathfrak{s}(v, w)$ le produit des racines $\gamma \in v\Delta_-$ telles que $r_\gamma \in \boldsymbol{S}(v, w)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) *Le point v est rationnellement lisse dans $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$.*

b) $\mathrm{Card}(\boldsymbol{S}(y, w)) = \ell(w)$, *pour tout $y \in \boldsymbol{W}$ vérifiant $v \preccurlyeq y \prec w$.* ([Crl])

c) $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(y, \overline{\boldsymbol{X}}(w)\right) = \star\, \mathfrak{s}(y, w)$, *pour tout $y \in \boldsymbol{W}$ vérifiant $v \preccurlyeq y \prec w$,* ([Kum])
où $\star$ est un scalaire non nul.

De même que :

d) *Le point v est algébriquement lisse dans $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$.*

e) $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(v, \overline{\boldsymbol{X}}(w)\right) = (-1)^{\mathrm{Card}(\boldsymbol{S}(v,w))}\, \mathfrak{s}(v,w)$, ([Kum], [Bri$_2$])

1.8 Critères de lissité des variétés de représentations d'un carquois (2003)

Dans les années 2000-2002 un certain nombre de travaux s'intéressaient à la lissité rationnelle des variétés des représentations de carquois, notamment ceux de Robert Bédard, Ralf Schiffler et Philippe Caldéro ([BS,CS]). Leur principal résultat était l'équivalence entre «*lissité rationnelle*» et «*lissité algébrique*» pour les variétés des représentations d'un carquois **de type Dynkin**. Leur approche était combinatoire et reposait sur l'interprétation de Lusztig ([L$_1$,L$_2$]) des coefficients des matrices de changement de base entre la base canonique et les bases de Poincaré-Birkhoff-Witt de la partie positive $\mathbf{U}^+$ d'une algèbre enveloppante quantique $\mathbf{U}$, en termes de cohomologie d'intersection locale des clôtures de Zariski des orbites de représentations de carquois.

Dans cette problématique, j'ai pu rapidement comprendre qu'un certaint tore agissait sur l'espace de représentations d'un carquois avec des poids de multiplicité un dans un même demi-espace ouvert de l'espace de poids, laissant stable chaque variété de représentations. Mon critère de lissité ([A$_4$]) pouvait de lors être appliqué donnnat alors une version beaucoup plus générale de l'équivalence de Bédard-Schiffler-Caldéro dans la note [A$_7$]. Au delà de cette généralité élargie du résultat, il me paraît important de souligner que ma preuve tient en une note de quatre pages contrairement aux précédentes nécessitant plus de cent pages.

Soit $\mathscr{Q}$ un carquois fini d'ensemble de sommets $\mathscr{S}$ et de flèches $\mathscr{F}$, tel que :

$\mathscr{Q}$-i) Il existe au plus une flèche de $\mathscr{F}$ reliant deux sommets de $\mathscr{Q}$.

$\mathscr{Q}$-ii) Il existe une injection $\imath : \mathscr{S} \to \mathbb{N}$ telle que $\imath(\mathrm{source}(f)) < \imath(\mathrm{but}(f))$ pour tout $f \in \mathscr{F}$. Dans ce cas, on peut supposer que $\imath(\mathscr{S})$ est l'intervalle $[1,n]$ où $n = \#\mathscr{S}$. On identifie alors $\mathscr{S}$ à l'intervalle $[1,n]$ et $\mathscr{F}$ à un sous-ensemble de $[1,n]^2$, on note '$i \to j$' pour $(i,j) \in \mathscr{F}$.

1.8-1. Remarques. La condition $\mathscr{Q}$-(ii) est équivalente à «$\mathscr{Q}$ *est sans circuit orienté*». Les conditions $\mathscr{Q}$-(i,ii), clairement vérifiées par les carquois de type Dynkin, sont aussi vérifiées par des carquois admettant une infinité de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables. Les conditions en question sont donc beaucoup moins contraignantes pour un carquois que celle d'être de type Dynkin.

Je démontre alors

Théorème [A$_7$]. *Pour une variété de représentations $\overline{\mathscr{O}}$ d'un carquois $\mathscr{Q}$ vérifiant les conditions $\mathscr{Q}$-(i,ii), les assertions suivantes sont équivalentes*

- *$\overline{\mathscr{O}}$ est rationnellement lisse,*
- *$\overline{\mathscr{O}}$ est algébriquement lisse,*
- *$\overline{\mathscr{O}}$ est un espace affine.*

§2. Équivalence de Green et objets quasi-projectifs (1998)

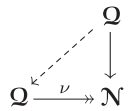
Dans certains travaux de Marie-France Vignéras apparaît la notion de module presque-projectif. On appelle ainsi un module $\mathbf{\Omega}$ admettant une présentation projective $\pi : \mathbf{\mathcal{P}} \twoheadrightarrow \mathbf{\Omega}$

telle que $\ker(\pi)$ est stable sous l'action des endomorphismes de $\boldsymbol{\mathcal{P}}$. Notons $E_{\mathfrak{Q}} = \mathrm{End}(\mathfrak{Q})$ et $\mathrm{Mod}^{\delta}(E_{\mathfrak{Q}})$ la catégorie des $E_{\mathfrak{Q}}$-modules à droite. Les modules presque-projectifs sont importants dans la mesure où ils vérifient l'«*équivalence de Green*» énoncée dans le théorème suivant.

Théorème. *Soit $\mathfrak{Q}$ un $\boldsymbol{A}$-module de type fini presque-projectif.*

Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{Q}, _) : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\delta}(E_{\mathfrak{Q}})$ induit une bijection entre les classes d'isomorphie des $\boldsymbol{A}$-modules simples $\mathcal{S}$ tels que $\mathrm{Hom}(\mathfrak{Q}, \mathcal{S}) \neq 0$ et les classes d'isomorphie des $E_{\mathfrak{Q}}$-modules à droite simples.

L'appendice de l'article [Vig] était destiné dans un premier temps à la démonstration d'un certain nombre d'équivalences de catégories liées aux modules presque-projectifs dans le cadre abstrait des catégories abéliennes. Cette recherche nous a permis de dégager une notion plus générale que la presque-projectivité : la «*quasi-projectivité*», vraiment au cœur des équivalences. Dans le cas d'une catégorie de modules sur un anneau $\boldsymbol{A}$, un module $\mathfrak{Q}$ est quasi-projectif lorsque pour toute surjection $\nu : \mathfrak{Q} \twoheadrightarrow \mathfrak{N}$, le morphisme induit $\nu_* : E_{\mathfrak{Q}} = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{N})$ est aussi surjectif.



Un module presque-projectif est quasi-projectif et le théorème ci-dessus est démontré dans [A_5] pour tout module quasi-projectif de type fini. De plus, on donne une caractérisation des quasi-projectifs en termes d'une équivalence de catégories significative dans la théorie des représentations modulaires.

Théorème ([$\mathbf{A_5}$]). *Soit $\mathfrak{Q}$ un $\boldsymbol{A}$-module de type fini* sans $\mathfrak{Q}$-torsion. *Il y a équivalence entre :*

a) *$\mathfrak{Q}$ est quasi-projectif.*

b) *$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{Q}, _) : \mathcal{C}'_{\mathfrak{Q}} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\delta}(E_{\mathfrak{Q}})$ est une équivalence de catégories, où $\mathcal{C}'_{\mathfrak{Q}}$ désigne la sous-catégorie pleine des $\boldsymbol{A}$-modules sans $\mathfrak{Q}$-torsion, quotients de sommes directes de $\mathfrak{Q}$.*

Où un $\boldsymbol{A}$-module $\mathfrak{M}$ est dit «*sans $\mathfrak{Q}$-torsion*» lorsque $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{N}) \neq 0$ pour tout sous-module non nul $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$.

§3. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes (2001)

3.1 Relèvements algébriques

Dans [A_6] j'étudie les problèmes de relèvements évoqués dans la section précédente en eux-mêmes. J'y montre par exemple que l'utilisation du théorème d'approximation d'Artin (théorème d'existence non effectif) pour le relèvement au niveau †-adique des morphismes n'est pas nécessaire, ce qui représente une simplification considérable dans la théorie de Monsky-Washnitzer. On généralise aussi de manière uniforme les théorèmes de relèvement connus jusqu'à présent ; le cas le plus surprenant étant la propriété (R-i) qui est démontrée *sans aucune restriction* sur le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$, autrement dit :

3.1-1. Théorème ([$\mathbf{A_6}$]). *Pour tout anneau $\boldsymbol{R}$, tout idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ et toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$, il existe une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{A}}$.*

Pour démontrer cette généralisation, j'utilise l'idée, sous-jacente dans la thèse de Elkik ([E]), de construire des relèvements lisses pour les $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses à l'aide de relèvements projectifs

de $\overline{\boldsymbol{R}}$-modules projectifs de type fini. Or, étant donnés une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ et un $\overline{\boldsymbol{B}}$-module projectif $\overline{\boldsymbol{M}}$, le module $\overline{\boldsymbol{M}}$ n'est pas toujours la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ d'un $\boldsymbol{B}$-module projectif, cela est pourtant possible au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$ près ([6]), ce qui me suffit pour faire marcher l'idée de Elkik moyennant quelques vérifications techniques. Plus précisément, je démontre :

3.1-2. Théorème ([A$_6$]). *Pour tout anneau $\boldsymbol{R}$, tout idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$, toute $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{B}$ et toute présentation libre et finie d'un $\overline{\boldsymbol{B}}$- module projectif de type fini $\overline{\boldsymbol{M}}$:*

$$\overline{\boldsymbol{B}}^p \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{B}}^q \xrightarrow{\overline{\Pi}} \overline{\boldsymbol{M}} \to \boldsymbol{0}\,, \qquad (\diamond)$$

il existe une $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, un $\boldsymbol{B}_\varepsilon$-module projectif de type fini $\boldsymbol{M}_\varepsilon$, et une présentation libre et finie de $\boldsymbol{M}_\varepsilon$:

$$\boldsymbol{B}_\varepsilon^p \xrightarrow{L} \boldsymbol{B}_\varepsilon^q \xrightarrow{\Pi} \boldsymbol{M}_\varepsilon \to \boldsymbol{0}\,,$$

de réduction modulo $\boldsymbol{I}$ isomorphe à $(\diamond)$.

Quant à la propriété (R-ii), elle est vraie toujours sans hypothèse supplémentaire sur le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$, mais uniquement au voisinage étale près :

3.1-3. Théorème ([A$_6$]). *Étant donnés un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, et des relèvements $p_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ et $p_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, il existe une $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ qui relève $\overline{h}$. En d'autres termes, on a un diagramme :*

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{A} & \overset{h}{\dashrightarrow} & \boldsymbol{B}_\varepsilon & \overset{\varepsilon}{\longleftarrow} & \boldsymbol{B} \\ {\scriptstyle p_A}\downarrow & & & \searrow^{p_{B_\varepsilon}} & \downarrow{\scriptstyle p_B} \\ \overline{\boldsymbol{A}} & & \xrightarrow{\overline{h}} & & \overline{\boldsymbol{B}} \end{array}$$

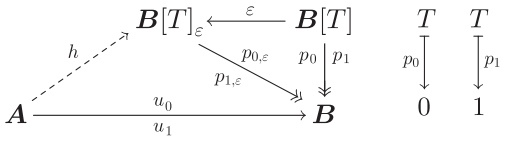
où $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ désigne l'homomorphisme structural et où $p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}$ est l'homomorphisme induit par ε à partir de $p_{\boldsymbol{B}}$.

La propriété (R-iii) est prouvée dans [MW] à partir d'une propriété d'homotopie également généralisée dans [A$_6$]. On rappelle que deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ sont dits «*homotopes*» lorsqu'il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]$ tel que $u_0(a) = h(a)(0)$ et $u_1(a) = h(a)(1)$. Le théorème suivant donne une idée assez précise de l'ambiguïté des relèvements des morphismes par l'existence d'une homotopie au voisinage étale près.

3.1-4. Théorème ([A$_6$]). *Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres dont les réductions modulo $\boldsymbol{I}$ sont homotopes (par exemple égales). Il existe alors une $\boldsymbol{B}[T]$-algèbre $\boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$, intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$, de (T) et de $(1-T)$ dans $\boldsymbol{B}[T]$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ tels que $p_{i,\varepsilon} \circ h = u_i$. En d'autres*

[6] On appelle «*voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$*» toute $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$, **étale** sur $\boldsymbol{B}$ et telle que la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ du morphisme structural $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ est un isomorphisme.

termes, on a un diagramme :

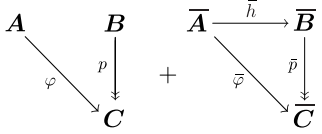


où l'on note $\varepsilon : \boldsymbol{B}[T] \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ l'homomorphisme structural et $p_{0,\varepsilon}, p_{1,\varepsilon} : \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon \to \boldsymbol{B}$ les morphismes de $\boldsymbol{B}[T]$-algèbres induits par ε à partir de p_0 et p_1 respectivement.

Les deux derniers théorèmes sont en fait des corollaires d'un théorème technique général, analogue *algébrique* de la propriété par laquelle Monsky-Washnitzer définissent les *algèbres faiblement complètes très lisses*, j'y reviendrai dans 3.2.

3.1-5. Théorème. *Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et donnons-nous :*

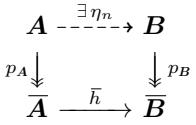
- *Une paire d'homomorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{C} \xleftarrow{p} \boldsymbol{B}$, où p est surjectif de noyau noté $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}$ compris).*
- *Un homomorphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ vérifiant $\overline{\varphi} = \overline{p} \circ \overline{h}$.*



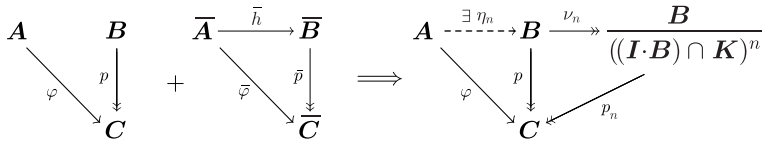
Alors :

a) *Pour chaque entier strictement positif n, il existe une* **application** *$\eta_n : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ telle que :*

(i) $p_{\boldsymbol{B}} \circ \eta_n = \overline{h} \circ p_{\boldsymbol{A}}$,
(ii) $p \circ \eta_n = \varphi$,
(iii) $\nu_n \circ \eta_n$ *est un homomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres.*

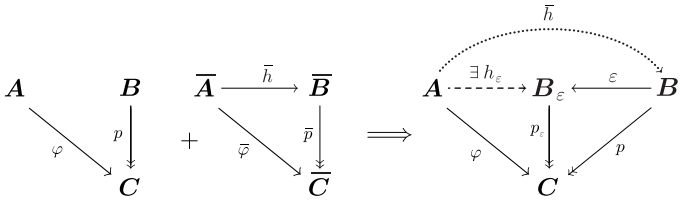


où $\nu_n : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}/((\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K})^n$ désigne la surjection canonique.



(*L'homomorphisme p_n est celui induit par p.*)

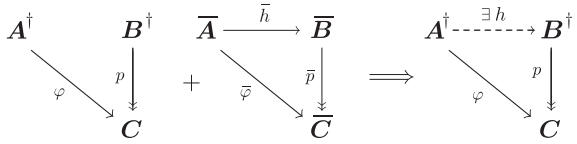
b) *Il existe un voisinage étale $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{K}$ dans $\boldsymbol{B}$, intersection complète sur $\boldsymbol{B}$, dont on note $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ l'homomorphisme structural et $p_\varepsilon : \boldsymbol{B}_\varepsilon \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}$ l'homomorphisme induit par p, et il existe un homomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_\varepsilon : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ tels que $\overline{h}_\varepsilon = \bar{\varepsilon} \circ \overline{h}$ et $\varphi = p_\varepsilon \circ h_\varepsilon$. En d'autres termes, on a un diagramme :*



3.2 Relèvements faiblement complets très lisses

Les résultats de la section précédente concernent l'aspect «*algébrique*» du problème des relèvements dans la mesure où les algèbres lisses sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ sont relevées en des algèbres lisses sur $\boldsymbol{R}$ donc de type fini sur $\boldsymbol{R}$. Dans la définition de la cohomologie de Monsky-Washnitzer, on doit encore appliquer le foncteur de complétion faible qui nous fera ressortir du cadre des algèbres de type fini. A ce sujet, il est important de souligner que si $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ est un voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, la complétion faible $\varepsilon^\dagger : \boldsymbol{B}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger_\varepsilon$ est un isomorphisme, ce qui permet de simplifier les résultats de la section précédente. En particulier, le théorème 3.1-5 s'énonce maintenant de la manière suivante.

3.2-1. Proposition. *Soient $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ trois algèbres sur $\boldsymbol{R}$ où $\boldsymbol{A}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$. Pour toute paire de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{B}^\dagger \xrightarrow{p} \boldsymbol{C} \xleftarrow{\varphi} \boldsymbol{A}^\dagger$, où p est surjectif (de noyau arbitraire), et pour chaque morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ vérifiant $\overline{\varphi} = \overline{p} \circ \overline{h}$, il existe un relèvement $h : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ de $\overline{h}$, tel que $\varphi = p \circ h$.*



Or, c'est très précisément par cette propriété de $\boldsymbol{A}^\dagger$ que Monsky-Washnitzer définissent les relèvements «*faiblement complets très lisses*». L'existence de tels relèvements est établie dans [MW] pour une classe de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses restreinte, et l'existence en toute généralité y est énoncée de manière conjecturale. Le théorème suivant, simple paraphrase de la proposition 3.2-1, établit cette conjecture moyennant le théorème 3.1-1.

3.2-2. Théorème ([A$_6$]). *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau nœthérien et $\overline{\boldsymbol{A}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse. Pour tout relèvement $\boldsymbol{A}$ lisse sur $\boldsymbol{R}$ de $\overline{\boldsymbol{A}}$, l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ est un relèvement faiblement complet très lisse de $\overline{\boldsymbol{A}}$.*

3.3 Critère d'affinité des schémas †-adiques

On se donne un anneau commutatif nœthérien $\boldsymbol{R}$ et un idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$. On note $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$. Pour tout schéma affine lisse $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ au-dessus de $\overline{\boldsymbol{R}}$, et toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ lisse sur $\boldsymbol{R}$, relèvement de $\overline{\boldsymbol{A}} := \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ et de complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible notée $\mathscr{A}^\dagger$, Meredith associe un espace annelé $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{A}^\dagger})$ au-dessus du même espace topologique $\boldsymbol{X}$ (*cf.* [Mer]) que nous appelons *schéma †-adique affine-lisse*. Un *schéma †-adique lisse* est alors défini comme étant un espace annelé localement isomorphe à un *schéma †-adique affine-lisse*.

Cela dit, pour tout schéma †-adique lisse $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}^\dagger)$, soit $\overline{\mathscr{O}^\dagger}$ le faisceau sur $\boldsymbol{X}$ associé au préfaisceau qui fait correspondre à l'ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, l'algèbre $\Gamma(U; \mathscr{O}^\dagger) \otimes_{\boldsymbol{R}} \overline{\boldsymbol{R}}$. L'espace annelé $(\boldsymbol{X}; \overline{\mathscr{O}^\dagger})$ est alors un schéma ; on l'appelle *réduction (modulo $\boldsymbol{I}$) de* $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}^\dagger)$.

S'il est aisé de voir que la réduction d'un schéma †-adique affine-lisse est un schéma affine lisse, la question réciproque, posée déjà par Meredith dans [Mer], est restée ouverte depuis. J'ai apporté une réponse positive à cette question, plus précisément, je démontre :

Théorème d'affinité lisse (2.1.8 [$\mathbf{A_{17}}$])

a) *Pour tout ouvert affine $U \subseteq \boldsymbol{X}$ d'un schéma †-adique lisse $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}^\dagger)$, le sous-espace annelé $(U; \mathscr{O}^\dagger|_U)$ est un schéma †-adique affine-lisse.*

b) *Pour tout ouvert affine $U \subseteq \boldsymbol{X}$ d'un schéma †-adique lisse $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}^\dagger)$, le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha(U) : \Gamma(U; \mathscr{O}^\dagger) \to \Gamma(U; \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ est un relèvement f.c.t.f. très lisse.*

c) *Un schéma †-adique lisse et de réduction affine est affine-lisse.*

§4. Références bibliographiques

[Art] M. Artin. On the solutions of analytique equations ; Invent. Math. **5** pp. 277–291 (1968).

[AS] M.F. Atiyah, G. Segal. "*Equivariant cohomology and localization*" ; Lecture notes, Warwick (1965).

[BS] R. Bédard, R. Schiffler. Rational smoothness of varieties of representations for quivers of type A ; Representation Theory **7**, 481-548 (2003).

[BV] N. Berline, M. Vergne. Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante ; C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 295 (1982), no. 9, 539–541. Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes ; Duke Math. J. 50 (1983), no. 2, 539–549. Fourier transforms of orbits of the coadjoint representation ; Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982), 53–67, Progr. Math., 40, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1983).

[BGG] I.N. Bernšteĭn, I.M. Gel'fand, S.I. Gel'fand. Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P ; Uspehi Mat. Nauk 28 (1973), no. 3(171), 3–26.

[Ber] P. Berthelot. "*Cohomologie cristalline des schémas de car. $p > 0$*" ; Lecture Notes in Mathematics **407**, Springer-Verlag (1974)

[B_0] A. Borel. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts ; Ann. of Math. (2) 57, 115–207 (1953).

[B_1] A. Borel. Sous-groupes commutatifs et torsion des groupes de Lie compacts connexes ; Tôhoku Math. J. (2) 13, 216–240 (1961).

[B-al] A. Borel & al. "*Seminar on transformation groups*" ; Annals of Mathematics Studies, No. 46 Princeton University Press, Princeton, N.J. (1960).

[BoMc_1] Borho, MacPherson. Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés nilpotentes ; C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292, no. 15, 707–710 (1981).

[Bri_2] M. Brion. Equivariant Chow groups for torus actions ; Birkhäuser. Transformation groups, Vol 2, n$^{\mathrm{ro}}$ 3, 1–43 (1997).

[Bri_2] M. Brion. Rational smoothness and fixed points of torus actions ; Transformation Groups **4**, 127–156 (1999).

[Br] J.-L. Brylinski. Equivariant intersection cohomology ; Kazhdan-Lusztig theory and related topics (Chicago, IL, 1989), 5–32, Contemp. Math., 139, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[Crl] J.B. Carrell. The Bruhat graph of a Coxeter group, a conjecture of Deodhar, and rational smoothness of Schubert varieties ; Algebraic groups and their generalizations: classical methods. University Park, PA, (1991), 53–61. Proc. Sympos. Pure Math. **56**, Part 1 (1994).

[Crt] H. Cartan. Notions d'algèbre différentielle ; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie ; La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal ; Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, pp. 15–27 et 57–71. Georges Thone, Liège ; Masson et Cie., Paris, 1951.

§4 TRAVAUX ANTÉRIEURS À 2003

[CS] PH. CALDÉRO, R. SCHIFFLER. Rational smoothness of varieties of representations for quivers of Dynkin type ; Prépublication `http://arxiv.org/abs/math.RT/0305149.`

[Del] P. DELIGNE. La conjecture de Weil. I ; Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 43 (1974), 273–307.

[Dem_1] M. DEMAZURE. Invariants symétriques entiers des groupes de Weyl et torsion ; Invent. Math. 21, 287–301, (1973).

[Dem_2] M. DEMAZURE. Une nouvelle formule des caractères ; Bull. Sci. Math. (2) 98 (1974), no. 3, 163–172.

[Deo] V.V. DEODHAR. Local Poincaré duality and nonsingularity of Schubert varieties ; Comm. Algebra 13, no. 6, 1379–1388, (1985).

[DH] J.J. DUISTERMAAT, G.J. HECKMAN. On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space ; Invent. Math. 69 (1982), no. 2, 259–268. Addendum to : On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space ; Invent. Math. 72 (1983), no. 1, 153–158.

[Dw] B. DWORK. On the rationality of the zeta function of an algebraic variety ; Amer. J. Math. 82, 631–648 (1960).

[EGA_1] GROTHENDIECK, DIEUDONNÉ. "*Éléments de géométrie algébrique-I*" ; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 166. Springer-Verlag (1971)/

[E] R. ELKIK. Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien ;
Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, quatrième série, tome 6, pp. 553–604 (1973).

[G_1] A. GROTHENDIECK. Géométrie formelle et géométrie algébrique ; Séminaire Bourbaki, exposé **182** (Mai 1959).

[G_2] A. GROTHENDIECK. Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L ; Séminaire Bourbaki, Vol. 9, Exp. No. 279 (1965), 41–55, Soc. Math. France, Paris, 1995.

[G_3] A. GROTHENDIECK. Crystals and the de Rham cohomology of schemes ; Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas pp. 306–358 North-Holland, Amsterdam ; Masson, Paris (1968).

[Hrs] HARISH-CHANDRA. Differential operators on a semisimple Lie algebra ; Amer. J. Math. 79, 87–120 (1957).

[Har] R. HARTSHORNE. "*Algebraic geometry*" ; Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1977).

[KM] N.M. KATZ, W. MESSING. Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields ; Invent. Math. 23 (1974), 73–77.

[KL] D. KAZHDAN, G. LUSZTIG. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras ; Invent. Math. 53, no. 2, 165–184 (1979).

[KK_1] B. KOSTANT, S. KUMAR. The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 83, no. 6, 1543–1545 (1986). The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G ; Adv. in Math. 62, no. 3, 187–237 (1986).

[KK_2] B. KOSTANT, S. KUMAR. T-equivariant K-theory of generalized flag varieties ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 84, no. 13, 4351–4354 (1987). — J. Differential Geom. 32, no. 2, 549–603 (1990).

[Kle] S.L. KLEIMAN. Algebraic cycles and the Weil conjectures ; Dans "Dix esposés sur la cohomologie des schémas", pp. 359–386. North-Holland, Amsterdam ; Masson, Paris, (1968).

[Kum] S. KUMAR. A connexion of equivariant $\boldsymbol{K}$-theory with the singularity of Schubert varieties ; prépublication (1986–87). The nil-Hecke ring and singularity of Schubert varieties ; in "Lie Theory and geometry (in honor of Bertram Kostant)". Progress in Math. **123**, Birkhäuser, 497–507 (1994). The nil-Hecke ring and singularity of Schubert varieties. ; Inventiones Mathematicae **123**, n^{ro} 3, 471–506 (1996).

[LS] V. Lakshmibai, C.S. Seshadri. Singular locus of a Schubert variety ; Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 11, no. 2, 363–366 (1984).

[L_1] G. Lusztig. Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras ; J. Amer. Math. Soc. 3, 257–296 (1990).

[L_2] G. Lusztig. Canonical bases arising from quantized enveloping algebras ; J. Amer. Math. Soc. 3, 447–498 (1990).

[Meb] Z. Mebkhout. Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière. ; Amer. J. Math. 119, no. 5, 1027–1081 (1997).

[M-N_1] Z. Mebkhout, L. Narvaez. Sur les coefficients de de Rham-Grothendieck des variétés algébriques ; in p-adic Analysis, Lecture Notes in Math. **1454**, pp. 267-309, (1990).

[M-N_2] Z. Mebkhout, L. Narvaez. La théorie du polynôme de Berstein-Sato pour les algébres de Tate et de Dwork-Monsky-Washnitzer ; Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **24**, 227-256, (1991).

[Mer] D. Meredith. Weak formal schemes ; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).

[Mil] J. Milnor. Construction of universal bundles. II ; Ann. of Math. (2) 63, 430–436 (1956).

[Mon] P. Monsky. Formal cohomology. III. Fixed point theorems. ; Ann. of Math. (2) 93, 315–343 (1971).

[MW] P. Monsky, G. Washnitzer. Formal cohomology : I ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217 (1968).

[Ser] J.-P. Serre. Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique zéro ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **47**, pp. 108–109 (1961).

[SGA] "*Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*" ; Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61. Lecture Notes in Mathematics **224**. Springer-Verlag (1971).

[Vig] M.-F. Vignéras. Induced R-representations of p-adic reductive groups ; Selecta Mathematica 4 (1998), pp. 549–623.

[vdP] M. van der Put. The cohomology of Monsky and Washnitzer ; Société Mathématique de France. Deuxième série, Mémoire n^{ro} 23, pp. 33–60 (1986).

Recherches après 2002

Mardi 5 août 2018

Alberto Arabia*

C'est vers l'année 2002 que je m'intéresse et commence à obtenir des résultats dans un sujet alors nouveau pour moi : *la cohomologie de de Rham p-adique*, devenu mon thème principal de recherches jusqu'en 2013 date à laquelle j'incorpore à mes recherches le sujet des espaces de configuration généralisés.

La cohomologie de de Rham p-adique d'une variété *affine non singulière* a été introduite par Monsky et Washnitzer en 1964 ([MW_0]) comme voie de recherche d'une théorie cohomologique permettant de démontrer les conjectures de Weil. La théorie a bien permis à ces auteurs, d'établir assez rapidement la partie des conjectures qui se réduisent au cas des variétés affines (rationalité et factorisation p-adique de la fonction Zéta [MW_1,MW_2,Mo_1]), mais n'a pas permis d'aller au delà. Cette limitation a été une sérieuse obstruction au développement de la théorie (*cf.* aussi [Mo_2,Mer]) et les publications sur le sujet se sont taries assez rapidement dans les années 70, en raison très probablement du succès de la preuve par Deligne en 1974 ([Del]) de la totalité des conjectures de Weil, à l'aide de la cohomologie étale de Grothendieck.

Dans l'année 2001, Mebkhout me fait part de son désir depuis long temps de reprendre les travaux de Monsky-Washnitzer dans le but de trouver une définition générale, *i.e.* non limitée aux variétés affines, de la cohomologie de de Rham p-adique. C'est ainsi que j'entreprends l'année suivante une analyse approfondie des fondements de cette théorie dans le but de prolonger *fonctoriellement* les définitions de Monsky-Washnitzer, de la catégorie des schémas affines lisses sur un corps de caractéristique positive vers celle de tous les schémas lisses et de tous leurs morphismes, et ce de manière intrinsèque, *i.e.* sans artifices techniques imposant des restrictions *a priori* aux variétés (p.e. admettre une compactification). Dans ce travail, j'ai dû régler bien de questions restées ouvertes dans les travaux de Monsky-Washnitzer et de Meredith d'avant 1980, mais aussi aller bien plus loin en apportant de nouvelles idées me permettant de transcender la distinction local/global. C'est en 2004 que je découvre et réalise l'intérêt du faisceau $\mathscr{G}_{\mathscr{X}}$ d'automorphismes dont la réduction modulo p est l'identité, d'un schéma faiblement complet $\mathscr{X}$ très lisse sur $\mathbb{Z}_p$, notamment en dégageant ce qui est devenu la propriété clef de ce faisceau : le fait qu'il est naturellement contenu dans le faisceau des opérateurs différentiels $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$, bien connu dans la théorie depuis le congrès de Trento de 1989 ([M-N_1]). Cette propriété remarquable a des conséquences simples surprenantes, même dans le cas affine où elle permet de monter de manière presque tautologique que l'action cohomologique d'un morphisme entre variétés affines faiblement complètes ne dépend que de sa réduction modulo p, et ceci sans avoir besoin du théorème d'homotopie classique ([MW_1]). Mais, c'est probablement dans le passage du local au global que le faisceau $\mathscr{G}_{\mathscr{X}}$ s'est montré le plus fertile en nouveautés, car il à permis de dégager la catégorie $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathrm{sp}}$-Mod des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-modules ***spéciaux***, intrinsèquement associée à un schéma faiblement complet très lisse $\mathscr{X}$ et dont la classe d'équivalente ne dépend que de sa réduction modulo p, autrement dit, si $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ ont même réduction modulo p, on a $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathrm{sp}}$-Mod $\cong \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathrm{sp}}$-Mod de manière canonique.

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
Bâtiment Sophie Germain, bureau 608, Case 7012, 75205. Paris Cedex 13, France.
Adresse électronique : alberto.arabia@imj-prg.fr

Alberto Arabia

La catégorie $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},sp}$-Mod est abélienne et possède suffisamment d'objets injectifs et plats. Le passage du local au global est la généralisation, maintenant évidente, de l'idée de Trento (*loc.cit.*) : on introduit le complexe de faisceaux $\mathbb{R}Hom_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathrm{sp}}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}}, \mathscr{O}_{\mathscr{X}} \otimes \mathbb{Q}_q)$ $(*)$ sur l'espace topologique $\boldsymbol{X} := \mathscr{X}$ mod p, où il convient d'insister sur le fait que l'on dérive dans la catégorie des modules spéciaux, et non pas dans $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-Mod, ce qui ne marche pas. Le complexe $(*)$ est alors *canonique dans* $D_{\mathbb{Q}_q}(\boldsymbol{X})$*, catégorie dérivée des faisceaux de* $\mathbb{Q}_q$*-espaces vectoriels sur* $\boldsymbol{X}$, sa cohomologie est la cohomologie de de Rham p-adique. Dans le cas général, *i.e.* lorsque $\boldsymbol{X}$ n'admet pas de relèvement faiblement complet très lisse global, on est naturellement amené à considérer le site $\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ de tous les relèvements faiblement complets très lisses des ouverts de $\boldsymbol{X}$. Ce site donne lieu à un topos annelé $(\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}, \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}})$ muni du faisceau des opérateurs différentiels $\mathscr{D}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$ et de la catégorie des modules spéciaux $\mathscr{D}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}},\mathrm{sp}}$-Mod. L'objet

$$\mathbb{R}Hom_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}},\mathrm{sp}}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}, \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_q)$$

est alors *aussi*, et ceci est remarquable, un complexe canonique dans $D_{\mathbb{Q}_q}(\boldsymbol{X})$, sa cohomologie est le candidat désigné pour la cohomologie de de Rham p-adique, c'est le point de départ de la nouvelle définition de la cohomologie de de Rham p-adique, elle prolonge fonctoriellement toutes les définitions précédentes.

Une longue étude sur ce prolongement fonctoriel a alors été développée en collaboration avec Mebkhout, jusqu'en 2007. Les opérations cohomologiques pour la cohomologie de de Rham p-adique pour un morphisme de variétés algébriques non singulières, étaient de lors définies *sans aucune hypothèse restrictive sur le morphisme*.

Les deux articles [AM$_1$,AM$_2$], soumis en juillet 2007, rendent compte des principaux résultats de ces recherches. Le premier (194 pages) a été publié dans les Annales de l'Institut Fourier tome 60 (2010), paru en janvier 2011. Une copie des articles est jointe à ce rapport (*cf.* aussi mes prépublications [A$_{11}$,A$_{15}$,A$_{16}$], où les ingrédients fondamentaux de la nouvelle approche font leur apparition pour la première fois dès 2004).

Parmi les retombées de ces recherches, citons les résultats suivants valables pour les variétés algébriques lisses, **affines, projectives ou non**, sur un corps de caractéristique positive :

- *L'existence d'une suite spectrale de "Čech-de Rham" reliant les cohomologies de de Rham p-adique locales et globale. En particulier,* **la finitude des nombres de Betti p-adiques locaux** ([Meb]) **implique aussitôt la finitude des nombres de Betti p-adiques globaux.**
- **Opérations cohomologiques.** *Associées aux morphismes des variétés, les images inverses et directes pour les $\mathscr{D}^{\dagger}$-modules spéciaux (cf. 1.6.7) sont définies sans restrictions sur le morphisme. Ces opérations sont à la base de la fonctorialité de la cohomologie de de Rham p-adique.*
- **Fonctorialité de la cohomologie p-adique**. *En particulier,* **l'action du Frobenius sur les groupes de cohomologie en résulte, que le Frobenius admette ou non des relèvements globaux !**
- *La suite exacte longue de Gysin pour la cohomologie de de Rham p-adique pour tout couple de variétés lisses.*

Recherches après 2002

- **La factorisation de la fonction Zéta en termes des polynômes caractéristiques de l'action du Frobenius sur la cohomologie de de Rham p-adique.**

Tous ces résultats sont nouveaux, ce sont des conséquences très importantes de notre recherche, le dernier, en particulier, est un résultat test qui valide nos méthodes. Cette factorisation de la fonction Zéta n'était précédemment connue que dans le cas affine par Monsky [Mo_1] complété par le théorème de finitude de Mebkhout [Meb], et dans le cas projectif par Berthelot à l'aide de la cohomologie cristalline [Ber].

Les travaux [AM_1,AM_2] contiennent beaucoup de questions ouvertes sur lesquelles on continue de travailler (*cf.* 2 Programme de Recherches).

Depuis 2008, j'ai donné des conférences sur ces sujets notamment à

- L'IMJ-Paris 7 (2008),
- Université de Séville (Espagne) "*Conference on $\mathscr{D}$-modules*" (2009),
- Luminy (France) "*Finite groups : local methods and representations*" (2009),
- Université de Strasbourg, Séminaire de géométrie arithmétique (2010),
- Université de Tufts, Medford, Mass. Etats Unis (2010),
- Université de Caen, Séminaire de Théorie des nombres (2011),

Nous avons assuré avec Mebkhout pendant plusieurs années, un cours spécialisé de M2 intitulé "*Introduction à la cohomologie de de Rham p-adique*" dans le but de faire travailler des étudiants sur ces sujets. Les étudiants disposaient alors de notes détaillées de cours que je rédigeais à leur intention (*cf.* [A_5,A_8,A_{15},A_{16},A_{17}]). Parmi mes étudiants de M2, j'ai eu :

- Akila Hafian : *Théorème de comparaison entre cohomologies de de Rham analytique et algébrique d'une variété algébrique complexe non singulière*, d'après Grothendieck.
- Matthieu Rambaud : *Dégénérescence de la suite spectrale de Hodge-de Rham*, d'après Deligne-Illusie.

Comme application de cette théorie, j'ai démontré en juin 2011, un nouveau théorème de points fixes de Lefschetz pour les variétés ouvertes.

Théorème (2.3). *Soit $\boldsymbol{X}$ un schéma lisse séparé de type fini sur un corps fini $\boldsymbol{k}$. Soit $\theta : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ un automorphisme d'ordre fini ℓ, relativement premier à $q := |\boldsymbol{k}|$. Alors*

$$\chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})) = \chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{X}^\theta/\boldsymbol{K})) \ .$$

où $\boldsymbol{X}^\theta$ désigne la sous-variété des points fixes de $\boldsymbol{X}$ sous l'action de θ, et où $\chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{K}))$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de la cohomologie de de Rham p-adique de $\boldsymbol{Y}$, i.e. $\chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{K})) := \sum_k (-1)^k \operatorname{tr}_{\boldsymbol{K}} \left(\theta : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{K}) \to H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{K})\right)$.

———————×———————

Par la suite, et malgré l'abondance des questions liées à la cohomologie de de Rham p-adique que nous pouvions désormais aborder grâce à nos méthodes, un nombre important de difficultés à continuer dans ce secteur de recherches m'ont poussé à me diversifier. C'est ainsi que depuis 2013, je me suis intéressé aux espaces de configuration généralisés dont je viens juste de terminer l'étude importante [A_{20}] et dont je parlerai davantage dans la section 4. Voici un résumé de ce travail

The generalized configuration spaces associated to a topological space $\boldsymbol{X}$ are the subspaces $\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m := \{(x_1,\dots,x_m) \in \boldsymbol{X}^m \mid \#\{x_1,\dots,x_m\} \leqslant \ell\}$ and $\Delta_{\ell}\boldsymbol{X}^m := \Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m \setminus \Delta_{\leqslant \ell-1}$. They are equipped with the action of the symmetric group S_m permuting coordinates. When $\boldsymbol{X}$ has no interior cohomology (i.e. is i-acyclic) I was able to compute explicitly the character formula of S_m acting on the cohomology of these spaces, and if $\boldsymbol{X}$ is furthermore a connected and oriented pseudomanifold of dimension $\geqslant 2$ I generalize Church's representation stability theorem to the case of the families $\{\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{X}^m\}_m$ and $\{\Delta_{\ell-a}\boldsymbol{X}^m\}_m$. I show that, for fixed $a,i \in \mathbb{N}$, the families of representations $\{S_m : H^i(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$ are monotone and stationary for $m \geqslant 4i+4a$, if $d_{\boldsymbol{X}} = 2$, and for $m \geqslant 2i+4a$, if $d_{\boldsymbol{X}} \geqslant 3$. The corresponding families of characters and Betti numbers are (hence) polynomial and the families of integers $\{\mathrm{Betti}_i(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m/S_m)\}_m$ are constant within the same range of integers m. We further show that the family $\{\mathrm{Betti}_i(\Delta_m\boldsymbol{X}^m/S_m)\}_m$ is constant for $m \geqslant 2i$, if $d_{\boldsymbol{X}} = 2$, and for $m \geqslant i$, if $d_{\boldsymbol{X}} \geqslant 3$. As a consequence, complex algebraic varieties whether they are smooth on not verify these generalizations of Church's stability theorems.

———————×———————

Voici le sommaire de ce rapport de recherches

§**1. Cohomologie p-adique (2002–2010)** **4**
1.1. Bref rappel sur les conjectures de Weil 4
1.2. Rappel sur la cohomologie de Monsky-Washnitzer des algèbres lisses 5
1.3. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes (2001) 8
1.4. Critère d'affinité des schémas †-adiques (2005) 11
1.5. Existence de produits fibrés dans la catégorie des schémas †-adiques (2006) 11
1.6. Globalisation de la cohomologie de Monsky-Washnitzer (2002-2010) 12
§**2. Quelques développements en cohomologie p-adique (2010–2013)** **17**
2.1. Vers une définition topologique de la cohomologie p-adique 17
2.2. L'hypercohomologie (continue) du complexe de de Rham sur $\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ 19
2.3. Formule des points fixes de Lefschetz pour les variétés algébriques non singulières sur un corps de caractéristique positive, propres ou non 21
§**3. Autres thèmes de recherche depuis 2009** **21**
3.1. Equivariant Poincaré Duality and Equivariant Gysin Morphism (2009) 21
3.2. Scindage de complexes en catégorie dérivée 22
3.3. Isospectralité et Transplantations 23
§**4. Espaces de configuration (2013-2016)** **23**
§**5. Lahore (Pakistan) 2018 et 2019. Poursuites de recherche.** **26**
§**6. Références** **28**

§1. Cohomologie p-adique (2002–2010)

1.1 Bref rappel sur les conjectures de Weil

Soit $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique définie sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$ et soit $\overline{\boldsymbol{X}}$ la variété algébrique définie par $\boldsymbol{X}$ sur la clôture algébrique $\bar{k}$ de k. Pour chaque $r \in \mathbb{N}$, on note N_r le nombre de points de $\overline{\boldsymbol{X}}$ à coordonnées dans $\mathbb{F}_{q^r} \subseteq \bar{k}$. La fonction Zéta de $\boldsymbol{X}$ est définie par :

$$Z(\boldsymbol{X};t) := \exp\Big(\sum\nolimits_{r\geq 1} N_r \,\frac{t^r}{r}\Big).$$

Vers la fin des années 40, André Weil énonce un certain nombre de conjectures à propos de $Z(\boldsymbol{X};t)$ qu'il vérifie dans des cas particuliers. La première, la «rationalité de la fonction Zéta», affirme que :

$$Z(\boldsymbol{X};t) \text{ est le quotient de deux polynômes à coefficients entiers}$$

et la plus profonde : l'«analogue de l'hypothèse de Riemann», dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est non singulière, projective, de dimension n sur $\mathbb{F}_q$, donne des précisions à propos de la factorisation du numérateur et du dénominateur de $Z(\boldsymbol{X};t)$. La conjecture dit qu'il est possible d'écrire

$$Z(\boldsymbol{X};t) = \frac{P_1(t)\,P_3(t)\cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\,P_2(t)\cdot\cdots\cdot P_{2n}(t)}$$

avec

$$\begin{cases} P_0(t) = 1-t\,; \\ P_i(t) = \prod_j (1-\alpha_{i,j}\,t) \in \mathbb{Z}[t]\,, \quad \text{pour } 0<i<2n\,; \\ P_{2n}(t) = 1-q^n\,t; \end{cases}$$

où les nombres complexes $\alpha_{i,j}$ sont des entiers algébriques et vérifient $|\alpha_{i,j}| = q^{i/2}$.

De plus, Weil indique une voie de démonstration de ses conjectures basée sur l'existence d'une théorie cohomologique à coefficients dans un corps de caractéristique nulle, dans laquelle la formule des points fixes de Lefschetz est valable. Dans ce cas, le degré du polynôme P_i correspond exactement au i-ième nombre de Betti de $\boldsymbol{X}$ pour cette cohomologie.

Sans entrer dans les détails historiques des progrès successifs dans les démonstrations des conjectures de Weil (*cf.* [Har] p. 449), signalons que la première preuve générale de la rationalité de la fonction Zéta est due à Dwork ([Dw], 1960) par des méthodes d'analyse p-adique. La plupart des autres travaux sur le sujet sont plutôt centrés dans la recherche de théories cohomologiques à coefficients dans un corps de caractéristique nulle donnant des nombres de Betti tels que prédits par la conjecture. Parmi ces théories, la cohomologie ℓ-adique ($\ell \neq p$), introduite par Grothendieck en 1958, a effectivement permis de démontrer les conjectures de Weil : la rationalité de la fonction Zéta en 1965 (Grothendieck [G_2]), et le reste des conjectures en 1974 (Deligne [Del]). La cohomologie de Monsky-Washnitzer introduite en 1968 à les mêmes ambitions (cette fois pour $\ell = p$) et donne une preuve de la rationalité et de la factorisation p-adique de la fonction Zéta d'une variété affine en 1971 (Monsky [Mo_1]). Mais si ce premier résultat est d'un très bon augure, la théorie demeure insuffisante pour la partie des conjectures qui concernent les variétés projectives dans la mesure où la cohomologie de Monsky-Washnitzer est définie uniquement pour certaines variétés affines. Ce qui manque c'est une définition fonctorielle d'une cohomologie de de Rham p-adique pour une variété non singulière (affine ou non) qui soit canoniquement isomorphe à la cohomologie de Monsky-Washnitzer dans le cas affine. On y reviendra dans 1.6.

1.2 Rappel sur la cohomologie de Monsky-Washnitzer des algèbres lisses

En géométrie algébrique on associe fonctoriellement à une algèbre son complexe de de Rham, mais la cohomologie de ce complexe est un module sur l'anneau de base et dans les cas des algèbres sur un corps fini, la cohomologie de de Rham est de torsion sur $\mathbb{Z}$, ce qui l'exclut de la démarche proposée par Weil. Inspirés par les travaux de Grothendieck, Monsky-Washnitzer proposent alors d'associer à une algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}$ sur $\mathbb{F}_p$ une certaine sous-algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ du complété

séparé p-adique $\widehat{\boldsymbol{A}}$ d'une algèbre $\boldsymbol{A}$ «lisse» sur $\mathbb{Z}_p$ dont la réduction modulo p est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{A}}$. On savait depuis Grothendieck que la classe d'isomorphie des algèbres $\widehat{\boldsymbol{A}}$ était indépendante du «relèvement» $\boldsymbol{A}$ choisi, mais la cohomologie de de Rham de $\widehat{\boldsymbol{A}}$ ne donnant pas le bons nombres de Betti même sur des exemples très simples, Monsky-Washnitzer proposent la sous-algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger \subseteq \widehat{\boldsymbol{A}}$ qui relève toujours $\overline{\boldsymbol{A}}$ et qui non seulement est dans une classe d'isomorphie indépendante du relèvement $\boldsymbol{A}$, mais qui en plus corrige le défaut des nombres de Betti. L'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ est la «complétion p-adique faible» de $\boldsymbol{A}$.

1.2.1 Complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible. Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau nœthérien et $\boldsymbol{I}$ un idéal dans $\boldsymbol{R}$. Notons $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$. Par réduction modulo $\boldsymbol{I}$, on fait correspondre à une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, la $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}} := \overline{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ et à un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$ le morphisme $\overline{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}}_1 \to \overline{\boldsymbol{A}}_2$ donné par $\overline{\alpha}(x \otimes a) := x \otimes \alpha(a)$. Un «*relèvement d'une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}$*» est alors la donnée d'un morphisme surjectif de $\boldsymbol{R}$-algèbres $p_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \to \overline{\boldsymbol{A}}$ dont la réduction $\overline{p}_{\boldsymbol{A}}$ est bijective. La notion de relèvement des morphismes de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres est analogue.

Dans [G$_1$,SGA], Grothendieck introduit la notion de «*morphisme lisse*» dans la catégorie des schémas. Version relative de la notion de variété non singulière sur un corps, c'est une propriété stable par composition et par changement de base et donne lieu, dans le cas affine, à la notion d'«algèbre lisse sur un anneau» qui remplacera dans la suite l'expression "variété affine non singulière" des sections précédentes. La réduction modulo $\boldsymbol{I}$ d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse est une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse.

Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, on note $\widehat{\boldsymbol{A}}$ l'algèbre complétée séparée de $\boldsymbol{A}$ pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique, *i.e.* $\widehat{\boldsymbol{A}} := \varprojlim_m \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^m \cdot \boldsymbol{A}$. Le corps de fractions de $\widehat{\boldsymbol{R}}$ est noté $\boldsymbol{K}$.

Dans [MW$_1$], Monsky et Washnitzer associent à une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, la sous-algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ de $\widehat{\boldsymbol{A}}$ des éléments z pouvant s'exprimer comme une somme infinie :

$$z = \sum\nolimits_{j\geqslant 0} p_j(x_1, \ldots, x_n) \qquad (*)$$

où l'entier n et les éléments $x_1, \ldots, x_n$ sont indépendants de j, et dans laquelle :

$$\begin{cases} \bullet\ x_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{A}\,; \\ \bullet\ p_j \in \boldsymbol{I}^j \cdot \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n], \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}\,; \\ \bullet\ \text{l'ensemble } \{\frac{\deg p_j}{j+1}\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ est borné.} \end{cases}$$

L'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ est «la complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible de $\boldsymbol{A}$» ([1]). De manière analogue, on fait correspondre à tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme $\alpha^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ et la correspondance $(_)^\dagger$ est fonctorielle.

L'idée d'une cohomologie de de Rham $\boldsymbol{I}$-adique à coefficients dans $\boldsymbol{K}$est alors la suivante. Soit $\overline{\boldsymbol{A}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse pour laquelle il existe un relèvement $\boldsymbol{A}$, lisse sur $\boldsymbol{R}$. Soit $\Omega^1_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}^\dagger}$ le module universel des différentielles relatives de $\boldsymbol{A}^\dagger$ sur $\boldsymbol{R}^\dagger$ et posons

$$\widetilde{\Omega}^1(\boldsymbol{A}^\dagger; \boldsymbol{K}) := \frac{\Omega^1_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}^\dagger}}{\bar{0}} \otimes_{\boldsymbol{R}^\dagger} \boldsymbol{K}\,,$$

[1] Dans le cas particulier où $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$, on a $\boldsymbol{R}^\dagger = \widehat{\boldsymbol{R}}$. On démontre que $(\boldsymbol{A}^\dagger)^\dagger = \boldsymbol{A}^\dagger$ et une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ est dite «faiblement complète» lorsque $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^\dagger$.

où $\bar{0}$ désigne l'adhérence de 0 pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. Le complexe de de Rham $\Omega^*(\widehat{\boldsymbol{A}};\widehat{\boldsymbol{R}})$ induit une différentielle canonique sur le module gradué

$$\widetilde{\Omega}^*(\boldsymbol{A}^\dagger;\boldsymbol{K}) := \bigwedge^*_{\boldsymbol{K}} \widetilde{\Omega}^1(\boldsymbol{A}^\dagger;\boldsymbol{K}) \qquad (*)$$

dont la cohomologie est le candidat proposé par Monsky-Washnitzer pour la «*cohomologie de de Rham $\boldsymbol{I}$-adique de $\overline{\boldsymbol{A}}$*», notée $H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{K})$.

Ensuite, pour tout morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses $\bar{\alpha}:\overline{\boldsymbol{A}}_1\to\overline{\boldsymbol{A}}_2$ pour lequel il existe des relèvements $\boldsymbol{A}_i$ lisses sur $\boldsymbol{R}$ des $\overline{\boldsymbol{A}}_i$ et un relèvement $\alpha:\boldsymbol{A}_1\to\boldsymbol{A}_2$ de $\bar{\alpha}$, on fait correspondre le morphisme induit $H^*_{DR}(\alpha^\dagger):H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}_1/\boldsymbol{K})\to H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}_2/\boldsymbol{K})$.

On voit déjà dans cette description hâtive quelques-unes des difficultés principales des fondements de cette cohomologie liées à l'existence et à l'ambiguïté des relèvements.

R-i) Il faut que chaque algèbre lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ admette un relèvement lisse sur $\boldsymbol{R}$.

R-ii) Il faut que pour tout morphisme entre deux $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses $\bar{\alpha}:\overline{\boldsymbol{A}}_1\to\overline{\boldsymbol{A}}_2$ il existe des relèvements $\boldsymbol{A}_i$ lisses sur $\boldsymbol{R}$ des $\overline{\boldsymbol{A}}_i$ et un relèvement $\alpha:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ de $\bar{\alpha}$.

R-iii) Il faut que les cohomologies de de Rham $\boldsymbol{I}$-adiques définies à l'aide de deux relèvements soient canoniquement isomorphes, ou, ce qui revient au même, que le morphisme

$$H^*_{DR}(\alpha^\dagger):H^*\big(\widetilde{\Omega}^*(\boldsymbol{A}_1^\dagger;\boldsymbol{K})\big)\to H^*\big(\widetilde{\Omega}^*(\boldsymbol{A}_2^\dagger;\boldsymbol{K})\big)$$

soit indépendant du relèvement α de $\bar{\alpha}$ de (R-ii).

Il s'agit là des conditions nécessaires et suffisantes pour que les cohomologies des différents complexes $\widetilde{\Omega}^*(\boldsymbol{A}_1^\dagger;\boldsymbol{K})$ déterminent un objet canoniquement associé à $\overline{\boldsymbol{A}}$, à savoir $H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{K})$, et pour que la correspondance

$$\begin{cases}\overline{\boldsymbol{A}}\rightsquigarrow H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{K}),\\ \mathrm{Homom}_{\overline{\boldsymbol{R}}}(\overline{\boldsymbol{A}}_1,\overline{\boldsymbol{A}}_2)\ni\bar{\alpha}\rightsquigarrow H^*_{DR}(\alpha^\dagger)\in\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}\big(H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}_1/\boldsymbol{K}),H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}_2/\boldsymbol{K})\big)\end{cases}$$

soit fonctorielle.

Aucune de ces trois propriétés n'est facile à vérifier.

(R-i) et (R-ii). A la fin des années 50, Grothendieck démontre ces propriétés pour $\boldsymbol{R}$ nœthérien et $\boldsymbol{I}$ nilpotent ([G$_1$] et [SGA] III 6.10), il prouve également que deux relèvements lisses d'une même $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse sont isomorphes bien que non canoniquement. Dans [MW$_1$], Monsky et Washnitzer remarquent que ces propriétés sont intimement liées à l'existence d'un type particulier de relèvement des $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses qu'ils qualifient des «*faiblement complets très lisses*». C'est un point que l'article [MW$_1$] ne règle pas en dehors du cas, pour l'essentiel, où $\overline{\boldsymbol{A}}$ est une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre *intersection complète lisse*, ce qui suffisait pour les applications que les auteurs avaient en vue ([2]). Une généralisation importante du résultat de Grothendieck apparaît dans la thèse de Renée Elkik (1973), où la propriété (R-i) est prouvée pour tout couple $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ nœthérien hensélien, mais la question (R-ii) n'y est pas abordée et sera prouvée ultérieurement à l'aide du théorème «d'approximation d'Artin» ([Art]), en déformant un type particulier de relèvements

[2] La rationalité de la fonction Zéta est une propriété locale et toute algèbre lisse est localement intersection complète.

introduit également par Grothendieck (*loc.cit.*) : les relèvements formels $\alpha^\infty : \boldsymbol{A}_1^\infty \to \boldsymbol{A}_2^\infty$ (*cf.* [vdP] 1986).

Au delà du cas affine, Grothendieck démontre que toute courbe lisse sur le corps résiduel $\overline{\boldsymbol{R}}$ d'un anneau nœthérien local complet $\boldsymbol{R}$, admet un relèvement en une courbe lisse sur $\boldsymbol{R}$ ([G$_1$]) et J.-P. Serre donne des exemples de schémas projectifs lisses sur $\mathbb{F}_p$ n'admettant pas de relèvements lisses en caractéristique nulle ([Ser]), ce qui, soit dit en passant, interdit la généralisation de la construction de Monsky-Washnitzer telle quelle au delà du cas affine.

(R-iii). Elle admet une réponse positive lorsque $\boldsymbol{R}$ est un anneau de valuation discrète de caractéristique nulle et que $\boldsymbol{I}$ est son idéal maximal ([3]). C'est le théorème d'homotopie de Monsky-Washnitzer ([MW$_1$]).

En définitive, tous les problèmes de relèvement sont réglés dans le cas d'un couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ de valuation discrète de caractéristique nulle, en particulier pour le couple $(\mathbb{Z}_p, (p))$. La construction de Monsky-Washnitzer fournit donc bien une théorie cohomologique à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ sur la catégorie des variétés algébriques ***affines*** lisses sur $\mathbb{F}_p$.

1.3 Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes (2001)

1.3.1 Relèvements algébriques. Dans [A$_9$] j'étudie les problèmes de relèvements évoqués dans la section précédente en eux-mêmes. J'y montre par exemple que l'utilisation du théorème d'approximation d'Artin (théorème d'existence non effectif) pour le relèvement au niveau †-adique des morphismes n'est pas nécessaire, ce qui représente une simplification considérable dans la théorie de Monsky-Washnitzer. On généralise aussi de manière uniforme les théorèmes de relèvement connus jusqu'à présent ; le cas le plus surprenant étant la propriété (R-i) qui est démontrée *sans aucune restriction* sur le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$, autrement dit :

1.3.1-1. Théorème ([A$_9$]). *Pour tout anneau $\boldsymbol{R}$, tout idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ et toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$, il existe une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{A}}$.*

Pour démontrer cette généralisation, j'utilise l'idée, sous-jacente dans la thèse de Elkik ([E]), de construire des relèvements lisses pour les $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses à l'aide de relèvements projectifs de $\overline{\boldsymbol{R}}$-modules projectifs de type fini. Or, étant donnés une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ et un $\overline{\boldsymbol{B}}$-module projectif $\overline{\boldsymbol{M}}$, le module $\overline{\boldsymbol{M}}$ n'est pas toujours la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ d'un $\boldsymbol{B}$-module projectif, cela est pourtant possible au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$ près ([4]), ce qui me suffit pour faire marcher l'idée de Elkik moyennant quelques vérifications techniques. Plus précisément, je démontre :

1.3.1-2. Théorème ([A$_9$]). *Pour tout anneau $\boldsymbol{R}$, tout idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$, toute $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{B}$ et toute présentation libre et finie d'un $\overline{\boldsymbol{B}}$- module projectif de type fini $\overline{\boldsymbol{M}}$:*

$$\overline{\boldsymbol{B}}^p \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{B}}^q \xrightarrow{\overline{\Pi}} \overline{\boldsymbol{M}} \to \boldsymbol{0}\,, \qquad (\diamond)$$

[3] Cas particulier de couple hensélien nœthérien.

[4] On appelle « *voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$* » toute $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$, **étale** sur $\boldsymbol{B}$ et telle que la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ du morphisme structural $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ est un isomorphisme.

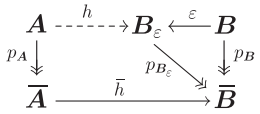
il existe une $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, un $\boldsymbol{B}_\varepsilon$-module projectif de type fini $\boldsymbol{M}_\varepsilon$, et une présentation libre et finie de $\boldsymbol{M}_\varepsilon$:

$$\boldsymbol{B}_\varepsilon^p \xrightarrow{L} \boldsymbol{B}_\varepsilon^q \xrightarrow{\Pi} \boldsymbol{M}_\varepsilon \to \boldsymbol{0}\,,$$

de réduction modulo $\boldsymbol{I}$ isomorphe à $(\diamond)$.

Quant à la propriété (R-ii), elle est vraie toujours sans hypothèse supplémentaire sur le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$, mais uniquement au voisinage étale près :

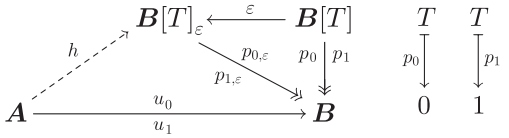
1.3.1-3. Théorème ([A$_9$]). *Étant donnés un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, et des relèvements $p_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ et $p_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, il existe une $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ qui relève $\overline{h}$. En d'autres termes, on a un diagramme :*



où $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ désigne l'homomorphisme structural et où $p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}$ est l'homomorphisme induit par ε à partir de $p_{\boldsymbol{B}}$.

La propriété (R-iii) est prouvée dans [MW$_1$] à partir d'une propriété d'homotopie également généralisée dans [A$_9$]. On rappelle que deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ sont dits «*homotopes*» lorsqu'il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]$ tel que $u_0(a) = h(a)(0)$ et $u_1(a) = h(a)(1)$. Le théorème suivant donne une idée assez précise de l'ambiguïté des relèvements des morphismes par l'existence d'une homotopie au voisinage étale près.

1.3.1-4. Théorème ([A$_9$]). *Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres dont les réductions modulo $\boldsymbol{I}$ sont homotopes (par exemple égales). Il existe alors une $\boldsymbol{B}[T]$-algèbre $\boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$, intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$, de (T) et de $(1-T)$ dans $\boldsymbol{B}[T]$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ tels que $p_{i,\varepsilon} \circ h = u_i$. En d'autres termes, on a un diagramme :*

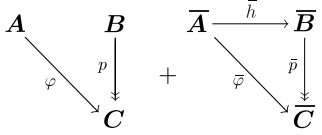


où l'on note $\varepsilon : \boldsymbol{B}[T] \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ l'homomorphisme structural et $p_{0,\varepsilon}, p_{1,\varepsilon} : \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon \to \boldsymbol{B}$ les morphismes de $\boldsymbol{B}[T]$-algèbres induits par ε à partir de p_0 et p_1 respectivement.

Les deux derniers théorèmes sont en fait des corollaires d'un théorème technique général, analogue *algébrique* de la propriété par laquelle Monsky-Washnitzer définissent les *algèbres faiblement complètes très lisses*, j'y reviendrai dans 1.3.2.

1.3.1-5. Théorème. *Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et donnons-nous :*

$$\begin{cases} \bullet \text{ Une paire d'homomorphismes de } \boldsymbol{R}\text{-algèbres } \boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{C} \xleftarrow{p} \boldsymbol{B}, \text{ où } p \text{ est surjectif de noyau noté } \boldsymbol{K} \ (\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B} \text{ compris}). \\ \bullet \text{ Un homomorphisme de } \overline{\boldsymbol{R}}\text{-algèbres } \bar{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}} \text{ vérifiant } \bar{\varphi} = \bar{p} \circ \bar{h}. \end{cases}$$

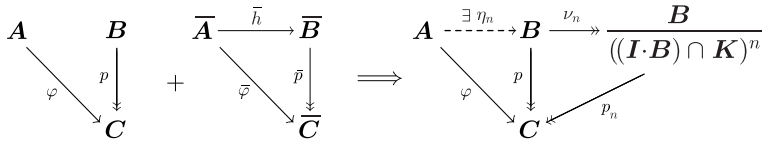


Alors :

a) *Pour chaque entier strictement positif n, il existe une* **application** $\eta_n : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *telle que :*

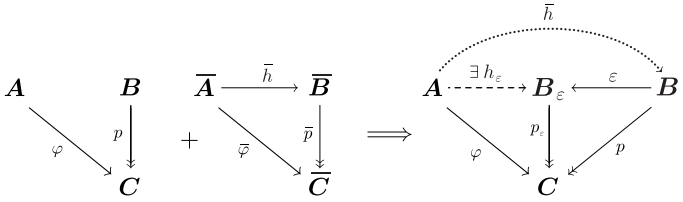
$$\begin{cases} \text{(i) } p_{\boldsymbol{B}} \circ \eta_n = \bar{h} \circ p_{\boldsymbol{A}}, \\ \text{(ii) } p \circ \eta_n = \varphi, \\ \text{(iii) } \nu_n \circ \eta_n \text{ est un homomorphisme de } \boldsymbol{R}\text{-algèbres.} \end{cases} \qquad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & \overset{\exists\,\eta_n}{\dashrightarrow} & \boldsymbol{B} \\ {\scriptstyle p_{\boldsymbol{A}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\boldsymbol{B}}} \\ \overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow{\bar{h}} & \overline{\boldsymbol{B}} \end{array}$$

où $\nu_n : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}/((\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K})^n$ désigne la surjection canonique.



(*L'homomorphisme p_n est celui induit par p.*)

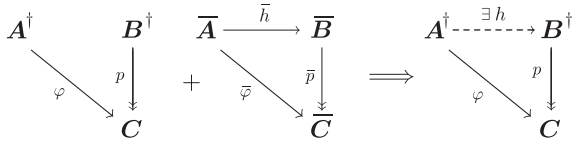
b) *Il existe un voisinage étale $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{K}$ dans $\boldsymbol{B}$, intersection complète sur $\boldsymbol{B}$, dont on note $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ l'homomorphisme structural et $p_\varepsilon : \boldsymbol{B}_\varepsilon \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}$ l'homomorphisme induit par p, et il existe un homomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_\varepsilon : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ tels que $\bar{h}_\varepsilon = \bar{\varepsilon} \circ \bar{h}$ et $\varphi = p_\varepsilon \circ h_\varepsilon$. En d'autres termes, on a un diagramme :*



1.3.2 Relèvements faiblement complets très lisses. Les résultats de la section précédente concernent l'aspect «algébrique» du problème des relèvements dans la mesure où les algèbres lisses sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ sont relevées en des algèbres lisses sur $\boldsymbol{R}$ donc de type fini sur $\boldsymbol{R}$. Dans la définition de la cohomologie de Monsky-Washnitzer, on doit encore appliquer le foncteur de complétion faible qui nous fera ressortir du cadre des algèbres de type fini. A ce sujet, il est important de souligner que si $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ est un voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, la complétion faible $\varepsilon^\dagger : \boldsymbol{B}^\dagger \to \boldsymbol{B}_\varepsilon^\dagger$ est un isomorphisme, ce qui permet de simplifier les résultats de la section précédente. En particulier, le théorème 1.3.1-5 s'énonce maintenant de la manière suivante.

1.3.2-1. Proposition. *Soient $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ trois algèbres sur $\boldsymbol{R}$ où $\boldsymbol{A}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$. Pour toute paire de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{B}^\dagger \xrightarrow{p} \boldsymbol{C} \xleftarrow{\varphi} \boldsymbol{A}^\dagger$, où p est surjectif (de noyau arbitraire), et pour chaque morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\bar{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ vérifiant $\bar{\varphi} = \bar{p} \circ \bar{h}$, il existe un relèvement*

$h : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ *de* $\overline{h}$, *tel que* $\varphi = p \circ h$.



Or, c'est très précisément par cette propriété de $\boldsymbol{A}^\dagger$ que Monsky-Washnitzer définissent les relèvements «faiblement complets très lisses». L'existence de tels relèvements est établie dans [MW$_1$] pour une classe de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses restreinte, et l'existence en toute généralité y est énoncée de manière conjecturale. Le théorème suivant, simple paraphrase de la proposition 1.3.2-1, établit cette conjecture moyennant le théorème 1.3.1-1.

1.3.2-2. Théorème ([A$_9$]). *Soient* $\boldsymbol{R}$ *un anneau nœthérien et* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *une* $\overline{\boldsymbol{R}}$*-algèbre lisse. Pour tout relèvement* $\boldsymbol{A}$ *lisse sur* $\boldsymbol{R}$ *de* $\overline{\boldsymbol{A}}$, *l'algèbre* $\boldsymbol{A}^\dagger$ *est un relèvement faiblement complet très lisse de* $\overline{\boldsymbol{A}}$.

1.4 Critère d'affinité des schémas †-adiques (2005)

On se donne un anneau commutatif nœthérien $\boldsymbol{R}$ et un idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$. On note $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$. Pour tout schéma affine lisse $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ au-dessus de $\overline{\boldsymbol{R}}$, et toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ lisse sur $\boldsymbol{R}$, relèvement de $\overline{\boldsymbol{A}} := \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ et de complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible notée $\mathscr{A}^\dagger$, Meredith associe un espace annelé $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{A}^\dagger})$ au-dessus du même espace topologique $\boldsymbol{X}$ (*cf.* [Mer]) que nous appelons *schéma* †*-adique affine-lisse*. Un *schéma* †*-adique lisse* est alors défini comme étant un espace annelé localement isomorphe à un *schéma* †*-adique affine-lisse*.

Cela dit, pour tout schéma †-adique lisse $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}^\dagger)$, soit $\overline{\mathscr{O}^\dagger}$ le faisceau sur $\boldsymbol{X}$ associé au préfaisceau qui fait correspondre à l'ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, l'algèbre $\Gamma(U; \mathscr{O}^\dagger) \otimes_{\boldsymbol{R}} \overline{\boldsymbol{R}}$. L'espace annelé $(\boldsymbol{X}; \overline{\mathscr{O}^\dagger})$ est alors un schéma ; on l'appelle *réduction (modulo* $\boldsymbol{I}$*) de* $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}^\dagger)$.

S'il est aisé de voir que la réduction d'un schéma †-adique affine-lisse est un schéma affine lisse, la question réciproque, posée déjà par Meredith dans [Mer], est restée ouverte depuis. J'ai apporté une réponse positive à cette question, plus précisément, je démontre :

Théorème d'affinité lisse (2.1.8 [A$_{15}$])

a) *Pour tout ouvert affine* $U \subseteq \boldsymbol{X}$ *d'un schéma* †*-adique lisse* $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}^\dagger)$, *le sous-espace annelé* $(U; \mathscr{O}^\dagger|_U)$ *est un schéma* †*-adique affine-lisse.*

b) *Pour tout ouvert affine* $U \subseteq \boldsymbol{X}$ *d'un schéma* †*-adique lisse* $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}^\dagger)$, *le morphisme de* $\boldsymbol{R}$*-algèbres* $\alpha(U) : \Gamma(U; \mathscr{O}^\dagger) \to \Gamma(U; \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ *est un relèvement f.c.t.f. très lisse.*

c) *Un schéma* †*-adique lisse et de réduction affine est affine-lisse.*

1.5 Existence de produits fibrés dans la catégorie des schémas †-adiques (2006)

Dans [Mer] Meredith défini un schéma †-adique comme l'espace annelé obtenu par recollement de schémas †-adiques affines de type fini. Je démontre ([A$_{16}$]) qu'un schéma †-adique est un espace *localement* annelé au sens de [EGA$_1$]. La catégorie $\mathbf{Sch}^\dagger(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{I})$ des schémas †-adiques est alors la sous-catégorie pleine de la catégorie **Loc-ann** des espaces localement annelés (*loc.cit.*).

On note $\mathbf{Aff}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ dont les objets sont les schémas †-adiques affines. Dans mon article [A$_{16}$] je réponds à un certain nombre de questions naturelles concernant ces catégories. On y démontre :

a) *La catégorie* $\mathbf{Aff}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *est équivalente à la catégorie* $\mathbf{Alg}^{\dagger}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *des algèbres faiblement complètes de type fini. En particulier, La catégorie* $\mathbf{Aff}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *possède des produits fibrés.*

b) *La catégorie des schémas †-adiques localement de type fini possède des produits fibrés.*

Le passage de (a) à (b) exige de généraliser le théorème d'affinité lisse rappelé dans la section précédente au résultat plus général suivant :

Théorème d'affinité générale (2.4.10 [A$_{16}$]) *Pour un schéma †-adique localement de type fini, il y a équivalence entre : «être de réduction affine» et «être †-adique affine de type fini.»*

Ce théorème est corollaire du théorème d'affinité lisse mais ne le redémontre pas.

Remarque. Les résultats de 1.4 et 1.5 sont fondamentaux dans la justification de la définition du site des relèvements affines très lisses $\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ (§1.6.1) comme **généralisation ou recollement** de **tous** les schémas formels de Meredith (§1.6.4) au-dessus des ouverts affines de $\overline{\boldsymbol{X}}$.

1.6 Globalisation de la cohomologie de Monsky-Washnitzer (2002-2010)

Comme il a déjà été indiqué à la fin de la section 1.1, on cherchait une définition **fonctorielle** de la cohomologie de de Rham p-adique sur les variétés non singulières sur $\mathbb{F}_p$, **affines ou non**, redonnant la cohomologie de Monsky-Washnitzer dans le cas affine. La question se pose plus généralement sur la catégorie des schémas lisses séparés sur l'anneau $\overline{\boldsymbol{R}}$ où il est naturel de considérer le «site ($\boldsymbol{I}$-adique) infinitésimal d'un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$» que nous introduisons à continuation.

1.6.1 La catégorie $\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathbf{inf}}$. A tout schéma $\boldsymbol{X}$, séparé et lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$, de faisceau structural $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$, on associe une catégorie $\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ définie comme suit :

- Un objet $\mathscr{U}$ de $\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres

avec :

$$p_{\mathscr{U}} : \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^{\dagger} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \Gamma(\overline{\mathscr{U}};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$$

$$\begin{cases} \overline{\mathscr{U}} & : \text{ouvert affine de } \boldsymbol{X}\,; \\ \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^{\dagger} & : \boldsymbol{R}\text{-algèbre faiblement complète très lisse}\,; \\ p_{\mathscr{U}} & : \text{relèvement de } \boldsymbol{R}\text{-algèbre.} \end{cases}$$

- Pour toute paire d'objets $\mathscr{V}$ et $\mathscr{U}$ de $\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$, telle que $\overline{\mathscr{V}}\subseteq\overline{\mathscr{U}}$, un élément $\Phi\in\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V},\mathscr{U})$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^{\dagger} \to \boldsymbol{A}(\mathscr{V})^{\dagger}$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^{\dagger} & \xrightarrow{\ \phi\ } & \boldsymbol{A}(\mathscr{V})^{\dagger} \\ {\scriptstyle p_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_V} \\ \Gamma(\overline{\mathscr{U}};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\ \rho\ } & \Gamma(\overline{\mathscr{V}};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \end{array}$$

où ρ désigne le morphisme de restriction canonique, est commutatif.

- On pose : $\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V},\mathscr{U}) = \varnothing$, lorsque $\mathscr{V}$ et $\mathscr{U}$ sont tels que $\overline{\mathscr{V}} \not\subseteq \overline{\mathscr{U}}$.

1.6.2 Topologie de Grothendieck sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathbf{inf}}$. Une «*topologie de Grothendieck*» sur une catégorie $\mathscr{C}$ avec produits fibrés est la donnée de familles de morphismes $\{\Phi_\mathfrak{a} : \boldsymbol{O}_\mathfrak{a} \to \boldsymbol{O}\}$, appelées «*recouvrements (de $\mathscr{C}$)*», tels que :

a) Pour tout objet $\boldsymbol{O}$ de $\mathscr{C}$ et tout $\Phi \in \mathrm{Iso}_\mathscr{C}(\boldsymbol{O})$, $\{\Phi : \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{O}\}$ est un recouvrement.

b) Pour tout recouvrement $\{\Phi_\mathfrak{a} : \boldsymbol{O}_\mathfrak{a} \to \boldsymbol{O}\}$ et tous recouvrements $\{\Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \to \boldsymbol{O}_\mathfrak{a}\}$, la famille des morphismes composés $\{\Phi_\mathfrak{a} \circ \Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \to \boldsymbol{O}\}$ est un recouvrement.

c) Pour tout recouvrement $\{\Phi_\mathfrak{a} : \boldsymbol{O}_\mathfrak{a} \to \boldsymbol{O}\}$ et tout morphisme $\Phi' : \boldsymbol{O}' \to \boldsymbol{O}$, la famille de morphismes $\{\Phi_\mathfrak{a} \times_{\boldsymbol{O}} \Phi' : \boldsymbol{O}_\mathfrak{a} \times_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{O}' \to \boldsymbol{O}'\}$ est un recouvrement.

Dans le cas de la catégorie $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, on définit un «*recouvrement*» comme la donnée d'un objet $\mathscr{U}$ et d'une famille $\mathscr{R} = \{\Phi_\mathfrak{a} : \mathscr{U}_\mathfrak{a} \to \mathscr{U}\}$ de morphismes, tels que la famille $\{\overline{\mathscr{U}}_\mathfrak{a}\}$ des ouverts affines correspondants aux $\mathscr{U}_\mathfrak{a}$ est un recouvrement dans $\boldsymbol{X}$ de l'ouvert U correspondant à $\mathscr{U}$.

Proposition ([A$_{11}$]). *La catégorie $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, munie de ces recouvrements, est une topologie de Grothendieck.*

Le «site infinitésimal du schéma $\boldsymbol{X}$» est alors la donnée de la catégorie $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et de la classe de recouvrements 'affines' $\mathrm{Rec}(\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}})$.

1.6.3 Le faisceau $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathbf{inf}}}$. Le foncteur de la catégorie $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ vers la catégorie des $\boldsymbol{R}$-algèbres faiblement complètes très lisses, qui fait correspondre à $\mathscr{U}$ l'algèbre $\boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger$ et à un morphisme $\Phi : \mathscr{V} \to \mathscr{U}$ le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger \to \boldsymbol{A}(\mathscr{V})^\dagger$ associé, définit le préfaisceau «*structural*» de $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ noté $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$.

Théorème ([A$_{11}$]). *Le préfaisceau $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ est un faisceau sur le site $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.*

1.6.4 Sous-sites de Meredith. Il convient de rappeler la notion de schéma formel faible affine introduite par Meredith ([Mer], *cf.* §3 [A$_{11}$]) et associé à un relèvement faiblement complet très lisse $\boldsymbol{A}^\dagger$ de $\overline{\boldsymbol{A}} := \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}}; \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$. Il s'agit de l'espace annelé de base $\overline{\boldsymbol{X}}$ (affine lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$) de faisceaux d'algèbres $\mathscr{O}^\dagger_{\overline{\boldsymbol{X}}}$ engendré par le préfaisceau d'algèbres dont les sections au-dessus d'un ouvert principal $D(\bar{f})$ coïncident avec l'algèbre $((\boldsymbol{A}^\dagger)_f)^\dagger$. Je démontre le résultat suivant conjecturé dans [Mer]

Proposition 3.2.16 [A$_{11}$]. *Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini ou f.c.t.f.. Notons $\rho : \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}} \to \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}$ le morphisme de faisceaux induit par le relèvement $\rho(\overline{\boldsymbol{X}}) : \boldsymbol{A}^\dagger \to \overline{\boldsymbol{A}}$. Alors,*

a) *Le morphisme $\rho(\overline{U}) : \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}) \to \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}(\overline{U})$ est un relèvement quel que soit $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$.*

De plus, si $\boldsymbol{A}^\dagger$ est très lisse et $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ est un ouvert ***affine****, on a :*

b) *$\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ est f.c.t.f. très lisse.*

c) *L'espace annelé $(\overline{U}; \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}|_{\overline{U}})$ est canoniquement isomorphe au schéma de Meredith associé à l'algèbre $\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$.*

Ainsi, pour chaque $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ on va considérer le schéma de Meredith $(\overline{\mathscr{U}}; \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}})$ associé au relèvement très lisse $p_\mathscr{U} : \boldsymbol{A}(\mathscr{U}) \to \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}(\overline{\mathscr{U}})$. On sait (maintenant) que les sections de $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}$ au-dessus des ouverts affines de $\overline{V} \subseteq \overline{\boldsymbol{U}}$ appartiennent naturellement à $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et chaque morphisme

de restriction $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}(\overline{V}_1) \to \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}(\overline{V}_2)$ est un morphisme de $\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$. Il s'ensuit que chaque objet $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$ 'détecte' un sous-site de $\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$ noté $\mathscr{M}\!\mathit{er}(\mathscr{U})$ appelé sous-site de Meredith engendré par $\mathscr{U}$. Les deux observations suivantes sont utiles

- La catégorie des faisceaux sur $\mathscr{M}\!\mathit{er}(\mathscr{U})$ est équivalente à la catégorie des faisceaux sur $\overline{\mathscr{U}}$.
- Le site annelé $(\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}; \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}})$ est le recollement de ses sous-sites de Meredith.

Commentaire. D'un point de vue heuristique, on cherche à remplacer le schéma $(\boldsymbol{X}, \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ défini sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ par le site annelé $(\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}, \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}})$ de tous les relèvements faiblement complets très lisses des ouverts affines de $\boldsymbol{X}$ sur lesquels la cohomologie de Monsky-Washnitzer est bien définie. Le problème de la globalisation se traduit alors dans la recherche d'un faisceau de complexes de de Rham sur le site recollant en catégorie dérivée les complexes de Monsky-Washnitzer sur chaque relèvement faiblement complet des ouverts affines de $\boldsymbol{X}$, *i.e.* sur chaque 'ouvert affine' du site $\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$.

1.6.5 Catégorie des faisceaux sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$. Une partie importante de [A$_{11}$] concerne l'étude de différentes catégories de faisceaux sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$, notamment celles des faisceaux de groupes abéliens, celle de faisceaux d'algèbres $\mathscr{A}$ sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$ et celle des faisceaux $\mathscr{A}$-modules (à gauche) sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$. La section **4** de [A$_{11}$] donne des équivalences de catégories qui ramènent chacune de ces catégories à certaines catégories de faisceaux sur $\overline{\boldsymbol{X}}$. Ces études ont relevé l'intérêt d'un faisceaux de groupes particulier, celui des automorphismes « †-*adiques* ». Ce faisceaux est défini aussi bien sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$ que sur chaque $\overline{\mathscr{U}}$ pour $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$, noté respectivement $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}$ et $\mathscr{G}^\dagger_{\overline{\mathscr{U}}}$, on a des isomorphismes canoniques :

$$\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}(\mathscr{U}) \simeq \text{Iso}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\mathscr{U}) \qquad \Gamma(\overline{V}; \mathscr{G}^\dagger_{\overline{\mathscr{U}}}) \simeq \boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}(\overline{V}))$$

pour tout ouvert affine $\overline{V}$ et où $\boldsymbol{G}^\dagger$ dénote le groupe des automorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbre dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est l'identité. On note $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{M}\!\mathit{er}(\mathscr{U})}$ la restriction de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}$ à $\mathscr{M}\!\mathit{er}(\mathscr{U})$. La propriété fondamentale de ces faisceaux de groupes est que la restriction d'un faisceau $\mathscr{F}$ de $\mathbb{Z}$-modules sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$ au sous-site de Meredith $\mathscr{M}\!\mathit{er}(\mathscr{U})$ est munie d'une structure canonique de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{M}\!\mathit{er}(\mathscr{U})}$-module, on démontre alors :

Théorème 4.2.3 [A$_{11}$]. *Soient $(\overline{\boldsymbol{X}}; \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma affine lisse, $\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$ son site de relèvements affines très lisses et $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$ tel que $\overline{\mathscr{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$. Le foncteur*

$$\mathscr{R}_{\mathscr{U}} : \text{Mod}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{G}^\dagger)$$

où $\text{Mod}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\mathbb{Z})$ désigne la catégorie des faisceaux de $\mathbb{Z}$-modules sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$ et $\text{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{G}^\dagger)$ celle des faisceaux de $\mathscr{G}^\dagger$-modules sur $\overline{\boldsymbol{X}}$, qui fait correspondre à un faisceau $\mathscr{F}$ sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$ le $\mathscr{G}^\dagger_{\overline{\mathscr{U}}}$-module sur $\overline{\mathscr{U}}$ associé à la restriction de $\mathscr{F}$ au sous-site de Meredith $\mathscr{M}\!\mathit{er}(\mathscr{U})$ munie de l'action canonique de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{M}\!\mathit{er}(\mathscr{U})}$, est une équivalence de catégories.

En particulier, on a un isomorphisme canonique de foncteurs :

$$I\!R\Gamma(\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}; _) \equiv I\!R\text{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}}(\underline{\mathbb{Z}}_{\overline{\mathscr{U}}}; \mathscr{R}_{\mathscr{U}}(_)) \qquad (\diamond)$$

Ce type d'équivalence de catégorie est plus généralement vérifié sur la catégorie $\text{Mod}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\mathscr{A})$ de faisceaux de $\mathscr{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$ où $\mathscr{A}$ est un faisceau d'algèbres sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\text{inf}}$. Dans ces cas,

la restriction d'un faisceau de $\mathscr{A}$-module à $\mathscr{M}\!\mathit{er}(\mathscr{U})$ est munie d'une structure de $\mathscr{A}|_{\mathscr{M}\!\mathit{er}(\mathscr{U})} \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}|_{\mathscr{M}\!\mathit{er}(\mathscr{U})}$-modules (pour l'action canonique de $\mathscr{G}^{\dagger}$ sur $\mathscr{A}$) et l'analogue du théorème **4.2.3** est le suivant.

Théorème 4.4.3 [$\mathbf{A_{11}}$]. *Soient $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{X}})$ un schéma* ***affine*** *lisse, $\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ son site de relèvements affines très lisses et $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ tel que $\overline{\mathscr{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$. Le foncteur :*

$$\mathscr{R}\!\mathit{es}_{\mathscr{U}} : \mathrm{Mod}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}\big(\mathscr{R}\!\mathit{es}_{\mathscr{U}}(\mathscr{A}) \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{U}}\big)$$

est une équivalence de catégories.

1.6.6 Faisceau d'opérateurs différentiels †-adiques. La section **5** de [A_{11}] est dédiée au faisceau des opérateurs différentiels †-adiques sur $\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$, noté $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}}$, qui fait correspondre à $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$, l'algèbre des opérateurs différentiels †-adiques $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{U}}$ introduite par Mebkhout-Narvaez dans [M-N_1,M-N_2]. On a un isomorphisme canonique (*loc.cit.*) :

$$\boxed{\mathrm{Ext}^{*}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{U}}}(\mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{U}}, \mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{U}} \otimes \mathbb{Q}_p) \equiv H^{*}_{\mathrm{DR}}(\overline{\mathscr{U}}/\mathbb{Q}_p)} \qquad (\diamond\diamond)$$

où le terme de droite est la cohomologie de Monsky-Washnitzer.

– ***Le faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}}$ contient de façon tout à fait remarquable le faisceau $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$.***

1.6.7 La catégorie des modules «*spéciaux*» $\mathbf{Mod}^{\dagger}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$. Soit $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$. Par l'inclusion $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{U}} \subseteq \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{U}}$, on munit un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{U}}$-module d'une structure de $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{U}}$-module et donc aussi de $\big(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{U}} \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{U}}\big)$-module. La catégorie $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{U}})$ s'identifie de cette manière à une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{U}} \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{U}})$, ce qui sera noté dans la suite par l'inclusion $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{U}}) \subseteq \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{U}} \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{U}})$. Notons maintenant $\mathrm{Mod}^{\dagger}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$ des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-modules $\mathscr{M}$, dits «*spéciaux*», tels que pour chaque $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ l'action de $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\mathscr{U})$ sur $\mathscr{M}(\mathscr{U})$ ($\mathscr{M}$ est un préfaisceau sur $\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$) coïncide avec l'action induite par l'action de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\mathscr{U})$ sur $\mathscr{M}(\mathscr{U})$ ($\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\mathscr{U}) \subseteq \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\mathscr{U})$). Il est clair que le noyau et conoyau d'un morphisme de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-modules de $\mathrm{Mod}^{\dagger}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$ appartiennent encore à cette catégorie qui est donc une sous-catégorie abélienne de $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$.

1.6.7-1. Remarque. On a $\mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{X}} \in \mathrm{Mod}^{\dagger}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$ mais $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}} \notin \mathrm{Mod}^{\dagger}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$.

1.6.7-2. Théorème 5.5.3 [$\mathbf{A_{11}}$]. *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{X}})$ un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ et soit $\mathscr{U} \in \boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$.*

a) *La restriction $\mathscr{R}\!\mathit{es}'_{\mathscr{U}}$ du foncteur $\mathscr{R}\!\mathit{es}_{\mathscr{U}} : \mathrm{Mod}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{U}} \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{U}})$ à la sous-catégorie $\mathrm{Mod}^{\dagger}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$ est à valeurs dans $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{U}})$ et le foncteur*

$$\mathscr{R}\!\mathit{es}'_{\mathscr{U}} : \mathrm{Mod}^{\dagger}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{U}}) \qquad (\diamond *)$$

est exact et admet un adjoint à droite.

b) *Lorsque $\overline{\boldsymbol{X}}$ est affine et $\overline{\mathscr{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$, le foncteur $(\diamond *)$ est une équivalence de catégories.*

c) *La catégorie $\mathrm{Mod}^{\dagger}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$ est abélienne et possède suffisamment d'objets injectifs.*

1.6.8 Cohomologie de de Rham †-adique. Inspirés des résultats des prépublications [A_{11},A_{15},A_{16}], les articles [AM_1,AM_2], en collaboration avec Mebkhout, sont le fruit de plusieurs années de travail autour de la recherche d'un prolongement (fonctoriel !) de la cohomologie de de Rham p-adique de Monsky-Washnitzer définie sur la catégorie schémas **affines** lisses sur un corps fini de caractéristique p, vers la catégorie de **tous** les schémas lisses (sur le même corps). Nous définissons la cohomologie de de Rham †-adique par la même égalité (1.6.6-($\diamond\diamond$)) du cas affine, *i.e.*

$$\boxed{\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_p) =: H^*_{\mathrm{DR}}(\overline{\boldsymbol{X}}/\mathbb{Q}_p)}$$

mais où le foncteur dérivé est à calculer dans la catégorie $\mathrm{Mod}^\dagger(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}})$ (*cf.* 1.6.7).

Nos articles [AM_1,AM_2] (resp. 194 et 80 pages) donnent les fondements de cette nouvelle théorie. On y établit pour les variétés algébriques non singulières, **affines, projectives ou non**, sur un corps de caractéristique positive,

- L'existence d'une suite spectrale de "Čech-de Rham" reliant les cohomologies de de Rham p-adique locales et globale. En particulier, **la finitude des nombres de Betti p-adiques locaux** ([Meb]) **implique aussitôt la finitude des nombres de Betti p-adiques globaux.**
- **Opérations cohomologiques.** Associées aux morphismes des variétés, on définit les images inverses et directes pour les $\mathscr{D}^\dagger$-modules spéciaux (*cf.* 1.6.7), ces opérations sont à la base de la fonctorialité de la cohomologie de de Rham p-adique.
- **Fonctorialité de la cohomologie p-adique**. En particulier, **l'action du Frobenius sur les groupes de cohomologie en résulte, que le Frobenius admette ou non des relèvements globaux !**
- La suite exacte longue de Gysin pour la cohomologie de de Rham p-adique pour tout couple de variétés.
- **La factorisation de la fonction Zéta en termes des polynômes caractéristiques de l'action du Frobenius sur la cohomologie de de Rham p-adique.**

Tous ces résultats sont nouveaux, ce sont des conséquences très importantes de notre travail, le dernier en particulier, est un résultat test qui valide nos méthodes. Cette factorisation de la fonction Zéta n'était précédemment connue que dans le cas affine par Monsky [Mo_1] complété par le théorème de finitude de Mebkhout [Meb], et dans le cas projectif par Berthelot à l'aide de la cohomologie cristalline [Ber].

Nos articles ont été soumis pour publication en juillet 2007, le premier, [AM_1], vient d'être accepté et paraîtra dans le volume **60** des Annales de l'Institut Fourier (2010).

En 2009-10, j'ai fait plusieurs exposés sur ces sujets dont trois internationaux. A savoir

- **Séville (Espagne).** "*Conference on $\mathscr{D}$-modules in Honor of Zoghman's Mebkhout*",
- **Luminy (France).** "*Finite groups : local methods and representations*".
- **Tufts University (Medford, MA, USA).** "*Weil conjectures and p-adic cohomology*".
- **Université de Caen (France).** "*Topos infinitésimal p-adique*".
- **Université de Strasbourg (France).** "*Topos infinitésimal p-adique*".

§ 2. Quelques développements en cohomologie p-adique (2010–2013)

Je décris maintenant trois autres thèmes de recherche liés à la cohomologie de de Rham p-adique.

2.1 Vers une définition topologique de la cohomologie p-adique

Reprenons l'égalité de 1.6.6 :

$$H^*_{\mathrm{DR}}(\overline{\mathscr{U}}/\mathbb{Q}_p) = \mathrm{Ext}^*_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}}(\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}, \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes \mathbb{Q}_p)\,, \qquad (\diamond\diamond)$$

concernant un schéma †-adique affine $\mathscr{U}$.

Comme le noyau de la surjection $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}} \mathscr{O}^\dagger_U \to \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}$, $P \otimes f \mapsto P(f)$, est de p-torsion, on a aussi

$$H^*_{\mathrm{DR}}(\overline{\mathscr{U}}/\mathbb{Q}_p) = \mathrm{Ext}^*_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}} \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}, \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes \mathbb{Q}_p)$$

et l'on a donc un morphisme naturel entre la cohomologie de de Rham †-adique de $\overline{\mathscr{U}}$ et la cohomologie de faisceau du faisceau structural $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}^\dagger}$ sur $\boldsymbol{U}^\dagger_{\mathrm{inf}}$

$$\begin{aligned} I\!R\mathrm{Hom}^*_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}} \underline{\boldsymbol{R}}, \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes \mathbb{Q}_p) &\xrightarrow[*]{} I\!R\mathrm{Hom}^*_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}} \underline{\mathbb{Z}}_p, \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes \mathbb{Q}_p) \\ &= I\!R\mathrm{Hom}^*_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}}(\underline{\mathbb{Z}}_p, \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}} \otimes \mathbb{Q}_p) \\ &= I\!R\Gamma(\boldsymbol{U}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{U}^\dagger_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_p) \end{aligned}$$

Dans le cas d'un schéma général $\overline{\boldsymbol{X}}$, les morphismes précédents se recollent pour donner lieu à un morphisme canonique

$$\boxed{H^*_{\mathrm{DR}}(\overline{\boldsymbol{X}}/\mathbb{Q}_p) \to I\!R\Gamma(\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_p)}$$

qui n'est pas sans rappeler le morphisme analogue introduit et étudié par Grothendieck dans [G$_3$] pour la cohomologie infinitésimale où il démontre qu'il s'agit en fait d'un **isomorphisme**.

Dans notre contexte du site des relèvements plats d'un schéma lisse, nous avons longtemps pensé qu'il devait en être autant, mais nous avons fini par trouver un contrexemple montrant que ce morphisme n'est déjà pas bijectif pour la droite affine $\overline{\boldsymbol{X}} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$. Or, dans ce cas, la cohomologie de de Rham p-adique est triviale et notre recherche de contrexemple a consisté à exhiber un 1-cocycle non trivial de la cohomologie de faisceaux de $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}$. L'équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et la catégorie des $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}$-modules pour un relèvement †-adique plat $\mathscr{X}$ de $\overline{\boldsymbol{X}}$, réalise le dit cocycle comme une dérivation de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}$ à valeurs dans $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}$, mais cette dérivation **n'est pas continue** pour la topologie p-adique lorsque $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}$ est muni de la topologie induite par la topologie de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}$. Cette observation, clef pour la suite, nous a amené à nous intéresser à la catégorie des faisceaux des $\mathbb{Z}_p[\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}]$-modules munis d'une topologie homogène, filtrés donc, telle que l'action de $\mathbb{Z}_p[\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}]$ est continue. La catégorie de tels modules, dont les morphismes sont les morphismes de $\mathbb{Z}_p[\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}]$-modules **continus**, notée $\mathrm{Mod}_\infty(\mathbb{Z}_p[\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}])$, n'est pas abélienne mais elle est **exacte** de sorte que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}},\infty}(_, \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}} \otimes \mathbb{Q}_p)$ induit

bien un foncteur en catégorie dérivée que nous notons

$$I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}},\infty}(_, \mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{X}} \otimes \mathbb{Q}_p)\,.$$

Le foncteur «*oubli de la topologie*» induit un morphisme $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}},\infty}(_,_) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}}(_,_)$ qui passe en catégorie dérivée

$$I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}},\infty}(_,_) \longrightarrow I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}}(_,_)\,.$$

Cela étant, nous pouvons procéder de manière analogue dans la catégorie des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-modules et considérer la catégorie des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-modules filtrés, notée $\mathrm{Mod}_{\infty}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$, et les mêmes remarques que précédemment conduisent à l'existence d'un morphisme canonique de bifoncteurs

$$I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}},\infty}(_,_) \longrightarrow I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}}(_,_)\,.$$

d'où le diagramme commutatif de foncteurs sur $\mathrm{Mod}_{\infty}(\mathbb{Z}_p[\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}])$

$$\begin{array}{ccc} I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}},\infty}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}} (_), \mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{X}}) & \xrightarrow{\Xi_{\infty}} & I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}},\infty}\big((_), \mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{X}}\big) \\ \downarrow & & \downarrow \\ I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}} (_), \mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{X}}) & \xrightarrow{\Xi} & I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}}\big((_), \mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{X}}\big) \end{array} \qquad (I\!D)$$

Or, on peut démontrer que le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}},\infty}(M, \mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{X}} \otimes \mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}}(M, \mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{X}} \otimes \mathbb{Q}_p)\,,$$

est en fait un **isomorphisme** lorsque M est muni de la topologie p-adique **et est de type fini en tant que $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-module**. Or, $\mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$ admet justement une présentation par des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-modules libres de type fini, présentation qui plus est, est une présentation dans la catégorie $\mathrm{Mod}_{\infty}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$. La flèche de gauche dans le dernier diagramme $(I\!D)$ et donc ***bijective***.

Le résultat fondamental de cette étude est alors le suivant

Théorème. *Le morphisme canonique de foncteurs sur* $\mathrm{Mod}_{\infty,\mathrm{t.f.}}(\mathbb{Z}_p[\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}])$

$$I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}},\infty}\big(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}} (_), \mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{X}} \otimes \mathbb{Q}_p\big) \longrightarrow I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}},\infty}\big((_), \mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{X}} \otimes \mathbb{Q}_p\big)$$

est un ***isomorphisme****. On a donc des isomorphismes canoniques*

$$\boxed{H^n_{\mathrm{DR}}(\overline{\boldsymbol{X}}/\mathbb{Q}_p) \simeq H^n_{\infty}\big(\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}, \mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_p\big)\,, \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

où nous avons noté $H^*_{\infty}\big(\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}, _\big)$ la cohomologie de faisceaux de la catégorie des faisceaux de $\mathbb{Z}_p$-modules sur $\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ munis d'une filtration et d'une action de $\mathscr{G}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$ continue, ce que nous appelons «*la catégorie des faisceaux lisses sur* $\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$».

Le dernier théorème est très satisfaisant du point de vue théorique, d'une part puisqu'il renforce l'analogie avec la construction originale de site infinitésimal de Grothendieck, et d'autre part parce qu'il donne une définition de la cohomologie p-adique indépendante de la théorie des

$\mathscr{D}^\dagger$-modules suggérant une voie topologique de justification de la fonctorialité de la cohomologie p-adique.

2.2 L'hypercohomologie (continue) du complexe de de Rham sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathbf{inf}}$

Dans son célèbre article [G$_3$], Grothendieck fait une analyse critique des différents candidats pour la cohomologie p-adique qui s'expriment dans les notations de notre travail [AM$_1$] par

$$H^n_{\mathrm{DR}}(\overline{\boldsymbol{X}}/\mathbb{Q}_p) \overset{?}{=} \begin{cases} H^n\big(\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_p\big), \\ \mathbb{H}^n(\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_p) \end{cases}$$

Nous avons montré que le premier ne donne pas les bons nombres de Betti déjà pour la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$, mais le second est toujours une question ouverte qui mérite notre attention.

La question semble liée à l'acyclicité du faisceau constant $\mathbb{Q}_{p,\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$. Bien sûr, ce faisceau est flasque, mais cela ne suffit pas a établir son acyclicité puisque le site infinitésimal p-adique n'a pas d'objet final, ce qui rend la question encore plus intéressante. Dans le cas d'un schéma $\overline{\boldsymbol{X}}$ admettant un relèvement global $\mathscr{X}^\dagger$, nous avons par équivalence de catégories, platitude de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}$ sur $\mathbb{Z}_{p,\mathscr{X}^\dagger}$ et le théorème de la section précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_\infty(\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_p) &= \mathbb{R}\mathrm{Hom}_\infty(\underline{\mathbb{Z}}_{p,\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}} \otimes \mathbb{Q}_p) \\ &= \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger},\infty}(\underline{\mathbb{Z}}_p, \underline{\Omega}^*_{\mathscr{X}^\dagger} \otimes \mathbb{Q}_p) \\ &= \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger,\infty}\big(\underline{\mathbb{Z}}_p, \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{G}^\dagger,\infty}(\underline{\mathbb{Z}}_p, \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger} \otimes \mathbb{Q}_p)\big) \\ &= \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger,\infty}\big(\underline{\mathbb{Z}}_p \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathscr{G}_{\mathscr{X}^\dagger}} \underline{\mathbb{Z}}_p, \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger} \otimes \mathbb{Q}_p\big) \end{aligned}$$

Ce qui nous amène à nous interroger sur le morphisme

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger,\infty}\big(\underline{\mathbb{Z}}_p, \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger} \otimes \mathbb{Q}_p\big) \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger,\infty}\big(\underline{\mathbb{Z}}_p \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathscr{G}_{\mathscr{X}^\dagger}} \underline{\mathbb{Z}}_p, \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger} \otimes \mathbb{Q}_p\big)\,, \tag{$\diamond$}$$

induit par le morphisme canonique

$$\underline{\mathbb{Z}}_p \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathscr{G}_{\mathscr{X}^\dagger}} \underline{\mathbb{Z}}_p \to \underline{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathscr{G}_{\mathscr{X}^\dagger}} \underline{\mathbb{Z}}_p = \underline{\mathbb{Z}}_p\,,$$

et où le terme de gauche calcule $H_{\mathrm{DR}}(\overline{\boldsymbol{X}}/\mathbb{Q}_p)$ d'après la section précédente. On voit maintenant clairement qu'une condition suffisante pour que ($\diamond$) soit un quasi-isomorphisme est

$$\underline{\mathbb{Q}}_p \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathscr{G}^\dagger} \underline{\mathbb{Q}}_p \cong \underline{\mathbb{Q}}_p\,. \tag{$\diamond\diamond$}$$

On en déduirait aussitôt

$$H_\infty\big(\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \underline{\mathbb{Q}}_{p,\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}\big) = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}^\dagger,\infty}(\underline{\mathbb{Z}}_p, \underline{\mathbb{Q}}_p) \cong \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\underline{\mathbb{Q}}_p \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathscr{G}^\dagger} \underline{\mathbb{Q}}_p, \underline{\mathbb{Q}}_p) \cong \mathbb{R}\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}}, \underline{\mathbb{Q}}_p)\,,$$

impliquant l'acyclicité de $\underline{\mathbb{Q}}_{p,\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ dans la catégorie des faisceaux lisses sur $\boldsymbol{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

Conjecture. Ces observations, et d'autres, nous incitent à conjecturer ($\diamond\diamond$). Cela revient dans le cas de la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ à monter que le groupe associé $\boldsymbol{G}^\dagger$, des automorphismes de $\mathbb{Z}_p[X]^\dagger$ dont la réduction modulo p est l'identité, est rationnellement acyclique, *i.e.* $H_i(\boldsymbol{G}^\dagger, \mathbb{Q}) = 0$ pour tout $i > 0$. Nous avons passé un certain temps sur cette question, suffisamment en tout cas pour comprendre qu'elle est hautement non triviale. Nous avons réussi à montrer que $\mathscr{T}or_1^{\mathscr{G}^\dagger}(\underline{\mathbb{Q}}_p, \underline{\mathbb{Q}}_p) = 0$, mais nous ne savons rien dire pour l'instant en degrés supérieurs et nous

n'avons rien trouvé dans la littérature concernant l'acyclicité des groupes $\boldsymbol{G}^{\dagger}$. Il est certain que si cette conjecture s'avérait juste, elle produirait beaucoup de groupes acycliques inconnus jusqu'alors.

2.2.1 Cohomologie p-adique et cohomologies de Weil. Rappelons brièvement (cf. [Kle]) qu'étant donné un corps de caractéristique nulle $\boldsymbol{K}$ appelé «*corps des coefficients*», un foncteur contravariant $\boldsymbol{X} \rightsquigarrow H^*(\boldsymbol{X})$ de la catégorie des variétés algébriques non singulières sur un corps fini k vers la catégorie des $\boldsymbol{K}$-algèbres graduées anticommutatives **et de dimension finie**, est dit «*cohomologie de Weil*» lorsqu'il satisfait les trois propriétés suivantes :

W-i) **Dualité de Poincaré.** Soit $\boldsymbol{X}$ irréductible, propre sur k, de dimension n. Alors
   a) Les groupes $H^i(\boldsymbol{X})$ sont nuls pour tout $i \notin [0, 2n]$.
   b) Il existe un isomorphisme canonique d'«*orientation*» $H^{2n}(\boldsymbol{X}) \cong \boldsymbol{K}$.
   c) L'accouplement $H^i(\boldsymbol{X}) \times H^{2n-i}(\boldsymbol{X}) \to H^{2n}(\boldsymbol{X})$ est parfait.

W-ii) **Formule de Künneth.** Soient $p : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ et $q : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ les projections. Alors, le morphisme canonique $(\alpha \otimes \beta) \mapsto p^*\alpha \wedge q^*\beta$ induit un isomorphisme

$$H^*(\boldsymbol{X}) \otimes_{\boldsymbol{K}} H^*(\boldsymbol{Y}) \to H^*(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y})$$

W-iii) **Le morphisme «*cycles*».** Il existe un morphisme de groupes abéliens

$$\gamma_{\boldsymbol{X}} : C^m(\boldsymbol{X}) \to H^{2m}(\boldsymbol{X}),$$

où $C^m(\boldsymbol{X})$ désigne le groupe des m-cycles algébriques de $\boldsymbol{X}$, vérifiant
   a) (fonctorialité) – Si $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est un morphisme, alors $f^* \circ \gamma_{\boldsymbol{Y}} = \gamma_{\boldsymbol{X}} \circ f^*$
   b) (multiplicativité) – $\gamma_{\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}}(A \times B) = \gamma_{\boldsymbol{X}}(A) \otimes \gamma_{\boldsymbol{Y}}(B)$
   c) (non trivialité) – Si P est un point, alors $\gamma_P : C^*(P) = \mathbb{Z} \to H^*(P) = \boldsymbol{K}$ est l'inclusion canonique.

Dans notre article [AM$_1$], nous avons bien démontré la fonctorialité et la finitude de la cohomologie de de Rham p-adique et nous avons également introduit l'essentiel des éléments des conditions W-(i,ii,iii) et même démontré un certain nombre de ces propriétés dans les sections **14** et **15** dont les titres évoquent bien de ces thèmes, à savoir :

- **14.** La suite exacte de Gysin en cohomologie de de Rham p-adique et la classe de cohomologie d'un cycle.
- **14.1** La compatibilité des foncteurs images directes topologique et différentielle
- **14.2** La suite exacte de Gysin en cohomologie de de Rham p-adique
- **14.3** La classe de cohomologie d'un cycle
- **15.** Le lemme de Poincaré et la formule de Künneth pour l'espace affine

Peu de propriétés restent aujourd'hui à établir pour montrer que notre définition de cohomologie p-adique fournit une cohomologie de Weil. Rappelons qu'alors, d'après l'article de Katz-Messing [KM], les polynômes caractéristiques de l'action du Frobenius sur les groupes de cohomologie d'une variété propre seront indépendants de la cohomologie de Weil considérée et seront, par conséquent, les mêmes que ceux obtenus en cohomologie étale !

L'aboutissement de cette recherche est aujourd'hui essentiellement une question de temps mais aussi de moyens car nous manquons cruellement d'étudiants de qualité que nous pourrions faire travailler sur le sujet.

2.3 Formule des points fixes de Lefschetz pour les variétés algébriques non singulières sur un corps de caractéristique positive, propres ou non

Le théorème suivant est nouveau dans la famille de théorèmes de points fixes de Lefschetz, non seulement parce qu'il concerne la cohomologie de de Rham p-adique, mais aussi parce qu'il s'applique à des variétés non projectives. La compacité, une propriété généralement indispensable dans les théorèmes de points fixes de Lefschetz, se trouve ici remplacée par l'hypothèse sur le morphisme θ, supposé être un automorphisme d'ordre fini ℓ. Dans le cas d'une variété différentielle de dimension n, sans point fixe, la proposition résulte immédiatement du fait que toute orbite admet une base de voisinages difféomorphes à la réunion disjointe de ℓ copies de $\mathbb{R}^n$. Dans le cas algébrique complexe on peut se ramener au contexte analytique et donc différentiable à l'aide du théorème de comparaison de Grothendieck, mais dans le cas des variétés non singulières sur un corps de caractéristique positive, ces approches ne sont pas envisageables.

Dans [A$_{19}$], je démontre le résultat suivant à l'aide des techniques de [AM$_1$].

Théorème. *Soit $\boldsymbol{X}$ un schéma lisse séparé de type fini sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. Soit $\theta : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ un automorphisme d'ordre fini ℓ, relativement premier à q. Alors*

$$\chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{X}/\mathbb{Q}_q)) = \chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{X}^\theta/\mathbb{Q}_q)) \ .$$

où $\boldsymbol{X}^\theta$ désigne la sous-variété des points fixes de $\boldsymbol{X}$ sous l'action de θ, et où $\chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{Y}/\mathbb{Q}_q))$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de la cohomologiede de Rham p-adique de $\boldsymbol{Y}$, i.e. $\chi(\theta : H^*_{DR}(\boldsymbol{Y}/\mathbb{Q}_q)) := \sum_k (-1)^k \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_q}\left(\theta : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{Y}/\mathbb{Q}_q) \to H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{Y}/\mathbb{Q}_q)\right)$.

§3. Autres thèmes de recherche depuis 2009

3.1 Equivariant Poincaré Duality and Equivariant Gysin Morphism (2009)

The aim of [A$_{18}$] is the generalization of the Gysin morphism $f_\sharp$ associated to a map between oriented manifolds $f\colon \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$, from the nonequivariant to the equivariant framework. In order to motivate definitions, I begin recalling the classical formalism based on Poincaré duality, outlining the steps to follow in the equivariant setting. There are several advantages in my approach. First, while Gysin morphism is often explicitly defined only for projections $p\colon \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ and closed embeddings $i\colon \boldsymbol{M} \hookrightarrow \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}$, and then extended to any map f using the factorization trick throw the graph, $f = p \circ \mathrm{Gr}(f)$, and therefore setting $f_\sharp := p_\sharp \circ \mathrm{Gr}(f)_\sharp$, procedure that doesn't give any evidence for the functorial equality : $(f \circ g)_\sharp = f_\sharp \circ g_\sharp$ ($\diamond$), that one has to prove *a posteriori*, instead, my definition of the Gysin morphism makes no distinction on the nature of f and ($\diamond$) will be tautological. Another bonus of my approach is its ability to extend known properties of the classical case to the equivariant case without additional difficulties. Finally, I introduce the equivariant analog of classical Poincaré duality, i.e. the existence of a canonical spectral sequence

$$\mathbf{Ext}_{H_G}(H_{G,\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}), H_G) \Rightarrow H_G(\boldsymbol{M})[d_M]\,,$$

following the ideas of J.-L. Brylinski for pseudovarieties in [Br] and generally omitted in books on equivariant cohomology despite its theoretical interest.

3.2 Scindage de complexes en catégorie dérivée

3.2.1 Soient R un anneau commutatif gradué, $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ la catégorie des R-modules différentiels gradués (R-*mdg* en bref), $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ la catégorie obtenue de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ en identifiant les morphismes R-homotopes, et $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ obtenue de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ en inversant ses quasi-isomorphismes. On définit la structure triangulée de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et de $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, et l'on étudie le problème du scindage des R-modules différentiels gradués, plus précisément, l'existence d'un isomorphisme dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, entre un R-*mdg* (M, d_M) et sa cohomologie : le R-*mdg* $(\mathcal{H}(M, d_M), 0)$.

Comme la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ est abélienne, on dispose aussi des catégories triangulées $K^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R))$ et $D^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R))$ de complexes de R-*mdg*'s bornés supérieurement. Si $\boldsymbol{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$ est un foncteur covariant additif compatible au décalage, il induit un foncteur $\mathrm{Diff}\boldsymbol{F} : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et son dérivé à gauche $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\boldsymbol{F} : D^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)) \rightsquigarrow D^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R))$. Nous montrons qu'il existe de même un prolongement

$$\mathbb{D}\,\boldsymbol{F} : \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,.$$

La cohomologie de $\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(_)$ s'identifie alors naturellement à la limite de la suite spectrale associé à la filtration par degrés de R-*mdg*'s du bicomplexe $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\boldsymbol{F}(_)$. Lorsque (M, d_M) est scindé, on montre l'existence d'un isomorphisme de R-modules gradués entre $\boldsymbol{h}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(M, d_M))$ et $\mathbf{tot}\,\mathbb{L}^*\boldsymbol{F}(\boldsymbol{h}(M, d_M))$, où $\mathbb{L}^k\boldsymbol{F} : D^-(\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R))$ est le k-ième foncteur dérivé à gauche standard.

3.2.2 Au sujet du scindage de complexes en catégorie dérivée, je démontre pour R un anneau de dimension globale finie,

Théorème ([A$_{22}$]). *Tout R-mdg est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ si, et seulement si, l'anneau R est héréditaire* ([5]).

Ce théorème s'applique en particulier au cas de la cohomologie $\mathbb{S}^1$-équivariante puisque $H_{\mathbb{S}^1}(\bullet) = \mathbb{Q}[X]$, ce qui était notre première motivation. En particulier, dans mon travail 3.1 la suite spectrale

$$\mathbf{Ext}_{H_{\boldsymbol{G}}}(H_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}), H_{\boldsymbol{G}}) \Rightarrow H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})[d_{\boldsymbol{M}}]\,,$$

est dégénérée lorsque $G = \mathbb{S}^1$.

3.2.3 Pour un groupe de Lie $\boldsymbol{G}$ compact et connexe, les complexes des formes différentielles équivariantes pour une $\boldsymbol{G}$-variété différentielle $\boldsymbol{X}$, sont des objets de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}})$ où $H_{\boldsymbol{G}}$ désigne la cohomologie $\boldsymbol{G}$-équivariante d'un point.

[5] Un anneau est dit «*héréditaire*» lorsque tout sous-module d'un module projectif est lui-même projectif. Dans un anneau héréditaire, tout module admet une résolution projective de longueur $\leqslant 1$, donc $\dim_{\mathrm{gb}}(R) \leqslant 1$.

Lorsque $\boldsymbol{X}$ vérifie la dualité de Poincaré rationnelle, le morphisme de dualité de Poincaré équivariante

$$\mathbb{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}} : (\Omega_{\boldsymbol{G}}[d_{\boldsymbol{X}}], \boldsymbol{d}) \to \mathrm{Homgr}^*_{H_{\boldsymbol{G}}}((\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}, \boldsymbol{d}), H_{\boldsymbol{G}})\,, \tag{$\mathbb{D}$}$$

est un quasi-isomorphisme.

Lorsque $\boldsymbol{G} = \mathbb{S}^1$, on a des isomorphismes canoniques dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}})$

$$(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{d}) \cong (H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}), 0) \text{ et } (\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{d}) \cong (H_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), 0)\,. \tag{$\diamond$}$$

et le quasi-morphisme ($\mathbb{D}$) induit un isomorphisme de $H_{\boldsymbol{G}}$-mg

$$\mathscr{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}} : H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}}] \underset{\cong}{\rightarrow} \mathbf{tot}\,\mathrm{Extgr}^{*,\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}(H_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), H_{\boldsymbol{G}})\,.$$

Il en résulte le critère de dualité de Poincaré équivariante suivant.

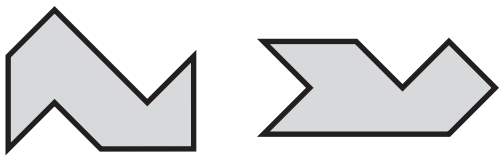
Théorème ([$\mathbf{A_{22}}$]). *Pour $\boldsymbol{G} = \mathbb{S}^1$ et lorsque la cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{X}$ est de dimension finie, le morphisme de dualité*

$$H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}}] \to \mathrm{Homgr}^*_{H_{\boldsymbol{G}}}(H_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), H_{\boldsymbol{G}})$$

induit par $\mathbb{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}}$ est bijectif si, et seulement si, $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ est un $H_{\boldsymbol{G}}$-module sans torsion.

3.3 Isospectralité et Transplantations

Rédaction d'un livre sur l'isospéctralité des tambours d'après les idées de M-.F. Vigneras (1980) et T. Sunada (1985) et sur la technique des transplantations de fonctions de P. Bérard (1992). Mon but est d'expliquer complètement et en des termes aussi simples que possible le contrexemple de GordonWebbWolpert (1992) à la celèbre question de Marc Kac : "Can one hear the shape of a drum" (1966). Plus précisément expliquer pourquoi les surfaces ci-dessous



sont isospectrales. Niveaux MathSpé et Master2, à paraître dans la collection Universitext de Springer (Contract No. : 55856, prévu pour 2019). Le livre est basé sur mes notes de cours du stage M2 en 2014-15 ([A_{24}]).

§ 4. Espaces de configuration (2013-2016)

Depuis l'année 2013, je m'intéresse aux espaces de configuration «*généralisés*» d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$. C'est ainsi que j'appelle les sous-espaces $\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m \subseteq \boldsymbol{X}^m$ définis, pour $0 \leqslant \ell \leqslant m \in \mathbb{N}$, par

$$\begin{aligned} \Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m &:= \big\{(z_1, \ldots, z_m) \in \boldsymbol{X}^m \mid \mathrm{Card}\,\{z_1, \ldots, z_m\} \leqslant \ell\big\}\,, \\ \Delta_{\ell}\boldsymbol{X}^m &:= \Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m \smallsetminus \Delta_{\leqslant \ell-1}\boldsymbol{X}^m\,, \quad \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}) := \Delta_m\boldsymbol{X}^m\,. \end{aligned}$$

Ces espaces sont munis de l'action du groupe symétrique $\boldsymbol{\mathcal{S}}_m$ par permutation de coordonnées. Ma première motivation dans cette recherche a été d'y transposer las questions classiques sur les espaces de configuration standard $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ aux espaces de configuration généralisés, pour tenter de les résoudre pour des larges familles d'espaces $\boldsymbol{X}$ à l'aide de méthodes *uniformes*. Parmi ces questions, les suivantes ont trouvé des réponses très complètes pour les coefficients de cohomologie dans un corps de caractéristique nulle.

- Calculer le caractère de la représentations $\boldsymbol{\mathcal{S}}_m$:$H(\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)$.
- Calculer le polynôme de Poincaré des quotients de $\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m$ pas des sous-groupes de $\boldsymbol{\mathcal{S}}_m$. Montrer que, pour $a \in \mathbb{N}$ fixé, les nombres de Betti de $\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m$ sont donnés un polynôme «*universel*» en m et en les nombres de Betti de $\boldsymbol{X}$.
- Montrer que la suite spectrale de Leray des fibrations entre espaces de configuration dégénèrent, notamment celles associées aux projections $\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \twoheadrightarrow \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$.
- Pour $a \in \mathbb{N}$ fixé, estimer les rangs de stabilité de représentation et de polynomialité de caractère, au sens de Church-Farb ([CF]), de la famille $\{H(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$.

Ces questions sont abordées au moyen de ce que j'appele le «*complexe fondamental de* $\boldsymbol{X}$ *pour* $\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m$». Il s'agit d'un complexe de $\boldsymbol{\mathcal{S}}_m$-modules gradués :

$$0 \to H_{\mathrm{c}}^{*-\ell+1}(\Delta_1\boldsymbol{X}^m) \to \cdots \to H_{\mathrm{c}}^{*-1}(\Delta_{\ell-1}\boldsymbol{X}^m) \to H_{\mathrm{c}}^{*}(\Delta_{\ell}\boldsymbol{X}^m) \to H_{\mathrm{c}}^{*}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m) \to 0\,,$$

qui a la propriété remarquable d'être exact lorsque la cohomologie «*intérieure*» de $\boldsymbol{X}$, *i.e.* de l'image de l'application naturelle $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{X})$, est nulle. Il y a même équivalence de ces propriétés lorsque $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique orientable (th. [A$_{20}$]-3.2.3).

J'appelle «*i-acyclique*» tout espace sans cohomologie intérieure. Les premiers exemples de tels espaces sont les espaces acycliques connexes non compacts, les groupes de Lie réels connexes non compacts, et, plus généralement, si $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, tout quotient $\boldsymbol{X}/W$ par un groupe fini W, et tout produit cartésien $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$, où $\boldsymbol{Y}$ est quelconque, le sont aussi.

Une large partie de ma recherche est concentrée sur les conséquences du fait que le complexe fondamental est une résolution par $\boldsymbol{\mathcal{S}}_m$-modules de $H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m)$. Les questions de stabilité de représentations, de formules de caractères, de nombres de Betti, sont alors susceptibles d'approches combinatoires. Une autre partie importante est consacrée à la conception d'une suite spectrale particulière qui établit un pont entre les espaces de configuration des espaces i-acycliques et ceux des espaces généraux, ce qui permet de généraliser un certain nombre de résultats connus du contexte i-acyclique au contexte général.

– Pour le problème de la formule des caractères, j'étends la formule bien connue de Macdonald du caractère de la cohomologie des produits cartésiens $\boldsymbol{X}^m$ ([M1]), au cas des espaces de configuration $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$.

Théorème ([A$_{20}$]-10.5.3). *Soit* $\boldsymbol{X}$ *un espace* i*-acyclique. Si* $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_m$, *on a*

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\alpha,T)}{T^m} = \prod_{d=1}^{m} d^{\mathbb{X}_d}\Big(\sum\nolimits_{e\,|\,d}\mu\big(\tfrac{d}{e}\big)\frac{\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e}\Big)^{\underline{\mathbb{X}_d}},$$

où $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m)(\alpha,T) := \sum_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{tr}(\alpha{:}H_{\mathrm{c}}^i(\boldsymbol{F}_m))\,(-T)^i$, *et où* $(1^{\mathbb{X}_1}, 2^{\mathbb{X}_2}, \ldots, m^{\mathbb{X}_m}) \vdash m$ *est le type de la permutation* α, $\mu(_)$ *est la fonction de Möbius,* $\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(_)$ *est le polynôme de Poincaré de* $H_{\mathrm{c}}(_)$, *et* $(_)^{\underline{r}}$ *est la factorielle décroissante.*

– Pour le problème des polynômes de Poincaré, le cas de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ relève d'une formule fermée très simple conséquence de la i-acyclicité de $\boldsymbol{X}$, tandis que les cas plus généraux des quotients de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ par des sous-groupes finis de $\boldsymbol{\mathcal{S}}_m$ sont traités via la formule des caractères [A$_{20}$]-10.5.3. C'est ainsi que je procède pour l'espace des configurations «*cycliques*» $\boldsymbol{CF}_m(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\boldsymbol{C}_m$, où $\boldsymbol{C}_m := \langle(1,\dots,m)\rangle \subseteq \boldsymbol{\mathcal{S}}_m$, et celui des configurations «*non ordonnées*» $\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\boldsymbol{\mathcal{S}}_m$.

Notons, $\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(_)$ le polynôme de Poincaré de $H_{\mathrm{c}}(_)$, $\phi(_)$ la fonction indicatrice d'Euler, $\mu(_)$ la fonction de Möbius, et $(_)^{\underline{r}}$ la factorielle décroissante. Pour tout espace i-acyclique $\boldsymbol{X}$, je prouve les égalités suivantes.

Théorème ([A$_{20}$]-4.2.1) *:*
$$\frac{\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(-T)}{T^m} = \Big(\frac{\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T)}{T}\Big)^{\underline{m}}.$$

Théorème ([A$_{20}$]-11.2.1) *:*
$$\frac{\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{CF}_m)(-T)}{T^m} = \frac{1}{m}\sum_{d\,|\,m}\phi(d)\,d^{m/d}\Big(\sum_{e\,|\,d}\mu\big(\frac{d}{e}\big)\frac{\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e}\Big)^{\underline{m/d}}.$$

Théorème ([A$_{20}$]-11.3.1)
$$\frac{\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X}))(-T)}{T^m} = \frac{1}{m!}\sum_{\lambda:=(1^{\mathbb{X}_1},\dots,m^{\mathbb{X}_m})\vdash m} h_\lambda \prod_{d=1}^{m} d^{\mathbb{X}_d}\Big(\sum_{e\,|\,d}\mu\big(\frac{d}{e}\big)\frac{\mathscr{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e}\Big)^{\underline{\mathbb{X}_d}},$$

où h_λ est le cardinal de l'ensemble des permutations de $\boldsymbol{\mathcal{S}}_m$ dont la décomposition en cycles disjoints est de type $\lambda := (1^{\mathbb{X}_1},\dots,m^{\mathbb{X}_m}) \vdash m$.

– L'expression simple du polynôme de Poincaré de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ me suggérait l'existence d'une forme de trivialité cohomologique des projections $\pi_a : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$, et donc la dégénérescence des suites spectrales de Leray associées. Je montre que c'est en effet le cas lorsque $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique et localement connexe (Th. [A$_{20}$]-12.4.9).

– Pour la stabilité de représentations, je prouve les théorèmes suivants.

Théorème ([A$_{20}$]-9.3.15). *Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété connexe orientable de dimension $\geqslant 2$. Pour $a, i \in \mathbb{N}$, la famille de représentations $\{\boldsymbol{\mathcal{S}}_m : H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m; k)\}_m$ est monotone et stationnaire pour $m \geqslant 4i+4a$, si $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, et pour $m \geqslant 2i+4a$, si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$. Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont (donc) polynomiales et la famille $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m/\boldsymbol{\mathcal{S}}_m)\}_m$ est constante sur ces mêmes intervalles de m.*
La proposition [A$_{20}$]-11.6.1 *va encore plus loin pour la famille $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$ en montrant qu'elle est constante pour $m \geqslant 2i$, si $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, et pour $m \geqslant i$, si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$.*

Ces théorèmes sont dus à Church ([Ch], 2012) dans le cas où $\boldsymbol{M}$ est lisse et pour la famille $\{\boldsymbol{\mathcal{S}}_m : H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$. Mes énoncés généralisent ceux de Church dans deux directions. Premièrement, en s'affranchissant de l'hypothèse de lissité de $\boldsymbol{M}$, et, deuxièmement, en incorporant les familles des espaces de configuration généralisés $\{\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m\}_m$ (singuliers, même si $\boldsymbol{M}$ ne l'est pas) pour lesquelles il n'y avait pas de conjecture. Mon approche est totalement différente de celle de Church qui s'appuie sur les travaux de Totaro ([To]) sur la suite spectrale de Leray associée au plongement $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}) \hookrightarrow \boldsymbol{M}^m$ lorsque $\boldsymbol{M}$ est lisse.

Ma stratégie de la preuve a consisté à me restreindre dans un premier temps aux pseudovariétés $\boldsymbol{M}$ qui sont i-acycliques ([A$_{20}$]-9.2.3) et pour lesquelles je peux élaborer une combinatoire basée sur l'exactitude des complexes fondamentaux qui réduit les questions de stabilité et monotonie au cas des familles d'espaces produit $\{\boldsymbol{M}^m\}_m$ où la réponse est assez simple. La combinatoire repose sur deux foncteurs d'induction dans la catégorie des $\boldsymbol{FI}$-modules, les foncteurs $\boldsymbol{I}^a, \boldsymbol{\Theta}^a : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \to \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])$ ([A$_{20}$]-8.2) qui décalent les $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{m-a}$-modules vers des $\boldsymbol{\mathcal{S}}_m$-modules et pour lesquels j'ai un contrôle assez précis de la manière dont ils perturbent les rangs de stabilité et monotonie (thm. [A$_{20}$]-8.2.2).

Le cas où $\boldsymbol{M}$ est une pseudovariété générale est ensuite abordé moyennant la remarque que $\boldsymbol{M}$ se réalise comme différence $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{\geqslant 0} \smallsetminus \boldsymbol{M}_{>0}$, où $\boldsymbol{M}_{\geqslant 0} := \boldsymbol{M} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ et $\boldsymbol{M}_{>0} := \boldsymbol{M} \times \mathbb{R}_{>0}$ sont des pseudovariétés i-acycliques. Cette observation simple m'a conduit naturellement à la construction de la suite spectrale $(\mathbb{E}_\sigma(\mathscr{U}^m)_r, d_r)$ ([A$_{20}$]) qui converge vers $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ et dont la page $\mathbb{E}_1$ concerne uniquement des espaces de configuration pour des espaces i-acycliques. J'ai ([A$_{20}$]-9.3.13-(b)) :

$$\mathbb{E}_\sigma(\mathscr{U}^m)_1^{p,q} = \bigoplus\nolimits_{\tau \in \mathfrak{T}(p+1,m)} \mathrm{ind}_{\mathcal{H}_\tau}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}_m} \boldsymbol{\sigma} \otimes H_{\mathrm{BM}}^Q(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0})) \;\Rightarrow\; H_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))\,,$$

où $Q := i-(m-(p+1))\,(d_{\boldsymbol{M}}-1)$. J'y ai noté $\mathfrak{T}(p+1,m)$ l'ensemble des tableaux de Young à m boites et première colonne $(m-p,\dots,m)$, et $\mathcal{H}_\tau$ le stabilisateur de τ dans $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{m-(p+1)} \times \boldsymbol{\mathcal{S}}_{p+1}$ et dont l'action sur $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}))$ est tordue par la signature $\boldsymbol{\sigma}$ de $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{m-(p+1)}$. J'appelle ces suites spectrales «*basiques*». Leur construction est compatible aux images-inverses ce qui me permet d'estimer les rangs de monotonie et stabilité de $\{H_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$ à partir de ceux déjà connus dans le cas i-acyclique de $\{H_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{>0}))\}_m$. Le foncteur d'induction $\boldsymbol{I}^a$ est ensuite de nouveau utilisé pour atteindre $\{H_{\mathrm{BM}}^i(\Delta_{m-a}\boldsymbol{M}^m)\}_m$ et une récurrence descendante basée sur des suites longues de cohomologie fixe le cas de $\{H_{\mathrm{BM}}^i(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m)\}$.

L'étude des familles $\{\mathrm{Betti}_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$ suit la même approche. Lorsque $\boldsymbol{M}$ est i-acyclique, la formule explicite du caractère $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ donnée par le théorème [A$_{20}$]-10.5.3 me permet d'obtenir une information assez précise de la multiplicité de la représentation triviale de $\boldsymbol{\mathcal{S}}_m$ dans $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$. Je suis alors en mesure de prouver le résultat suivant.

Proposition ([A$_{20}$]-11.5.3). *Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété connexe orientable et i-acyclique. La famille $\{\mathrm{Betti}_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M};\mathbb{Q}))\}_m$ est constante pour chaque $i \in \mathbb{N}$ et tout $m \geqslant i$.*

À partir de là, les suites spectrales basiques me permettent d'examiner le cas où $\boldsymbol{M}$ est une pseudovariété générale et d'établir la proposition [A$_{20}$]-11.6.1 déjà mentionnée.

Je pense que même s'il reste beaucoup de questions intéressantes ouvertes, l'utilité des complexes fondamentaux en tant qu'outil d'approche combinatoire dans le cas des espaces i-acycliques, et l'utilité des suites spectrales basiques comme moyen de propagation de résultats vers le cadre plus large des pseudovariétés, devrait être clair d'après ce travail . Ces idées inédites ouvrent la voie pour de nouvelles perspectives de recherche.

§5. Lahore (Pakistan) 2018 et 2019. Poursuites de recherche.

Lahore 2018. En février 2018, j'ai donné un minicours sur mon travail sur les espaces de configuration dans le cadre d'un workshop en topologie organisé par l'université de LUMS et par

l'Abdus Salam School of Mathematics de Lahore, Pakistan. Pendant l'élaboration de ce cours, j'ai été emmené à préciser certains aspects de la théorie générale des familles de représentations de groupes symétriques, les FB-modules, ce qui a donné lieu à l'article [A$_{28}$] présenté dans le paragraphe suivant, actuellement disponible sur arXiv.

Lahore 2019. Je suis de nouveau invité à Lahore, cette fois à l'Abdus Salam School et pour une période plus longue, dans le but de donner un cours plus approfondi sur les espaces de configuration et d'encadrer un ou deux étudiants en thèse.

5.0.1 On the equivalence of two stability conditions of FB-modules. In this paper, we give a proof of the equivalence of two stability conditions in the work of Thomas Church and Benson Farb on FB-modules ([CF]) : *representation stability* (RS) and *character polynomiality* (PC). While the implication (RS) $\Rightarrow$ (PC) is a simple consequence of the Frobenius character formula, the converse seems not to have been documented, motivating this work.

An FB-module is a countable family $\mathscr{W} := \{W_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ of linear representations W_m of the symmetric groups $\mathfrak{S}_m$, assumed, in these notes, to be finite dimensional over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$, hereafter called *an $\mathfrak{S}_m$-module*.

— The FB-module $\mathscr{W}$ is said to be *representation stable* (RS in short), if there exists some $N \in \mathbb{N}$, such that, for all $m \geqslant N$, the decomposition in simple factors of W_m has the *stable* form :

$$W_m \sim \bigoplus_\lambda V_{\lambda[m]}{}^{\boldsymbol{n}_\lambda} ,$$

where

- $\lambda := (\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_\ell)$ is a partition verifying $|\lambda| + \lambda_1 \leqslant N$;
- $V_{\lambda[m]}$ is the simple $\mathfrak{S}_m$-module associated with $\lambda[m] := (m - |\lambda| \geqslant \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_\ell)$;
- for $m \geqslant N$, the family of natural numbers $\{\boldsymbol{n}_\lambda\}_\lambda$ is *constant*.

The smallest such N is *the rank of* (RS) *of* $\mathscr{W}$, which we will denote by '$\mathrm{rank}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W})$'.

— The FB-module $\mathscr{W}$ is said to *have a polynomial character* (PC in short), if there exists $N \in \mathbb{N}$ and a polynomial $P_{\mathscr{W}} \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_N]$, such that, for all $m \geqslant N$ and all $g \in \mathfrak{S}_m$, one has :

$$\chi_{W_m}(g) = P_{\mathscr{W}}(X_1(g), \ldots, X_N(g)) ,$$

where χ_{W_m} is the character of W_m, and $X_i(g)$ is the number of cycles of length i in the decomposition of g in $\mathfrak{S}_m$ as a product of disjoint cycles. The polynomial $P_{\mathscr{W}}$, which is unique, is *the polynomial character of* $\mathscr{W}$. The smallest such N is *the rank of character polynomiality of* $\mathscr{W}$, it will be denoted by '$\mathrm{rank}_{\mathrm{pc}}(\mathscr{W})$'.

Regarding the equivalence of these conditions, we prove the following theorem.

Theorem. *Let* $\mathscr{W}$ *be an* FB*-module.*
a) $\mathrm{rank}_{\mathrm{pc}}(\mathscr{W}) \leqslant \mathrm{rank}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W})$.
b) *If* $\mathscr{W}$ *is* (PC) *and has polynomial character* $P_{\mathscr{W}}$, *then*

$$\mathrm{rank}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W}) \leqslant \max\{\mathrm{rank}_{\mathrm{pc}}(\mathscr{W}), 2\deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathscr{W}})\} ,$$

where $\deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathscr{W}})$ *is the polynomial degree of* $P_{\mathscr{W}}$, *when stipulating that* $\deg_{\boldsymbol{w}}(X_i) := i$.

Comments. (i) This theorem exhibits FB-modules $\mathscr{W}$ with $\mathrm{rank}_{\mathrm{pc}}(\mathscr{W}) = 0$ and arbitrarily big $\mathrm{rank}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W})$. It also shows that the bounds are optimal, giving examples where they are reached. (ii) Beyond FB-modules, we also look at FI-modules $\mathscr{W}$, which are FB-modules with some additional structure. There is a corresponding representation stability condition for FI-modules, its rank is denoted by $\mathrm{rank}^{\mathrm{fi}}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W})$. One has $\mathrm{rank}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W}) \leqslant \mathrm{rank}^{\mathrm{fi}}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W})$, but there is no equivalence with (PC) stability, in particular the statement (b) in the last theorem for FI-modules and $\mathrm{rank}^{\mathrm{fi}}_{\mathrm{rs}}$ is false.

An interesting by-product in this work is the fact that the *weight* $\boldsymbol{w}(W_m)$ of an $\boldsymbol{\mathcal{S}}_m$-module W_m coincides with the lowest possible degree $\deg_{\boldsymbol{w}}(P)$ of a polynomial P expressing the character χ_{W_m}. Moreover, if $\mathscr{W} := \{W_m\}$ is a (PC) FB-module, then $\deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathscr{W}}) = \boldsymbol{w}(W_m)$, for all $m \geqslant \mathrm{rank}_{\mathrm{rs}}(\mathscr{W})$. The next theorem follows from these observations.

Proposition. *If $\mathscr{W}_1$ and $\mathscr{W}_2$ are* FB*-modules which are* $(\mathrm{PC})_{m\geqslant N}$*, then*

$$\boldsymbol{w}(W_{1,m} \otimes W_{2,m}) = \boldsymbol{w}(W_{1,m}) + \boldsymbol{w}(W_{2,m}),$$

for all $m \geqslant 2(\boldsymbol{w}(W_{1,m}) + \boldsymbol{w}(W_{2,m}))$. In particular,

$$\boldsymbol{w}((\mathscr{W}_1 \otimes \mathscr{W}_2)_{\geqslant N}) = \boldsymbol{w}((\mathscr{W}_1)_{\geqslant N}) + \boldsymbol{w}((\mathscr{W}_2)_{\geqslant N}),$$

where $(\mathscr{W})_{\geqslant N}$ denotes the truncation of $\mathscr{W}$ that replaces W_n by 0 for all $n < N$.

§6. Références

Le sigle '(W3)' indique que le document concerné est accessible à mon adresse internet :
http://www.math.jussieu.fr/~arabia

[A$_0$] A. Arabia. Thèse de doctorat ; Université Paris 7 – Denis Diderot (1985).

[A$_1$] A. Arabia. Cycles de Schubert et cohomologie équivariante de $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{T}$; C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **301** (1985), no. 2, 45–48.

[A$_2$] A. Arabia. Cycles de Schubert et cohomologie équivariante de $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{T}$; Invent. Math. **85** (1986), no. 1, 39–52.

[A$_3$] A. Arabia. Cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante de $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{B}$ pour un groupe $\boldsymbol{G}$ de Kac-Moody ; C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **302** (1986), no. 17, 631–634.

[A$_4$] A. Arabia. Cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante de la variété de drapeaux d'un groupe de Kac-Moody ; Bull. Soc. Math. France **117** (1989), no. 2, 129–165.

[A$_5$] A. Arabia. Introduction à la cohomologie de de Rham ; Cours de M2 (260 pages) (1997).

[A$_6$] A. Arabia. Classes d'Euler équivariantes et points rationnellement lisses ; Ann. Inst. Fourier, **48** (1998), no. 3, 861–912.

[A$_7$] A. Arabia. Appendice à l'article de M.-F. Vignéras : "Induced R-representations of p-adic reductive groups" ; Selecta Mathematica, new series, **4** (1998) 549–623.

[A$_8$] A. Arabia. Cohomologie de de Rham dans la catégorie des schémas ; Notes de cours (107 pages), (1999).

[A$_9$] A. Arabia. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes ; Commentarii Mathematici Helvetici **76** (2001) 607–639.

[A_{10}] A. Arabia. Faisceaux pervers sur les variétés algébriques complexes. Correspondance de Springer (d'après Borho-MacPherson) ; Notes de cours (67 pages) (2001).

[A_{11}] A. Arabia. Cohomologie de Monsky-Washnitzer dans la catégorie des schémas lisses et séparés sur $\overline{\boldsymbol{R}}$; (2001).

[A_{12}] A. Arabia. Introduction à l'homologie d'intersection ; Cours de M2 (102 pages) (2002).

[A_{13}] A. Arabia. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches ; (octobre 2002).

[A_{14}] A. Arabia. Lissité rationnelle des variétés de représentations dun carquois ; (août 2003). C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **338** (2004) 267–270.

[A_{15}] A. Arabia. Affinité des schémas †-adiques de réduction affine ; *prépublication* (août 2005).

[A_{16}] A. Arabia. Produits fibrés dans la catégorie des schémas dag-adiques localement de type fini ; *prépublication* (juillet 2006).

[A_{17}] A. Arabia. Introduction à la cohomologie de de Rham p-adique ; "*Applications du théorème de Čech-Leray*". "*Complétion †-adique*". Notes supplémentaires du cours de M2 (2008, 2009).

[A_{18}] A. Arabia. Equivariant Poincaré Duality and Equivariant Gysin Morphism ; (2010). `(W3)/Gysin/Gysin-2010.pdf`

[A_{19}] A. Arabia. Un théorème des points fixes de Lefschetz p-adique pour les variétés ouvertes ; (2011). `(W3)/Lefschetz/Lefschetz-2011.pdf`

[A_{20}] A. Arabia. Espaces de configuration généralisés. Espaces topologiques i-acycliques. Suites spectrales basiques ; arXiv : 1609.00522, 195 pages (2016).

[AM_1] A. Arabia, Z. Mebkhout. Sur le Topos infinitésimal p-adique d'une variété algébrique non singulière I ; Avec Z. Mebkhout. À paraître dans Ann. Inst. Fourier 60 (2010), 194 pages.

[AM_2] A. Arabia, Z. Mebkhout. Sur le Topos infinitésimal p-adique d'une variété algébrique non singulière II ; Avec Zoghman Mebkhout. Soumis (novembre 2008).

[Art] M. Artin. On the solutions of analytique equations ; Invent. Math. **5** pp. 277–291 (1968).

[AS] M.F. Atiyah, G. Segal. "*Equivariant cohomology and localization*" ; Lecture notes, Warwick (1965).

[BS] R. Bédard, R. Schiffler. Rational smoothness of varieties of representations for quivers of type A ; Representation Theory **7**, 481-548 (2003).

[BV] N. Berline, M. Vergne. Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante ; C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 295 (1982), no. 9, 539–541. Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes ; Duke Math. J. 50 (1983), no. 2, 539–549. Fourier transforms of orbits of the coadjoint representation ; Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982), 53–67, Progr. Math., 40, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1983).

[BGG] I.N. Bernšteĭn, I.M. Gel'fand, S.I. Gel'fand. Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P ; Uspehi Mat. Nauk 28 (1973), no. 3(171), 3–26.

[Ber] P. Berthelot. "*Cohomologie cristalline des schémas de car. $p > 0$*" ; Lecture Notes in Mathematics **407**, Springer-Verlag (1974)

[B_0] A. Borel. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts ; Ann. of Math. (2) 57, 115–207 (1953).

[B_1] A. Borel. Sous-groupes commutatifs et torsion des groupes de Lie compacts connexes ; Tôhoku Math. J. (2) 13, 216–240 (1961).

[B-al] A. Borel & al. "*Seminar on transformation groups*" ; Annals of Mathematics Studies, No. 46 Princeton University Press, Princeton, N.J. (1960).

[BoMc$_1$] Borho, MacPherson. Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés nilpotentes ; C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292, no. 15, 707–710 (1981).

[Bri$_2$] M. Brion. Equivariant Chow groups for torus actions ; Birkhäuser. Transformation groups, Vol 2, n^{ro} 3, 1–43 (1997).

[Bri$_2$] M. Brion. Rational smoothness and fixed points of torus actions ; Transformation Groups **4**, 127–156 (1999).

[Br] J.-L. Brylinski. Equivariant intersection cohomology ; Kazhdan-Lusztig theory and related topics (Chicago, IL, 1989), 5–32, Contemp. Math., 139, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[Ch] T. Church.. Homological stability for configuration spaces of manifolds. ; Invent. Math. 188, no. 2, 465504 (2012).

[CF] T. Church, B. Farb.. Representation theory and homological stability. ; Adv. Math. 245, 250314 (2013).

[Crl] J.B. Carrell. The Bruhat graph of a Coxeter group, a conjecture of Deodhar, and rational smoothness of Schubert varieties ; Algebraic groups and their generalizations : classical methods. University Park, PA, (1991), 53–61. Proc. Sympos. Pure Math. **56**, Part 1 (1994).

[Crt] H. Cartan. Notions d'algèbre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie ; La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal ; Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, pp. 15–27 et 57–71. Georges Thone, Liège; Masson et Cie., Paris, 1951.

[CS] Ph. Caldéro, R. Schiffler. Rational smoothness of varieties of representations for quivers of Dynkin type ; Prépublication `http://arxiv.org/abs/math.RT/0305149.`

[Del] P. Deligne. La conjecture de Weil. I ; Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 43 (1974), 273–307.

[Dem$_1$] M. Demazure. Invariants symétriques entiers des groupes de Weyl et torsion ; Invent. Math. 21, 287–301, (1973).

[Dem$_2$] M. Demazure. Une nouvelle formule des caractères ; Bull. Sci. Math. (2) 98 (1974), no. 3, 163–172.

[Deo] V.V. Deodhar. Local Poincaré duality and nonsingularity of Schubert varieties ; Comm. Algebra 13, no. 6, 1379–1388, (1985).

[DH] J.J. Duistermaat, G.J. Heckman. On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space ; Invent. Math. 69 (1982), no. 2, 259–268. Addendum to: On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space ; Invent. Math. 72 (1983), no. 1, 153–158.

[Dw] B. Dwork. On the rationality of the zeta function of an algebraic variety ; Amer. J. Math. 82, 631–648 (1960).

[EGA$_1$] Grothendieck, Dieudonné. "*Éléments de géométrie algébrique-I*" ; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 166. Springer-Verlag (1971)

[E] R. Elkik. Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien ;
Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, quatrième série, tome 6, pp. 553–604 (1973).

[G$_1$] A. Grothendieck. Géométrie formelle et géométrie algébrique ; Séminaire Bourbaki, exposé **182** (Mai 1959).

[G$_2$] A. Grothendieck. Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L ; Séminaire Bourbaki, Vol. 9, Exp. No. 279 (1965), 41–55, Soc. Math. France, Paris, 1995.

[G$_3$] A. Grothendieck. Crystals and the de Rham cohomology of schemes ; Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas pp. 306–358 North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris (1968).

[Hrs] Harish-Chandra. Differential operators on a semisimple Lie algebra ; Amer. J. Math. 79, 87–120 (1957).

[Har] R. Hartshorne. "*Algebraic geometry*" ; Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1977).

[KM] N.M. Katz, W. Messing. Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields ; Invent. Math. 23 (1974), 73–77.

[KL] D. Kazhdan, G. Lusztig. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras ; Invent. Math. 53, no. 2, 165–184 (1979).

[KK$_1$] B. Kostant, S. Kumar. The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 83, no. 6, 1543–1545 (1986). The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G ; Adv. in Math. 62, no. 3, 187–237 (1986).

[KK$_2$] B. Kostant, S. Kumar. T-equivariant K-theory of generalized flag varieties ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 84, no. 13, 4351–4354 (1987). — J. Differential Geom. 32, no. 2, 549–603 (1990).

[Kle] S.L. Kleiman. Algebraic cycles and the Weil conjectures ; Dans "Dix esposés sur la cohomologie des schémas", pp. 359–386. North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, (1968).

[Kum] S. Kumar. A connexion of equivariant $\boldsymbol{K}$-theory with the singularity of Schubert varieties ; Prépublication (1986–87). The nil-Hecke ring and singularity of Schubert varieties ; In "Lie Theory and geometry (in honor of Bertram Kostant)". Progress in Math. **123**, Birkhäuser, 497–507 (1994). The nil-Hecke ring and singularity of Schubert varieties. ; Inventiones Mathematicae **123**, n$^{\text{ro}}$ 3, 471–506 (1996).

[LS] V. Lakshmibai, C.S. Seshadri. Singular locus of a Schubert variety ; Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 11, no. 2, 363–366 (1984).

[L$_1$] G. Lusztig. Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras ; J. Amer. Math. Soc. 3, 257–296 (1990).

[L$_2$] G. Lusztig. Canonical bases arising from quantized enveloping algebras ; J. Amer. Math. Soc. 3, 447–498 (1990).

[M1] I.G. Macdonald.. "*The Poincaré polynomial of a symmetric product.*" ; Proc. Cambridge Philos. Soc. 58, pp. 563568, (1962).

[Meb] Z. Mebkhout. Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière. ; Amer. J. Math. 119, no. 5, 1027–1081 (1997).

[M-N$_1$] Z. Mebkhout, L. Narvaez. Sur les coefficients de de Rham-Grothendieck des variétés algébriques ; In p-adic analysis (Trento 1989), Lecture Notes in Math. **1454**, pp. 267-309, (1990).

[M-N$_2$] Z. Mebkhout, L. Narvaez. La théorie du polynôme de Berstein-Sato pour les algébres de Tate et de Dwork-Monsky-Washnitzer ; Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **24**, 227-256, (1991).

[Mer] D. Meredith. Weak formal schemes ; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).

[Mil] J. Milnor. Construction of universal bundles. II ; Ann. of Math. (2) 63, 430–436 (1956).

[Mo$_1$] P. Monsky. Formal cohomology: III. Fixed point theorems ; Ann. of Math. (2) **93**, pp. 315–343 (1971).

[Mo$_2$] P. Monsky. One dimensional formal cohomology ; Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, pp. 451–456. Gauthier-Villars, Paris, (1971).

[MW$_0$] P. Monsky, G. Washnitzer. The construction of formal cohomology sheaves ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **52** 1511–1514 (1964).

[MW$_1$] P. Monsky, G. Washnitzer. Formal cohomology: I ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217 (1968).

[MW$_2$] P. Monsky, G. Washnitzer. Formal cohomology: II. The cohomology sequence of a pair ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 218–238 (1968).

[Ser] J.-P. Serre. Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique zéro ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **47**, pp. 108–109 (1961).

[SGA] "*Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*" ; Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61. Lecture Notes in Mathematics **224**. Springer-Verlag (1971).

[To] B. Totaro.. Configuration spaces of algebraic varieties. ; Topology 35(4), 10571067 (1996).

[Vig] M.-F. Vignéras. Induced R-representations of p-adic reductive groups ; Selecta Mathematica 4 (1998), pp. 549–623.

[vdP] M. van der Put. The cohomology of Monsky and Washnitzer ; Société Mathématique de France. Deuxième série, Mémoire n^{ro} 23, pp. 33–60 (1986).

arXiv:1807.05032v2 [math.RT] 17 Jul 2018

On the equivalence of two stability conditions of FB-modules

Alberto Arabia*

May 16, 2018

Abstract. We give a proof of the equivalence of two stability conditions in the work of Thomas Church and Benson Farb on FB-modules ([1]) : *representation stability* (RS) and *character polynomiality* (PC). While the implication (RS) $\Rightarrow$ (PC) is a simple consequence of the Frobenius character formula, the converse seems not to have been documented, which motivated this work.

An FB-module is a countable family $\mathcal{W} := \{W_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ of linear representations W_m of the symmetric groups $\mathcal{S}_m$, assumed, in these notes, to be finite dimensional over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$, hereafter called *an $\mathcal{S}_m$-module*.

• The FB-module $\mathcal{W}$ is said to be *representation stable* (RS in short), if there exists some $N \in \mathbb{N}$, such that, for all $m \geq N$, the decomposition in simple factors of W_m has the *stable* form :

$$W_m \sim \bigoplus\nolimits_\lambda V_{\lambda[m]}{}^{\boldsymbol{n}_\lambda} ,$$

where

- ▹ $\lambda := (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_\ell)$ is a partition verifying $|\lambda| + \lambda_1 \leq N$;
- ▹ $V_{\lambda[m]}$ is the simple $\mathcal{S}_m$-module associated with $\lambda[m] := (m-|\lambda| \geq \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_\ell)$;
- ▹ for $m \geq N$, the family of natural numbers $\{\boldsymbol{n}_\lambda\}_\lambda$ is *constant*.

The smallest such N is *the rank of* (RS) *of* $\mathcal{W}$, which we will denote by '$\mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{W})$'.

• The FB-module $\mathcal{W}$ is said to *have a polynomial character* (PC in short), if there exists $N \in \mathbb{N}$ and a polynomial $P_{\mathcal{W}} \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_N]$, such that, for all $m \geq N$ and all $g \in \mathcal{S}_m$, one has :

$$\chi_{W_m}(g) = P_{\mathcal{W}}(X_1(g), \ldots, X_N(g)) ,$$

where χ_{W_m} is the character of W_m, and $X_i(g)$ is the number of cycles of length i in the decomposition of g in $\mathcal{S}_m$ as a product of disjoint cycles. The polynomial $P_{\mathcal{W}}$, which is unique, is *the polynomial character of* $\mathcal{W}$. The smallest such N is *the rank of character polynomiality of* $\mathcal{W}$, it will be denoted by '$\mathrm{rank}_{\mathrm{PC}}(\mathcal{W})$'.

Regarding the equivalence of these conditions, we prove the following theorem.

Theorem (4.1.1). *Let $\mathcal{W}$ be an* FB*-module.*

a) $\mathrm{rank}_{\mathrm{PC}}(\mathcal{W}) \leq \mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{W})$.

b) *If $\mathcal{W}$ is* (PC) *and has polynomial character $P_{\mathcal{W}}$, then*

$$\mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{W}) \leq \max\{\mathrm{rank}_{\mathrm{PC}}(\mathcal{W}), 2\deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathcal{W}})\} ,$$

where $\deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathcal{W}})$ denotes the polynomial degree of $P_{\mathcal{W}}$, when stipulating that $\deg_{\boldsymbol{w}}(X_i) := i$.

* Université Paris-Diderot, IMJ-PRG, CNRS, Bâtiment Sophie Germain, bureau 608, Case 7012, 75205. Paris Cedex 13, France. Contact : alberto.arabia@imj-prg.fr.

Comments. (i) Theorem (2.3.4) exhibit FB-modules $\mathcal{W}$ with $\mathrm{rank}_{\mathrm{PC}}(\mathcal{W}) = 0$ and arbitrarily big $\mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{W})$. It also shows that the bounds in (4.1.1) are optimal. (ii) Beyond FB-modules, we also look at FI-modules $\mathcal{W}$, which are FB-modules with additional structure (1.2). There is a corresponding representation stability condition for FI-modules, its rank is denoted by $\mathrm{rank}^{\mathrm{FI}}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{W})$ (1.7.1). One has $\mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{W}) \leq \mathrm{rank}^{\mathrm{FI}}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{W})$, but there is no equivalence with (PC) stability, in particular thm. 4.1.1-(b) for FI-modules and $\mathrm{rank}^{\mathrm{FI}}_{\mathrm{RS}}$ is false.

An interesting by-product in this work is the fact that the *weight* $\boldsymbol{w}(W_m)$ of an $\mathcal{S}_m$-module W_m (see 1.5) coincides with the lowest possible degree $\deg_{\boldsymbol{w}}(P)$ of a polynomial P expressing the character χ_{W_m} (3.1.1). Moreover, if $\mathcal{W} := \{W_m\}$ is a (PC) FB-module, then $\deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathcal{W}}) = \boldsymbol{w}(W_m)$, for all $m \geq \mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{W})$. The next theorem follows from these observations.

Proposition 5.2.1-(b). *If $\mathcal{W}_1$ and $\mathcal{W}_2$ are* FB*-modules which are* $(\mathrm{PC})_{m\geq N}$*, then*

$$\boldsymbol{w}(W_{1,m} \otimes W_{2,m}) = \boldsymbol{w}(W_{1,m}) + \boldsymbol{w}(W_{2,m}),$$

for all $m \geq 2(\boldsymbol{w}(W_{1,m}) + \boldsymbol{w}(W_{2,m}))$. In particular,

$$\boldsymbol{w}((\mathcal{W}_1 \otimes \mathcal{W}_2)_{\geq N}) = \boldsymbol{w}((\mathcal{W}_1)_{\geq N}) + \boldsymbol{w}((\mathcal{W}_2)_{\geq N}),$$

where $(\mathcal{W})_{\geq N}$ denotes the truncation *of $\mathcal{W}$ that replaces W_n by 0 for all $n < N$.*

Contents

1 Preliminaries **3**
- 1.1 General notations . . . 3
- 1.2 The categories of FB and FI modules . . . 4
- 1.3 Projective FI-modules . . . 5
- 1.4 Young diagrams and Pieri's rule . . . 6
- 1.5 The *weight* of a representation and of an FB-module . . . 9
- 1.6 The FI-module $\mathcal{V}_\lambda$ . . . 10
- 1.7 Representation stability of FI and of FB modules . . . 10

2 Character polynomiality of FI-modules **12**
- 2.1 Character polynomiality . . . 12
- 2.2 Frobenius character formula . . . 14
- 2.3 Basic examples of character polynomiality of FI-modules . . . 16

3 Polynomial weight vs. Representation weight **21**
- 3.1 On the minimal polynomial weight of a character . . . 21

4 (PC) versus (RS) **24**
- 4.1 Equivalence of the stability conditions . . . 24

5 Addendum on the weight of a tensor product **25**
- 5.1 Reinterpretation of the weight of a representation . . . 25
- 5.2 On the weight of the tensor product of representations . . . 25

The first two sections are elementary. They introduce notations and well-known properties of FI and FB-modules, which advanced readers can skip.

1. Preliminaries

1.1. General notations

- Given a group G, we denote by G-mod the category of G-modules, *i.e.* of finite dimensional linear representations of G over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$.
- We denote by $\mathcal{S}_m$ the *symmetric group* defined over $[\![1, m]\!]$. Its elements are the bijections of the interval of natural numbers $[\![1, m]\!]$. For $n \leq m$, we write $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}_m$ for the inclusion which identifies a permutation g of $[\![1, n]\!]$ with its obvious extension to $[\![1, m]\!]$ that fixes all $i > n$.
- $\mathbb{Q}_m$ and $\epsilon\mathbb{Q}_m$ denote respectively the *trivial* and the *alternating or signature* $\mathbb{Q}$-linear representation of the group $\mathcal{S}_m$.
- $\mathcal{S}_a \boxtimes \mathcal{S}_b$ denotes the subgroup of $\mathcal{S}_{a+b}$ stabilizing the subset $[\![1, a]\!]$, or, equivalently, the subset $[\![a+1, a+b]\!]$. The subgroup $\mathbf{1}_a \boxtimes \mathcal{S}_b \subseteq \mathcal{S}_a \boxtimes \mathcal{S}_b$ is the *fixator* of $[\![1, a]\!]$, *i.e.* the set of permutations fixing every $i \leq a$.
- If W_a is an $\mathcal{S}_a$-module and W_b is an $\mathcal{S}_b$-module, we denote by $W_a \boxtimes W_b$ the tensor product $W_a \otimes_{\mathbb{Q}} W_b$ endowed with the $\mathcal{S}_a \boxtimes \mathcal{S}_b$-module structure defined by the componentwise action $(g_a, g_b)(w_a \otimes w_b) := g_a(w_a) \otimes g_b(w_b)$.
- A *partition* of $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ is any decreasing sequence of natural numbers $\lambda := (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_\ell > 0)$ such that $m = \sum_i \lambda_i$. It is also denoted as the m-tuple $(1^{\boldsymbol{n}_1}, 2^{\boldsymbol{n}_2}, \ldots, m^{\boldsymbol{n}_m})$ where $\boldsymbol{n}_k := \#\{i \mid \lambda_i = k\}$, so that $m = \sum_i i\, \boldsymbol{n}_i$. The notation $\lambda \vdash m$ says that λ is a partition of m, and $|\lambda|$ is used for the number partitioned by λ. The partition λ is *empty* if $|\lambda| = 0$.
- $\mathbb{Q}_{\mathrm{cl}}(\mathcal{S}_m)$ denotes the $\mathbb{Q}$-algebra of *class functions* of $\mathcal{S}_m$. These are the functions $f : \mathcal{S}_m \to \mathbb{Q}$ constant along the conjugacy classes of $\mathcal{S}_m$, *i.e.* such that $f(gxg^{-1}) = f(x)$, $\forall g, x \in \mathcal{S}_m$. The scalar product

$$\langle\!\langle\ _\ |\ _\ \rangle\!\rangle_{\mathcal{S}_m} : \mathbb{Q}_{\mathrm{cl}}(\mathcal{S}_m) \times \mathbb{Q}_{\mathrm{cl}}(\mathcal{S}_m) \to \mathbb{Q}$$

  is defined by

$$\langle\!\langle\, f_1 \mid f_2 \,\rangle\!\rangle_{\mathcal{S}_m} := \frac{1}{|\mathcal{S}_m|} \sum_{g \in \mathcal{S}_m} f_1(g)\, f_2(g^{-1})\,, \quad \forall f_1, f_2 \in \mathbb{Q}_{\mathrm{cl}}(\mathcal{S}_m)\,.$$

- If W_m is an $\mathcal{S}_m$-module, $\chi_{W_m} : \mathcal{S}_m \to \mathbb{Q}$ denotes its character. The *Schur's orthogonality relations* state that if V_1 and V_2 are *simple* $\mathcal{S}_m$-modules, then $\langle\!\langle\, \chi_{V_1} \mid \chi_{V_2} \,\rangle\!\rangle_{\mathcal{S}_m}$ is equal to 1 if V_1 is isomorphic to V_2, and to 0 otherwise.

Between here and the end of this preliminary section we recall concepts and terminology from the works of Church and Farb (*cf.* [1]).

1.2. The categories of FB and FI modules

- **FB** denotes the category of Finite sets and Bijections. An FB-*module* is, by definition, a *covariant* functor from the category FB to the category $\mathbf{Vec}_f(\mathbb{Q})$ of finite dimensional $\mathbb{Q}$-vector spaces and $\mathbb{Q}$-linear maps:

$$\mathcal{W} : \mathrm{FB} \rightsquigarrow \mathbf{Vec}_f(\mathbb{Q})\,.$$

To give an FB-module $\mathcal{W}$ is equivalent to giving the countable collection $\{W_m := \mathcal{W}([\![1,m]\!])\}_{m\in\mathbb{N}}$, where W_m is an $\mathcal{S}_m$-module. A morphism of FB-modules $f : \mathcal{W} \to \mathcal{Z}$ corresponds to a family $\{f_m : W_m \to Z_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ of morphisms of $\mathcal{S}_m$-modules. We have a canonical identification:

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{FB}}(\mathcal{W},\mathcal{Z}) = \prod\nolimits_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_m}(W_m, Z_m)$$

Notation. The category of FB-modules will be denoted by FB-mod. It is a semi-simple abelian category.

- **FI** denotes the category of Finite sets and Injections. An FI-*module* is a *covariant functor* from FI to $\mathbf{Vec}_f(\mathbb{Q})$:

$$\mathcal{W} : \mathrm{FI} \rightsquigarrow \mathbf{Vec}_f(\mathbb{Q})\,.$$

To give an FI-module is equivalent to giving

FI-1) an FB-module $\mathcal{W} := \{W_m\}_{m\in\mathbb{N}}$;

FI-2) for all $m \in \mathbb{N}$, an *interior* map $\phi(\mathcal{W})_m : W_m \to W_{m+1}$ (in short ϕ_m), which is $\mathbb{Q}$-linear and such that, for all $g \in \mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{S}_{m+1}$, one has

$$\phi_m(g\cdot w) = g\cdot\phi_m(w)\,.$$

FI-3) for all $n \geq m$, the image of $\phi_{n,m} := \phi_{n-1}\circ\cdots\circ\phi_m$ satisfies:

$$\phi_{n,m}(W_m) \subseteq (W_n)^{\mathbf{1}_m\boxtimes\mathcal{S}_{n-m}}\,.$$

Under this equivalence, a morphism of FI-modules $f : \mathcal{W} \to \mathcal{Z}$ is simply a morphism of FB-modules which is compatible with the interior maps ϕ_m, *i.e.* such that the diagrams

$$\begin{array}{ccc} W_m & \xrightarrow{\phi(\mathcal{W})_m} & W_{m+1} \\ {\scriptstyle f_m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{m+1}} \\ Z_m & \xrightarrow{\phi(\mathcal{Z})_m} & Z_{m+1} \end{array}$$

are commutative.

Notation. The category of FI-modules will be denoted by FI-mod. It is an abelian category, which is *not* semi-simple.

1.2.1. Comments

a) The category FB-mod is equivalent to the full subcategory of FI-mod of FI-modules whose interior maps are null. The *forgetful functor* associates to an FI-module $\mathcal{W} := \{\phi_m : W_m \to W_{m+1}\}$ the FB-module $\mathcal{W} := \{W_m\}$. It is an additive and exact functor which will be tacitly used.

b) More interesting, the subcategory FI-mod$'$ of FI-modules whose interior maps are *injective* and *(eventually) exhaustive*, *i.e.* such that the image $\phi_m(W_m)$ generates W_{m+1} as $\mathcal{S}_{m+1}$-module for large m. Among these, the FI-modules $\mathcal{V}_\lambda$'s which bind together the simple modules $V_{\lambda[m]}$ (1.6.1). We will see that FB-modules $\mathcal{W}$ which are (PC) or (RS) are asymptotically isomorphic to direct sums of $\mathcal{V}_\lambda$'s (4.1.2).

1.2.2. The truncations

([1]) The functor $(_)_{\geq \ell} : \text{FI-mod} \rightsquigarrow \text{FI-mod}$ that "*truncates*" an FI-module $\{W_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ by replacing by $\mathbf{0}$ its terms W_m for $m < \ell$, is an additive exact functor. The *cokernel* of the natural inclusion $(_)_{\geq \ell} \hookrightarrow \mathrm{id}_{\mathrm{FI}}$ is the truncation $(_)_{<\ell}$, it replaces by $\mathbf{0}$ the terms W_m for $m \geq \ell$. We thus have short exact sequences

$$\mathbf{0} \to (\mathcal{W})_{\geq \ell} \rightarrowtail \mathcal{W} \twoheadrightarrow (\mathcal{W})_{<\ell} \to \mathbf{0}\,,$$

which are natural with respect to $\mathcal{W}$. The full subcategory FI-mod$_{\geq \ell}$ of FI-modules $\mathcal{W}$ such that the inclusion $\mathcal{W}_{\geq \ell} \rightarrowtail \mathcal{W}$ is an isomorphism is an abelian subcategory, and similarly for the full subcategory FI-mod$_{<\ell}$ of FI-modules $\mathcal{W}$ such that the quotient $\mathcal{W} \twoheadrightarrow \mathcal{W}_{<\ell}$ is an isomorphism. One has,

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{FI}}\left(\text{FI-mod}_{\geq \ell}, \text{FI-mod}_{\leq \ell}\right) = 0\,, \quad \forall i > 0\,.$$

The intersection FI-mod$_{\geq \ell} \cap$ FI-mod$_{\leq \ell}$ is the (semi-simple) category $\mathcal{S}_\ell$-mod.

1.3. Projective FI-modules

An obvious way to construct FI-modules of the type described in 1.2.1-(b) is to start with à representation W_n of some $\mathcal{S}_n$, and then set, for all $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(W_n)_m := \begin{cases} \mathbf{0}\,, & \text{if } m < n, \\ \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_n \boxtimes \mathcal{S}_{m-n}}^{\mathcal{S}_m} \left(W_n \boxtimes \mathbb{Q}_{m-n}\right), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For each $m \geq n$, the composition of the following natural maps ι_m and κ_{m+1}:

$$\begin{array}{ccc} W_n \boxtimes \mathbb{Q}_{m-n} & \xhookrightarrow{\ \iota_m\ } & W_n \boxtimes \mathbb{Q}_{m+1-n} \\ & \searrow^{\psi_m} & \downarrow \kappa_{m+1} \\ & & \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_n \boxtimes \mathcal{S}_{m+1-n}}^{\mathcal{S}_{m+1}} \left(W_n \boxtimes \mathbb{Q}_{m+1-n}\right) \end{array}$$

[1] This truncations are frequently called *stupid* or *brutal*.

gives the map ψ_m whose image is invariant under $(\mathbf{1}_n \boxtimes \mathcal{S}_{m+1-n})$. In particular, ψ_m is $(\mathcal{S}_n \boxtimes \mathcal{S}_{m-n})$-linear, inducing thus the map

$$\phi_m := \mathrm{ind}(\psi_m) : \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_n \boxtimes \mathcal{S}_{m-n}}^{\mathcal{S}_m} \left(W_n \boxtimes \mathbb{Q}_{m-n}\right) \to \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_n \boxtimes \mathcal{S}_{m+1-n}}^{\mathcal{S}_{m+1}} \left(W_n \boxtimes \mathbb{Q}_{m+1-n}\right),$$

which satisfies the requirements making the family

$$\mathcal{P}(W_m) := \{\phi_m : \mathcal{P}(W_n)_m \to \mathcal{P}(W_n)_{m+1}\}_{m \in \mathbb{N}},$$

an FI-module.

All the previous constructions are natural on the category of $\mathcal{S}_n$-modules. As a consequence, we have defined a functor

$$\mathcal{P} : \mathcal{S}_n\text{-mod} \rightsquigarrow \text{FI-mod},$$

which is clearly additive and exact.

1.3.1. Proposition. *Let W_n be a representation of $\mathcal{S}_n$.*

a) *The interior maps of $\mathcal{P}(W_n)$ are injective. They are exhaustive $\forall m \geq n$.*

b) *There is a natural identification of functors*

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{FI}}(\mathcal{P}(W_n), _) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_n}(W_n, (_)_n).$$

c) *The* FI*-module $\mathcal{P}(W_n)$ is a projective* FI*-module, which moreover is simple projective if and only if W_n is a simple $\mathcal{S}_n$-module. All simple projective* FI*-modules are of this form.*

d) *The category* FI-mod *has enough projective objects.*

Proof. Left to the reader. □

1.4. Young diagrams and Pieri's rule

We recall the re-parametrization of irreducible representations of the symmetric groups due to Church and Farb.

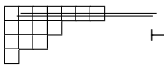
1.4.1. The *socle* and the *weight* of a partition

Let $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell > 0)$ be a non-empty partition of $m := \sum_i \lambda_i$.

- The *socle* of λ is the sub-partition $\underline{\lambda} := (\lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_\ell)$.
- The *weight* of λ is the number $\boldsymbol{w}(\lambda) := |\underline{\lambda}| = \lambda_2 + \cdots + \lambda_\ell$.

Notice that the map $\lambda \mapsto \underline{\lambda}$ is injective from the set of partitions of $m \in \mathbb{N}$, so that it amounts the same, giving $(\lambda \vdash m)$ or giving $(m, \underline{\lambda})$ with $m \geq |\underline{\lambda}| + \underline{\lambda}_1$.

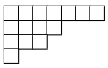
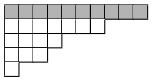
In terms of Young diagrams, in order to get the socle $\underline{\lambda}$ of λ, one simply erases the first row of λ. The picture is thus :

$\lambda :=$  $\mapsto \quad \underline{\lambda} :=$  .

Conversely, given $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_\ell)$ and any $m \geq |\lambda| + \lambda_1$, Church and Farb introduce the notation

$$\boxed{\lambda[m] := (m - |\lambda| \geq \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_\ell)}$$

which, in terms of Young diagrams, corresponds to adding a first row with as many boxes as is necessary to raise the total number of boxes from $|\lambda|$ to m.

$\lambda :=$  $\quad \mapsto \quad \lambda[m] :=$  .

Notice the following obvious notational facts :

$$\lambda[m] \vdash m\,, \quad \underline{\lambda[m]} = \lambda\,, \quad \lambda = \underline{\lambda}[\,|\lambda|\,]\,.$$

1.4.2. Irreducible representations of the symmetric groups

The irreducible representations of $\mathcal{S}_m$ are parametrized by the partitions $\nu \vdash n$. The simple $\mathcal{S}_m$-module associated with ν is classically denoted by V_ν. The following proposition recalls a fundamental fact about the representations of the symmetric groups (see [2], chap. 4, thm. 4.3, pp. 46–).

1.4.3. Proposition. *The irreducible representations of the symmetric groups over a field k of characteristic zero are defined over the field of rational numbers. If W_m is a $k[\mathcal{S}_n]$-module of finite dimension, the values of the character*

$$\chi_{W_m} : \mathcal{S}_m \to k\,, \quad g \mapsto \mathrm{tr}(g : W_m \to W_m)\,,$$

belong to the ring of integers $\mathbb{Z} \subseteq k$.

Hint. Because W_m is defined over $\mathbb{Q}$, the trace of $g \in \mathcal{S}_m$ belongs a priori to $\mathbb{Q}$, and because the trace is the sum of the eigenvalues, which are roots of unity, it is also an algebraic integer. It is therefore an integer. □

1.4.4. Pieri's rule

Pieri's rule ([2]) gives the irreducible factors of the terms $\mathcal{P}(V_\nu)_m$, for any given partition $\nu \vdash n \leq m$. The rule says that in the decomposition

$$\mathcal{P}(V_\nu)_m := \mathrm{ind}_{\mathfrak{S}_n \boxtimes \mathfrak{S}_{m-n}}^{\mathfrak{S}_m} \left(V_\nu \boxtimes \mathbb{Q}_{m-n} \right) = \bigoplus\nolimits_{\mu \vdash m} V_\mu^{\,\mathbf{n}_\nu(\mu)} \,, \tag{1}$$

the nonzero multiplicities $\boldsymbol{n}_\nu(\mu)$ are all equal to 1, and the corresponding partitions μ are those obtained from ν by adding $(m-n)$ boxes in *different* columns. For example, if $\nu := (3,2,2)$ and $m \in \{8,9,10,11\}$, we have

$\mathrm{ind}_{\mathfrak{S}_7 \boxtimes \mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{S}_8} V_{\ydiagram{3,2,2}} = V_{\ydiagram{4,2,2}} \oplus V_{\ydiagram{3,3,2}} \oplus V_{\ydiagram{3,2,2,1}}$

$\mathrm{ind}_{\mathfrak{S}_7 \boxtimes \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_9} V_{\ydiagram{3,2,2}} = V_{\ydiagram{4,3,2}} \oplus V_{\ydiagram{4,2,2,1}} \oplus V_{\ydiagram{3,3,2,1}} \oplus V_{\ydiagram{3,3,3}} \oplus V_{\ydiagram{3,2,2,2}}$

$\mathrm{ind}_{\mathfrak{S}_7 \boxtimes \mathfrak{S}_3}^{\mathfrak{S}_{10}} V_{\ydiagram{3,2,2}} = V_{\ydiagram{5,3,2}} \oplus V_{\ydiagram{4,3,2,1}} \oplus V_{\ydiagram{4,2,2,2}} \oplus V_{\ydiagram{3,3,3,1}} \oplus V_{\ydiagram{3,3,2,2}} \oplus V_{\ydiagram{3,2,2,2,1}}$

$\mathrm{ind}_{\mathfrak{S}_7 \boxtimes \mathfrak{S}_4}^{\mathfrak{S}_{11}} V_{\ydiagram{3,2,2}} = V_{\ydiagram{5,3,3}} \oplus V_{\ydiagram{5,3,2,1}} \oplus V_{\ydiagram{4,3,3,1}} \oplus V_{\ydiagram{4,3,2,2}} \oplus V_{\ydiagram{4,2,2,2,1}} \oplus V_{\ydiagram{3,3,3,2}}$

where, after a key observation of Church and Farb, for $m \geq |\nu| + \nu_1 (\,= 10$ in this example), the set of socles of the Young diagrams appearing in the decomposition (1) is constant. The following lemma obviously follows.

1.4.5. Lemma. *Let $\nu \vdash n > 0$.*

a) *For all $\mu \vdash m \geq n$, such that $\mathbf{n}_\nu(\mu) \neq 0$, the weight of μ verifies*

$$|\underline{\nu}| = \boldsymbol{w}(\nu) \leq \boldsymbol{w}(\mu) \leq |\nu| \,,$$

and
$$\begin{cases} \boldsymbol{w}(\mu) = \boldsymbol{w}(\nu) & \Longleftrightarrow \quad \mu = \underline{\nu}[m] \\ \boldsymbol{w}(\mu) = |\nu| & \Longleftrightarrow \quad \big(m \geq |\nu| + \nu_1\big) \;\&\; \big(\mu = \nu[m]\big) \,. \end{cases}$$

b) *Let $m_0 = |\nu| + \nu_1$ and let $\mathcal{P}_\nu$ be a set of partitions μ such that*

$$\mathrm{ind}_{\mathfrak{S}_n \boxtimes \mathfrak{S}_{m_0-n}}^{\mathfrak{S}_{m_0}} \left(V_\nu \boxtimes \mathbb{Q}_{m_0-n}) \right) = \bigoplus\nolimits_{\mu \in \mathcal{P}_\nu} V_{\mu[m_0]} \,.$$

Then, $\nu[m_0] \in \mathcal{P}_\nu$ and $\nu[m_0]_1 = \nu[m_0]_2$.

For all $m > m_0$, we have

$$\mathrm{ind}_{\mathfrak{S}_n \boxtimes \mathfrak{S}_{m-n}}^{\mathfrak{S}_m} \left(V_\nu \boxtimes \mathbb{Q}_{m-n}) \right) = \bigoplus\nolimits_{\mu \in \mathcal{P}_\nu} V_{\mu[m]} \,.$$

and, for all $\mu \in \mathcal{P}_\nu$, $\mu[m_0]_1 > \mu[m_0]_2$.

[2] For a thorough introduction to these rules, read §4.3, p. 54–62, and also Appendix A on the *Littlewood-Richardson rules*, p. 451, both in Fulton-Harris' book [2].

1.5. The *weight* of a representation and of an FB-module

The definition of *weight*, is extended from partitions (1.4.1) to representations and, more generally, to FB-modules.

- The *weight of an $\mathcal{S}_m$-module* W_m is the upper bound of the weights of the partitions associated with its irreducible factors, *i.e.* if

$$W_m \sim \bigoplus\nolimits_{\mu\vdash m} V_\tau^{\mathbf{n}_\mu}\,,$$

then

$$\boldsymbol{w}(W_m) := \sup\left\{\boldsymbol{w}(\mu) \;\middle|\; \mathbf{n}_\mu \neq 0\right\}.$$

For example, as a consequence of lemma 1.4.5-(a), we have

$$\begin{cases} |\underline{\nu}| = \boldsymbol{w}(\nu) \leq \boldsymbol{w}(\mathcal{P}(V_\nu))_m \leq |\nu|\,, & \forall m \geq |\nu|\,, \text{ and} \\ \boldsymbol{w}(\mathcal{P}(V_\nu))_m = |\nu|\,, & \forall m \geq |\nu| + \nu_1\,. \end{cases} \qquad (*)$$

- The *weight of an* FB*-module* $\mathcal{W} := (W_m)$ is the upper-bound of the weights of its terms, *i.e.*

$$\boldsymbol{w}(\mathcal{W}) := \sup\left\{\boldsymbol{w}(W_m)\right\}_{m\in\mathbb{N}}.$$

- The *weight at infinity of an* FB*-module* $\mathcal{W} := (W_m)$ is

$$\boldsymbol{w}_\infty(\mathcal{W}) := \lim_{N\mapsto+\infty} \boldsymbol{w}(\mathcal{W}_{\geq N})\,.$$

–It is easy to see that $\boldsymbol{w}_\infty(\mathcal{W}) = \boldsymbol{w}(\mathcal{W}_{\geq N})$, for some $N \gg 0$.
–We have $\boldsymbol{w}(\mathcal{P}(V_\lambda)) = \boldsymbol{w}_\infty(\mathcal{P}(V_\lambda)) = |\lambda|\,.$

1.5.1. The *weight* truncations

Let $p \in \mathbb{N}$. Given an $\mathcal{S}_m$-module W_m, denote by $(W_m)_{\boldsymbol{w}>p}$ the sum of the irreducible factors of W_m of weight $> p$.

- By Pieri's rule 1.4.5-(a), if $\mathcal{W} := \{\phi_m : W_m \to W_{m+1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ is an FI-module, one has $\phi_m\big((W_m)_{\boldsymbol{w}>p}\big) \subseteq \big((W_{m+1})_{\boldsymbol{w}>p}\big)$, in which case, the family

$$\mathcal{W}_{\boldsymbol{w}>p} := \left\{\phi_m(W_m)_{\boldsymbol{w}>p} \to (W_m)_{\boldsymbol{w}>p}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$$

is a sub-FI-module of $\mathcal{W}$.

- Let $\mathcal{W}_{\boldsymbol{w}\leq p} := \mathcal{W}/\mathcal{W}_{\boldsymbol{w}>p}$. The short exact sequence

$$\mathbf{0} \to \mathcal{W}_{\boldsymbol{w}>p} \to \mathcal{W} \to \mathcal{W}_{\boldsymbol{w}\leq p} \to \mathbf{0}$$

is natural with respect to $\mathcal{W}$.

1.5.2. Remark. The following are easy consequences of the definitions.

a) The full subcategory FI-mod$_{\boldsymbol{w}>p}$ of FI-modules $\mathcal{W}$ such that the inclusion $\mathcal{W}_{\boldsymbol{w}>p} \rightarrowtail \mathcal{W}$ is an isomorphism is an abelian subcategory.
b) The full subcategory FI-mod$_{\boldsymbol{w}\leq p}$ of FI-modules $\mathcal{W}$ such that the quotient $\mathcal{W} \twoheadrightarrow \mathcal{W}_{\boldsymbol{w}\leq p}$ is an isomorphism is an abelian subcategory.
c) $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{FI}}\left(\text{FI-mod}_{\boldsymbol{w}>p}, \text{FI-mod}_{\boldsymbol{w}\leq p}\right) = 0$, for all $i \in \mathbb{N}$.

1.6. The FI-module $\mathcal{V}_{\boldsymbol{\lambda}}$

Given a partition λ, consider the projective FI-module $\mathcal{P}(V_\lambda)$ of 1.3. Lemma 1.4.5-(a) says that for all $m \geq |\lambda|$ the smallest weight of the irreducible components of $\mathcal{P}(V_\lambda)_m$ is exactly $|\underline{\lambda}|$ $(= \boldsymbol{w}(\lambda))$, which is the weight of a unique factor : the simple $\mathcal{S}_m$-module $V_{\underline{\lambda}[m]}$ with multiplicity 1. The following proposition results from this simple observation and the weight filtration 1.5.1.

1.6.1. Proposition. *Let λ be a nonempty partition.*

a) *The terms of the quotient* FI*-module*

$$\mathcal{V}_\lambda := \mathcal{P}(V_\lambda)_{\boldsymbol{w}\leq \boldsymbol{w}(\lambda)} = \left\{\phi_m : \mathcal{V}_{\lambda,m} \to \mathcal{V}_{\lambda,m+1}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$$

are

$$\mathcal{V}_{\lambda,m} = \begin{cases} \mathbf{0} \ , & \text{for all } m < |\lambda|, \\ V_{\underline{\lambda}[m]} \ , & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The interior maps ϕ_m are injective, and are exhaustive for $m \geq |\lambda|$.

b) *If $\mathcal{V}'_\lambda := \{\phi'_m : \mathcal{V}_{\lambda,m} \to \mathcal{V}_{\lambda,m+1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ is an* FI*-module such that ϕ'_m is injective and is exhaustive for all $m \geq N$, then $(\mathcal{V}'_\lambda)_{\geq N}$ and $(\mathcal{V}_\lambda)_{\geq N}$ (*cf. *1.2.2) are isomorphic* FI*-modules for $m \geq N$.*

1.7. Representation stability of FI and of FB modules

1.7.1. Representation stable FI-modules

An FI-module $\mathcal{W} = \{\phi_m : W_m \to W_{m+1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ is said to be *representation stable for $m \geq N$*, in short $(\mathrm{RS})_{m\geq N}$, if the following conditions are satisfied.

RS-1) The interior maps ϕ_m are injective, and are exhaustive for $m \geq N$.
RS-2) For all $m \geq N$, we have a stable decomposition in simple modules

$$W_m \sim \bigoplus\nolimits_{|\lambda|\leq N} V_{\underline{\lambda}[m]}{}^{\boldsymbol{n}_{\underline{\lambda}}},$$

where the $\boldsymbol{n}_\lambda$ are independent of $m \geq N$.

We denote by $\mathrm{rank}^{\mathrm{FI}}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{W})$, the smallest such N, and we call it the *rank of representation stability of $\mathcal{W}$*.

1.7.2. Examples

a) $\mathcal{P}(V_\lambda)$ is $(\mathrm{RS})_{m\geq|\lambda|+\lambda_1}$, (lemma 1.4.5-(b)).
b) $\mathcal{P}(W_n)$ $(\mathrm{RS})_{m\geq 2n}$, (consequence of lemma 1.4.5-(b)).
c) $\mathcal{V}_\lambda$ is $(\mathrm{RS})_{m\geq|\lambda|}$, (by definition).

1.7.3. Representation stable FB-modules

An FB-module $\mathcal{W}=\{W_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ is said to be *representation stable for* $m\geq N$, in short $(\mathrm{RS})_{m\geq N}$, if the previous condition (RS-2) is satisfied.

In that case, we say that $\mathcal{W}$ and $\bigoplus_{\lambda\in P}\mathcal{V}_\lambda^{\boldsymbol{n}_\lambda}$ are *asymptotically isomorphic as* FB-*modules*, and we may write

$$\mathcal{W}_{\geq N}\sim\bigoplus\nolimits_{|\lambda|\leq N}(\mathcal{V}_\lambda)^{\boldsymbol{n}_\lambda}_{\geq N} \tag{2}$$

We denote by $\mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{W})$, the smallest such N, and we call it the *rank of representation stability of* $\mathcal{W}$.

Warning. For an FI-module the stability rank *as* FB-*module* is, a priori, smaller than the stability rank as FI-module. It is very easy to construct examples where it is strictly smaller, for example take any (RS) FI-module and replace all its interior maps by the zero map.

1.7.4. Proposition

a) $$\mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{P}(V_\lambda))=\mathrm{rank}^{\mathrm{FI}}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{P}(V_\lambda))=|\lambda|+\lambda_1.$$
b) *If the trivial representation* $\mathbb{Q}_n$ *is contained in* W_n*, then*
$$\mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{P}(W_n))=\mathrm{rank}^{\mathrm{FI}}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{P}(W_n))=2n\,.$$
c) $$\mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{V}_\lambda)=\mathrm{rank}^{\mathrm{FI}}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{V}_\lambda)=|\lambda|.$$
d) *If* $\mathcal{W}$ *is an* FB-*module such that* $\mathcal{Z}\subseteq\mathcal{W}$*, where* $\mathcal{Z}$ *is any of the* FI-*modules in the previous claims, then*
$$\mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{W})\geq\mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{Z})\,.$$

Proof. In (c) there is nothing to be proved. Let us denote by $\mathcal{Z}$ any of the other two FI-modules in the claims. We already gave the values of $\mathrm{rank}^{\mathrm{FI}}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{Z})$ in 1.7.2. Next, because $\mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{Z})\leq\mathrm{rank}^{\mathrm{FI}}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{Z})$, the equality will follow if we show that for $m=\mathrm{rank}^{\mathrm{FI}}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{Z})$ the $\mathcal{S}_m$-module Z_m contains an irreducible

factor corresponding to a Young diagram having its two first lines of equal lengths :

$$V_{\ydiagram{8,8,1}} \subseteq Z_m \qquad (\diamond)$$

Indeed, if $\mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{Z}) < m$, we would have

$$Z_m \sim \bigoplus_{|\lambda|<m} V_{\underline{\lambda}[m]}{}^{\mathbf{n}_\lambda}\,, \qquad (*)$$

and the length of the first line of the Young diagram $\underline{\lambda}[m]$ in $(*)$, would be strictly greater than that of the others, *i.e.* $\underline{\lambda}[m]_1 > \underline{\lambda}[m]_2$, which is contrary to our assumption (*cf.* 1.4.5-(b)).

Let us check $(\diamond)$ in our cases. In (a) this results by Pieri's rule because $m = |\lambda| + \lambda_1$ is the smallest m such that λ is the socle of a diagram $\mu \vdash m$, which means that $\mu_1 = \mu_2$. In (b) the Young diagram corresponding to the trivial module $\mathbb{Q}_n$ has only one line with n boxes, and $\mathcal{P}(\mathbb{Q}_n)_{2n}$ verifies $(\diamond)$ for $m = 2n$.

(c) W_m contains some irreducible $\mathfrak{S}_m$-module of the form $(\diamond)$. □

2. Character polynomiality of FI-modules

2.1. Character polynomiality

Let $\mathbb{Q}_{\mathrm{cl}}(\mathfrak{S}_m)$ denote the algebra of *rational class functions* on $\mathfrak{S}_m$, *i.e.* functions $f : \mathfrak{S}_m \to \mathbb{Q}$ which are constant on each conjugacy class of $\mathfrak{S}_m$. Denote by $\mathbb{Q}[\overline{X}]$ the ring of polynomials with rational coefficients and countably many variables $X_1, X_2, \ldots,$ endowed with the grading '$\deg_{\boldsymbol{w}}$' that stipulates that :

$$\deg_{\boldsymbol{w}}(X_i) := i\,.$$

2.1.1.The *weight* of a polynomial. To avoid confusion in the sequel with the usual degree $\deg(P)$ of a polynomial $P \in \mathbb{Q}[\overline{X}]$ which stipulates that $\deg(X_i) = 1$, we will call $\deg_{\boldsymbol{w}}(P)$ the *weight* of P.

2.1.2. Proposition. *Denote by $X_{m,i} : \mathfrak{S}_m \to \mathbb{N}$ the class function which assigns to $g \in \mathfrak{S}_m$, the number $X_{m,i}(g)$ of i-cycles in the decomposition of g as product of disjoint cycles in $\mathfrak{S}_m$.*

a) *The map*

$$\begin{aligned} \rho_m : \mathbb{Q}[\overline{X}] &\longrightarrow \mathbb{Q}_{\mathrm{cl}}(\mathfrak{S}_m) \\ X_i &\longmapsto (g \mapsto X_{m,i}(g)) \end{aligned} \qquad (3)$$

is an homomorphism of algebras whose kernel contains the polynomials

$$\big(X_1 + 2X_2 + \cdots + mX_m - m\big) \quad \textit{and} \quad \big(X_i(X_i-1)\cdots\big(X_i - \lfloor m/i \rfloor\big)\big)\,. \qquad (4)$$

The restriction

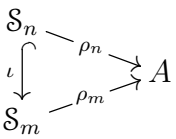
$$\rho_m : \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_{m-1}] \twoheadrightarrow \mathbb{Q}_{\mathrm{cl}}(\mathfrak{S}_m)$$

is surjective. In particular, the characters of $\mathfrak{S}_m$ *are represented by polynomials with rational coefficients and variables* $X_1, \dots, X_{m-1}$.

b) *For* $n \leq m$ *and* $g \in \mathfrak{S}_n$, *we have*

(i) $\rho_m(X_1)(\iota g) = \rho_n(X_1)(g) + (m-n)\,,$

(ii) $\rho_m(X_i)(\iota g) = \rho_n(X_i)(g)\,,\ \forall i > 1\,.$



Hint. (a) That the polynomials (4) belong to $\ker(\rho_m)$ is clear. Next, to see that ρ_m is surjective, we need only show that the characteristic function of a conjugacy class of $\mathfrak{S}_m$ can be realized as a polynomial in $X_1, \dots, X_m$.
For $k \in [\![1, m]\!]$, let $R_k(Z) := Z(Z-1)\cdots\widehat{(Z-k)}\cdots(Z-m)$ and consider

$$D_k(Z) := R_k(Z)/R_k(k) \in \mathbb{Q}[Z]\,.$$

This polynomial has the property that

$$\rho_m(D_k(X_i)(g) = \begin{cases} 1\,, & \text{if } X_i(g) = k\,, \\ 0\,, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

So that, if $\sum_i i\,\boldsymbol{n}_i = m$, we get

$$\rho_m(D_{\boldsymbol{n}_1}(X_1)D_{\boldsymbol{n}_2}(X_2)\cdots D_{\boldsymbol{n}_m}(X_m))(g) = \begin{cases} 1\,, & \text{if } g \text{ is of type } (1^{\boldsymbol{n}_1}, \dots, m^{\boldsymbol{n}_m}) \\ 0\,, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(b) is clear. □

2.1.3. Convention. *In order to alleviate notations, we will write* $X_i(g)$ *for* $X_{m,i}(g)$ *despite the possible ambiguity in '*$X_1(g)$*' (cf.* 2.1.2-(b-i)).

2.1.4. Definition. An FB-module $\mathcal{W} := \{W_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ is said to have a *polynomial character for* $m \geq N$, in short $(\mathrm{PC})_{m\geq N}$, if there exists a polynomial $P_{\mathcal{W}} \in \mathbb{Q}[\overline{X}]$ such that

$$\chi_{W_m} = \rho_m(P_{\mathcal{W}})\,, \quad \forall m \geq N\,.$$

We denote by $\mathrm{rank}_{\mathrm{PC}}(\mathcal{W})$, the smallest such N, and we call it the *rank of character polynomiality of* $\mathcal{W}$.

2.1.5. Proposition and definition. *The polynomial* $P_{\mathcal{W}}$ *that asymptotically represents the characters of the terms* W_m *of an* FB*-module* $\mathcal{W} := \{W_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *is unique, it is called the* polynomial character of the FB-module $\mathcal{W}$.

Proof. If $P'_{\mathcal{W}}$ were another polynomial representing χ_{W_m} for $m \ggg 0$, the difference $Q := P_{\mathcal{W}} - P'_{\mathcal{W}}$, that we may assume to belong to $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_N]$, would be a polynomial representing the zero class function for all $m \ggg N$.

If Q is not the null polynomial, we can write it as a polynomial in X_N with coefficients Q_i in $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_{N-1}]$:

$$Q = Q_0 + Q_1 X_N + Q_2 X_N^2 + \cdots + Q_r X_N^r \,, \text{ and } Q_r \neq 0. \qquad (*)$$

Now, for any family $\bar{a} := \{a_1, \ldots, a_{N-1}\} \subseteq \mathbb{N}$, and any $i \in \mathbb{N}$, it is easy to find $m_i \ggg N$ and $g_i \in \mathcal{S}_{m_i}$ such that $X_1(g_i) = a_1$, $\ldots$, $X_{N-1}(g_i) = a_{N-1}$ and $X_N(g_i) > i$. In that case, the polynomial in one variable $Q(\bar{a}, X_N)$ has infinitely many roots and is, therefore, the null polynomial. In particular, in the decomposition $(*)$, we would have $Q_r(\bar{a}) = 0$ for all choices of $\bar{a}$, but this implies that Q_r is the null polynomial in $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_{N-1}]$, contrary to its definition. The polynomial Q must therefore be the null polynomial. □

2.2. Frobenius character formula

Given a partition $\lambda := (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_\ell) \vdash m$, the celebrated Frobenius formula computes the character χ_{V_λ} of the simple $\mathcal{S}_m$-module V_λ. The important point for us about this formula is that it gives an expression of χ_{V_λ} as a polynomial *depending only on the socle* $\underline{\lambda}$ of λ. Consequently, the same polynomial expresses the characters of all the terms of the FI-module $\mathcal{V}_\lambda = \{V_{\lambda,m}\}_m$, for $m \geq |\lambda|$, which self-explains the property of character polynomiality of $\mathcal{V}_\lambda$.

2.2.1. Frobenius polynomial for χ_{V_λ}

Following Macdonald in his book [3] (ex. I.7.14, p. 122), let $y := \{y_1, \ldots, y_\ell\}$ be a set of ℓ variables, where $\ell := \ell(\lambda)$. The *discriminant of* y is the antisymmetric homogeneous polynomial

$$\Delta(y) := \prod\nolimits_{i<j} (y_i - y_j) \,.$$

For $d \in \mathbb{N}$, the *d-power sum of* y is the symmetric homogeneous polynomial

$$P_d(y) := y_1^d + \cdots + y_\ell^d \,.$$

The value $\chi_{V_\lambda}(g)$ for $g \in \mathcal{S}_m$, is the coefficient of the monomial

$$y_1^{\lambda_1+(\ell-1)} y_2^{\lambda_2+(\ell-2)} y_3^{\lambda_3+(\ell-3)} \cdots y_\ell^{\lambda_\ell} \,,$$

in the development of the product

$$\Delta(y) \left(\prod\nolimits_{d \geq 1} P_d(y)^{X_d(g)} \right). \qquad (5)$$

This coefficient, denoted by $\mathbf{X}_\lambda$, is a polynomial in $\mathbb{Q}[\overline{X}]$, we call it *the Frobenius polynomial for* χ_{V_λ}.

2.2.2. Proposition. *The Frobenius polynomial* $\mathbf{X}_\lambda$ *for* χ_{V_λ} *depends only on the socle* $\underline{\lambda}$ *of* λ*, and belongs to the ring* $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_{\lambda_2+\ell-2}]$*. Its weight is:*

$$\deg_{\boldsymbol{w}}(\mathbf{X}_\lambda) = \boldsymbol{w}(\lambda)\,.$$

The characters of $\mathcal{S}_m$ *can be represented by polynomials in* $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_{m-1}]$ *of weights* $\leq m-1$*.*

Proof. Because the polynomial (5) is homogeneous, we can make $y_1 = 1$ without loosing information. In that case, $\chi_{V_\lambda}(g)$ is the coefficient in

$$y_2^{\lambda_2+(\ell-2)} y_3^{\lambda_3+(\ell-3)} \cdots y_\ell^{\lambda_\ell}\,,$$

after the development of the product

$$\Delta(\tilde{y}) \left(\prod\nolimits_{j>1} (1 - y_j) \right) \left(\prod\nolimits_{d\geq 1} (1 + P_d(\tilde{y}))^{X_d(g)} \right) \qquad (\ddagger\ddagger)$$

where $\tilde{y} := \{y_2, \dots, y_\ell\}$. But, in this product the first factor $\Delta(\tilde{y})$ is already homogeneous of total degree $(\ell-2) + (\ell-3) + \cdots$, so that we must seek, in the development of the remaining factors, terms whose total degree is bounded by $|\underline{\lambda}| = \lambda_2 + \cdots + \lambda_\ell$. But then, since we have

$$\big(1 + P_d\big)^{X_d} = 1 + \quad \binom{X_d}{1} P_d + \quad \binom{X_d}{2} P_d^2 + \quad \binom{X_d}{3} P_d^3 + \cdots$$

and because $\deg_{\mathrm{tot}}(P_d^a) = ad$, we conclude that

- If $d > \lambda_2 + \ell - 2$, the factor $\big(1 + P_d\big)^{X_d}$ contributes only to χ_{V_λ} with its term 1^{X_d}, so can be ignored. The product symbol $\prod_{d\geq 1}$ in $(\ddagger\ddagger)$ can therefore be replaced by $\prod_{d=1}^{\lambda_2+\ell-2}$.
- The coefficient $\binom{X_d}{j}$ is a polynomial of degree j in X_d and appears attached to monomials in $\tilde{y}$ of total degree jd. We can thus infer that, after development, the expression of χ_{V_λ} is a polynomial in $X_1, \dots, X_{\lambda_2+\ell-2}$ of *weight* $|\underline{\lambda}| = \boldsymbol{w}(\lambda)$. □

The following corollary of proposition 2.2.2 is now immediate from the definition of representation stable FB-modules 1.7.3.

2.2.3. Corollary *If* $\mathcal{W}$ *is an* FB*-module, then*

$$\mathrm{rank}_{\mathrm{PC}}(\mathcal{W}) \leq \mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{W})\,.$$

Proof. Left to the reader. □

2.3. Basic examples of character polynomiality of FI-modules

2.3.1. The ℓ-cycles of $[\![1, m]\!]$

Given $m, \ell \in \mathbb{N}$, we denote by Γ_ℓ^m the set of ℓ-tuples $(i_1, \dots, i_\ell)$ of pairwise distinct elements of $[\![1, m]\!]$ modulo cyclic permutation, *i.e.* such that

$$(i_1, \dots, i_\ell) = (i_2, \dots, i_\ell, i_1) = (i_3, \dots, i_\ell, i_1, i_2) = \cdots$$

The symmetric group $\mathcal{S}_m$ acts on Γ_ℓ^m by

$$g \cdot (i_1, \dots, i_\ell) = (g(i_1), g(i_2), \dots, g(i_\ell)) \,. \tag{6}$$

The elements of Γ_ℓ^m are called *the ℓ-cycles of* $[\![1, m]\!]$.

2.3.2. Comments

a) Given $g \in \mathcal{S}_m$, the set $[\![1, m]\!]$ is decomposed in $\langle g \rangle$-orbits, each of which can be endowed with a cyclic order defined by g. For example, if $x \in [\![1, m]\!]$, we may consider $(x \to g(x) \to g^2(x) \to \cdots \to x)$, which gives the well-known *decomposition of $g \in \mathcal{S}_m$ as product of disjoint cycles.*

b) For $m \geq \ell$, there is a difference between the cases $\ell = 1$ and $\ell > 1$.

For all $\ell \geq 1$, define the *support* of an ℓ-cycle $\gamma := (i_1, \dots, i_\ell)$ the set $\{\!\{\gamma\}\!\}$ of its coordinates :

$$\{\!\{\gamma\}\!\} := \{i_1, \dots, i_\ell\} \subseteq [\![1, m]\!] \,.$$

Then, define $\tilde{\gamma} \in \mathcal{S}_m$ by :

$$\tilde{\gamma} := \begin{cases} \tilde{\gamma}(i_j) := i_{j+1 \,(\mathrm{mod}\, \ell)} \,, & \text{for } i_j \in \{\!\{\gamma\}\!\}, \\ \tilde{\gamma}(x) := x \,, & \text{for } x \notin \{\!\{\gamma\}\!\}. \end{cases}$$

i) For $\ell = 1$, we have $\Gamma_1^m = [\![1, m]\!]$ and the action (6) of $\mathcal{S}_m$ on Γ_1^m is the standard action of $\mathcal{S}_m$ on $[\![1, m]\!]$. The map $\widetilde{_} : \Gamma_1^m \to \mathcal{S}_m$ is uninteresting, as it is the constant map $\gamma \mapsto \mathrm{id}_{[\![1,m]\!]}$.

ii) For $\ell > 1$, the map $\widetilde{_} : \Gamma_\ell^m \subseteq \mathcal{S}_m$ is *injective*, and the action (6) of $\mathcal{S}_m$ on Γ_ℓ^m is the conjugation action of $\mathcal{S}^m$ on itself, *i.e.* :

$$\widetilde{g \cdot \gamma} = g \, \tilde{\gamma} \, g^{-1} \,.$$

We will identify γ and $\tilde{\gamma}$ if no confusion is likely to arise. In this sense, for $g \in \mathcal{S}_m$, the set of fixed points $(\Gamma_\ell^m)^g := \left\{ \gamma \in \Gamma_\ell^m \;\middle|\; g \cdot \gamma = \gamma \right\}$ is simply :

$$(\Gamma_\ell^m)^g = \left\{ \ell\text{-cycles } \gamma \in \mathcal{S}_m \;\middle|\; g\gamma = \gamma g \right\}. \tag{7}$$

iii) For all $m, \ell > 0$, we have :

$$|\Gamma_\ell^m| = \frac{m(m-1)\cdots(m-(\ell-1))}{\ell} \,.$$

2.3.3. The FI-modules $\mathbb{E}_\nu$

For $m, \ell > 0$, let $\mathbb{E}_\ell^m$ be the vector space spanned by the set Γ_ℓ^m, *i.e.*

$$\mathbb{E}_\ell^m := \bigoplus\nolimits_{\gamma \in \Gamma_\ell^m} \mathbb{Q} \cdot \gamma \,.$$

Endow it with the linear action of $\mathcal{S}_m$ induced by its action on the basis Γ_ℓ^m. Notice that :

- $\mathbb{E}_\ell^m = \mathbf{0}$, for all $m < \ell$.
- For all $m \geq n$, the set Γ_ℓ^n is a subset of Γ_ℓ^m, which is invariant under the action of $\mathbf{1}_n \boxtimes \mathcal{S}_{m-n}$, so that the natural inclusions $\Gamma_\ell^m \subseteq \Gamma_\ell^{m+1}$ induce the interior maps (clearly injective) of an FI-module

$$\boxed{\mathbb{E}_\ell := \left\{\phi(\mathbb{E}_\ell)_m : \mathbb{E}_\ell^m \rightarrowtail \mathbb{E}_\ell^{m+1}\right\}}$$

  where $\phi(\mathbb{E}_\ell)_m$ is exhaustive for $m \geq \ell$, since the natural map between orbit spaces: $\mathcal{S}_m \backslash \Gamma_\ell^m \to \mathcal{S}_{m+1} \backslash \Gamma_\ell^{m+1}$ is bijective for $m \geq \ell$.

More generally, if $\nu := (1^{\mathbf{n}_1}, 2^{\mathbf{n}_2}, \ldots, N^{\mathbf{n}_N}) = (\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots \geq \nu_\ell)$ is a nonempty partition, let

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu^m &:= (\mathbb{E}_1^m)^{\otimes \mathbf{n}_1} \otimes (\mathbb{E}_2^m)^{\otimes \mathbf{n}_2} \otimes \cdots \otimes (\mathbb{E}_N^m)^{\otimes \mathbf{n}_N} \,, \\ &:= \mathbb{E}_{\nu_1} \otimes \mathbb{E}_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbb{E}_{\nu_\ell} \,, \end{aligned}$$

and define $\phi(\mathbb{E}_\nu)_m : \mathbb{E}_\nu^m \to \mathbb{E}_\nu^{m+1}$ as the tensor product of interior maps

$$\begin{aligned} \phi(\mathbb{E}_\nu)_m &:= \phi(\mathbb{E}_1)^{\otimes \mathbf{n}_1} \otimes \cdots \otimes \phi(\mathbb{E}_N)^{\otimes \mathbf{n}_N} \,, \\ &:= \phi(\mathbb{E}_{\nu_1}) \otimes \cdots \otimes \phi(\mathbb{E}_{\nu_\ell}) \,. \end{aligned}$$

The family

$$\boxed{\mathbb{E}_\nu := \left\{\phi(\mathbb{E}_\nu)_m : \mathbb{E}_\nu^m \rightarrowtail \mathbb{E}_\nu^{m+1}\right\}_m}$$

is an FI-module with all interior maps injective, and exhaustive for $m \geq \nu_1$.

2.3.4. Proposition

a) *For $m, \ell \in \mathbb{N}$, the character $\chi_{\mathbb{E}_\ell^m}$ is expressed by the following polynomial of $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_\ell]$ of weight ℓ and independent of $m \in \mathbb{N}$:*

$$\boldsymbol{E}_\ell = \phi(\ell)\, X_\ell + \sum\nolimits_{ed=\ell\,,\, e\neq 1} \phi(d)\, \frac{d^e}{\ell}\, X_d(X_d - 1) \cdots \big(X_d - (e{-}1)\big) \,, \quad (*_\ell)$$

where ϕ is the Euler's totient function.

The FI*-module $\mathbb{E}_\ell := \{\mathbb{E}_\ell^m \rightarrowtail \mathbb{E}_\ell^{m+1}\}_m$ has the following ranks*

$$\mathrm{rank}_{\mathrm{PC}}(\mathbb{E}_\ell) = 0 \quad \textit{and} \quad \mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathbb{E}_\ell) = \mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}^{\mathrm{FI}}(\mathbb{E}_\ell) = 2\ell \,.$$

b) *Given an ordered sequence* $\overline{Z} := (Z_1, \dots, Z_N)$ *of polynomials of* $\mathbb{Q}[\overline{X}]$, *and* $d \in \mathbb{N}$, *denote by* $\mathbb{Q}^{\leq d}[Z_1, \dots, Z_N]$ *the subspace of polynomials of weight* $\leq d$ *relative to* $\overline{Z}$, i.e. *the subspace spanned by the elements* $Z_1^{a_1} \cdots Z_N^{a_N}$ *where* $\sum_i i\, a_i \leq d$. *Then, for all* $N \in \mathbb{N}$, *the inclusion:*

$$\mathbb{Q}^{\leq d}[\boldsymbol{E}_1, \dots, \boldsymbol{E}_N] \subseteq \mathbb{Q}^{\leq d}[X_1, \dots, X_N]$$

is an equality.

c) *For every nonempty partition* $\nu := (1^{\boldsymbol{n}_1}, 2^{\boldsymbol{n}_2}, \dots, N^{\boldsymbol{n}_N})$, *we have*

i) $\boldsymbol{w}(I\!E_\nu^m) \leq \min\{m, |\nu|\}$.

ii) *The* FI*-module* $I\!E_\nu := \{I\!E_\nu^m \rightarrowtail I\!E_\nu^{m+1}\}_m$ *has the following ranks*

$$\mathrm{rank}_{\mathrm{PC}}(I\!E_\nu) = 0 \quad \textit{and} \quad \mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(I\!E_\nu) = \mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}^{\mathrm{FI}}(I\!E_\nu) = 2|\nu|\,.$$

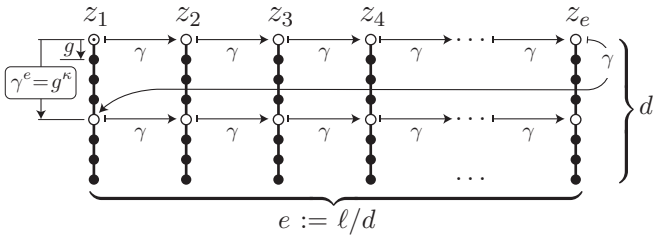
Proof. (a) Since the linear action of $g \in \mathcal{S}_m$ is induced by its action on the basis $\Gamma_\ell^m \subseteq I\!E_\ell^m$, the trace $\chi_{I\!E_\ell^m}(g)$ is the cardinality of $(\Gamma_\ell^m)^g$ (2.3.2-(b-ii)).

When $m < \ell$, the set Γ_ℓ^m is empty and $I\!E_\ell^m = 0$. And, since in $\mathcal{S}_m$ there is no permutation g such that $\rho_m(X_d)(g) \geq \ell/d$, we have $\rho_m(\boldsymbol{E}_\ell) = 0$, which states (a) when $m < \ell$.

When $m \geq \ell$, following 2.3.2-(b), we consider two cases:

– $\boldsymbol{\ell = 1}$. Then $\Gamma_1^m = [\![1, m]\!]$, $\chi_{I\!E_1^m}(g) = |[\![1, m]\!]^g| = X_1(g)$, and (a) is obvious.

– $\boldsymbol{\ell > 1}$. The set $(\Gamma_\ell^m)^g$ identifies, after 2.3.2-(b-ii)-(7), with the set of ℓ-cycles $\gamma \in \mathcal{S}_m$ such that $g\gamma = \gamma g$. As a consequence, $g\{\!\{\gamma\}\!\} = \{\!\{\gamma\}\!\}$ and the set $\{\!\{\gamma\}\!\}$ appears endowed with two actions commuting to each other. But then, since the action of γ on $\{\!\{\gamma\}\!\}$ is transitive, the $\langle g \rangle$-orbits share the same cardinality. Denote it by d and set $e := \ell/d$. Then, $g^\kappa = \gamma^e$, for some $\kappa \in [\![1, d]\!]$, relatively prime to d. These observations are gathered in the following image:



If we choose the point '$\odot$' to stand for the smallest coordinate in γ, this graphic representation becomes one-to-one, and thus helpful for the computation of the cardinality of the set $(\Gamma_\ell^m)^g$. Indeed, it can be used to reconstruct $(\Gamma_\ell^m)^g$ by following the next steps.

1) Take an ordered sequence $(z_1, \dots, z_e)$ of d-cycles in g, among the
$$X_d(g)^{\underline{e}} := X_d(g)\big(X_d(g)-1\big)\cdots\big(X_d(g)-(e-1)\big)\,.$$
possible such sequences.
2) Shift to the first position the d-cycle containing the smallest coordinate in $[\![1, m]\!]$. This means that $X_d(g)^{\underline{e}}$ has to be divided by e.
3) Fix the vertical orders of $z_2, \dots, z_e$. There are d^{e-1} such orders.
4) Fix the number κ. There are $\phi(d)$ possibilities.

Therefore,
$$\big|(\Gamma_\ell^m)^g\big| = \sum_{de=\ell} \phi(d)\,\frac{d^e}{\ell}\,X_d(g)^{\underline{e}}\,.$$
In both cases, $\ell = 1$ and $\ell > 1$, the previous expression is independent of $m \in \mathbb{N}$, which means that $\mathrm{rank}_{\mathrm{PC}}(\mathbb{E}_\ell) = 0$.

To estimate $\mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathbb{E}_\ell)$, observe that, since the action of $\mathcal{S}_m$ on Γ_ℓ^m is transitive, $\Gamma_\ell^m = \mathcal{S}_m \cdot (1, \dots, \ell)$, so that, denoting $\gamma := (1, \dots, \ell)$, we have an isomorphism of $\mathcal{S}_m$-spaces:
$$\Gamma_\ell^m = \mathcal{S}_m \cdot \gamma \simeq \mathcal{S}_m \times_{\langle\gamma\rangle \boxtimes \mathcal{S}_{m-\ell}} \{\mathrm{pt}\}\,,$$
because $\mathrm{Stab}_{\mathcal{S}_m}(\gamma) = \langle\gamma\rangle \boxtimes \mathcal{S}_{m-\ell}$. Therefore,
$$\mathbb{E}_\ell^m = \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_\ell \boxtimes \mathcal{S}_{m-\ell}}^{\mathcal{S}_m}\big((\mathrm{ind}_{\langle\gamma\rangle}^{\mathcal{S}_\ell}\mathbb{Q}) \boxtimes \mathbb{Q}_{m-\ell}\big)\,.$$
and $\mathbb{E}_\ell$ is the projective FI-module $\mathcal{P}\big(\mathrm{ind}_{\langle\gamma\rangle}^{\mathcal{S}_\ell}\mathbb{Q}\big)$ for which we have already shown that it is $(\mathrm{RS})_{m\geq 2\ell}$ (*cf.* 1.7.2-(b)).

We can be a more precise observing that the simple $\mathcal{S}_\ell$-module $\mathbb{Q}_\ell$ appears with multiplicity 1 in $\mathrm{ind}_{\langle\gamma\rangle}^{\mathcal{S}_\ell}\mathbb{Q}$, which is true since:
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_\ell}(\mathrm{ind}_{\langle\gamma\rangle}^{\mathcal{S}_\ell}\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Hom}_{\langle\gamma\rangle}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\,.$$
Thus, $\mathbb{E}_\ell$ contains $\mathcal{P}(\mathbb{Q}_\ell) = \mathcal{P}(V_{0[\ell]})$ as the sub-FI-module, and, thanks to 1.7.4-(d),
$$\mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathbb{E}_\ell) = \mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}^{\mathrm{FI}}(\mathbb{E}_\ell) = 2\ell\,.$$
(b) In (a), the equation $(*_\ell)$ shows that $\boldsymbol{E}_\ell = \phi(\ell)\,X_\ell$ modulo a polynomial of weight ℓ in the variables X_d for $d|\ell$ and $d \neq \ell$. (In particular, $\boldsymbol{E}_1 = X_1$.) Now, given $N \geq 1$, the system of equations $(*_\ell)$, for $\ell \leq N$, can be inverted by recursively introducing some polynomials $Q_\ell^m(Z_1, \dots, Z_\ell) \in \mathbb{Q}[\overline{Z}]$ of weight ℓ, such that
$$X_\ell = Q_\ell^m(\boldsymbol{E}_1, \dots, \boldsymbol{E}_\ell)\,, \quad \forall \ell \leq N\,.$$
The equality,
$$\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_N] = \mathbb{Q}[\boldsymbol{E}_1, \dots, \boldsymbol{E}_N]\,,$$

but also,

$$\mathbb{Q}^{\leq d}[X_1,\dots,X_N]=\mathbb{Q}^{\leq d}[\boldsymbol{E}_1,\dots,\boldsymbol{E}_N]\,,\quad \forall d\in\mathbb{N}\,,$$

then follows easily.

(c) Since the action of $\mathcal{S}_m$ on $I\!E^m_\nu := I\!E^m_{\nu_1}\otimes\cdots\otimes I\!E^m_{\nu_\ell}$ is induced by its component-wise action on the basis $\Gamma^m_\nu := \Gamma^m_{\nu_1}\times\Gamma^m_{\nu_2}\times\cdots\times\Gamma^m_{\nu_\ell}$, the structure of $\mathbb{Q}[\mathcal{S}_m]$-module of $I\!E^m_\nu$ follows from the structure of $\mathcal{S}_m$-space of Γ^m_ν. Given $\bar\gamma := (\gamma_1,\dots,\gamma_\ell)\in\Gamma^m_\nu$, we have

$$\mathcal{S}_m\cdot\bar\gamma=\mathcal{S}_m/\operatorname{Stab}_{\mathcal{S}_m}(\bar\gamma)=\mathcal{S}_m\times_{\mathcal{S}_{\{\!\{\bar\gamma\}\!\}}}\left(\mathcal{S}_{\{\!\{\bar\gamma\}\!\}}/\operatorname{Stab}_{\mathcal{S}_{\{\!\{\bar\gamma\}\!\}}}(\bar\gamma)\right)\qquad(\ddagger)$$

where we set $\{\!\{\bar\gamma\}\!\} := \{\!\{\gamma_1\}\!\}\cup\cdots\cup\{\!\{\gamma_\ell\}\!\}$.

As a consequence the $\mathbb{Q}[\mathcal{S}_m]$-module $I\!E^m_\nu$ is a direct sum of induced modules of the form:

$$\operatorname{ind}_{\mathcal{S}_{\{\!\{\bar\gamma\}\!\}}\boxtimes\mathcal{S}_{\complement\{\!\{\bar\gamma\}\!\}}}^{\mathcal{S}_m} W_n\boxtimes\mathbb{Q}_{m-n}\,,$$

where we can choose to have $\{\!\{\bar\gamma\}\!\} := [\![1,n]\!]$, for $n := |\{\!\{\bar\gamma\}\!\}|\leq\min\{m,|\nu|\}$, in which case

$$W_n := \mathbb{Q}[\mathcal{S}_n/\operatorname{Stab}_{\mathcal{S}_n}(\bar\gamma)]=\operatorname{ind}_{\operatorname{Stab}_{\mathcal{S}_n}(\bar\gamma)}^{\mathcal{S}_n}\mathbb{Q}_n\,.\qquad(\ddagger\ddagger)$$

When $m\geq|\nu|$, the corollary 1.4.5-(a) to Pieri's rule, gives the inequality

$$\boldsymbol{w}(\nu)\leq\boldsymbol{w}(I\!E^m_\nu)\leq|\nu|\,,$$

and (c-i) follows.

(c-ii) Since $\chi_{I\!E^m_\nu}=(\chi_{I\!E^m_1})^{\boldsymbol{n}_1}\cdots(\chi_{I\!E^m_N})^{\boldsymbol{n}_N}$ and since $\operatorname{rank}_{\mathrm{PC}}(I\!E_\ell)=0$, after (a), it follows immediately that $\operatorname{rank}_{\mathrm{PC}}(I\!E_\nu)=0$.

To finish, we notice that, on the one hand, the number of terms of the form $(\ddagger)$ is exactly de number of $\mathcal{S}_m$-orbits in Γ^m_ν, and, on the other hand, the sequence of inclusions $\mathcal{S}_m\backslash\Gamma^m_\nu\subseteq\mathcal{S}_{m+1}\backslash\Gamma^{m+1}_\nu$ is *strict increasing* until it stabilizes for $m\geq|\nu|$. As a consequence, the truncated FI-module $(I\!E_\nu)_{\geq|\nu|}$ is isomorphic to the sum of truncated projective FI-modules $\mathcal{P}(W_n)_{\geq|\nu|}$, all of which being $(\mathrm{RS})_{m\geq2|\nu|}$, after 1.7.2-(b). We therefore have proved that

$$\operatorname{rank}_{\mathrm{RS}}(I\!E_\nu)\leq\operatorname{rank}^{\mathrm{FI}}_{\mathrm{RS}}(I\!E_\nu)\leq2|\nu|\,.$$

To see that these are equalities, it suffices, by 1.7.4, to show that, for $m=|\nu|$, one has :

$$\mathcal{P}(\mathbb{Q}_m)\subseteq I\!E_\nu\,.\qquad(\dagger)$$

But, this is clear if we choose $\bar\gamma\in\Gamma^m_\nu$ such that $|\{\!\{\bar\gamma\}\!\}|=m$ (as in $(\ddagger\ddagger)$), in which case $(\dagger)$ follows, proceeding as in (a), from the inclusion:

$$\mathbb{Q}_m\subseteq\operatorname{ind}_{\operatorname{Stab}_{\mathcal{S}_m}(\{\!\{\bar\gamma\}\!\})}^{\mathcal{S}_m}(\mathbb{Q}_m)\,.$$

□

3. Polynomial weight vs. Representation weight

3.1. On the minimal polynomial weight of a character

The Frobenius polynomial $\boldsymbol{X}_\lambda \in \mathbb{Q}[\overline{X}]$ is of weight $\boldsymbol{w}(\lambda)$, and there are infinitely many polynomials $P_\lambda \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_{m-1}]$ such that $\rho_m(P_\lambda) = \rho_m(\boldsymbol{X}_\lambda) = \chi_{V_\lambda}$. In this section, we advance the study of the relationship between weights of polynomials and weights of representations. We will see that $\boldsymbol{w}(W_m)$ is the lowest possible weight for a polynomial $P_{W_m} \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_{m-1}]$ verifying $\rho_m(P_{W_m}) = \chi_{W_m}$. For example, the polynomial $\boldsymbol{X}_{W_m} := \sum_\lambda \boldsymbol{n}_\lambda \boldsymbol{X}_\lambda$, where $\boldsymbol{X}_\lambda$ is the Frobenius polynomial of an irreducible factor V_λ of multiplicity $\boldsymbol{n}_\lambda$ in W_m. Moreover, we will see that this polynomial $\boldsymbol{X}_{W_m}$ is the only one satisfying these weights conditions, if and only if $\boldsymbol{w}(W_m) \leq m/2$.

3.1.1. Theorem

a) *For $d, m \in \mathbb{N}$, denote by $\rho_{m|d}$ the restriction of $\rho_m : \mathbb{Q}[\overline{X}] \to \mathbb{Q}_{\mathrm{cl}}(\mathcal{S}_m)$ to the subspace $\mathbb{Q}^{\leq d}[\overline{X}]$ of polynomials of weight $\leq d$. The image of the map*

$$\rho_{m|d} : \left(\mathbb{Q}^{\leq d}[\overline{X}]\right) \to \mathbb{Q}_{\mathrm{cl}}(\mathcal{S}_m)$$

is the subspace

$$\mathbb{Q}_{\mathrm{cl}}^{\leq d}(\mathcal{S}_m) = \left\langle \chi_{V_\lambda} \;\middle|\; \left(|\lambda| = m\right) \,\&\, \left(\boldsymbol{w}(\lambda) \leq d\right) \right\rangle_{\mathbb{Q}}, \tag{8}$$

and $\ker(\rho_{m|d}) = 0$ if and only if $d \leq m/2$.

b) *Let $P \in \mathbb{Q}[\overline{X}]$.*

i) *The scalar product $\langle\!\langle\, 1 \mid P \,\rangle\!\rangle_{\mathcal{S}_m}$ is constant for $m \geq \deg_{\boldsymbol{w}}(P)$.*

ii) *The scalar product $\langle\!\langle\, \chi_{V_\lambda} \mid P \,\rangle\!\rangle_{\mathcal{S}_m}$ vanishes for $\lambda \vdash m$ s.t. $\boldsymbol{w}(\lambda) > \deg_{\boldsymbol{w}}(P)$.*

iii) *Let W_m be a representation of $\mathcal{S}_m$. If $\rho_m(P) = \chi_{W_m}$, then:*

$$\deg_{\boldsymbol{w}}(P) \geq \boldsymbol{w}(W_m).$$

c) *Let $W_m = \bigoplus_{\lambda \vdash m} V_\lambda^{\boldsymbol{n}_\lambda}$ be a representation of $\mathcal{S}_m$. The polynomial*

$$\boldsymbol{X}_{W_m} := \sum\nolimits_{\lambda \vdash m} \boldsymbol{n}_\lambda \boldsymbol{X}_\lambda \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_{m-1}]$$

where $\boldsymbol{X}_\lambda$ is the Frobenius polynomial for χ_{V_λ} (2.2.2), verifies

$$\rho_m(\boldsymbol{X}_{W_m}) = \chi_{W_m} \quad \text{and} \quad \deg_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{X}_{W_m}) = \boldsymbol{w}(W_m),$$

and it is the only polynomial verifying simultaneously these two equalities, if and only if $\boldsymbol{w}(W_m) \leq m/2$.

Proof. (a) In (8), the inclusion '$\supseteq$' is 2.2.2. For the converse, it suffices to restrict oneself to the case of a monomial $\rho_m(X_1^{\boldsymbol{n}_1} \cdots X_d^{\boldsymbol{n}_d})$ for $\sum_i i\, \boldsymbol{n}_i \leq d$,

or, thanks to 2.3.4-(b), what amounts to the same thing, to show that

$$(\chi_{\mathbb{E}_1^m})^{\boldsymbol{n}_1}\cdots(\chi_{\mathbb{E}_d^m})^{\boldsymbol{n}_d}\in\left\langle\chi_{V_\lambda}\;\middle|\;\big(|\lambda|=m\big)\;\&\;\big(\boldsymbol{w}(\lambda)\leq d\big)\right\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

Here, one recognizes, on the left, the character of $\mathbb{E}_\nu^m$, for $\nu:=(1^{\boldsymbol{n}_1},\dots,d^{\boldsymbol{n}_d})$. Now, since we already know after 2.3.4-(c), that $\boldsymbol{w}(\mathbb{E}_\nu^m)\leq|\nu|$, we conclude that $\boldsymbol{w}(\mathbb{E}_\nu^m)\leq d$. The irreducible factors of $\mathbb{E}_\nu^m$ are therefore of the form V_λ with $\boldsymbol{w}(\lambda)\leq d$, which settles the inclusion '$\subseteq$'.

For the last claim about $\ker(\rho_{m|d})$, notice that the space $\mathbb{Q}^{\leq d}[X_1,\dots,X_d]$ admits as a basis the set of monomials

$$M(d):=\left\{X_1^{\boldsymbol{n}_1}X_2^{\boldsymbol{n}_2}\dots X_d^{\boldsymbol{n}_d}\;\middle|\;\textstyle\sum_{i=1}^d i\,\boldsymbol{n}_i\leq d\right\},$$

while the space $\mathbb{Q}_{\mathrm{cl}}^{\leq d}(\mathcal{S}_m)$ has a basis indexed by the following set of partitions:

$$L(d):=\left\{\underline{\lambda}:=(1^{\boldsymbol{n}_1},2^{\boldsymbol{n}_2},\dots,\lambda_2^{\boldsymbol{n}_{\lambda_2}})\;\middle|\;\big(\textstyle\sum_{i=1}^{\lambda_2}i\,\boldsymbol{n}_i\leq d\big)\;\&\;\big(\sum_{i=1}^{\lambda_2}i\,\boldsymbol{n}_i+\lambda_2\leq m\big)\right\},$$

because $\{\chi_{V_\lambda}\mid\lambda\vdash m\}$ is linearly independent after Schur orthogonality.

Since $\lambda_2\leq d$, the map $\xi:L(d)\to M(d)$, which associates $(1^{\boldsymbol{n}_1},2^{\boldsymbol{n}_2},\dots,\lambda_2^{\boldsymbol{n}_{\lambda_2}})$ with the monomial $X_1^{\boldsymbol{n}_1}X_2^{\boldsymbol{n}_2}\dots X_{\lambda_2}^{\boldsymbol{n}_{\lambda_2}}$ is well defined and injective. The condition for ξ to be bijective is that λ_2 be able to take the value d, in which case $\sum_{i=1,\dots,\lambda_2}i\,\boldsymbol{n}_i=d$, and that condition appears to be simply that $2d\leq m$.

(b-i) Again, thanks to 2.3.4-(b), we need only prove that the number:

$$\left\langle\!\!\left\langle\,1\;\middle|\;\chi_{\mathbb{E}_1^m}(g)^{\boldsymbol{n}_1}\chi_{\mathbb{E}_2^m}(g)^{\boldsymbol{n}_2}\cdots\chi_{\mathbb{E}_r^m}(g)^{\boldsymbol{n}_r}\right\rangle\!\!\right\rangle_{\mathcal{S}_m},\qquad(\diamond)$$

is constant for all $m\geq\sum_{i=1}^r i\,\boldsymbol{n}_i$. But $(\diamond)$ is simply the dimension of the subspace of invariant tensors in the $\mathcal{S}_m$-module

$$\mathbb{E}_\nu^m:=(\mathbb{E}_1^m)^{\otimes\boldsymbol{n}_1}\otimes(\mathbb{E}_2^m)^{\otimes\boldsymbol{n}_2}\otimes\cdots\otimes(\mathbb{E}_r^m)^{\otimes\boldsymbol{n}_r},$$

where $\nu:=(1^{\boldsymbol{n}_1},2^{\boldsymbol{n}_2},\dots,r^{\boldsymbol{n}_r})$. Let $\nu=(\nu_1\geq\nu_2\geq\cdots\geq\nu_\ell)$. The canonical basis $\mathcal{B}_\nu^m$ of $\mathbb{E}_\nu^m$ is the set of tensors

$$\gamma_1\otimes\gamma_2\otimes\cdots\otimes\gamma_\ell,$$

where γ_i is a cycle of length ν_i of $\mathcal{S}_m$. The basis $\mathcal{B}_\nu^m$ is clearly in bijection with the set $\mathcal{T}_\nu^m$ of Young *tableaux* τ of shape ν, with the i'th row filled with elements of $[\![1,m]\!]$ so that they represent a cycle of length ν_i of $\mathcal{S}_m$. The action of $\mathcal{S}_m$ on $\mathcal{B}_\nu^m$ induces in $\mathcal{T}_\nu^m$ the natural action of $\mathcal{S}_m$ on Young tableaux.

Because of these identifications, the dimension of $(\mathbb{E}_\nu^m)^{\mathcal{S}_m}$ is the cardinality of the orbit space $\mathcal{T}_\nu^m/\mathcal{S}_m$, and the stability we are seeking to prove is

equivalent to the natural map

$$\mathcal{T}_\nu^m/\mathcal{S}_m \to \mathcal{T}_\nu^{m+1}/\mathcal{S}_{m+1}\,,\ [\tau\,(\mathrm{mod}\,\mathcal{S}_m)] \mapsto [\tau\,(\mathrm{mod}\,\mathcal{S}_{m+1})]\,,$$

being a bijection. But the necessary and sufficient condition for this is precisely that the total number of boxes $|\nu|$ be smaller or equal to m, since, in that case, a single permutation $g \in \mathcal{S}_m$ will allow renumbering of all boxes simultaneously with numbers in the interval $[\![1, |\nu|]\!]$. Hence $(\diamond)$ is constant for $m \geq |\nu| = \sum_i i\,\boldsymbol{n}_i$.

(b-ii) After (a), $\rho_m(P)$ belongs to the linear span of the characters χ_{V_ν} of $\mathcal{S}_m$, with $\boldsymbol{w}(\nu) \leq \deg_{\boldsymbol{w}}(P)$, and, thanks to Schur orthogonality, these characters are orthogonal to any χ_{V_λ} with $\boldsymbol{w}(\lambda) > \deg_{\boldsymbol{w}}(P)$, hence the claim.

(b-iii) Indeed, if we had $\deg_{\boldsymbol{w}}(P) < \boldsymbol{w}(W_m)$ then, for any irreducible factor V_λ of W_m of weight $\boldsymbol{w}(V_\lambda) = \boldsymbol{w}(W_m)$, we would get, after (b-ii):

$$0 = \langle\!\langle\, \chi_{V_\lambda} \mid P \,\rangle\!\rangle_{\mathcal{S}_m} = \langle\!\langle\, \chi_{V_\lambda} \mid W_m \,\rangle\!\rangle_{\mathcal{S}_m} \neq 0\,,$$

which is a contradiction. Hence $\deg_{\boldsymbol{w}}(P) \geq \boldsymbol{w}(W_m)$.

(c) Immediate consequence of (b-iii) and the study of $\ker(\rho_{m|d})$ in (a). □

3.1.2. Comments

- The proposition 2.3.4-(a) showed that, for fixed $m \geq N$, the character of the tensor product $\mathbb{E}_\nu^m := (\mathbb{E}_1^m)^{\otimes \boldsymbol{n}_1} \otimes (\mathbb{E}_2^m)^{\otimes \boldsymbol{n}_2} \otimes \cdots \otimes (\mathbb{E}_N^m)^{\otimes \boldsymbol{n}_N}$, as an $\mathcal{S}_m$-module, is the polynomial: $\boldsymbol{E}_\nu := \boldsymbol{E}_1^{\boldsymbol{n}_1} \boldsymbol{E}_2^{\boldsymbol{n}_2} \cdots \boldsymbol{E}_N^{\boldsymbol{n}_N}$ of $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_N]$, whose weight $\deg_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{E}_\nu) = \sum_i i\,\boldsymbol{n}_i$ can be arbitrarily big. On the other hand, theorem 3.1.1-(c) showed that the same character is given by the polynomial $\boldsymbol{X}_{\mathbb{E}_\nu^m}$ of $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_{m-1}]$, of weight $\boldsymbol{w}(\mathbb{E}_\nu^m) < m$.

  This disagreement is due to the fact that, while $\boldsymbol{E}_\nu$ expresses a priori all the characters in the family $\{\chi_{\mathbb{E}_\nu^m}\}_{m \geq N}$ *simultaneously*, the Frobenius polynomial $\boldsymbol{X}_{\mathbb{E}_\nu^m}$ expresses a priori only one of them, viz. $\chi_{\mathbb{E}_\nu^m}$.

  Heuristically speaking, the elements in $\ker(\rho_m)$ allow the reduction of the weight of the polynomial $\boldsymbol{E}_\nu$ in order to reach the required bound m. This distinction will become meaningful in the next section.

- It is also worth noting that while the explicit writing of $\boldsymbol{E}_\nu$ is very simple, thanks to formula 2.3.4-(a), the writing of $\boldsymbol{X}_{\mathbb{E}_\nu^m}$ can be quite complex insofar as it entails knowing the set of multiplicities $\boldsymbol{n}_\lambda$ of the irreducible factors V_λ in the decomposition $\mathbb{E}_\nu^m = \bigoplus_{\lambda \vdash m} V_\lambda^{\boldsymbol{n}_\lambda}$, and also in the explicit description of each $\boldsymbol{X}_\lambda$, for $\boldsymbol{n}_\lambda \neq 0$.

The following is a useful corollary to theorem 3.1.1-(c)

3.1.3. Corollary. *Let $\mathcal{W}$ be an* FB*-module which is* $(\mathrm{PC})_{m\geq N}$ *and has polynomial character $P_{\mathcal{W}}$.*

a) $P_{\mathcal{W}} = \boldsymbol{X}_{W_m}$, *for all* $m \geq \max\{2\deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathcal{W}}), N\}$.

b) $\boldsymbol{w}(W_m) = \deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathcal{W}})$, *for all* $m \geq \max\{2\deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathcal{W}}), N\}$.

c) $\boldsymbol{w}(\mathcal{W}_{\geq N}) = \deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathcal{W}})$.

Proof. (a,b) Immediate after 3.1.1-(c).

(c) For all $m \geq N$, we have $\rho_m(P_{\mathcal{W}}) = \chi_{W_m}$ so that $\boldsymbol{w}(W_m) \leq \deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathcal{W}})$, again after 3.1.1-(c). Therefore, $\sup_{m\geq N}\{\boldsymbol{w}(W_m)\} = \deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathcal{W}})$, after (b). □

4. (PC) versus (RS)

4.1. Equivalence of the stability conditions

We show the equivalence, for an FB-module $\mathcal{W}$, between the properties (RS) and (PC). In this, two more elements will deserve special attention. First, the ranks of validity of the properties, and, second, the weight of the polynomial $P_{\mathcal{W}}$. The complete statement is the following.

4.1.1. Theorem. *Let $\mathcal{W}$ be an* FB*-module.*

a) *If $\mathcal{W}$ is* (RS)*, then $\mathcal{W}$ is* (PC) *and* $\mathrm{rank}_{\mathrm{PC}}(\mathcal{W}) \leq \mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{W})$.

b) *If $\mathcal{W}$ is* (PC) *with polynomial character $P_{\mathcal{W}}$, then $\mathcal{W}$ is* (RS) *and*

$$\mathrm{rank}_{\mathrm{RS}}(\mathcal{W}) \leq \max\{\mathrm{rank}_{\mathrm{PC}}(\mathcal{W}), 2\deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathcal{W}})\}\,.$$

Proof. (a) is corollary 2.2.3. (b) Set $d := \deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathcal{W}})$. After 3.1.3-(a), we know that $P_{\mathcal{W}} = \boldsymbol{X}_{W_m}$ for all $m \geq 2d$, so that, if we decompose W_{2d} in its simple $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_{2d}]$-submodules:

$$W_{2d} = \bigoplus\nolimits_{|\lambda|\leq d} (V_{\lambda[2d]})^{\boldsymbol{n}_\lambda}\,,$$

and if we denote $\lambda' := (\lambda_1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_\ell)$ for $\lambda := (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_\ell)$, then the FI-module

$$\mathcal{W}' := \bigoplus\nolimits_{|\lambda|\leq d} (\mathcal{V}_{\lambda'})^{\boldsymbol{n}_\lambda}\,,$$

which is clearly $(\mathrm{RS})_{m\geq 2d}$, will be such that $P_{\mathcal{W}'} = P_{\mathcal{W}}$, by construction. As a consequence, there exists an isomorphism of FB-modules:

$$\mathcal{W}_{\geq \max\{2d,N\}} \sim \mathcal{W}'_{\geq \max\{2d,N\}}\,, \qquad (\diamond)$$

and $\mathcal{W}$ is (RS) for $m \geq \max\{2d, N\}$, as stated. □

4.1.2. Remark. The last proof shows, in $(\diamond)$, that an FB-module that is (PC) is asymptotically isomorphic, as FB-module, to an (RS) FI-module.

5. Addendum on the weight of a tensor product

5.1. Reinterpretation of the weight of a representation

The theorem 3.1.1-(c) gives an alternative definition of the weight of a representation W_m of $\mathfrak{S}_m$ *as the lowest possible weight of the polynomials expressing its character* χ_{W_m}.

5.2. On the weight of the tensor product of representations

5.2.1. Proposition

a) *If* $W_{1,m}$ *and* $W_{2,m}$ *are representations of* $\mathfrak{S}_m$*, then*

$$\boldsymbol{w}(W_{1,m} \otimes W_{2,m}) \leq \boldsymbol{w}(W_{1,m}) + \boldsymbol{w}(W_{2,m})\,.$$

b) *If* $\mathcal{W}_1$ *and* $\mathcal{W}_2$ *are* FB*-modules which are* $(\mathrm{PC})_{m\geq N}$*, then*

$$\boldsymbol{w}(W_{1,m} \otimes W_{2,m}) = \boldsymbol{w}(W_{1,m}) + \boldsymbol{w}(W_{2,m})\,,$$

for all $m \geq 2(\boldsymbol{w}(W_{1,m}) + \boldsymbol{w}(W_{2,m}))$*. In particular,*

$$\boldsymbol{w}((\mathcal{W}_1 \otimes \mathcal{W}_2)_{\geq N}) = \boldsymbol{w}((\mathcal{W}_1)_{\geq N}) + \boldsymbol{w}((\mathcal{W}_2)_{\geq N})$$

c) $$\boldsymbol{w}(V_{\lambda[m]} \otimes V_{\mu[m]}) = |\lambda| + |\mu|, \quad \forall m \geq 2(|\lambda| + |\mu|).$$

Proof. (a)As $\chi_{W_1\otimes W_2} = \chi_{W_1}\chi_{W_2}$, we get

$$\boldsymbol{w}(W_1\otimes W_2) \underset{(1)}{\leq} \deg_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{X}_{W_1}\boldsymbol{X}_{W_2}) = \deg_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{X}_{W_1}) + \deg_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{X}_{W_2}) \underset{(2)}{=} \boldsymbol{w}(W_1) + \boldsymbol{w}(W_2),$$

inequality '$\leq_{(1)}$' after 3.1.1-(b-iii), and equality '$=_{(2)}$' after 3.1.1-(c).

(b) Let $d_i := \deg_{\boldsymbol{w}}(P_{\mathcal{W}_i})$. We know after corollary 3.1.3-(a), that $P_{\mathcal{W}_i} = \boldsymbol{X}_{W_{i,m}}$, for $m \geq 2\max\{d_1, d_2\}$. Hence, $\boldsymbol{X}_{W_{1,m}}\boldsymbol{X}_{W_{2,m}} = \boldsymbol{X}_{W_{1,m}\otimes W_{2,m}}$, for $m \geq 2(d_1+d_2)$, after the same corollary. Therefore,

$$\boldsymbol{w}(W_{1,m} \otimes W_{2,m}) = \boldsymbol{w}(W_{1,m}) + \boldsymbol{w}(W_{2,m})\,,$$

for $m \geq 2(d_1 + d_2)$, again after 3.1.1-(c).

(c) Particular case of (b). □

References

[1] T. Church, B. Farb. Representation theory and homological stability. Adv. Math. 245, 250–314 (2013).

[2] W. Fulton, J. Harris. *"Representation theory. A first course"*. Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, (1991)

[3] I.G. Macdonald. *"Symmetric functions and Hall polynomials"*. Second edition. Oxford University Press, New York, (1995).

arXiv:submit/2339699 [math.AT] 23 Jul 2018

Espaces de configuration généralisés
Espaces topologiques *i*-acycliques
Suites spectrales basiques

Alberto Arabia (*)

Abstract. The *generalized* configuration spaces of a topological space $\boldsymbol{X}$ are the subspaces $\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m \subseteq \boldsymbol{X}^m$, defined, for all $0 \leqslant \ell \leqslant m \in \mathbb{N}$, as:

$$\begin{cases} \Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m := \left\{(x_1,\dots,x_m) \in \boldsymbol{X}^m \;\middle|\; \mathrm{Card}\,\{x_1,\dots,x_m\} \leqslant \ell\right\}, \\ \Delta_{\ell}\boldsymbol{X}^m \;:= \Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m \smallsetminus \Delta_{\leqslant \ell-1}\boldsymbol{X}^m\,, \quad \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}) := \Delta_m\boldsymbol{X}^m\,. \end{cases} \tag{$*$}$$

They are endowed with the action of the symmetric group $\mathcal{S}_m$ permuting coordinates. Our first motivation in this work was to transpose standard problems on classical configuration spaces $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ to the generalized ones $(*)$ and to try to solve them for large families of spaces using uniform methods. Among the questions we considered, the following had quite complete answers.

- Compute the character of the representation $\mathcal{S}_m : H(\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)$.
- Compute the Poincaré polynomial of the quotients of $\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m$ by finite subgroups of $\mathcal{S}_m$. Show that, for fixed $a \in \mathbb{N}$ the Betti numbers of $\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m$ are given by '*universal*' polynomials on m and the Betti numbers of $\boldsymbol{X}$.
- Prove the degeneracy of the Leray spectral sequences for usual maps between generalized configuration spaces, e.g. the canonical projections $\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \twoheadrightarrow \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$.
- Given $a \in \mathbb{N}$, estimate the ranks for representation stability and character polynomiality, in the Church-Farb sense ([8]), of the family $\{\mathcal{S}_m : H(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$.

In our approach to these problems, we used what we call '*the fundamental complex of* $\boldsymbol{X}$ *for* $\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m$ '. This is a particular complex of graded $\mathcal{S}_m$-modules

$$0 \to H_{\mathrm{c}}^{*-\ell+1}(\Delta_1\boldsymbol{X}^m) \to \cdots \to H_{\mathrm{c}}^{*-1}(\Delta_{\ell-1}\boldsymbol{X}^m) \to H_{\mathrm{c}}^{*}(\Delta_{\ell}\boldsymbol{X}^m) \to H_{\mathrm{c}}^{*}(\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m) \to 0\,,$$

having the remarkable property of being exact whenever the '*interior*' cohomology of $\boldsymbol{X}$, *i.e.* the image of the natural map $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{X})$, vanishes. Moreover, these are equivalent properties when $\boldsymbol{X}$ is an oriented topological manifold (th. 3.2.3).

We call '*i-acyclic*' any space with no interior cohomology. First examples of such spaces are non-compact acyclic spaces, non-compact connected real Lie groups, and, more generally, if $\boldsymbol{X}$ is i-acyclic, by every open subset $U \subseteq \boldsymbol{X}$, every quotient $\boldsymbol{X}/W$ by a finite group W, and every cartesian product $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ for arbitrary $\boldsymbol{Y}$.

An important part of this work is about what follows the fact that the fundamental complex is an $\mathcal{S}_m$-module resolution for $H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m)$, and thereafter, that questions about Betti numbers, character formulas and representation stability, may be tracked through recursive methods.

Another important part, is devoted to the design of a spectral sequence that creates a bridge from configuration spaces of i-acyclic spaces to configuration spaces of general spaces. The device allows the generalization of some of our main results for configuration spaces of i-acyclic spaces to the general case.

(*) Université Paris Diderot-Paris 7, IMJ-PRG, CNRS, Bâtiment Sophie Germain, bureau 608, Case 7012, 75205. Paris Cedex 13, France. Contact : `alberto.arabia@imj-prg.fr`.
MSC-class : 55-XX (Algebraic topology), 55R80 (Configuration spaces), 20-XX (Group theory), 20C30 (Representations of finite symmetric groups), 18G40 (Spectral sequences)

– For the character formula problem, we generalize Macdonald's well-known formula of the character of the cohomology of the cartesian products $\boldsymbol{X}^m$ ([28]), to the case of the configuration spaces $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$.

Theorem (10.5.3). Let $\boldsymbol{X}$ be an i-acyclic space. If $\alpha \in \mathcal{S}_m$, we have

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\alpha,T)}{T^m} = \prod_{d=1}^{m} d^{\mathsf{x}_d} \Big(\sum_{e\,|\,d} \mu\big(\tfrac{d}{e}\big) \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e} \Big)^{\underline{\mathsf{x}_d}},$$

where $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m)(\alpha,T) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{tr}(\alpha{:}H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m))\,(-T)^i$, and $(1^{\mathsf{x}_1}, 2^{\mathsf{x}_2}, \ldots, m^{\mathsf{x}_m}) \vdash m$ is the type of the permutation α, $\mu(_)$ is the Möbius function, $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(_)$ is the Poincaré polynomial of $H_{\mathrm{c}}(_)$, and $(_)^{\underline{r}}$ denotes the falling factorial.

– For the Poincaré polynomial problem, we settled the case of $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ by a simple closed formula, almost immediate consequence of the i-acyclicity property, while for the quotients of $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ by finite subgroups of $\mathcal{S}_m$, we use the previous character formula (10.5.3). As examples, we worked through the cases of the '*cyclic*' configuration space $\boldsymbol{CF}_m(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\boldsymbol{C}_m$, where $\boldsymbol{C}_m := \langle(1,\ldots,m)\rangle \subseteq \mathcal{S}_m$, and of the '*unordered*' configuration space $\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\mathcal{S}_m$.

Let $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(_)$ denote the Poincaré polynomial of $H_{\mathrm{c}}(_)$, $\phi(_)$ the Euler ϕ function, $\mu(_)$ the Möbius function, and $(_)^{\underline{r}}$ the falling factorial. The following equalities hold whenever $\boldsymbol{X}$ is an i-acyclic space.

Theorem (4.2.1):
$$\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(-T)}{T^m} = \Big(\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T)}{T}\Big)^{\underline{m}}.$$

Theorem (11.2.1):

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{CF}_m)(-T)}{T^m} = \frac{1}{m}\sum_{d\,|\,m} \phi(d)\, d^{m/d} \Big(\sum_{e\,|\,d} \mu\big(\tfrac{d}{e}\big) \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e} \Big)^{\underline{m/d}}.$$

Theorem (11.3.1)

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X}))(-T)}{T^m} = \frac{1}{m!} \sum_{\lambda:=(1^{\mathsf{x}_1},\ldots,m^{\mathsf{x}_m})\vdash m} h_\lambda \prod_{d=1}^{m} d^{\mathsf{x}_d} \Big(\sum_{e\,|\,d} \mu\big(\tfrac{d}{e}\big) \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e} \Big)^{\underline{\mathsf{x}_d}},$$

where h_λ is the cardinal of the set of permutations of $\mathcal{S}_m$ whose cycle decomposition is of type $\lambda := (1^{\mathsf{x}_1}, \ldots, m^{\mathsf{x}_m}) \vdash m$.

– The particularly simple form of the Poincaré polynomial of $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ suggested a sort of cohomological triviality for the projections $\pi_a : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ and consequently, the degeneration of the associated Leray spectral sequences. We show that this is indeed the case when $\boldsymbol{X}$ is i-acyclic and locally connected (Th. 12.4.9).

– For the representation stability problem, we prove the following theorems.

Theorem (9.3.15). Let $\boldsymbol{M}$ be a connected oriented pseudomanifold of dimension $\geqslant 2$. For a, $i \in \mathbb{N}$, the family of representations $\{\mathcal{S}_m{:}H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m)\}_m$ is monotone and stationary for $m \geqslant 4i+4a$, if $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, and for $m \geqslant 2i+4a$, if $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$. The corresponding families of characters and Betti numbers are (hence) polynomial and the family $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m/\mathcal{S}_m)\}_m$ is constant within the same ranges of m.

Proposition 11.6.1 states moreover that the family $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$ is constant for $m \geqslant 2i$, if $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, and for $m \geqslant i$, if $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$.

These theorems were proved by Church ([7], 2012) for $\boldsymbol{M}$ smooth and for the family $\{\mathcal{S}_m : H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$. We succeeded in generalizing Church's theorems following two directions. First by removing the regularity assumption in the space $\boldsymbol{M}$, and second by incorporating the families of generalized configuration spaces $\{\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m\}_m$ (singular even if $\boldsymbol{M}$ is smooth), for which there was no previous conjecture. Our methods are completely different from those of Church, who relies on the work of Totaro ([35]) on the Leray spectral sequence associated to the embedding $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}) \hookrightarrow \boldsymbol{M}^m$ when $\boldsymbol{M}$ is smooth.

Our strategy was to prove first the theorems when $\boldsymbol{M}$ is i-acyclic (9.2.3) using a combinatorial argument based on the exactness of the fundamental complexes that allows the computation of the stability and monotonicity ranks from those of the spaces $\Delta_{\leqslant m}\boldsymbol{M}^m = \boldsymbol{M}^m$ for which the answer is quite simple. The combinatorics make use of two induction functors in the category of $\boldsymbol{FI}$-modules, the functors $\boldsymbol{I}^a, \boldsymbol{\Theta}^a : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \to \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])$ (8.2) that shift $\mathcal{S}_{m-a}$-modules to $\mathcal{S}_m$-modules and for which we can control the way they modify the stability and monotonicity ranks (thm. 8.2.2).

The statement for a general pseudomanifold $\boldsymbol{M}$ is afterwards handled through the fact that $\boldsymbol{M}$ is the difference $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{\geqslant 0} \smallsetminus \boldsymbol{M}_{>0}$ where both $\boldsymbol{M}_{\geqslant 0} := \boldsymbol{M} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ and $\boldsymbol{M}_{>0} := \boldsymbol{M} \times \mathbb{R}_{>0}$ are i-acyclic. One is then naturally lead to construct a spectral sequence $(I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m)_r, d_r)$ (6.5.2) converging to $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ and such that the $I\!E_1$ page only concerns configuration spaces for i-acyclic spaces. We have (9.3.13-(b)):

$$I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \bigoplus\nolimits_{\tau \in \mathcal{T}(p+1,m)} \mathrm{ind}_{\mathcal{H}_\tau}^{\mathcal{S}_m} \boldsymbol{\sigma} \otimes H_{\mathrm{BM}}^Q(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0})) \;\Rightarrow\; H_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))\,,$$

with $Q := i-(m-(p+1))\,(d_{\boldsymbol{M}}-1)$. We denote by $\mathcal{T}(p+1,m)$ the set of Young tableaux of m boxes with first column $(m-p,\dots,m)$, and by $\mathcal{H}_\tau$ the stabilizer of τ in $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ acting on $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}))$ through the alternate representation $\boldsymbol{\sigma}$ of $\mathcal{S}_{m-(p+1)}$. We call this spectral sequence '*basic*'. The construction makes it compatible with pull-backs and allows the estimation of the stability and monotonicity ranks of the family $\{H_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$ from those already known in the i-acyclic case of $\{H_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{>0}))\}_m$. The induction functor $\boldsymbol{I}^a$ is then used again to settle the case of $\{H_{\mathrm{BM}}^i(\Delta_{m-a}\boldsymbol{M}^m)\}$, and a decreasing induction based on long exact sequences handles the remaining case of $\{H_{\mathrm{BM}}^i(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m)\}$.

The study of the families $\{\mathrm{Betti}_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$ follows the same approach. When $\boldsymbol{M}$ is i-acyclic, the explicit formula for the character $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ in theorem 10.5.3 gives us quite precise information on the multiplicity of the trivial representation of $\mathcal{S}_m$ in $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$. We are then able to prove the following fact.

Proposition 11.5.3. Let $\boldsymbol{M}$ be a connected oriented i-acyclic pseudomanifold. The family $\{\mathrm{Betti}_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M};\mathbb{Q}))\}_m$ is constant for each $i \in \mathbb{N}$ and all $m \geqslant i$.

Based on this result, the use of basic spectral sequences settles the case already mentioned (prop. 11.6.1) where $\boldsymbol{M}$ is a general pseudomanifold.

We believe that even if there are many questions still to be settled, the usefulness of fundamental complexes as a combinatorial tool in the case of i-acyclic spaces, and of the basic spectral sequences to pervade the broader category of pseudomanifolds, should be clear following this work.

Résumé. Les espaces de configuration « *généralisés* » d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ sont les sous-espaces $\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m \subseteq \boldsymbol{X}^m$ définis, pour $0 \leqslant \ell \leqslant m \in \mathbb{N}$, par

$$\begin{cases} \Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m := \left\{(z_1,\dots,z_m) \in \boldsymbol{X}^m \;\middle|\; \operatorname{Card}\{z_1,\dots,z_m\} \leqslant \ell\right\}, \\ \Delta_{\ell}\boldsymbol{X}^m \;\; := \Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m \smallsetminus \Delta_{\leqslant \ell-1}\boldsymbol{X}^m\,, \quad \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}) := \Delta_m\boldsymbol{X}^m\,. \end{cases}$$

Ils sont munis de l'action du groupe symétrique $\mathcal{S}_m$ par permutation de coordonnées. Notre première motivation dans ce travail a été de transposer certaines questions standard sur les espaces de configuration classiques $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ aux espaces de configuration généralisés, pour ensuite tenter de les résoudre pour des larges familles d'espaces à l'aide de méthodes uniformes. Parmi ces questions, les suivantes ont trouvé des réponses très complètes pour les coefficients de cohomologie dans un corps de caractéristique nulle.

- Calculer le caractère de la représentations $\mathcal{S}_m$:$H(\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)$.
- Calculer le polynôme de Poincaré des quotients de $\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m$ pas des sous-groupes de $\mathcal{S}_m$. Montrer que, pour $a \in \mathbb{N}$ fixé, les nombres de Betti de $\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m$ sont donnés un polynôme « *universel* » en m et en les nombres de Betti de $\boldsymbol{X}$.
- Montrer que la suite spectrale de Leray des fibrations entre espaces de configuration dégénèrent, notamment celles associées aux projections $\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \twoheadrightarrow \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$.
- Pour $a \in \mathbb{N}$ fixé, estimer les rangs de stabilité de représentation et de polynomialité de caractère, au sens de Church-Farb ([8]), de la famille $\{H(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$.

Ces questions sont abordées au moyen de ce que nous appelons le « *complexe fondamental de* $\boldsymbol{X}$ *pour* $\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m$ ». Il s'agit d'un complexe de $\mathcal{S}_m$-modules gradués :

$$0 \to H_{\mathrm{c}}^{*-\ell+1}(\Delta_1\boldsymbol{X}^m) \to \cdots \to H_{\mathrm{c}}^{*-1}(\Delta_{\ell-1}\boldsymbol{X}^m) \to H_{\mathrm{c}}^{*}(\Delta_{\ell}\boldsymbol{X}^m) \to H_{\mathrm{c}}^{*}(\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m) \to 0\,,$$

qui a la propriété remarquable d'être exact lorsque la cohomologie « *intérieure* » de $\boldsymbol{X}$, *i.e.* de l'image de l'application naturelle $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{X})$, est nulle. Il y a même équivalence de ces propriétés lorsque $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique orientable (th. 3.2.3).

Nous appelons « *i-acyclique* » tout espace sans cohomologie intérieure. Les premiers exemples de tels espaces sont les espaces acycliques connexes non compacts, les groupes de Lie réels connexes non compacts, et, plus généralement, si $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, tout quotient $\boldsymbol{X}/W$ par un groupe fini W, et tout produit cartésien $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$, où $\boldsymbol{Y}$ est quelconque, le sont aussi.

Une large partie de ce travail s'intéresse aux conséquences du fait que le complexe fondamental est une résolution par $\mathcal{S}_m$-modules de $H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m)$. Les questions de stabilité de représentations, de formules de caractères, de nombres de Betti, sont alors susceptibles d'approches récursives. Une autre partie importante est consacrée à la conception d'une suite spectrale particulière qui établit un pont entre les espaces de configuration des espaces i-acycliques et ceux des espaces généraux, ce qui permet d'entreprendre la généralisation des résultats connus du cadre i-acyclique au cadre général.

– Pour le problème de la formule des caractères, nous étendons la formule bien connue de Macdonald du caractère de la cohomologie des produits cartésiens $\boldsymbol{X}^m$ ([28]), au cas des espaces de configuration $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$.

Théorème. Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Si $\alpha \in \mathcal{S}_m$, on a

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\alpha,T)}{T^m} = \prod_{d=1}^{m} d^{\mathsf{x}_d} \Big(\sum_{e\,|\,d} \mu\big(\tfrac{d}{e}\big) \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e} \Big)^{\underline{\mathsf{x}_d}},$$

où $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m)(\alpha,T) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{tr}(\alpha{:}H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m))\,(-T)^i$, et où $(1^{\mathsf{x}_1}, 2^{\mathsf{x}_2}, \dots, m^{\mathsf{x}_m}) \vdash m$ est le type de la permutation α, $\mu(_)$ est la fonction de Möbius, $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(_)$ est le polynôme de Poincaré de $H_{\mathrm{c}}(_)$, et $(_)^{\underline{r}}$ est la factorielle décroissante.

– Pour le problème des polynômes de Poincaré, le cas de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ relève d'une formule fermée très simple conséquence de la i-acyclicité de $\boldsymbol{X}$, tandis que les cas plus généraux des quotients de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ par des sous-groupes finis de $\mathcal{S}_m$ sont traités via la formule des caractères 10.5.3. C'est ainsi que nous procédons pour l'espace des configurations « *cycliques* » $\boldsymbol{CF}_m(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\boldsymbol{C}_m$, où $\boldsymbol{C}_m := \langle(1,\dots,m)\rangle \subseteq \mathcal{S}_m$, et celui des configurations « *non ordonnées* » $\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\mathcal{S}_m$.

Notons, $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(_)$ le polynôme de Poincaré de $H_{\mathrm{c}}(_)$, $\phi(_)$ la fonction indicatrice d'Euler, $\mu(_)$ la fonction de Möbius, et $(_)^{\underline{r}}$ la factorielle décroissante. Pour tout espace i-acyclique $\boldsymbol{X}$, nous prouvons les égalités suivantes.

Théorème (4.2.1) : $$\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(-T)}{T^m} = \Big(\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T)}{T}\Big)^{\underline{m}}.$$

Théorème (11.2.1) :

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{CF}_m)(-T)}{T^m} = \frac{1}{m}\sum_{d\,|\,m} \phi(d)\, d^{m/d} \Big(\sum_{e\,|\,d} \mu\big(\tfrac{d}{e}\big) \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e} \Big)^{\underline{m/d}}.$$

Théorème (11.3.1)

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X}))(-T)}{T^m} = \frac{1}{m!} \sum_{\lambda:=(1^{\mathsf{x}_1},\dots,m^{\mathsf{x}_m})\vdash m} h_\lambda \prod_{d=1}^{m} d^{\mathsf{x}_d} \Big(\sum_{e\,|\,d} \mu\big(\tfrac{d}{e}\big) \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e} \Big)^{\underline{\mathsf{x}_d}},$$

où h_λ est le cardinal de l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_m$ dont la décomposition en cycles disjoints est de type $\lambda := (1^{\mathsf{x}_1},\dots,m^{\mathsf{x}_m}) \vdash m$.

– L'expression simple du polynôme de Poincaré de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ suggérait l'existence d'une forme de trivialité cohomologique des projections $\pi_a : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$, et donc la dégénérescence des suites spectrales de Leray associées. Nous montrons que c'est en effet le cas lorsque $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique et localement connexe (Th. 12.4.9).

– Pour la stabilité de représentations, nous prouvons les théorèmes suivants.

Théorème (9.3.15). Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété connexe orientable de dimension $\geqslant 2$. Pour $a, i \in \mathbb{N}$, la famille de représentations $\{\mathcal{S}_m{:}H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m;k)\}_m$ est monotone et stationnaire pour $m \geqslant 4i{+}4a$, si $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, et pour $m \geqslant 2i{+}4a$, si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$. Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont (donc) polynomiales et la famille $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m/\mathcal{S}_m)\}_m$ est constante sur ces mêmes intervalles de m.
La proposition 11.6.1 va encore plus loin pour la famille $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$ en montrant qu'elle est constante pour $m \geqslant 2i$, si $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, et pour $m \geqslant i$, si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$.

Ces théorèmes sont dus à Church ([7], 2012) dans le cas où $\boldsymbol{M}$ est lisse et pour la famille $\{\mathcal{S}_m{:}H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$. Nos énoncés généralisent ceux de Church dans deux

directions. Premièrement, en s'affranchissant de l'hypothèse de lissité de $\boldsymbol{M}$, et, deuxièmement, en incorporant les familles des espaces de configuration généralisés $\{\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m\}_m$ (singuliers, même si $\boldsymbol{M}$ ne l'est pas) pour lesquelles il n'y avait pas de conjecture. Notre approche est totalement différente de celle de Church qui s'appuie sur les travaux de Totaro ([35]) sur la suite spectrale de Leray associée au plongement $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}) \hookrightarrow \boldsymbol{M}^m$ lorsque $\boldsymbol{M}$ est lisse.

La stratégie de la preuve a consisté à se restreindre dans un premier temps aux pseudovariétés $\boldsymbol{M}$ qui sont i-acycliques (9.2.3) et pour lesquelles on peut élaborer une combinatoire basée sur l'exactitude des complexes fondamentaux qui réduit les questions de stabilité et monotonie au cas des familles d'espaces produit $\{\boldsymbol{M}^m\}_m$ où la réponse est assez simple. La combinatoire repose sur deux foncteurs d'induction dans la catégorie des $\boldsymbol{FI}$-modules, les foncteurs $\boldsymbol{I}^a, \boldsymbol{\Theta}^a : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \to \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])$ (8.2) qui décalent les $\mathcal{S}_{m-a}$-modules vers des $\mathcal{S}_m$-modules et pour lesquels nous avons un contrôle assez précis de la manière dont ils perturbent les rangs de stabilité et monotonie (thm. 8.2.2).

Le cas où $\boldsymbol{M}$ est une pseudovariété générale est ensuite abordé moyennant la remarque que $\boldsymbol{M}$ se réalise comme différence $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{\geqslant 0} \smallsetminus \boldsymbol{M}_{>0}$, où $\boldsymbol{M}_{\geqslant 0} := \boldsymbol{M} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ et $\boldsymbol{M}_{>0} := \boldsymbol{M} \times \mathbb{R}_{>0}$ sont des pseudovariétés i-acycliques. Cette observation simple conduit naturellement à la construction de la suite spectrale $(\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_r, d_r)$ (6.5.2) qui converge vers $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ et dont la page $\mathbb{E}_1$ concerne uniquement des espaces de configuration pour des espaces i-acycliques. Nous avons (9.3.13-(b)) :

$$\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \bigoplus\nolimits_{\tau \in \mathcal{T}(p+1,m)} \mathrm{ind}_{\mathcal{H}_\tau}^{\mathcal{S}_m} \boldsymbol{\sigma} \otimes H_{\mathrm{BM}}^Q(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0})) \;\Rightarrow\; H_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))\,,$$

où $Q := i-(m-(p+1))\,(d_{\boldsymbol{M}}-1)$. Nous y avons noté $\mathcal{T}(p+1,m)$ l'ensemble des tableaux de Young à m boites et première colonne $(m-p,\dots,m)$, et $\mathcal{H}_\tau$ le stabilisateur de τ dans $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ et dont l'action sur $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}))$ est tordue par la signature $\boldsymbol{\sigma}$ de $\mathcal{S}_{m-(p+1)}$. Nous appelons ces suites spectrales « *basiques* ». Leur construction est compatible aux images-inverses et permet d'estimer les rangs de monotonie et stabilité de $\{H_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$ à partir de ceux déjà connus dans le cas i-acyclique de $\{H_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{>0}))\}_m$. Le foncteur d'induction $\boldsymbol{I}^a$ est ensuite de nouveau utilisé pour atteindre $\{H_{\mathrm{BM}}^i(\Delta_{m-a}\boldsymbol{M}^m)\}_m$ et une récurrence descendante basée sur des suites longues de cohomologie fixe le cas de $\{H_{\mathrm{BM}}^i(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m)\}$.

L'étude des familles $\{\mathrm{Betti}_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$ suit la même approche. Lorsque $\boldsymbol{M}$ est i-acyclique, la formule explicite du caractère $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ donnée par le théorème 10.5.3 nous permet d'obtenir une information assez précise de la multiplicité de la représentation triviale de $\mathcal{S}_m$ dans $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$. Nous sommes alors en mesure de prouver le résultat suivant.

Proposition 11.5.3. Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété connexe orientable et i-acyclique. La famille $\{\mathrm{Betti}_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M};\mathbb{Q}))\}_m$ est constante pour chaque $i \in \mathbb{N}$ et tout $m \geqslant i$.

À partir de là, les suites spectrales basiques permettent d'examiner le cas où $\boldsymbol{M}$ est une pseudovariété générale et d'établir la proposition 11.6.1 déjà mentionnée.

Nous pensons que même s'il reste beaucoup de questions ouvertes, l'utilité des complexes fondamentaux en tant qu'outil d'approche combinatoire dans le cas des espaces i-acycliques, et l'utilité des suites spectrales basiques pour s'étendre dans le cadre plus large des pseudovariétés, devrait être clair d'après ce travail.

Table des matières

0. Introduction **9**
1. Espaces *i*-acycliques **18**
1.1 Généralités sur les espaces topologiques considérés 18
1.2 Espaces i-acycliques et $\cup$-acycliques 20
1.3 Caractérisations de la i-acyclicité 21
2. Espaces de configuration généralisés **24**
2.1 Définitions et notations. 24
2.2 Fibrations des espaces de configuration généralisés 26
2.3 Sous-espaces $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{X})$ et décomposition de $\Delta_{\ell}\boldsymbol{X}^m$ 27
2.4 Dimension et finitude cohomologique de $\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m$ 28
3. Théorèmes de scindage et complexes fondamentaux **30**
3.1 Théorème de scindage pour $\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m$ 30
3.2 Complexe fondamental de $\boldsymbol{X}$ pour $\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m$ 32
3.3 Le théorème de scindage pour $\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{F}^{\lambda}(\boldsymbol{X})$ 33
3.4 Sous-espaces $\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X})$ et sous-groupes $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}} \subseteq \mathcal{S}_m$ 36
3.5 Complexe fondamental de $\boldsymbol{X}$ pour $\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X})$ 38
4. Cohomologie des espaces de configuration, cas *i*-acyclique **39**
4.1 Généralités sur le polynôme de Poincaré 39
4.2 Polynômes de Poincaré de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ et de $\Delta_{\leqslant m-1}\boldsymbol{X}^m$ 40
4.3 Polynômes de Poincaré de $\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m$ 42
4.4 Polynôme universel pour $\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m$ 43
5. Représentations du groupe symétrique **44**
5.1 Notations pour le décompositions et les diagrammes de Young 44
5.2 Décomposition ouverte $\mathcal{S}_m$-stable de $\Delta_{\ell}\boldsymbol{X}^m$ 45
5.3 Foncteurs d'induction $\boldsymbol{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m}$ et $\boldsymbol{I}_{\ell}^m$ 46
5.4 Opérateurs d'inductions itérées $\boldsymbol{I}(\sigma)$ et $\boldsymbol{\Theta}_{\ell}^m$ 47
6. Cohomologie des espaces de configuration, cas général **48**
6.1 Cohomologie de Borel-Moore. 48
6.2 Quelques morphismes en cohomologie de Borel-Moore 50
6.3 Approche de $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ à l'aide d'espaces i-acycliques 53
6.4 Une suite spectrale pour $H_{\mathrm{BM}}(\Delta_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}^m \smallsetminus \boldsymbol{M}_x^m))$ 54
6.5 La suite spectrale « *basique* » pour $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ 61
6.6 Naturalité de la suite spectrale basique pour $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ 64
6.7 Relèvement spectral de $p_m^* : H_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})) \to H_{\mathrm{BM}}^i(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}))$ 74
7. Stabilité des familles de représentations **77**
7.1 Motivations 77
7.2 Catégorie des ***FI***-modules 78
7.3 Caractères polynomiaux et stabilité des ***FI***-modules 82
7.4 Monotonie et stabilité des ***FI***-modules 83
7.5 Poids d'un ***FI***-module 86
7.6 Les ***FI***-modules $\mathcal{M}_a^H(W)$. 89
7.7 Catégorie des ***FB***-modules. 90
7.8 Le ***FI***-modules $\mathcal{M}(\lambda)$ et $\mathcal{V}(\lambda)$. 90
7.9 Monotonie, stabilité et co-invariants 93

8. Foncteurs d'induction dans Mod(k[FI]) 99
8.1 Les foncteurs d'induction $\boldsymbol{Ind}_\lambda$ et $\boldsymbol{Ind}_{\rho,\lambda}$ . . . 99
8.2 Les foncteurs d'induction $\boldsymbol{I}^a$, $\boldsymbol{I}(\mathfrak{a})$ et $\boldsymbol{\Theta}^a$ . . . 108
9. Stabilité des familles $\{\mathcal{S}_m : \boldsymbol{H}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{\Delta}_{?m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$ 110
9.1 Structure de $\boldsymbol{FI}$-module de $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m)\}_m$ . . . 110
9.2 Les familles de représentations $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$ . . . 112
9.3 Stabilité des familles de représentations $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m)\}_m$ . . . 114
10. Calcul du caractère de $\mathcal{S}_m$-module de $\boldsymbol{H}_{\mathbf{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ 126
10.1 Série de caractères de $\mathcal{S}_m$ . . . 126
10.2 Séries de caractères de $\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X})$ . . . 127
10.3 Séries de traces pour un m-cycle . . . 127
10.4 Séries des traces pour une puissance d'un m-cycle . . . 129
10.5 Séries des traces pour une permutation générale . . . 132
10.6 Comparaison entre $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ et $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}\smallsetminus a))$ . . . 134
10.7 Comparaison entre $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))$ et $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X}\smallsetminus a))\cdot\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}))$ . . . 135
11. Quotients d'espaces de configuration généralisés 136
11.1 Polynômes de Poincaré de $(\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)/\boldsymbol{H}$ . . . 137
11.2 Espaces de configurations cycliques $\boldsymbol{CF}_m(\boldsymbol{X})$ . . . 137
11.3 Espaces de configurations non-ordonnées $\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X})$ . . . 139
11.4 Sur le rang de stabilité de la famille $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$ . . . 141
11.5 Stabilité de $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$, cas i-acyclique. . . . 144
11.6 Stabilité de $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$, cas général . . . 150
11.7 Stabilité de $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}(\boldsymbol{M}^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$, cas général . . . 153
12. Suites spectrales de Leray 154
12.1 Cohomologie à support π-propre . . . 154
12.2 Localisation du théorème de scindage . . . 157
12.3 Constance des faisceaux de cohomologie à support π-propre . . . 160
12.4 Dégénérescence des suites spectrales de Leray . . . 164
13. Questions diverses sur les espaces i-acycliques 171
13.1 Espaces de configuration généralisés . . . 171
13.2 Variétés toriques affines . . . 173
13.3 Groupes de Lie non-compacts . . . 173
13.4 Ouverts i-acycliques de $I\!P_n(\mathbb{R})$ . . . 173
13.5 Ouverts i-acycliques de $I\!P_n(\mathbb{C})$ . . . 174
13.6 Ouverts non i-acycliques de $I\!P_n(\mathbb{C})$ . . . 176
13.7 Courbes algébriques i-acycliques . . . 176
13.8 Bouquet d'espaces i-acycliques . . . 178
13.9 Sommes amalgamées d'espaces i-acycliques . . . 178
13.10 La bouteille de Klein épointée . . . 181
13.11 Revêtements non i-acycliques à base i-acyclique . . . 183
13.12 Fibrations non i-acycliques à fibre et base i-acycliques . . . 184
14. Rappels sur les nombres de Stirling 185
14.1 Factorielles croissantes et décroissantes . . . 186
14.2 Nombres de Stirling de première espèce . . . 186
14.3 Nombres de Stirling de deuxième espèce . . . 187
14.4 Nombres de Stirling non signés et cardinaux . . . 188
Notations 191

0. Introduction

Les motivations à l'origine de ce travail ont été les suivantes.

– La recherche d'une large classe d'espaces $\boldsymbol{X}$ pour lesquels le polynôme de Poincaré des espaces de configuration $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ et le caractère de la représentation par permutation de coordonnées du groupe symétrique $\mathcal{S}_m$ sur $H(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ sont donnés par une formule fermée ne dépendant que de m et du polynôme de Poincaré de $\boldsymbol{X}$.
– La généralisation des théorèmes de Church (2012 [7]) sur la polynomialité de la famille de représentations $\{\mathcal{S}_m : H(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))\}_m$ du cas où $\boldsymbol{X}$ est une variété différentiable au cas où $\boldsymbol{X}$ est une variété algébrique complexe.
– L'étude de la dégénérescence des suites spectrales de Leray associées aux projections $\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$.
– L'étude de toutes ces questions pour les espaces de configuration généralisés $\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m$ (*cf.* 0.2).

0.1. ***Polynômes de Poincaré.*** On suppose $m > 0$. Pour tout espace topologique $\boldsymbol{X}$, le produit cartésien $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ contient $\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{X})$ comme partie ouverte. Son complémentaire est l'ensemble :

$$\Delta_m(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})) = \{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}) \mid x_0 \in \{x_1, \dots, x_m\}\}\,,$$

réunion disjointe des sous-espaces fermés :

$$\Delta_{(0,i)}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})) = \{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}) \mid x_0 = x_i\}\,,$$

où $i = 1, \dots, m$, clairement homéomorphes à $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$. On a donc

$$H_{\mathrm{c}}(\Delta_m(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))) \sim H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))^m\,,$$

et la décomposition en parties respectivement ouverte et fermée

$$\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{X}) \;\sqcup\; \Delta_m(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))\,, \qquad (\diamond)$$

donne lieu à la suite exacte longue de cohomologie ([1]) à support compact

$$\to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{X})) \xrightarrow{\iota} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})) \xrightarrow{\rho} H_{\mathrm{c}}(\Delta_m(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))) \xrightarrow{c} \qquad (*)$$

dont on déduit la relation de récurrence entre caractéristiques d'Euler des cohomologies à support compact $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}) = (\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) - m)\cdot\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m)$ à l'origine de l'égalité

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{X})) = \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})^{\underline{m+1}}\,,$$

où $(_)^{\underline{m+1}}$ désigne la factorielle décroissante (14.1). Mais cette égalité ne renseigne pas sur la valeur de chaque nombre de Betti de $\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{X})$ séparément, ce pour quoi il faudrait une certaine forme de scindage de la suite $(*)$. Cela arrive, par exemple, lorsque $\boldsymbol{X}$ est un groupe de Lie $\boldsymbol{G}$ réel connexe et *non*

[1] À coefficients dans un corps de caractéristique nulle.

compact. Dans ce cas, le morphisme de restriction

$$\rho : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{G})) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_m(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{G})))$$

est nul et la suite courte

$$0 \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))^m[-1] \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{X})) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})) \to 0\,, \quad (\ddagger)$$

extraite de $(*)$ est exacte. En effet, le morphisme ρ est somme des restrictions

$$\rho_i : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{G})) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{(0,i)}(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{G})))\,,$$

et, d'autre part, on dispose de l'application $\varphi_i : \boldsymbol{G}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{G}) \to \boldsymbol{G}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{G})$, $(g,\overline{x}) \mapsto (g^{-1}\cdot x_i, \overline{x})$, qui est un difféomorphisme qui échange les inclusions :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{G}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{G}) \\ \cup\!\!| \\ \Delta_{(0,i)}(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{G})) \end{pmatrix} \underset{\varphi_i}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{G}) \\ \cup\!\!| \\ \{e\}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{G}) \end{pmatrix}\,,$$

de sorte que l'annulation de ρ_i équivaut à l'annulation du morphisme de restriction $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{G})) = H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{G}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{G})) \to H_{\mathrm{c}}(\{e\}) \otimes \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{G})$, elle-même équivalente à l'annulation de la restriction $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{G}) \to H_{\mathrm{c}}(\{e\})$, autrement dit à la non compacité de $\boldsymbol{G}$.

L'exactitude de la suite courte $(\ddagger)$ donne alors la relation de récurrence [2] $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{G}))(T) = (\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{G})(T) + mT)\cdot\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{G}))(T)$, dont on déduit

$$\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{G}))(T) = \prod\nolimits_{i=0,\dots,m}(\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{G})(T) + i\,T)\,, \qquad (\dagger)$$

et, par dualité de Poincaré,

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{G}))(T) = \prod\nolimits_{i=0,\dots,m}(\mathcal{P}(\boldsymbol{G})(T) + i\,T^{\dim\boldsymbol{G}-1})\,, \qquad (\dagger\dagger)$$

ce qui est le type de formule fermée que nous avions en vue.

0.2. ***Les espaces de configuration généralisés.*** Dans nos recherches nous avons aussi été guidés par une autre nécessité : celle de trouver un cadre aussi symétrique que possible pour préserver l'action du groupe des permutations $\mathcal{S}_m$ sur les coordonnées de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$, ce qui n'est pas le cas de la décomposition $(\diamond)$. Cela nous a conduit à nous intéresser aux espaces de configuration « *généralisés* » suivants. Pour $0 \leqslant \ell \leqslant m \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{cases} \Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m := \{(x_1,\dots,x_m) \in \boldsymbol{X}^m \mid \mathrm{Card}\,\{x_1,\dots,x_m\} \leqslant \ell\}\,, \\ \Delta_{\ell}\boldsymbol{X}^m := \Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m \smallsetminus \Delta_{\leqslant\ell-1}\boldsymbol{X}^m\,, \quad \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}) := \Delta_m\boldsymbol{X}^m\,. \end{cases}$$

La décomposition en parties $\mathcal{S}_m$-stables respectivement ouverte et fermée :

$$\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m = \Delta_{\ell}\boldsymbol{X}^m \;\sqcup\; \Delta_{\leqslant\ell-1}\boldsymbol{X}^m \qquad (\diamond\diamond)$$

[2] On note $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \dim_{\mathbb{Q}} H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M})\,T^i$ (resp. $\mathcal{P}(\boldsymbol{M}) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \dim_{\mathbb{Q}} H^i(\boldsymbol{M})\,T^i$) le polynôme de Poincaré pour la cohomologie à support compact (resp. ordinaire) de $\boldsymbol{M}$.

donne alors lieu à la suite courte de $\mathcal{S}_m$-modules (à priori non exacte)

$$0 \to H_c(\Delta_{\leqslant \ell-1}\boldsymbol{X}^m)[-1] \to H_c(\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m) \to H_c(\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m) \to 0\,, \qquad (\ddagger\ddagger)$$

extraite de la suite longue de cohomologie à support compact associée à $(\diamond\diamond)$.

En cherchant à montrer l'exactitude de $(\ddagger\ddagger)$ lorsque $\boldsymbol{X}$ est un groupe de Lie non compact, nous avons réalisé que ce n'était pas tant le fait que $\boldsymbol{X}$ possède une structure de groupe, mais plutôt que sa cohomologie intérieure est nulle, qui est à l'origine du phénomène de scindage. Le théorème « *de scindage* » 3.1.1 énonce cette observation sous l'a forme de l'implication $(A) \Rightarrow (B)$ des propriétés suivantes.

- (A) La cohomologie « *intérieure* » de $\boldsymbol{X}$, *i.e.* l'image de l'application naturelle $H_c(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{X})$, est nulle.
- (B) Pour tous $0 \leqslant \ell \leqslant m$, les suites courtes $(\ddagger)$ et $(\ddagger\ddagger)$ sont exactes.

Des propriétés qui sont même équivalentes lorsque $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique orientable.

0.3. *Les espaces i-acycliques.* À partir du théorème de scindage, une partie importante de notre travail va se concentrer dans les espaces vérifiant la propriété (A). Ce sont les espaces que nous appelons « *i-acycliques* ».

Il existe des familles assez larges d'exemples de tels espaces :
- Les espaces acycliques (p.e. contractiles) non compacts.
- Les ouverts des espaces i-acycliques.
- Les groupes de Lie $\boldsymbol{G}$ tels que $H_c^0(\boldsymbol{G}) = 0$.
- Tout produit $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$, où $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique et $\boldsymbol{Y}$ est quelconque.

0.4. *Le complexe fondamental de $\boldsymbol{X}$ pour $\boldsymbol{\Delta_{\leqslant \ell}X^m}$.* Dans 3.2.2, on concatène les suites $(\ddagger\ddagger)$ pour construire le complexe de $\mathcal{S}_m$-modules gradués

$$0 \to H_c(1)[-\ell+1] \to \cdots \to H_c(\ell-1)[-1] \to H_c(\ell) \to H_c(\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m) \to 0$$

avec $H_c(a) := H_c(\Delta_a \boldsymbol{X}^m)$, que nous appelons « *complexe fondamental de $\boldsymbol{X}$ pour $\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m$* ». Son principal intérêt réside dans l'assertion (a) suivante.

Théorème (3.2.3)
a) *Les complexes fondamentaux d'un espace i-acyclique sont exacts.*
b) *Une variété topologique orientable est i-acyclique, si et seulement si, ses complexes fondamentaux sont exacts.*

Les complexes fondamentaux sont donc des résolutions de $\mathcal{S}_m$-modules de $H_c(\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m)$ et permettent, lorsque $H_c(\boldsymbol{X}) < \infty$, de réduire la détermination du caractère $H_c(\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m)$ à ceux de $H_c(\Delta_a \boldsymbol{X}^m)$ pour $a \leqslant \ell$.

0.5. *Les polynômes de Poincaré de $\boldsymbol{\Delta_\ell X^m}$ et de $\boldsymbol{\Delta_{\leqslant \ell}X^m}$.* Les remarques des premiers paragraphes, étant basées sur le scindage de la suite longue $(\ddagger)$, s'appliquent par conséquent lorsque $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique. On a donc :

Proposition (4.2.1). Si $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique et que $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) < +\infty$, le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ est le polynôme

$$\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(T) = \prod_{i=0}^{m-1} \big(\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(T) + i \cdot T\big)\,.$$

À partir de là, le passage de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ à $\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m$ est assez simple dans la mesure où $\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m$ admet une décomposition en parties ouvertes homéomorphes à $\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X})$ indexée par les partitions de l'intervalle $[\![1,m]\!]$ en ℓ parties non vides. La proposition suivante établit alors que $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m)$ seul dépend de $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$, le lien étant donné par un certain polynôme « *universel* » de $\mathbb{Z}[P,T]$.

Proposition (4.2.5). Si $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique et tel que $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) < +\infty$, le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m)$ s'obtient en évaluant en $P := \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ le polynôme homogène de degré ℓ de $\mathbb{Z}[P,T]$:

$$\boldsymbol{Q}_\ell^m(P,T) = |\mathfrak{P}_\ell(m)| \cdot \prod\nolimits_{i=0,\dots,\ell-1} (P + i\,T)\,.$$

Ici, $\mathfrak{P}_\ell(m)$ désigne l'ensemble des partitions de $[\![1,m]\!]$ en ℓ parties non vides.

Le polynôme de Poincaré de $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant \ell} \boldsymbol{X}^m)$ est ensuite obtenu comme somme alternée des $\mathcal{P}(H_{\mathrm{c}}(\Delta_a \boldsymbol{X}^m)[a-\ell])$, grâce aux complexes fondamentaux.

Proposition (4.3.1). Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant \ell} \boldsymbol{X}^m)$ est le polynôme homogène de $\mathbb{Z}[\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), T]$, de degré ℓ, donné par la somme alternée (*cf.* 2.3.3)

$$\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant \ell} \boldsymbol{X}^m) = \sum\nolimits_{0 \leqslant a < \ell} (-1)^a \cdot |\mathfrak{P}_{\ell-a}(m)| \cdot \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{\ell-a}(\boldsymbol{X})) \cdot T^a\,.$$

0.6. *Le caractère de $\boldsymbol{H_{\mathrm{c}}(\Delta_{?\ell} X^m)}$.* Pour $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}^m$ stable sous l'action de $\mathcal{S}_m$ et tel que $\dim H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}) < \infty$, notons $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}; i)$ le caractère du $\mathcal{S}_m$-module $H_{\mathrm{c}}^i(\boldsymbol{Z}, \mathbb{Q})$. Le théorème suivant est conséquence immédiate de l'exactitude des complexes fondamentaux.

Théorème (5.3.3). Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique.

a) *Le caractère $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}); i)$ du $\mathcal{S}_m$-module $H_{\mathrm{c}}^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ vérifie*

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}); i) = \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^m; i) + \chi_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant m-1} \boldsymbol{X}^m; i-1)\,.$$

b) *Le caractère $\chi_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant \ell} \boldsymbol{X}^m; i)$ du $\mathcal{S}_m$-module $H_{\mathrm{c}}^i(\Delta_{\leqslant \ell} \boldsymbol{X}^m)$ vérifie*

$$\chi_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant \ell} \boldsymbol{X}^m; i) = \sum_{0 \leqslant a < \ell} \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_{\ell-a}(m)} (-1)^a \, \boldsymbol{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m} \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{\ell-a}(\boldsymbol{X}); i-a)\,.$$

où $\mathcal{Y}_{\ell-a}(m)$ est l'ensemble des décompositions de m en $\ell-a$ entiers positifs, et où, si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell-a}) = (\lambda_1^{\mu_1}, \dots, \lambda_r^{\mu_r})$, on a noté

$$G_\lambda := N_{\mathcal{S}_m}(\mathcal{P}_\lambda)/\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\mu_r}$$

où $\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\lambda_{\ell-a}}$.

Le caractère $\chi_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m)$ apparaît ainsi comme combinaison des caractères $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}))$ pour $a \leqslant \ell$. D'autre part, grâce à l'exactitude des suites (‡‡), le caractère $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}))$ est somme de $\chi_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant a-1}\boldsymbol{X}^a)$, avec (donc) $a-1<\ell$, et de $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^a) = \chi_{\mathcal{S}_a}(H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})^{\otimes a})$, caractère bien connu d'après Macdonald [28] (*cf.* 10.5.4). On a donc tous les ingrédients pour un algorithme de calcul des caractères de $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ et $H_{\mathrm{c}}(\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)$ à partir uniquement de la connaissance de $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^\ell)$ pour $\ell \leqslant m$. Cette observation est développée dans la section 5.4 qui introduit certains opérateurs d'induction dans les groupes de Grothendieck des catégories de représentations des groupes symétriques

$$\boldsymbol{\Theta}^m_\ell, \boldsymbol{I}^m_\ell : K_0(\mathrm{Mod}(k[\mathcal{S}_\ell])) \rightsquigarrow K_0(\mathrm{Mod}(k[\mathcal{S}_m]))$$

qui permettent dans le théorème suivant de relier les caractères des cohomologies des espaces de configuration généralisés à ceux des produits cartésiens.

Théorème 5.4.1-(a). Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique tel que $\dim H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) < \infty$.

a) *Pour tout $m \geqslant \ell > 0$ et tout $i \in \mathbb{N}$, on a*

i) $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}); i) = \sum_{0\leqslant a<m} \boldsymbol{\Theta}^m_{m-a}\big(\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^{m-a}; i-a)\big)$

ii) $\chi_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m; i) = \boldsymbol{I}^m_\ell\Big(\sum_{0\leqslant a<\ell} \boldsymbol{\Theta}^\ell_{\ell-a}\big(\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^{\ell-a}; i-a)\big)\Big)$

iii) $\chi_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m; i) = \sum_{0\leqslant b<\ell} (-1)^b\, \boldsymbol{I}^m_{\ell-b}\Big(\sum_{0\leqslant a<\ell-b} \boldsymbol{\Theta}^{\ell-b}_{\ell-b-a}\big(\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^{\ell-b-a}; i-b-a)\big)\Big)$

A partir de là nous avons suivi deux voies de recherche, celle de l'étude de la polynomialité des familles de caractères $\{\chi(\Delta_{m-a}\boldsymbol{X}^m, i)\}_m$ et celle de la détermination explicite des caractères $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$. Les sections 7 à 9 sont consacrées à la première question et la section 10 à la seconde.

0.7. *Les familles de représentations $\{\mathcal{S}_m : H^i(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$.* Bien de recherches sur les espaces de configuration concernent le comportement asymptotique d'invariants cohomologiques. Par exemple, le résultat pionnier d'Arnold (1970 [1]) qui établit que pour $i \in \mathbb{N}$, la suite $\{\mathrm{Betti}^i(\boldsymbol{F}_m(\mathbb{C})/\mathcal{S}_m)\}_m$ est stationnaire, ou, plus récemment, celui de Church (2012 [7]) qui montre que si $\boldsymbol{X}$ est une variété différentielle connexe orientable et que $d_{\boldsymbol{X}} \geqslant 2$, les multiplicités des facteurs irréductibles des représentations de $\mathcal{S}_m$ dans $H^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ sont stationnaires (dans un sens à préciser, *cf.* 7.4).

Les complexes fondamentaux s'avèrent particulièrement commodes pour aborder ces questions de nature qualitative. Ils indiquent aussi que la direction à suivre pour les généraliser doit concerner les familles $\{\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m\}_m$ pour $a \in \mathbb{N}$ fixe. Les sections 7 à 9 sont consacrées à ces questions. Nous y rappelons la théorie des ***FI***-modules de Church et Frab ([10]). Un ***FI***-module est un foncteur covariant de la catégorie ***FI*** des ensembles finis et des applications injectives vers la catégorie des k-espaces vectoriels, il peut être représenté par la donnée d'une famille dénombrable d'applications k-linéaires

$\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \to V_{m+1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ où V_m est un $\mathcal{S}_m$-module et ϕ_m est compatible aux actions de $\mathcal{S}_m$ et $\mathcal{S}_{m+1}$. Nous rappelons les concepts importants de rang de « *monotonie* », de « *stabilité* » et de « *polynomialité* » (*cf.* 7.4.6) de ***FI***-modules et nous prouvons la généralisation suivante des résultats de Church.

Théorème (9.2.3). Soit $\boldsymbol{X}$ une pseudovariété i-acyclique, connexe orientable et de dimension $d_{\boldsymbol{X}} \geqslant 2$. Pour $a, i \in \mathbb{N}$, la famille $\{\mathcal{S}_m : H^i_{\text{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$ est monotone pour $m \geqslant i+a$ et est monotone et stable pour $m \geqslant 4i+4a$, si $d_{\boldsymbol{X}} = 2$, et pour $m \geqslant 2i+4a$, si $d_{\boldsymbol{X}} \geqslant 3$.

La démonstration est basée sur le théorème 5.4.1-(a) déjà mentionné. Dans le cas du ***FI***-module $\mathcal{V}(i) := \{p_m^* : H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})) \to H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{X}))\}_m$ où p_m^* est dual de l'intégration sur les fibres de la projection sur les m premières coordonnées $p_m : \boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$, l'idée est de montrer que les foncteurs $\boldsymbol{\Theta}^m_{m-a} : \text{Mod}(k[\mathcal{S}_{m-a}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathcal{S}_m])$ définissent un foncteur dans la catégorie de ***FI***-modules $\boldsymbol{\Theta}^a : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant 2a}$ donnant lieu à une égalité de ***FI***-modules virtuels $\mathcal{V}(i) = \sum_{0\leqslant a<m}(-1)^a\, \boldsymbol{\Theta}^a\big(\mathcal{W}(d_{\boldsymbol{X}}(m-a)-i+a)\big)$, où $\mathcal{W}(j)$ est le ***FI***-module $\{p_m^* : H^j_{\text{BM}}(\boldsymbol{X}^m) \to H^j_{\text{BM}}(\boldsymbol{X}^{m+1})\}$ dont les rangs sont faciles à déterminer. Il est alors essentiel de comprendre comment $\boldsymbol{\Theta}^a$ perturbe les rangs de monotonie et stabilité rg_{m} et rg_{s}. Le théorème 9.2.3 ci-dessus est alors corollaire du résultat suivant où $\text{rg}_{\text{ms}} := \sup\{\text{rg}_{\text{m}}, \text{rg}_{\text{s}}\}$.

Théorème (8.2.2)
a) *Le foncteur $\boldsymbol{\Theta}^a : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant 2a}$ est covariant, additif, exact.*
b) *Si $\mathcal{V}$ est (de type fini) engendré en degrés $\leqslant d$, le ***FI***-module $\boldsymbol{\Theta}^a(\mathcal{V})$ est (de type fini) engendré en degrés $\leqslant \sup(d+a, 2a)$.*
c) *On a $\text{rg}_{\text{ms}}(\boldsymbol{\Theta}^a\mathcal{V}) \leqslant \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}) + 4a$ et $\text{rg}_{\text{m}}(\boldsymbol{\Theta}^a\mathcal{V}) \leqslant \text{rg}_{\text{m}}(\mathcal{V}) + a$.*

0.8. ***Suites spectrales basiques.*** Dans le but d'étendre la portée du théorème 9.2.3 aux espaces non i-acycliques, nous avons introduit dans la section 6 la « *suite spectrale basique* ». Associée à un espace localement compact $\boldsymbol{M}$ de dimension cohomologique finie, elle converge vers $H_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ et a la propriété remarquable de ne faire intervenir que des espaces de configuration associés à l'espace i-acyclique $\boldsymbol{M}_{>0} := \boldsymbol{M}\times\mathbb{R}_{>0}$.

Théorème (6.5.2, 9.3.13-(b)). Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété orientée de dimension $d_{\boldsymbol{M}}$. La suite spectrale $I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m)$ converge en tant que suite spectrale de complexes de $\mathcal{S}_m$-modules vers le $\mathcal{S}_m$-module bi-gradué associé au $\mathcal{S}_m$-module gradué filtré $H_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))[1-m]$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on a :

$$I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \bigoplus_{\tau\in\mathcal{T}(p+1,m)} \text{ind}_{\mathcal{H}_\tau}^{\mathcal{S}_m}\, \boldsymbol{\sigma} \otimes H^Q_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0})) \;\Rightarrow\; H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$$

où $q=i+(m-(p+1))$ et $Q := i-(m-(p+1))\,(d_{\boldsymbol{M}}-1)$, où $\mathcal{T}(p+1,m)$ est l'ensemble des tableaux de Young à m boites et première colonne $(m-p,\dots,m)$, et où $\mathcal{H}_\tau$ est le stabilisateur de τ dans $\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}$ dont l'action sur $H_{\text{c}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}))$ est tordue par la signature $\boldsymbol{\sigma}$ de $\mathcal{S}_{m-(p+1)}$.

Une propriété remarquable des suites spectrales basiques est leur compatibilité aux morphismes $p_m^* : H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})) \to H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}))$. Cela nous a permis de généraliser le théorème 9.2.3 (p. 14) aux pseudovariétés, en particulier, aux variétés algébriques complexes. L'énoncé suivant ne diffère de 9.2.3 que par le fait que $\boldsymbol{M}$ n'est plus supposée i-acyclique et aussi par la perte de l'estimation du rang de monotonie.

Théorème (9.3.15). Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété connexe orientable de dimension $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 2$. Pour $a, i \in \mathbb{N}$ fixés, la famille $\{\mathcal{S}_m : H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m)\}_m$ est monotone et stable pour $m \geqslant 4i + 4a$, si $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, et pour $m \geqslant 2i + 4a$, si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$. Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont (donc) polynomiales et la famille $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m/\mathcal{S}_m)\}_m$ est constante, sur les mêmes intervalles.

0.9. *Le calcul explicite du caractère de $\boldsymbol{H_c(F_m(X))}$.* Dans la section 10, on revient sur les espaces i-acycliques. On y considère suivant Macdonald ([28]), la « *série des caractères* » de $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}^m$ qui vaut

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})(\alpha, T) := \sum\nolimits_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \operatorname{tr}(\alpha : H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}))\, T^i\,, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{S}_m\,,$$

et on mène à terme le calcul des séries $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\alpha, T)$ grâce notamment à l'exactitude des complexes fondamentaux de $\boldsymbol{X}$. On prouve :

Théorème (10.5.3). Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Pour $\alpha \in \mathcal{S}_m$, on a

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\alpha, T)}{T^m} = \prod_{d=1}^{m} d^{\mathsf{x}_d} \Big(\sum_{e\,|\,d} \mu\big(\tfrac{d}{e}\big) \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1}, T^e)}{dT^e} \Big)^{\underline{\mathsf{x}_d}}\,,$$

où $(1^{\mathsf{x}_1}, 2^{\mathsf{x}_2}, \ldots, m^{\mathsf{x}_m}) \vdash m$ est le type de la permutation α, où $\mu(_)$ est la fonction de Möbius et où $(_)^{\underline{r}}$ est la factorielle décroissante (cf. 14.1).

0.10. *Les polynômes de Poincaré des espaces quotients $\boldsymbol{F_m(X)/H}$.* Le théorème précédent s'applique aussitôt pour donner les dimensions des sous-espaces invariants $H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))^{\boldsymbol{H}}$, quel que soit le sous-groupe $\boldsymbol{H} \subseteq \mathcal{S}_m$. Les polynômes de Poincaré des quotients $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\boldsymbol{H}$ en résultent.

La section 11 illustre le procédé en déterminant le polynôme de Poincaré de l'espace des configurations « *cycliques* » $\boldsymbol{CF}_m(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\boldsymbol{C}_m$, où $\boldsymbol{C}_m := \langle (1, \ldots, m) \rangle \subseteq \mathcal{S}_m$, et celui de l'espace des configurations « *non ordonnées* » $\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\mathcal{S}_m$. Pour $\boldsymbol{X}$ i-acyclique, on obtient :

–*Théorème (11.2.1) :*

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{CF}_m)(-T)}{T^m} = \frac{1}{m} \sum_{d\,|\,m} \phi(d)\, d^{m/d} \Big(\sum_{e\,|\,d} \mu(d/e) \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e} \Big)^{\underline{m/d}}\,.$$

–*Théorème (11.3.1)*

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X}))(-T)}{T^m} = \frac{1}{m!}\sum_{\lambda:=(1^{\boldsymbol{x}_1},\dots,m^{\boldsymbol{x}_m})\vdash m} h_\lambda \prod_{d=1}^{m} d^{\boldsymbol{x}_d}\left(\sum_{e\,|\,d}\mu\big(\tfrac{d}{e}\big)\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e}\right)^{\boldsymbol{x}_d},$$

où h_λ est le cardinal de l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_m$ dont la décomposition en cycles disjoints est de type $\lambda := (1^{\boldsymbol{x}_1},\dots,m^{\boldsymbol{x}_m}) \vdash m$.

0.11. ***Rangs de stabilité des familles $\{\mathrm{Betti}^{\boldsymbol{i}}_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF_m}(\boldsymbol{M}))\}_{\boldsymbol{m}}$.*** Les formules explicites de caractères 10.5.3 (p. 15) permettent aussi de raffiner la détermination des multiplicités de la représentation triviale dans $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$. On a :

Proposition (11.5.3). Soit $\boldsymbol{X}$ une pseudovariété i-acyclique de type fini telle que $\dim H^{d\boldsymbol{x}}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Q}) \leqslant 1$. Alors, pour $i \in \mathbb{N}$, la famille $\{\mathrm{Betti}^i(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X};\mathbb{Q}))\}_m$ est constante pour tout $m \geqslant i$.

Ce résultat s'étend ensuite aux pseudovariétés connexes orientées à l'aide des suites spectrales basiques. La proposition suivante termine alors la section sur les question de stabilité. ([3])

Proposition (11.6.1). Soit $\boldsymbol{M}$ est une pseudovariété connexe orientée. La famille $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$ est constante pour $m \geqslant 2i$, si $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, et pour $m \geqslant i$ si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$.

0.12. ***La dégénérescence des suites spectrales de Leray.*** Pour $a, b \in \mathbb{N}$, notons $\pi_a : \boldsymbol{X}^{b+a} \to \boldsymbol{X}^a$ la projection sur les a dernières coordonnées. Sa restriction à $\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X})$ est la fibration $\pi_a : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ ([4]) de fibres de la forme $\boldsymbol{X} \smallsetminus \boldsymbol{a}$ où $\boldsymbol{a}$ désigne un sous-ensemble de $\boldsymbol{X}$ de cardinal a.

Lorsque $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique et que $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) < +\infty$, l'expression du polynôme de Poincaré de la proposition 4.2.1 (p. 12) montre que l'on a

$$\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X})) = \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}))\cdot\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X}\smallsetminus\boldsymbol{a}))\,,$$

ce qui suggère une certaine forme de trivialité cohomologique pour la fibration π_a. C'est en effet le cas et c'est le sujet de la section 12.

Notons, plus généralement $\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m$, pour $0 < a \leqslant \ell \leqslant m \in \mathbb{N}$, l'ouvert des m-uplets de $\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m$ dont les a dernières coordonnées sont deux à deux distinctes, soit :

$$\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m := \Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m \cap \big(\boldsymbol{X}^{m-a}\times\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})\big)\,.$$

La section 12.4 est consacrée à l'étude des suites spectrales de Leray associées à l'application $\pi_a : \Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ dont la fibre au-dessus de $\overline{x} \in \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$

[3] La section 11.7, rajoutée tardivement, améliore aussi les bornes pour les rangs de stabilité des familles $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m/\mathcal{S}_m)\}_m$ données dans le théorème 9.3.15.

[4] Généralement non localement triviale, sauf si $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique.

est $\Delta_{?\ell}(\boldsymbol{X}^{m-a}\times\overline{x})$. Cela nous a emmené à nous intéresser également à la cohomologie à support π_a-propre que nous notons $H_{\pi!}(\Delta^{[a]}_{\ell}\boldsymbol{X}^m)$, et aussi aux faisceaux de cohomologie à support π_a-propre :

$$\mathcal{H}^i_{\pi!}(\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m) := I\!R^i\pi_{a!}(\underline{k}_{\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m})\,,$$

Le principal résultat concernant ces faisceaux est le suivant.

Théorème (12.3.2-(c)). Si $\boldsymbol{X}$ i-acyclique et localement connexe, les faisceaux $\mathcal{H}^i_{\pi!}(\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)$ sont constants sur les composantes connexes de $\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$.

À partir de là, l'étude des suites spectrales de Leray pour les cohomologies $H_{\mathrm{c}}(\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)$ et $H_{\pi!}(\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)$ se simplifie et nous montrons le théorème suivant.

Théorème (12.4.9). Soient $a\leqslant\ell\leqslant m\in\mathbb{N}$. Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique localement connexe. Notons

$$(I\!E_r(\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)_{\mathrm{c}},d_r)\quad et\quad (I\!E_r(\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)_{\pi!},d_r)\qquad\qquad (I\!E_r)\,.$$

les suites spectrales de Leray associées à $\pi_a:\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m\to\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ qui convergent respectivement vers $H_{\mathrm{c}}(\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)$ et $H_{\pi!}(\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)$. On a :

$$\begin{cases} I\!E_2(\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)_{\mathrm{c}}\sim H^p_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}))\otimes H^q_{\mathrm{c}}(F)\Rightarrow H^{p+q}_{\mathrm{c}}(\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)\\ I\!E_2(\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)_{\pi!}\sim H^p(\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}))\otimes H^q_{\mathrm{c}}(F)\Rightarrow H^{p+q}_{\pi!}(\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)\end{cases}$$

où F est une fibre quelconque de π_a. Les suites spectrales $(I\!E_r)$ sont dégénérées, i.e. *$d_r=0$ pour $r\geqslant 2$.*

0.13. ***Exemples et contre-exemples d'espaces i-acycliques.*** La section 13 est un appendice destiné à donner des exemples d'espaces i-acycliques, ainsi que des contre-exemples à certaines propriétés les concernant.

0.14. ***D'autres approches à la stabilité.*** Lors de l'écriture de cet article nous avons eu connaissance du travail de Dan Petersen [31] (2016) où il associe à un espace topologique stratifié une suite spectrale qui calcule l'homologie de Borel-Moore de l'espace en termes de celle de ses strates fermées. Dans le cas des espaces de configuration $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})$, il retrouve la suite spectrale de Getztler [20] qui généralise celle de Totaro ([35]) pour le plongement $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})\hookrightarrow\boldsymbol{M}^m$, du cas où $\boldsymbol{M}$ est une variété différentielle au cas où $\boldsymbol{M}$ est générale. Petersen est alors en mesure de montrer, lorsque $\boldsymbol{M}$ une variété algébrique complexe, que les $\boldsymbol{FI}$-modules $\{\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})\}_m$ sont de type fini. La stabilité de $\{\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})\}_m$ en découle mais sans pour autant permettre d'obtenir des indications sur les rangs de monotonie et stabilité concernés.

1. Espaces i-acycliques

1.1. Généralités sur les espaces topologiques considérés

Dans ce travail on entend par *espace (topologique)* tout espace $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \ldots$, métrisable, localement compact et dénombrable à l'infini. De tels espaces sont alors à base dénombrable, séparables et (totalement) paracompacts. Tout fermé et tout ouvert de $\boldsymbol{X}$ est alors également métrisable, localement compact et dénombrable à l'infini. Les *pseudovariétés* (dénombrables à l'infini), en particulier les variétés algébriques complexes, constituent une large famille d'exemples de tels espaces ([5]).

1.1.1. Cohomologies. On désignera par k un corps de caractéristique arbitraire sauf mention explicite du contraire. On note $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$ le faisceau constant sur $\boldsymbol{X}$ de fibre k, puis $\mathrm{Mod}(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})$ la catégorie des faisceaux de k-espaces vectoriels sur $\boldsymbol{X}$. Les espaces de cohomologie respectivement : ordinaire, à support compact et à support dans une partie localement fermée $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}$, notés $H(\boldsymbol{X}; k)$, $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}; k)$, et $H_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}, k)$, sont les foncteurs dérivés des foncteurs de sections globales

$$\Gamma(\boldsymbol{X}; _), \Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}; _), \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}; _) : \mathrm{Mod}(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) \to \mathrm{Vec}(k)\,.$$

On a donc

$$H^i(\boldsymbol{X}; k) := I\!R^i\Gamma(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})\,, \quad H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}; k) := I\!R^i\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})\,,$$
$$H^i_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}; k) := I\!R^i\Gamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})\,.$$

1.1.2. Résolution Φ-molle canonique. La résolution du faisceau constant $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$ de référence sera celle des faisceaux de « *germes de cochaînes d'Alexander-Spanier de* $\boldsymbol{X}$ » ([6]), noté $(\underline{\underline{\mathcal{A}}}^{\bullet}(\boldsymbol{X}; k), d_*)$. Les faisceaux $\underline{\underline{\mathcal{A}}}^i(\boldsymbol{X}; k)$ sont Φ-mous pour toute famille paracompactifiante Φ (*loc.cit.*), ils sont donc $\Gamma(\boldsymbol{X}, _)$, $\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}; _)$ et $\Gamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}, _)$-acycliques. Le complexe des cochaînes d'Alexander-Spanier

$$\mathbf{0} \to \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}} \to \underline{\underline{\mathcal{A}}}^0(\boldsymbol{X}; k) \xrightarrow{d_0} \underline{\underline{\mathcal{A}}}^1(\boldsymbol{X}; k) \xrightarrow{d_1} \cdots$$

est une résolution Φ-molle de $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$ et l'on a

$$H^i(\boldsymbol{X}; k) := h^i(\Gamma(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\mathcal{A}}}^{\bullet}(\boldsymbol{X}; k)))\,, \quad H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}; k) := h^i(\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\mathcal{A}}}^{\bullet}(\boldsymbol{X}; k)))\,,$$
$$H^i_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}; k) := h^i(\Gamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\mathcal{A}}}^{\bullet}(\boldsymbol{X}; k)))\,.$$

[5] Dans [4] : A. Haefliger, "*Introduction to piecewise linear intersection homology*" (p. 1) ; et A. Borel, "*Sheaf theoretic intersection cohomology*" (V-§2.1, p. 60).

[6] [21], §2.5, exemple 2.5.2, p. 134, puis §3.7, exemple 3.7.1, p. 157.

1.1.3. Notons $(\mathcal{K}(\boldsymbol{X}), \subseteq)$ la famille des parties compactes $K \subseteq \boldsymbol{X}$ munie de l'ordre d'inclusion. Le morphisme naturel en homologie singulière

$$\varinjlim_{K\in\mathcal{K}(\boldsymbol{X})} H_*(K;k) \xrightarrow{\simeq} H_*(\boldsymbol{X},k)$$

est un isomorphisme et induit (par dualité vectorielle) l'isomorphisme de cohomologies ordinaires

$$H^*(\boldsymbol{X},k) \xrightarrow[\simeq]{} \varprojlim_{K\in\mathcal{K}(\boldsymbol{X})} H^*(K,k)\,,$$

qui fait correspondre à une classe de cohomologie $\omega \in H^*(\boldsymbol{X},k)$ la famille de ses restrictions $\{\omega|_K \in H^*(K,k)\}_{K\in\mathcal{K}(\boldsymbol{X})}$.

De manière duale, nous disposons pour chaque $K \in \mathcal{K}(\boldsymbol{X})$ d'un morphisme naturel en cohomologie $H^*_K(\boldsymbol{X},k) \to H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X},k)$. La limite inductive de ces morphismes

$$\varinjlim_{K\in\mathcal{K}(\boldsymbol{X},k)} H^*_K(\boldsymbol{X}) \to H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X},k)$$

est alors aussi un isomorphisme.

1.1.4. Suite exacte longue de cohomologies à support compact. Si $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U} \sqcup \boldsymbol{Z}$ est une partition en parties respectivement ouverte et fermée, dont on note $j : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{X}$ et $i : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{X}$ les inclusions, on dispose de la suite longue de cohomologie à support compact

$$H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) \xrightarrow{j_!} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{i^*} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}) \longrightarrow$$

où $j_!$ est le « *prolongement par zéro* » et i^* est la « *restriction* ».

1.1.5. Isomorphismes de Künneth. Si $p : \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ et $q : \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ sont les projections canoniques, les morphismes

$$\boxtimes : \underline{\underline{\mathcal{A}}}^a(\boldsymbol{X};k) \otimes \underline{\underline{\mathcal{A}}}^b(\boldsymbol{Y};k) \to \underline{\underline{\mathcal{A}}}^{a+b}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y};k)$$

induits par le cup-produit de cochaînes $\boxtimes : \alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \boxtimes \beta := p^*(\alpha) \cup q^*(\beta)$ induisent des isomorphismes gradués ([7])

$$H(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}) \simeq H(\boldsymbol{X}) \otimes H(\boldsymbol{Y}) \text{ et } H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}) \simeq H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})\,.$$

Le cup-produit en cohomologie résulte alors du morphisme de restriction à la diagonale, soit des composées

$$\begin{aligned} \cup :\ & H(\boldsymbol{X}) \otimes H(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{\boxtimes} H(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}) \xrightarrow{\delta^*_{\boldsymbol{X}}} H(\Delta_{\boldsymbol{X}}) \\ \cup :\ & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{\boxtimes} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}) \xrightarrow{\delta^*_{\boldsymbol{X}}} H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\boldsymbol{X}}) \end{aligned}$$

[7] L'isomorphisme de Künneth en cohomologie ordinaire exige une hypothèse de finitude de cohomologie sur l'un des deux espaces.

1.2. Espaces i-acycliques et $\cup$-acycliques

1.2.1. i-acyclicité. Pour tout espace $\boldsymbol{X}$, on notera $\epsilon_{\boldsymbol{X}} : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{X})$ le morphisme induit par l'inclusion $\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}; _) \subseteq \Gamma(\boldsymbol{X}; _)$. L'image de $\epsilon_{\boldsymbol{X}}$ dans $H(\boldsymbol{X})$, notée $H_!(\boldsymbol{X})$, est « *la cohomologie intérieure de* $\boldsymbol{X}$ », on pose donc

$$H_!(\boldsymbol{X}) := \mathrm{im}\left(\epsilon_{\boldsymbol{X}} : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{X})\right).$$

On dira que $\boldsymbol{X}$ est « *i-acyclique* » lorsque $H_!(\boldsymbol{X}) = 0$.

1.2.2. (Totale) $\cup$-acyclicité. Le plongement diagonal $\delta_{\boldsymbol{X}} : \Delta_{\boldsymbol{X}} \hookrightarrow \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ induit des morphismes de restriction rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow[\simeq]{\boxtimes} & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\delta_{\boldsymbol{X}}^*} & H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\boldsymbol{X}}) \\
\downarrow{\scriptstyle \epsilon_{\boldsymbol{X}}\otimes\epsilon_{\boldsymbol{X}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{\Delta_{\boldsymbol{X}}}} \\
H(\boldsymbol{X}) \otimes H(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow[\simeq]{\boxtimes} & H(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\delta_{\boldsymbol{X}}^*} & H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\boldsymbol{X}})
\end{array}$$

On dira que $\boldsymbol{X}$ est « *$\cup$-acyclique* » lorsque $\delta_{\boldsymbol{X}}^* : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\boldsymbol{X}})$ est nul, autrement dit, lorsque le cup-produit $\cup : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ est nul. Plus généralement, $\boldsymbol{X}$ sera dit « *totalement $\cup$-acyclique* » lorsque le cup-produit $\cup : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U})$ est nul pour tout ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$.

1.2.3. Premières propriétés d'espaces i-acycliques

La condition d'i-acyclicité est une condition de non compacité, aussi, son étude nous place d'emblée en opposition aux espaces compacts.

1.2.4. Proposition

a) *Un espace contractile non compact est i-acyclique.*

b) *i-acyclique* $\Rightarrow$ *totalement $\cup$-acyclique.*

c) *Sur une variété topologique orientable, i-acyclique* $\Leftrightarrow$ *$\cup$-acyclique* ([8]).

d) *Un ouvert $\boldsymbol{U}$ d'un espace i-acyclique $\boldsymbol{X}$, est i-acyclique. Et de même en remplaçant* i-acyclique *par* totalement $\cup$-acyclique.

e) *Un produit cartésien $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$ est i-acyclique si et seulement si l'un des facteurs l'est.*

Démonstration. (a) Comme $\boldsymbol{X}$ est contractile, $H^i(\boldsymbol{X}) = 0$ pour $i > 0$ et comme $\boldsymbol{X}$ est connexe non-compacte $H_{\mathrm{c}}^0(\boldsymbol{X}) = 0$, dans tous les cas $H_!^i(\boldsymbol{X}) = 0$.

(b) Si ω et ϖ sont des cocycles à support compact d'un espace i-acyclique, on a $\omega = d\alpha$ pour une certaine cochaîne α (à support fermé), mais alors $\omega \cup \varpi = d\alpha \cup \varpi = d(\alpha \cup \varpi)$ où $\alpha \cup \varpi$ est clairement à support compact.

[8] Voir 13.10, p. 181, pour un contre-exemple si la variété n'est pas orientable.

(c) Supposons que pour $\omega \in H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ on ait $\epsilon_{\boldsymbol{X}}(\omega) \neq 0$. Il existe alors, par dualité de Poincaré, une classe $\varpi \in H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ telle que $\int_{\boldsymbol{X}} \omega \cup \varpi = 1$, mais alors $\omega \cup \varpi \neq 0$ dans $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ et $\boldsymbol{X}$ n'est pas $\cup$-acyclique.

(d) Résulte du fait que $\epsilon_{\boldsymbol{U}} : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) \to H(\boldsymbol{U})$ est la composée de

$$\begin{array}{ccccccc} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) & & \longrightarrow & \epsilon_U & \longrightarrow & & H(\boldsymbol{U}) \\ \| & & & & & & \| \\ H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) & \xrightarrow{\jmath} & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\epsilon_{\boldsymbol{X}}} & H(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{r} & H(\boldsymbol{U}) \end{array}$$

où $\jmath$ désigne le prolongement par zéro et r est le morphisme de restriction.

(e) La condition est suffisante d'après le factorisation de Künneth :

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}) & \longrightarrow \epsilon_{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}} \longrightarrow & H(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}) \\ \| & & \uparrow \kappa \\ H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}) & \xrightarrow{\epsilon_{\boldsymbol{X}}\otimes\epsilon_{\boldsymbol{Y}}} & H(\boldsymbol{X}) \otimes H(\boldsymbol{Y}) \end{array}$$

où $\kappa(\alpha \otimes \beta) = p_{\boldsymbol{X}}^*(\alpha) \cup p_{\boldsymbol{Y}}^*(\beta)$. La nécessité résulte de l'injectivité de κ. □

1.3. Caractérisations de la *i*-acyclicité

1.3.1. Théorème. *Pour un espace $\boldsymbol{X}$, il y a équivalence entre*

a) *$\boldsymbol{X}$ est i-acyclique.*

b) *Pour tout espace $\boldsymbol{Y}$ et toute application continue $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$, le morphisme image-inverse $f^* : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{Y})$ est nul.*

c) *Pour tout espace compact $\boldsymbol{K}$ et toute application continue $f : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{X}$, le morphisme image-inverse $f^* : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{K})$ est nul.*

d) *Étant donnés $\boldsymbol{Z}$ et $\boldsymbol{Y}$ et une application continue $f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$, notons $p_2 : \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$, $(x, m) \mapsto m$, puis $f_2 := p_2 \circ f$. Soit $j : V \hookrightarrow \boldsymbol{Y}$ un plongement ouvert, notons $f_2' : f^{-1}(V) \to V$ la restriction de f_2, et considérons le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccccc} f_2^{-1}(V) & \hookrightarrow & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{f} & \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y} \\ & \searrow^{f_2'} & & \searrow^{f_2} & \downarrow p_2 \\ & & V & \hookrightarrow^{j} & \boldsymbol{Y}\,. \end{array}$$

Alors, si f et f_2' sont propres et si $j_!{:}H_{\mathrm{c}}(V){\to}H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})$ est surjective, on a

$$\big(f^* : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})\big) = 0\,.$$

Démonstration. (a⇔b) Évident. (a⇔c) Le morphisme $f^* : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{K})$ se factorise à travers $\epsilon_{\boldsymbol{X}}$ puisque l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{f^*} & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{K}) \\ {\scriptstyle\epsilon_{\boldsymbol{X}}}\downarrow & & \|{\scriptstyle\epsilon_{\boldsymbol{K}}} \\ H(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{f^*} & H(\boldsymbol{K}) \end{array}$$

L'implication a⇒c en résulte. Réciproquement, soit $(\mathcal{K}(\boldsymbol{X}), \subseteq)$ l'ensemble des parties compactes de $\boldsymbol{X}$, ordonné par inclusion. La famille des morphismes

$$H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{\epsilon_{\boldsymbol{X}}} H(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{(_)|_{\boldsymbol{K}}} H(\boldsymbol{K})$$

avec $\boldsymbol{K} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{X})$ induit alors un morphisme sur la limite projective

$$H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{\epsilon_{\boldsymbol{X}}} H(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{\varprojlim (_)|_{\boldsymbol{K}}} \varprojlim_{\boldsymbol{K} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{X})} H(\boldsymbol{K})$$

dont la composée est nulle lorsque (b) est vérifié. L'espace $\boldsymbol{X}$ est donc i-acyclique puisque le morphisme $\varprojlim (_)|_{\boldsymbol{K}}$ est bijectif.

(a⇒d) Soient $p_1 : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ la projection canonique et $f_1 := p_1 \circ f$. Pour prouver (d), il suffit, par Künneth, de montrer que pour tous cocycles à support compact $\omega \in \mathcal{Z}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ et $\varpi \in \mathcal{Z}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})$, le cocycle

$$f_1^* \omega \cup f_2^* \varpi \in \mathcal{Z}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})\,. \qquad (*)$$

est la différentielle d'une cochaîne à support compact de $\boldsymbol{Z}$.

Or, il existe par hypothèse $\tau \in \mathcal{Z}_{\mathrm{c}}(V)$ qui représente ϖ dans $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})$. On peut donc remplacer dans $(*)$ $f_2^* \varpi$ par $f_2^* \tau$, et affirmer que $f_2^* \tau$ est à support compact dans $f_2^{-1}(V)$ donc dans $\boldsymbol{Z}$.

Cela étant, comme $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, on a $f_1^* \omega = d\alpha$ pour une certaine cochaîne α de $\boldsymbol{Z}$ (à support non nécessairement compact), et alors

$$f_1^* \omega \cup f_2^* \tau = d(\alpha \cup f_2^* \tau)\,,$$

où $\alpha \cup f_2^* \tau$ est une cochaîne à support compact de $\boldsymbol{Z}$ puisqu'il en est ainsi de $f_2^* \tau$. Par conséquent, $f^*(\omega \otimes \varpi) = 0 \in H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})$.

(d⇒c) Dans (d), on prend $\boldsymbol{Z}$ compact, $\boldsymbol{Y} := \{\mathrm{pt}\}$ et $V := \boldsymbol{Y}$. □

1.3.2. Complémentaires des parties finies d'un espace i-acyclique. Pour $a \in \mathbb{N}$, la notation « $\boldsymbol{X} \smallsetminus a$ » sera un raccourci pour « $\boldsymbol{X}$ privé de a points ». On rappelle qu'en dehors du cas où $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique connexe de dimension > 1, le type d'homéomorphie de $\boldsymbol{X} \smallsetminus a$ dépend des points qu'on enlève. Cependant, lorsque $H_{\mathrm{c}}^0(\boldsymbol{X}) = 0$, p.e. si $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, la suite $0 \to H_{\mathrm{c}}(F)[-1] \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus F) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to 0$ est exacte pour tout $F \subseteq \boldsymbol{X}$ fini, et la famille $\{\mathrm{Betti}_{\mathrm{c}}^i(\boldsymbol{X} \smallsetminus F)\}_{i \in \mathbb{N}}$, et donc le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus F)$ pour la cohomologie à support compact, seul dépendent de $\#F$.

1.3.3. Trivialité de la monodromie. Lorsque $\boldsymbol{X}$ est un espace i-acyclique *localement connexe*, la remarque précédente peut être raffinée pour montrer l'existence d'une action par monodromie de $\Pi_1(\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}), \overline{x})$ sur $H_{\mathrm{c}}(\pi_a^{-1}(\overline{x}))$ où $\pi_a : \boldsymbol{F}_{1+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ est la projection sur les a dernières coordonnées, et ce, *même lorsque cette projection n'est pas localement triviale*. Pour le voir, considérons dans un premier temps le cas où $a = 1$.

Notons $\mathcal{K}(\boldsymbol{C})$ la famille des parties compactes et connexes contenues dans une composante connexe $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{X}$. Étant donnés $z \in Z \in \mathcal{K}(\boldsymbol{C})$, on dispose du morphisme naturel de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(Z)[-1] & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus Z) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \rho(Z)_z}\downarrow & & {\scriptstyle \rho(Z)}\downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(z)[-1] & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus z) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (\diamond)$$

où le prolongement par zéro $\rho(Z)$ est bijectif en degrés cohomologiques $i \leqslant 1$ et induit pour $i \geqslant 2$ l'isomorphisme canonique :

$$\tilde{\rho}(Z)_z : \frac{H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus Z)}{H^{i-1}_{\mathrm{c}}(Z)} \xrightarrow{\cong} H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus z)\,, \quad \forall z \in Z\,.$$

Cette construction est naturelle par rapport à l'inclusion de compacts et font de $\mathcal{K}(\boldsymbol{C})$ un système inductif filtrant dont la réunion recouvre $\boldsymbol{X}$ tout entier. On en déduit un isomorphisme *canonique*

$$\varprojlim\nolimits_{Z \in \mathcal{K}(\boldsymbol{C})} \frac{H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus Z)}{H^{i-1}_{\mathrm{c}}(Z)} \xrightarrow{\cong} H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus x)\,, \quad \forall x \in \boldsymbol{C}\,,$$

dont on conclut que l'isomorphisme

$$\phi(Z)_{y,x} := (\tilde{\rho}(Z)_y \circ \tilde{\rho}(Z)_x^{-1}) : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus x) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus y)$$

est indépendant du compact connexe $K \supseteq \{x, y\} \subseteq \boldsymbol{C}$. En particulier, une application continue $\gamma : [0,1] \to \boldsymbol{X}$ détermine l'isomorphisme

$$\phi_\gamma := \phi(\gamma([0,1]))_{\gamma(1),\gamma(0)} = H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus \gamma(0)) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus \gamma(1)) \qquad (\diamond\diamond)$$

qui seul dépend de extrémités de γ. C'est l'action par« *monodromie le long du chemin* γ », et elle est clairement triviale lorsque $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Ces remarques se généralisent à tout $a \in \mathbb{N}$.

1.3.4. Proposition. *Pour $a \in \mathbb{N}$, soit $\pi_a : \boldsymbol{F}_{1+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ la projection sur les dernières a coordonnées. Lorsque $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, il existe pour tout $\overline{x} \in \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ une action par monodromie de $\Pi_1(\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}), \overline{x})$ sur $H_{\mathrm{c}}(\pi_a^{-1}(\overline{x}))$. Cette action est triviale.*

Indication. Commençons par justifier l'existence de l'action par monodromie. Soit $\overline{\gamma} := (\gamma_1, \ldots, \gamma_a) : [0,1] \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ une application continue. Par compacité, il existe une famille finie $\mathcal{T} := \{0 = t_0 < t_1, \cdots < t_r = 1\}$ telle que pour chaque $0 \leqslant s < r$ la famille $\{Z(s)_k := \gamma_k([t_s, t_{s+1}])\}_{1 \leqslant k \leqslant a}$, est constituée de parties compactes connexes deux à deux disjointes. Notons $Z(s) := \bigcup_k Z(s)_k$ et reprenons le diagramme $(\diamond)$ pour $\overline{z} := \{z_k \in Z(s)_k\}_k$, on a

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(Z(s))[-1] & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus Z(s)) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \rho(s)_{\overline{z}}}\downarrow & & {\scriptstyle \rho(s)}\downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_k H_{\mathrm{c}}(z_k)[-1] & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus \overline{z}) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (\diamond_s)$$

où le prolongement par zéro $\rho(s)$ est un isomorphisme en degrés $\leqslant 1$ et induit pour $i \geqslant 2$ l'isomorphisme canonique :

$$\tilde{\rho}(s)_{\bar{z}} : \frac{H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus Z(s))}{H^{i-1}_{\mathrm{c}}(Z(s))} \xrightarrow{\cong} H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus \bar{z})\,, \quad \forall \bar{z} \in Z(s)_1 \times \cdots \times Z(s)_a\,,$$

d'où l'isomorphisme

$$\phi_s := \rho(s)_{\overline{\gamma}(t_{s+1})} \circ \rho(s)^{-1}_{\overline{\gamma}(t_s)} : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus \overline{\gamma}(t_s)) \cong H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus \overline{\gamma}(t_{s+1}))\,.$$

La composée des ϕ_s est « *l'action par monodromie le long du chemin* $\overline{\gamma}$ »

$$\phi_\gamma : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus \overline{\gamma}(0)) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus \overline{\gamma}(1))\,,$$

dont on vérifie aisément qu'il ne dépend que de $\overline{\gamma}$ et non pas de la famille $\mathcal{T}$.

Montrons maintenant, par induction sur a, que $\phi_{\overline{\gamma}}$ seul dépend des extrémités de $\overline{\gamma}$. Lorsque $a = 1$, c'est l'indépendance ($\diamond\diamond$). Dans le cas où $a \geqslant 2$, notons $\overline{\gamma}' := (\gamma_1, \ldots, \gamma_{a-1})$ le chemin dans $\boldsymbol{F}_{a-1}(\boldsymbol{X})$. La naturalité de la construction de l'action par monodromie donne lieu à un morphisme des suites courtes, extraites de suites longues de Mayer-Vietoris,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus \overline{\gamma}(0)) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus \overline{\gamma}'(0)) \oplus H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus \gamma_a(0)) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{\overline{\gamma}}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{\overline{\gamma}'}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{\gamma_a}} & & \| \\
0 & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus \overline{\gamma}(1)) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus \overline{\gamma}'(1)) \oplus H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus \gamma_a(1)) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les lignes sont exactes puisque $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique. Comme $\phi_{\overline{\gamma}'}$ et ϕ_{γ_a} seul dépendent de leurs extrémités par hypothèse de récurrence, on conclut qu'il en est de même pour $\phi_{\overline{\gamma}}$. □

1.3.5. Commentaire. Nous verrons lors de l'étude des suites spectrales de Leray associées à l'application $\pi_a : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$, que l'action par monodromie de $\Pi_1(\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}), \overline{x})$ sur $H_{\mathrm{c}}(\pi_a^{-1}(\overline{x}))$ existe et est triviale aussi pour tout $b > 1$ (*cf.* 12.3.3).

2. Espaces de configuration généralisés

2.1. Définitions et notations. Nous rappelons quelques notations habituelles et introduisons d'autres nouvelles.

N-1) Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et pour tout sous-ensemble $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}^m$, « *l'ensemble de configuration généralisé dans* $\boldsymbol{Z}$ *pour le cardinal* $\leqslant \ell$ *(resp.* $= \ell$*)* », est

$$\begin{cases} \Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{Z} := \{(z_1, \ldots, z_m) \in \boldsymbol{Z} \mid \mathrm{Card}\,\{z_1, \ldots, z_m\} \leqslant \ell\}\,, \\ \Delta_{\ell}\boldsymbol{Z} \ := \{(z_1, \ldots, z_m) \in \boldsymbol{Z} \mid \mathrm{Card}\,\{z_1, \ldots, z_m\} = \ell\}\,. \end{cases}$$

▷ La notation $\Delta_{?\ell}$ désignera l'une quelconque des notations $\Delta_{\leqslant \ell}$ ou Δ_ℓ.

▷ Si $m > 0$, on a $\Delta_{?0}\boldsymbol{X}^m = \emptyset$. Si $0 = \ell = m$, on a $\Delta_{?0}\boldsymbol{X}^0 = \{\mathrm{pt}\}$.

N-2) L'« *espace des configurations (ordonnées) de n éléments de $\boldsymbol{X}$* », traditionnellement noté $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ est :

$$\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}) := \Delta_m \boldsymbol{X}^m\,,\ \text{si } m>0\,,\quad \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{X}) = \{\mathrm{pt}\}\,.$$

N-3) Pour $\boldsymbol{Z}\subseteq \boldsymbol{X}^m$, et $0<a\in\mathbb{N}$, on note

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}^{[a]} &:= \boldsymbol{Z}\cap(\boldsymbol{X}^{m-a}\times\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}))\\ &= \{(z_1,\dots,z_m)\in\boldsymbol{Z}\mid \mathrm{Card}\,\{z_{m-a+1},\dots,z_m\}=i\}\,.\end{aligned}$$

N-4) Pour $0<a\leqslant m\in\mathbb{N}$, on note

$$\pi_a = \boldsymbol{X}^m\to\boldsymbol{X}^a\,,\quad (\text{resp. } p_a=\boldsymbol{X}^m\to\boldsymbol{X}^a)$$

la projection sur les a dernières coordonnées $\pi_a(\overline{x}) := (x_{m-a+1},\dots,x_m)$ (resp. les a premières coordonnées $\pi_a(\overline{x}) := (x_1,\dots,x_a)$) . Les restrictions de π_a seront notées par abus de la même manière, par exemple dans l'écriture, pour tout $\boldsymbol{Z}\subseteq\boldsymbol{X}^m$,

$$\pi_a : \boldsymbol{Z}^{[a]}\to\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})\,.$$

2.1.1. Convention. *Lorsque la référence à $\boldsymbol{X}$ sera superflue elle sera parfois omise et les notations $\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m$ et $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ seront abrégées en $\Delta^m_{?\ell}$ et $\boldsymbol{F}_m$.*

2.1.2. Topologie et caractéristique d'Euler. Lorsque $\boldsymbol{X}$ est un espace topologique, $\boldsymbol{X}^m$ est muni de la topologie produit et tout $\boldsymbol{Z}\subseteq\boldsymbol{X}^m$ de la topologie induite. Pour $\ell,m\in\mathbb{N}$, et $\boldsymbol{Z}\subseteq\boldsymbol{X}^m$, l'espace $\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{Z}$ admet la décomposition en parties respectivement ouverte et fermée $\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{Z} = \Delta_\ell\boldsymbol{Z}\sqcup\Delta_{\leqslant\ell-1}\boldsymbol{Z}$, d'où la suite exacte longue de cohomologie à support compact que l'on rencontrera fréquemment dans ce travail

$$\cdots\to H^*_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell\boldsymbol{Z})\to H^*_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{Z})\to H^*_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell-1}\boldsymbol{Z})\to\cdots\,.$$

Dans le cas où $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_{m-1}(\boldsymbol{X})$ et $\ell=m$, on obtient

$$\cdots\to H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))\to H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_{m-1}(\boldsymbol{X}))\to H^*_{\mathrm{c}}(\Delta_{m-1}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_{m-1}(\boldsymbol{X})))\to\cdots\,.$$

où $\Delta_{m-1}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_{m-1}(\boldsymbol{X}))$ est la réunion disjointe de $m-1$ copies de $\boldsymbol{F}_{m-1}(\boldsymbol{X})$, ce qui permet une récurrence pour la détermination de la caractéristique d'Euler de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$. La proposition suivante en découle aussitôt.

Proposition (4.2.1). *Supposons que $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})<+\infty$ et notons $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ la caractéristique d'Euler de la cohomologie à support compact de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$. On a*

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})) = \textstyle\prod_{i=0}^{m-1}\chi(\boldsymbol{X})-i.$$

En particulier, on a la série génératrice

$$\sum\nolimits_{m\geqslant0}\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))\,\frac{t^m}{m!} = (1+t)^{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})}\,.$$

2.1.3. Remarque. On trouve cette série génératrice déjà dans Félix-Thomas ([15], 2000) pour la cohomologie ordinaire et lorsque $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique orientable de dimension paire (cas auquel $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) = \chi(\boldsymbol{X})$).

2.2. Fibrations des espaces de configuration généralisés

La proposition suivante est une extension assez légère du théorème de trivialité locale de la projection $\pi_a : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ de Fadell et Neuwirth ([13]), elle nous a servi dans l'élaboration de la section 12.2 où l'hypothèse de lissité sur $\boldsymbol{X}$ s'est averée à postériori superflue.

2.2.1. Proposition. *Si $\boldsymbol{X}$ une variété topologique et $a \leqslant \ell \leqslant m$, l'application*

$$\pi_a : \Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$$

est une fibration localement triviale.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{G}$ le groupe des homéomorphismes $\phi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ dont le support $|\phi| := \overline{\{x \in \boldsymbol{X} \mid \phi(x) \neq x\}}$ est compact. Soit $d_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ une distance. Munissons $\boldsymbol{G}$ de la distance $d_{\boldsymbol{G}}(\phi, \phi') := \sup_{x\in\boldsymbol{X}} d_{\boldsymbol{X}}(\phi(x), \phi'(x))$. Le groupe $\boldsymbol{G}$, muni de la topologie associée à $d_{\boldsymbol{G}}$, est un groupe topologique et pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$, l'application d'évaluation

$$\mathrm{ev}_x : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{X}\,, \quad \phi \mapsto \phi(x)$$

est continue.

Pour $\overline{x} \in \boldsymbol{F}_a$, notons $\mathbb{B}(\overline{x}, \epsilon)$ le produit des boules ouvertes $\prod_{i=1}^a \mathbb{B}(x_i, \epsilon)$. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, on a $\mathbb{B}(\overline{x}, \epsilon) \subseteq \boldsymbol{F}_a$ et l'application $\prod \mathrm{ev}_{x_i} : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{F}_a$ admet des sections locales continues $\sigma : \mathbb{B}(\overline{x}, \epsilon) \to \boldsymbol{G}$, soit

$$\sigma(\overline{y})(\overline{x}) = \overline{y}\,, \qquad \mathbb{B}(\overline{x}, \epsilon) \xrightarrow{\ \sigma\ } \boldsymbol{G} \xrightarrow{\ \prod \mathrm{ev}_{x_i}\ } \boldsymbol{F}_a \quad (\subseteq)$$

L'application

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{B}(\overline{x}, \epsilon)\times\pi_a^{-1}(\overline{x}) & \longrightarrow & \pi_a^{-1}(\mathbb{B}(\overline{x}, \epsilon)) & \subseteq & \Delta^{[a]}_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m\,, \\ \overline{y}\times\overline{w} & \longmapsto & \sigma(\overline{y})(\overline{w}) & & \end{array}$$

avec $\overline{w} = (\overline{x}, x_{a+1}, \ldots, x_m)$ et $\sigma(\overline{y})(\overline{w}) = (\overline{y}, \sigma(\overline{y})(x_{a+1}), \ldots, \sigma(\overline{y})(x_m))$ est alors un homéomorphisme et une trivialisation de π_a au-dessus de $\mathbb{B}(\overline{x}, \epsilon)$.

De manière entièrement analogue, l'application

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{B}(\overline{x}, \epsilon)\times\pi_a^{-1}(\overline{x}) & \longrightarrow & \pi_a^{-1}(\mathbb{B}(\overline{x}, \epsilon)) & \subseteq & \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X})\,, \\ \overline{y}\times\overline{w} & \longmapsto & \sigma(\overline{y})(\overline{w}) & & \end{array}$$

est une trivialisation locale de π_a. La fibre $\pi_a^{-1}(\overline{x})$ est canoniquement homéomorphe au sous-espace $\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus \overline{x}) \subseteq \boldsymbol{X}^b$. □

2.2.2. Remarque à propos des fibres de π_a. Si $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique connexe de dimension >1, il existe des homéomorphismes $\phi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ tels que $\phi(\overline{x}) = \overline{y}$, et les fibres de $\pi_a : \Delta^{[a]}_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m \to \boldsymbol{F}_a$ sont deux à deux homéomorphes (*cf.* 1.3.2). Par contre, si $\boldsymbol{X}$ n'est pas connexe, cette propriété peut être en défaut. Par exemple, si $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U} \sqcup \boldsymbol{V}$ est une réunion disjointe d'ouverts non vides, les fibres de $\pi_2 : \boldsymbol{F}_3(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{X})$ en $(x, y) \in \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{X})$ sont de la forme :

$$\boldsymbol{U}\backslash\{x, y\} \sqcup \boldsymbol{V}\,, \quad \boldsymbol{U} \sqcup \boldsymbol{V}\backslash\{x, y\}\,, \quad \boldsymbol{U}\backslash\{x\} \sqcup \boldsymbol{V}\backslash\{y\}$$

suivant que $(x, y \in \boldsymbol{U})$, que $(x, y \in \boldsymbol{V})$, ou que $(x \in \boldsymbol{U}$ et $y \in \boldsymbol{V})$.

Il est facile de trouver des exemples pour $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ tels que, non seulement il n'y a pas d'homéomorphisme entre ces trois types de fibres, mais il n'y a pas, non plus, d'isomorphisme entre leurs cohomologies. Lorsque $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique de type fini ([9]), la situation change puisque les nombres de Betti des fibres sont constants (1.3.2). Par exemple, si $\boldsymbol{U} = \mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$, on a $H_*(\pi_a^{-1}(u, v)) = k(0)^2 \oplus k(1)^3$ quel que soit (u, v).

Dans ce cas, les algèbres de cohomologie à support compact $H_{\mathrm{c}}(\pi_a^{-1}(u, v))$ sont isomorphes, mais pas les algèbres de cohomologie ordinaire qui valent

$$\begin{cases} H(\boldsymbol{U} \smallsetminus \{u, v\}) \oplus H(\boldsymbol{V}) = \dfrac{k[X, Y]}{(X, Y)^2} \oplus \dfrac{k[Z]}{(Z)^2} \\[2ex] H(\boldsymbol{U}) \oplus H(\boldsymbol{V} \smallsetminus \{u, v\}) = k \oplus \dfrac{k[X, Y, Z]}{(X, Y, Z)^2} \end{cases}$$

et où l'on remarque que dans la première $\mathrm{Annul}_{H^0}(H^1) = 0$, tandis que dans la seconde $\mathrm{Annul}_{H^0}(H^1) = k \cdot (1, 0)$.

Tout ceci indique que même dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique i-acyclique, les monodromies des systèmes locaux :

$$\begin{cases} \mathcal{H}^i_{\pi!}(\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m) := \mathbb{R}^i\pi_{a!}\,\underline{k}_{\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m} \\ \mathcal{H}^i(\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m) := \mathbb{R}^i\pi_{a*}\,\underline{k}_{\Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m} \end{cases}$$

de fibres respectives $H_{\mathrm{c}}(\pi_a^{-1}\overline{x})$ et $H(\pi_a^{-1}\overline{x})$ (en dualité), ont peu de chances d'être triviales sur $\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ tout entier. On verra dans la section 12.3, consacrée à leur étude, que ces faisceaux sont cependant constants sur toute composante connexe de $\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ (*cf.* comm. 1.3.5 et th. 12.3.2-(c)).

2.3. Sous-espaces $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{X})$ et décomposition de $\boldsymbol{\Delta}_\ell\boldsymbol{X}^m$

2.3.1. Partitions d'un ensemble. Pour tout ensemble E et tout $\ell \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{P}_\ell(E)$ l'ensemble des partitions de E en ℓ parties non vides. On pose ensuite $\mathfrak{P}(E) = \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \mathfrak{P}_\ell(E)$.

[9] On dira que $\boldsymbol{X}$ est de type fini lorsque $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ et $H(\boldsymbol{X})$ sont de dimension finie.

Une partition $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ définit une relation d'équivalence '$\underset{\mathfrak{p}}{\sim}$' sur E par

$$(x \underset{\mathfrak{p}}{\sim} y) \Leftrightarrow (\exists I \in \mathfrak{p})(\{x, y\} \subseteq I)\,.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{P}_\ell(m) := \mathfrak{P}_\ell([\![1,m]\!])$.

2.3.2. Les sous-espaces $\boldsymbol{F}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{X})$. Si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_\ell(m)$, on notera $\boldsymbol{F}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{X})$ l'ensemble des m-uplets $(x_1, \ldots, x_m)$ tels que $(x_i = x_j) \Leftrightarrow (i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j)$.

2.3.3. Proposition. *Pour $0 \leqslant \ell \leqslant m \in \mathbb{N}$, on a la décomposition ouverte :*

$$\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m = \coprod\nolimits_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_\ell(m)} \boldsymbol{F}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{X}) \qquad (*)$$

(*cf.* notation 2.1-(N-2)) *où $\boldsymbol{F}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{X}) \simeq \boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X})$. En particulier,*

$$H_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m) = H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X}))^{|\mathfrak{P}_\ell(m)|}\,,$$

où le nombre $|\mathfrak{P}_\ell(m)|$ est le nombre de Stirling de seconde espèce (*cf.* 14.4) *:*

$$\big|\mathfrak{P}_\ell(m)\big| = \left\{ {m \atop \ell} \right\} := \frac{1}{\ell!} \sum\nolimits_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} j^m\,.$$

De plus,

a) *Si $\{\boldsymbol{C}_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ est la famille des composantes connexes de $\boldsymbol{X}$. On a la décomposition en parties ouvertes*

$$\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X}) = \coprod_{\epsilon : [\![1,\ell]\!] \to \mathfrak{A}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{C}_{\epsilon(1)} \times \cdots \times \boldsymbol{C}_{\epsilon(\ell)}) = \coprod_{\epsilon : [\![1,\ell]\!] \to \mathfrak{A}} \prod_{\alpha \in \mathrm{im}(\epsilon)} \boldsymbol{F}_{|\epsilon^{-1}(\alpha)|}(\boldsymbol{C}_\alpha)\,.$$

b) *Si $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique connexe de dimension > 1, l'espace $\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X})$ est connexe et la décomposition $(*)$ est la décomposition de $\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m$ en composantes connexes.*

2.4. Dimension et finitude cohomologique de $\boldsymbol{\Delta_{?\ell} X^m}$

2.4.1. Définition. Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique. Notons $\mathcal{D}_k(\boldsymbol{X})$ l'ensemble des $d \in \mathbb{N}$ tels que pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, on ait $H^i_{\mathrm{c}}(U; k) = 0$, $\forall i > d$. Si $\mathcal{D}_k(\boldsymbol{X}) \neq \emptyset$, on dit que $\boldsymbol{X}$ est de dimension cohomologique finie (sur k) de dimension $d_{\boldsymbol{X}} := \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}) = \inf \mathcal{D}_k(\boldsymbol{X})$. Autrement, $\boldsymbol{X}$ est dit de dimension cohomologique infinie et l'on pose $d_{\boldsymbol{X}} = +\infty$ (*cf.* [4] V, def. 1.15, p. 55).

2.4.2. Proposition. *Soient $0 \leqslant \ell \leqslant m \in \mathbb{N}$. Si $\boldsymbol{X}$ est respectivement localement compact, localement connexe (par arcs), localement cohomologiquement trivial, il en est de même de $\Delta_{?\ell} \boldsymbol{X}^m$. De plus,*

a) *Le sous-complexe $(\underline{\underline{\Omega}}^\bullet_{\boldsymbol{X}}, d_\bullet) := \tau_{\leqslant d_{\boldsymbol{X}}}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}^\bullet(\boldsymbol{X}; k), d_*)$ du complexe des germes de cochaînes d'Alexander-Spanier, à savoir*

$$\underline{\underline{\Omega}}^{i<d_{\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{X}} = \underline{\underline{\mathcal{A}}}^i(\boldsymbol{X}; k)\,, \qquad \underline{\underline{\Omega}}^{d_{\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{X}} := \underline{\underline{\ker}}(d_{d_{\boldsymbol{X}}})\,, \qquad \underline{\underline{\Omega}}^{i>d_{\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{X}} = 0\,,$$

est une résolution c-molle de $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$. *Pour toute partie* $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X}$ *localement fermée, les complexes* $\Gamma(\boldsymbol{Y}; (\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}, d_{\bullet}))$ *et* $\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}; (\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}, d_{\bullet}))$ *calculent respectivement* $H(\boldsymbol{Y}; k)$ *et* $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}; k)$.

b) *On a* $\dim_{\mathrm{ch}}(\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m) = \ell\, d_{\boldsymbol{X}}$.

c) *Si* $\dim_k H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}; k) < +\infty$, *on a* $\dim_k H_{\mathrm{c}}(\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m; k) < +\infty$.

Indications. Les assertions préliminaires à propos de la structure locale sont immédiates pour $\boldsymbol{X}^m$, puis pour $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ car ouvert dans $\boldsymbol{X}^m$, et alors pour $\Delta_\ell\boldsymbol{X}^m$ d'après la décomposition $(*)$ de 2.3.3. Le cas de $\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m$ résulte aussi de la décomposition $(*)$ qui montre qu'il est réunion finie des fermés $\overline{\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{X})}$, tous homéomorphes à $\boldsymbol{X}^\ell$.

(a) Voir [4] V, §1.14 (p. 55) ou [25] exercice II.9 (p. 132).

(b) L'égalité classique $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}^m) = md_{\boldsymbol{X}}$ donne $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})) \leqslant md_{\boldsymbol{X}}$, d'où $\dim_{\mathrm{ch}}(\Delta_\ell\boldsymbol{X}^m) \leqslant \ell d_{\boldsymbol{X}}$. Ensuite, pour tout ouvert $U \subseteq \Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m$, la suite longue de cohomologie à support compact

$$\cdots \to H^{i-1}_{\mathrm{c}}(U \cap \Delta_{\leqslant\ell-1}\boldsymbol{X}^m) \to H^i_{\mathrm{c}}(U \cap \Delta_\ell\boldsymbol{X}^m) \to H^i_{\mathrm{c}}(U) \to \cdots \qquad (*)$$

et un raisonnement inductif sur $\ell \geqslant 0$ permettent de voir que l'on a

$$\dim_{\mathrm{ch}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m) \leqslant \ell d_{\boldsymbol{X}}\,. \qquad (\diamond)$$

L'assertion (b) en découle aussitôt lorsque $d_{\boldsymbol{X}} = 0$. Lorsque $d_{\boldsymbol{X}} \geqslant 1$, on fait une récurrence sur m. Les cas où $m \leqslant 1$ sont triviaux. Lorsque $m \geqslant 2$, on fait une récurrence sur ℓ. Les cas où $\ell \leqslant 1$ sont triviaux. Si $1 < \ell < m$, on a $\dim_{\mathrm{ch}}(\Delta_\ell\boldsymbol{X}^m) = \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X})) = \ell d_{\boldsymbol{X}}$ par l'induction en m, et comme $\dim_{\mathrm{ch}}(\Delta_\ell\boldsymbol{X}^m) \leqslant \dim_{\mathrm{ch}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m)$, l'assertion (b) pour $\ell < m$ résulte d'appliquer la majoration $(\diamond)$. Lorsque $\ell = m$, il existe un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}^m$ tel que $H^{md_{\boldsymbol{X}}}_{\mathrm{c}}(U) \neq 0$ et comme nous venons de prouver que $\dim_{\mathrm{ch}}(\Delta_{\leqslant m-1}\boldsymbol{X}^m) = (m-1)d_{\boldsymbol{X}}$ et que $(m-1)d_{\boldsymbol{X}} < md_{\boldsymbol{X}}$ puisque $d_{\boldsymbol{X}} \geqslant 1$, l'exactitude de $(*)$ montre l'existence d'une surjection $H^{md_{\boldsymbol{X}}}_{\mathrm{c}}(U \cap \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})) \twoheadrightarrow H^{md_{\boldsymbol{X}}}_{\mathrm{c}}(U) \neq 0$ et l'on conclut que $md_{\boldsymbol{X}} \leqslant \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$. L'assertion (b) pour $\ell = m$ résulte alors d'appliquer, une fois de plus, la majoration $(\diamond)$.

(c) On raisonne par induction sur ℓ. Si $\ell \leqslant 1$, l'assertion est claire, quel que soit $m \in \mathbb{N}$. Dans le cas général, on suppose la proposition établie pour $\ell-1$ et tout $m \in \mathbb{N}$. Par la suite exacte longue (2.1.2)

$$\to H^*_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell\boldsymbol{X}^m) \to H^*_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m) \to H^*_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell-1}\boldsymbol{X}^m) \to,$$

on a $\dim H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m) < +\infty$, si et seulement si, $\dim H_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell\boldsymbol{X}^m) < +\infty$, donc, si et seulement si $\dim H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X})) < +\infty$ (2.3.3). Or, l'utilisation de la suite exacte longue

$$\to H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X})) \to H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})^{\otimes\ell} \to H^*_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell-1}\boldsymbol{X}^\ell) \to,$$

associée à la décomposition $\boldsymbol{X}^\ell = \boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X}) \sqcup \Delta_{\leqslant\ell-1}\boldsymbol{X}^\ell$, montre qu'une condition suffisante pour $\dim H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X})) < +\infty$ est que $\dim H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell-1}\boldsymbol{X}^\ell) < +\infty$, ce qui fait partie de l'hypothèse inductive. □

3. Théorèmes de scindage et complexes fondamentaux

3.1. Théorème de scindage pour $\boldsymbol{\Delta_{\leqslant\ell}X^m}$

Dans ce travail, en parlant d'une suite exacte longue, on dira qu'elle est « *scindée* » lorsque un morphisme sur trois est nul. La suite exacte longue se scinde alors en une famille dénombrable de suites exactes courtes.

$$\cdots \longrightarrow C^{-1} \xrightarrow{(0)} C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow C^2 \xrightarrow{(0)} C^3 \longrightarrow C^4 \longrightarrow C^5 \xrightarrow{(0)} C^6 \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow C^{-1} \qquad C^0 \rightarrowtail C^1 \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow C^2 \qquad C^3 \rightarrowtail C^4 \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow C^5 \qquad C^6 \rightarrowtail \cdots$$

Le théorème suivant donne les deux résultats de scindage de suites longues de cohomologie à support compact qui ont motivé notre intérêt pour les espaces i-acycliques. Nous verrons que lorsque $\boldsymbol{X}$ est localement connexe, un tel scindage est intimement lié à la dégénérescence des suites spectrales de Leray (*cf.* 12.3.2) associées aux fibrations $\pi_a : \Delta^{[a]}_{?\ell}\boldsymbol{X}^m \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ de 2.2.

3.1.1. Théorème de scindage pour $\boldsymbol{\Delta_{\leqslant\ell}X^m}$

a) *Pour $m \in \mathbb{N}$, si $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, le morphisme de restriction*

$$H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant m}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))) \qquad (\ddagger)$$

est nul. La suite exacte longue de cohomologie associée à la décomposition $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m = (\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{X}))\sqcup(\Delta_{\leqslant m}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m))$ est scindée et la suite extraite :

$$0 \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))[-1]^m \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{X})) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})) \to 0\,,$$

est exacte.

b) *Pour $0 < \ell \leqslant m \in \mathbb{N}$, si $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, le morphisme de restriction*

$$H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell-1}\boldsymbol{X}^m) \qquad (\ddagger\ddagger)$$

est nul. La suite exacte longue de cohomologie associée à la décomposition $(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m) = ((\Delta_\ell\boldsymbol{X}^m)) \sqcup (\Delta_{\leqslant\ell-1}\boldsymbol{X}^m)$ est scindée et la suite extraite :

$$0 \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell-1}\boldsymbol{X}^m)[-1] \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell\boldsymbol{X}^m) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m) \to 0\,,$$

est exacte.

c) *Soit $\boldsymbol{X}$ une variété topologique orientable. L'annulation des morphismes $(\ddagger)$ pour tout m (resp. des morphismes $(\ddagger\ddagger)$ pour tous $\ell \leqslant m$) équivaut à la i-acyclicité de $\boldsymbol{X}$.*

Démonstration. (a) L'ensemble $\Delta_{\leqslant m}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)$ est celui des $(m+1)$-uplets d'éléments de $\boldsymbol{X}$ de la forme $(y, x_1, \ldots, x_m)$ avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ et où $y \in \{x_1, \ldots, x_m\}$. On comprend donc que dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\leqslant m}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m) & \xhookrightarrow{f} & \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m \\ & \searrow^{f_2} & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ & & \boldsymbol{F}_m \end{array}$$

où f est l'inclusion fermée, l'application $f_2 := p_2 \circ f$ est un revêtement trivial à m nappes. Les hypothèses de 1.3.1-(d) sont clairement vérifiées et le morphisme (‡) est bien nul.

(b) Si $\ell = 1$, on a $\Delta_{\leqslant 1}\boldsymbol{X}^m \simeq \boldsymbol{X}$ et $\Delta_{\leqslant 0}\boldsymbol{X}^m = \{\mathrm{pt}\}$, donc (‡‡) est immédiate. Nous sommes ainsi réduits aux cas où $\ell > 1$. On raisonne par récurrence pour $m \geqslant 2$. Supposons l'assertion établie pour $(m-1)$, et soit $1 < \ell \leqslant m$. Par la factorisation : $\Delta^m_{\leqslant \ell-1} \subseteq \boldsymbol{X}\times\Delta^{m-1}_{\leqslant \ell-1} \subseteq \Delta^m_{\leqslant \ell}$, l'assertion résulte de montrer que le morphisme de restriction $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\Delta^{m-1}_{\leqslant \ell-1}) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta^m_{\leqslant \ell-1})$ est nul. On considère pour cela le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} f_2^{-1}(\Delta^{m-1}_{\ell-1}) & \hookrightarrow & \Delta^m_{\leqslant \ell-1} & \overset{f}{\hookrightarrow} & \boldsymbol{X}\times\Delta^{m-1}_{\leqslant \ell-1} \\ & \searrow^{f_2'} & & \searrow^{f_2} & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ & & \Delta^{m-1}_{\ell-1} & \overset{j}{\hookrightarrow} & \Delta^{m-1}_{\leqslant \ell-1} \end{array}$$

où f est l'inclusion (fermée) et j est l'inclusion (ouverte).

La restriction f_2' de $f_2 := p_2 \circ f$ est propre. En effet, $f_2^{-1}(\Delta^{m-1}_{\ell-1})$ est l'ensemble des m-uplets $(y, x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \Delta^m_{\ell-1}$ tels que $\#\{x_1, \ldots, x_{m-1}\} = \ell-1$ et $y \in \{x_1, \ldots, x_{m-1}\}$, de sorte que f_2' est une fibration trivial à $\ell-1$ nappes au-dessus de chaque composante ouverte $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}$ de $\Delta^{m-1}_{\ell-1}$ (2.3.3-(b)). Comme $\ell-1 \geqslant 1$ le morphisme $j_! : H_{\mathrm{c}}(\Delta^{m-1}_{\ell-1}) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta^{m-1}_{\leqslant \ell-1})$ est surjectif par hypothèse de récurrence. Ainsi, toutes les conditions d'application de 1.3.1-(d) sont vérifiées et $f^* = 0$. Le morphisme (‡‡) est donc bien nul.

(c) En prenant $m = 1$ dans (a), ou $m = \ell = 2$ dans (b), l'espace $\boldsymbol{X}$ est $\cup$-acyclique donc i-acyclique d'après 1.2.4-(c). □

3.1.2. Remarques sur le théorème de scindage

a) Les preuves des assertions 3.1.1-(a,b) montrent aussi l'exactitude des suites courtes

$$0 \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_m\boldsymbol{Z})[-1]^m \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{m+1}(\boldsymbol{X}\times\Delta_m\boldsymbol{Z})) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\Delta_m\boldsymbol{Z}) \to 0$$

$$0 \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant \ell-1}\boldsymbol{Z})[-1] \longrightarrow H_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell\boldsymbol{Z}) \longrightarrow H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{Z}) \to 0\,,$$

avec $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}^m$ de la forme $\boldsymbol{Y}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{Y}_m$ où les $\boldsymbol{Y}_i$ sont des sous-espaces i-acycliques de $\boldsymbol{X}$ tels que l'ensemble $\{\boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_m\}$ est totalement ordonné par la relation d'inclusion.

b) Dans 3.1.1-(b) l'hypothèse $\ell \leqslant m$ est indispensable. En effet, lorsque $\ell > m$, on a $\Delta_{\leqslant \ell-1}\boldsymbol{X}^m = \Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m = \boldsymbol{X}^m$ et le morphisme (‡‡) est l'identité. Dans un tel cas, on a aussi $\Delta^{m-1}_{\ell-1} = \emptyset$ et l'argument à la fin de la démonstration précédente, basé sur la surjectivité de $j_!$, ne s'applique pas. (Cette remarque est un rapport avec la remarque 3.3.2.)

3.1.3. Remarque et corollaire. Notons $\overset{\circ}{\boldsymbol{X}}$ le complémentaire dans $\boldsymbol{X}$ d'un singleton $\{\bullet\}$. Lorsque $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, il en est de même de $\overset{\circ}{\boldsymbol{X}}$ et nous

avons grâce à 3.1.1-(a) un morphisme de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to H_c(\boldsymbol{F}_m(\overset{\circ}{\boldsymbol{X}}))[-1]^m & \to & H_c(\boldsymbol{F}_{m+1}(\overset{\circ}{\boldsymbol{X}})) & \to & H_c(\overset{\circ}{\boldsymbol{X}}) \otimes H_c(\boldsymbol{F}_m(\overset{\circ}{\boldsymbol{X}})) & \to 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \to H_c(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))[-1]^m & \to & H_c(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{X})) & \to & H_c(\boldsymbol{X}) \otimes H_c(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})) & \to 0 \end{array}$$

qui permet de montrer, par induction sur $m \geqslant 1$, que le prolongement par zéro $H_c(\boldsymbol{F}_m(\overset{\circ}{\boldsymbol{X}})) \to H_c(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ est un morphisme surjectif.

Notons aussi que $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}) \smallsetminus \boldsymbol{F}_m(\overset{\circ}{\boldsymbol{X}}) := \coprod_{i=1,\dots,m} \boldsymbol{F}_m^{x_i=\bullet}(\boldsymbol{X}) =: \boldsymbol{F}_m^{\bullet}(\boldsymbol{X})$, où $\boldsymbol{F}_m^{x_i=\bullet}(\boldsymbol{X})$ désigne l'ensemble des $\overline{x} \in \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ avec $x_i = \bullet$. On a une identification évidente $\boldsymbol{F}_m^{x_i=\bullet}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{F}_{m-1}(\overset{\circ}{\boldsymbol{X}})$ et $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}) \smallsetminus \boldsymbol{F}_m(\overset{\circ}{\boldsymbol{X}})$ se voit comme réunion disjointe fermée de m copies de $\boldsymbol{F}_{m-1}(\overset{\circ}{\boldsymbol{X}})$. On a ainsi montré le corollaire suivant (qui sera utilisé dans 10.6.1).

Corollaire. *Si $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, la suite de $\mathcal{S}_m$-modules gradués*

$$0 \to H_c\big(\boldsymbol{F}_m^{\bullet}(\boldsymbol{X})\big)[-1] \to H_c(\boldsymbol{F}_m(\overset{\circ}{\boldsymbol{X}})) \to H_c(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})) \to 0$$

est exacte.

3.1.4. À propos des différentes hypothèses d'acyclicité. Dans le théorème de scindage 3.1.1, l'hypothèse d'i-acyclicité n'est pas optimale même lorsque $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique. En effet, nous verrons dans dans 13.10 que la bouteille de Klein épointée vérifie les scindages (a) et (b) alors qu'elle n'est n'est pas i-acyclique. On y montre aussi qu'elle n'est pas totalement $\cup$-acyclique (1.2), mais qu'elle est $\cup$-acyclique. En somme, la i-acyclicité est une condition suffisante et la $\cup$-acyclicité est une condition nécessaire, mais en dehors du cas où $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique orientable, nous ne connaissons pas de condition sur $\boldsymbol{X}$ équivalente aux scindages. Nous verrons cependant, plus loin, que la condition de i-acyclicité est bien nécessaire et suffisante pour la localisation des scindages (12.2.4), ce qui conforte l'idée que la i-acyclicité est la bonne hypothèse de travail.

3.2. Complexe fondamental de $\boldsymbol{X}$ pour $\boldsymbol{\Delta}_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m$

3.2.1. Action du groupe symétrique. L'espace $\boldsymbol{X}^m$ est muni de l'action du groupe symétrique $\mathcal{S}_m$ par permutation des coordonnées. On pourra noter cette action par '$\mathcal{S}_m : \boldsymbol{X}^m$', et de même pour celles induites sur des sous-espaces $\mathcal{S}_m$-stables $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}^m$, leurs cohomologies $\mathcal{S}_m : H_c^i(\boldsymbol{Z})$, $\mathcal{S}_m : H^i(\boldsymbol{Z})$, etc... Les espaces de configuration généralisés $\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m$ et leurs cohomologies sont considérés munis de cette action de $\mathcal{S}_m$.

3.2.2. Définition. Pour $\ell \leqslant m \in \mathbb{N}$, le *complexe fondamental de* $\boldsymbol{X}$ *pour* $\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m$ est, par définition, la suite des morphismes de $\mathcal{S}_m$-modules gradués

$$0 \to H_{\mathrm{c}}(1)[-\ell+1] \to \cdots \to H_{\mathrm{c}}(\ell-1)[-1] \to H_{\mathrm{c}}(\ell) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m) \to 0 \qquad (\star)$$

avec $H_{\mathrm{c}}(a) := H_{\mathrm{c}}(\Delta_a \boldsymbol{X}^m)$, où le morphisme $H_{\mathrm{c}}(a-1)[-1] \to H_{\mathrm{c}}(a)$ est la composée des morphismes

$$H_{\mathrm{c}}(\Delta^m_{a-1})[-1] \xrightarrow{\iota_{a-1}[-1]} H_{\mathrm{c}}(\Delta^m_{\leqslant a-1})[-1] \xrightarrow{c_a} H_{\mathrm{c}}(\Delta^m_a)\,,$$

où ι_{a-1} est le prolongement par zéro et c_a est le morphisme de liaison de la suite longue de cohomologie à support compact associée à la décomposition $\mathcal{S}_m$-stable $\Delta^m_{\leqslant a} = \Delta^m_a \sqcup \Delta^m_{\leqslant a-1}$ (2.1.2).

La suite $(\star)$ est un complexe puisque, par construction, $\iota_a \circ c_a = 0$.

3.2.3. Théorème

a) *Les complexes fondamentaux d'un espace i-acyclique sont exacts.*

b) *Une variété topologique orientable est i-acyclique, si et seulement si, ses complexes fondamentaux sont exacts.*

Démonstration. (a) Immédiat d'après 3.1.1-(b), et (b) s'ensuit par 3.1.1-(c).□

3.3. Le théorème de scindage pour $\boldsymbol{\Delta_{\leqslant \ell} F^{\lambda}(X)}$

Nous étendons dans cette section le théorème de scindage 3.1.1-(b) à d'autres espaces que $\boldsymbol{X}^m$, à savoir : aux produits $\boldsymbol{F}^{\lambda} := \boldsymbol{F}_{\lambda_1} \times \cdots \times \boldsymbol{F}_{\lambda_r}$, et aux espaces $\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}} \subseteq \boldsymbol{X}^m$ où $\mathfrak{q}$ est une partition de $[\![1,m]\!]$ (*cf.* 3.4).

Ces généralisations seront utilisées dans la section 10 pour la détermination du caractère de la représentation de $\mathcal{S}_m : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$, notamment pour expliciter la trace de l'action sur $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ d'une permutation $\alpha \in \mathcal{S}_m$ dont la décomposition en produit cycles disjoints est de type λ (*cf.* 10.5.3).

On considère les suites (peut être vides) de nombres entiers $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ avec $\lambda_i > 0$ et $r \geqslant 0$. Lorsque $r > 0$, on note $|\lambda| := \sum_i \lambda_i$ et on pose

$$\boldsymbol{F}^{\lambda}(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{F}_{\lambda_1}(\boldsymbol{X}) \times \cdots \times \boldsymbol{F}_{\lambda_r}(\boldsymbol{X})\,.$$

Pour la suite vide $()$, on conviendra que $|()| = 0$ et que $\boldsymbol{F}_{()}(\boldsymbol{X}) = \{\mathrm{pt}\}$.

La « *concaténation* » de deux suites $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ et $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ est, par définition, la suite $\lambda \vee \lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$. On a donc

$$\boldsymbol{F}_{\lambda \vee \lambda'} = \boldsymbol{F}_{\lambda} \times \boldsymbol{F}_{\lambda'}\,,$$

ainsi que les égalités évidentes

$$\boldsymbol{F}^{(1,\ldots,1)}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^m\,, \quad \boldsymbol{F}^{(m)}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}) = \Delta_m \boldsymbol{F}^{(1,\ldots,1)}(\boldsymbol{X})\,.$$

3.3.1. Théorème de scindage. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique.*

a) *Pour tout $a \geqslant 0$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, la décomposition en parties respectivement ouverte et fermée*

$$\Delta_\ell\big(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_a\times\boldsymbol{F}^\lambda\big) = \Delta_\ell\big(\boldsymbol{F}_{1+a}\times\boldsymbol{F}^\lambda\big) \sqcup \Delta_\ell\big((\Delta_a(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_a))\times\boldsymbol{F}^\lambda\big)$$

donne lieu à une suite exacte longue de cohomologie dont la suite courte extraire

$$0 \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell(\boldsymbol{F}_{1+a}\times\boldsymbol{F}^\lambda)) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_a\times\boldsymbol{F}^\lambda)) \to \\ \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell(\Delta_a(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_a)\times\boldsymbol{F}^\lambda)) \to 0$$

est exacte.

b) *Pour tout $\ell \leqslant |\lambda|$, le morphisme de restriction*

$$H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}(\boldsymbol{F}^\lambda)) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell-1}(\boldsymbol{F}^\lambda))$$

est nul. La suite exacte longue de cohomologie associée à la décomposition en parties respectivement ouverte et fermée

$$\Delta_{\leqslant\ell}(\boldsymbol{F}^\lambda) = \Delta_\ell(\boldsymbol{F}^\lambda) \sqcup \Delta_{\leqslant\ell-1}(\boldsymbol{F}^\lambda)$$

est scindée et les suites courtes extraites :

$$0 \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell-1}(\boldsymbol{F}^\lambda))[-1] \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell(\boldsymbol{F}^\lambda)) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}(\boldsymbol{F}^\lambda)) \to 0\,,$$

sont exactes.

Démonstration. L'assertion (a) est évidente si $a = 0$. Pour $a > 0$, notons $m := 1 + a + |\lambda|$ et considérons l'inclusion

$$\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_a\times\boldsymbol{F}^\lambda \subseteq \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}^a\times\boldsymbol{X}^{|\lambda|} = \boldsymbol{X}^m\,.$$

Comme $m > 0$, le cas $\ell = 0$ est immédiat, on peut donc supposer que $\ell > 0$. Nous avons montré dans 2.3.3 que $\Delta_\ell\boldsymbol{X}^m$ se décompose en réunion disjointe des sous-espaces ouverts $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{X})$ où $\mathfrak{p} := \{I_1, I_2, \dots, I_\ell\}$ désigne une partition de $[\![1,m]\!]$ en ℓ parties non vides. L'ensemble $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{X})$ est l'ensemble des m-upltes $(x_1, \dots, x_m)$ tels que $(x_i{=}x_j) \Leftrightarrow (i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j)$ où l'on note $(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j) \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} (\exists k)(\{i,j\} \subseteq I_k)$ (*cf.* 2.3.1). Il s'ensuit que $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_a\times\boldsymbol{F}_{\lambda_1}\times\cdots\times\boldsymbol{F}_{\lambda_r}$ est la réunion des $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}$ tels que la relation $(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j)$ *n'est pas vérifiée* lorsque i et j sont des coordonnées correspondantes à un même facteur $\boldsymbol{F}_a$ ou $\boldsymbol{F}_{\lambda_i}$. On obtient ainsi une partition de $\Delta_\ell(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_a\times\boldsymbol{F}^\lambda)$ en sous-espaces ouverts et fermés de $\Delta_\ell\boldsymbol{X}^m$. Ces mêmes remarques s'appliquent à $\Delta_\ell(\boldsymbol{F}_{1+a}\times\boldsymbol{F}^\lambda)$ qui est alors aussi un sous-espace ouvert et *fermé* de $\Delta_\ell\boldsymbol{X}^m$, de même donc qu'à son complémentaire $\Delta_\ell\big(\Delta_a(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_a)\times\boldsymbol{F}^\lambda\big)$. On donc une décomposition en somme directe

$$H_{\mathrm{c}}\big(\Delta_\ell(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_a\times\boldsymbol{F}^\lambda)\big) = H_{\mathrm{c}}\big(\Delta_\ell(\boldsymbol{F}_{1+a}\times\boldsymbol{F}^\lambda)\big) \oplus H_{\mathrm{c}}\big(\Delta_\ell\big(\Delta_a(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_a)\times\boldsymbol{F}^\lambda\big)\big)\,,$$

dont on déduit aussitôt (a).

(b) *Lemme préliminaire. Si* $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}^m$ *est telle que*

$$\big(H_{\rm c}(\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{Z}) \to H_{\rm c}(\Delta_{\leqslant \ell-1}\boldsymbol{Z})\big) = 0\,, \quad \forall \ell \leqslant m\,, \qquad (*)$$

alors, on a aussi

$$\big(H_{\rm c}(\Delta_{\leqslant \ell}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Z})) \to H_{\rm c}(\Delta_{\leqslant \ell-1}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Z}))\big) = 0\,, \quad \forall \ell \leqslant m+1\,. \qquad (**)$$

Preuve du lemme. On peut supposer $\ell{-}1 > 0$. L'inclusion $\Delta_{\leqslant \ell-1}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Z}) \subseteq \Delta_{\leqslant \ell}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Z})$ se factorise en

$$\Delta_{\leqslant \ell-1}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Z}) \hookrightarrow_f \boldsymbol{X}\times\Delta_{\leqslant \ell-1}\boldsymbol{Z} \hookrightarrow \Delta_{\leqslant \ell}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Z})\,,$$

et l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} f_2^{-1}(\Delta_{\ell-1}\boldsymbol{Z}) & \hookrightarrow & \Delta_{\leqslant \ell-1}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Z}) & \hookrightarrow_f & \boldsymbol{X}\times\Delta_{\leqslant \ell-1}\boldsymbol{Z} \\ & {\scriptstyle f_2'}\searrow & & {\scriptstyle f_2}\searrow & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ & & \Delta_{\ell-1}\boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\ j\ } & \Delta_{\leqslant \ell-1}\boldsymbol{Z} \end{array}$$

où $f_2 := p_2 \circ f$. On raisonne alors comme dans la preuve de 3.1.1-(b). L'application $j_! : H_{\rm c}(\Delta_{\ell-1}\boldsymbol{Z}) \to H_{\rm c}(\Delta_{\leqslant \ell-1}\boldsymbol{Z})$ est surjective par l'hypothèse $(*)$. Si $\Delta_{\ell-1}\boldsymbol{Z} = \emptyset$, on déduit aussitôt que $H_{\rm c}(\boldsymbol{X}\times\Delta_{\leqslant \ell-1}\boldsymbol{Z}) = 0$ et alors $f^* = 0$. Autrement, la restriction f_2' de f_2 est propre ($\ell{-}1 > 0$), les hypothèses de 1.3.1-(d) sont donc vérifiées et $f^* = 0$. Tout ceci implique $(**)$. ⊟

Prouvons (b) par induction sur le nombre r des termes de $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$.

Cas $r \leqslant 1$. Si $r = 0$, on a $\ell \leqslant 0$ et donc $\Delta_{\ell-1}(_) = \emptyset$. Si $r = 1$, $\boldsymbol{F}^\lambda$ est de la forme $\boldsymbol{F}_a$, mais alors $\ell \leqslant a$ et $\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{F}_a \neq \emptyset$ seulement si $\ell = a$, auquel cas $\Delta_{\ell-1}\boldsymbol{F}_a = \emptyset$.

Cas $r > 1$. Supposons (b) établie pour toute suite λ comportant $r \geqslant 1$ termes. Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ et montrons, par induction sur l'entier a, que $\boldsymbol{F}_a\times\boldsymbol{F}^\lambda$ vérifie également (b).

Le cas $a = 1$ était l'objet du lemme préliminaire. Supposons maintenant que $\boldsymbol{F}_a\times\boldsymbol{F}^\lambda$ vérifie (b) et montrons qu'il en est de même de $\boldsymbol{F}_{1+a}\times\boldsymbol{F}^\lambda$.

Pour $\ell \leqslant 1 + a + |\lambda|$, on considère le diagramme commutatif $(\mathcal{D}_\ell)$ suivant où l'on a omis d'écrire le symbole $H_{\rm c}(_)$ pour gagner de la place. On y a noté $a\boldsymbol{F}_a$, l'espace qui consiste en a copies de l'espace $\boldsymbol{F}_a$, ce qui correspond très exactement à $\Delta_a(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_a)$. Le diagramme $(\mathcal{D}_\ell)$ se prolonge indéfiniment par ses quatre côtés via les suites longues de cohomologie à support compact. Dans ce prolongement, le nombre ℓ reste bien sûr constant et seuls les degrés cohomologiques changent. Les quatre flèches marquées '$\circledcirc$' y sont nulles. Cela résulte, pour la colonne et la ligne centrales, respectivement par l'assertion (a) et par le lemme préliminaire.

Lorsque $\ell \leqslant a + |\lambda|$, l'hypothèse inductive s'applique et les flèches '$\odot$' sont nulles. Le morphisme β et surjectif et on en déduit la surjectivité de α. Les flèches '$\otimes$' sont donc nulles. Comme ces propriétés sont également vérifiées sur le diagramme $(\mathcal{D}_{\ell-1})$ et que les flèches '$\otimes$' de $(\mathcal{D}_{\ell-1})$ sont les flèches '$\ominus$' de $(\mathcal{D}_\ell)$, on conclut que ces dernières sont nulles. À partir de là, une chasse

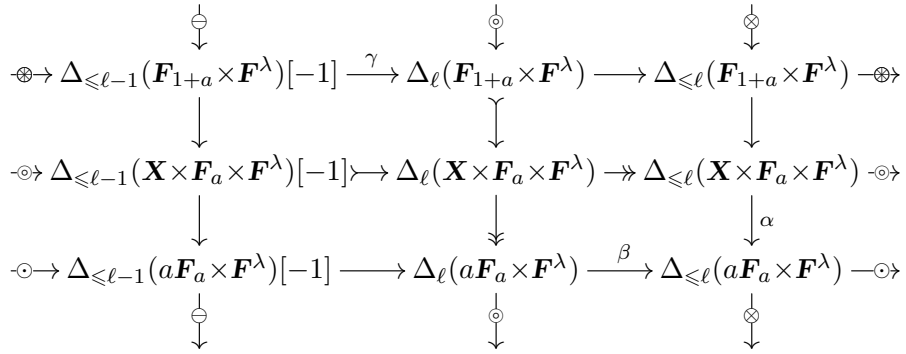


Diagramme $\mathcal{D}_\ell$

au diagramme élémentaire montre que le flèches '$\circledast$' sont également nulles, ce qui prouve l'assertion (b) pour l'espace $\boldsymbol{F}_{1+a}\times\boldsymbol{F}^\lambda$ et pout $\ell \leqslant a+|\lambda|$.

Soit maintenant $\ell = 1+a+|\lambda|$. Les flèches de la première colonne de $(\mathcal{D}_{1+a+|\lambda|})$ marquées '$\ominus$' sont nulles puisqu'elles coïncident avec les flèches '$\otimes$' du diagramme $(\mathcal{D}_{a+|\lambda|})$ dont la nullité a déjà été établie. On en déduit l'injectivité de γ, et donc la nullité des flèches '$\circledast$'. Ceci prouve l'assertion (b) pour l'espace $\boldsymbol{F}_{1+a}\times\boldsymbol{F}^\lambda$ et pout $\ell = 1+a+|\lambda|$.

La récurrence par rapport à a est terminée et l'assertion (b) est vérifiée par $\boldsymbol{F}_a\times\boldsymbol{F}^\lambda$ pour tout $a\in\mathbb{N}$ et pour tout $\ell\leqslant a+|\lambda|$. Ceci à son tour termine la récurrence par rapport au nombre r dans $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$. L'assertion (b) est par conséquent vérifiée par $\boldsymbol{F}^\lambda$ pour tout $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$, pour tout $r\in\mathbb{N}$ et pour tout $\ell\leqslant|\lambda|$. C.Q.F.D □

3.3.2. Remarque. On prendra garde du fait que l'analogue de 3.3.1-(a) pour l'opérateur $\Delta_{\leqslant\ell}$, *i.e.* l'exactitude des suites

$$0\to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}(\boldsymbol{F}_{1+a}\times\boldsymbol{F}^\lambda))\to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_a\times\boldsymbol{F}^\lambda))\to \\ \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}(\Delta_a(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_a)\times\boldsymbol{F}^\lambda))\to 0\,,$$

n'est pas vrai pour $\ell=1+a+|\lambda|$, cas auquel on peut effacer $\Delta_{\leqslant\ell}(_)$. Dans ce cas, le morphisme de droite est la restriction $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_a\times\boldsymbol{F}^\lambda)\to H_{\mathrm{c}}(a\boldsymbol{F}_a\times\boldsymbol{F}^\lambda)$ qui est nulle d'après 3.1.1-(a), alors que le morphisme de gauche n'est généralement pas injectif. On remarquera que la démonstration du théorème prouve cependant que la suite en question est bien exacte pour $\ell\leqslant a+|\lambda|$.

3.4. Sous-espaces $\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X})$ et sous-groupes $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}}\subseteq\mathcal{S}_m$

3.4.1. Les sous-espaces $\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X})$. Soit $\mathfrak{q}=\{I_1,\dots,I_r\}$ une partition de $[\![1,m]\!]$ en parties non vides, notons $\lambda_i:=|I_i|$ et $\lambda:=(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$. Pour chaque $i=1,\dots,r$, fixons arbitrairement une bijection $\varphi_i: I_i\to[\![1,\lambda_i]\!]$. Notons

ensuite $\varphi : [\![1,m]\!] \to [\![1,m]\!]$ la bijection

$$t \in I_i \mapsto \varphi(t) = \sum\nolimits_{j<i} \lambda_j + \varphi_i(t)\,,$$

et soit $\Phi : \boldsymbol{X}^m \to \boldsymbol{X}^m$ l'homéomorphisme $(x_1,\dots,x_m) \mapsto (x_{\varphi(1)},\dots,x_{\varphi(m)})$. L'ensemble

$$\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X}) := \Phi^{-1}(\boldsymbol{F}^{\lambda}(\boldsymbol{X})) = \Phi^{-1}(\boldsymbol{F}_{\lambda_1}\times\cdots\times\boldsymbol{F}_{\lambda_m})\,,$$

est indépendant de l'indexation des parties $I_i \in \mathfrak{q}$ et des choix des bijections φ_i, il dépend uniquement de la partition $\mathfrak{q}$.

3.4.2. Commentaire à propos des notations. Il convient de souligner la différence entre les notation $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{X})$ et $\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X})$. Dans les deux cas, $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ désignent des partitions de $[\![1,m]\!]$ et nous avons ([10])

$$(x_1,\dots,x_m) \in \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{X}) \Leftrightarrow_{\text{def}} (\forall i \neq j)\big((i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j) \Leftrightarrow (x_i = x_j)\big)$$
$$(x_1,\dots,x_m) \in \boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X}) \Leftrightarrow_{\text{def}} (\forall i \neq j)\big((i \underset{\mathfrak{q}}{\sim} j) \Rightarrow (x_i \neq x_j)\big)$$

3.4.3. Sous-groupe $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}} \subseteq \mathcal{S}_m$. Pour toute partie $I \subseteq [\![1,m]\!]$, notons

$$\mathcal{S}_I := \mathrm{Fix}_{\mathcal{S}_m}([\![1,m]\!] \smallsetminus I) = \{\alpha \in \mathcal{S}_m \mid \alpha(j) = j \quad \forall j \notin I\}\,,$$

puis, si $\mathfrak{q} = \{I_1,\dots,I_r\}$ est une partition de $[\![1,m]\!]$, posons

$$\mathcal{S}^{\mathfrak{q}} := \mathcal{S}_{I_1}\times\cdots\times\mathcal{S}_{I_r}\,.$$

On a $\mathcal{S}_I \sim \mathcal{S}_{|I|}$ et $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}} \sim \mathcal{S}_{|I_1|}\times\cdots\times\mathcal{S}_{|I_r|}$.

L'action de $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}}$ sur $\boldsymbol{X}^m$ laisse clairement stables les sous-espaces $\Delta_{?\ell}(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}})$, quel que soit ℓ. La section suivante 3.5 étend les résultats de la section 3.2 qui concernaient les $\mathcal{S}_m$-espaces $\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m$, au cas des $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}}$-espaces $\Delta_{?\ell}\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X})$.

3.4.4. Définition. Deux partitions $\mathfrak{p},\mathfrak{q} \in \mathfrak{P}([\![1,m]\!])$ sont dites « *transverses* », et l'on note, $\mathfrak{p} \pitchfork \mathfrak{q}$, si l'on a $(\forall i \neq j)\big(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j \Rightarrow i \underset{\mathfrak{q}}{\not\sim} j\big)$ (*cf.* 3.4.2). On note

$$\mathfrak{q}^{\pitchfork} := \{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}([\![1,m]\!]) \mid \mathfrak{p} \pitchfork \mathfrak{q}\}\,.$$

La relation de transversalité est une relation symétrique.

3.4.5. Proposition

a) *Pour* $\mathfrak{q} \in \mathfrak{P}(m)$, *on a* $\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X}) := \coprod_{\mathfrak{p}\pitchfork\mathfrak{q}} \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{X})$.

b) *Le sous-groupe* $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}} \subseteq \mathcal{S}_m$ *(3.4.3) fixe* $\mathfrak{q}$ *et laisse stable* $\mathfrak{q}^{\pitchfork}$.

[10] On rappelle que si $\mathfrak{p}$ est une partition de $[\![1,m]\!]$, on écrit $(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j)$, si et seulement si, il existe $I \in \mathfrak{p}$ tel que $\{i,j\} \subseteq I$.

Démonstration. (a) On rappelle que l'on a, par définition (3.4.2),

$$\begin{cases} \big((x_1,\dots,x_m)\in \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}\big) \iff (\forall i\neq j)\big((i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j) \Leftrightarrow (x_i = x_j)\big)\,, \\ \big((x_1,\dots,x_m)\in \boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}\big) \iff (\forall i\neq j)\big((i \underset{\mathfrak{q}}{\sim} j) \Rightarrow (x_i \neq x_j)\big)\,. \end{cases}$$

L'inclusion $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}} \subseteq \boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}$ est alors immédiate si $\mathfrak{p} \pitchfork \mathfrak{q}$. Réciproquement, un élément $\overline{x} \in \boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}$ définit la partition $\mathfrak{p}_{\overline{x}}$ qui regroupe dans une même partie les indices des coordonnées identiques, *i.e.* $(i \underset{\mathfrak{p}_{\overline{x}}}{\sim} j) \Leftrightarrow (x_i = x_j)$, or $(x_i = x_j) \Rightarrow (i \underset{\mathfrak{q}}{\not\sim} j)$. Par conséquent, $\mathfrak{p}_{\overline{x}} \pitchfork \mathfrak{q}$ et $\overline{x} \in \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}_{\overline{x}}} \subseteq \boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}$.

(b) Pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_m$, si $\mathfrak{p} \pitchfork \mathfrak{q}$, on a $\alpha\cdot\mathfrak{p} \pitchfork \alpha\cdot\mathfrak{q}$. D'autre part, si $\alpha \in \mathcal{S}^{\mathfrak{q}}$, l'égalité $\alpha\cdot\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$ est évidente. □

3.5. Complexe fondamental de $\boldsymbol{X}$ pour $\boldsymbol{\Delta_{\leqslant\ell}F^{\mathfrak{q}}(X)}$

3.5.1. Le théorème de scindage pour $\boldsymbol{\Delta_{\leqslant\ell}F^{\mathfrak{q}}(X)}$. Compte tenu de l'homéomorphisme $\boldsymbol{F}^{\lambda} \sim \boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}$ de 3.4.1, le corollaire suivant de 3.3.1 est immédiat.

3.5.2. Corollaire. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Pour toute partition $\mathfrak{q}$ de $[\![1,m]\!]$ et pour tout $\ell \leqslant m$, le morphisme de restriction*

$$H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}})) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell-1}(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}))$$

est nul. La suite exacte longue de cohomologie associée à la décomposition en parties respectivement ouverte et fermée

$$\Delta_{\leqslant\ell}(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}) = \Delta_{\ell}(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}) \sqcup \Delta_{\leqslant\ell-1}(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}})$$

est scindée et les suites courtes extraites :

$$0 \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell-1}(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}))[-1] \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\ell}(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}})) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}})) \to 0\,,$$

sont exactes.

3.5.3. Définition. Soit $\mathfrak{q}$ une partition de $[\![1,m]\!]$ et soit $\ell \leqslant m$. Le *complexe fondamental de $\boldsymbol{X}$ associé à $\Delta_{\leqslant\ell}(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}})$* est le complexe de $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}}$-modules gradués

$$0 \to H_{\mathrm{c}}(1)[-\ell+1] \to \cdots \to H_{\mathrm{c}}(\ell-1)[-1] \to H_{\mathrm{c}}(\ell) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X}))) \to 0$$

avec $H_{\mathrm{c}}(a) := H_{\mathrm{c}}(\Delta_a(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}))$, obtenu par concaténation des suites courtes du corollaire 3.5.2 (*cf.* 3.2.2).

3.5.4. Théorème. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Le complexe fondamental de $\Delta_{\leqslant\ell}(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}})$ est un complexe de $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}}$-modules gradués exact.*

Démonstration. Conséquence du corollaire 3.5.2. □

4. Cohomologie des espaces de configuration, cas i-acyclique

4.1. Généralités sur le polynôme de Poincaré

4.1.1. Polynôme de Poincaré d'un espace vectoriel gradué

Le *polynôme de Poincaré* d'un k-espace vectoriel gradué $V := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V^i$ de dimension finie est le polynôme $\mathcal{P}(V) \in \mathbb{Z}[T, 1/T]$

$$\mathcal{P}(V^*)(T) := \sum\nolimits_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k(V^i)\, T^i\,.$$

4.1.2. Lemme

a) *Si* $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ *est une suite exacte courte d'espaces vectoriels gradués, on a* $\mathcal{P}(V_2) = \mathcal{P}(V_1) + \mathcal{P}(V_3)$.

b) $\mathcal{P}(V[-1])(T) = T \cdot \mathcal{P}(V)$ ([11]).

c) $\mathcal{P}(V_1 \otimes_k V_2) = \mathcal{P}(V_1) \cdot \mathcal{P}(V_2)$.

d) $\mathcal{P}(\mathrm{Homgr}_k(V_1, V_2))(T) = \mathcal{P}(V_1)(1/T) \cdot \mathcal{P}(V_2)(T)$

4.1.3. Polynômes de Poincaré d'un espace topologique

Les polynômes de Poincaré pour la cohomologie ordinaire et à support compact d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ de type fini ([9]) sont notés

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{X}, k)(t) := \mathcal{P}(H(\boldsymbol{X}, k)) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}, k)(t) := \mathcal{P}(H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}, k))\,.$$

Le corps k sera omis de ces notations lorsque son indication sera superflue.

4.1.4. Remarque et notation. Comme nous l'avons déjà signalé dans la remarque 1.3.2, lorsque $H^0_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) = 0$, le polynôme de Poincaré pour la cohomologie à support compacte de $\boldsymbol{X} \smallsetminus F$ seul dépend du cardinal $a := \#F$ de la partie finie $F \subseteq \boldsymbol{X}$. C'est le sens de la notation $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus a)$, p.e. dans l'assertion (c) du lemme suivant.

4.1.5. Lemme. *Si* $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *sont des espaces topologiques de type fini, on a*

a) $\mathcal{P}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}) = \mathcal{P}(\boldsymbol{X}) \cdot \mathcal{P}(\boldsymbol{Y})$ *et* $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}) = \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \cdot \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})$.

b) *(Dualité de Poincaré) Si de plus* $\boldsymbol{X}$ *est une variété topologique orientable, de dimension* $d_{\boldsymbol{X}}$ *et de type fini, on a*

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{X})(T) = \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(1/T) \cdot T^{d_X}\,.$$

c) *Si* $H^0_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) = 0$ *(p.e. si* $\boldsymbol{X}$ *est i-acyclique), on a*

$$\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus a)(T) = \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(T) + a \cdot T\,,$$

et donc

$$\frac{\prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus i)(T)}{T^m} = \Big(\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(T)}{T}\Big)^{\overline{m}}\,.$$

[11] On rappelle que $V[-1]^i := V^{i-1}$, par convention.

4.2. Polynômes de Poincaré de $\boldsymbol{F_m(X)}$ et de $\boldsymbol{\Delta_{\leqslant m-1}X^m}$

La proposition suivante est une application immédiate du théorème de scindage 3.1.1-(a). Elle donne une formule fermée pour les polynômes de Poincaré de deux espaces de configuration.

Avertissement. La donnée d'un espace i-acyclique X présupposera que $\dim H_{\mathrm{c}}(X) < \infty$.

4.2.1. Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique.*

a) *Le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ est le polynôme*

$$\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(T) = \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus i)(T) = \prod_{i=0}^{m-1} \Big(\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(T) + i \cdot T\Big)\,,$$

soit,

$$\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(T) = T^m \left(\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(T)}{T}\right)^{\overline{m}}.$$

b) *L'espace $\Delta_{\leqslant m-1}\boldsymbol{X}^m$ est* « la diagonale épaisse de $\boldsymbol{X}^m$ »*, son polynôme de Poincaré est le polynôme $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant m-1}\boldsymbol{X}^m)$ homogène de degré $m-1$ dans l'anneaux $\mathbb{Z}[\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), T]$, vérifiant :*

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant m-1}\boldsymbol{X}^m)(T)}{T^{m-1}} = \left(\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(T)}{T}\right)^{\overline{m}} - \left(\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(T)}{T}\right)^{m}.$$

Démonstration. (a) La suite exacte courte de 3.1.1-(a) et les lemmes 4.1.2 et 4.1.5 donnent aussitôt la relation de récurrence :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}) &= \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \cdot \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m) + m \cdot T \cdot \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m) \\ &= (\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) + m \cdot T) \cdot \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m) = \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus m) \cdot \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m)\end{aligned}$$

qui permet de conclure.

(b) Montrons la surjectivité du morphisme de prolongement par zéro

$$H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m) \twoheadrightarrow H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^m)\,. \qquad (*)$$

Immédiat si $m = 1$, on raisonne par induction. Si $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m-1}) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^{m-1})$ est surjectif, le morphisme $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_{m-1}) \twoheadrightarrow \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}^{m-1})$, l'est aussi (par Künneth), et, composé à $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m) \twoheadrightarrow H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_{m-1})$, surjectif d'après 3.1.1-(a), on conclut que $(*)$ l'est aussi.

Maintenant, le complémentaire de l'ouvert $\boldsymbol{F}_m$ dans $\boldsymbol{X}^m$ est la diagonale épaisse $\Delta_{\leqslant m-1}\boldsymbol{X}^m$, et la suite longue de cohomologie à support compact associée à la décomposition $\boldsymbol{X}^m = \boldsymbol{F}_m \sqcup \Delta^m_{\leqslant m-1}$ est scindée au niveau du prolongement par zéro $(*)$. On a donc la suite exacte courte :

$$0 \to H_{\mathrm{c}}(\Delta^m_{<m})[-1] \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^m) \to 0\,,$$

dont résulte l'assertion (b). □

4.2.2. Remarque. Dans cette proposition, si $\boldsymbol{X}$ est en plus une variété topologique orientable et de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$, l'ouvert $\boldsymbol{F}_m \subseteq \boldsymbol{X}^m$ (de dimension $md_{\boldsymbol{X}}$) l'est également et la dualité de Poincaré (4.1.5-(b)) s'applique pour donner l'égalité analogue à 4.2.1-(a) :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(T) = \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{P}(\boldsymbol{X} \smallsetminus i)(T) &= \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{P}(\boldsymbol{X})(T) + i \cdot T^{d_{\boldsymbol{X}}-1} \\ &= T^{(d_{\boldsymbol{X}}-1)m} \Big(\frac{\mathcal{P}(\boldsymbol{X})(T)}{T^{d_{\boldsymbol{X}}-1}} \Big)^{\overline{m}} .\end{aligned}$$

4.2.3. Remarque. Soient $1 \leqslant a \leqslant m \in \mathbb{N}$ et $\pi_a : \boldsymbol{F}_m \to \boldsymbol{F}_a$ la projection sur les a dernières coordonnées . Pour tout ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a$, notons $\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_m := \pi_a^{-1}(\boldsymbol{U})$. La même preuve de 3.1.1-(a) (*cf.* rem. 3.1.2-(a)) montre que la suite

$$0 \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_m)[-1]^m \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{m+1}) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_m) \to 0\,, \qquad (\diamond)$$

est exacte. On en déduit, comme pour 4.2.1-(a), que l'on a

$$\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}) = \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b-1+a}) \cdot (\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) + (b-1+a)T)$$

et par itération (*cf.* 12.2.8) :

$$\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X})) = \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) \cdot \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))\,.$$

Il est intéressant d'observer qu'une condition nécessaire pour l'exactitude des suites ($\diamond$) pour tout $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$, est que $\boldsymbol{X}$ soit totalement $\cup$-acyclique. En effet, dans un tel cas et si $m = 1$, le morphisme $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U})$ doit être nul. On ignore si la totale $\cup$-acyclicité suffit à l'exactitude des suites ($\diamond$) lorsque, par exemple, $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique non orientable.

4.2.4. Remarque. Les fibres des applications $\pi_a : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ sont de la forme $\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a)$ et, d'autre part, ce qui précède montre que l'on a

$$\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\pi_a^{-1}\boldsymbol{C}) = \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{C}) \cdot \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))\,, \qquad (*)$$

pour toute composante connexe $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{F}_a$. Cette observation qui suggère l'existence d'une forme de trivialité cohomologique pour les applications π_a, est à l'origine de l'étude de la section 12.4 destinée à prouver la dégénérescence des suites spectrales de Leray associées à π_a lorsque $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique et localement connexe (mais pas forcément de type fini). Plus précisément, on y montre que si $\boldsymbol{C}$ est une composante connexe de $\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ et si $\overline{x} \in \boldsymbol{C}$, le terme $I\!E_2$ de la suite spectrale de Leray pour la cohomologie à support compact de la fibration $\pi_a : \pi_a^{-1}\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ est

$$I\!E_2 = H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{C}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\pi_a^{-1}\overline{x}) \Rightarrow H_{\mathrm{c}}(\pi_a^{-1}\boldsymbol{C})\,.$$

On observera déjà à ce niveau que lorsque $\boldsymbol{X}$ est de type fini, l'égalité ($*$) force l'annulation des différentielles de la suite spectrale en question $(I\!E_r, d_r)$ pour $r \geqslant 2$, car autrement $\dim(I\!E_\infty) < \dim(I\!E_2)$, ce qui n'est pas le cas.

4.2.5. Corollaire. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m)$ s'obtient en évaluant en $P := \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ le polynôme homogène $\boldsymbol{Q}_\ell^m(P,T) \in \mathbb{Z}[P,T]$, de degré ℓ :*

$$\boldsymbol{Q}_\ell^m(P,T) = T^\ell \cdot |\mathfrak{P}_\ell(m)| \cdot \Big(\frac{P}{T}\Big)^{\overline{\ell}}.$$

Démonstration. Clair d'après 2.3.3 et 4.2.1-(a). □

4.2.6. Commentaire. Notre approche des polynômes de Poincaré de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ pour variété topologique orientable $\boldsymbol{X}$ repose sur l'annulation du morphisme de restriction $\delta_{\boldsymbol{X}}^* : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ (1.2.4-(c)). Cela restreint considérablement la portée de la méthode, mais n'exclut pas qu'elle puisse être appliquée à d'autres cas, et même pour $\boldsymbol{X}$ compact. Par exemple, lorsque $\boldsymbol{X}$ est un groupe de Lie compact connexe $\boldsymbol{K}$ de dimension $d_{\boldsymbol{K}}$, il est avantageux de profiter de l'action diagonale libre de $\boldsymbol{K}$ sur $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$. Notons $\overset{\circ}{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{K} \smallsetminus \{e\}$. On a la bijection

$$\Psi : \boldsymbol{F}_{m-1}(\overset{\circ}{\boldsymbol{K}})\times\boldsymbol{K} \to \boldsymbol{F}(n,\boldsymbol{K}), \quad (\overline{x},g) \mapsto (x_1 g, \dots, x_{n-1} g, g),$$

et ceci donne aussitôt l'égalité $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{K})) = H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m-1}(\overset{\circ}{\boldsymbol{K}})) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{K})$, où $\overset{\circ}{\boldsymbol{K}}$ n'est plus compact. On peut alors se demander si $\overset{\circ}{\boldsymbol{K}}$ est $\cup$-acyclique.

Comme $\boldsymbol{K}$ est compact, le prolongement par zéro $H_{\mathrm{c}}(\overset{\circ}{\boldsymbol{K}}) \to H(\boldsymbol{K})$ identifie $H_{\mathrm{c}}(\overset{\circ}{\boldsymbol{K}})$ à $H^+(\boldsymbol{K})$ et nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{c}}(\overset{\circ}{\boldsymbol{K}}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\overset{\circ}{\boldsymbol{K}}) & \xrightarrow{\rho_{\overset{\circ}{\boldsymbol{K}}}} & H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\overset{\circ}{\boldsymbol{K}}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(\boldsymbol{K}) \otimes H(\boldsymbol{K}) & \xrightarrow{\rho_{\boldsymbol{K}}} & H(\Delta_{\boldsymbol{K}}) \end{array}$$

où $\rho_{\boldsymbol{K}}$ est le cap-produit. Si $\rho_{\overset{\circ}{\boldsymbol{K}}} = 0$, nous devons avoir

$$H^+(\boldsymbol{K}) \wedge H^+(\boldsymbol{K}) = 0,$$

mais ceci n'est possible, par dualité de Poincaré, que si le groupe de Lie $\boldsymbol{K}$ à la même homologie qu'une sphère. Lorsque le corps des coefficients est $\mathbb{Q}$, cela arrive seulement dans trois cas $\boldsymbol{K} = \mathbb{S}^0$, $\boldsymbol{K} = \mathbb{S}^1$ et $\boldsymbol{K} = \mathbb{S}^3 \simeq \mathrm{SU}(2) = \mathrm{Sp}(1)$. Dans ces cas la proposition 4.2.1-(a) s'applique et on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{K})) = \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m-1}(\overset{\circ}{\boldsymbol{K}})) &= \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{K}) \cdot T^{m-1} \cdot \big(\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\overset{\circ}{\boldsymbol{K}})/T\big)^{\overline{m-1}} \\ &= (T^{d_{\boldsymbol{K}}}+1) \cdot T^{m-1} \cdot \big(T^{d_{\boldsymbol{K}}-1}\big)^{\overline{m-1}}. \end{aligned}$$

4.3. Polynômes de Poincaré de $\boldsymbol{\Delta_{\leqslant\ell} X^m}$

Une application immédiate de l'exactitude du complexe fondamental est la détermination du polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m)$ lorsque $\boldsymbol{X}$ est de type fini. L'assertion suivante généralise la proposition 4.2.1.

4.3.1. Corollaire. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m)$ est le polynôme homogène de $\mathbb{Z}[\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}),T]$, de degré ℓ, donné par la somme alternée* (*cf.* 2.3.3)

$$\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m)=\sum\nolimits_{0\leqslant a<\ell}(-1)^a\cdot|\mathfrak{P}_{\ell-a}(m)|\cdot\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{\ell-a}(\boldsymbol{X}))\cdot T^a\,,$$

avec comme termes de plus bas et plus haut degrés en T :

$$\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m)=|\mathfrak{P}_{\ell}(m)|\cdot\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})^{\ell}\cdot T^0+\cdots$$
$$\cdots+\sum\nolimits_{0\leqslant a<\ell}(-1)^a\cdot|\mathfrak{P}_{\ell-a}(m)|\cdot(\ell-a-1)!\cdot\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})\cdot T^{\ell-1}\,.$$

Démonstration. Résulte d'appliquer le théorème 3.2.3, l'explicitation du corollaire 4.2.5 et le fait que le terme de plus haut degré en T de $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{\ell-a}(\boldsymbol{X}))$ est $(\ell-a-1)!\cdot\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})\cdot T^{\ell-a-1}$ d'après 4.2.1-(a). □

4.4. Polynôme universel pour $\boldsymbol{\Delta_{\leqslant\ell}X^m}$

Le corollaire 4.3.1 montre que le polynôme de Poincaré de $H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m)$ s'obtient en évaluant un certain polynôme homogène de l'anneau $\mathbb{Z}[P,T]$, degré ℓ, en $P=\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$. Ce polynôme est indépendant de $\boldsymbol{X}$ et il est unique.

Définition. Le « *polynôme universel pour la cohomologie à support compact des espaces $\Delta^m_{\leqslant\ell}$* », noté $\boldsymbol{Q}^m_{\leqslant\ell}(P,T)$, est le polynôme de $\mathbb{Z}[P,T]$, homogène de degré total ℓ, donné par

$$\boldsymbol{Q}^m_{\leqslant\ell}(P,T):=T^{\ell}\sum\nolimits_{a=1,\dots,\ell}(-1)^{\ell-a}\cdot|\mathfrak{P}_a(m)|\cdot\Big(\frac{P}{T}\Big)^{\overline{a}}\,,$$

où $|\mathfrak{P}_a(m)|:=\dfrac{1}{\ell!}\ \sum\nolimits_{j=0}^{\ell}(-1)^{\ell-j}\binom{\ell}{j}\,j^m$. (*Cf.* 2.3.3.)

4.4.1. Remarque. Il peut y avoir beaucoup de simplifications dans l'expression donnant ces polynômes. Par exemple, sachant que $\Delta_{\leqslant m}\boldsymbol{X}^m=\boldsymbol{X}^m$, on peut anticiper l'égalité $\boldsymbol{Q}^m_{\leqslant m}(P,T)=P^m$, ce qui est loin d'être une évidence uniquement à partir de la définition de $\boldsymbol{Q}^m_{\leqslant\ell}$.

4.4.2. Un exemple de polynômes universels

Voici les six polynômes universels pour $m=6$.

$\boldsymbol{Q}_{\leqslant 1,6}(P,T)=\quad P\ T^0$
$\boldsymbol{Q}_{\leqslant 2,6}(P,T)=31\ P^2T^0+\ 30\ P\ T$
$\boldsymbol{Q}_{\leqslant 3,6}(P,T)=90\ P^3T^0+239\ P^2T+150\ P\ T^2$
$\boldsymbol{Q}_{\leqslant 4,6}(P,T)=65\ P^4T^0+300\ P^3T+476\ P^2T^2+240\ P\ T^3$
$\boldsymbol{Q}_{\leqslant 5,6}(P,T)=15\ P^5T^0+\ 85\ P^4T+225\ P^3T^2+274\ P^2T^3+120\ PT^4$
$\boldsymbol{Q}_{\leqslant 6,6}(P,T)=\quad P^6T^0.$

5. Représentations du groupe symétrique

Dans 3.2.2 nous avons muni les espaces $\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m$ de l'action de $\mathcal{S}_m$. Nous allons maintenant explorer en détail la structure de $\mathcal{S}_m$-espace de $\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m$.

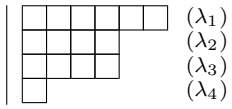
5.1. Notations pour le décompositions et les diagrammes de Young

– Une « *décomposition* » λ d'un entier $m \geqslant 0$, notée $\lambda \vdash m$, est la donnée d'une suite décroissante d'entiers positifs $\lambda := (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_\ell > 0)$ telle que $m = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\ell$. On note $|\lambda| = m$ et $\ell(\lambda) := \ell$.

– Étant données une famille d'entiers naturels $\{\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_m\}$, telle que $m = \sum_i \mathsf{x}_i\, i$, on notera de manière équivalente

$$(\underbrace{m,\ldots,m}_{\mathsf{x}_m},\underbrace{m{-}1,\ldots,m{-}1}_{\mathsf{x}_{m-1}},\ldots\underbrace{1,\ldots,1}_{\mathsf{x}_1}) = (1^{\mathsf{x}_1}, 2^{\mathsf{x}_2}, \ldots, m^{\mathsf{x}_m})$$

– Un « *diagramme de Young* » est un empilement vertical de juxtapositions horizontales de boites dont le nombre, λ_i, décroît. La suite $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ est une décomposition de $m := |\lambda|$. On identifie ainsi décompositions et diagrammes. On note $\mathcal{Y}_\ell(m)$ l'ensemble des diagrammes à m boites et à ℓ lignes, soit donc



$$\mathcal{Y}_\ell(m) := \big\{(\lambda \vdash m)\ \&\ (\ell(\lambda) = \ell)\big\}\,.$$

– Un « *tableau de Young standard* » est un diagramme de Young λ dont on rempli les boites par les entiers $1, 2, \ldots, |\lambda|$. On note $\tau(\lambda)$ le tableau obtenu par une numérotation successive, de gauche à droite et de haut en bas, tel qu'indiqué dans la figure ci-contre.

$$\tau(\lambda) := \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4&5&6\\\hline 7&8&9&10\\\cline{1-4}11&12&13&14\\\cline{1-4}15\\\cline{1-1}\end{array}\right)$$

– Si $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)$, on note $\mathcal{P}_\lambda$ le sous-groupe de $\mathcal{S}_m$ des permutations qui conservent les lignes de $\tau(\lambda)$. On a

$$\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\lambda_\ell}\,.$$

– Un diagramme $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)$ décompose l'intervalle $[\![1,m]\!]$ suivant les ℓ sous-intervalles définis par les lignes de $\tau(\lambda)$. On note $\mathfrak{p}_\lambda \in \mathfrak{P}_\ell(|\lambda|)$ la partition ainsi déterminée. Le sous-groupe

$$\mathcal{S}_\lambda := N_{\mathcal{S}_m}\mathcal{P}_\lambda$$

où $N_{\mathcal{S}_m}(\mathcal{P}_\lambda)$ désigne le normalisateur de $\mathcal{P}_\lambda$ dans $\mathcal{S}_m$, est le sous-groupe des éléments de $\mathcal{S}_m$ qui fixent la partition $\mathfrak{p}_\lambda$.

5.1.1. Lemme. *On fait agir $\mathcal{S}_m$ sur $\mathfrak{P}_\ell(m)$ par son action naturelle. Pour toute partition $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$, on note $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$ le sous-groupe de $\mathcal{S}_m$ qui fixe $\mathfrak{p}$. Chaque orbite de $\mathcal{S}_m$ rencontre une unique partition de la forme $\mathfrak{p}_\lambda$. On a*

$$\mathfrak{P}_r(m) = \coprod_{\lambda\in\mathcal{Y}_\ell(m)} \mathcal{S}_m \cdot \mathfrak{p}_\lambda \simeq \coprod_{\lambda\in\mathcal{Y}_\ell(m)} \mathcal{S}_m/\mathcal{S}_\lambda\,.$$

où λ parcourt l'ensemble $\mathcal{Y}_\ell(m)$ des décompositions de m en ℓ entiers $\neq 0$.

a) *Si $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_\ell) = ((\lambda_1)^{\mathsf{x}_{\lambda_1}},\dots,(\lambda_\ell)^{\mathsf{x}_{\lambda_\ell}})$, on a*

$$\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\mathfrak{p}_\lambda} = N_{\mathcal{S}_m}(\mathcal{P}_\lambda) \quad \textit{et} \quad G_\lambda := \mathcal{S}_\lambda/\mathcal{P}_\lambda \simeq \mathcal{S}_{\mathsf{x}_{\lambda_1}}\times\cdots\times\mathcal{S}_{\mathsf{x}_{\lambda_\ell}}\,,$$

b) *Le groupe G_λ s'identifie au sous-groupe $\mathcal{S}_{\mathsf{x}_{\lambda_1}}\times\cdots\times\mathcal{S}_{\mathsf{x}_{\lambda_\ell}} \subseteq \mathcal{S}_\lambda$ et l'on a*

$$\mathcal{S}_\lambda = \left(\mathcal{S}_{\mathsf{x}_{\lambda_1}}\times\cdots\times\mathcal{S}_{\mathsf{x}_{\lambda_\ell}}\right) \ltimes \mathcal{P}_\lambda\,.$$

5.2. Décomposition ouverte $\mathcal{S}_m$-stable de $\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m$

Par le lemme 5.1.1 la décomposition ouverte de Δ_ℓ^m de 2.3.3 s'écrit

$$\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m = \coprod_{\lambda\in\mathcal{Y}_\ell(m)} \mathcal{S}_m \cdot \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}_\lambda}(\boldsymbol{X})\,.$$

La proposition suivante est alors immédiate.

5.2.1. Proposition. *Soit $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_\ell) = (1^{\mathsf{x}_1},\dots,m^{\mathsf{x}_m}) \in \mathcal{Y}_\ell(m)$.*

a) *Le groupe $\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{\lambda_1}\times\cdots\times\mathcal{S}_{\lambda_\ell}$ est le sous-groupe de $\mathcal{S}_m$ des permutations qui agissent comme l'identité sur $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}_\lambda}(\boldsymbol{X})$. Son normalisateur $\mathcal{S}_\lambda$ est le sous-groupe de $\mathcal{S}_m$ qui laisse stable $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}_\lambda}(\boldsymbol{X})$.*

Soit maintenant la surjection canonique de groupes

$$\nu_\lambda : \mathcal{S}_\lambda \twoheadrightarrow G_\lambda := \mathcal{S}_\lambda/\mathcal{P}_\lambda \simeq \mathcal{S}_{\mathsf{x}_{\lambda_1}}\times\cdots\times\mathcal{S}_{\mathsf{x}_{\lambda_\ell}} \subseteq \mathcal{S}_\ell$$

et considérons $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}_\lambda}(\boldsymbol{X})$ muni de sa structure de G_λ-espace.

b) *L'application $\phi_\lambda : \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}_\lambda}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X})$, $\phi_\lambda : (x_1,\dots,x_m) \mapsto (y_1,\dots,y_\ell)$ avec $y_k := x_{\lambda_1+\cdots+\lambda_k}$, est un isomorphisme de G_λ-espaces.*

c) *L'application*

$$\Psi_\lambda : \mathcal{S}_m\times_{\mathcal{S}_\lambda}\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X}) \to \mathcal{S}_m\cdot\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}_\lambda}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}^m\,, \quad \overline{(\alpha,\overline{x})} \mapsto \alpha\cdot\phi^{-1}(\overline{x})\,,$$

est un isomorphisme de $\mathcal{S}_m$-espaces.

5.2.2. Caractères de $\mathcal{S}_m$ associés à $\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m$

Pour toute partie $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}^m$, de type fini et stable sous l'action de $\mathcal{S}_m$, les espaces $H^i_c(\boldsymbol{Z},k)$ et de $H^i(\boldsymbol{Z},k)$ sont les $\mathcal{S}_m$-modules de dimension finie, leurs les caractères seront respectivement notés :

$$\begin{cases} \chi_c(\boldsymbol{Z};i) : \mathcal{S}_m \to k\,, & \chi_c(\boldsymbol{Z};i)(\alpha) := \operatorname{tr}(\alpha{:}H^i_c(\boldsymbol{Z};k)) \\ \chi(\boldsymbol{Z};i) : \mathcal{S}_m \to k\,, & \chi(\boldsymbol{Z};i)(\alpha) := \operatorname{tr}(\alpha{:}H^i(\boldsymbol{Z};k))\,. \end{cases}$$

5.2.3. Commentaire. Si $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique orientable de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$, l'ouvert $\boldsymbol{F}_m \subseteq \boldsymbol{X}^m$, de dimension $md_{\boldsymbol{X}}$, est une variété topologique orientable, $H^i(\boldsymbol{F}_m)$ et $H_{\mathrm{c}}^{md_{\boldsymbol{X}}-i}(\boldsymbol{F}_m)$ sont des $\mathcal{S}_m$-modules en dualité et $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m, *)$ détermine $\chi(\boldsymbol{F}_m, *)$ (*cf.* 6.2.4-(b)). En dehors de ce cas, nos méthodes ne s'appliquent pas à l'étude de la cohomologie ordinaire $H(\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)$, ni en tant qu'espace vectoriel ni, à fortiori, en tant que $\mathcal{S}_m$-module. Elles s'appliqueront par contre à la cohomologie de Borel-Moore $H_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)$ (6.1).

Avertissement. Dans toutes les sections concernant les représentations des groupes symétriques on suppose $\mathrm{car}(k) = 0$ (*cf.* 7.3.3).

5.3. Foncteurs d'induction $\boldsymbol{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m}$ et $\boldsymbol{I}_\ell^m$

Pour $0 < \ell \leqslant m$, et tout $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)$, on note

$$\boxed{\boldsymbol{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_{|\lambda|}} : \mathrm{Mod}(k[\mathcal{S}_\ell]) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(k[\mathcal{S}_{|\lambda|}])} \qquad (\boldsymbol{Ind})$$

le foncteur $\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_m} \circ \mathrm{Res}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_\ell}$ où $\mathcal{S}_\lambda$ agit à travers de la surjection $\nu_\lambda : \mathcal{S}_\lambda \twoheadrightarrow G_\lambda$ de 5.2.1-(a). On considère ensuite le foncteur

$$\boxed{\boldsymbol{I}_\ell^m := \sum\nolimits_{\lambda\in\mathcal{Y}_\ell(m)} \boldsymbol{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m} : \mathrm{Mod}(k[\mathcal{S}_\ell]) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(k[\mathcal{S}_m])} \qquad (\boldsymbol{I})$$

(Remarquer que l'on a $\boldsymbol{I}_m^m = \mathrm{id}$.) On notera par la même notation l'opérateur linéaire d'induction $\boldsymbol{I}_\ell^m : k_{\mathrm{c}}[\mathcal{S}_\ell] \to k_{\mathrm{c}}[\mathcal{S}_m]$ défini sur les fonctions centrales.

5.3.1. Proposition. *Pour $0 < \ell \leqslant m$, on a un isomorphisme de $\mathcal{S}_m$ espaces :*

$$\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m \cong \coprod\nolimits_{\lambda\in\mathcal{Y}_\ell(m)} \mathcal{S}_m \times_{\mathcal{S}_\lambda} \boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X})\,.$$

En particulier, on a

$$\chi_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m; i) = \boldsymbol{I}_\ell^m\left(\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X}); i)\right) \quad \textit{et} \quad \chi(\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m; i) = \boldsymbol{I}_\ell^m\left(\chi(\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X}); i)\right).$$

Démonstration. Corollaire immédiat de 5.1.1 et 5.2.1-(c). □

5.3.2. Présentation de $\mathcal{S}_m$-module de $\boldsymbol{H_c^i(\Delta_{\leqslant\ell}X^m)}$. Nous pouvons à présent rassembler les résultats précédents pour donner une présentation de la représentation de $\mathcal{S}_m$ sur $H_{\mathrm{c}}^i(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m)$ lorsque $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique.

5.3.3. Théorème. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique tel que* $\dim H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) < \infty$.

a) *Le caractère du $\mathcal{S}_m$-module $H_{\mathrm{c}}^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ vérifie*

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}); i) = \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^m; i) + \chi_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant m-1}\boldsymbol{X}^m; i-1)\,.$$

b) *Pour $0 < \ell \leqslant m$, le caractère du $\mathcal{S}_m$-module $H_{\mathrm{c}}^i(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m)$ vérifie*

$$\chi_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m; i) = \sum\nolimits_{0\leqslant a<\ell} (-1)^a\ \boldsymbol{I}_{\ell-a}^m\left(\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{\ell-a}(\boldsymbol{X}); i-a)\right).$$

Démonstration. Par 3.2.3, la suite de $\mathcal{S}_m$-modules

$$0 \to H_c^{i-\ell+1}(\Delta_1^m) \to \cdots \to H_c^{i-1}(\Delta_{\ell-1}^m) \to H_c^i(\Delta_\ell^m) \to H_c^i(\Delta_{\leqslant \ell}^m) \to 0$$

est exacte. On a donc l'égalité $\chi_c(\Delta_{\leqslant \ell}^m; i) = \sum_{0 \leqslant a \leqslant \ell} (-1)^a \, \chi_c(\Delta_{\ell-a}^m; i-a)$ à laquelle on applique la proposition 5.3.1. □

5.3.4. Expression de $\chi_c(\Delta_{?\ell} X^m; *)$ en termes de $\chi_c(X^\ell; *)$. Le théorème 5.3.3 est la base d'un algorithme de calcul pour $\chi_c(\Delta_{\leqslant \ell} \boldsymbol{X}^m; i)$. En effet, l'égalité (b) l'exprime comme combinaison des induits des $\chi_c(\boldsymbol{F}_{\ell'}(\boldsymbol{X}), i')$ pour $\ell' \leqslant \ell$ et $i' \leqslant i$, et l'égalité (a) exprime chaque $\chi_c(\boldsymbol{F}_{\ell'}(\boldsymbol{X}), i')$ comme la somme de $\chi_c(\boldsymbol{X}^{\ell'}, i')$, caractère calculé par Macdonald [28] (*cf.* aussi 10.5.4), et de $\chi_c(\Delta_{\leqslant \ell'-1} \boldsymbol{X}^{\ell'}, i')$, avec (donc) $\ell' - 1 < \ell$.

La section suivante précisera davantage cette idée.

5.4. Opérateurs d'inductions itérées $\boldsymbol{I}(\sigma)$ et $\boldsymbol{\Theta}_\ell^m$

Pour toute suite d'entiers positifs $\sigma = (m_0 > m_1 > \cdots > m_{t-1} > m_t)$ strictement décroissante, on pose $|\sigma| := t$ et

$$\begin{cases} \text{si } |\sigma| = 0, & \boldsymbol{I}((m_0)) := \mathrm{id} : k_c[\mathcal{S}_{m_0}] \to k_c[\mathcal{S}_{m_0}] \\ \text{si } |\sigma| > 0, & \boldsymbol{I}(\sigma) := \boldsymbol{I}_{m_1}^{m_0} \circ \cdots \circ \boldsymbol{I}_{m_t}^{m_{t-1}} : k_c[\mathcal{S}_{m_t}] \to k_c[\mathcal{S}_{m_0}] \end{cases} \qquad (\boldsymbol{I}(\sigma))$$

et l'on définit pour $\ell \leqslant m$, l'opérateur d'inductions itérées :

$$\boxed{\boldsymbol{\Theta}_\ell^m := (-1)^{m-\ell} \sum\nolimits_{\sigma : m \searrow \ell} (-1)^{|\sigma|-1} \, \boldsymbol{I}(\sigma) : k_c[\mathcal{S}_\ell] \to k_c[\mathcal{S}_m]} \qquad (\boldsymbol{\Theta})$$

où la sommation est indexée par l'ensemble des suites strictement décroissantes qui partent de m et aboutissent à ℓ.

On remarquera que l'on a $\boldsymbol{\Theta}_m^m = \mathrm{id}$.

5.4.1. Théorème *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique tel que* $\dim H_c(\boldsymbol{X}) < \infty$.

a) *Pour tous $0 < \ell \leqslant m$ et tout $i \in \mathbb{N}$, on a*

i) $\chi_c(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}); i) = \sum_{0 \leqslant a < m} \boldsymbol{\Theta}_{m-a}^m \big(\chi_c(\boldsymbol{X}^{m-a}; i-a)\big)$

ii) $\chi_c(\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m; i) = \boldsymbol{I}_\ell^m \Big(\sum_{0 \leqslant a < \ell} \boldsymbol{\Theta}_{\ell-a}^\ell \big(\chi_c(\boldsymbol{X}^{\ell-a}; i-a)\big)\Big)$

iii) $\chi_c(\Delta_{\leqslant \ell} \boldsymbol{X}^m; i) = \sum\limits_{0 \leqslant b < \ell} (-1)^b \, \boldsymbol{I}_{\ell-b}^m \Big(\sum\limits_{0 \leqslant a < \ell-b} \boldsymbol{\Theta}_{\ell-b-a}^{\ell-b} \big(\chi_c(\boldsymbol{X}^{\ell-b-a}; i-b-a)\big)\Big)$

b) *Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ des espaces i-acycliques à cohomologies à support compact de dimensions finies. On a*

$$\big(\chi_c(\Delta_{?\ell} \boldsymbol{X}^m, *) = \chi_c(\Delta_{?\ell} \boldsymbol{Y}^m, *)\big) \iff \big(\mathcal{P}_c(\boldsymbol{X}) = \mathcal{P}_c(\boldsymbol{Y})\big) .$$

Démonstration. (a-i) On procède par récurrence sur m. Lorsque $m = 1$, on a $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$, $a = 0$, la somme est réduite à un seul terme et l'égalité est immédiate. Dans le cas général, l'égalité du théorème 5.3.3-(b) pour $\ell = m$ donne l'égalité :

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m; i) = \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^m; i) - \sum_{m>m-a>0} (-1)^a \ \boldsymbol{I}^m_{m-a} \left(\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m-a}; i-a)\right)$$

où l'on peut remplacer, par hypothèse inductive,

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m-a}; i-a) = \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^{m-a}; i-a) + \sum_{m-a>m-a-b>0} \boldsymbol{\Theta}^{m-a}_{m-a-b}\big(\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^{m-a-b}; i-a-b)\big)\,.$$

On exprime ainsi $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m; i)$ comme somme de deux termes.

$$\begin{cases} A := \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^m; i) \ + \displaystyle\sum_{m>m-a>0} (-1)^{a+1} \ \boldsymbol{I}^m_{m-a} \left(\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^{m-a}; i-a)\right) \\ B := \displaystyle\sum_{m>m-a>0} (-1)^{a+1} \ \boldsymbol{I}^m_{m-a} \sum_{m-a>m-a-b>0} \boldsymbol{\Theta}^{m-a}_{m-a-b}\big(\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^{m-a-b}; i-a-b)\big) \end{cases}$$

Le terme A contient $\boldsymbol{\Theta}^m_m = \boldsymbol{I}((m))$ et les opérateurs $(-1)^{a+1} \ \boldsymbol{I}((m, m-a))$ qui interviennent dans le développement de $\boldsymbol{\Theta}^m_{m-a}$ pour $a > 0$. Le terme B, quant à lui, contient exactement tous les opérateurs qui manquent encore pour reconstruire le second membre de (a-i). En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{m>m-a>0} (-1)^{a+1} \ \boldsymbol{I}^m_{m-a} \sum_{m-a>m-a-b>0} \boldsymbol{\Theta}^{m-a}_{m-a-b} &= \sum_{a>0 \ \&\ \sigma: m-a \searrow m-a-b>0} (-1)^{a+1} \ \boldsymbol{I}^m_{m-a} (-1)^b (-1)^{|\sigma|-1} \, \boldsymbol{I}(\sigma) \\ &= (-1)^{a+b} \sum_{\sigma: m \searrow m-(a+b) \ \&\ |\sigma|\geqslant 2} (-1)^{|\sigma|} \, \boldsymbol{I}(\sigma)\,. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de l'égalité (a-i). La formule (a-ii) en découle aussitôt puisque $\chi_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m; i) = \boldsymbol{I}^m_\ell \left(\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X}); i)\right)$ (5.3.1), et (a-iii) en résulte par application directe de 5.3.3-(b).

(b) L'implication $\Rightarrow$ est immédiate en prenant $m = \ell = 1$. Pour la réciproque, il suffit, grâce à (a), de montrer que les caractères $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^m; i)$ sont déterminés par $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$. Or, ceci est clair d'après le travail de Macdonald [28] (eq. 4.5) (*cf.* aussi 10.5.4 pour la formule explicite). □

6. Cohomologie des espaces de configuration, cas général

6.1. Cohomologie de Borel-Moore. Comme nous l'avons déjà indiqué dans 5.2.3, l'utilisation des complexes fondamentaux limite la portée de nos méthodes sur au moins deux aspects : les espaces $\boldsymbol{X}$ sont i-acycliques et la cohomologie est à support compact. Ce sont des limitations assez contraignantes en particulier lors de l'étude du comportement asymptotique de la

cohomologie de $\boldsymbol{F}_m := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ suivant les tours de projections

$$\cdots \twoheadleftarrow \boldsymbol{F}_{m-1} \xleftarrow{p_{m-1}} \boldsymbol{F}_m \xleftarrow{p_m} \boldsymbol{F}_{m+1} \twoheadleftarrow \cdots$$

où $p_m : \boldsymbol{F}_{m+1} \twoheadrightarrow \boldsymbol{F}_m$ désigne la projection sur les m premières coordonnées, autrement dit, pour l'étude des tours de représentations des groupes symétriques : les « ***FI****-modules* » (*cf.* 9.2)

$$\cdots \longrightarrow H(\boldsymbol{F}_{m-1}) \xrightarrow{p_{m-1}^*} H(\boldsymbol{F}_m) \xrightarrow{p_m^*} H(\boldsymbol{F}_{m+1}) \longrightarrow \cdots \qquad (*)$$

Lorsque $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique orientée la dualité de Poincaré établit un isomorphisme canonique entre la suite $(*)$ et la suite

$$\cdots \longrightarrow H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m-1})^\vee \xrightarrow{{p_{m-1!}}^\vee} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m)^\vee \xrightarrow{{p_{m!}}^\vee} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1})^\vee \longrightarrow \cdots \qquad (**)$$

où $p_{m!} : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m)[-d_{\boldsymbol{X}}]$ est l'intégration sur les fibres, de sorte que si $\boldsymbol{X}$ est en plus i-acyclique nos méthodes pourront s'appliquer. Or, la suite $(**)$ a encore un sens dans le cas plus général où $\boldsymbol{X}$ est une pseudovariété orientée, par exemple une variété algébrique complexe. Ainsi, dans le but d'inclure ces espaces dans nos énoncés, nous sommes conduits à remplacer dans $(*)$ la cohomologie ordinaire par la « **co***homologie de Borel-Moore* ».

6.1.1. L'« **ho***mologie de Borel-Moore* » $H_*^{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{M})$ d'un espace localement compact $\boldsymbol{M}$, est le dual de sa cohomologie à support compact. Lorsque $\boldsymbol{M}$ est de dimension cohomologique finie $d_{\boldsymbol{M}}$ (2.4.1), nous définissons sa « **co***homologie de Borel-Moore* » par l'égalité

$$\boxed{H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{M}) := H_{\mathrm{c}}^{d_{\boldsymbol{M}}-i}(\boldsymbol{M}; k)^\vee}$$

6.1.2. Fonctorialité de la cohomologie de Borel-Moore. La fonctorialité de la cohomologie de Borel-Moore est liée à celle de la cohomologie à support compact et cela impose certaines limitations. Par exemple, si $f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{M}$ est une application continue et *propre*, l'image-inverse des cochaînes d'Alexander-Spanier induit bien un morphisme en cohomologie à support compact $f^* : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{N})$ et, par dualité, un morphisme

$$f_! : H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{N}) \to H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{M})[d_{\boldsymbol{M}} - d_{\boldsymbol{N}}]$$

qui étend le morphisme de Thom-Gysin en cohomologie ordinaire. La cohomologie de Borel-Moore est alors fonctorielle sur la catégorie des espaces localement compacts de dimension finie et des application continues et propres.

En dehors de ce cas, les applications continues n'induisent pas toujours de morphisme en cohomologie de Borel-Moore, ce pour quoi il faut une approche au cas pas cas qui est le but de la section suivante.

6.2. Quelques morphismes en cohomologie de Borel-Moore

On donne des analogues à l'image-inverse de la cohomologie ordinaire dans le contexte de la cohomologie de Borel-Moore dans des cas qui intéressent dans les espaces de configuration, notamment : l'action de $\mathcal{S}_m$ sur $H_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ et la projection $p_m : \boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}) \twoheadrightarrow \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})$.

6.2.1. Rappel du cas des variétés topologiques. Supposons $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ des variétés topologiques *orientées* de dimensions respectives $d_{\boldsymbol{M}}$ et $d_{\boldsymbol{N}}$. Notons $\langle _, _ \rangle_{\boldsymbol{M}}$ l'accouplement de la dualité de Poincaré sur $\boldsymbol{M}$ (resp. $\boldsymbol{N}$), à savoir

$$\langle _, _ \rangle_{\boldsymbol{M}} : H(\boldsymbol{M}) \times H_{\text{c}}(\boldsymbol{M}) \to k\,, \quad \langle \nu, \mu \rangle_{\boldsymbol{M}} := \int_{\boldsymbol{M}} \nu \wedge \mu\,.$$

Pour toute application $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ continue, notons

$$f_! : H_{\text{c}}(\boldsymbol{M}) \to H_{\text{c}}(\boldsymbol{N})[-d_{\boldsymbol{M}} + d_{\boldsymbol{N}}]$$

l'adjoint pour la dualité de Poincaré de l'image-inverse $f^* : H(\boldsymbol{N}) \to H(\boldsymbol{M})$, il est caractérisée par l'égalité

$$\langle f^*(\nu), \mu \rangle_{\boldsymbol{M}} = \langle \nu, f_!(\mu) \rangle_{\boldsymbol{N}}\,, \quad \forall \nu \in H(\boldsymbol{N})\,,\ \forall \mu \in H_{\text{c}}(\boldsymbol{M})\,.$$

On dira alors que le couple $(f^*, f_!)$ est un « *couple adjoint* ».

On a quatre cas essentiels pour la suite.

[ad-1] L'application $\iota : \boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{M}$ est l'inclusion d'une sous-variété fermée orientée. Alors, si $\iota_! : H(\boldsymbol{N}) \to H(\boldsymbol{M})[d_{\boldsymbol{M}} - d_{\boldsymbol{N}}]$ est la multiplication par la classe de Thom de $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{M}$, le couple

$$(\iota_!, \iota^*) \text{ est un couple adjoint.}$$

[ad-2] L'application $j : \boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{M}$ est une inclusion ouverte et $\boldsymbol{U}$ est muni de l'orientation induite. Alors, $j_! : H_{\text{c}}(\boldsymbol{U}) \to H_{\text{c}}(\boldsymbol{M})$ est le morphisme de prolongement par zéro et l'on a

$$(j^*, j_!) \text{ est un couple adjoint.}$$

[ad-3] L'application $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ est localement triviale de fibre F, et $\boldsymbol{M}$ est munie d'une orientation compatible à celles de $\boldsymbol{N}$ et de F. L'opération $f_!$ coïncide alors à l'« *intégration sur les fibres* » ([5] p. 61) et l'on a toujours :

$$(f^*, f_!) \text{ est un couple adjoint.}$$

[ad-4] L'application $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ est un homéomorphisme. Alors

$$f_! : H_{\text{c}}(\boldsymbol{M}) \to H_{\text{c}}(\boldsymbol{M})$$

est induit par l'image-directe des cochaînes à support compact.

Soit $\boldsymbol{M} = \coprod_{\mathfrak{a} \in \Pi_0(\boldsymbol{M})} \boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}$ la décomposition en composantes connexes. On note par $f : \Pi_0(\boldsymbol{M}) \to \Pi_0(\boldsymbol{M})$ la bijection induite et $f_{\mathfrak{a}} : \boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}} \to \boldsymbol{M}_{f(\mathfrak{a})}$ la restriction de f. Chaque $f_{\mathfrak{a}}$ est un homéomorphisme de pseudovariétés

connexes et orientées. On note $\sigma_{\boldsymbol{M}}(f_{\mathfrak{a}})$ le scalaire défini par l'action de $f_{\mathfrak{a}!}$ sur la classe fondamentale $[\boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}]$ de $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}$, *i.e.* tel que :

$$f_!([\boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}]) = \sigma_{\boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}}(f) \cdot [\boldsymbol{M}_{f(\mathfrak{a})}]\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\big\langle f^*(\nu), \mu\big\rangle_{\boldsymbol{M}} &= \sum\nolimits_{\mathfrak{a}} \int_{\boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}} f^*(\nu_{f(\mathfrak{a})} \wedge f_!(\mu_{\mathfrak{a}}))\, d([\boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}]) \\ &= \sum\nolimits_{\mathfrak{a}} \int_{\boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}} f^*(\nu_{f(\mathfrak{a})} \wedge f_!(\mu_{\mathfrak{a}}))\, \sigma_{\boldsymbol{M}}(f_{\mathfrak{a}})\, d(f_{\mathfrak{a}!}^{-1}[\boldsymbol{M}_{f(\mathfrak{a})}]) \\ &= \sum\nolimits_{\mathfrak{a}} \big\langle \nu_{f(\mathfrak{a})}, \sigma_{\boldsymbol{M}}(f_{\mathfrak{a}})\, f_!(\mu_{\mathfrak{a}})\big\rangle_{\boldsymbol{M}_{f(\mathfrak{a})}}\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\Big(f^*, \sum\nolimits_{\mathfrak{a}} \sigma_{\boldsymbol{M}}(f_{\mathfrak{a}}) \cdot f_{\mathfrak{a}!}\Big) \text{ est un couple adjoint.} \qquad (\diamond)$$

Lorsque $\boldsymbol{M}$ est connexe la somme est réduite à un seul terme et l'adjoint à droite de f^* est juste $\sigma_{\boldsymbol{M}}(f) \cdot f_!$.

6.2.2. Suite exacte longue de cohomologie de Borel Moore. Soit $\boldsymbol{M}$ un espace localement compact de dimension cohomologique finie $d_{\boldsymbol{M}}$. Soit $j : \boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{M}$ une inclusion ouverte où $d_{\boldsymbol{U}} = d_{\boldsymbol{M}}$ et notons $i : \boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{M}$ l'inclusion du fermé complémentaire $\boldsymbol{N} := \boldsymbol{M} \smallsetminus \boldsymbol{U}$. En dualisant la suite exacte longue de cohomologie à support compact associée à la décomposition $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U} \sqcup \boldsymbol{N}$, on obtient « *la suite exacte longue de cohomologie de Borel-Moore* » :

$$\longrightarrow H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{N})[d_{\boldsymbol{N}} - d_{\boldsymbol{M}}] \xrightarrow{\iota_!} H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{M}) \xrightarrow{j^*} H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{U}) \longrightarrow .$$

Lorsque $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont des variétés topologiques orientées, j^* est la restriction et $\iota_!$ est multiplication par la classe de Thom de $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{M}$.

6.2.3. Le cas des pseudovariétés orientées. Pour un espace localement compact $\boldsymbol{M}$ de dimension cohomologique finie, la substitution de la cohomologie ordinaire $H(\boldsymbol{M})$ par la cohomologie de Borel-Moore $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{M})$ conduit à substituer l'accouplement $\langle _, _\rangle_{\boldsymbol{M}}$ par l'accouplement $(_, _) : V^\vee \times V \to k$, $(\alpha, v) := \alpha(v)$. Les adjonctions (ad 2,3,4) servent alors à définir les analogues de l'image-inverse en cohomologie de Borel-Moore de telle sorte qu'ils coïncident avec l'image-inverse en cohomologie ordinaire pour les variétés topologiques orientées. Dans le cas particulier des espaces de configuration, on est conduit aux définitions suivantes.

6.2.4. Définitions. Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété orientée ([12]).

a) **Image-inverse associée aux projections $p_b : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{M})$**
L'application $p_b : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{M})$, $p_b(x_1, \ldots, x_{b+a}) = (x_1, \ldots, x_b)$, est composée de l'inclusion ouverte $\iota : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{M}) \subseteq \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{M}) \times \boldsymbol{M}^a$ et de la

[12] C'est-à-dire, munie d'une section globale nulle part nulle, sur la partie régulière de $\boldsymbol{M}$, du faisceau $\mathcal{H}^{-d_{\boldsymbol{M}}}(\underline{\underline{\mathbb{D}}}^{\bullet}_{\boldsymbol{M}}(k))$, où $\underline{\underline{\mathbb{D}}}^{\bullet}_{\boldsymbol{M}}(k)$ est le complexe dualisant de $\boldsymbol{M}$.

projection $p(\vec{x},\vec{y}) := \vec{x}$

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{M}) & \xrightarrow{\ \iota\ } & \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{M})\times\boldsymbol{M}^a \\ & \searrow^{p_b} & \downarrow p \\ & & \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{M}) \end{array}$$

L'analogue de l'opération « *d'intégration sur les fibres* » de [ad-3] ([13])

$$p_{b!} : H_{\rm c}(\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{M}) \to H_{\rm c}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{M}))[-a\,d_{\boldsymbol{M}}]$$

vérifie l'égalité

$$p_{b!} := p_! \circ \iota_! \,,$$

où $\iota_! : H_{\rm c}(\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{M})) \to H_{\rm c}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{M})\times\boldsymbol{M}^a)$ est le prolongement par zéro, et $p_! : H_{\rm c}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{M})) \otimes H_{\rm c}(\boldsymbol{M}^a) \to H_{\rm c}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{M}))[-a\,d_{\boldsymbol{M}}]$, $\omega\otimes\varpi \mapsto \omega\int_{\boldsymbol{M}}\varpi$.

L'opérateur « *image-inverse* » pour la cohomologie de Borel-Moore et alors défini, suite à [ad-3], comme le dual vectoriel de $p_{b!}$, donc par :

$$p_b^* := p_{b!}^\vee : H_{\rm BM}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{M})) \to H_{\rm BM}(\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{M}))\,.$$

b) **Action de $\mathcal{S}_m$ sur $H_{\rm BM}(\boldsymbol{\Delta}_{?m}\boldsymbol{M}^m)$.** L'action de $g\in\mathcal{S}_m$ par image-inverse sur $H_{\rm BM}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ est donnée par l'égalité ($\diamond$) dans 6.2.1-[ad-4]. L'espace $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})$ est un ouvert de $\boldsymbol{M}^m$ et l'action de $\mathcal{S}_m$ est la restriction de son action sur $\boldsymbol{M}^m$, le scalaire $\sigma_{\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})}(g_{\mathfrak{a}\,!})$, qui coïncide avec $\sigma_{\boldsymbol{M}^m}(g_{\mathfrak{b}\,!})$ pour une certain $\mathfrak{b}\in\Pi_0(\boldsymbol{M}^m)$, est indépendant de $\mathfrak{b}$. En effet, on a $\sigma_{\boldsymbol{M}^m}(g_{\mathfrak{b}\,!}) = \mathrm{sgn}(g)^{\dim_{\boldsymbol{M}}}$, où $\mathrm{sgn}(_)$ est la signature. On pose alors,

$$\sigma_{\boldsymbol{M}^m}(g) := \mathrm{sgn}(g)^{\dim_{\boldsymbol{M}}}$$

de sorte que $g^*{:}H_{\rm BM}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})) \to H_{\rm BM}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ est donnée par

$$g^* = \sigma_{\boldsymbol{M}^m}(g)\cdot(g_!)^\vee\,,$$

où $g_! : H_{\rm c}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})) \to H_{\rm c}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ est l'image-directe et où $(_)^\vee$ désigne l'adjoint pour la dualité vectorielle. Le lemme suivant est immédiat.

6.2.5. Lemme. *L'application $\mathcal{S}_m \ni g \mapsto \sigma_{\boldsymbol{M}^m}(g)$ est un caractère multiplicatif. Pour tout $g\in\mathcal{S}_m$, on a*

$$\sigma_{(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{X})^m}(g) = \sigma_{\boldsymbol{M}^m}(g)\cdot\sigma_{\boldsymbol{X}^m}(g)\,.$$

6.2.6. Commentaires

a) Si $\boldsymbol{M}$ est lisse et orientée, on a $H^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}) \simeq H^i_{\rm BM}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ par dualité de Poincaré, et les définitions d'image-inverse concordent.

b) L'opérateur $p_{b!}$ est défini même si la projection $p_b : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{M})$ n'est pas localement triviale, donc même lorsque $\boldsymbol{M}$ n'est pas lisse. Par contre, l'hypothèse d'orientabilité sur $\boldsymbol{M}$ est indispensable.

[13] C'est pour cette unique raison que nous avons été contraints de nous limiter aux pseudovariétés *orientables*.

c) Lorsque $\boldsymbol{M}$ est une pseudovariété *connexe* orientée de dimension $d_{\boldsymbol{M}}$, on a $H_{\mathrm{c}}^{d_M}(\boldsymbol{M};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et donc $H^0_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{M};\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \simeq H^0(\boldsymbol{M};\mathbb{Z})$. De plus, si $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ est un homéomorphisme, l'image-inverse f^* opère comme l'identité sur $H^0_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{M};\mathbb{Z})$.

6.2.7. Ingérence de la signature dans $H_{\mathrm{BM}}(F_m)$. Dans 6.2.4-(b) nous avons défini l'action de $\mathcal{S}_m$ sur $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{M}^m)$ de sorte qu'elle coïncide avec l'action par image-inverse en cohomologie ordinaire $H(\boldsymbol{M}^m)$ lorsque $\boldsymbol{M}$ est lisse. Cette action **n'est pas** l'action duale de l'action de $\mathcal{S}_m$ sur $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}^m)$. La proposition suivante précise la différence entre les deux action dans une situation importante pour la suite de cette section 6.

6.2.8. Proposition et notation. *Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{X}$ deux pseudovariétés orientées et connexes. Pour $x \in \boldsymbol{X}$, posons $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}} := \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{M}_x := \boldsymbol{M}\times\{x\}$. Le morphisme dual de la restriction $\rho : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}})) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_x))$ est le morphisme de $\mathcal{S}_m$-modules*

$$\rho^\vee(_) \otimes 1 : H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_x)) \to H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}})) \otimes (\boldsymbol{\sigma}_m)^{\otimes \dim \boldsymbol{X}},$$

où $\boldsymbol{\sigma}_m$ est la « représentation par signature » *de $\mathcal{S}_m$ et où $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{M}_x)$ et $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}})$ sont munis des structures de $\mathcal{S}_m$-modules de 6.2.4-(b).*

Démonstration. Par définition, la représentation de $\mathcal{S}_m$ sur $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}))$ est la représentation duale de celle de $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}))$ tordue par le caractère $\sigma_{(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{X})^m} = \sigma_{\boldsymbol{M}^m} \cdot \sigma_{\boldsymbol{X}^m}$ (6.2.5) tandis que pour celle de $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_x))$, il faut tordre par $\sigma_{\boldsymbol{M}^m}$. La différence est donc le caractère $\sigma_{\boldsymbol{X}^m}$ qui est trivial si $\dim \boldsymbol{X}$ est paire est qui est le caractère signature autrement. □

6.3. Approche de $H_{\mathrm{BM}}(F_m(M))$ à l'aide d'espaces i-acycliques

Dans les sections 3 et 4 (resp. la section 10), les méthodes pour la détermination du polynôme de Poincaré (resp. du caractère de $\mathcal{S}_m$-module) de $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ s'appliquent lorsque $\boldsymbol{M}$ est i-acyclique (4.2.1, 4.2.2), mais pas lorsque $\boldsymbol{M}$ est général, ce pour quoi il faut une nouvelle idée, comme par exemple, celle que nous donnons à continuation qui permet d'approcher $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$, où $\boldsymbol{M}$ est un espace localement compact *quelconque*, à l'aide d'une suite spectrale dont les termes sont de la forme $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X}))$ avec $\ell \leqslant m$, et, surtout, où $\boldsymbol{X}$ est *i-acyclique*, suite qu'on appellera « *la suite spectrale basique pour $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$* » (*cf.* thm. 6.5.2).

6.3.1. L'idée est basée sur le fait que :

⊢ *Tout espace localement compact $\boldsymbol{M}$ peut être réalisé comme fermé dans un espace i-acyclique, de complémentaire (donc) également i-acyclique.*

En effet, si $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique et si $x \in \boldsymbol{X}$, l'espace $\boldsymbol{M}$ s'identifie au fermé $\boldsymbol{M}_x := \boldsymbol{M}\times\{x\}$ de l'espace i-acyclique $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}} := \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{X}$ (1.2.4-(e)). On note alors $V := \boldsymbol{X} - x$ et $\boldsymbol{M}_V := \boldsymbol{M}\times V$ et l'on remarque que dans la suite longue de cohomologie à support compact :

$$\to H_{\mathrm{c}}(\Delta_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}^m \smallsetminus \boldsymbol{M}_x^m)) \xrightarrow{\iota} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}})) \xrightarrow{\rho} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_x)) \to ,$$

on a $\rho = 0$. En effet, le prolongement par zéro $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}_V) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}})$ est surjectif, les arguments de la remarque 3.1.3 s'appliquent et établissent la surjectivité du prolongement par zéro $\tilde{\iota} : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_V)) \twoheadrightarrow H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}))$. La surjectivité de ι en résulte, car $\mathrm{im}(\iota) \supseteq \mathrm{im}(\iota')$, et la nullité de ρ s'ensuit.

Ces arguments et la proposition 6.2.8 prouvent la proposition suivante.

6.3.2. Proposition. *Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{X}$ des espaces localement compacts. On suppose que $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique et l'on fixe $x \in \boldsymbol{X}$.*

a) *La suite courte de $\mathcal{S}_m$-modules*

$$0 \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_x))[-1] \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}^m \smallsetminus \boldsymbol{M}_x^m)) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}})) \to 0$$

extraite de la suite longue de cohomologie à support compact, est exacte.

b) *On suppose $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{X}$ des pseudovariétés orientées de dimensions cohomologiques finies $d_{\boldsymbol{M}}$ et $d_{\boldsymbol{X}}$. La suite courte de $\mathcal{S}_m$-modules* ([14])

$$\begin{aligned} 0 \to H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}))[md_{\boldsymbol{X}}-1] \to \\ H_{\mathrm{BM}}(\Delta_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}^m \smallsetminus \boldsymbol{M}_x^m))[md_{\boldsymbol{X}}-1] \to \\ H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_x)) \otimes (\boldsymbol{\sigma}_m)^{\otimes \dim \boldsymbol{X}} \to 0 \end{aligned}$$

extraite de la suite longue de cohomologie de Borel-Moore, est exacte.

Le polynôme de Poincaré de $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ est donc déterminé par celui de $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}))$, déjà connu, et par celui de $H_{\mathrm{BM}}(\Delta_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}^m \smallsetminus \boldsymbol{M}_x^m))$, qui fera l'objet d'étude des sections suivantes.

6.4. Une suite spectrale pour $H_{\mathrm{BM}}(\Delta_m(M_{\boldsymbol{X}}^m \smallsetminus M_x^m))$

6.4.1. Rappel : cochaînes simpliciales, ordonnées et alternées. Étant donné une famille finie d'ouverts $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_m\}$ d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$, on rappelle que l'on dispose classiquement de trois notions de p-cochaînes de Čech pour le foncteur des section locales. A savoir,

– Le groupe des « *p-cochaînes simpliciales (non ordonnées)* »

$$\check{C}^p(\mathcal{U}, _) := \bigoplus\nolimits_{(i_0,\ldots,i_p)} \Gamma(U_{i_0,\ldots,i_p}, _)$$

où $(i_0, \ldots, i_p)$ est un suite d'éléments deux à deux distincts de $[\![1,m]\!]$.

[14] L'énoncé est valable plus généralement pour les espaces localement compacts de dimensions cohomologiques finies (2.4.1), sauf pour ce qui est des structures de $\mathcal{S}_m$-modules que nous n'avons pas définies dans cette généralité.

– Le groupe des « *p-cochaînes (simpliciales) ordonnées* »

$$\check{C}^p_<(\mathcal{U},_) := \bigoplus\nolimits_{1\leqslant i_0<\cdots<i_p\leqslant m} \mathit{\Gamma}(U_{i_0,\ldots,i_p},_)$$

– Le groupe des « *p-cochaînes (simpliciales) alternées* » $\check{C}^p_\varepsilon(\mathcal{U},_)$. C'est le sous-groupe des p-cochaînes $\omega \in \check{C}^p(\mathcal{U},_)$ vérifiant pour $\alpha \in \mathcal{S}_{[\![0,p]\!]}$:

$$\omega_{i_0,\ldots,i_p} = \mathrm{sgn}(\alpha)\,\omega_{i_{\alpha(0)},\ldots,i_{\alpha(p)}}\,. \qquad (*)$$

Remarquons en passant que l'application « *d'antisymétrisation* »

$$\varepsilon_p : \check{C}^p_<(\mathcal{U},_) \to \check{C}^p_\varepsilon(\mathcal{U},_) \qquad (\varepsilon)$$

définie, suivant la même égalité $(*)$, par $\varepsilon_p(\omega)_{i_{\alpha(0)},\ldots,i_{\alpha(p)}} := \mathrm{sgn}(\alpha)\,\omega_{i_0,\ldots,i_p}$, pout tout $\alpha \in \mathcal{S}_{[\![0,p]\!]}$ et tout $1 \leqslant i_0 < \cdots < i_p \leqslant m$, est bijective.

Dans les trois cas, l'opérateur cobord $\delta_p : \check{C}^p_?(\mathcal{U},_) \to \check{C}^{p+1}_?(\mathcal{U},_)$

$$(\delta\omega)_{i_0,\ldots,i_{p+1}} = \sum\nolimits_{k=0}^{p+1}(-1)^k\,\omega_{i_0,\ldots,\widehat{i_k},\ldots,i_{p+1}}\big|_{U_{i_0,\ldots,i_{p+1}}}$$

a un sens et respecte chaque type de cochaîne. L'antisymétrisation

$$\varepsilon_* : (\check{C}^*_<(\mathcal{U},_),\delta_*) \to (\check{C}^*_\varepsilon(\mathcal{U},_),\delta_*)\,,$$

est alors un isomorphisme de complexes. L'assertion suivante est classique (*cf.* [21], §I.3.8, p. 58.).

6.4.2. Proposition. *Les inclusions de complexes*

$$(\check{C}^*_<(\mathcal{U},_),\delta_*) \subseteq (\check{C}^*(\mathcal{U},_),\delta_*) \supseteq (\check{C}^*_\epsilon(\mathcal{U},_),\delta_*)\,. \qquad (\diamond)$$

sont des quasi-isomorphismes.

Les complexes $(\diamond)$ sont donc interchangeables pour les besoins du calcul de la cohomologie de Čech.

6.4.3. Faisceaux et complexes de Čech $\mathcal{S}_m$-équivariants

Revenons sur le cas de l'espace $\Delta_m(\boldsymbol{M}^m_{\boldsymbol{X}} \smallsetminus \boldsymbol{M}^m_x)$ de 6.3.2. Munissons-le du recouvrement $\mathcal{U}^m = \{U^m_1,\ldots,U^m_m\}$, où :

$$U^m_i := \Delta_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\times\cdots\times\overbrace{\boldsymbol{M}_V}^{i}\times\cdots\times\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}) \subseteq \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}})\,,$$

avec $V := \boldsymbol{X} - x$. Notons ensuite

$$U^m := U^m_1 \cup \cdots \cup U^m_m\,, \qquad U^m_{i_0,\ldots,i_p} := U^m_{i_0} \cap \cdots \cap U^m_{i_p},$$

et même $U_{(i_0,\ldots,1_p)}$: une copie de $U_{i_0,\ldots,i_p}$ paramétrée par l'uplet $(i_0,\ldots,i_p)$.

Le groupe $\mathcal{S}_m$ agit sur U^m par permutation des coordonnées, nous avons donc $g\cdot U^m_{i_0,\ldots,i_p} = U^m_{g(i_0),\ldots,g(i_p)}$, pour tout $g \in \mathcal{S}_m$.

Définition. Un faisceau $\mathcal{G}$ sur U^m est dit « $\mathcal{S}_m$-*équivariant* » s'il est muni d'une famille d'isomorphismes $\{\phi_{g,V} : \Gamma(gV;\mathcal{G}) \to \Gamma(V;\mathcal{G})\}_{(g,V)}$, indexée par les couples (g,V) où $g \in \mathcal{S}_m$ et V est un ouvert de U^m, telle que la relation cocyclique $\phi_{h,gV} \circ \phi_{g,V} = \phi_{hg,V}$ est satisfaite pour $h,g \in \mathcal{S}_m$ et tout ouvert V de U^m. Les définitions de morphisme $\mathcal{S}_m$-équivariant entre faisceaux $\mathcal{S}_m$-équivariants et de catégorie des faisceaux $\mathcal{S}_m$-équivariants s'ensuivent.

Les faisceaux des germes de cochaînes de Borel-Moore $\underline{\underline{\Omega}}^i_{\mathrm{BM},U^m}$ sur U^m, que nous allons introduire dans 6.4.5, constituent le principal exemple dans ce travail de faisceau $\mathcal{S}_m$-équivariant. Définis comme duaux des cofaisceaux des cochaînes d'Alexander-Spanier à support compact $\underline{\underline{\Omega}}^{d_M-i}_{\mathrm{c},U^m}$, les faisceaux $\underline{\underline{\Omega}}^i_{\mathrm{BM},U^m}$ héritent naturellement de l'action duale de l'action de $\mathcal{S}_m$ sur $\underline{\underline{\Omega}}_{\mathrm{c},U^m}$.

6.4.4. Proposition. *Munissons* $U^m_{m-p,\dots,m} = \Delta_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}^{m-(p+1)} \times \boldsymbol{M}_V^{p+1})$ *de l'action de* $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ *par permutation de coordonnées.*

a) *L'application*

$$\begin{aligned} \Phi_p : \mathcal{S}_m \underset{\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times \mathbf{1}_{p+1}}{\times} U^m_{m-p,\dots,m} &\longrightarrow \coprod\nolimits_{(i_0,\dots,i_p)} U^m_{(i_0,\dots,i_p)} \\ (g,x) &\longmapsto g(x) \in U^m_{(g(m-p),\dots,g(m))} \end{aligned}$$

où $(i_0,\dots,i_p)$ *est une suite d'éléments deux à deux distincts de* $[\![1,m]\!]$, *est un homéomorphisme.*

Soit maintenant $\mathcal{G}$ *un faisceau* $\mathcal{S}_m$*-équivariant sur* U^m. *On note* $\sigma \mapsto g \star \sigma$ *l'action de* $g \in \mathcal{S}_m$ *sur une section locale* $\sigma \in \mathcal{G}$.

b) *Le morphisme image-directe défini par l'homéomorphisme* Φ_p, *à savoir*

$$\begin{aligned} \Phi_{p!} : \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times \mathbf{1}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \Gamma(U^m_{m-p,\dots,m};\mathcal{G}) &\longrightarrow \check{C}^p(\mathcal{U}^m;\mathcal{G}) = \bigoplus_{(i_0,\cdots,i_p)} \Gamma(U^m_{(i_0,\dots,i_p)};\mathcal{G}) \\ (g,\sigma) &\longmapsto g \star \sigma \in \Gamma(U^m_{(g(m-p),\cdots,g(m))};\mathcal{G}) , \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Il induit sur $\check{C}^p(\mathcal{U}^m;\mathcal{G})$ *l'action* $\omega \mapsto g \diamond \omega$ *de* $\mathcal{S}_m$ *:*

$$(h \diamond \omega)_{i_0,\dots,i_p} := h \star (\omega_{h^{-1}(i_0),\dots,h^{-1}(i_p)}) .$$

Cette action est compatible au cobord des cochaînes simpliciales et le complexe de Čech augmenté :

$$0 \to \Gamma(U^m;\mathcal{G}) \xrightarrow{\epsilon} \check{C}^0(\mathcal{U};\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_0} \check{C}^1(\mathcal{U};\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_1} \cdots$$

est un complexe de $\mathcal{S}_m$*-modules.*

c) *Le complexe des cochaînes alternées* $(\check{C}^*_\varepsilon(\mathcal{U}^m;\mathcal{G}),\delta_*)$ *est un sous-complexe de* $\mathcal{S}_m$*-modules du complexe des cochaînes simpliciales* $(\check{C}^*(\mathcal{U}^m;\mathcal{G}),\delta_*)$. *L'antisymétrisation* $\varepsilon_* : (\check{C}^*_<(\mathcal{U}^m;\mathcal{G}),\delta_*) \to (\check{C}^*_\varepsilon(\mathcal{U}^m;\mathcal{G}),\delta_*)$ *transfère cette structure et munit chaque groupe* $\check{C}^p_<(\mathcal{U}^m;\mathcal{G})$ *de l'action* $\omega \mapsto g \star \omega$ *de* $\mathcal{S}_m$.

En particulier, le complexe de cochaînes ordonnées de Čech augmenté :

$$0 \to \Gamma(U^m;\mathcal{G}) \xrightarrow{\epsilon} \check{C}^0_<(\mathcal{U};\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_0} \check{C}^1_<(\mathcal{U};\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_1} \cdots$$

est un complexe de $\mathcal{S}_m$-modules. De plus, l'application

$$\Psi_p : \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \Gamma(U^m_{m-p,\dots,m};\mathcal{G})\otimes\boldsymbol{\sigma}_{p+1} \to \check{C}^p_<(\mathcal{U}^m;\mathcal{G}) = \bigoplus_{1\leqslant i_0<\cdots<i_p\leqslant m} \Gamma(U^m_{i_0,\dots,i_p};\mathcal{G})$$

$$(g,\sigma) \longmapsto g\diamond\sigma \in \Gamma(g(U^m_{m-p,\dots,m});\mathcal{G})$$

où '$\diamond$' désigne l'action '$\star$' de $\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}$ tordue par le caractère signature $\boldsymbol{\sigma}_{p+1}$ de $\mathcal{S}_{p+1}$, est un isomorphisme de $\mathcal{S}_m$-modules.

Démonstration. (a) L'application Φ_p est définie sur la réunion disjointe de copies de $U^m_{m-p,\dots,m}$ indexées par les éléments $\overline{g} \in \mathcal{S}_m/\mathcal{S}_{m-(p+1)}$. Pour chaque $g \in \mathcal{S}_m$, la restriction de Φ_p à $(\overline{g}, U^m_{m-p,\dots,m})$ est un homéomorphisme sur $U^m_{(g(m-p),\dots,g(m))}$. On conclut que Φ_p est bijective en remarquant que le cardinal $|\mathcal{S}_m/\mathcal{S}_{m-(p+1)}|$ est précisément celui de l'ensemble des $(p+1)$-uplets $(i_0,\dots,i_p)$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1,m]\!]$.
(b) résulte de (a) et des identités :

$$\begin{aligned}
\delta(h\diamond\omega)_{i_0,\dots,i_{p+1}} &= \sum\nolimits_{j=0}^{p+1} (h\diamond\omega)_{i_0,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_{p+1}} \big|_{U^m_{(i_0,\dots,i_{p+1})}} \\
&= \sum\nolimits_{j=0}^{p+1} \Big(h\star(\omega_{h^{-1}(i_0,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_{p+1})})\Big)\big|_{U^m_{(i_0,\dots,i_{p+1})}} \\
&= h\star\Big(\sum\nolimits_{j=0}^{p+1} \omega_{h^{-1}(i_0,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_{p+1})}\big|_{U^m_{h^{-1}(i_0,\dots,i_{p+1})}}\Big) \\
&= (h\diamond\delta\omega)_{i_0,\dots,i_{p+1}} .
\end{aligned}$$

(c) Soit $\omega \in \check{C}^p_\varepsilon(\mathcal{U}^m;\mathcal{G})$. Pour $\alpha \in \mathcal{S}_{[\![0,p]\!]}$ et $h \in \mathcal{S}_m$, on a :

$$\begin{aligned}
(h\diamond\omega)_{i_{\alpha(0)},\dots,i_{\alpha(p)}} &= h\star(\omega_{h^{-1}(i_{\alpha(0)}),\dots,h^{-1}(i_{\alpha(p)})}) \\
&= \operatorname{sgn}(\alpha) h\star(\omega_{h^{-1}(i_0),\dots,h^{-1}(i_p)}) \\
&= \operatorname{sgn}(\alpha)(h\diamond\omega)_{i_0,\dots,i_p} ,
\end{aligned}$$

et $\check{C}^p_\varepsilon(\mathcal{U}^m;\mathcal{G})$ est bien un sous-$\mathcal{S}_m$-module de $\check{C}^p_\varepsilon(\mathcal{U}^m;\mathcal{G})$.

Le sous-espace $\varepsilon_p(\Gamma(U^m_{m-p,\dots,m};\mathcal{G}))$ est stable sous $\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}$ dont l'action est tordue par le caractère signature de $\mathcal{S}_{p+1}$. Le morphisme de $\mathcal{S}_m$-modules Ψ_p est donc bien défini et il est surjectif puisque $\varepsilon_p(\Gamma(U^m_{m-p,\dots,m};\mathcal{G}))$ engendre clairement $\check{C}^p_\varepsilon(\mathcal{U}^m;\mathcal{G})$ en tant que $\mathcal{S}_m$-module. Le fait que Ψ_p est bijectif résulte alors du fait que $|\mathcal{S}_m/(\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1})|$ est également le cardinal de l'ensemble des parties $I \subseteq [\![1,m]\!]$ telles que $|I| = p+1$. □

6.4.5. Suite spectrale de Borel-Moore d'un G-espace. Nous rappelons maintenant, pour un $\boldsymbol{G}$-espace donné, les bases théoriques de la construction de la suite spectrale de $\boldsymbol{G}$-modules associée à un recouvrement $\boldsymbol{G}$-stable et pour la cohomologie de Borel-Moore.

Faisceaux de germes de cochaînes de Borel-Moore

Soit $\boldsymbol{M}$ un espace localement compact de dimension cohomologique $d_{\boldsymbol{M}}$ muni de l'action d'un groupe fini $\boldsymbol{G}$. Dans 2.4.2-(a) nous avons introduit la résolution c-molle

$$0 \to \underline{k}_{\boldsymbol{M}} \hookrightarrow \underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{M}} \xrightarrow{d_0} \underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{M}} \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{d_{\boldsymbol{M}}-1}} \underline{\Omega}^{d_{\boldsymbol{M}}}_{\boldsymbol{M}} \to 0$$

qui est une résolution dans la catégorie des faisceaux $\boldsymbol{G}$-équivariants (6.4.3). Pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{M}$, le complexe des « *cochaînes à support compact* »

$$(\Omega^*_{\mathrm{c}}(U), d) := \Gamma_{\mathrm{c}}(U; (\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{M}}, d_*))$$

calcule la cohomologie à support compact $H^*_{\mathrm{c}}(U)$, et si U est en plus stable sous l'action de $\boldsymbol{G}$, c'est aussi un complexe de $\boldsymbol{G}$-modules pour l'action d'image-directe topologique.

Si $\iota_{V\subseteq U} : V \subseteq U$ est une inclusion ouverte, le prolongement par zéro

$$\iota_{V\subseteq U!} : (\Omega^*_{\mathrm{c}}(V), d_*) \to (\Omega^*_{\mathrm{c}}(U), d_*)$$

est une inclusion de complexes et la correspondance

$$\begin{array}{ccc} U & \rightsquigarrow & (\Omega^*_{\mathrm{c}}(U), d_*) \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \iota_{V\subseteq U}} \\ V & \rightsquigarrow & (\Omega^*_{\mathrm{c}}(V), d_*) \end{array}$$

définit un complexe $(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{M},\mathrm{c}}, d_*)$ de *pré-cofaisceaux flasques* sur $\boldsymbol{M}$ qui sont en fait des *cofaisceau* puisque les $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{M}}$ sont c-mous (*cf.* [6] V.1.6, p. 282).

Pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{M}$, le « *complexe des cochaînes de Borel-Moore sur* U » est défini par dualité et décalage : ([15])

$$(\Omega^*_{\mathrm{BM}}(U), d_*) := ((\Omega^*_{\mathrm{c}}(U), d_*)^\vee)[-d_{\boldsymbol{M}}]\,. \qquad (\ddagger)$$

Lorsque U est $\boldsymbol{G}$-stable, chaque $\Omega^i_{\mathrm{BM}}(U)$ est à priori muni de l'action de $\boldsymbol{G}$ duale de son action par image-directe sur $\Omega^i_{\mathrm{c}}(U)$, mais cette action ne correspond pas à l'action de $\boldsymbol{G}$ par image-inverse lorsque $\boldsymbol{M}$ est une variété topologique orientée, ce pour quoi il faut tordre l'action duale par le caractère $\sigma_{\boldsymbol{M}}$ tel qu'expliqué dans 6.2.4-(b). Plus généralement, si $\boldsymbol{M}$ est une pseudo-variété orientée, on notera '$\star$' l'action duale de $\boldsymbol{G}$ sur $\Omega^i_{\mathrm{c}}(_)$ tordue par $\sigma_{\boldsymbol{M}}$. Dans tous les cas, le complexe (‡) ci-dessus est un complexe de $\boldsymbol{G}$-modules.

[15] On remarquera l'abus de notation qui consiste à noter de la même manière les différentielles des deux complexes $(\Omega^*_{\mathrm{c}}(U), d_*)$ et $(\Omega^*_{\mathrm{BM}}(U), d_*)$.

Le complexe $(\Omega^*_{\mathrm{BM}}(U), d_*)$ calcule la cohomologie de Borel-Moore $H^*_{\mathrm{BM}}(U)$ et la correspondance

$$\begin{array}{ccc} U & \rightsquigarrow & (\Omega^*_{\mathrm{BM}}(U), d_*) \\ \uparrow & & \downarrow \iota^*_{V\subseteq U} \\ V & \rightsquigarrow & (\Omega^*_{\mathrm{BM}}(V), d_*) \end{array}$$

où $\iota^*_{V\subseteq U}$ est le dual de $\iota_{V\subseteq U!}$, est le complexe $(\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{M},\mathrm{BM}}, d_*)$ des « *faisceaux (flasques) de germes de cochaînes de Borel-Moore* » sur $\boldsymbol{M}$. C'est un complexe de faisceaux $\boldsymbol{G}$-équivariants.

Bicomplexe de cochaînes Čech-Borel-Moore

Soit $\mathcal{U}^m = \{U^m_1, \dots, U^m_m\}$ une famille $\boldsymbol{G}$-stable d'ouverts de $\boldsymbol{M}$, c'est à dire telle qu'il existe une action de $\boldsymbol{G}$ sur $[\![1,m]\!]$ vérifiant $g(U^m_i) = U^m_{g(i)}$. On pose

$$U^m := U^m_1 \cup \cdots \cup U^m_m\,, \qquad U^m_{i_0,\dots,i_p} := U^m_{i_0} \cap \cdots \cap U^m_{i_p},$$

et l'on considère le bicomplexe $(\check{C}(\mathcal{U}^m)^*_{\mathrm{c},\bullet}, \partial_\bullet, d_*)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \check{C}_1(\mathcal{U}^m, \underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{M},\mathrm{c}}) & \xrightarrow{d_0} & \check{C}_1(\mathcal{U}^m, \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{M},\mathrm{c}}) & \xrightarrow{d_1} & \check{C}_1(\mathcal{U}^m, \underline{\underline{\Omega}}^2_{\boldsymbol{M},\mathrm{c}}) \xrightarrow{d_2} \\
 & & \partial_0\downarrow & & \partial_0\downarrow & & \partial_0\downarrow \\
0 & \longrightarrow & \check{C}_0(\mathcal{U}^m, \underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{M},\mathrm{c}}) & \xrightarrow{d_0} & \check{C}_0(\mathcal{U}^m, \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{M},\mathrm{c}}) & \xrightarrow{d_1} & \check{C}_0(\mathcal{U}^m, \underline{\underline{\Omega}}^2_{\boldsymbol{M},\mathrm{c}}) \xrightarrow{d_2} \\
 & & \epsilon\downarrow & & \epsilon\downarrow & & \epsilon\downarrow \\
0 & \longrightarrow & \underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{M},c}(U^m) & \xrightarrow{d_0} & \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{M},c}(U^m) & \xrightarrow{d_1} & \underline{\underline{\Omega}}^2_{\boldsymbol{M},c}(U^m) \xrightarrow{d_2} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array} \qquad (\check{C}_{\mathrm{c}})$$

dont les colonnes sont les complexes de « *chaînes de Čech à valeurs dans un cofaisceau* » et sont exactes puisque les cofaisceaux $\underline{\underline{\Omega}}^i_{\boldsymbol{M},\mathrm{c}}$ sont flasques ([16]). En dualisant, on obtient un bicomplexe de colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}^m, \underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{M},\mathrm{BM}}) & \xrightarrow{d_0} & \check{C}^1(\mathcal{U}^m, \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{M},\mathrm{BM}}) & \xrightarrow{d_1} & \check{C}^1(\mathcal{U}^m, \underline{\underline{\Omega}}^2_{\boldsymbol{M},\mathrm{BM}}) \xrightarrow{d_2} \\
 & & \delta_0\uparrow & & \delta_0\uparrow & & \delta_0\uparrow \\
0 & \longrightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}^m, \underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{M},\mathrm{BM}}) & \xrightarrow{d_0} & \check{C}^0(\mathcal{U}^m, \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{M},\mathrm{BM}}) & \xrightarrow{d_1} & \check{C}^0(\mathcal{U}^m, \underline{\underline{\Omega}}^2_{\boldsymbol{M},\mathrm{BM}}) \xrightarrow{d_2} \\
 & & \epsilon\uparrow & & \epsilon\uparrow & & \epsilon\uparrow \\
0 & \longrightarrow & \underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{M},\mathrm{BM}}(U^m) & \xrightarrow{d_0} & \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{M},\mathrm{BM}}(U^m) & \xrightarrow{d_1} & \underline{\underline{\Omega}}^2_{\boldsymbol{M},\mathrm{BM}}(U^m) \xrightarrow{d_2} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array} \qquad (\check{C}_{\mathrm{BM}})$$

qui est un bicomplexe de $\boldsymbol{G}$-modules puisque l'analogue du théorème 6.4.4 est vérifié pour les données en cours.

[16] *Cf.* Bredon [6] chap. VI.— Cosheaves and Čech Homology, corollary VI.4.5, p. 426.

On appellera « *bicomplexe de cochaînes de Čech-Borel-Moore de* $\mathcal{U}^m$ », le bicomplexe du premier quadrant

$$\check{C}(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM}} := \big(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}^m; \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{M},\mathrm{BM}}), \delta_\bullet, d_*\big)\,.$$

Filtration régulière de $H^*_{\mathrm{BM}}(U^m)$ et suite spectrale

En raison de l'exactitude des colonnes de $(\check{C}_{\mathrm{BM}})$, le morphisme d'augmentation ϵ induit un quasi-isomorphisme de complexes de $\boldsymbol{G}$-modules

$$\epsilon_* : (\Omega^*_{\mathrm{BM}}(U^m), d_*) \to \mathbf{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM}})$$

où '**tot**' désigne le complexe simple associé. On a donc un isomorphisme de $\boldsymbol{G}$-modules

$$h^i(\epsilon_*) : H^i_{\mathrm{BM}}(U^m) \simeq h^i(\mathbf{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM}})$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $\check{C}(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM},k}$ le sous-bicomplexe de $\check{C}(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM}}$ défini par

$$\begin{cases} \check{C}(\mathcal{U}^m)^{i,*}_{\mathrm{BM},k} = 0\,, & \text{si } i < k, \\ \check{C}(\mathcal{U}^m)^{i,*}_{\mathrm{BM},k} = \check{C}(\mathcal{U}^m)^{i,*}_{\mathrm{BM}}\,, & \text{si } k \leqslant i \leqslant m-1. \end{cases}$$

On a la filtration décroissante de bicomplexes de $\boldsymbol{G}$-modules

$$\check{C}(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM}} = \check{C}(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM},0} \supseteq \check{C}(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM},1} \supseteq \check{C}(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM},2} \supseteq \cdots$$

induisant une filtration positivement graduée décroissante et régulière du complexe $\mathbf{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM}})$ de même donc que pour $H^*_{\mathrm{BM}}(U^m)$ pour lequel on pose

$$H^*_{\mathrm{BM}}(U^m)_k := h(\epsilon_*)^{-1}\big(h^*(\mathbf{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM},k}))\big)\,.$$

On notera $I\!F H^*_{\mathrm{BM}}(U^m)$ et $I\!F\,\mathbf{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM}})$ ces objets filtrés.

6.4.6. Remarque. Dans ce qui précède nous aurions tout aussi bien pu considérer les cochaînes de Čech ordonnées ou alternées, ce qui aurait fournit les bicomplexes de $\boldsymbol{G}$-modules $\check{C}_<(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM}}$ et $\check{C}_\epsilon(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM}}$.

La proposition suivante est bien connue ([17]).

6.4.7. Proposition. *La suite spectrale de $\boldsymbol{G}$-modules $I\!E(\mathcal{U}^m) := (I\!E(\mathcal{U}^m)_r, d_r)$ associée au complexe de $\boldsymbol{G}$-modules gradué filtré $I\!F\,\mathbf{tot}^*(\check{C}_?(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM}}))$ converge vers le bigradué de $I\!F H^*_{\mathrm{BM}}(U^m)$. On a*

$$I\!E(\mathcal{U}^m)^{p,q}_1 := \check{C}^p_?(\mathcal{U}^m, \mathcal{H}^q_{\mathrm{BM}}(_))$$

et

$$I\!E(\mathcal{U}^m)^{p,q}_2 := \check{H}^p(\mathcal{U}^m, \mathcal{H}^q_{\mathrm{BM}}(_)) \Longrightarrow \mathbf{Gr}^{p,q}(I\!F H^*_{\mathrm{BM}}(\mathcal{U}^m))\,. \qquad (I\!E)$$

[17] *Cf.* Godement [21] chap. I.4, thm. 4.2.2.

Le théorème suivant est maintenant corollaire immédiat de 6.4.7 et de 6.4.4.

6.4.8. Théorème. *Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{X}$ des espaces localement compacts de dimensions cohomologiques finies. Le $\mathcal{S}_m$-module $H_{\text{BM}}(\Delta_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}^m \smallsetminus \boldsymbol{M}_x^m))$ est l'aboutissement de la suite spectrale $I\!E(\mathcal{U}^m)$ de 6.4.7 pour le recouvrement $\mathcal{U}^m := \{U_1^m, \dots, U_m^m\}$, où*

$$U_i^m := \Delta_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}} \times \cdots \times \overbrace{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}-x}}^{i} \times \cdots \times \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}) \subseteq \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}})\,.$$

L'identification de 6.4.4-(c) pour le groupe des p-cochaînes ordonnées

$$\check{C}^p_<(\mathcal{U}^m; \underline{\Omega}^*_{U^m,\text{BM}}) = \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \Gamma(U^m_{m-p,\dots,m}; \underline{\Omega}^*_{U^m,\text{BM}}) \otimes \boldsymbol{\sigma}_{p+1}\,,$$

munit $(\check{C}^*_<(\mathcal{U}^m, _), \delta_*)$ d'une structure de complexe de $\mathcal{S}_m$-modules. Les termes $(I\!E(\mathcal{U}^m)_r, d_r)$ de la suite spectrale $I\!E(\mathcal{U}^m)$ héritent d'une structure de complexe de $\mathcal{S}_m$-modules et la suite spectrale converge au sens de suite spectrale de complexes de $\mathcal{S}_m$-modules vers le $\mathcal{S}_m$-module bi-gradué associé au $\mathcal{S}_m$-module gradué $H_{\text{BM}}(\Delta_m(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}^m \smallsetminus \boldsymbol{M}_x^m))$ muni de filtration régulière de la proposition 6.4.7. Dans le cas particulier où $r = 1$, on a

$$I\!E(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} H^q_{\text{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m}) \otimes \boldsymbol{\sigma}_{p+1}\,,$$

et $d_1 : I\!E(\mathcal{U}^m)_1^{p-1,q} \to I\!E(\mathcal{U}^m)_1^{p,q}$ un morphisme de $\mathcal{S}_m$-modules.

6.4.9. Remarque. Le même énoncé est valable pour le complexe des cochaînes non ordonnées $(\check{C}^p(\mathcal{U}^m, _), \delta_*)$, auquel cas on a

$$I\!E(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} H^q_{\text{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m})\,,$$

en raison de l'égalité $\check{C}^p(\mathcal{U}^m, _) = \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \Gamma(U^m_{m-p,\dots,m}, _)$ de 6.4.4-(b).

6.5. La suite spectrale « *basique* » pour $\boldsymbol{H_{\text{BM}}(F_m(M))}$

Nous nous restreignons maintenant à une situation qui simplifie remarquablement les considérations précédentes. C'est le cas où l'espace $\boldsymbol{X}$ est l'espace $\mathbb{R}_{\geqslant 0} := [0, +\infty[$, puis $x := 0$ et $V := \mathbb{R}_{>0}$. Dans la suite, $\boldsymbol{M}$ sera localement compact de dimension cohomologique finie $d_{\boldsymbol{M}}$ (2.4.1), et l'on notera

$$\boldsymbol{M}_{\geqslant 0} := \boldsymbol{M} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}\,, \quad \boldsymbol{M}_0 := \boldsymbol{M} \times \{0\}\,, \quad \boldsymbol{M}_{>0} := \boldsymbol{M} \times \mathbb{R}_{>0}\,.$$

Les espaces $\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}$ et $\boldsymbol{M}_{>0}$ sont i-acycliques et l'on a

$$\boldsymbol{M} \simeq \boldsymbol{M}_0 = \big(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0} \backslash \boldsymbol{M}_{>0}\big)\,.$$

On aura remarqué que ces choix renferment l'égalité $H_{\text{c}}(\mathbb{R}_{\geqslant 0}) = 0$, et donc le fait que l'on aura (4.2.1-(a))

$$H_{\text{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0})) = 0\,, \quad \forall m \geqslant 1\,.$$

6.5.1. La proposition 6.3.2 se simplifie et donne des isomorphismes de $\mathcal{S}_m$-modules

$$H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})) \simeq H_{\mathrm{c}}(\Delta_m(\boldsymbol{M}^m_{\geqslant 0}\backslash\boldsymbol{M}^m_0))[1], \qquad (\diamond)$$

et lorsque $\boldsymbol{M}$ est une pseudovariété orientée ([18])

$$\boxed{H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})) \simeq H_{\mathrm{BM}}(\Delta_m(\boldsymbol{M}^m_{\geqslant 0}\backslash\boldsymbol{M}^m_0))[m{-}1] \otimes \boldsymbol{\sigma}_m} \qquad (\diamond\diamond)$$

où l'apparition du caractère signature a été justifiée dans 6.2.8.

Avec ces données, la suite spectrale de 6.4.8 convenablement modifiée par le caractère $\boldsymbol{\sigma}_m$, converge vers $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))[1{-}m]$, on l'appellera « *la suite spectrale basique pour* $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ ».

6.5.2. Théorème (des suites spectrales basiques). *Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété orientée de dimension $d_{\boldsymbol{M}}$ ([19]). La suite $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m) := \mathbb{E}(\mathcal{U}^m) \otimes \boldsymbol{\sigma}_m$ converge, en tant que suite spectrale de complexes de $\mathcal{S}_m$-modules, vers le $\mathcal{S}_m$-module bi-gradué associé au $\mathcal{S}_m$-module gradué $H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))[1{-}m]$ muni de filtration régulière induite par l'isomorphisme $(\diamond\diamond)$ ci-dessus. De plus,*

a) *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\boxed{\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \boldsymbol{\sigma}_{m-(p+1)} \otimes H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m}) \;\Rightarrow\; H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))}$$

avec $q = i + (m{-}(p{+}1))$. Dans cette écriture, le groupe $\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}$ opère sur $H_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p},\dots,m)$ par image-inverse (6.2.4-(b)) *et le caractère $\boldsymbol{\sigma}_{m-(p+1)}$ affecte uniquement l'action du sous-groupe $\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathbf{1}$.*

b) *On a une décomposition canonique d'espaces vectoriels*

$$\boxed{\Xi^m_{p+1} : H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m}) \simeq \bigoplus\nolimits_{f\in\mathcal{F}(p+1,m)} H^{q-(m-(p+1))\,d_M}_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}(f)}(\boldsymbol{M}_{>0}))}$$

où $\mathcal{F}(p{+}1,m)$ est l'ensemble des applications $f:[\![1,m]\!]\to[\![1,m]\!]$ telles que $x<f(x)$ si $x<m-p$, et $f(x)=x$ sinon. On a $|\mathcal{F}(p{+}1,m)| = (m{-}1)!/p!$. La paramétrisation associe à $f\in\mathcal{F}(p{+}1,m)$ le sous-espace $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}(f)}(\boldsymbol{M}_{>0}) \subseteq \Delta_{p+1}(\boldsymbol{M}^{m-(p+1)}_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}))$ où $\mathfrak{p}(f)$ est la partition de $[\![1,m]\!]$ définie par les fibres de f (cf. 2.3.2).

c) *Pour avoir $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} \neq 0$, il faut que $(m{-}(p{+}1))d_{\boldsymbol{M}} \leqslant q \leqslant m\,d_{\boldsymbol{M}}$.*

d) *Pour $i\in\mathbb{N}$ donné, les termes de $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_r^{p,q}$, pour $r\geqslant 1$, qui contribuent à $H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ sont ceux pour lesquels on a $(m{-}(p{+}1))(d_{\boldsymbol{M}}{-}1) \leqslant i$.*

[18] Dans le cas général où $\boldsymbol{M}$ n'est pas une pseudovariété, on a toujours un isomorphisme d'espaces vectoriels, mais on perd l'aspect représentation de $\mathcal{S}_m$ (*cf.* note ([14])).

[19] Comme dans la note précédente, si l'on néglige l'aspect représentations, l'énoncé est valable plus généralement pour les espaces localement compacts de dimension finie.

Indications. (a) Le foncteur $(_)\otimes\boldsymbol{\sigma}_m$ étant exact, la convergence de $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)$ vers $H_{\mathrm{BM}}(U^m)\otimes\boldsymbol{\sigma}_m$ est assurée. Ensuite, l'égalité classique ([20])

$$\Big(\operatorname{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m})\otimes\boldsymbol{\sigma}_{p+1}\Big)\otimes\boldsymbol{\sigma}_m = \\ = \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m}\Big(H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m})\otimes\boldsymbol{\sigma}_{p+1}\otimes\operatorname{Res}^{\mathcal{S}_m}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}}\boldsymbol{\sigma}_m\Big)$$

explique le changement de $\boldsymbol{\sigma}_{p+1}$ en $\boldsymbol{\sigma}_{m-(p+1)}$ dans l'énoncé 6.4.8. L'égalité $p+q=i+(m-1)$ découle quant à elle de 6.5.1-($\diamond\diamond$).

(b) On remarque que dans la mesure où $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}))=0$, le morphisme de liaison dans la suite longue de cohomologie à support compact 2.1.2 pour $\boldsymbol{Z}:=\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}\times\Delta_{a-1+b}(\boldsymbol{M}^{a-1}_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{M}^b_{>0})$, à savoir

$$H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant a-1+b}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}\times\Delta_{a-1+b}(\boldsymbol{M}^{a-1}_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{M}^b_{>0})))\to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}^a_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{M}^b_{>0}))[1]\,,$$

est un isomorphisme. Comme d'autre part, la projection sur les dernières coordonnées

$$\pi_{a-1+b}:\Delta_{\leqslant a-1+b}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}\times\Delta_{a-1+b}(\boldsymbol{M}^{a-1}_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{M}^b_{>0}))\twoheadrightarrow\Delta_{a-1+b}(\boldsymbol{M}^{a-1}_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{M}^b_{>0})\,.$$

est un revêtement trivial à $(a-1+b)$ nappes paramétrées par les applications de $\mathcal{F}(a+b,a-1+b)$, on a un isomorphisme canonique

$$\Delta_{a-1+b}(\boldsymbol{M}^{a-1}_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{M}^b_{>0})^{a-1+b}[-1]\simeq\Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}^a_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{M}^b_{>0})^{a+b}\,,$$

et par induction

$$H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{M}_{>0}))^{(a+b-1)!/(b-1)!}[-a]\simeq H_{\mathrm{c}}(\Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}^a_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{M}^b_{>0}))$$

où $(a+b-1)!/(b-1)!=|\mathcal{F}(b,a+b)|$.
Par conséquent,

$$H_{\mathrm{c}}(U^m_{m-p,\dots,m}) = H_{\mathrm{c}}(\Delta_m(\boldsymbol{M}^{m-(p+1)}_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{M}^{p+1}_{>0})) \\ = \bigoplus\nolimits_{\mathcal{F}(p+1,m)} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}))[-(m-(p+1))]\,,$$

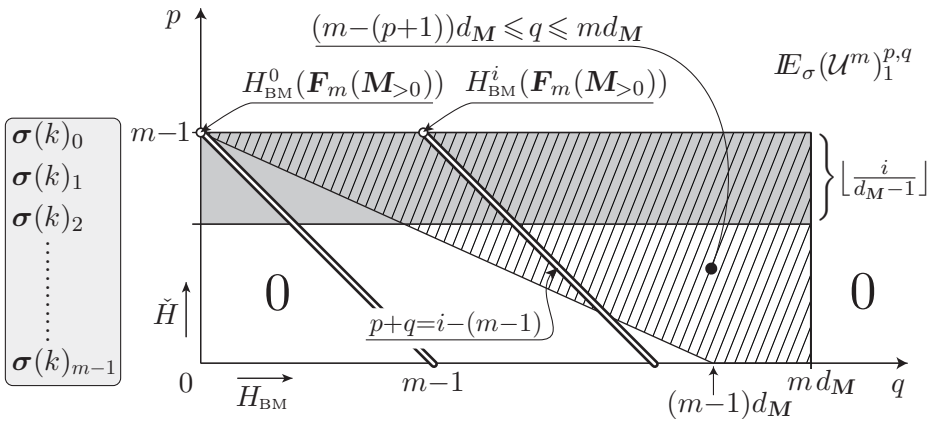
et par dualité, l'isomorphisme annoncé dans (b)

$$H_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m})\xrightarrow[\simeq]{\Xi^m_{p+1}}\bigoplus\nolimits_{\mathcal{F}(p+1,m)} H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}))[-(m-(p+1))\,d_{\boldsymbol{M}}]\,. \quad (\dagger)$$

(c) Comme on a $H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}))=0$ pour tout $i\notin[\![0,(p+1)d_{\boldsymbol{M}}]\!]$, puisque $H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}))=0$ si $i<p+1$ (4.2.1-(a)), on comprend par ($\dagger$) que pour si $H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m})\neq 0$, alors $q\in[\![(m-(p+1))d_{\boldsymbol{M}},md_{\boldsymbol{M}}]\!]$, d'où (c). A partir de là, si l'on fixe $i\in\mathbb{N}$, la majoration (d) résulte de l'égalité $q=i+m-(p+1)$.□

[20] Étant donnée une inclusion de groupes $H\subseteq G$, un H-module V et un G-module W, on a $\operatorname{ind}_H^G V\otimes_k W\cong\operatorname{ind}_H^G(V\otimes_k\operatorname{res}_H^G W)$.

6.5.3. Termes non nuls de la suite spectrale basique. La figure suivante illustre les assertions 6.5.2-(c,d). Les termes $I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m)_r^{p,q}$ non nuls pour $r \geqslant 1$ sont dans la région hachurée, et, pour chaque $i \in \mathbb{N}$ fixé, ceux qui contribuent à $H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ sont dans la région à la fois hachurée et grisée.



Le petit tableau à gauche rappelle que l'action de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ par image-inverse sur les termes de la ligne p est tordue par le caractère $\boldsymbol{\sigma}_{m-(p+1)}$.

6.6. Naturalité de la suite spectrale basique pour $H_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m(M))$

6.6.1. On rappelle que l'on note $p_m : \boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})$ la projection sur les m premières coordonnées. Nous supposerons que $\boldsymbol{M}$ est une pseudovariété *orientée* de dimension finie $d_{\boldsymbol{M}}$ ([21]) de sorte que le morphisme d'intégration sur les fibres $p_{m!} : H_{\text{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}) \to H_{\text{c}}(\boldsymbol{F}_m)$ est défini, ainsi que son dual, le morphisme d'image-inverse $p_m^* : H_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m) \to H_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1})$ (*cf.* 6.2.4-(a)).

Dans cette partie nous préparons le terrain pour l'étude ultérieure en 9.2 de certaines propriétés asymptotiques des familles des morphismes d'image-inverse en cohomologie de Borel-Moore

$$\left\{H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})) \xrightarrow{p_m^*} H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}))\right\}_{m\in\mathbb{N}}.$$

Notre but est la construction d'un morphisme de suites spectrales (*cf.* 6.6.7)

$$I\!E_\sigma(q_m^*) : (I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m)_r, d_r) \to (I\!E_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})_r, d_r)\,,$$

induisant par passage à la limite, les bi-gradués des morphismes p_m^* pour les filtrations du théorème 6.5.2, but qui sera atteint dans le théorème 6.7.1.

[21] Si dans les précédentes sections cette hypothèse n'était pas vraiment indispensable, maintenant elle l'est car autrement nous ne voyons pas comment donner un sens au morphisme d'image-inverse en cohomologie de Borel-Moore.

6.6.2. Compatibilité des opérations d'intégration sur les fibres. En accord avec les notations de 6.4.3, où nous avons introduit l'ouvert

$$U^{m+1} := \boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}) \backslash \boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}_0)$$

et son recouvrement $\mathcal{U}^{m+1} := \{U_1^{m+1}, \dots, U_{m+1}^{m+1}\}$, on note maintenant

$$\begin{aligned} W^{m+1} &:= \big(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}) \times \boldsymbol{M}_{\geqslant 0}\big) \backslash \big(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_0) \times \boldsymbol{M}_0\big) \\ &= \big(U^m \times \boldsymbol{M}_{\geqslant 0}\big) \cup \big(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}) \times \boldsymbol{M}_{>0}\big) \end{aligned}$$

et son recouvrement $\mathcal{W}^{m+1} := \{W_1^{m+1}, \dots, W_{m+1}^{m+1}\}$, avec

$$\begin{cases} W_i^{m+1} := U_i^m \times \boldsymbol{M}_{\geqslant 0}\,, \text{ si } i \leqslant m, \\ W_{m+1}^{m+1} := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}) \times \boldsymbol{M}_{>0}\,. \end{cases}$$

On a donc :

$$\mathcal{U}^{m+1} = \mathcal{W}^{m+1} \Cap U^{m+1} := \{W_i^{m+1} \cap U^{m+1} = U_i^{m+1}\}\,.$$

Le diagramme suivant, où les flèches verticales désignent les morphismes de prolongement par zéro, est un morphisme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow H_{\mathrm{c}}(U^{m+1}) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0})) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}_0)) & \xrightarrow{c_{m+1}} & \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_{U!}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{\boldsymbol{F}!}} & & \\ \longrightarrow H_{\mathrm{c}}(W^{m+1}) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}) \times \boldsymbol{M}_{\geqslant 0}) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_0) \times \boldsymbol{M}_0) & \xrightarrow{c'_{m+1}} & \end{array}$$

et comme la colonne centrale est nulle, il en résulte le diagramme commutatif où les flèches horizontales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}_0)) & \xrightarrow[\simeq]{c_{m+1}} & H_{\mathrm{c}}(U^{m+1})[1] \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_{\boldsymbol{F}!}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{U!}} \\ H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_0) \times \boldsymbol{M}_0)) & \xrightarrow[\simeq]{c'_{m+1}} & H_{\mathrm{c}}(W^{m+1})[1] \end{array} \qquad (\dagger)$$

D'autre part, pour $m \geqslant 1$, l'ouvert $W^{m+1} \subseteq \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}) \times \boldsymbol{M}_{\geqslant 0}$ est réunion de deux ouverts $H_{\mathrm{c}}(_)$-acycliques

$$W^{m+1} = W_U^{m+1} \cup W_{\boldsymbol{F}}^{m+1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} W_U^{m+1} := \big(U^m \times \boldsymbol{M}_{\geqslant 0}\big) \\ W_{\boldsymbol{F}}^{m+1} := \big(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}) \times \boldsymbol{M}_{>0}\big) \end{cases} \qquad (\dagger\dagger)$$

Le morphisme de liaison dans la suite de Mayer-Vietoris pour la cohomologie à support compact relative à $\{W_U^{m+1}, W_{\boldsymbol{F}}^{m+1}\}$ est donc un isomorphisme :

$$H_{\mathrm{c}}(W^{m+1}) \xrightarrow[\simeq]{c_{\mathrm{MV}}} H_{\mathrm{c}}(U^m \times \boldsymbol{M}_{>0})[1]\,.$$

6.6.3. Proposition. *Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété* orientée *de dimension $d_{\boldsymbol{M}}$. Pour tout $m \geqslant 1$, le diagramme suivant où les flèches horizontales sont des isomorphismes, est commutatif au signe près.*

$$\begin{array}{ccccc}
H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}_0)) & \xrightarrow[\simeq]{c_{m+1}} & H_{\mathrm{c}}(U^{m+1})[1] & & \\
\downarrow{\scriptstyle \iota_{\boldsymbol{F}!}} & \text{(I)} & \downarrow{\scriptstyle \iota_{U!}} & & \\
H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_0)) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}_0)) & \xrightarrow[\simeq]{c'_{m+1}} & H_{\mathrm{c}}(W^{m+1})[1] & \xrightarrow[\simeq]{c_{\mathrm{MV}}} & H_{\mathrm{c}}(U^m) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}_{>0})[2] \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \int_{\boldsymbol{M}_0}} & & \text{(II)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \int_{\boldsymbol{M}_{>0}}} \\
H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_0))[-d_{\boldsymbol{M}}] & & \xrightarrow[\simeq]{c_m[-d_{\boldsymbol{M}}]} & & H_{\mathrm{c}}(U^m)[1][-d_{\boldsymbol{M}}]
\end{array}$$

Plus précisément, (I) *et commutatif et dans* (II) *on a*

$$\int_{\boldsymbol{M}_{>0}} (c_{\mathrm{MV}} \circ c'_{m+1})(\alpha \otimes \beta) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\, c_m\Big(\int_{\boldsymbol{M}_0} \alpha \otimes \beta \Big) \qquad (\diamond)$$

Démonstration. La commutativité de (I) a été justifiée dans (†). Pour le sous-diagramme (II), on utilise le fait que les cofaisceaux $\underline{\underline{\Omega_{\mathrm{c}}}}(_)$ sont flasques. Quitte à prendre des recouvrements assez fins, un cocycle $\omega \in \Omega_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_0)) \otimes \Omega_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}_0)$ s'exprime comme la restriction $\sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$ de

$$\tilde{\omega} = \sum\nolimits_i \tilde{\alpha}_i \otimes \tilde{\beta}_i\,, \qquad \text{avec } \tilde{\alpha}_i \in \Omega_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0})) \text{ et } \tilde{\beta}_i \in \Omega_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0})\,.$$

On a donc $c'_{m+1}\big(\sum_i \alpha_i \otimes \beta_i\big) = \sum_i d\tilde{\alpha}_i \otimes \tilde{\beta}_i + \sum_i (-1)^{|\alpha_i|} \tilde{\alpha}_i \otimes d\tilde{\beta}_i$, avec $d\tilde{\alpha}_i \otimes \tilde{\beta}_i \in \Omega_{\mathrm{c}}(W_U^{m+1})$ et $\tilde{\alpha}_i \otimes d\tilde{\beta}_i \in \Omega_{\mathrm{c}}(W_U^{m+1})$. Et alors, par le morphisme de liaison de Mayer-Vietoris c_{MV} relatif à $\{W_U^{m+1}, W_{\boldsymbol{F}}^{m+1}\}$, on a

$$(c_{\mathrm{MV}} \circ c'_{m+1})\big(\sum\nolimits_i \alpha_i \otimes \beta_i\big) = \sum\nolimits_i (-1)^{|\alpha_i|} d\tilde{\alpha}_i \otimes d\tilde{\beta}_i \in \Omega_{\mathrm{c}}(U) \otimes \Omega_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}_{>0})\,,$$

de sorte que

$$\int_{\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}} (c_{\mathrm{MV}} \circ c'_{m+1})\big(\sum\nolimits_i \alpha_i \otimes \beta_i\big) = \sum\nolimits_i (-1)^{|\alpha_i|+|\beta_i|}\, d\tilde{\alpha}_i \int_{\boldsymbol{M}_0} \beta_i\,,$$

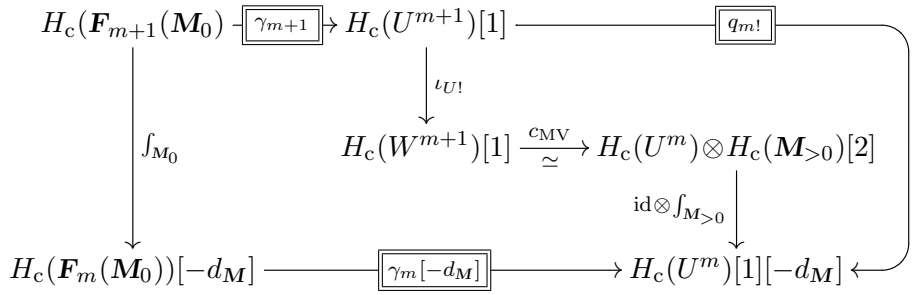
puisque, avec les conventions en cours, $\int_{\boldsymbol{M}_{>0}} d\tilde{\beta} = (-1)^{|\beta|} \int_{\boldsymbol{M}_0} \beta$.

On conclut par le fait que si $\alpha \in \mathcal{Z}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_0))$, on a $c_m(\alpha) = d\tilde{\alpha}$. □

6.6.4. Remarque pour le cas $m = 0$. L'énoncé de 6.6.3 doit être modifié, puisqu'alors les morphismes c_{MV} et c_m sont nuls. En effet, dans ce cas $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}) = \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_0) = \{\mathrm{pt}\}$, et alors $U^m = \emptyset$. Donc, $c_m = 0$ et le premier terme de l'égalité (††) est vide, ce qui entraîne la nullité de c_{MV}. On a aussi $\iota_{\boldsymbol{F}} = \mathrm{id}$, $\iota_U = \mathrm{id}$ et $c_{m+1} = c'_{m+1}$. Le diagramme de la proposition devient

$$\begin{array}{ccc}
H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}_0)) & \xrightarrow[\simeq]{c'_1} & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}_{>0})[1] \\
\downarrow{\scriptstyle \int_{\boldsymbol{M}_0}} & \swarrow{\scriptstyle \int_{\boldsymbol{M}_{>0}}} & \\
H_{\mathrm{c}}(\mathrm{pt})[-d_{\boldsymbol{M}}] & &
\end{array} \qquad \text{où} \quad \int_{\boldsymbol{M}_{>0}} c'_1(\beta) = (-1)^{|\beta|} \int_{\boldsymbol{M}_0} \beta.$$

6.6.5. Renormalisation des morphismes de liaison. Sur le sous-diagramme suivant de la proposition 6.6.3



on a noté, pour $m \geqslant 1$,

$$q_{m!} : H_{\mathrm{c}}(U^{m+1}) \to H_{\mathrm{c}}(U^m)[-d_{\boldsymbol{M}}]\,, \quad q_{m!} := \Big(\mathrm{id}\otimes\int_{\boldsymbol{M}_{>0}}\Big)\circ c_{\mathrm{MV}}\circ\iota_{U!}\,,$$

et nous avons remplacé $c_m : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_0)) \to H_{\mathrm{c}}(U^m)[1]$ par

$$\gamma_m : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_0)) \to H_{\mathrm{c}}(U^{m+1})[1]\,, \quad \gamma_m(\omega) = (-1)^{|\omega|m+\frac{m(m-1)}{2}d_M}\, c_m(\omega)\,.$$

6.6.6. Proposition. *Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété orientée de dimension $d_{\boldsymbol{M}}$.*

a) *Pour $m \geqslant 1$, le diagramme suivant de morphismes compatibles aux actions des groupes symétriques par image-directe, est un diagramme commutatif,*

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}_0)) & \xrightarrow[\simeq]{\gamma_{m+1}} & H_{\mathrm{c}}(U^{m+1})[1] \\ {\scriptstyle p_{m!}}\downarrow{\scriptstyle [-d_{\boldsymbol{M}}]} & & {\scriptstyle [-d_{\boldsymbol{M}}]}\downarrow{\scriptstyle q_{m!}} \\ H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_0)) & \xrightarrow[\simeq]{\gamma_m} & H_{\mathrm{c}}(U^m)[1]\,. \end{array}$$

b) *Le diagramme suivant obtenu en dualisant et concaténant les diagrammes de* (a) *et où l'on a noté $\boldsymbol{F}_i$ pour $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{M}_0)$, est un diagramme commutatif,*

$$\begin{array}{ccccccccccc} H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_1) & \xrightarrow[p_1^*]{} & H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_2) & \xrightarrow[p_2^*]{} & \cdots & \longrightarrow & H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m) & \xrightarrow[p_m^*]{} & H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1}) & \longrightarrow \\ {\scriptstyle\gamma_1^*}\uparrow{\scriptstyle [0]} & & {\scriptstyle\gamma_2^*}\uparrow{\scriptstyle [-1]} & & & & {\scriptstyle\gamma_m^*}\uparrow{\scriptstyle [1-m]} & & {\scriptstyle\gamma_{m+1}^*}\uparrow{\scriptstyle [-m]} & \\ H_{\mathrm{BM}}(U^1) & \xrightarrow[q_1^*]{} & H_{\mathrm{BM}}(U^2)[1] & \xrightarrow[q_2^*]{} & \cdots & \longrightarrow & H_{\mathrm{BM}}(U^m)[m-1] & \xrightarrow[q_m^*]{} & H_{\mathrm{BM}}(U^{m+1})[m] & \longrightarrow \end{array}$$

Les morphismes y sont compatibles aux actions des groupes symétriques lorsque l'on tord $H_{\mathrm{BM}}(U^m)$ par $\boldsymbol{\sigma}_m$ (cf. 6.5.1-($\diamond\diamond$)*). Les suites horizontales sont alors des $\boldsymbol{FI}$-modules (cf. 7.2.1) et la famille $\{\gamma_m^*[1-m]\}$ est un isomorphisme de $\boldsymbol{FI}$-modules.*

Démonstration. (a) Notons $Q(m) = \frac{m(m-1)}{2} d_{\boldsymbol{M}}$. Compte tenu de l'égalité ($\diamond$) de 6.6.3, on a

$$\begin{aligned}(q_{m!} \circ \gamma_{m+1})(\omega) &= (-1)^{|\omega|m+Q(m+1)}\, c_m(p_{m!}(\omega)) \\ &= (-1)^{(|\omega|-d_{\boldsymbol{M}})m+Q(m)} c_m(p_{m!}(\omega)) = (\gamma_m \circ p_{m!})(\omega)\end{aligned}$$

La compatibilité par rapport aux actions des groupes symétriques est claire.

(b) On verra dans 7.2.1 que la condition pour que les suites horizontales soient des ***FI***-modules est que pour tous $m < n$, on ait

$$(p_{n-1}^* \circ \cdots \circ p_m^*)(H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_0))) \subseteq H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{M}_0))^{\mathbf{1}_m \times \mathcal{S}_{n-m}}$$

et de même pour la deuxième ligne. C'est évident pour la première ligne, et donc aussi pour la seconde qui en est isomorphe. □

6.6.7. L'image-inverse sur les suites spectrales basiques. Nous allons relever le morphisme $q_m^* : H_{\mathrm{BM}}(U^m) \to H_{\mathrm{BM}}(U^{m+1})[1]$, pour $m \geqslant 1$, de 6.6.6 en un morphisme $\mathbb{E}(q_m^*) : \mathbb{E}(\mathcal{U}^m) \to \mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})[1,0]$ de suites spectrales basiques, de sorte que nous aurons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{BM}}(U^m) & \xrightarrow{\ q_m^*\ } & H_{\mathrm{BM}}(U^{m+1})[1] \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \mathbb{E}(\mathcal{U}^m) & \xrightarrow{\ \mathbb{E}(q_m^*)\ } & \mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})[1,0] \end{array}$$

répondant ainsi à la principale motivation de cette section 6.6 (*cf.* 6.6.1).

Les morphismes q_m^* sont les duaux des morphisme $q_{m!}$ qui on été définis comme la composée de trois morphismes

$$\begin{array}{ccccc} & & H_{\mathrm{c}}(W^{m+1}) & \xrightarrow{c_{\mathrm{MV}}} & H_{\mathrm{c}}(U^m \times \boldsymbol{M}_{>0})[1] \\ & \overset{\iota_{U!}}{\nearrow} & & & \overset{p_{m!} := \int_{\boldsymbol{M}>0}}{\searrow} \\ H_{\mathrm{c}}(U^{m+1}) & & \xrightarrow{\qquad\qquad q_{m!} \qquad\qquad} & & H_{\mathrm{c}}(U^m)[-d_{\boldsymbol{M}}] \end{array}$$

Dans ce qui suit, nous montrerons que le dual de chacun de ces morphismes admet un relèvement spectral. Rappelons maintenant quelques notations.

– L'ouvert $U^{m+1} \subseteq \boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0})$ est muni du recouvrement (6.4.3)

$$\mathcal{U}^{m+1} = \{U_1^{m+1}, \ldots, U_{m+1}^{m+1}\} \quad \text{où} \quad \big(\overline{x} \in U_i^{m+1} \Leftrightarrow x_i \notin \boldsymbol{M}_0\big).$$

– L'ouvert $W^{m+1} \subseteq \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}) \times \boldsymbol{M}_{\geqslant 0}$ est muni du recouvrement (6.6.2)

$$\mathcal{W}^{m+1} := \{W_1^{m+1}, \cdots, W_{m+1}^{m+1}\} \text{ où } \begin{cases} W_i^{m+1} := U_i^m \times \boldsymbol{M}_{\geqslant 0}\,, \text{ si } i \leqslant m, \\ W_{m+1}^{m+1} := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}) \times \boldsymbol{M}_{>0}\,. \end{cases}$$

On décompose W^{m+1} en réunion de deux ouverts $H_{\mathrm{c}}(_)$-acycliques

$$W^{m+1} = W_U^{m+1} \cup W_{\boldsymbol{F}}^{m+1} \text{ avec } \begin{cases} W_U^{m+1} := \big(U^m \times \boldsymbol{M}_{\geqslant 0}\big) \\ W_{\boldsymbol{F}}^{m+1} := \big(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}) \times \boldsymbol{M}_{>0}\big)\,. \end{cases} \qquad (\dagger\dagger)$$

Relèvement spectral de ι_U^*. Comme le recouvrement $\mathcal{U}^{m+1}$ est la trace sur U^{m+1} du recouvrement $\mathcal{W}^{m+1}$, *i.e.*

$$\mathcal{U}^{m+1} = \mathcal{W}^{m+1} \pitchfork U^{m+1} := \{W_i^{m+1} \cap U^{m+1} = U_i^{m+1}\}\,,$$

la naturalité de bicomplexes de cochaînes de Čech-Borel-Moore vis-à-vis des restrictions ouvertes, induit un morphisme de bicomplexes de degré (0,0)

$$(\iota_U^*)_{\bullet,*} : \check{C}_<(\mathcal{W}^{m+1})^{\bullet;*}_{\mathrm{BM}} \to \check{C}_<(\mathcal{U}^{m+1})^{\bullet;*}_{\mathrm{BM}}$$

et donc un morphisme de suites spectrales

$$(\iota_{U,r}^*) : (I\!E(\mathcal{W}^{m+1})_r, d_r) \to (I\!E(\mathcal{U}^{m+1})_r, d_r)\,.$$

Proposition A (relèvement de i_U^*). *Le morphisme*

$$I\!E(\mathcal{W}^{m+1})_1^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{W}; \mathcal{H}^q_{\mathrm{BM}}(_)) \xrightarrow{(\iota_{U,1}^*)_{p,q}} I\!E(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{U}; \mathcal{H}^q_{\mathrm{BM}}(_))\,,$$

en fonction de $p \geqslant 0$ et de $1 \leqslant i_0 < \cdots < i_p \leqslant m+1$, prend les valeurs suivantes.

▷ *Si $p = 0$, on a $(\iota_{U,1}^*)_{0,q} = 0$ puisque les W_i^{m+1} sont $H_{\mathrm{BM}}(_)$-acycliques.*

$$\begin{array}{ccc} \big(I\!E(\mathcal{W}^{m+1})_1^{0,q}\big)_{i_0} & \xrightarrow[(\iota_{U,1}^*)_{0,q}=0]{} & \big(I\!E(\mathcal{U}^{m+1})_1^{0,q}\big)_{i_0} \\ \| & & \| \\ H^q_{\mathrm{BM}}(W_{i_0}^{m+1}) = 0 & & H^q_{\mathrm{BM}}(U_{i_0}^{m+1}) \end{array}$$

▷ *Si $p > 0$ et $i_p < m+1$, on a aussi $(\iota_{U,1}^*)_{p,q} = 0$ puisque*

$$W^{m+1}_{i_0,\ldots,i_p} = U^m_{i_0,\ldots,i_p} \times \boldsymbol{M}_{\geqslant 0}$$

est $H_{\mathrm{BM}}(_)$-acyclique.

$$\begin{array}{ccc} \big(I\!E(\mathcal{W}^{m+1})_1^{p,q}\big)_{i_0,\ldots,i_p} & \xrightarrow[(\iota_{U,1}^*)_{p,q}=0]{} & \big(I\!E(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p,q}\big)_{i_0,\ldots,i_p} \\ \| & & \| \\ H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{i_0,\ldots,i_p} \times \boldsymbol{M}_{\geqslant 0}) = 0 & & H^q_{\mathrm{BM}}(U^{m+1}_{i_0,\ldots,i_p}) \end{array}$$

▷ *Si $p > 0$ et $i_p = m+1$, on a*

$$W^{m+1}_{i_0,\ldots,i_p=m+1} = U^m_{i_0,\ldots,i_{p-1}} \times \boldsymbol{M}_{>0}\,,$$

et $\iota_{U,1}^*$ s'identifie à la restriction de $\big(U^m_{i_0,\ldots,i_{p-1}} \times \boldsymbol{M}_{>0}\big)$ à $U^{m+1}_{i_0,\ldots,i_{p-1},m+1}$

$$\begin{array}{ccc} \big(I\!E(\mathcal{W}^{m+1})_1^{p,q}\big)_{i_0,\ldots,i_p=m+1} & \xrightarrow[(\iota_{U,1}^*)_{p,q}]{} & \big(I\!E(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p,q}\big)_{i_0,\ldots,i_p=m+1} \\ \| & & \| \\ H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{i_0,\ldots,i_{p-1}} \times \boldsymbol{M}_{>0}) & \xrightarrow{\textit{restriction}} & H^q_{\mathrm{BM}}(U^{m+1}_{i_0,\ldots,i_{p-1},m+1}) \end{array}$$

Relèvement spectral de c^*_{MV}. On commence par un scholie sur les bicomplexes $\check{C}^{\bullet,*}_<(\mathcal{U};\underline{\underline{\Omega}}^*)$ de cochaînes de Čech ordonnées, relatives à un recouvrement $\mathcal{U}=\{U_1,\dots,U_{m+1}\}$ et à valeurs dans le complexe de faisceaux de cochaînes de Borel-moore $(\underline{\underline{\Omega}}^*_{\mathrm{BM}},d_*)$ (6.4.5), ce que nous notons

$$\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U}):=\check{C}^{\bullet,*}_<(\mathcal{U};\underline{\underline{\Omega}}^*_{\mathrm{BM}})\,.$$

Soient $\mathcal{U}':=\{U_1,\dots,U_m\}$ et $\mathcal{U}'':=\{U_{m+1}\}$ dont on remarquera tout de suite que $\check{C}^p(\mathcal{U}')=0$ si $p\geqslant m$, et $\check{C}^p(\mathcal{U}'')=0$ si $p\geqslant 1$.

Définissons les restrictions de cochaînes de Čech ρ',ρ'' :

$$\begin{array}{ccc}\rho:\check{C}^\bullet(\mathcal{U})&\longrightarrow&\check{C}^\bullet(\mathcal{U}')\oplus\check{C}^\bullet(\mathcal{U}'')\\ \omega&\longmapsto&(\rho'(\omega),\rho''(\omega))\end{array}$$

par

$$\begin{cases}\rho'(\omega)_{i_0,\dots,i_p}=\omega_{i_0,\dots,i_p}\in\Omega^*(U_{i_0,\dots,i_p})\,,\quad\text{où } 1\leqslant i_0,\dots,i_p\leqslant m,\\ \rho''(\omega)_0=\omega_{m+1}\in\Omega^*(U_{m+1})\,.\end{cases}$$

Posons ensuite $\mathcal{U}'''':=\{U_1\cap U_{m+1},\dots,U_m\cap U_{m+1}\}$, et définissons

$$c:\check{C}^\bullet(\mathcal{U}'''')\longrightarrow\check{C}^{\bullet+1}(\mathcal{U})\qquad(\diamond)$$

par

$$c(\omega)_{i_0,\dots,i_p}=\begin{cases}\omega_{i_0,\dots,i_{p-1}}\,,\ \text{si } i_p=m+1,\\ 0\,,\ \text{sinon.}\end{cases}$$

Proposition. *La suite*

$$0\to\check{C}^\bullet(\mathcal{U}'''')\xrightarrow{c}\check{C}^{\bullet+1}(\mathcal{U})\xrightarrow[(\rho',\rho'')]{\rho}\check{C}^{\bullet+1}(\mathcal{U}')\oplus\check{C}^{\bullet+1}(\mathcal{U}'')\to 0\qquad(\ddagger)$$

est une suite exacte courte de morphismes de bicomplexes. Les morphismes qu'elle induit sur les cohomologies des complexes simples associés coïncident alors avec les morphismes de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris pour le recouvrement $\cup\mathcal{U}=(\cup\mathcal{U}')\cup(\cup\mathcal{U}'')$, soit

$$\to H^*_{\mathrm{BM}}(\cup\mathcal{U}'''')\xrightarrow{c_{\mathrm{MV}}}H^{*+1}_{\mathrm{BM}}(\cup\mathcal{U})\xrightarrow{\rho}H^{*+1}_{\mathrm{BM}}(\cup\mathcal{U}')\oplus H^{*+1}_{\mathrm{BM}}(\cup\mathcal{U}'')\to H^{*+1}_{\mathrm{BM}}(\cup\mathcal{U}'''')\to$$

En particulier, le morphisme de liaison c_{MV} est l'aboutissement du morphisme des suites spectrales $(c_r):(I\!E(\mathcal{U}'''')),d_r)\to(I\!E(\mathcal{U}'''')[1,0],d_r)$ induit par le morphisme de bicomplexes $(\diamond)$ et dont la restriction aux termes $I\!E_1$ est

$$\begin{array}{c}I\!E(\mathcal{U}'''')_1^{p,q}=\bigoplus_{i_0<\dots<i_p}H^q_{\mathrm{BM}}(U_{i_0,\dots,i_p}\cap U_{m+1})\\ {\scriptstyle(c_1)_{p,q}}\downarrow\\ I\!E(\mathcal{U})_1^{p+1,q}=\bigoplus_{i_0<\dots<i_p}H^q_{\mathrm{BM}}(U_{i_0,\dots,i_{p+1}})\end{array}$$

où, si $\omega\in(I\!E(\mathcal{U}'''')_1^{p,q})_{i_0,\dots,i_p}$, on a

$$((c_1)_{p,q}(\omega))_{k_0,\dots,k_{p+1}}=\begin{cases}\omega\,,\ \textit{si } (k_0,\dots,k_{p+1})=(i_0,\dots,i_p,m+1)\\ 0\,,\ \textit{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration. Le fait que ρ est un morphisme de bicomplexes surjectif de bidegré $(0,0)$ est immédiat. Son noyau $\ker^\bullet(\rho)$ est le sous-bicomplexe de $\check{C}^\bullet(\mathcal{U})$ vérifiant

$$\ker^0(\rho) = 0 \quad \text{et} \quad (\forall p > 0)\big(\omega \in \ker^p(\rho) \Leftrightarrow \omega_{i_0,\dots,i_p} = 0\,,\ \text{si } i_p \leqslant m\big)\,,$$

où l'on reconnaît l'image de $c : \check{C}^{\bullet-1}(\mathcal{U}''') \to \check{C}^\bullet(\mathcal{U})$. La suite (†) est donc bien une suite exacte courte de bicomplexes.

Notons

$$U := \cup\mathcal{U}\,, \qquad U' := \cup\mathcal{U}'\,, \qquad U'' := \cup\mathcal{U}''\,, \qquad U''' := \cup\mathcal{U}'''\,.$$

La suite courte de Mayer-Vietoris de bicomplexes

$$0 \to \check{C}^\bullet(\mathcal{U}) \xrightarrow{\alpha} \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \pitchfork U') \oplus \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \pitchfork U'') \xrightarrow{\beta} \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \pitchfork U''') \to 0$$

est exacte puisque le faisceau $\underline{\Omega}^*_{\text{BM}}$ est flasque. Comme on a $\mathcal{U} \pitchfork U' \supseteq \mathcal{U}'$ et $\mathcal{U} \pitchfork U'' \supseteq \mathcal{U}''$, on dispose de morphismes de restriction de cochaînes de Čech r', r'' et du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & \to & \check{C}^\bullet(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\alpha} & \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \pitchfork U') \oplus \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \pitchfork U'') & \xrightarrow{\beta} & \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \pitchfork U''') \to 0 \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle r'} \quad \downarrow{\scriptstyle r''} & & \\
0 & \to & \check{C}^{\bullet-1}(\mathcal{U}''') & \xrightarrow{c} & \check{C}^\bullet(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\rho} & \check{C}^\bullet(\mathcal{U}') \quad \oplus \quad \check{C}^\bullet(\mathcal{U}'') & & \to 0
\end{array}$$

où r' et r'' induisent des quasi-isomorphismes au niveau des complexes simples associés.

Il en résulté un isomorphisme canonique en cohomologie

$$\xi_* : h^* \,\mathbf{tot}\left(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U} \pitchfork U''')\right) \to h^* \,\mathbf{tot}\left(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U}''')\right)$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
h^{*-1} \,\mathbf{tot}\left(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U} \pitchfork U''')\right) & \xrightarrow{\gamma} & h^* \,\mathbf{tot}\left(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U})\right) \\
\downarrow{\scriptstyle \xi_{*-1}} & \bigoplus & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
h^{*-1} \,\mathbf{tot}\left(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U}''')\right) & \xrightarrow{c} & h^* \,\mathbf{tot}\left(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U})\right)
\end{array}$$

où γ correspond ou morphisme de liaison $c_{\text{MV}} : H_{\text{BM}}(U''') \to H_{\text{BM}}(U)[1]$ de la suite longue de Mayer-Vietoris pour le recouvrement $U = U' \cup U''$. A partir de là la suite de la proposition est claire. □

Cette proposition, appliquée au recouvrement $\mathcal{W}^{m+1}$, fournit le relèvement spectral du morphisme de liaison $c^*_{\text{MV}} : H_{\text{BM}}(U^m \times \boldsymbol{M}_{>0}) \to H_{\text{BM}}(W^{m+1})[1]$

Proposition B (relèvement de $c^*_{\mathbf{MV}}$). *On munit W^{m+1} du recouvrement $\mathcal{W}^{m+1}$, et $U^m\times\boldsymbol{M}_{>0}$ du recouvrement $\mathcal{U}^m\times\boldsymbol{M}_{>0}$ et l'on note $(I\!E(\mathcal{W}^{m+1})_r,d_r)$ et $(I\!E(\mathcal{U}^m\times\boldsymbol{M}_{>0})_r,d_r)$ les suites spectrales correspondantes. Alors, il existe un morphisme de suites spectrales*

$$(c^*_{\mathrm{MV,r}}):(I\!E(\mathcal{U}^m\times\boldsymbol{M}_{>0})_r,d_r)\to(I\!E(\mathcal{W}^{m+1})_r,d_r))[1,0]$$

convergeant vers le bigradué du morphisme de liaison

$$c^*_{\mathrm{MV}}:H_{\mathrm{BM}}(\mathcal{U}^m\times\boldsymbol{M}_{>0})\to H_{\mathrm{BM}}(W^{m+1})[1]\,.$$

L'action de $(c^*_{\mathrm{MV,r}})$ sur $I\!E_1$ est donnée par le plongement canonique

$$\begin{array}{ccc} I\!E(\mathcal{U}^m\times\boldsymbol{M}_{>0})_1^{p,q} & = & \displaystyle\bigoplus_{1\leqslant i_0<\cdots<i_p\leqslant m} H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{i_0,\dots,i_p}\times\boldsymbol{M}_{>0}) \\ \downarrow{\scriptstyle (c_{\mathrm{MV},1})_{p,q}} & & \| \\ I\!E(\mathcal{W}^{m+1})_1^{p+1,q} & \hookleftarrow & \displaystyle\bigoplus_{1\leqslant i_0<\cdots<i_p\leqslant m} H^q_{\mathrm{BM}}(W^{m+1}_{i_0,\dots,i_p,m+1}) \end{array}$$

Relèvement spectral de $\left(\int_{\boldsymbol{M}>\mathbf{0}}\right)^*$. On commence par rappeler que le morphisme d'intégration sur les fibres a un sens déjà au niveau des complexes de cochaînes à support compact :

$$p_{m!}=\int_{\boldsymbol{M}>0}:\Omega_{\mathrm{c}}(_)\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}_{>0})\to\Omega_{\mathrm{c}}(_)[-d_{\boldsymbol{M}}-1]$$

et c'est un morphisme compatible à l'opération de cobord. Par dualité et naturalité vis-à-vis des inclusions ouvertes, on obtient le morphisme de bicomplexes de cochaînes de Čech-Borel-Moore de degré $[0,0]$

$$(p^*_m)_{\bullet,*}:\check{C}(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM}}\to\check{C}(\mathcal{U}^m\times\boldsymbol{M}_{>0})^{\bullet,*}_{\mathrm{BM}}\,. \qquad (\ddagger)$$

Le théorème suivant et immédiat.

Proposition C (relèvement de $p^*_{\boldsymbol{m}}$). *Par passage aux complexes simples associés, le morphisme de bicomplexes $(\ddagger)$ induit le morphisme image-inverse*

$$p^*_m:H_{\mathrm{BM}}(\mathcal{U}^m)\to H_{\mathrm{BM}}(\mathcal{U}^m\times\boldsymbol{M}_{>0})\,.$$

Il induit également un morphisme de suites spectrales

$$(p^*_{m,r}):(I\!E(\mathcal{U}^m)_r,d_r)\to(I\!E(\mathcal{U}^m\times\boldsymbol{M}_{>0})_r,d_r)\,.$$

L'action de $(p^*_{m,r})$ sur $I\!E_1$ est donnée par les morphismes image-inverse :

$$\begin{array}{ccc} I\!E(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} & = & \displaystyle\bigoplus_{1\leqslant i_0<\cdots<i_p\leqslant m} H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{i_0,\dots,i_p}) \\ \downarrow{\scriptstyle (p^*_{m,1})_{p,q}} & & \downarrow{\scriptstyle p^*_m} \\ I\!E(\mathcal{U}^m\times\boldsymbol{M}_{>0})_1^{p,q} & = & \displaystyle\bigoplus_{1\leqslant i_0<\cdots<i_p\leqslant m} H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{i_0,\dots,i_p}\times\boldsymbol{M}_{>0}) \end{array}$$

Conclusion. La composition des morphismes des suites spectrales des propositions A B C donne le morphisme de suites spectrales annoncé dans 6.6.7

$$I\!E(q_m^*) : (I\!E(\mathcal{U}^m)_r, d_r) \to (I\!E(\mathcal{U}^{m+1})_r, d_r)[1,0]\,.$$

Le diagramme commutatif suivant traque sa valeur sur les termes $I\!E_1$

$$\begin{array}{ccc}
I\!E(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} & = & \bigoplus_{1\leqslant i_0<\cdots<i_p\leqslant m} H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{i_0,\ldots,i_p}) \\
\downarrow{\scriptstyle (p^*_{m,1})_{p,q}} & & \downarrow{\scriptstyle p_m^*} \\
I\!E(\mathcal{U}^m\times \boldsymbol{M}_{>0})_1^{p,q} & = & \bigoplus_{1\leqslant i_0<\cdots<i_p\leqslant m} H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{i_0,\ldots,i_p}\times \boldsymbol{M}_{>0}) \\
\downarrow{\scriptstyle (c_{\mathrm{MV},1})_{p,q}} & & \| \\
I\!E(\mathcal{W}^{m+1})_1^{p+1,q} & \hookleftarrow & \bigoplus_{1\leqslant i_0<\cdots<i_p\leqslant m} H^q_{\mathrm{BM}}(W^{m+1}_{i_0,\ldots,i_p,m+1}) \\
\downarrow{\scriptstyle (\iota^*_{U,1})_{p,q}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_U^*} \\
I\!E(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p+1,q} & \hookleftarrow & \bigoplus_{1\leqslant i_0<\cdots<i_p\leqslant m} H^q_{\mathrm{BM}}(U^{m+1}_{i_0,\ldots,i_p,m+1})
\end{array}
\qquad p_m^*$$

Toutes ces observations conduisent à l'énoncé suivant.

6.6.8. Proposition. *Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété orientée de dimension $d_{\boldsymbol{M}}$. Il existe un morphisme de suites spectrales basiques*

$$I\!E(q_m^*) : (I\!E(\mathcal{U}^m)_r, d_r) \to (I\!E(\mathcal{U}^{m+1})_r, d_r)[1,0]\,,$$

qui est compatible aux actions des groupes symétriques et qui rend le diagramme suivant commutatif ([22]).

$$\begin{array}{ccc}
H_{\mathrm{BM}}(U^m) & \xrightarrow{\ q_m^*\ } & H_{\mathrm{BM}}(U^{m+1})[1] \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
I\!E(\mathcal{U}^m) & \xrightarrow{\ I\!E(q_m^*)\ } & I\!E(\mathcal{U}^{m+1})[1,0]
\end{array}$$

De plus, l'action de $I\!E(q_m^*)$ sur les termes $I\!E(_)_1$ est donnée par

$$\begin{array}{ccc}
I\!E(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} & \xrightarrow{\ I\!E(q_m^*)_1^{p,q}\ } & I\!E(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p+1,q} \\
\| & & \uparrow \\
\bigoplus_{1\leqslant i_0<\cdots<i_p\leqslant m} H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{i_0,\ldots,i_p}) & \xrightarrow{\ \oplus p_m^*\ } & \bigoplus_{1\leqslant i_0<\cdots<i_p\leqslant m} H^q_{\mathrm{BM}}(U^{m+1}_{i_0,\ldots,i_p,m+1})
\end{array}$$

[22] On rappelle que γ_m^* est la renormalisation donnée dans 6.6.5 du morphisme de liaison $c_m^* : H_{\mathrm{BM}}(U^m) \to H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}_0))[1-m]$. On a $\gamma_m(\omega) = (-1)^{|\omega|m+\frac{m(m-1)}{2}d_M}\, c_m(\omega)$.

6.7. Relèvement spectral de $p_m^* : H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(M)) \to H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(M))$

Si nous combinons la proposition précédente 6.6.8 aux théorèmes 6.6.6 et 6.5.2, nous obtenons les suites de représentations de groupes symétriques

$$\begin{array}{ccccccccccc}
H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_1) & \xrightarrow[p_1^*]{} & H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_2) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m) & \xrightarrow[p_m^*]{} & H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1}) & \longrightarrow \\
\gamma_1^* \uparrow \simeq [0] & & \gamma_2^* \uparrow \simeq [-1] & & \gamma_m^* \uparrow \simeq [1-m] & & \gamma_{m+1}^* \uparrow \simeq [-m] & \\
H_{\mathrm{BM}}(U^1) & \xrightarrow[q_1^*]{} & H_{\mathrm{BM}}(U^2)[1] & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & H_{\mathrm{BM}}(U^m)[m-1] & \xrightarrow[q_m^*]{} & H_{\mathrm{BM}}(U^{m+1})[m] & \longrightarrow \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & \\
I\!E_\sigma(\mathcal{U}^1) & \xrightarrow[I\!E_\sigma(q_1^*)]{} & I\!E_\sigma(\mathcal{U}^2)[1,0] & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m)[m-1,0] & \xrightarrow[I\!E_\sigma(q_m^*)]{} & I\!E_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})[m,0] & \longrightarrow
\end{array}$$

où la ligne centrale doit être tordue par les caractères $\boldsymbol{\sigma}_m$ correspondants. L'énoncé suivant est alors corollaire de 6.6.8 et 6.5.2.

6.7.1. Théorème. *Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété orientée de dimension $d_{\boldsymbol{M}}$.*

a) *Le morphisme de suites spectrales basiques*

$$I\!E(q_m^*) : (I\!E(\mathcal{U}^m)_r, d_r) \to (I\!E(\mathcal{U}^{m+1})_r, d_r)[1,0]\,,$$

définit, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, chaque couple (p,q) tel que $q = i + (m-(p+1))$ et chaque $r \geqslant 1$, une suite indexée par $m \in \mathbb{N}$

$$I\!E_\sigma(q_m^*)_r^{p,q} : I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m)_r^{p,q} \to I\!E_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})_r^{p+1,q}\,,$$

qui est un $\boldsymbol{FI}$-module. La somme de ces suites pour chaque $r \geqslant 1$ converge vers le bi-gradué du morphisme de $\mathcal{S}_m$-modules

$$p_m^* : H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})) \to H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}))$$

pour les filtrations régulières induites par les isomorphismes γ_m^* et γ_{m+1}^*.

b) *Sur la page $I\!E_\sigma(\mathcal{U}^*)_1$ les $\boldsymbol{FI}$-modules en question, sont naturellement isomorphes aux $\boldsymbol{FI}$-modules définis par les morphismes*

$$I\!E_\sigma(q_m^*)_1^{p,q} = \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m}(p_m^*)$$

qui rendent commutatif le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc}
I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \boldsymbol{\sigma} \otimes H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\ldots,m}) & \Longrightarrow & H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})) \\
\Big\downarrow I\!E_\sigma(q_m^*)_1^{p,q} \qquad \Big\downarrow \mathrm{ind}(p_m^*) & & \Big\downarrow p_m^* \\
I\!E_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p+1,q} = \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+2}}^{\mathcal{S}_{m+1}} \boldsymbol{\sigma} \otimes H^q_{\mathrm{BM}}(U^{m+1}_{m-p,\ldots,m+1}) & \Longrightarrow & H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}))
\end{array}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ indique que l'action de $\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathbf{1}$ est tordue $\boldsymbol{\sigma}_{m-(p+1)}$.

c) *Modulo les isomorphismes Ξ de* 6.5.2-(b)*, on a le diagramme commutatif d'espaces vectoriels*

$$\begin{array}{ccc} H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m}) & \xrightarrow{\quad p_m^* \quad} & H^q_{\mathrm{BM}}(U^{m+1}_{m-p,\dots,m+1}) \\ {\scriptstyle \Xi^m_{p+1}}\ \downarrow\simeq & & \uparrow{\scriptstyle (\Xi^{m+1}_{p+2})^{-1}} \\ \bigoplus_{f\in\mathcal{F}(p+1,m)} H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}(f)}(\boldsymbol{M}_{>0})) & \xrightarrow{\quad \bigoplus p_{p+1}^* \quad} & \bigoplus_{f^\bullet\in\mathcal{F}^\bullet(p+2,m+1)} H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}(f^\bullet)}(\boldsymbol{M}_{>0})) \end{array} \qquad (\diamond)$$

où nous avons noté

- $Q := q-(m-(p+1))\,d_{\boldsymbol{M}} = i-(m-(p+1))\,(d_{\boldsymbol{M}}-1)$.
- $\mathcal{F}(p+1,m) :=$ *ensemble des applications* $f:[\![1,m]\!]$ *telles que*
$$\big(x<f(x),\ si\ x<m-p\big)\quad et\quad \big(f(x)=x,\ autrement\big)\,.$$
- $\mathcal{F}^\bullet(p+2,m+1) :=$ *ensemble des applications* $f:[\![1,m+1]\!]$ *telles que*
$$\big(x<f(x)<m+1,\ si\ x<m-p\big)\quad et\quad \big(f(x)=x,\ autrement\big)\,.$$
- $\mathfrak{p}(f)$ *est la partition de* $[\![1,m]\!]$ *définie par les fibres de* f *et la fonction* $f^\bullet:[\![1,m+1]\!]$ *est le prolongement de* f *qui vérifie* $f^\bullet(m+1)=m+1$.

Démonstration. (a,b) L'identification des morphismes $\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)_1^{p,q}$ comme morphismes induits résulte de 6.5.2 qui montre que l'on a

$$\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \boldsymbol{\sigma}_{m-(p+1)}\otimes H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m})\,,$$

et comme $\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)_1^{p,q}$ est un morphisme de $\mathcal{S}_m$-modules (6.6.8), il est déterminé par sa restriction à $\boldsymbol{\sigma}_{m-(p+1)}\otimes H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m})$ qui n'est autre que $\mathrm{id}\otimes p_m^*$ où id désigne l'identité sur $\boldsymbol{\sigma}_{m-(p+1)}$. Le fait que l'on obtient ainsi un $\boldsymbol{FI}$-module est alors immédiat. A partir de là, on conclut grâce à la compatibilité des différentielles d_r avec les actions des groupes symétriques et au fait que la catégorie des $\boldsymbol{FI}$-modules est abélienne (7.2).

(c) Compte tenu de 6.5.2-(b), nous avons seulement à justifier la dernière ligne $(\diamond)$ du diagramme, somme directe des duaux des morphismes d'intégration sur les fibres

$$p_{m!} : H_{\mathrm{c}}(U^{m+1}_{m-p,\dots,m+1}) \to H_{\mathrm{c}}(U^m_{m-p,\dots,m})[-d_{\boldsymbol{M}_{>0}}]$$

où, en notant $\boldsymbol{F}_{p+2} := \boldsymbol{F}_{p+2}(\boldsymbol{M}_{>0})$ pour simplifier,

$$U^{m+1}_{m-p,\dots,m+1} = \Delta_{m+1}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}^{m-(p+1)}\times\boldsymbol{F}_{p+2})\,.$$

Avertissement. Dans un souci d'allégement de notations, nous allons omettre d'écrire '$H_{\mathrm{c}}(_)$' autour des termes des diagrammes qui vont suivre.

Pour tous $a,b\in\mathbb{N}$, le morphisme d'intégration sur la dernière coordonnée

$$p_! : \Delta_{a+b+1}(\boldsymbol{M}^a_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_{b+1}) \to \Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}^a_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_b) \qquad (\dagger)$$

est défini dans 6.2.4-(a) à travers l'inclusion ouverte

$$\begin{array}{ccc}\Delta_{a+b+1}(\boldsymbol{M}^a_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_{b+1}) & \xrightarrow{\ \iota\ } & \Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}^a_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_b)\times\boldsymbol{M}_{>0}\\ & {\scriptstyle p_!}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \int_{M_{>0}}} & \\ & \Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}^a_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_b)[-d_{\boldsymbol{M}_{>0}}] & \end{array}$$

et lorsque $a>0$, on est conduit à considérer le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}\Delta_{a+b+1}(\boldsymbol{M}^a_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_{b+1}) & \xrightarrow[\ \iota\ ]{} & \Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}^a_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_b)\times\boldsymbol{M}_{>0} & \xrightarrow[\int_{M_{>0}}]{} & \\ \downarrow{\scriptstyle \jmath} & & \downarrow{\scriptstyle \jmath\times\mathrm{id}} & & \\ \boldsymbol{M}_{\geqslant 0}\times\Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}^{a-1}_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_{b+1}) & \xrightarrow{\ \iota'\ } & \left[\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}\times\Delta_{a+b-1}(\boldsymbol{M}^{a-1}_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_b)\right]\times\boldsymbol{M}_{>0} & & \\ \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \rho\times\mathrm{id}} & & \\ \coprod_{\mathcal{F}(a+b,a+b+1)}\Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}^{a-1}_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_{b+1}) & \xrightarrow{\ \iota''\ } & \coprod_{\mathcal{F}(a+b-1,a+b)}\Delta_{a+b-1}(\boldsymbol{M}^{a-1}_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_b)\times\boldsymbol{M}_{>0} & \xrightarrow{\int_{M_{>0}}} & \\ \downarrow{\scriptstyle c}\,[+1] & & \downarrow{\scriptstyle c\times\mathrm{id}}\,[+1] & & \end{array}$$

où les colonnes sont les suites exactes longues de cohomologie à support compact habituelles dans nos théorèmes de scindage (3.1.1). Les termes de la deuxième ligne sont nuls puisque $\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}$ apparaît en facteur, les flèches de liaison c sont donc des isomorphismes et la question que nous cherchons à comprendre concerne l'interprétation de $p_!$ dans (†) en termes de la dernière ligne du diagramme. Or, la flèche en pointillé n'est pas tout à fait bien définie. En effet, les composantes du fermé $\coprod_{\mathcal{F}(a+b,a+b+1)}\Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}^{a-1}_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_{b+1})$ sont bien les traces des composantes de $\coprod_{\mathcal{F}(a+b-1,a+b)}\Delta_{a+b-1}(\boldsymbol{M}^{a-1}_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_b)\times\boldsymbol{M}_{>0}$ sur l'ouvert $\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}\times\Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}^{a-1}_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_{b+1})$, que l'on va noter $\mathbb{U}$ dans la suite, à l'exception près de celle indexée par la fonction $f_0:[\![a+b+1]\!]$ définie par $f_0(1)=a+b+1$, composante, par ailleurs, clairement fermée dans l'ouvert $\Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}^a_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_b)\times\boldsymbol{M}_{>0}$ que l'on va noter $\mathbb{V}$ dans la suite.

On a donc l'inclusion fermée

$$(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}\times\Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}^{a-1}_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_{b+1}))_{f_0}\subseteq\mathbb{U}\cap\mathbb{V}$$

et tout cocycle ω d'Alexander-Spanier (faisceau c-mou) à support compact de cette composante se prolonge en une cochaîne ϖ à support compact de $\mathbb{U}\cap\mathbb{V}$. Le morphisme de liaison donne alors $c(\omega)=d\varpi$, ce qui est un cocycle à support compact dans $\Delta_{a+b+1}(\boldsymbol{M}^a_{\geqslant 0}\times\boldsymbol{F}_{b+1})$. Or,

$$p_!(c(\omega))=\int_{\boldsymbol{M}_{>0}}\iota(c(\omega))=\int_{\boldsymbol{M}_{>0}}d\varpi=0\,,$$

puisque $\varpi\in\mathcal{Z}_{\mathrm{c}}(\mathbb{V})$ et que $\mathbb{V}$ est le domaine de définition de $\int_{\boldsymbol{M}_{>0}}$.

Ces remarques prouvent la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{\mathcal{F}(a+b,a+b+1)} \Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}^{a-1}\times\boldsymbol{F}_{b+1})[-1] & \xrightarrow{\iota''} & \coprod_{\mathcal{F}(a+b-1,a+b)} \Delta_{a+b-1}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}^{a-1}\times\boldsymbol{F}_{b})[-d_{\boldsymbol{M}_{>0}}][-1] \\
\downarrow \simeq c & & \downarrow \simeq c \\
\Delta_{a+b+1}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}^{a}\times\boldsymbol{F}_{b+1}) & \xrightarrow{p_!} & \Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}^{a}\times\boldsymbol{F}_{b})[-d_{\boldsymbol{M}_{>0}}]
\end{array}$$

où maintenant ι'' est bien définie. Sa valeur, qui dépend des composantes, vaut

$$\iota'' = \begin{cases} 0 \text{ sur } (\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}\times\Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}^{a-1}\times\boldsymbol{F}_{b+1}))_{f_0}\,, \\ p_! : \Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}^{a-1}\times\boldsymbol{F}_{b+1}) \to \Delta_{a+b-1}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}^{a-1}\times\boldsymbol{F}_{b})\,, \text{ autrement.} \end{cases}$$

L'itération de ces idées conduit au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{\mathcal{F}(b+1,a+b+1)} \boldsymbol{F}_{b+1}[-a] & \xrightarrow{\iota''} & \coprod_{\mathcal{F}(b,a+b)} \boldsymbol{F}_{b}[-d_{\boldsymbol{M}_{>0}}][-a] \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
\Delta_{a+b+1}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}^{a}\times\boldsymbol{F}_{b+1}) & \xrightarrow{p_!} & \Delta_{a+b}(\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}^{a}\times\boldsymbol{F}_{b})[-d_{\boldsymbol{M}_{>0}}]
\end{array}$$

où $\iota'' = 0$ sur les composantes indexées par les fonctions $f : [\![1,a+b+1]\!]$ telles que $|f^{-1}(a+b+1)| > 1$, et c'est l'intégration sur les fibres autrement.

En dualisant, on obtient la description de la ligne ($\diamond$) du diagramme du théorème pour la cohomologie de Borel-Moore. □

7. Stabilité des familles de représentations

7.1. Motivations

Le comportement lorsque $m \mapsto \infty$ des invariants associés aux espaces $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$, notamment leurs groupes d'homotopie, leurs nombres de Betti, les caractères de leurs cohomologies en tant que $\mathcal{S}_m$-modules, ont fait l'objet de très nombreux travaux. Un des résultats pionniers dans ces questions est dû à V.I. Arnold (*circa* 1970) et concerne la détermination de la cohomologie des groupes de tresses d'E. Artin (1925) à un moment où l'on savait, grâce aux travaux de Fadel-Fox-Neuwirth ([13,16], 1962), que les espaces $\boldsymbol{F}_m(\mathbb{C})$ et $\boldsymbol{BF}_m(\mathbb{C}) := \boldsymbol{F}_m(\mathbb{C})/\mathcal{S}_m$ étaient asphériques, de groupes fondamentaux $\Pi_1\boldsymbol{F}_m(\mathbb{C}) = P_m$: « *le groupe des tresses colorées à m brins* », et $\Pi_1\boldsymbol{BF}_m(\mathbb{C}) = \boldsymbol{B}_m$: « *le groupe des tresses non colorées à m brins* », et donc que les cohomologies des espaces $\boldsymbol{F}_m(\mathbb{C})$ et $\boldsymbol{BF}_m(\mathbb{C})$ étaient canoniquement isomorphes à celles des groupes de tresses. C'est ainsi que Arnold procède dans [1,2] où il énonce son « *théorème de stabilité* » , théorème qui établit que, pour chaque $i \in \mathbb{N}$ fixé, le morphisme naturel $H^i(\boldsymbol{BF}_m(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \to H^i(\boldsymbol{BF}_{m+1}(\mathbb{C});\mathbb{Z})$ est bijectif pour $m \geqslant 2i-2$. C'est un résultat remarquable que ne révèle pas la connaissance explicite du polynôme de Poincaré

de $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ (voir thm. 11.3.1). Parallèlement, le même phénomène de stabilité pour l'espace $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ ne se produit pour ainsi dire jamais, déjà si nous appliquons la formule de la remarque 4.2.2 pour $\boldsymbol{X}=\mathbb{C}$, nous voyons que $\mathcal{P}(\boldsymbol{F}_m(\mathbb{C}))(T)=(1+T)(1+2T)\cdots(1+(m-1)T)$ d'où $\mathrm{Betti}^1(\boldsymbol{F}_m(\mathbb{C}))=\binom{m}{2}$ (polynomiale en m tout de même !).

Il faut attendre les années 2011 pour comprendre le lien entre ces deux phénomènes grâce aux travaux de T. Church et B. Farb ([7,8]). En s'intéressant, non pas à la famille $\{\mathrm{Betti}^i(\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_m(\mathbb{C}))\}_m$, mais à la famille des représentations $\{\mathcal{S}_m{:}H^i(\boldsymbol{F}_m(\mathbb{C}))\}_m$, Church et Farb se livrent à des calculs explicites en s'appuyant sur les recherches de Lehrer ([26], 1987) qui donnaient déjà la « *polynomialité* » des caractères de cette famille (7.3.1), et sont conduits à conjecturer que les multiplicités des composantes irréductibles des représentations $\{\mathcal{S}_m{:}H^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))\}_m$ sont stationnaires (dans un sens qui sera précisé dans 7.4.1), de sorte que lorsque $\boldsymbol{X}$ est en plus de type fini, la polynomialité des caractères en découle moyennant un résultat classique de Macdonald (*cf.* 7.3.6, 1995). Church et Farb développent alors la théorie de « ***FI**-modules* » (7.2) et remarquent que le phénomène de multiplicités stationnaires pouvait s'expliquer comme conséquence de ce qu'ils ont appelé la « *stabilité* » (7.4.1) de la famille de morphismes $\{p_m^*:H^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))\to H^i(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{X}))\}_m$, ce qui s'avéra être effectivement le cas.

Théorème (Church [7], 2012). *Soit $\boldsymbol{X}$ une variété topologique, connexe et orientable. Pour $i\in\mathbb{N}$ fixé, la famille $\{p_m^*:H^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))\to H^i(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{X}))\}_m$ est stable pour $m\geqslant 2i$ si $\dim\boldsymbol{X}\geqslant 3$, et pour $m\geqslant 4i$ si $\dim\boldsymbol{X}=2$. Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont polynomiales et la famille $\{\mathrm{Betti}^i(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\mathcal{S}_m)\}_m$ est constante, sur les mêmes rangs.*

Le théorème de stabilité d'Arnold apparaît de lors comme le fait que la famille des sous-représentations triviales $\{H^i(\boldsymbol{F}_m(\mathbb{C}))^{\mathcal{S}_m}\}_m$ est stationnaire.

Les paragraphes qui suivent sont destinés à rappeler les bases de la théorie de ***FI***-modules ([10]) qui a servi à prouver le théorème de Church. Nous introduirons ensuite certains foncteurs d'induction dans la catégorie des ***FI***-modules qui vont nous permettre de généraliser le théorème de Church aux familles $\{\mathcal{S}_m{:}\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m\}_m$ où $\boldsymbol{X}$ est une pseudovariété orientable. On procédera dans un premier temps en supposant que $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique (thm. 9.2.3), puis, dans un deuxième temps, sans cette hypothèse (thm. 9.3.15) mais à l'aide d'un nouvel instrument : les suites spectrales basiques (6.5.2).

7.2. Catégorie des *FI*-modules

Suivant [10], on note ***FI*** la catégorie dont les objets sont les ensembles finis, et dont les morphismes sont les applications injectives. Si $\mathcal{A}$ est un anneau, on note $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])$ la catégorie dont les objets, les « $\mathcal{A}[\boldsymbol{FI}]$*-modules* » (et même simplement ***FI***-modules lorsque $\mathcal{A}$ est sous-entendu), sont les fonc-

teurs covariants $\mathcal{V} : \boldsymbol{FI} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ et dont les morphismes sont les transformations naturelles entre ces foncteurs. Si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont des $\boldsymbol{FI}$-modules, on note $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{FI}}(\mathcal{V},\mathcal{W})$ l'ensemble des morphismes de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{W}$.

Conventions et notations. Dans ce qui suit, on identifie pour tous $b \geqslant 0$

$$\mathcal{S}_m = \mathrm{Fix}_{\mathcal{S}_{m+b}}[\![m+1,m+b]\!] \quad \text{et} \quad \mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_b = \mathrm{Fix}_{\mathcal{S}_{m+b}}[\![1,m]\!]\,,$$

ce qui donne le sens à l'inclusion $\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_b \subseteq \mathcal{S}_{m+b}$.

Dans une notation $V_m \boxtimes \mathcal{A}_b$, on désigne par V_m un $\mathcal{S}_m$-module et par $\mathcal{A}_b$ la représentation triviale de $\mathcal{S}_b$ dans $\mathcal{A}$. Le produit tensoriel en question est alors le $\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_b$-module défini par $(\alpha,\beta)\cdot(v\otimes w) := (\alpha\cdot v, \beta\cdot w)$.

7.2.1. Une équivalence de catégories. La restriction d'un $\boldsymbol{FI}$-module à la sous-catégorie pleine des intervalles de la forme $[\![1,m]\!] \subseteq \mathbb{N}$ est une équivalence de catégories entre $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])$ et la catégorie des familles dénombrables $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \to V_{m+1}\}_m$, où les V_m sont des $\mathcal{A}[\mathcal{S}_m]$-modules et où les ϕ_m sont des morphismes de $\mathcal{A}[\mathcal{S}_m]$-modules dont les composées

$$\phi_{m+b,m} := \phi_{m+b} \circ \cdots \circ \phi_{m+1} \circ \phi_m\,, \quad \forall b \in \mathbb{N}\,, \tag{‡}$$

vérifient

$$\phi_{m+b,m}(V_m) \subseteq (V_{m+b})^{\mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_b}\,, \quad \forall m,b \in \mathbb{N}\,. \tag{◇}$$

Les morphismes $\phi_{m+b,m}$ sont les « *les morphismes de transition de* $\mathcal{V}$ », ils se factorisent suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} V_m & & \xrightarrow{\quad\phi_{m+b,m}\quad} & & V_{m+b} \\ & \searrow^{\iota} & & \nearrow_{\Phi_{m+b,m}} & \\ & & \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_m\times\mathcal{S}_b}^{\mathcal{S}_{m+b}}(V_m \boxtimes \mathcal{A}_b) & & \end{array} \tag{◇◇}$$

où $\iota : V_m \to V_m \boxtimes \mathcal{A}$ est le plongement $v \mapsto v \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ et où $\Phi_{m+b,m}$ est le morphisme de $\mathcal{A}[\mathcal{S}_{m+b}]$-modules induit ([23]).

Dans cette équivalence, un morphisme $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ de $\boldsymbol{FI}$-modules se voit comme une famille $\{f_m : V_m \to W_m\}_m$ de morphismes de $\mathcal{A}[\mathcal{S}_m]$-modules vérifiant $\phi_m \circ f_m = f_{m+1} \circ \phi_m$. Les familles $\{\ker(f_m)\}_m$ et $\{\mathrm{coker}(f_m)\}_m$

$$\begin{array}{ccccccc} \ker(f_m) & \hookrightarrow & V_m & \xrightarrow{f_m} & W_m & \twoheadrightarrow & \mathrm{coker}(f_m) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_m} & \oplus & \downarrow{\scriptstyle \phi_m} & & \downarrow \\ \ker(f_{m+1}) & \hookrightarrow & V_{m+1} & \xrightarrow[f_{m+1}]{} & W_{m+1} & \twoheadrightarrow & \mathrm{coker}(f_{m+1}) \end{array}$$

munies des morphismes de transition induits sont des $\boldsymbol{FI}$-modules et font de $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])$ une catégorie abélienne ([24]).

[23] La condition (◇) qui porte sur les $\mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_b$-invariants est vide pour $b = 1$ et n'est donc pas transitive, il suffit par contre qu'elle soit vérifiée pour $b = 2$ et tout $m \in \mathbb{N}$.

[24] Dans [33], Sam et Snowden donnent une équivalence de catégories explicite entre $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])$ et une catégorie de modules sur un anneau.

7.2.2. Troncatures de *FI*-modules. Soit $q \in \mathbb{N}$. Pour tout ***FI***-module $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \to V_m + 1\}$, on notera $\mathcal{V}_{\geqslant q} = \{W_m \to W_{m+1}\}$ le sous-***FI***-module de $\mathcal{V}$ avec $W_m := 0$ si $m \leqslant q-1$, et $W_m := V_m$ autrement.

On pose ensuite $\mathcal{V}_{\leqslant q-1} := \mathcal{V}/\mathcal{V}_{\geqslant q}$, d'où la suite exacte courte de ***FI***-modules

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{V}_{\geqslant q} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & V_q & \longrightarrow & V_{q+1} & \longrightarrow & V_{q+2} & \longrightarrow \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \| & & \| & \\
\mathcal{V} & \longrightarrow & V_{q-2} & \longrightarrow & V_{q-1} & \longrightarrow & V_q & \longrightarrow & V_{q+1} & \longrightarrow & V_{q+2} & \longrightarrow \\
\downarrow & & \| & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\mathcal{V}_{\leqslant q-1} & \longrightarrow & V_{q-2} & \longrightarrow & V_{q-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow
\end{array}$$

On notera $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])_{\geqslant q}$ (resp. $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])_{\leqslant q}$) la sous catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])$ dont les objets sont les ***FI***-modules tronqués $\mathcal{V}_{\geqslant q}$ (resp. $\mathcal{V}_{\leqslant q}$).

Les correspondances $\mathcal{V} \rightsquigarrow \mathcal{V}_{\geqslant q}$ et $\mathcal{V} \rightsquigarrow \mathcal{V}_{\leqslant q}$ sont clairement fonctorielles covariantes et exactes.

7.2.3. Les *FI*-modules $\mathcal{M}(a)$. Pour $0 < a \in \mathbb{N}$, on note $\mathbf{a} := [\![1,a]\!]$, et ensuite $\mathcal{M}(\mathbf{a}) :=$ le foncteur covariant représenté par $\mathbf{a}$, soit

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\mathbf{a}) : \ \boldsymbol{FI} &\rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{A}) \\
S &\mapsto\!\!\!\rightsquigarrow \mathcal{M}(\mathbf{a})_S := \mathcal{A}[\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{FI}}(\mathbf{a}, S)]
\end{aligned}$$

La famille $\{\phi_m : \mathcal{M}(\mathbf{a})_m \to \mathcal{M}(\mathbf{a})_{m+1}\}_m$ est alors caractérisée par

$$\begin{cases}
\text{si } b < 0, & \mathcal{M}(\mathbf{a})_{a+b} = 0 \\
\text{si } b \geqslant 0, & \mathcal{M}(\mathbf{a})_{a+b} = \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_a \times \mathcal{S}_b}^{\mathcal{S}_{a+b}} \mathcal{A}[\mathcal{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_b \,,
\end{cases}$$

et le morphisme de transition $\phi_{a+b} : \mathcal{M}(\mathbf{a})_{a+b} \to \mathcal{M}(\mathbf{a})_{a+b+1}$ est celui induit à partir de l'identification de $\mathcal{S}_a \times \mathcal{S}_b$-modules $k[\mathcal{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_b = k[\mathcal{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_{b+1}$,

$$\begin{array}{ccc}
k[\mathcal{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_b & = & k[\mathcal{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_{b+1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_a \times \mathcal{S}_b}^{\mathcal{S}_{a+b}} \mathcal{A}[\mathcal{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_b & \xrightarrow{\phi_{a+b}} & \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_a \times \mathcal{S}_{b+1}}^{\mathcal{S}_{a+b+1}} \mathcal{A}[\mathcal{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_{b+1}
\end{array}$$

où les flèches verticales désignent les inclusions canoniques.

7.2.4. Par le lemme de Yoneda, pour tout ***FI***-module $\mathcal{V}$ l'application

$$Y : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{FI}}(\mathcal{M}(\mathbf{a}), \mathcal{V}) \to V_a \,, \quad Y(f) = f(\mathrm{id}_{\mathbf{a}}) \,,$$

est bijective. Si $v \in V_a$, on note $\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}(v) := Y^{-1}(v)$, il s'agit du morphisme de foncteurs dont les valeurs $\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}(v)_{a+b} : \mathcal{M}(\mathbf{a})_{a+b} \to V_{a+b}$ sont

$$\begin{cases} \text{si } b < 0, & \mathrm{ev}_{\mathbf{a}}(v)_{a+b} = 0 \\ \text{si } b = 0, & \mathrm{ev}_{\mathbf{a}}(v)_a : \mathcal{A}[\mathcal{S}_a] \to V_a,\ \mathrm{ev}_{\mathbf{a}}(v)_a(\alpha) = \alpha \cdot v \\ \text{si } b > 0, & \mathrm{ev}_{\mathbf{a}}(v)_{a+b} \text{ est la composée :} \end{cases}$$

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_a \times \mathcal{S}_b}^{\mathcal{S}_{a+b}} \mathcal{A}[\mathcal{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_b \xrightarrow{\mathrm{ind}(\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}(v)_a)} \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_a \times \mathcal{S}_b}^{\mathcal{S}_{a+b}} V_a \boxtimes \mathcal{A}_b \xrightarrow{\Phi_{a+b,a}} V_{a+b}$$

7.2.5. Sous-*FI*-modules et *FI*-modules quotients. On appelle « *sous-**FI**-module* » d'un ***FI***-module $\mathcal{V}$ tout sous-foncteur $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. En termes des familles dénombrables $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \to V_{m+1}\}_m$ (7.2.1), l'inclusion $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ équivaut à la donnée d'une famille de sous-$\mathcal{S}_m$-modules $W_m \subseteq V_m$ vérifiant $\phi_m(W_m) \subseteq W_{m+1}$, auquel cas $\mathcal{W} := \{\phi_m|_{W_m} : W_m \to W_{m+1}\}$.

L'intersection d'une famille de sous-***FI***-modules est un sous-***FI***-module.

On définit dualement la notion de « ***FI**-module quotient* ».

7.2.6. Systèmes générateurs de *FI*-modules. Soit $\mathcal{V}$ un ***FI***-module. Pour tout sous-ensemble $\Sigma \subseteq \coprod_m V_m$, on appelle « *sous-**FI**-module engendré par* Σ » et on le note $\langle\Sigma\rangle$, l'intersection de la famille des sous-***FI***-modules $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ tels que $\Sigma \subseteq \coprod_m W_m$.

Pour $a \in \mathbb{N}$, notons $\Sigma_a := \Sigma \cap V_a$. D'après 7.2.3, chaque $s \in \Sigma_a$ détermine un et un unique morphisme de ***FI***-modules

$$\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}(s) : \mathcal{M}(\mathbf{a}) \to \mathcal{V}\,, \quad \mathrm{ev}_{\mathbf{a}}(s)(\mathrm{id}_{\mathbf{a}}) = s\,.$$

Le lemme suivant est alors immédiat.

Lemme ([10] 2.3.2). *Le sous-**FI**-module $\langle\Sigma\rangle \subseteq \mathcal{V}$ est l'image du morphisme*

$$\prod_{0<a\in\mathbb{N}, s\in\Sigma_a} \mathrm{ev}_{\mathbf{a}}(s) : \bigoplus_{0<a;s\in\Sigma_a} \mathcal{M}(\mathbf{a}) \to \mathcal{V}\,,$$

7.2.7. *FI*-modules de type fini. Soit $\mathcal{V}$ un ***FI***-module.

a) $\mathcal{V}$ est dit « *engendré en degrés $\leqslant d$* » si $V = \langle\Sigma\rangle$ avec $\Sigma \subseteq \coprod_{a\leqslant d} V_a$.

b) $\mathcal{V}$ est dit « *de type fini* » si $\mathcal{V} = \langle\Sigma\rangle$ avec Σ fini.

7.2.8. Proposition ([10] Finitude et noethérianité)

a) *Un ***FI**-module $\mathcal{V}$ est de type fini si et seulement si, il admet une surjection $\bigoplus_i \mathcal{M}(\mathbf{a}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{V}$ pour une certaine famille finie $\{\mathbf{a}_i\}$*

b) *Un quotient d'un ***FI**-module de type fini est de type fini.*

c) *Si l'anneau $\mathcal{A}$ des coefficients est noethérien, tout sous-**FI**-module d'un ***FI**-module de type fini est encore de type fini.* ([25])

[25] Prouvé dans [10] en supposant $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{A}$, et dans [9] en général.

7.3. Caractères polynomiaux et stabilité des *FI*-modules

L'anneau $\mathcal{A}$ est un corps k de caractéristique nulle.

7.3.1. Caractères (éventuellement) polynomiaux. Si $\mathcal{W} := \{\mathcal{S}_m : W_m\}_m$ est une famille de représentations de dimensions finies, on note $\chi(\mathcal{W}) := \{\chi_{\mathcal{S}_m}(W_m)\}_m$ la famille de leurs caractères. Pour chaque m, il existe un polynôme $P_m \in k[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m]$ tel que pour $\alpha \in \mathcal{S}_m$, on a

$$\chi_{\mathcal{S}_m}(W_m)(\alpha) = P_m(\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m)(\alpha)\,,$$

où $\mathsf{X}_i(\alpha)$ est le nombre des cycles de longueur i dans la décomposition de α en produit de cycles disjoints. La famille $\chi(\mathcal{W})$ peut ainsi être décrite par des familles $\{P_m\}_m$ de polynômes de l'algèbre $k[\overline{\mathsf{X}}] = k[\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots]$.

Définition. La famille de représentations $\mathcal{W}$ est dite « *à caractère éventuellement polynomial* » s'il existe $N, r \in \mathbb{N}$ et $P \in k[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_r]$ tels que

$$\chi_{\mathcal{S}_m}(W_m)(\alpha) = P(\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_r)(\alpha)\,, \quad \forall m \geqslant N\,,\ \forall \alpha \in \mathcal{S}_m\,. \qquad (*)$$

On dit alors que $\chi(\mathcal{W})$ « *est polynomiale pour $m \geqslant N$* ».

7.3.2. Remarques

a) Un caractère du groupe $\mathcal{S}_m$ admet plusieurs écritures dans $k[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m]$ (*cf.* 11.4.3), par contre, lorsque la condition $(*)$ est satisfaite, le polynôme P est unique (*cf.* ([39]), p. 144).

b) Notons $\dim_k(\mathcal{W}) := \{\dim_k W_m\}_m$. Lorsque $\chi(\mathcal{W})$ est éventuellement polynomiale, on a, pour m assez grand,

$$\dim_k W_m = P(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_r)(\mathbb{I}_m) = P(m, 0, \ldots, 0)$$

et la suite $\dim_k(\mathcal{W})$ est éventuellement polynomiale en m.

7.3.3. Représentations irréductibles $V(\boldsymbol{\lambda})_m$. Sous l'hypothèse en cours de $\mathrm{car}(k) = 0$, les représentations des groupes symétriques sont semi-simples et *définies sur* $\mathbb{Q}$. Les décompositions en composantes irréductibles sont alors "indépendantes" de $k \supseteq \mathbb{Q}$.

7.3.4. Reparamétrisation des représentions irréductibles

Pour $0 < a \in \mathbb{N}$, les représentations irréductibles de $\mathcal{S}_a$ sur k sont paramétrées par les décompositions $\lambda \vdash a$. On note V_λ la représentation irréductible de $\mathcal{S}_a$ correspondante à $\lambda \vdash a$.

Définition. Soit $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_\ell) \vdash a$. Pour tout $m \geqslant |\lambda| + \lambda_1$, on note $\lambda[m] \vdash m$ la décomposition $(m - |\lambda|, \lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \cline{1-2} \cdot \\ \cline{1-1} \end{array} \right\} \quad \longmapsto \quad \lambda[m] := \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & & & \\ \cline{1-4} & \\ \cline{1-1} \end{array} \cdots \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{l} (m - |\lambda|) \\ (\lambda_1) \\ \vdots \\ (\lambda_\ell) \end{array},$$

Pour $m \geqslant |\lambda| + \lambda_1$, on note $V(\lambda)_m$ la représentation irréductible de $\mathcal{S}_m$ correspondante à $\lambda[m]$, on pose donc :

$$\boxed{V(\lambda)_m := V_{\lambda[m]}}$$

Les notations $V(0)_m$ et $V(1)_m = V(\square)_m$ désignent ainsi respectivement la représentation triviale et la représentation standard de dimension $m-1$ de $\mathcal{S}_m$.

7.3.5. Remarques

a) Une décomposition $\mu \vdash m$ s'écrit d'une et d'une *unique* manière sous la forme $\mu = \lambda[m]$. Si $\mu = (\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_\ell)$, on a $\lambda = (\mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_\ell)$ et $\lambda \vdash a := m - \lambda_1$ (y compris $a = 0$).

b) Dans la notation '$\lambda[m]$', le nombre 'm', qui vérifie $m \geqslant |\lambda| + \lambda_1$, indique la taille finale du diagramme. On a

$$\ell(\lambda[m]) = \ell(\lambda) + 1\,,$$

et si $m \leqslant n$, on a $(\lambda[m])[n] \neq \lambda[n]$.

c) Si $\lambda[m] \in \mathcal{Y}_\ell(m)$, on a $|\lambda| \leqslant m - \left\lceil \frac{m}{\ell} \right\rceil$. ([26])

7.3.6. Les familles $\{V(\lambda)_m\}_m$ apparaissaient déjà dans le livre de Macdonald [29] comme exemple de famille de représentations à caractère polynomial. L'auteur y établit par un calcul explicite le fait suivant (ex. I.7.14, p. 122).

Proposition ([29]). Pour $\lambda \vdash a$, il existe $P_\lambda \in k[\overline{X}]$ tel que, pour tout $m \geqslant |\lambda| + \lambda_1$, on a

$$P_\lambda(\alpha) = \chi_{\mathcal{S}_m}(V(\lambda)_m)(\alpha)\,, \quad \forall \alpha \in \mathcal{S}_m.$$

7.4. Monotonie et stabilité des *FI*-modules

7.4.1. Stabilité. Suivant [10], un ***FI***-module $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \to V_{m+1}\}$ est dit « *(uniformément) stationnaire* », s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que les conditions suivantes sont satisfaites pour $m \geqslant N$.

a) *Injectivité.* Les applications $\phi_m : V_m \to V_{m+1}$ sont injectives.

b) *Surjectivité.* V_{m+1} est engendré en tant que $\mathcal{S}_{m+1}$-module par $\mathrm{im}(\phi_m)$.

c) *Multiplicités.* ([27]) Dans la décomposition en représentations irréductibles

$$V_m = \bigoplus\nolimits_\lambda c(\lambda)_m\, V(\lambda)_m\,,$$

les multiplicités $c(\lambda)_m$ ne dépendent pas de m.

[26] On désigne par $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ la partie entière par excès de $x \in \mathbb{R}$, *i.e.* $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$. Dans (c), le terme $\lceil m/\ell \rceil$ représente le plus petit nombre de colonnes d'un diagramme de Young de taille m possédant ℓ lignes, il faudrait donc convenir que $\lceil 0/0 \rceil = 0$.

[27] L'adverbe "uniformément" est utilisé dans [10] pour distinguer du cas où la condition de stabilité de multiplicités (c) est demandée séparément pour chaque λ.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dit que $\mathcal{V}$ est un ***FI***-module « *stable pour* $m \geqslant N$ ». Le « *rang de stabilité de* $\mathcal{V}$ », noté $\mathrm{rg_s}(\mathcal{V})$, est la borne inférieure de tels N, et si $\mathcal{V}$ n'est pas stationnaire, on pose $\mathrm{rg_s}(\mathcal{V}) = +\infty$.

Fait : la famille de caractères $\chi(\mathcal{V})$ est polynomiale pour $m \geqslant \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V})$ (7.3.6).

7.4.2. Monotonie. Suivant la terminologie de Church ([7]), un ***FI***-module $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \to V_{m+1}\}_m$ est dit « *monotone pour* $m \geqslant N$ » lorsque pour tout $m \geqslant N$ et tout $W_m \subseteq V_m$ isomorphe à $V(\lambda)_m^{\oplus k}$ pour certain λ et k, le sous-$\mathcal{S}_{m+1}$-module $\mathcal{S}_{m+1} \cdot \phi_m(W) \subseteq V_{m+1}$ contient un sous-module isomorphe à $V(\lambda)_{m+1}^{\oplus k}$. On notera $\mathrm{rg_m}(\mathcal{V})$ le plus petit des ces N.

Fait : les morphismes de transition de $\mathcal{V}$ sont injectifs pour $m \geqslant \mathrm{rg_m}(\mathcal{V})$.

7.4.3. Lemme et définition. *On appellera* « rang de monotonie et stabilité » *d'un* ***FI***-*module* $\mathcal{V}$*, le nombre*

$$\boxed{\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}) := \sup\{\mathrm{rg_m}(\mathcal{V}), \mathrm{rg_s}(\mathcal{V})\}}$$

Pour tout ***FI***-*module* $\mathcal{V}$ *et tout* $s \in \mathbb{N}$*, on a* $\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}) \leqslant \sup\{\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}_{\geqslant s}), s\}$*, et pour* $\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}_{\geqslant s})$*, seul deux cas sont possibles*

i) $\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}_{\geqslant s}) = \sup\{\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}), s\}$ *, ou bien*

ii) $\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}_{\geqslant s}) = 0$ *, auquel cas* $\mathcal{V}_{\geqslant \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V})} = 0$ *et* $s \geqslant \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V})$.

Démonstration. Notons $r := \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V})$. L'assertion (a) est claire et immédiate lorsque $\mathcal{V}_{\geqslant r} \neq 0$ et aussi lorsque $\mathcal{V}_{\geqslant r} = 0$ et que $s < r$. Le cas restant est celui où $\mathcal{V}_{\geqslant r} = 0$ et que $s \geqslant r$, cas auquel $\mathcal{V}_{\geqslant s} = 0$ et donc $\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}_{\geqslant s}) = 0$. □

7.4.4. Proposition. *Dans les énoncés qui suivent, 'monotone' est un raccourci pour 'monotone pour* $m \geqslant N$*', et de même pour 'monotone-stable'.*

a) *Un sous-****FI****-module d'un* ***FI****-module monotone est monotone.*

b) *Tout quotient monotone* $\mathcal{Q}$ *d'un* ***FI****-module monotone-stable* $\mathcal{V}$ *est monotone-stable ainsi que le noyau de la surjection canonique* $\nu : \mathcal{V} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$.

c) *Soit* $\mathcal{W} \to \mathcal{V} \to \mathcal{Q} \to 0$ *une suite exacte de* ***FI****-modules où* $\mathcal{W}$ *est monotone-stable. Alors, si* $\mathcal{V}$ *est monotone (resp. monotone-stable),* $\mathcal{Q}$ *l'est aussi.*

d) *Soit* $0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{V} \to \mathcal{Q} \to 0$ *une suite exacte de* ***FI****-modules. Alors Si* $\mathcal{K}$ *et* $\mathcal{Q}$ *sont monotones (resp. monotones-stables),* $\mathcal{V}$ *l'est aussi.*

e) *Soit* $\cdots \to \mathcal{V}_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \mathcal{V}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{V}_1 \to \cdots$ *un complexe de* ***FI****-modules. Alors*

   i) *Si* $\mathcal{V}_{-1}$ *est monotone-stable et* $\mathcal{V}_0$ *est monotone,* $H^0(\mathcal{V}_*)$ *est monotone.*

   ii) *Si* $\mathcal{V}_{-1}$ *et* $\mathcal{V}_0$ *sont monotones-stables et* $\mathcal{V}_1$ *est monotone,* $H^0(\mathcal{V}_*)$ *est monotone-stable.*

Démonstration. (a) Immédiat d'après la définition de monotonie.

(b) Le noyau $\mathcal{K} := \ker(\nu)$ est monotone d'après (a). La monotonie assure la condition d'*injectivité* 7.4.1-(a) pour $\mathcal{K}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{Q}$, mais aussi le fait que les multiplicités $c(\lambda)_m$ pour K_m, V_m et Q_m sont non décroissantes pour $m \geqslant N$. Il s'ensuit que si $\mathcal{V}$ est monotone-stable, les familles de multiplicités sont constantes et la condition de *multiplicités* 7.4.1-(c) est satisfaite. Enfin, la condition de *surjectivité* 7.4.1-(b) est une conséquence logique des propriétés de *monotonie* et de *multiplicités constantes*.

(c) Pour la monotonie, il suffit, pour λ et $n \geqslant N$ donnés, de se restreindre au sous-***FI***-module $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$ engendré par $V(\lambda)_n^{\oplus k} \subseteq Q_n$. On note $\mathcal{V}'$ le sous-***FI***-module de $\mathcal{V}$ défini par$V'_m = \pi_m^{-1}(Q'_m)$, d'où la suite exacte $\mathcal{W} \to \mathcal{V}' \to \mathcal{Q}' \to 0$ avec $\mathcal{V}'$ monotone d'après (a). On considère ensuite le diagramme des morphismes de transition restreint aux composantes λ-isotypiques en n

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{K} & & V(\lambda)_n^{\oplus l} \xrightarrow{\phi_n} K''_n \subseteq K_{n+1} \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \qquad\qquad \big\downarrow \\
\mathcal{V}' & & V(\lambda)_n^{\oplus k} \oplus V(\lambda)_n^{\oplus l} \xrightarrow{\phi_n} V''_n \subseteq V'_{n+1} \\
{\scriptstyle\nu}\big\downarrow & & \big\downarrow \qquad\qquad \big\downarrow \\
\mathcal{Q}' & & V(\lambda)_n^{\oplus k} \xrightarrow{\phi_n} Q''_n \subseteq Q'_{n+1}
\end{array}$$

La composante λ-isotypique de $Q''_n := \mathcal{S}_{n+1} \cdot \phi_n(\mathcal{V}(\lambda)_n^{\oplus k}) \subseteq Q'_{n+1}$ est celle de $V''_n := \mathcal{S}_{n+1} \cdot \phi_n(\mathcal{V}(\lambda)_n^{\oplus k+l})$ modulo celle de $K''_n := \mathcal{S}_{n+1} \cdot \phi_n(\mathcal{V}(\lambda)_n^{\oplus l})$. Or, cette dernière est de multiplicité exactement l puisque $\mathcal{K}$ est supposé monotone-stable, tandis que celle en V''_n est de multiplicité $\geqslant k+l$ puisque $\mathcal{V}'$ est supposée (seulement) monotone. Par conséquent $\mathcal{Q}$ vérifie la condition de monotonie pour λ en n. Cette conclusion étant valable pour tout $n \geqslant N$ et tout λ, le ***FI***-module $\mathcal{Q}$ est bien monotone.

Maintenant, si l'on suppose $\mathcal{V}$ monotone *et* stable, $\mathcal{Q}$ est monotone d'après ce qui précède et, donc, monotone-stable par (b).

(d). Même type de raisonnements que pour (c).

(e). (i) Si $\mathcal{V}_0$ est monotone, $\ker(d_0)$ est monotone par (a), $\mathrm{im}(d_{-1})$ est monotone-stable par (b), et on applique (c) à $\mathrm{im}(d_{-1}) \hookrightarrow \ker(d_0) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{V}_*)$. (ii) Si $\mathcal{V}_0$ est monotone-stable et que $\mathcal{V}_1$ est monotone, $\ker(d_0)$ est monotone-stable par (a) et $H^0(\mathcal{V}_*)$ est monotone-stable à nouveau par (c). □

La proposition suivante est une reformulation des résultats de Church concernant les concepts de monotonie et de stabilité (*loc.cit.* prop. 2.5, p. 475).

7.4.5. Corollaire

a) *La sous-catégorie pleine* $\mathrm{Mod}_{\mathrm{rg_m} \leqslant N}(k[\mathbf{FI}])$ *des* ***FI****-modules monotones pour* $m \geqslant N$*, est stable par extensions dans* $\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])$.

b) *La sous-catégorie pleine* $\mathrm{Mod}_{\mathrm{rg_{ms}}\leqslant N}(k[\mathbf{FI}])$ *des* ***FI****-modules monotones et stables pour* $m \geqslant N$*, est une sous-catégorie abélienne et stable par extensions dans* $\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])$*. En particulier,*

i) *Si* $(\mathcal{V}_*, d_*)$ *est un complexe de* $\mathrm{Mod}_{\mathrm{rg_{ms}}\leqslant N}(k[\mathbf{FI}])$*, ses* ***FI****-modules de cohomologie* $h^i(\mathcal{V}_*, d_*)$ *vérifient aussi* $\mathrm{rg_{ms}}(h^i(\mathcal{V}_*, d_*)) \leqslant N$*.*

ii) *Dans le groupe* $K_0(\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]))$*, un* ***FI****-module* $\mathcal{V}$ *appartient au sous-groupe* $K_0(\mathrm{Mod}_{\mathrm{rg_{ms}}\leqslant N}(k[\mathbf{FI}]))$*, si et seulement si* $\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}) \leqslant N$*.*

7.4.6. Commentaire. Un théorème important de la théorie de Church et Farb établit l'équivalence pour un ***FI***-module entre le fait d'être de *type fini* et être *éventuellement monotone et stable* et (donc) à caractère polynomial ([10], thm. 1.13), mais ce type d'affirmation, de nature uniquement qualitative, ne renseigne pas sur les valeurs des rangs concernés. Les notions de « *poids* » et de « *degré de stabilité* » d'un ***FI***-module ont été introduites dans le but de préciser cette question (*cf.* 7.9.8). Les sections 7.5–7.9 qui vont suivre rappellent ces notions.

7.5. Poids d'un *FI*-module

7.5.1. Règles de branchement pour les représentations de $\mathcal{S}_m$. Elles expliquent les manipulations à effectuer sur le diagramme de Young μ correspondant à une représentation simple V_μ d'un groupe symétrique, pour décrire les composantes irréductibles de ses induits et ses restrictions. Le lemme suivant rappelle ces règles ([10], lemma 3.2.3). ([28])

7.5.2. Lemme. *Le corps* k *est de caractéristique nulle.*

a) [Règle de Pieri] *Soit* V_ν *la représentation irréductible de* $\mathcal{S}_a$ *correspondante à un diagramme de Young* $\nu \vdash a$*. On a :*

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_b\times\mathcal{S}_a}^{\mathcal{S}_{a+b}} k_b \boxtimes V_\nu \sim \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_a\times\mathcal{S}_b}^{\mathcal{S}_{a+b}} V_\nu \boxtimes k_b = \bigoplus\nolimits_{\mu\vdash a+b} V_\mu\,,$$

où les diagrammes $\mu \vdash a+b$ *sont ceux qui s'obtiennent en rajoutant une boite sur* b *colonnes distinctes du diagramme* ν*.*

b) *Soit* V_μ *la représentation irréductible de* $\mathcal{S}_{a+b}$ *correspondante à un diagramme de Young* $\mu \vdash a+b$*. On a :*

$$\left(\mathrm{Res}_{\mathcal{S}_a\times\mathcal{S}_b}^{\mathcal{S}_{a+b}} V_\mu\right)_{\mathcal{S}_b} = \bigoplus\nolimits_{\nu\vdash a} V_\nu\,,$$

où les diagrammes $\nu \vdash a$ *sont ceux qui s'obtiennent en enlevant une boite sur* b *colonnes distinctes du diagramme* μ*.*

[28] Une bonne référence pour ces questions est [18], exercices 4.42-45, pp. 57-59. Les règles de branchement découlent plus généralement de la règle de Littlewood-Richardson *loc.cit.* appendice A, eq. (A.8) p. 456.

7.5.3. Définitions

– Soit $m > 0$. Le « *poids* » d'un $\mathcal{S}_m$-module W, noté $\mathcal{P}(W)$, est le plus grand des $|\lambda|$ tels que $V_{\lambda[m]}$ est facteur irréductible de W. Si $W = 0$, on pose $\mathcal{P}(W) := 0$. On a toujours $\mathcal{P}(W) < m$ (7.3.5(c)).

– Le « *poids* » d'un ***FI***-module $\mathcal{V} = \{V_m\}$, noté $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, est la borne supérieure de l'ensemble $\{\mathcal{P}(V_m)\}$ dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

7.5.4. Proposition. *Pour $\ell, a \in \mathbb{N}$, soit $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_\ell) \vdash \ell + a$ et notons $\underline{\ell} := \#\{i \mid \lambda_i > 1\}$. Pour tout $\mathcal{S}_\ell$-module W, on a*

$$\boxed{\mathcal{P}\left(\boldsymbol{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_{\ell+a}} W\right) \leqslant \mathcal{P}(W) + \underline{\ell} + a}$$

Démonstration. On a

$$\mathcal{P}_\lambda \trianglelefteq \left(S_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\lambda_{\underline{\ell}}} \times \mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}\right) \trianglelefteq_{(1)} N_{\mathcal{S}_{|\lambda|}} \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_\lambda\,, \tag{$\dagger$}$$

d'où une surjection de $\mathcal{S}_{|\lambda|}$-modules

$$M := \mathrm{ind}_{S_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\lambda_{\underline{\ell}}} \times \mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_{|\lambda|}} W \twoheadrightarrow \mathrm{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_{|\lambda|}} W\,. \tag{$\ddagger$}$$

(C'est même un isomorphisme lorsque $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\underline{\ell}})$ est strictement décroissante, car, dans ce cas, l'inclusion $\trianglelefteq_{(1)}$ dans ($\dagger$) est une égalité.) On remarque alors que le terme de gauche de ($\ddagger$) n'est autre que le $\mathcal{S}_{\ell+a}$-module

$$M = \mathrm{ind}_{S_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\lambda_{\underline{\ell}}} \times \mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{\underline{\ell}} + \ell - \underline{\ell}}} k_{\lambda_1} \boxtimes \cdots \boxtimes k_{\lambda_{\underline{\ell}}} \boxtimes \mathrm{Res}_{\mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_\ell} W\,,$$

puisque dans l'action de $S_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\lambda_{\underline{\ell}}} \times \mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}$ à travers G_λ, les $\mathcal{S}_{\lambda_i}$ agissent trivialement sur W. L'itération de la règle de Pieri 7.5.2-(a) conduit alors à la majoration

$$\mathcal{P}(M) \leqslant \lambda_1 + \cdots + \lambda_{\underline{\ell}} + \mathcal{P}(\mathrm{Res}_{\mathbf{1}_{\underline{\ell}} \times \mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_\ell} W)\,,$$

avec $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{\underline{\ell}} = \underline{\ell} + a$ et où

$$\mathcal{P}(\mathrm{Res}_{\mathbf{1}_{\underline{\ell}} \times \mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_\ell} W) \leqslant \mathcal{P}(W)\,. \tag{$\diamond$}$$

En effet, un cas particulier de 7.5.2-(b) dit que $\mathcal{P}(\mathrm{Res}_{\mathbf{1}_1 \times \mathcal{S}_n}^{\mathcal{S}_{1+n}} M) \leqslant \mathcal{P}(M)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\mathcal{S}_{1+n}$-module M, ce qui conduit à ($\diamond$) par itération. On a donc montré que $\mathcal{P}(M) \leqslant \mathcal{P}(W) + \underline{\ell} + a$ et la proposition résulte puisque $\mathcal{P}(M)$ majore le poids des quotients de M, en particulier ($\ddagger$). □

7.5.5. Remarque. Dans 7.5.4, l'égalité $\mathcal{P}\left(\mathrm{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_{|\lambda|}} W\right) = \mathcal{P}(W) + \underline{\ell} + a$ peut être atteinte. En effet, soit $W = V(\nu)_\ell$. Par la règle 7.5.2-(b), $V(\nu)_{\ell-\underline{\ell}}$ est facteur de $\mathrm{Res}_{\mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_\ell} V(\nu)_\ell$ si et seulement si

$$\ell - \underline{\ell} - |\nu| \geqslant \nu_1\,, \tag{$*$}$$

auquel cas $\mathcal{P}\left(\mathrm{Res}_{\mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_\ell} V(\nu)_\ell\right) = |\nu|$ est le plus grand poids possible.

Notons $M := \mathrm{ind}_{S_{\lambda_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{\lambda_{\underline{\ell}}}\times\mathfrak{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathfrak{S}_{|\lambda|}} V(\nu)_{\ell-\underline{\ell}}$. Par ce qui précède et par itération de la règle de Pieri 7.5.2-(a), on aura $\mathcal{P}(M) = |\nu| + \underline{\ell} + a$, si et seulement si $\ell - \underline{\ell} - |\nu| \geqslant \sup\{\nu_1, \lambda_1\}$. Or, cette condition est vérifiée si $\lambda = (\nu_1, \nu_1 - 1, \nu_1 - 2, \ldots, 1, \ldots, 1)$, auquel cas $\underline{\ell} = \nu_1 - 1$ et $(*)$ est vérifiée dès que $\ell \geqslant |\nu| + 2\nu_1 - 1$. Enfin, pour un tel λ, on a bien $\mathfrak{S}_\lambda = \mathcal{P}_\lambda$ et donc $\mathrm{ind}_{G_\lambda}^{\mathfrak{S}_{|\lambda|}} V(\nu)_\ell = M$.

7.5.6. Scindage d'un *FI*-module par le poids. Soit

$$W_m = \bigoplus\nolimits_{|\mu|<m} c(\mu)_m V(\mu)_m$$

la décomposition en facteurs irréductibles d'un $\mathfrak{S}_m$-module W_m.

Pour $t \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_m^{(\geqslant t)} := \bigoplus\nolimits_{|\mu|\geqslant t} c(\mu)_m V(\mu)_m \,,$$

et *mutatis mutandis* pour $W_m^{(>t)}$, $W_m^{(\leqslant t)}$, $W_m^{(<t)}$ et $W_m^{(=t)}$, aussi noté $W_m^{(t)}$.

7.5.7. Proposition et définitions. *Soit $\mathcal{W} := \{\phi_m : W_m \to W_{m+1}\}_m$ un **FI**-module.*

a) *On a $\phi_m(W_m^{>t}) \subseteq W_{m+1}^{>t}$ pour tout $t \in \mathbb{N}$. On définit alors*

   i) *le sous-**FI**-module $\mathcal{W}^{(>t)} \subseteq \mathcal{W}$ déterminé par les restrictions $\phi_m^{(>t)}$ des morphismes de transition ϕ_m aux sous-modules $W_m^{(>t)}$, soit*

$$\mathcal{W}^{(>t)} := \left\{\phi_m^{(>t)} : W_m^{(>t)} \to W_{m+1}^{(>t)}\right\}_m \,;$$

   ii) *le **FI**-module quotient $\mathcal{W}/\mathcal{W}^{(>t)}$*

$$\mathcal{W}^{(\leqslant t)} := \left\{\phi_m^{(\leqslant t)} : W_m^{(\leqslant t)} \to W_{m+1}^{(\leqslant t)}\right\}_m := \frac{\mathcal{W}}{\mathcal{W}^{(>t)}} \,;$$

   iii) *le **FI**-module $\mathcal{W}^{(t)}$ sous-quotient de $\mathcal{W}$* « de poids unique t »

$$\mathcal{W}^{(t)} := \left\{\phi_m^{(t)} : W_m^{(t)} \to W_{m+1}^{(t)}\right\}_m := \frac{\mathcal{W}^{\geqslant t}}{\mathcal{W}^{>t}} \,.$$

   (Dans tous les cas, on aura remarqué l'abus de notation pour les morphismes de transition induits…)

b) *Un **FI**-module $\mathcal{W}$ tel que $\mathcal{P}(\mathcal{W}) < +\infty$, est extension successive de ses **FI**-modules à poids unique $\mathcal{W}^{(t)}$, $t \leqslant \mathcal{P}(\mathcal{W})$.*

c) *On a $\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{W}) = \sup\left\{\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{W}^{(>t)}), \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{W}^{(\leqslant t)})\right\}$, $\forall t \in \mathbb{N}$. En particulier*

$$\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{W}) = \sup\left\{\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{W}^{(t)}) \;\middle|\; t \in \mathbb{N}\right\}.$$

   Et de même avec $\mathrm{rg_m}$ à la place de $\mathrm{rg_{ms}}$.

Démonstration. (a) Si $V(\mu)_m$ est un facteur irréductible de W_m, le sous-$\mathcal{S}_{m+1}$-module engendré par $\phi_m(V(\mu)_m)$ est un quotient de $\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} V(\mu)_m$. Or, la règle de Pieri 7.5.2-(a) stipule que les composantes irréductibles de $\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} V(\mu)_m$ sont les $V(\nu)_{m+1}$ dont le diagramme de Young est obtenu en rajoutant une boite sur une colonne du diagramme de $V(\mu)_m$. Ces composantes sont donc de multiplicité 1 et de poids $|\nu| \geqslant |\mu|$, (avec égalité $|\nu| = |\mu|$ si et seulement si $\mu = \nu$). Ceci établit l'inclusion $\phi_m(W_m^{>t}) \subseteq W_{m+1}^{>t}$. La suite de (a) est alors immédiate.

(b) Lorsque $t := \mathcal{P}(\mathcal{W}) < +\infty$, on a $\mathcal{W}^{(\geqslant t)} \neq 0$ et $\mathcal{W}^{(>t)} = 0$ auquel cas $\mathcal{W}^{(\geqslant t)} = \mathcal{W}^{(t)}$. On donc la suite exacte courte de ***FI***-modules

$$0 \to \mathcal{W}^{(t)} \hookrightarrow \mathcal{W} \to \mathcal{W}^{(<t)} = \mathcal{W}/\mathcal{W}^{\geqslant t} \to 0$$

où, par construction, $\mathcal{P}(\mathcal{W}^{(<t)}) < t$. Un raisonnement par induction sur le poids termine la preuve.

(c) On a $\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{W}) = \sup\left\{\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{W}^{(>t)}), \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{W}^{(\leqslant t)})\right\}$ par la définition même de $\mathrm{rg_{ms}}$. L'égalité $\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{W}) = \sup\left\{\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{W}^{(t)}) \;\middle|\; t \in \mathbb{N}\right\}$ s'ensuit par (b) et par la stabilité par extensions de $\mathrm{Mod}_{\mathrm{rg_{ms}} \leqslant N}(k[\mathbf{FI}])$ (7.4.5-b). La preuve du cas $\mathrm{rg_m}$ à la place de $\mathrm{rg_{ms}}$ est essentiellement la même moyennant 7.4.5-(a). □

7.6. Les *FI*-modules $\mathcal{M}_a^{\boldsymbol{H}}(W)$. Pour tout $0 < a \in \mathbb{N}$ et tout sous-groupe $\boldsymbol{H} \subseteq \mathcal{S}_a$, on définit le foncteur

$$\mathcal{M}_a^{\boldsymbol{H}} : \mathrm{Mod}(k[H]) \to \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant a}$$

par

$$\mathcal{M}_a^{\boldsymbol{H}}(W)_{a+b} = \begin{cases} 0\,, \text{ si } b < 0, \\ \mathrm{ind}_{H \times \mathcal{S}_b}^{\mathcal{S}_{a+b}} W \boxtimes k_b\,, \text{ si } b \geqslant 0. \end{cases}$$

Pour tous $0 \leqslant b_1 \leqslant b_2$, l'égalité $W \boxtimes k_{b_1} = W \boxtimes k_{b_2}$ induit le morphisme de $\boldsymbol{H} \times \mathcal{S}_{b_1}$-modules de $W \boxtimes k_{b_1} \to \mathrm{ind}_{\boldsymbol{H} \times \mathcal{S}_{b_2}}^{\mathcal{S}_{a+b_2}} W \boxtimes k_{b_2}$, d'où le morphisme (canonique) de transition

$$\phi_{a+b_2, a+b_1} : \mathrm{ind}_{\boldsymbol{H} \times \mathcal{S}_{b_1}}^{\mathcal{S}_{a+b_1}} W \boxtimes k_{b_1} \to \mathrm{ind}_{\boldsymbol{H} \times \mathcal{S}_{b_2}}^{\mathcal{S}_{a+b_2}} W \boxtimes k_{b_2}$$

dont l'image est clairement invariante sous l'action de $\mathbf{1}_{a+b_1} \times \mathcal{S}_{b_2 - b_1}$. La famille $\mathcal{M}_a^{\boldsymbol{H}}(W) : \{\phi_{m+1,m} : \mathcal{M}_a^{\boldsymbol{H}}(W)_m \to \mathcal{M}_a^{\boldsymbol{H}}(W)_{m+1}\}$ définit donc bien un ***FI***-module.

L'action du foncteur $\mathcal{M}_a^{\boldsymbol{H}}$ sur les morphismes suit le même principe d'induction et ne sera pas détaillée.

7.6.1. Les ***FI***-modules $\mathcal{M}_a^{\mathcal{S}_a}(k[\mathcal{S}_a])$ et $\mathcal{M}(\boldsymbol{a})$ de 7.2.3 sont les mêmes. Dans la suite on notera $\mathcal{M}_a := \mathcal{M}_a^{\mathcal{S}_a}$.

7.6.2. Proposition ([10])

a) *Le foncteur* $\mathcal{M}_a^{\boldsymbol{H}} : \mathrm{Mod}(k[H]) \to \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant a}$ *est additif, exact et fidèle. Il est aussi l'adjoint à gauche du foncteur* « d'évaluation en $\boldsymbol{a}$ », i.e. *pour tout* $\boldsymbol{H}$*-module* W *et tout* $\boldsymbol{FI}$*-module* $\mathcal{V}$*, on a :*

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{FI}}(\mathcal{M}_a(W), \mathcal{V}) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{H}}(W, V_a)\,.$$

En particulier, le $\boldsymbol{FI}$*-module* $\mathcal{M}_a(W)$ *est un objet projectif de* $\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])$.

b) *Le foncteur* $\mathcal{M}_a := \mathcal{M}_a^{\mathcal{S}_m}$ *est pleinement fidèle.*

c) $\mathcal{M}_a^{\boldsymbol{H}}(W)$ *est un* $\boldsymbol{FI}$*-module de type fini si et seulement si,* $\dim_k W < \infty$.

d) ([29]) *Pour tout* $\mathcal{S}_a$*-module* W*, on a* $\mathcal{P}(\mathcal{M}_a(W)) = a$.

e) ([30]) *Pour tout* $\mathcal{S}_a$*-module* W*, le* $\boldsymbol{FI}$*-module* $\mathcal{M}_a^H(W)$ *est éventuellement monotone et stationnaire. On a*

$$\mathrm{rg_m}(\mathcal{M}_a^H(W)) \leqslant a \quad \textit{et} \quad \mathrm{rg_s}(\mathcal{M}_a^H(W)) \leqslant 2a\,.$$

En particulier, si $\dim_k W < +\infty$*, la famille de caractères* $\chi(\mathcal{M}_a^H(W))$ *est polynomiale à partir de* $m = 2a$.

Indications. (a,b,c) sont immédiates. (d,e) résultent d'une étude fine des règles de branchement 7.5.2 par Church (*loc.cit.*). Lorsque $W = V_\lambda$ on a même $\mathrm{rg_s}(\mathcal{M}_a(V_\lambda)) = |\lambda| + \lambda_1$. La dernière partie de (e) découle du calcul de Macdonald 7.3.6. □

7.7. Catégorie des *FB*-modules. L'article [10] s'intéresse également aux représentations de la sous-catégorie pleine $\boldsymbol{FB} \subseteq \boldsymbol{FI}$ des ensembles finis et leurs bijections. Un $k[\boldsymbol{FB}]$-module est alors, par définition, un foncteur covariant $\mathcal{R} : \boldsymbol{FB} \to \mathrm{Vec}(k)$, ce qui équivaut à la donnée d'une famille de représentations de groupes finis $\mathcal{R} := \{\rho_m : \mathcal{S}_m \mapsto \mathrm{Gl}_k(W_m)\}_m$. On a donc

$$\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FB}]) = \prod\nolimits_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{Mod}(k[\mathcal{S}_m])\,.$$

Dans $\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FB}])$, la notion de $\boldsymbol{FB}$-module de type fini est inintéressante car équivalente à la donnée d'une famille de représentions $\{W_m\}_m$ de dimensions finies presque toutes nulles. Par contre, la notion de « *stabilité des multiplicités des représentations* $V(\lambda)_m$ » (7.4.1-(c)) garde tout son intérêt.

Définition. On dit que un $\boldsymbol{FB}$-module est « *(éventuellement) stationnaire* » lorsque la condition 7.4.1-(c) est satisfaite pour un certain $N \in \mathbb{N}$.

7.8. Le *FI*-modules $\mathcal{M}(\lambda)$ et $\mathcal{V}(\lambda)$. On introduit un certain quotient $\mathcal{V}(\lambda) := \{\phi_m \colon V(\lambda)_m \to V(\lambda)_{m+1}\}_m$ du $\boldsymbol{FI}$-module $\mathcal{M}_{|\lambda|+\lambda_1}(V(\lambda)_{|\lambda|+\lambda_1})$

[29] [10], prop. 3.2.4.

[30] Hemmer [24] thm. 2.4, Church [7] §5 thm. 2.8, p. 494.

(7.6) qui rassemble les représentations $V(\lambda)_m$. La proposition 7.8.2 donne ses principales propriétés, notamment pour la description des catégories $\mathrm{Mod}_{\mathrm{rg_{ms}}\leqslant s}(k[\mathbf{FI}])$ et $\mathrm{Mod}_{\mathrm{rg_m}\leqslant s}(k[\mathbf{FI}])$.

7.8.1. Définition. Étant donnée une décomposition λ, notons le ***FI***-module $\mathcal{M}_{|\lambda|}(V_\lambda)$ de 7.6 plus simplement par

$$\mathcal{M}(\lambda) := \{\phi_m : M(\lambda)_m \to M(\lambda)_{m+1}\}_m \,.$$

D'après les règles de Pieri 7.5.2-(a), pour $m \geqslant |\lambda|$, la multiplicité $c(\mu)_m$ de $V(\mu)_m$ dans la décomposition en facteurs irréductibles

$$M(\lambda)_m := \mathrm{ind}_{\mathfrak{S}_a\times\mathfrak{S}_{m-a}}^{\mathfrak{S}_m} V(\lambda)_a \boxtimes k = \bigoplus\nolimits_\mu c(\mu)_m V(\mu)_m \,,$$

est le nombre de fois que l'on peut obtenir le diagramme $\mu[m]$ en rajoutant une boite sur $m-|\lambda|$ colonnes distinctes de λ. On a

$$c(\mu)_m > 0 \Rightarrow \big(|\lambda| \leqslant |\mu| \leqslant |\lambda| + \lambda_1\big) \,,$$

et le ***FI***-module $\mathcal{M}(\lambda)^{(|\lambda|)}$ (le sous-quotient de $\mathcal{M}(\lambda)$ à poids unique $|\lambda|$ (7.5.7-(a))), est un quotient de $\mathcal{M}(\lambda)$. D'autre part, on a $c(\lambda)_m = 1$ pour $m \geqslant |\lambda| + \lambda_1$, puisque $|\mu| = |\lambda|$ équivaut à $\mu = \lambda$. Ceci implique que la composée $\nu \circ \phi_m \circ \iota$ ci-contre, où ν est la surjection canonique, est une injection dont l'image engendre $V(\lambda)_{m+1}$. On note alors

$$\mathcal{V}(\lambda) = \big\{\phi_m : V(\lambda)_m \to V(\lambda)_{m+1}\big\} := \frac{\mathcal{M}(\lambda)^{(\geqslant|\lambda|)}}{\mathcal{M}(\lambda)^{(>|\lambda|)}} \,.$$

$$\begin{array}{ccc} V(\lambda)_m & & \\ {\scriptstyle\iota}\big\downarrow & & \\ M(\lambda)_m & \xrightarrow{\phi_m} & M(\lambda)_{m+1} \\ & & {\scriptstyle\nu}\big\downarrow \\ & & V(\lambda)_{m+1} \end{array}$$

7.8.2. Proposition

a) *Pour toute décomposition λ, on a*

$$\mathcal{P}(\mathcal{V}(\lambda)) = |\lambda| \quad \textit{et} \quad \mathrm{rg_m}(\mathcal{V}(\lambda)) = 0 \ \textit{et}\ \mathrm{rg_s}(\mathcal{V}(\lambda)) = |\lambda| + \lambda_1 \,.$$

b) *Soit $\mathcal{W} = \{\phi_m : W_m \to W_{m+1}\}_m$ un **FI**-module à poids unique t. Pour $n \in \mathbb{N}$, si $W_n = \bigoplus_{|\mu|=t} c(\mu)_n V(\mu)_n$ est la décomposition en composantes irréductibles, on note*

$$\mathcal{V}(\mathcal{W}, n) := \bigoplus\nolimits_{|\mu|=t} c(\mu)_n \mathcal{V}(\mu)_{\geqslant n} \,.$$

i) *Pour tout λ et tout $n \geqslant |\lambda| + \lambda_1$, l'application canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{FI}}(\mathcal{V}(\lambda)_{\geqslant n}, \mathcal{W}) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(V(\lambda)_n, W_n)$$

*est bijective. Dans la suite, on notera $\Upsilon(n) : \mathcal{V}(\mathcal{W}, n) \to \mathcal{W}$ le morphisme de **FI**-modules correspondant à l'identité en degré n.*

ii) $\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{W}) \leqslant s$, *si et seulement si,* $\Upsilon(s) : \mathcal{V}(\mathcal{W}, s) \to \mathcal{W}_{\geqslant s}$ *est bijectif.*

iii) $\mathrm{rg_m}(\mathcal{W}) \leqslant s$, *si et seulement si,* $\Upsilon(n):\mathcal{V}(\mathcal{W},n)\to\mathcal{W}$ *est injectif* $\forall n \geqslant s$. *En particulier, si* $\mathrm{rg_m}(\mathcal{W}) \leqslant s$ *et si* $W_m \sim V(\lambda)_m$ *pour tout* $m \geqslant s$, *on a* $\mathcal{W}_{\geqslant s} \simeq \mathcal{V}(\lambda)_{\geqslant s}$.

c) *Si* $\mathcal{W}$ *est tel que* $s := \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{W}) < +\infty$, *le* ***FI****-module* $\mathcal{W}_{\geqslant s}$ *est extension de* ***FI****-modules de la forme* $\mathcal{V}(\mu)_{\geqslant s}$ *où* $|\mu| + \mu_1 \leqslant s$.

d) *Un* ***FB****-module* $\mathcal{W} = \{W_m\}_m$ *est stable pour* $m \geqslant N$, *si et seulement si, il existe un* ***FI****-module* $\mathcal{Z} = \{\phi_m : Z_m \to Z_{m+1}\}_m$ *monotone et stable pour* $m \geqslant N$, *tel que* $W_m = Z_m$ *pour tout* $m \geqslant N$.

Démonstration. (a) est implicite dans la définition 7.8.1

(b) Pour $m \in \mathbb{N}$, si nous considérons $V(\mu)_{m+1}$ comme $\mathcal{S}_m$-module, la règle de Pieri 7.5.2-(a), nous dit qu'il contient une et une seule composante irréductible de poids $|\mu|$, à savoir $V(\mu)_m$ et que sa multiplicité est égale à 1. Il s'ensuit que la restriction $\phi(\mu)_m$ du morphisme de transition de $\mathcal{W}$,

$$\phi_m : \Big(W_m = \bigoplus\nolimits_{|\mu|=t} c(\mu)_m V(\mu)_m\Big) \to \Big(W_{m+1} = \bigoplus\nolimits_{|\mu|=t} c(\mu)_{m+1} V(\mu)_{m+1}\Big)\,,$$

à $c(\mu)_m V(\mu)_m$ est à valeurs dans $c(\mu)_{m+1}V(\mu)_{m+1}$. Les sous-familles

$$\mathcal{W}(\mu) := \{\phi(\mu)_m : c(\mu)_m V(\mu)_m \to c(\mu)_{m+1}V(\mu)_{m+1}\}_m$$

sont donc des sous-***FI***-modules de $\mathcal{W}$ et nous avons la décomposition

$$\mathcal{W} = \bigoplus\nolimits_{|\mu|=t} \mathcal{W}(\mu)\,.$$

Chaque morphisme $\phi(\mu)_m$ se factorise suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} c(\mu)_m V(\mu)_m & \xrightarrow{\phi(\mu)_m} & c(\mu)_{m+1}V(\mu)_{m+1} \\ {\scriptstyle \iota(\mu)_m}\big\downarrow & \nearrow_{\Phi(\mu)_m} & \uparrow{\scriptstyle \Psi(\mathcal{W})(\mu)_{m+1}} \\ c(\mu)_m \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} V(\mu)_m & \xrightarrow[\pi(\mu)_m]{} & c(\mu)_m V(\mu)_{m+1} \end{array}$$

où $\phi(\mu)_m = \Phi(\mathcal{W})(\mu)_m \circ \iota(\mu)_m$ est la factorisation standard (7.2.1-($\diamond\diamond$)), où $\pi(\mu)_m : \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} V(\mu)_m \twoheadrightarrow V(\mu)_{m+1}$ est la surjection canonique sur l'unique composante irréductible de $\operatorname{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} V(\mu)_m$ de poids $|\mu|$, et où $\Psi(\mu)_m$ est le morphisme induit par $\Phi(\mu)_m$.

En additionnant, on obtient la factorisation de $\phi_m = \sum_\mu \phi(\mu)_m$:

$$W_m \xhookrightarrow{\iota_m} \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} W_m \xrightarrow{\pi_m} \big[\operatorname{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} W_m\big]_t \xrightarrow{\Psi(\mathcal{W})_{m+1}} W_{m+1} \qquad (*)$$

où on a noté $[M]_t$ la somme des composantes irréductibles de poids t d'un $\mathcal{S}_{m+1}$-module M.

La même démarche pour le ***FI***-module $\mathcal{U} := \mathcal{V}(\mathcal{W}, n)$ conduit au même type de factorisation $(*)$ (à ceci près que $\Psi(\mathcal{U})_{m+1}$ un isomorphisme). La

naturalité de cette factorisation permet de construire, à partir de la donnée d'un morphisme $f_n : U_n \to W_n$, une famille (unique) de morphismes $\{f_m : U_m \to W_m\}_{m \geqslant n}$ qui constitue un morphisme de ***FI***-modules $f : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$.

En effet, fixons $f_n : U_n \to W_n$ et supposons avoir défini $f_{n+1}, \dots, f_z$ de manière compatible aux morphismes de transition de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$. On a alors le morphisme de factorisations $(*)$

$$\begin{array}{ccccccc} U_z & \xrightarrow{\iota_z} & \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_z}^{\mathcal{S}_{z+1}} U_z & \xrightarrow{\pi_z} & \left[\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_z}^{\mathcal{S}_{z+1}} U_z\right]_t & \xrightarrow[\sim]{\Psi(\mathcal{U})_{z+1}} & U_{z+1} \\ \downarrow{\scriptstyle f_z} & \text{(I)} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_z}^{\mathcal{S}_{z+1}} f_z} & \text{(II)} & \downarrow{\scriptstyle [\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_z}^{\mathcal{S}_{z+1}} f_z]_t} & & \downarrow{\scriptstyle f_{z+1}} \\ W_z & \xrightarrow{\iota_z} & \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_z}^{\mathcal{S}_{z+1}} W_z & \xrightarrow{\pi_z} & \left[\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_z}^{\mathcal{S}_{z+1}} W_z\right]_t & \xrightarrow{\Psi(\mathcal{W})_{z+1}} & W_{z+1} \end{array} \qquad (**)$$

où les flèches en pointillé sont induites par f_z et sont uniques à rendre commutatifs les sous-diagrammes (I) et (II). Enfin, comme $\Psi(\mathcal{U})_{z+1}$ est bijectif, l'existence et unicité de f_{z+1} sont claires, ce qui termine la preuve de (b-i).

On remarque alors que lorsque f_z est un isomorphisme, f_{z+1} est un isomorphisme, si et seulement si, $\Psi(\mathcal{W})_{z+1}$ l'est. Or cette dernière condition est une condition de monotonie et stabilité sur $\mathcal{W}$, de sorte que si $s := \mathrm{rg}_{\mathrm{ms}}(\mathcal{W})$, le morphisme $\Upsilon(s) : \mathcal{V}(\mathcal{W}, s) \to \mathcal{W}_{\geqslant s}$ est un isomorphisme, d'où (b-ii).

De manière analogue, lorsque f_z est une injection, on note $W'_z := \mathrm{im}(f_z)$, et l'on fixe une décomposition $W_z = W'_z \oplus N_z$. La dernière ligne de $(**)$ se décompose alors en somme directe de deux lignes, ce qui permet de voir que f_{z+1} est injective, si et seulement si, la restriction de $\Psi(\mathcal{W})_{z+1}$ à $\left[\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} W'_z\right]_t$ l'est. Or, ceci est très précisément la condition de monotonie en z pour $\mathcal{W}$, et l'assertion (b-iii) s'ensuit.

(c) Résulte de (b) et de 7.5.7-(b,c).

(d) Il suffit de prendre $\mathcal{Z} := \mathcal{V}(\mathcal{W}, N)$. □

7.9. Monotonie, stabilité et co-invariants

7.9.1. Co-invariants. Dans [10] (§3.1), on introduit, pour $0 \leqslant t \leqslant m$, le foncteur des « $\mathcal{S}_{m-t}$-*co-invariants* » (pour l'inclusion $\mathcal{S}_t \times \mathcal{S}_{m-t} \subseteq \mathcal{S}_m$)

$$\begin{aligned} (_)_{\mathcal{S}_{m-t}} : \mathrm{Mod}(\mathcal{S}_m) &\rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{S}_t) \\ W \quad &\rightsquigarrow W_{\mathcal{S}_{m-t}} := k \otimes_{k[\mathcal{S}_{m-t}]} W\,. \end{aligned}$$

Pour tout ***FI***-module $\mathcal{W} = \{\phi_m : W_m \to W_{m+1}\}$ et tout $m \geqslant t$, notons $\nu_m : W_m \twoheadrightarrow (W_m)_{\mathcal{S}_{m-t}}$ la surjection $w \mapsto 1 \otimes w$. La composée

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow W_m & \xrightarrow{\phi_m} & W_{m+1} & \longrightarrow \\ & \searrow^{\nu_{m+1} \circ \phi_m} & \downarrow{\scriptstyle \nu_{m+1}} & \\ & & (W_{m+1})_{\mathcal{S}_{m+1-t}} & \end{array}$$

se factorise à travers $\nu_m : W_m \twoheadrightarrow (W_m)_{\mathcal{S}_{m-t}}$ en un unique morphisme de $\mathcal{S}_t$-modules $(\phi_m) : (W_m)_{\mathcal{S}_{m-t}} \to (W_{m+1})_{\mathcal{S}_{m+1-t}}$ rendant les diagrammes suivants commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow W_m & \xrightarrow{\phi_m} & W_{m+1} & \longrightarrow \\ \downarrow{\scriptstyle \nu_m} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{m+1}} & \\ (W_m)_{\mathcal{S}_{m-t}} & \xrightarrow{(\phi_m)} & (W_{m+1})_{\mathcal{S}_{m+1-t}} & \end{array}$$

7.9.2. Le foncteur $\boldsymbol{\Phi_t}$. Pour $t \in \mathbb{N}$, on note dans [10] (déf. 3.1.2)

$$\Phi_t : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathbb{N}}(k[\mathcal{S}_t][T])\,,$$

le foncteur qui fait correspondre à $\mathcal{W} = \{\phi_m : W_m \to W_{m+1}\}_m$ le $\mathcal{S}_t$-module positivement gradué $\Phi_t(\mathcal{W})^*$ défini par

$$\Phi_t(\mathcal{W})^{m-t} := (W_m)_{\mathcal{S}_{m-t}}\,, \quad \forall m \geqslant t\,.$$

muni de l'action de degré $+1$ de T qui vaut (ϕ_m) sur $(W_m)_{\mathcal{S}_{m-t}}$.

7.9.2.1. A propos des notations. Le foncteur de co-invariants $(_)_{\mathcal{S}_{m-t}} : \mathrm{Mod}(\mathcal{S}_m) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{S}_t)$ sera parfois aussi noté $\Phi_t(_) : \mathrm{Mod}(\mathcal{S}_m) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{S}_t)$. En particulier, on pourra écrire $\Phi_t(\mathcal{W})^{m-t} = \Phi_t(W_m)$ et $(\phi_m) = \Phi_t(\phi_m)$.

7.9.3. Lemme. *Soit $\mathcal{V}(\lambda) = \{\phi_m : V(\lambda)_m \to V(\lambda)_{m+1}\}$ le **FI**-module de 7.8. Pour tout $m \geqslant t$, le morphisme de $\mathcal{S}_t$-modules*

$$\Phi_t(\phi_m) : \Phi_t(V(\lambda)_m) \to \Phi_t(V(\lambda)_{m+1})$$

est injectif, et il est bijectif si $t < |\lambda|$ ou si $m \geqslant t + \lambda_1$.

En particulier, si $\mathcal{W} = \bigoplus_\lambda c(\lambda)\mathcal{V}(\lambda) = \{\phi_m : W_m \to W_{m+1}\}$. Le morphisme $\Phi_t(\phi_m)$ est injectif pour tout $m \geqslant t$.

Démonstration. Pour $m \geqslant |\lambda| + \lambda_1$ numérotons le diagramme de Young de $\lambda[m]$ de haut en bas et de gauche à droite comme dans le tableau :

$$\tau_\lambda(m) := \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 8 & 10 & \cdots & \cdots & m \\ \hline 2 & 6 & 9 & 11 \\ \cline{1-4} 3 & 7 \\ \cline{1-2} 4 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Notons (suivant [18] §4.1) $L_\lambda(m)$, P_λ et Q_λ les sous-groupes de $\mathcal{S}_m$ qui laissent respectivement stables, la première ligne, les autres lignes et les colonnes du diagramme sous-jacent à $\tau_\lambda(m)$. Notons ensuite, dans $k[\mathcal{S}_m]$,

$$\mathfrak{l}_\lambda(m) := \sum\nolimits_{\alpha \in L_\lambda(m)}\,, \quad \mathfrak{a}_\lambda := \sum\nolimits_{\alpha \in P_\lambda}\,, \quad \mathfrak{b}_\lambda := \sum\nolimits_{\alpha \in Q_\lambda} \mathrm{sgn}(\alpha)\alpha\,.$$

Le « *symétriseur de Young* » associé à $\tau_\lambda(m)$ est l'élément de $k[\mathcal{S}_m]$

$$\mathfrak{c}_\lambda(m) := \mathfrak{l}_\lambda(m) \cdot \mathfrak{a}_\lambda \cdot \mathfrak{b}_\lambda\,,$$

et le sous-$\mathcal{S}_m$-module à gauche $k[\mathcal{S}_m]\cdot\mathfrak{c}_\lambda(m)\subseteq k[\mathcal{S}_m]$ est isomorphe à la représentation irréductible $V(\lambda)_m$. On a aussi (*loc.cit.* ex. 4.4)

$$k[\mathcal{S}_m]\cdot\mathfrak{c}_\lambda(m)=k[\mathcal{S}_m]\cdot\mathfrak{b}_\lambda\cdot\mathfrak{a}_\lambda\cdot\mathfrak{l}_\lambda(m)\,.$$

Soient maintenant $|\lambda|+\lambda_1\leqslant m\leqslant n$. D'après le choix du schéma de numérotations des tableaux, il est clair que par le plongement $\mathcal{S}_m\subseteq\mathcal{S}_n$ on a

$$\mathfrak{l}_\lambda(m)\cdot\mathfrak{l}_\lambda(n)=(m-|\lambda|)!\;\mathfrak{l}_\lambda(n)\,.$$

La multiplication à droite par $\mathfrak{l}_\lambda(n)$ définit par conséquent un morphisme de $\mathcal{S}_m$-modules à gauche injectif :

$$\phi_{n,m}:k[\mathcal{S}_m]\cdot\mathfrak{b}_\lambda\cdot\mathfrak{a}_\lambda\cdot\mathfrak{l}_\lambda(m)\xhookrightarrow{(_)\cdot\mathfrak{l}_\lambda(n)}k[\mathcal{S}_n]\cdot\mathfrak{b}_\lambda\cdot\mathfrak{a}_\lambda\cdot\mathfrak{l}_\lambda(n)\,.\qquad(\diamond)$$

On remarque ensuite que toute permutation $\alpha\in\mathbb{I}_m\times\mathcal{S}_{n-m}$ fixe l'image de $\phi_{n,m}$ puisque, d'une part, α commute à $k[\mathcal{S}_m]$ donc à $k[\mathcal{S}_m]\cdot\mathfrak{b}_\lambda\cdot\mathfrak{a}_\lambda$ et, d'autre part, on a $\alpha\cdot\mathfrak{l}_\lambda(n)=\mathfrak{l}_\lambda(n)$ parce que $\mathbb{I}_m\times\mathcal{S}_{n-m}\subseteq\mathfrak{l}_\lambda(n)$.

Si nous notons maintenant $\phi_m=\phi_{m+1,m}$, l'injection $\phi_{n,m}$ est multiple de la composée $\phi_{n-1}\circ\cdots\circ\phi_m$ et la famille $\mathcal{W}(\lambda)$ dont les termes W_m sont nuls pour $m<|\lambda|+\lambda_1$ et qui, pour $m\geqslant|\lambda|+\lambda_1$, coïncide avec

$$\big\{\phi_m:k[\mathcal{S}_m]\cdot\mathfrak{c}_\lambda(m)\to k[\mathcal{S}_{m+1}]\cdot\mathfrak{c}_\lambda(m+1)\big\}_m$$

est un ***FI***-module canoniquement isomorphe à $\mathcal{V}(\lambda)$ d'après 7.8.2-(b-iii).

Ce qui précède justifie l'égalité

$$\Phi_t(V(\lambda)_m)=k\big[{}_{\mathcal{S}_{m-t}}\backslash\mathcal{S}_m\big]\cdot\mathfrak{l}_\lambda(m)\cdot\mathfrak{a}_\lambda\cdot\mathfrak{b}_\lambda\,,\qquad\forall m\geqslant t\,,$$

et $\Phi_t(\phi_m)$ sera injective si et seulement si le morphisme induit par la multiplication à droite par $\mathfrak{l}_\lambda(m{+}1)$:

$$k\big[{}_{\mathcal{S}_{m-t}}\backslash\mathcal{S}_m\big]\cdot\mathfrak{l}_\lambda(m)\to k\big[{}_{\mathcal{S}_{m+1-t}}\backslash\mathcal{S}_{m+1}\big]\cdot\mathfrak{l}_\lambda(m{+}1)$$

est injectif. Or, ceci revient à montrer que l'application naturelle

$$\mathcal{S}_{m-t}\backslash{}^{\mathcal{S}_m}\!/_{L_\lambda(m)}\longrightarrow\mathcal{S}_{m+1-t}\backslash{}^{\mathcal{S}_{m+1}}\!/_{L_\lambda(m{+}1)}$$

est injective, ce qui résulte d'une analyse élémentaire.

Maintenant, du fait de l'injectivité de $\Phi_t(\phi_m)$, sa bijectivité résulte du décompte des composantes irréductibles de $\Phi_t(V(\lambda)_{m+1})$ en tant que $\mathcal{S}_t$-module. La règle de branchement 7.5.2-(b) nous dit que ce nombre est le nombre des manières d'enlever $m{+}1{-}t$ boites de colonnes différentes de $\lambda[m{+}1]$. Il s'ensuit que si $m{+}1{-}t>\lambda_1$, on est obligé d'enlever la dernière boite de la première ligne de $\lambda[m{+}1]$ et l'on retrouve alors le nombre des composantes irréductibles de $\Phi_t(\mathcal{V}(\lambda)_m)$ par la même règle de branchement.

Le assertion concernant $\mathcal{W}=\bigoplus_\lambda c(\lambda)\mathcal{V}(\lambda)$ est conséquence immédiate du cas où la somme et les multiplicités sont finies, ce qui est clair d'après la première assertion. □

7.9.4. Définitions. Le « *degré de stabilité (resp. d'injectivité) en* $t \in \mathbb{N}$ » d'un ***FI***-module $\mathcal{W}$, noté $\text{deg-stab}_t(\mathcal{W})$ (resp. $\text{deg-inj}_t(\mathcal{W})$), est le plus petit $d \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ tel que l'application $T : \Phi_t(\mathcal{W})^n \to \Phi_t(\mathcal{W})^{n+1}$ est bijective (resp. injective) pour tout $n \geqslant d$.

7.9.5. Proposition. *On fixe* $t \in \mathbb{N}$.

a) *Le foncteur* $\Phi_t : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}^{\mathbb{N}}(k[\mathcal{S}_t][T])$ *est covariant et exact.*

b) *Soit* λ *une partition. Pour tous* $m \geqslant t$, *notons* $\mathcal{I}_t(V(\lambda)_m)$ *la famille des partitions* $\nu \vdash t$ *telles que* V_ν *est un facteur irréductible de* $\Phi_t(V(\lambda)_m)$, *répétées autant de fois que leurs multiplicités. Alors, on a des inclusions*

$$\mathcal{I}_t(V(\lambda)_m) \subseteq \mathcal{I}_t(V(\lambda)_{m+1}), \qquad \forall m \geqslant t,$$

et ces inclusions sont des égalités si et seulement si $m \geqslant t + \lambda_1$.

c) *Soit* λ *une partition et soit* $\mathcal{V}(\lambda)$ *le* ***FI****-module de 7.8.2. Alors,*

i) *Pour tout* $t \in \mathbb{N}$, $\quad \text{deg-inj}_t(\mathcal{V}(\lambda)_{\geqslant s}) = 0, \qquad \forall s \in \mathbb{N}.$

ii) $t < |\lambda| \Leftrightarrow \Phi_t(\mathcal{V}(\lambda)) = 0$. *Dans ces cas,*

$$\text{deg-stab}_t(\mathcal{V}(\lambda)_{\geqslant s}) = 0, \qquad \forall s \in \mathbb{N}.$$

iii) $t = |\lambda| \Leftrightarrow \Phi_t(\mathcal{V}(\lambda))^{m-t} = V_\lambda$ *et* $T = \text{id}$. *Dans ces cas,*

$$\text{deg-stab}_{|\lambda|}(\mathcal{V}(\lambda)_{\geqslant s}) = \sup\{\lambda_1, s - |\lambda|\}, \qquad \forall s \in \mathbb{N}.$$

iv) *Si* $t \geqslant |\lambda|$ *et* $m \geqslant t + \lambda_1$, *on a* $\Phi_t(\mathcal{V}(\lambda))^{m-t} \simeq \text{ind}_{\mathcal{S}_{|\lambda|} \times \mathcal{S}_{t-|\lambda|}}^{\mathcal{S}_t} V_\lambda \boxtimes k$, *et* $T : \Phi_t(\mathcal{V}(\lambda))^{m-t} \to \Phi_t(\mathcal{V}(\lambda))^{m+1-t}$ *est bijective. Dans ces cas,*

$$\text{deg-stab}_t(\mathcal{V}(\lambda)_{\geqslant s}) = \sup\{\lambda_1, s - t\}, \qquad \forall s \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. (a) est immédiat.

(b) et (c-i) par l'injectivité de (ϕ_m) du lemme 7.9.3.

(c-ii)-(c-iv) c'est le lemme 3.2.7 de [10], qui résulte également du lemme 7.9.3 et de la règle de branchement 7.5.2-(b). Nous omettons les détails. □

7.9.6. Suite du commentaire 7.4.6. L'intérêt du poids et du degré de stabilité d'un ***FI***-module $\mathcal{W}$ apparaît dans la proposition 3.3.3 de [10] qui établit la majoration $\text{rg}_{\text{s}}(\mathcal{W}) \leqslant \mathcal{P}(\mathcal{W}) + \text{deg-stab}(\mathcal{W})$ ([31]). Un outil important dans notre travail est le foncteur d'induction $\boldsymbol{Ind}_\lambda : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])$ qui sera introduit dans la section 8. Ce foncteur est un 'recollement' des foncteurs $\boldsymbol{Ind}_{G_{\lambda \setminus m}}^{\mathcal{S}_m}$ de 5.3.3-(b) et lorsqu'il est appliqué à un ***FI***-module $\mathcal{W}$, il est crucial de comprendre le rapport entre les rangs de $\mathcal{W}$ et ceux de $\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{W})$. En ce sens, la proposition 3.3.3 *loc.cit.* était à priori intéressante dans la mesure où nous avons un meilleur contrôle de la perturba-

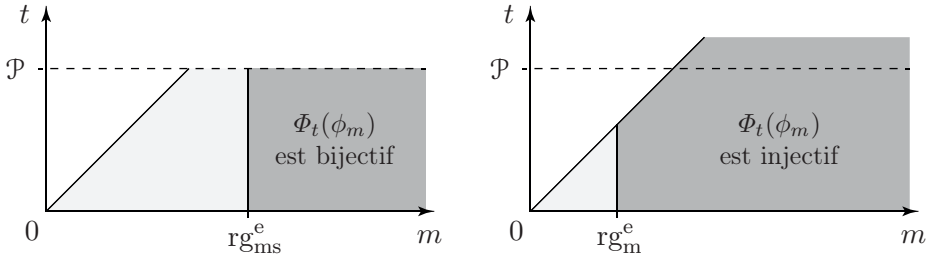
[31] Le « *degré de stabilité* » de $\mathcal{W}$ y est défini par $\text{deg-stab}(\mathcal{W}) := \sup_{t \in \mathbb{N}}\{\text{deg-stab}_t(\mathcal{W})\}$. Il ne sera pas utilisé dans ce travail.

tion de $\mathcal{P}(\mathcal{W})$ et de deg-stab$(\mathcal{W})$ lors de ces inductions (*cf.* 7.5.4). Cela n'a pourtant pas suffi et nous avons été emmenés à caractériser autrement les rangs de $\mathcal{W}$. La suite décrit cette nouvelle approche. Elle conduira au théorème 8.1.5 qui donne les majorations $\mathrm{rg_{ms}}(\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{W})) \leqslant \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{W}) + 2|\underline{\lambda}|$ et $\mathrm{rg_m}(\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{W})) \leqslant \mathrm{rg_m}(\mathcal{W}) + |\underline{\lambda}|$.

7.9.7. Rangs étendus

Les « *rangs étendus* » de $\mathcal{W} = \{\phi_m : W_m \to W_{m+1}\}_m$ sont les nombres

$$\begin{cases} \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{ms}}(\mathcal{W}) := \inf\left\{s \in \mathbb{N} \;\middle|\; \Phi_t(\phi_m) \text{ est bijective } \forall m \geqslant s\,, \forall t \leqslant \mathcal{P}(\mathcal{W}) \leqslant m\right\} \\ \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{m}}(\mathcal{W}) := \inf\left\{s \in \mathbb{N} \;\middle|\; \Phi_t(\phi_m) \text{ est injective } \forall m \geqslant s\,, \forall t \leqslant m\right\} \end{cases}$$



7.9.8. Proposition. *Pour tout* ***FI****-module* $\mathcal{W}$*, on a*

$$\boxed{\mathrm{rg_m}(\mathcal{W}) = \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{m}}(\mathcal{W}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{W}) = \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{ms}}(\mathcal{W})}$$

La démonstration résultera du lemme suivant.

Lemme

a) *Soit* $\mathrm{rg}^{\mathrm{e}} \in \{\mathrm{rg}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{m}}, \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{ms}}\}$.

i) *Si* $0 \to \mathcal{X} \to \mathcal{W} \to \mathcal{Y} \to 0$ *est une suite exacte de* ***FI****-modules, on a*
$$\mathrm{rg}^{\mathrm{e}}(\mathcal{W}) \leqslant \sup\{\mathrm{rg}^{\mathrm{e}}(\mathcal{X}), \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}(\mathcal{Y})\}\,.$$

ii) *Si* $\{\mathcal{W}^{(t)}\}$ *est la famille des sous-quotients à poids unique de* $\mathcal{W}$*, on a*
$$\mathrm{rg}^{\mathrm{e}}(\mathcal{W}) = \sup\{\mathrm{rg}^{\mathrm{e}}(\mathcal{W}^{(t)})\}\,.$$

b) *Si* $\mathcal{W}$ *est à poids unique* (7.5.7-(a-iii))*, on a*
$$\mathrm{rg_m}(\mathcal{W}) = \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{m}}(\mathcal{W}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{W}) = \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{ms}}(\mathcal{W})\,.$$

Preuve du lemme. (a-i) Pour chaque $t \in \mathbb{N}$, la suite de $k[\mathcal{S}_t][T]$-modules gradués $0 \to \Phi_t(\mathcal{X}) \to \Phi_t(\mathcal{W}) \to \Phi_t(\mathcal{Y}) \to 0$ est exacte (7.9.5-(a)), auquel cas $\text{deg-stab}_t(\mathcal{W}) \leqslant \sup\{\text{deg-stab}_t(\mathcal{X}), \text{deg-stab}_t(\mathcal{Y})\}$, et de même pour deg-inj_t.

(a-ii) On suppose $\mathcal{P}(\mathcal{W}) < +\infty$. Montrons que pour le plus petit entier a tel que $\mathcal{W}^{(a)} \neq 0$, on a

$$\mathrm{rg}^{\mathrm{e}}(\mathcal{W}) = \sup\{\mathrm{rg}^{\mathrm{e}}(\mathcal{W}^{(>a)}), \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}(\mathcal{W}^{(a)})\}\,. \tag{1}$$

En effet, (a-i) donne déjà l'inégalité '$\leqslant$'. Ensuite, $\mathrm{rg}^{\mathrm{e}}(\mathcal{W}) \geqslant \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}(W^{(a)})$ vient de ce que si $t \leqslant a$, on a $\Phi_t(W^{>a}) = 0$ et alors $\Phi_t(W) \sim \Phi_t(W^a)$. Il nous reste

$$\mathrm{rg}^{\mathrm{e}}(\mathcal{W}) \geqslant \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}(\mathcal{W}^{(>a)})\,. \tag{2}$$

Le cas où $\mathrm{rg}^{\mathrm{e}} = \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{m}}$ est clair puisque $\Phi_t(\mathcal{W}^{(>a)})$ est un sous-$k[\mathcal{S}_t][T]$-module de $\Phi_t(\mathcal{W}^{(>a)})$. Le cas $\mathrm{rg}^{\mathrm{e}} = \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{ms}}$, résulte de se placer dans la situation où $a < t \leqslant \mathcal{P} \leqslant \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{ms}}(\mathcal{W}) \leqslant m$ et de considérer le diagramme de colonnes exactes

$$\begin{array}{ccc}
\Phi_t(W_m^{(>a)}) & \xrightarrow{(\phi_m^{>a})} & \Phi_t(W_{m+1}^{(>a)}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Phi_t(W_m) & \xrightarrow[\simeq]{(\phi_m)} & \Phi_t(W_{m+1}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Phi_t(W_m^{(a)}) & \xrightarrow{(\phi_m^{a})} & \Phi_t(W_{m+1}^{(a)})
\end{array}$$

où (ϕ_m^a) est bijective, car injective d'après 7.9.5-(c-i) et surjective d'après les autres flèches. On en déduit la bijectivité de $(\phi_m^{>a})$ d'où (2) et donc (1).

À partir de là, l'assertion (a-ii) résulte par un argument inductif qui affirme que $\mathcal{W}^{(>a)}$ la vérifie.

(b) pour $\mathrm{rg}_{\mathrm{m}}(\mathcal{W})$. On a tout de suite que

$$\Phi_t(\phi_m) \text{ est injectif}, \quad \forall t < \mathcal{P}(\mathcal{W})\,,\ \forall m\,, \tag{3}$$

tout simplement parce que $\Phi_t(\mathcal{W}) = 0$ pour tout $t < \mathcal{P}(\mathcal{W})$ (7.9.5-(c-ii)).

Pour étudier les cas où $t \geqslant \mathcal{P}(\mathcal{W})$, on rappelle que d'après 7.8.2-(b-iii), $\mathrm{rg}_{\mathrm{m}}(\mathcal{W})$ est le plus petit des $s \in \mathbb{N}$ tel que

$$\Upsilon(n) : \mathcal{V}(\mathcal{W}, n) \to \mathcal{W} \quad \text{est injectif} \quad \forall n \geqslant s\,. \tag{4}$$

Si nous appliquons, pour $\mathcal{P}(\mathcal{W}) \leqslant t \leqslant n$, le foncteur $\Phi_t(_)$ au diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{V}(\mathcal{W}, n) & & V(\mathcal{W}, n)_n & \xrightarrow{\phi_{n',n}} & V(\mathcal{W}, n)_{n'} \\
{\scriptstyle\Upsilon(n)}\downarrow & & {\scriptstyle\Upsilon(n)_n}\| & & \downarrow{\scriptstyle\Upsilon(n)_{n'}} \\
\mathcal{W} & & W_n & \xrightarrow{\phi^W_{n',n}} & W_{n'}
\end{array}$$

on obtient

$$\begin{array}{ccc}
\Phi_t(\mathcal{V}(\mathcal{W}, n)) & & \Phi_t(V(\mathcal{W}, n)_n) & \hookrightarrow & \Phi_t(V(\mathcal{W}, n)_{n'}) \\
{\scriptstyle\Phi_t(\Upsilon(n))}\downarrow & & {\scriptstyle\Phi_t(\Upsilon(n)_n)}\| & & \downarrow{\scriptstyle\Phi_t(\Upsilon(n)_{n'})} \\
\Phi_t(\mathcal{W}) & & \Phi_t(W_n) & \xrightarrow{\Phi_t(\phi^W_{n',n})} & \Phi_t(W_{n'})
\end{array} \tag{5}$$

où clairement $\Phi_t(\phi^W_{n',n})$ est injective. Par conséquent, et compte tenu de (3),

on conclut que l'on a

$$\mathrm{rg}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{m}}(\mathcal{W}) \leqslant \mathrm{rg}_{\mathrm{m}}(\mathcal{W})\,.$$

Maintenant, si cette inégalité était stricte, il y aurait un certain $m > \mathcal{P}(\mathcal{W})$ tel que $\phi_m : W_m \to W_{m+1}$ n'est pas monotone alors que $\Phi_t(\phi_m)$ serait injective pour tout $t \leqslant \mathcal{P}(\mathcal{W})$, ce qui est clairement impossible déjà pour $t = \mathcal{P}(\mathcal{W})$. L'inégalité (5) est donc une égalité.

(b) pour $\mathrm{rg}_{\mathrm{ms}}(\mathcal{W})$. On procède pareillement en remarquant cette fois que dans (5) le morphisme $\Phi_t(\phi_{n',n})$ est bijectif pour $n \geqslant \mathrm{rg}_{\mathrm{ms}}(\mathcal{W})$ et $t = \mathcal{P}(\mathcal{W})$ auquel cas, $\Phi_t(\phi^W_{n',n})$ est bijective si et seulement si, $\Upsilon(n) : \mathcal{V}(\mathcal{W}, n) \to \mathcal{W}_{\geqslant n}$ l'est. On conclut ensuite en appliquant 7.8.2-(b-ii). □

Preuve de la proposition 7.9.8. Le cas non trivial est celui où $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\mathcal{W}) < +\infty$. Dans ce cas, si $\{\mathcal{W}^{(t)}\}$ est la famille des sous-quotients à poids unique de $\mathcal{W}$, on a vu dans (a-ii) du lemme et dans 7.5.7-(c) que l'on a

$$\mathrm{rg}^{\mathrm{e}}(\mathcal{W}) = \sup_{t\leqslant\mathcal{P}}\{\mathrm{rg}^{\mathrm{e}}\,\mathcal{W}^{(t)}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(\mathcal{W}) = \sup_{t\leqslant\mathcal{P}}\{\mathrm{rg}\,\mathcal{W}^{(t)}\}$$

avec $\mathrm{rg} \in \{\mathrm{rg}_{\mathrm{m}}, \mathrm{rg}_{\mathrm{ms}}\}$. La proposition résulte alors de l'assertion (b) du lemme qui établit les égalités $\mathrm{rg}_{\mathrm{m}}(\mathcal{W}^{(t)}) = \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{m}}(\mathcal{W}^t)$ et $\mathrm{rg}_{\mathrm{ms}}(\mathcal{W}^t) = \mathrm{rg}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{ms}}(\mathcal{W}^t)$. □

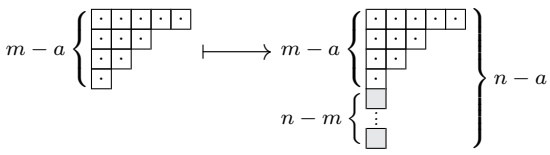
8. Foncteurs d'induction dans Mod($\boldsymbol{k}$[FI])

Nous introduisons certains foncteurs d'« *induction* » dans Mod(k[**FI**]) qui « *recollent* » naturellement les foncteurs $\boldsymbol{Ind}^{\mathfrak{S}_{|\lambda|}}_{G_\lambda}$, $\boldsymbol{I}^{m+a}_m$ et $\boldsymbol{\Theta}^{m+a}_m$ des sections 5.3 et 5.4. Nous étudions ensuite la perturbation du rang de monotonie et stabilité des ***FI***-modules sous l'influence de ces foncteurs (*cf.* 8.1.5-(d)).

8.1. Les foncteurs d'induction $\boldsymbol{Ind_\lambda}$ et $\boldsymbol{Ind_{\rho,\lambda}}$

8.1.1. Lemme et définition. *Pour $\lambda = (1^{\mathbf{x}_1}, 2^{\mathbf{x}_2}, \ldots, m^{\mathbf{x}_m}) \vdash m$ et $n \geqslant m$, on définit $\lambda\backslash n := (1^{(n-m)+\mathbf{x}_1}, 2^{\mathbf{x}_2}, \ldots, m^{\mathbf{x}_m}) \vdash n$. Alors, pour tous $a \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant m \in \mathbb{N}$, l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_{m-a}(m) & \longrightarrow & \mathcal{Y}_{n-a}(n) \\ \lambda & \longmapsto & \lambda\backslash n \end{array}$$



est bijective dès que $m \geqslant 2a$. On a donc $|\mathcal{Y}_a(2a)| = |\mathcal{Y}_{m-a}(m)|$.

Démonstration. En effet, les décompositions de $\lambda \vdash m$ vérifient l'inégalité

$$m = x_1 + 2x_2 + \cdots, mx_m \geqslant x_1 + 2(x_2 + \cdots + x_m) = x_1 + 2(m - a - x_1)\,,$$

dont on déduit que $x_1 \geqslant m - 2a$. Il en résulte que si $m \geqslant 2a$ toute décompositions $\lambda \vdash m$ comporte au moins $m - 2a$ singletons, le fait de les enlever ou de les rajouter établit la bijection entre $\mathcal{Y}_{m-a}(m)$ et $\mathcal{Y}_a(2a)$. □

8.1.2. Remarques et notations

a) Dans la notation '$\lambda\backslash n$', le nombre 'n', qui vérifie $n \geqslant |\lambda|$, indique la taille finale du diagramme. On a (comparer à 7.3.5-(b)) :

$$\ell(\lambda\backslash n) = \ell(\lambda) + (n - |\lambda|)\,,$$

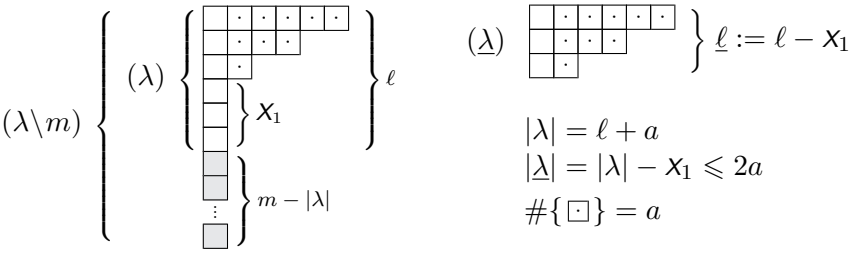
et si $n \leqslant n'$

$$(\lambda\backslash n)\backslash n' = \lambda\backslash n'\,.$$

b) Étant donné $\lambda = (1^{x_1}, 2^{x_2}, 3^{x_3}, \ldots) \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$, on pose

$$\underline{\ell} := \ell - x_1 \quad \text{et} \quad \underline{\lambda} = (1^0, 2^{x_2}, 3^{x_3}, \ldots) \in \mathcal{Y}_{\underline{\ell}}(\underline{\ell} + a)\,.$$

Les données suivantes sont associées au diagramme $\lambda\backslash m$:



On a en particulier : $\lambda\backslash m = \underline{\lambda}\backslash m$, $\forall m \geqslant |\lambda|$, ce qui nous conduit à étendre la portée des notations en posant

$$\lambda\backslash m := \underline{\lambda}\backslash m\,, \quad \forall m \geqslant |\underline{\lambda}| = |\lambda| - x_1\,.$$

8.1.3. Le foncteur $\boldsymbol{Ind}_\lambda$ sur Mod($\boldsymbol{k}$[FB]). Pour $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$ donné,

$$\boldsymbol{Ind}_\lambda : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FB}]) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FB}])_{\geqslant |\underline{\lambda}|}$$

est le foncteur qui fait correspondre à un $\mathcal{S}_{m-a}$-module V_{m-a}, le $\mathcal{S}_m$-module

$$W_m := \begin{cases} 0\,, & \text{si } m < |\underline{\lambda}|\,, \\ \boldsymbol{Ind}_{G_{\underline{\lambda}\backslash m}}^{\mathcal{S}_m} V_{m-a}\,, & \text{si } m \geqslant |\underline{\lambda}|. \end{cases}$$

et qui fait correspondre à un morphisme de $\boldsymbol{FI}$-modules $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, la famille de morphismes :

$$\boldsymbol{Ind}_\lambda(f) := \left\{ \boldsymbol{Ind}_{G_{\underline{\lambda}\backslash m}}^{\mathcal{S}_m}(f_{m-a}) : \boldsymbol{Ind}_{G_{\underline{\lambda}\backslash m}}^{\mathcal{S}_m} V_{m-a} \to \boldsymbol{Ind}_{G_{\underline{\lambda}\backslash m}}^{\mathcal{S}_m} W_{m-a} \right\}_{m \geqslant |\underline{\lambda}|}\,.$$

La proposition suivante étend la définition de $\boldsymbol{Ind}_\lambda$ à la catégorie des ***FI***-modules. Le théorème 8.1.5 établit ensuite le fait que le foncteur est exact et respecte la finitude des ***FI***-modules. Le théorème décrit également son influence sur le rang de monotonie et stabilité des ***FI***-modules.

8.1.4. Proposition et définition de $\boldsymbol{Ind}_\lambda$ sur $\mathbf{Mod}(\boldsymbol{k}[\mathbf{FI}])$

Soit $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell+a)$ et soient $0 \leqslant |\underline{\lambda}| \leqslant m \leqslant n$.

a) *L'inclusion $\mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{S}_n$ induit des inclusions (voir 5.1, 5.1.1)*

$$\mathcal{P}_{\lambda\backslash m} \subseteq \mathcal{P}_{\lambda\backslash n}\,, \quad \mathcal{S}_{\lambda\backslash m} \subseteq \mathcal{S}_{\lambda\backslash n}\,, \quad G_{\lambda\backslash m} \subseteq G_{\lambda\backslash n}\,,$$

b) *Une application k-linéaire $\phi_{n,m} : V_{m-a} \to V_{n-a}$ d'un $\mathcal{S}_{m-a}$-module V_{m-a} vers un $\mathcal{S}_{n-a}$-module V_{n-a}, compatible à l'action de $\mathcal{S}_{m-a}$ et telle que $\mathrm{im}(\phi_{n,m}) \subseteq V_{n-a}^{\mathbb{I}_{m-a}\times\mathcal{S}_{n-m}}$, admet un unique prolongement en une application k-linéaire compatible à l'action de $\mathcal{S}_m$*

$$\boldsymbol{Ind}_\lambda(\phi_{n,m}) : \boldsymbol{Ind}_{G_{\lambda\backslash m}}^{\mathcal{S}_m} V_{m-a} \to \boldsymbol{Ind}_{G_{\lambda\backslash n}}^{\mathcal{S}_n} V_{n-a}$$

De plus,

$$\mathrm{im}(\boldsymbol{Ind}_\lambda(\phi_{n,m})) \subseteq \big(\boldsymbol{Ind}_{G_{\lambda\backslash n}}^{\mathcal{S}_n} V_{n-a}\big)^{\mathbb{I}_m\times\mathcal{S}_{n-m}}\,.$$

c) *Dans* (b)*, si l'on suppose en plus que $k[\mathcal{S}_{n-a}]\cdot\mathrm{im}(\phi_{n,m}) = V_{n-a}$, on a*

$$k[\mathcal{S}_n]\cdot\mathrm{im}(\boldsymbol{Ind}_\lambda\,\phi_{n,m}) = \boldsymbol{Ind}_\lambda\, V_{n-a}\,.$$

d) *Pour tout **FI**-module $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \to V_{m+1}\}$, le **FB**-module $\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V})$ muni de la famille de morphismes $\boldsymbol{Ind}_\lambda(\phi_m)$ est un **FI**-module qui sera pareillement noté. De plus, si $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est un morphisme de **FI**-modules, les morphismes des familles $\boldsymbol{Ind}_\lambda(\phi_\mathcal{V})$ et $\boldsymbol{Ind}_\lambda(\phi_\mathcal{W})$ commutent à ceux de la famille $\boldsymbol{Ind}_\lambda(f)$ de 8.1.3. Les correspondances $\mathcal{V} \rightsquigarrow \boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V})$, $f \rightsquigarrow \boldsymbol{Ind}_\lambda(f)$ définissent un foncteur*

$$\boxed{\boldsymbol{Ind}_\lambda : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant|\underline{\lambda}|}} \qquad (\boldsymbol{Ind}_\lambda)$$

Démonstration. (a) Résulte de remarquer que $\mathcal{P}_{\lambda\backslash m} = \mathcal{P}_{\underline{\lambda}}\times\mathbb{I}_{m-|\underline{\lambda}|}$, ce qui implique que si $\boldsymbol{x}_r$ est le nombre des $\lambda_i = r$, on a $G_\lambda = \mathcal{S}_{\boldsymbol{x}_{\lambda_1}}\times\cdots\times\mathcal{S}_{\boldsymbol{x}_2}\times\mathcal{S}_{\boldsymbol{x}_1}$ alors

$$G_{\lambda\backslash m} = \mathcal{S}_{\boldsymbol{x}_{\lambda_1}}\times\cdots\times\mathcal{S}_{\boldsymbol{x}_2}\times\mathcal{S}_{\boldsymbol{x}_1+m-|\lambda|}\,.$$

(b) Compte tenu de (a), le prolongement $\boldsymbol{Ind}_\lambda(\phi)$ annoncé est bien défini et est unique. L'image de $\boldsymbol{Ind}_\lambda\,\phi$ est alors le sous-$\mathcal{S}_m$-module de $\boldsymbol{Ind}_{G_{\lambda\backslash n}}^{\mathcal{S}_n} V_{n-a}$ engendré par $\mathrm{im}(\phi)$, et le fait que $\mathrm{im}(\boldsymbol{Ind}_\lambda\,\phi)$ est invariant sous l'action du groupe $\mathbb{I}_m\times\mathcal{S}_{n-m}$ résulte de ce que ce groupe commute à l'action de $\mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{S}_n$, qu'il est contenu dans $\mathcal{S}_{\lambda\backslash n}$, et que, par la surjection $\mathcal{S}_{\lambda\backslash n} \twoheadrightarrow G_{\lambda\backslash n}$, il est en bijection avec $\mathbb{I}_{m-a}\times\mathcal{S}_{n-m}$ qui, lui, fixe $\mathrm{im}(\phi)$ par hypothèse.

(c,d) Clairs. □

8.1.5. Théorème. *Soit $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell+a)$. Notons $\underline{\ell} := \ell(\underline{\lambda})$.*

a) *Le foncteur $\boldsymbol{Ind}_\lambda : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant|\underline{\lambda}|}$ de 8.1.4-(d), est covariant, additif et exact. Il est fidèle sur la sous-catégorie $\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant\underline{\ell}}$.*

b) *Si $\mathcal{V}$ est (de type fini) engendré en degrés $\leqslant d$, le $\boldsymbol{FI}$-module $\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V})$ est (de type fini) engendré en degrés $\leqslant \sup(d+a, |\underline{\lambda}|)$.*

c) *On a $\mathcal{P}(\boldsymbol{Ind}_\lambda \mathcal{V}) \leqslant \mathcal{P}(\mathcal{V}) + |\underline{\lambda}|$.*

d) *On a $\mathrm{rg_{ms}}(\boldsymbol{Ind}_\lambda \mathcal{V}) \leqslant \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}) + 2|\underline{\lambda}|$ et $\mathrm{rg_m}(\boldsymbol{Ind}_\lambda \mathcal{V}) \leqslant \mathrm{rg_m}(\mathcal{V}) + a$.*

Démonstration. (a) Clair. (b) Un $\boldsymbol{FI}$-module $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \to V_{m+1}\}_m$ est engendré en degrés $\leqslant d$, si et seulement si, $k[\mathcal{S}_{d+n}] \cdot \mathrm{im}(\phi_{d+n,d}) = V_{d+n}$, pour tout $d \geqslant 0$. L'assertion 8.1.4-(c) montre alors que $\boldsymbol{Ind}_\lambda \mathcal{V}$ est bien engendré en degrés $\leqslant \sup(\underline{\ell}, d) + a$. La deuxième partie de (b) résulte de même, puisque $\mathcal{V}$ est de type fini, si et seulement si, il est engendré en degrés $\leqslant d$ (pour d assez grand), et $\dim_k V_m < +\infty$ pour tout $m \leqslant d$. (c) est établi dans 7.5.4.

(d) pour $\mathrm{rg_{ms}}(\boldsymbol{Ind}_\lambda \mathcal{V})$.

Si $\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}) = +\infty$ on n'a rien à prouver, on suppose donc $\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}) < +\infty$.

(A) Réduction au cas $\mathcal{V} := \mathcal{V}(\mu)$.

Soit $\mathcal{V}$ un $\boldsymbol{FI}$-module et notons pour simplifier

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}(\mathcal{V}) \quad \text{et} \quad s := \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}).$$

Par 7.8.2-(c), $\mathcal{V}_{\geqslant s}$ est extension de $\boldsymbol{FI}$-modules $\mathcal{V}(\mu)_{\geqslant s}$ où $|\mu| + \mu_1 \leqslant s$. Maintenant, pout toute extension de deux tels $\boldsymbol{FI}$-modules

$$0 \to \mathcal{V}(\mu)_{\geqslant s} \to \mathcal{W} \to \mathcal{V}(\mu')_{\geqslant s} \to 0,$$

la suite

$$0 \to \boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu)_{\geqslant s}) \to \boldsymbol{Ind}_\lambda \mathcal{W} \to \boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu')_{\geqslant s}) \to 0$$

est exacte et on aura

$$\mathrm{rg_{ms}}(\boldsymbol{Ind}_\lambda \mathcal{W}) \leqslant s + 2|\underline{\lambda}|, \tag{1}$$

en appliquant 7.4.5-(b) si les extrémités vérifient cette majoration.

Or, on a $\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu)_{\geqslant s}) = \boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu))_{\geqslant s+a}$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{rg_{ms}}(\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu))_{\geqslant s+a}) &\leqslant \sup\{\mathrm{rg_{ms}}(\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu)), s+a\} \\ &= \sup\{|\mu| + \mu_1 + 2|\underline{\lambda}|, s+a\} \leqslant s + 2|\underline{\lambda}|,\end{aligned}$$

et de même pour le terme en μ', en supposant (d) vérifiée pour les extrémités.

En itérant l'idée, la majoration (1) est vérifiée pour toute extension finie de $\boldsymbol{FI}$-modules $\mathcal{V}(\mu)_{\geqslant s}$, donc par $\mathcal{V}_{\geqslant s}$. On considère alors la suite exacte

$$0 \to \boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}_{\geqslant s}) \to \boldsymbol{Ind}_\lambda \mathcal{V} \to \boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}_{<s}) \to 0,$$

où $\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}_{<s})_m = 0$ pour tout $m \geqslant s+a$. On a donc bien

$$\mathrm{rg}_{\mathrm{ms}}(\boldsymbol{Ind}_\lambda\, \mathcal{V}) = \mathrm{rg}_{\mathrm{ms}}(\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}_{\geqslant s})) \leqslant \mathrm{rg}_{\mathrm{ms}}(\mathcal{V}) + 2|\underline{\lambda}|\,.$$

(B) Le cas $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mu)$.
Nous devons prouver la majoration :

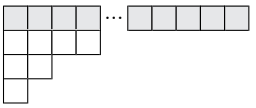
$$\mathrm{rg}_{\mathrm{ms}}(\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu))) \leqslant |\mu| + \mu_1 + 2|\underline{\lambda}|\,,$$

ce pour quoi, il suffira de prouver que l'on a

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant |\mu|+|\underline{\lambda}|} \left\{t + \text{deg-stab}_t\left(\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu))\right)\right\} \leqslant |\mu| + \mu_1 + 2|\underline{\lambda}|\,, \tag{2}$$

par 7.9.8-(b) et puisque $\mathcal{P}(\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu))) \leqslant |\mu| + |\underline{\lambda}|$ par (c).

Dans ces questions il sera important de savoir à partir de quel $m \in \mathbb{N}$ le poids de $\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu))$ est atteint. Les idées de la remarque 7.5.5 montrent que pour avoir $\mathcal{P}(\boldsymbol{Ind}^{\mathcal{S}_m}_{G_{\underline{\lambda}\backslash m}} V(\mu)_{m-a}) = |\mu| + |\underline{\lambda}|$, il faut $\mu[m-a]_1 \geqslant \underline{\ell} + \sup\{\lambda_1, \mu_1\}$

$\mu[m-a] :=$ 

autrement dit, il faudra que

$$\boxed{m \geqslant |\mu| + |\underline{\lambda}| + \sup\{\mu_1, \lambda_1\}} \tag{3}$$

ce que nous supposons désormais.

La preuve de (2) demande plusieurs étapes.

(B_1) Réduction de $\boldsymbol{Ind}^{\mathcal{S}_m}_{G_{\underline{\lambda}\backslash m}} V(\mu)_{m-a}$ à $\boldsymbol{Ind}^{\mathcal{S}_m}_{\mathbf{1}_{|\underline{\lambda}|}\times \mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}} V(\mu)_{m-a}$.

D'après 8.1.4, on a $\mathcal{S}_{\lambda\backslash m} = \mathcal{S}_{\underline{\lambda}} \times \mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}$, d'où

$$G_{\underline{\lambda}\backslash m} = G_{\underline{\lambda}} \times \mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|} \subseteq \mathcal{S}_{m-a}\,.$$

On considère alors le morphisme surjectif de $\mathcal{S}_m$-modules

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{Ind}^{\mathcal{S}_m}_{\mathbf{1}_{|\underline{\lambda}|}\times \mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}} V_{m-a} & \xrightarrow{\rho_m} & \boldsymbol{Ind}^{\mathcal{S}_m}_{G_{\underline{\lambda}\backslash m}} V_{m-a} \\ \| & & \| \\ k[\mathcal{S}_m] \underset{\mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}}{\otimes} V_{m-a} & \xrightarrow{\rho_m} & k[\mathcal{S}_m] \underset{G_{|\underline{\lambda}|}\times \mathcal{S}_{m-\underline{\lambda}}}{\otimes} V_{m-a} \end{array} \tag{4}$$

On remarque ensuite que la surjection (4) établit un isomorphisme de $\mathcal{S}_m$-modules à gauche entre

$$\left(k[\mathcal{S}_m] \underset{\mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}}{\otimes} V_{m-a}\right)^{G_{\underline{\lambda}}} \xrightarrow[\simeq]{} k[\mathcal{S}_m] \underset{G_{|\underline{\lambda}|}\times \mathcal{S}_{m-\underline{\lambda}}}{\otimes} V_{m-a} \tag{5}$$

où le groupe $G_{\underline{\lambda}}$ agit à droite sur le terme de gauche par

$$(P \otimes v) \cdot \alpha := P\alpha \otimes \alpha^{-1}(v)\,.$$

Maintenant, si $\phi_{m-a} : V(\mu)_{m-a} \to V(\mu)_{m+1-a}$ est un morphisme de transition de $\mathcal{V}(\mu)$, le morphisme induit

$$k[\mathcal{S}_m] \underset{\mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}}{\otimes} V_{m-a} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\phi_{m-a}} k[\mathcal{S}_{m+1}] \underset{\mathcal{S}_{m+1-|\underline{\lambda}|}}{\otimes} V_{m+1-a}$$

est un morphisme de $\mathcal{S}_m \times G_{\underline{\lambda}}$-bimodules. Il suffira par conséquent que le morphisme de transition de co-invariants

$$\Psi_{m,t} : \left(k[\mathcal{S}_m] \underset{\mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}}{\otimes} V_{m-a}\right)_{\mathcal{S}_{m-t}} \xrightarrow{(\mathrm{id}\otimes\phi_{m-a})} \left(k[\mathcal{S}_{m+1}] \underset{\mathcal{S}_{m+1-|\underline{\lambda}|}}{\otimes} V_{m+1-a}\right)_{\mathcal{S}_{m+1-t}} \qquad (6)$$

soit un isomorphisme de $\mathcal{S}_t$-modules (à gauche) pour qu'il soit aussi un isomorphisme de $G_{\underline{\lambda}}$-modules à droite et donc pour qu'il induise aussi un isomorphisme sur le sous-$\mathcal{S}_t$-module des $G_{\underline{\lambda}}$-invariants à droite, autrement dit, pour que le morphisme de transition induit

$$\left(\boldsymbol{Ind}_{G_{\underline{\lambda}\setminus m}}^{\mathcal{S}_m} V(\mu)_{m-a}\right)_{\mathcal{S}_{m-t}} \xrightarrow{(\mathrm{ind}_\lambda\, \phi_{m-a})} \left(\boldsymbol{Ind}_{G_{\underline{\lambda}\setminus (m+1)}}^{\mathcal{S}_{m+1}} V(\mu)_{m+1-a}\right)_{\mathcal{S}_{m+1-t}}$$

soit un isomorphisme ([32]).

(B_2) Équivalences dans la description du morphisme $\Psi_{m,t}$ dans (6).
Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $L \subseteq [\![1,m]\!]$, identifions le groupe $\mathcal{S}_L$ des bijections de L, au sous-groupe de $\mathcal{S}_m$ qui fixe $i \notin L$. Le centralisateur de $\mathcal{S}_L$ dans $\mathcal{S}_m$ est le sous-groupe $\mathcal{S}_{[\![1,m]\!]\setminus L}$ qui fixe $i \in L$. Tout comme dans 7.9.1, le foncteur des $\mathcal{S}_L$-co-invariants est le foncteur

$$\begin{aligned}(_)_{\mathcal{S}_L} \,:\, \mathrm{Mod}(\mathcal{S}_m) &\rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{S}_{[\![1,m]\!]\setminus L}) \\ W \quad &\rightsquigarrow W_{\mathcal{S}_L} := k \otimes_{k[\mathcal{S}_L]} W\,.\end{aligned}$$

On note ensuite $L' := L \sqcup \{m+1\} \subseteq [\![1,m+1]\!]$. Pour tout $\boldsymbol{FI}$-module $\mathcal{W}$, le morphisme de transition $\phi_m : W_m \to W_{m+1}$ passe aux co-invariants où il définit le morphisme de $\mathcal{S}_{[\![1,m]\!]\setminus L}$-modules

$$(\phi_m) : (W_m)_{\mathcal{S}_L} \to (W_{m+1})_{\mathcal{S}_{L'}}\,.$$

Maintenant, pour $t \leqslant m$ fixés, notons

$$L := [\![t+1,m]\!] \quad \text{et} \quad A := [\![|\underline{\lambda}|+1,m]\!]\,.$$

[32] La réciproque n'est à priori pas vraie, et nos estimations pour les degrés de stabilité ne seront donc pas toujours optimales, elles le seront lorsque l'action de $G_{\underline{\lambda}}$ sur $V(\mu)_m$ est triviale, par exemple si la suite $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ est strictement décroissante.

L'étude de $\Psi_{m,t}$ se ramène alors à l'étude du morphisme de $\mathcal{S}_t \times G_{\underline{\lambda}}$-bimodules

$$k \underset{\mathcal{S}_L}{\otimes} k[\mathcal{S}_m] \underset{\mathcal{S}_A}{\otimes} V(\mu)_{m-a} \xrightarrow{\Psi_{m,t}} k \underset{\mathcal{S}_{L'}}{\otimes} k[\mathcal{S}_{m+1}] \underset{\mathcal{S}_{A'}}{\otimes} V(\mu)_{m+1-a}\,. \tag{7}$$

Lemme 1. On a des identifications de $\mathcal{S}_A$-modules à droite

$$k \otimes_{\mathcal{S}_L} k[\mathcal{S}_m] = k\big[{}_{\mathcal{S}_L}\backslash\mathcal{S}_m\big] = \bigoplus\nolimits_{\overline{\alpha}\in\left({}_{\mathcal{S}_A}\backslash\mathcal{S}_m/_{\mathcal{S}_L}\right)} k\big[{}_{\mathcal{S}_{A\cap\alpha L}}\backslash\mathcal{S}_A\big]\,,$$

d'où un isomorphisme canonique de foncteurs sur $\mathrm{Mod}(k[\mathcal{S}_{m-a}])$

$$(\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_A}^{\mathcal{S}_m}(_))_{\mathcal{S}_L} \;\simeq\; \bigoplus\nolimits_{\overline{\alpha}\in\left({}_{\mathcal{S}_A}\backslash\mathcal{S}_m/_{\mathcal{S}_L}\right)} (_)_{\mathcal{S}_{A\cap\alpha L}}\,.$$

Indication. Les représentations en question ont les même caractères. ⊟

Grâce à ce lemme, le morphisme (7) se voit comme le morphisme

$$\bigoplus_{\overline{\alpha}\in\left({}_{\mathcal{S}_A}\backslash\mathcal{S}_m/_{\mathcal{S}_L}\right)} (V(\mu)_{m-a})_{\mathcal{S}_{A\cap\alpha L}} \xrightarrow{\Psi_{m,t}} \bigoplus_{\overline{\alpha}\in\left({}_{\mathcal{S}_{A'}}\backslash\mathcal{S}_{m+1}/_{\mathcal{S}_{L'}}\right)} (V(\mu)_{m+1-a})_{\mathcal{S}_{A'\cap\alpha L'}}$$

induit terme à terme par le morphisme de transition ϕ_{m-a} via l'inclusion naturelle

$$\left({}_{\mathcal{S}_A}\backslash^{\mathcal{S}_m}/_{\mathcal{S}_L}\right) \;\subseteq\; \left({}_{\mathcal{S}_{A'}}\backslash^{\mathcal{S}_{m+1}}/_{\mathcal{S}_{L'}}\right). \tag{8}$$

Lemme 2. L'inclusion (8) est une égalité lorsque

$$m \geqslant |\underline{\lambda}| + t \tag{9}$$

auquel cas, on a un isomorphisme de foncteurs sur $\mathrm{Mod}(k[\mathcal{S}_{m-a}])$

$$(\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}}^{\mathcal{S}_m}(_))_{\mathcal{S}_{m-t}} \quad\simeq\quad \bigoplus\nolimits_{\overline{\alpha}\in\left({}_{\mathcal{S}_A}\backslash\mathcal{S}_m/_{\mathcal{S}_L}\right)} (_)_{\mathcal{S}_{|A\cap\alpha L|}}\,.$$

De plus, on a

$$\underline{\ell} \;\leqslant\; \big((m-a) - |A\cap\alpha L|\big) \;\leqslant\; \underline{\ell} + t\,. \tag{10}$$

et $\alpha \in \mathcal{S}_m$ est tel que $A\cap\alpha L$ est l'intervalle des derniers $|A\cap\alpha L|$ éléments de l'intervalle $[\![1,m]\!]$.

Preuve du lemme 2. Pour toute double classe $\overline{\alpha} \in \left(\mathcal{S}_{A'}\backslash\mathcal{S}_{m+1}/\mathcal{S}_{L'}\right)$, on a

$$|A'\cap\alpha L'| \geqslant |L'| + |A'| - (m+1) = \big(m-(|\underline{\lambda}|+t)\big) + 1\,,$$

et lorsque (9) est vérifié, il existe $\alpha \in \overline{\alpha}$ tel que $L'\cap\alpha A'$ est l'intervalle des derniers $|L'\cap\alpha A'|$ éléments de $[\![1,m+1]\!]$, en particulier $\alpha \in \mathcal{S}_m$. Dans ce cas, on a $L'\cap\alpha A' = (L\cap\alpha A)\sqcup\{m+1\}$ et l'inclusion (8) est bien une égalité. La fin de la preuve est immédiate d'après le lemme 1. ⊟

(B_3) Condition d'isomorphie du morphisme $\Psi_{m,t}$ dans (6).
Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'inégalité (2). D'après le lemme 2, l'application $\Psi_{m,t}$ sera bijective lorsque $m \geqslant |\underline{\lambda}| + t$ et que les

$$(V(\mu)_{m-a})_{\mathfrak{S}_{|A\cap\alpha L|}} \xrightarrow{(\phi_{m-a})} (V(\mu)_{m+1-a})_{\mathfrak{S}_{|A'\cap\alpha L'|}} \qquad (\diamond)$$

sont bijectifs. Or, si nous notons $t'' := (m-a) - |A \cap \alpha L|$, on sait par 7.9.5-(c) que l'application ($\diamond$) est bijective dès que $m-a \geqslant t'' + \mu_1$, et comme $t'' \leqslant \underline{\ell} + t$ d'après (10), et que $t \leqslant |\mu| + |\underline{\lambda}|$ dans (2), on voit qu'il suffit que

$$m \geqslant a + \underline{\ell} + |\mu| + |\underline{\lambda}| + \mu_1 = |\mu| + \mu_1 + 2|\underline{\lambda}|$$

(condition qui garantit aussi (3)) pour que $\Psi_{m,t}$ soit bijective. L'inégalité (2) est donc bien satisfaite et ceci termine la preuve de la partie de (d) qui concerne $\mathrm{rg_{ms}}(\boldsymbol{Ind}_\lambda\, \mathcal{V})$.

(d) pour $\mathrm{rg_m}(\boldsymbol{Ind}_\lambda\, \mathcal{V})$, on suit la même démarche que pour $\mathrm{rg_{ms}}$.

(A) Réduction au cas $\mathcal{V}$ est à poids unique t. ([33])
Soit p est le plus petit poids tel que $\mathcal{V}^{(p)} \neq 0$. On a la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{V}^{(>p)} \to \mathcal{V} \to \mathcal{V}^{(p)} \to 0\,,$$

d'où la suite exacte d'extensions

$$0 \to \boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}^{(>p)}) \to \boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}) \to \boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}^{(p)}) \to 0\,.$$

Maintenant, si (d) satisfaite par les extrémités, on aura

$$\begin{aligned}\mathrm{rg_m}(\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V})) &\leqslant \sup\{\mathrm{rg_m}(\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}^{(>p)})), \mathrm{rg_m}(\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V}^{(p)}))\}\\ &= \sup\{\mathrm{rg_m}(\mathcal{V}^{(>p)}) + a, \mathrm{rg_m}(\mathcal{V}^{(p)}) + a\} = \mathrm{rg_m}(\mathcal{V}) + a\,.\end{aligned}$$

par 7.4.5-(a) et d'après 7.5.7-(c), et $\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V})$ vérifie (d).

L'itération de cette idée montre que si (d) est satisfaite par les $\boldsymbol{FI}$-modules à poids unique, elle sera satisfaite par les quotients $\mathcal{V}^{(\leqslant t)}$ pour tout $t \in \mathbb{N}$, donc par $\mathcal{V}$, qu'elle soit de poids fini ou non.

(B) Le cas où $\mathcal{V}$ est à poids unique.
Notons $\phi^{\boldsymbol{I}}_m$ le morphisme de transition à l'ordre m de $\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V})$ et utilisons l'égalité $\mathrm{rg_m} = \mathrm{rg^e_m}$ de 7.9.8-(b). On a donc

$$\mathrm{rg_m}(\boldsymbol{Ind}_\lambda(\mathcal{V})) = \mathrm{ind}\left\{s \in \mathbb{N} \;\middle|\; \Phi_t(\phi^{\boldsymbol{I}}_m) \text{ est injective } \forall m \geqslant s\,, \forall t \leqslant m\right\}.$$

L'étude de l'injectivité de $\Phi_t(\phi^{\boldsymbol{I}}_m)$ suit les mêmes étapes (B_i) que pour le cas $\mathrm{rg_{ms}}$, mais en plus simple puisque seul l'injectivité nous intéresse. De ce fait, on ne rencontre aucune contrainte sur m en (B_1) et (B_2), mais si en (B_3) où il faudra que $\Phi_t(\phi_{m-a})$ soit injective, soit que $m-a \geqslant \mathrm{rg_m}(\mathcal{V})$, grâce, une fois de plus, à l'égalité $\mathrm{rg_m} = \mathrm{rg^e_m}$ de 7.9.8-(b). □

[33] Cette étape n'est pas indispensable, mais elle simplifie quelque peu l'étape *(B)*.

8.1.6. Le foncteur $\boldsymbol{Ind_{\rho,\lambda}}$

Lors de l'étude de rangs de monotonie et stabilité des termes des suites spectrales basiques de 9.3.14, nous aurons besoin d'une version légèrement plus élaborée des foncteurs d'induction $\boldsymbol{Ind}_\lambda$.

Étant donnés, $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell+a)$ *et une représentation* $\rho : \mathcal{H}_{\underline{\lambda}} \to \mathrm{Gl}_k(\boldsymbol{\sigma})$ *d'un sous-groupe* $\mathcal{H}_{\underline{\lambda}} \subseteq \mathcal{S}_{\underline{\lambda}}$, on définit le foncteur

$$\boxed{\boldsymbol{Ind}_{\rho,\lambda} : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant|\underline{\lambda}|}} \qquad (\boldsymbol{Ind}_{\rho,\lambda})$$

qui fait correspondre à un $\mathcal{S}_{m-a}$-module V_{m-a}, le $\mathcal{S}_m$-module

$$W_m := \begin{cases} 0\,, & \text{si } m < |\underline{\lambda}|\,, \\ \mathrm{ind}_{\mathcal{H}_{\underline{\lambda}}\times\mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}}^{\mathcal{S}_m} \boldsymbol{\sigma} \otimes V_{m-a}\,, & \text{si } m \geqslant |\underline{\lambda}|. \end{cases}$$

Les analogues de la proposition 8.1.4 et du théorème 8.1.5 sont encore vérifiés. En particulier, on contrôle toujours le rang de monotonie et stabilité.

8.1.7. Théorème. *Soit* $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell+a)$ *et* $\rho : \mathcal{H}_{\underline{\lambda}} \to \mathrm{Gl}_k(\boldsymbol{\sigma})$ *une représentation d'un sous-groupe* $\mathcal{H}_{\underline{\lambda}} \subseteq \mathcal{S}_{|\underline{\lambda}|}$. *Alors,* $\mathcal{P}(\boldsymbol{Ind}_{\rho,\lambda}\,\mathcal{V}) \leqslant \mathcal{P}(\mathcal{V}) + |\underline{\lambda}|$ *et*

$$\boxed{\mathrm{rg_{ms}}(\boldsymbol{Ind}_{\rho,\lambda}\,\mathcal{V}) \leqslant \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}) + 2|\underline{\lambda}|\,, \quad \mathrm{rg_m}(\boldsymbol{Ind}_{\rho,\lambda}\,\mathcal{V}) \leqslant \mathrm{rg_m}(\mathcal{V}) + a}$$

Indication. On a une surjection naturelle de $\mathcal{S}_m$-modules

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{H}_{\underline{\lambda}}\times\mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}}^{\mathcal{S}_m} \boldsymbol{\sigma} \boxtimes \left(\mathrm{Res}_{\mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}}^{\mathcal{S}_{m-a}} V_{m-a}\right) \twoheadrightarrow \mathrm{ind}_{\mathcal{H}_{\underline{\lambda}}\times\mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}}^{\mathcal{S}_m} \boldsymbol{\sigma} \otimes V_{m-a}$$

et le règles de Littlewood-Richardson (*cf.* note ([28]), p. 86) appliquées au $\mathcal{S}_m$-module de gauche confirment le majorant $\mathcal{P}(\mathcal{V}) + |\underline{\lambda}|$. La preuve de 8.1.5 s'applique alors telle quelle grâce à la réduction B_1 qui fait abstraction de la représentation $\boldsymbol{\sigma}$. □

8.1.8. Rangs des produits tensoriels d'un espace gradué

Étant donné un k-espace vectoriel positivement gradué

$$\mathcal{A} := \bigoplus\nolimits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^i \in \mathrm{Vec}^{\mathbb{N}}(k) \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}^0 = k\,,$$

on munit $\mathcal{A}^{\otimes m} := \underbrace{\mathcal{A} \otimes_k \cdots \otimes_k \mathcal{A}}_{m}$ de l'action de $\alpha \in \mathcal{S}_m$

$$\alpha \cdot (a_1 \otimes \cdots \otimes a_m) := a_{\alpha^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\alpha^{-1}(m)}\,.$$

L'application $\phi_m : \mathcal{A}^{\otimes m} \to \mathcal{A}^{\otimes m+1}$, $\omega \mapsto \omega \otimes \mathbf{1}_k$, où $\mathbf{1}_k \in \mathcal{A}^0$, est alors un morphisme de $\mathcal{S}_m$-modules positivement gradués, et

$$\mathcal{A}^{\otimes} := \{\phi_m : \mathcal{A}^{\otimes m} \to \mathcal{A}^{\otimes m+1}\}_m \qquad (\mathcal{A}^{\otimes})$$

est un ***FI***-module. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, les restrictions des ϕ_m aux composantes homogènes de degré i donnent le sous-***FI***-module de $(\mathcal{A}^{\otimes})^i \subseteq \mathcal{A}^{\otimes}$

$$(\mathcal{A}^{\otimes})^i := \left\{\phi_m : (\mathcal{A}^{\otimes m})^i \to (\mathcal{A}^{\otimes m+1})^i\right\}_m . \qquad (\mathcal{A}^{\otimes})^i$$

8.1.9. Proposition ([10]). *Soit $\mathcal{A}$ un k-espace vectoriel positivement gradué avec $\mathcal{A}^0 = k$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathcal{P}((\mathcal{A}^{\otimes})^i) \leqslant i\,, \quad \mathrm{rg_m}((\mathcal{A}^{\otimes})^i) \leqslant i \quad \textit{et} \quad \mathrm{rg_{ms}}((\mathcal{A}^{\otimes})^i) \leqslant 2i\,.$$

Démonstration. Pour tout $m \geqslant i$, on a un isomorphisme

$$(\mathcal{A}^{\otimes m})^i = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}_i(2i)} \mathrm{ind}_{G_{\underline{\lambda}} \times \mathcal{S}_{m-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_m} \underbrace{\mathcal{A}^{\lambda_1 - 1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}^{\lambda_{\underline{\ell}} - 1}}_{\underline{\ell}} \boxtimes \underbrace{k \otimes \cdots \otimes k}_{m-\underline{\ell}} \qquad (*)$$

Où $G_{\underline{\lambda}} \times \mathcal{S}_{m-\underline{\ell}}$ est sous-groupe de $\mathcal{S}_{\underline{\ell}} \times \mathcal{S}_{m-\underline{\ell}} \subseteq \mathcal{S}_m$. Les règles de Littlewood-Richardson (7.5.1) montrent aussitôt que le poids de chaque induit est majoré par $\underline{\ell} = \ell(\underline{\lambda}) \leqslant i$. Chaque terme de la somme $(*)$ n'est autre que le ***FI***-module $\mathcal{M}_{\underline{\ell}}^{G_{\underline{\lambda}}}(\mathcal{A}^{\lambda_1 - 1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}^{\lambda_{\underline{\ell}} - 1})$ de 7.6 dont le rang de monotonie est majoré par $\underline{\ell}$ et celui de stabilité par $2\underline{\ell}$ d'après 7.6.2-(e). □

8.1.10. Commentaire. Si W est une représentation de $G_{\underline{\lambda}}$, la famille de foncteurs $\{\mathrm{ind}_{G_{\underline{\lambda}} \times \mathcal{S}_{m-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_m} W \boxtimes (_)\}_m$ se recolle en un foncteur $\boldsymbol{Ind}_{G_{\underline{\lambda}}} W \boxtimes (_)$ défini sur $\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])$. Il est alors possible d'adapter la démarche des théorèmes 8.1.5 et 8.1.7 pour démontrer que l'on a

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{Ind}_{G_{\underline{\lambda}}} W \boxtimes \mathcal{V}) \leqslant \mathcal{P}(\mathcal{V}) + \underline{\ell} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{rg_{ms}}(\boldsymbol{Ind}_{G_{\underline{\lambda}}} W \boxtimes \mathcal{V}) \leqslant \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}) + 2\underline{\ell}\,, \\ \mathrm{rg_m}(\boldsymbol{Ind}_{G_{\underline{\lambda}}} W \boxtimes \mathcal{V}) \leqslant \mathrm{rg_m}(\mathcal{V}) + \underline{\ell}\,. \end{cases}$$

Le cas $W := \mathcal{A}^{\lambda_1 - 1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}^{\lambda_{\underline{\ell}} - 1}$ et $\mathcal{V} := \mathcal{V}(0)$ aurait alors fournit une nouvelle preuve de 8.1.9.

8.2. Les foncteurs d'induction $\boldsymbol{I}^a$, $\boldsymbol{I}(\mathfrak{a})$ et $\boldsymbol{\Theta}^a$

Dans la section 5.3, nous avons introduit le foncteur $\boldsymbol{I}_{\ell}^{\ell+a}$ qui associe à une représentation de $\mathcal{S}_\ell$ une représentation de $\mathcal{S}_{\ell+a}$ en induisant suivant tous les diagrammes de Young $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$:

$$\boldsymbol{I}_{\ell}^{\ell+a} : \mathrm{Mod}(k[\mathcal{S}_\ell]) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(k[\mathcal{S}_{\ell+a}])\,, \quad \boldsymbol{I}_{\ell}^{\ell+a} := \sum\nolimits_{\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell+a)} \boldsymbol{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_{\ell+a}} \,. \quad (\boldsymbol{I})$$

Ce foncteur apparaît naturellement dans l'étude des espaces $\Delta_\ell \boldsymbol{X}^{\ell+a}$. Il intervient notamment dans la proposition 5.3.1, où il donne l'égalité

$$\chi_{\mathrm{c}}(\Delta_\ell \boldsymbol{X}^{\ell+a}; i) = \boldsymbol{I}_{\ell}^{\ell+a}(\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X}); i))\,.$$

Nous allons maintenant recoller la famille des foncteurs $\{\boldsymbol{I}_{m-a}^m\}_m$ en un unique foncteur $\boldsymbol{I}^a : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])$ dans le but d'étudier la stabilité (*cf.* 7.7) des $k[\boldsymbol{FB}]$-modules $\{H_{\mathrm{c}}^i(\Delta_{m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$ et $\{H^i(\Delta_{m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$.

Dans la section 8.1.4, nous avons associé à chaque $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell+a)$ un foncteur

$$\boldsymbol{Ind}_\lambda : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant |\underline{\lambda}|} \ .$$

Sa définition est telle que $\boldsymbol{Ind}_\lambda = \boldsymbol{Ind}_{\underline{\lambda}}$ où $|\underline{\lambda}| \leqslant 2a$, de sorte que la correspondance

$$\Big(\bigcup\nolimits_{1\leqslant i\leqslant a} \mathcal{Y}_i(i+a)\Big) \ni \lambda \mapsto \boldsymbol{Ind}_\lambda$$

est surjective sur l'ensemble de tels foncteurs. Mieux encore, le lemme 8.1.1 montre que cette correspondance devient bijective pour peu que l'on tronque les foncteurs : $\mathcal{Y}_a(2a) \ni \lambda \xleftrightarrow[\simeq]{} \boldsymbol{Ind}_\lambda(_)_{\geqslant 2a}$. On pose alors pour $a \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\boldsymbol{I}^a := \sum\nolimits_{\lambda\in\mathcal{Y}_a(2a)} \boldsymbol{Ind}_\lambda(_)_{\geqslant 2a} : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant 2a}} \qquad (\boldsymbol{I}^a)$$

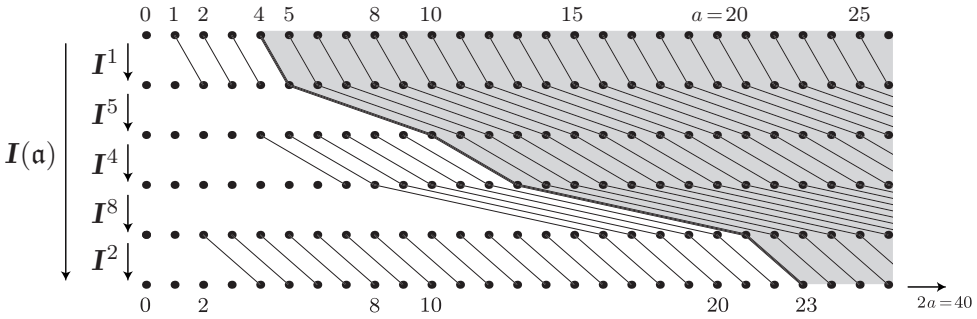
qui est un foncteur exact, fidèle sur $\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant a}$.

8.2.1. Nous pouvons maintenant facilement introduire l'analogue des inductions composées $\boldsymbol{I}(\sigma)$ et $\boldsymbol{\Theta}_\ell^{\ell+a}$ de 5.4.

Pour $a \in \mathbb{N}$, notons $\mathfrak{A}(a)$ l'ensemble des suites d'entiers $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$, avec $a_i > 0$ et tels que $a = \sum_i a_i$. On pose pour chaque $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}(a)$:

$$\boldsymbol{I}(\mathfrak{a}) := \boldsymbol{I}^{a_1} \circ \boldsymbol{I}^{a_2} \circ \cdots \circ \boldsymbol{I}^{a_r} : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \to \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant 2a} \ .$$

C'est un foncteur exact. La valeur de troncature de l'image, fixée à $2a$, est plus large que nécessaire, mais elle est ainsi indépendante de $\mathfrak{a}$. De même, le noyau de $\boldsymbol{I}(\mathfrak{a})$ dépend beaucoup de la suite $\mathfrak{a}$. La figure suivante illustre ces remarques, en grisé la zone de fidélité d'un foncteur composé pour $a = 20$.



Foncteur d'inductions composées $\boldsymbol{I}(\mathfrak{a}) = \boldsymbol{I}(2,8,4,5,1)$

On pose ensuite

$$\boxed{\boldsymbol{\Theta}^a := (-1)^a \sum\nolimits_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} (-1)^{|\mathfrak{a}|}\, \boldsymbol{I}(\mathfrak{a}) : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \to K(\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant 2a})} \qquad (\boldsymbol{\Theta}^a)$$

où la présence de signes indique que l'on a affaire à des ***FI***-modules virtuels.

Le corollaire suivant du théorème 8.1.5 est immédiat.

8.2.2. Théorème. *Soient $a \in \mathbb{N}$ et $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}(a)$ et désignons par $\boldsymbol{L}^a$ l'un des trois foncteurs $\boldsymbol{I}^a, \boldsymbol{I}(\mathfrak{a}), \boldsymbol{\Theta}^a$.*

a) *Le foncteur $\boldsymbol{L}^a : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant 2a}$ est covariant, additif, exact.*

b) *Si $\mathcal{V}$ est (de type fini) engendré en degrés $\leqslant d$, le $\boldsymbol{FI}$-module $\boldsymbol{L}^a(\mathcal{V})$ est (de type fini) engendré en degrés $\leqslant \sup(d+a, 2a)$.*

c) *On a* $\boxed{\mathrm{rg}_{\mathrm{ms}}(\boldsymbol{L}^a\mathcal{V}) \leqslant \mathrm{rg}_{\mathrm{ms}}(\mathcal{V}) + 4\,a\,, \quad \mathrm{rg}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{L}^a\mathcal{V}) \leqslant \mathrm{rg}_{\mathrm{m}}(\mathcal{V}) + a}$

9. Stabilité des familles $\{\mathcal{S}_m : \boldsymbol{H}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{\Delta}_{?m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$

Dans cette section on généralise le théorème de stabilité de Church ([7]) sur les familles $\{\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})\}_m$ où $\boldsymbol{M}$ est une variété différentielle orientée, au cas des des familles $\{\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m\}_m$ où $\boldsymbol{M}$ est une *pseudovariété* orientable, et où $a \in \mathbb{N}$ est quelconque.

9.1. Structure de $\boldsymbol{FI}$-module de $\{\boldsymbol{H}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{\Delta}_{?m-a}\boldsymbol{M}^m)\}_m$

Dans les sections précédentes (*cf.* 6.1, 6.6.5), nous avons muni les familles $H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{X}^m)$ et $H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{X}^m)$ de structures de $\boldsymbol{FI}$-modules induites par les projections $p_m : \boldsymbol{X}^{m+1} \to \boldsymbol{X}^m$. On étend maintenant ces structures aux familles $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m)\}_m$ pour toute pseudovariété orientée $\boldsymbol{M}$. Pour cela on considère le diagramme commutatif de décompositions ouvertes-fermées :

$$\begin{array}{ccccc}
\Delta_{m+1-a}\boldsymbol{M}^{m+1} & \xhookrightarrow[\text{ouvert}]{} & \Delta_{\leqslant m+1-a}\boldsymbol{M}^{m+1} & \xhookleftarrow[\text{fermé}]{} & \Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^{m+1} \\
\big\downarrow{\scriptstyle j} & & \big\uparrow{\scriptstyle i} & & \big\uparrow{\scriptstyle i} \\
\Delta_{m-a}\boldsymbol{M}^m \times \boldsymbol{M} & \xhookrightarrow[\text{ouvert}]{} & \Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m \times \boldsymbol{M} & \xhookleftarrow[\text{fermé}]{} & \Delta_{\leqslant m-a-1}\boldsymbol{M}^m \times \boldsymbol{M} \\
\big\downarrow{\scriptstyle p_m} & & \big\downarrow{\scriptstyle p_m} & & \big\downarrow{\scriptstyle p_m} \\
\Delta_{m-a}\boldsymbol{M}^m & \xhookrightarrow{\text{ouvert}} & \Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m & \xhookleftarrow{\text{fermé}} & \Delta_{\leqslant m-a-1}\boldsymbol{M}^m
\end{array}$$

où j est une inclusion ouverte et les inclusions i sont fermées entre des espaces de même dimension cohomologique $(m-a)\,d_{\boldsymbol{M}}$ et mêmes orientations. On en déduit par les règles de fonctorialité de la cohomologie de Borel-Moore, le diagramme commutatif de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccc}
H^*_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m+1-a}\boldsymbol{M}^{m+1}) & \leftarrow & H^*_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m+1-a}\boldsymbol{M}^{m+1}) & \longleftarrow & H^{*-d_M}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^{m+1}) & \longleftarrow & \\
\big\uparrow{\scriptstyle (j_!)^\vee} & & \big\uparrow{\scriptstyle (i^*)^\vee} & & \big\uparrow{\scriptstyle (i^*)^\vee} & & \\
H^*_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{M}^m \times \boldsymbol{M}) & \leftarrow & H^*_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m \times \boldsymbol{M}) & \leftarrow & H^{*-d_M}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a-1}\boldsymbol{M}^m \times \boldsymbol{M}) & \leftarrow & \\
\big\uparrow{\scriptstyle p_m^*} & & \big\uparrow{\scriptstyle p_m^*} & & \big\uparrow{\scriptstyle p_m^*} & & \\
H^*_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{M}^m) & \longleftarrow & H^*_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m) & \longleftarrow & H^{*-d_M}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a-1}\boldsymbol{M}^m) & \longleftarrow &
\end{array}$$

où les composées des flèches verticales sont compatibles à l'action des groupes symétriques et vérifient la condition pour définir des $\boldsymbol{FI}$-modules.

Ces observations constituent l'essentiel de la preuve des assertions (a,b) de proposition suivante.

9.1.1. Proposition et définitions. *Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété orientée de dimension $d_{\boldsymbol{M}}$, et soient $0 < a \leqslant m$.*

a) *Dans le diagramme précédent, les morphismes verticaux définissent les $\boldsymbol{FI}$-modules $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m)\}_m$ et les horizontaux définissent alors la suite exacte longue de $\boldsymbol{FI}$-modules*

$$\to\big\{H^{i-d_M}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a-1}\boldsymbol{M}^m)\big\}\to\big\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m)\big\}\to\big\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{M}^m)\big\}\to$$

b) *Les complexes fondamentaux en cohomologie de Borel-Moore de la famille $\{\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m\}_m$, obtenus en dualisant les complexes 3.2.2, s'organisent naturellement en* « complexe fondamental de $\boldsymbol{FI}$-modules »

$$0 \to \{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m)\}_m \to H(m{-}a) \to H(m{-}a{-}1) \to \cdots \to H(1) \to 0$$

où $H(m{-}a{-}b) := \big\{H^{i-b\,(d_M-1)}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a-b}\boldsymbol{M}^m)\big\}_m$ et $i \geqslant b(d_{\boldsymbol{M}}{-}1)$.
Lorsque $\boldsymbol{M}$ est i-acyclique, le complexe fondamental est exact et l'on a l'égalité suivante dans $K(\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]))$,

$$\big\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m)\big\} = \sum_{0\leqslant b<m-a}(-1)^b\big(\big\{H^{i-b\,(d_M-1)}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a-b}\boldsymbol{M}^m)\big\}_{m-a-b}\big)\,.$$

c) *Le foncteur $\boldsymbol{I}^a : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant 2a}$ identifie les $\boldsymbol{FI}$-modules*

$$\big\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{M}^m)\big\}_{m\geqslant 2a} = \boldsymbol{I}^a\,\big(\big\{H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{m-a}(\boldsymbol{M}))\big\}_{m-a}\big)\,.$$

d) *Si $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, les foncteurs $\boldsymbol{\Theta}^a, \boldsymbol{I}^a : \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant 2a}$ donnent les identifications suivantes dans $K(\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]))$,*

$$\big\{H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))\big\}_{m\geqslant 2\tilde{\imath}} = \sum\nolimits_{0\leqslant a<m}\boldsymbol{\Theta}^a\big(\big\{H^{i-a\,(d_X-1)}_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{X}^{m-a})\big\}_{m-a}\big)$$

$$\big\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{X}^m)\big\}_{m\geqslant 2a+2\tilde{\imath}} = \\ = \boldsymbol{I}^a\Big(\sum\nolimits_{0\leqslant b<m-a}\boldsymbol{\Theta}^b\big(\big\{H^{i-b(d_X-1)}_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{X}^{m-(a+b)}\big\}_{m-(a+b)}\big)\Big)$$

$$\big\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{X}^m)\big\}_{m\geqslant 2a+2\tilde{\imath}} = \\ = \sum_{0\leqslant b<m-a}(-1)^b\ \boldsymbol{I}^{a+b}\Big(\sum_{0\leqslant c<m-a-b}\boldsymbol{\Theta}^c\big(\big\{H^{i-(b+c)(d_X-1)}_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{X}^{m-(a+b+c)}\big\}_{m-(a+b+c)}\big)\ \Big)$$

avec $\tilde{\imath} = \lfloor i/(d_{\boldsymbol{X}}{-}1)\rfloor$.

Indications. (c) résulte de 5.3.1 et de la définition de $\boldsymbol{I}^a$ (8.2), et (d) résulte de la définition de de $\boldsymbol{\Theta}^a$ (*loc.cit.*) et des égalités 5.4.1-(a)-(i,ii,iii), le tout modulo les équivalences $H^i_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant r}\boldsymbol{X}^s)^\vee = H^{r\,d_X-i}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant r}\boldsymbol{X}^s)$. □

9.2. Les familles de représentations $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$

Nous supposons dans un premier temps que $\boldsymbol{X}$ est une pseudovariété orientable *i-acyclique*. Plus tard, dans 9.3, nous nous affranchirons de l'hypothèse de i-acyclicité.

9.2.1. Le cas de la stabilité de la cohomologie à support compact. Ce cas est inintéressant si $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique puisque, d'après 4.2.5 et 4.4, les polynômes de Poincaré pour $H_{\mathrm{c}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m)$ sont de valuation $m-a$, ce qui implique que

$$H^i_{\mathrm{c}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m) = 0\,, \quad \forall m > a+i\,.$$

9.2.2. Le cas de la stabilité de la cohomologie de Borel-Moore. Lorsque $\boldsymbol{M}$ est de type fini, la condition de stabilité de représentations impose sur $\boldsymbol{M}$ qu'elle soit connexe et que $\dim_{\mathbb{R}} \boldsymbol{M} \geqslant 2$, car, autrement, les $\boldsymbol{FI}$-modules $H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{M}^m)$ ne sont pas de type fini. En effet, si $r := |\pi_0(\boldsymbol{M})|$, on a $|\pi_0(\boldsymbol{M}^m)| = r^m$ et $|\pi_0(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))| = (r^m)^{\underline{m}}$ ce qui exclut toute possibilité de finitude pour le $\boldsymbol{FI}$-module $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{M}^m)\}_m$ pour peu que $r > 1$. D'autre part, si $\boldsymbol{M}$ est connexe et $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M}) = 1$, c'est une courbe illimitée avec un nombre fini f de points multiples et alors $|\pi_0(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))| \geqslant (m-f)!$ d'où encore une obstruction à la finitude.

On suppose que $\boldsymbol{X}$ est une pseudovariété i-acyclique connexe orientable.

• **(A)** *Le cas de* $\{\Delta_{\leqslant m}(\boldsymbol{X}^m)\}_m$.— On s'intéresse au $\boldsymbol{FI}$-module

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{X}; i) := \{H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{X}^m)\}_m\,.$$

La proposition 8.1.9 s'applique, car $H^0_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{X}; k) = k$ (*cf.* 6.2.6-(c)), et donne

$$\mathrm{rg}_{\mathrm{ms}}(\mathcal{A}(\boldsymbol{X}; i)) \leqslant 2i\,, \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}_{\mathrm{m}}(\mathcal{A}(\boldsymbol{X}; i)) \leqslant i\,. \tag{A}$$

• **(B)** *Le cas de* $\{\Delta_m(\boldsymbol{X}^m)\}_m$.— ([34]) On s'intéresse au $\boldsymbol{FI}$-module

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{X}; i) := \{H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})\}_m\,.$$

L'égalité 9.1.1-(d) nous conduit à chercher un majorant pour les rangs de stabilité des $\boldsymbol{FI}$-modules

$$\mathcal{B}_a(\boldsymbol{X}; i) := \boldsymbol{\Theta}^a\big(\{H^{i-a\,(d_{\boldsymbol{X}}-1)}_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{X}^{m-a})\}_{m-a}\big) \tag{$*$}$$

pour $0 \leqslant a < m$ vérifiant

$$a(d_{\boldsymbol{X}}-1) \leqslant i\,. \tag{$\ddagger$}$$

On sait d'après **(A)** que le $\boldsymbol{FI}$-module $\{H^{i-a(d_{\boldsymbol{X}}-1)}_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{X}^{m-a})\}_{m-a}$ est stable pour $m-a \geqslant 2\big(i-a\,(d_{\boldsymbol{X}}-1)\big)$ et le théorème 8.2.2-(c) permet d'évaluer les

[34] Le cas particulier où $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique est étudié par Church dans [7], (*cf.* 7.1) ; il a suscité ce chapitre de généralisations.

rangs de monotonie et stabilité de $\mathcal{B}_a(\boldsymbol{X};i)$. On aboutit alors aux majorations

$$\begin{cases} \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{B}_a(\boldsymbol{X};i)_{\geqslant 2\tilde{\imath}}) \;\leqslant\; 2\big(i-a(d_{\boldsymbol{X}}-1)\big)+4a \;\leqslant\; \begin{cases} 4i, \text{ si } d_{\boldsymbol{X}}=2, \\ 2i, \text{ si } d_{\boldsymbol{X}}\geqslant 3, \end{cases} \\ \mathrm{rg_{m}}(\mathcal{B}_a(\boldsymbol{X};i)_{\geqslant 2\tilde{\imath}}) \;\leqslant\; \big(i-a(d_{\boldsymbol{X}}-1)\big)+a = i-a(d_{\boldsymbol{X}}-2) \;\leqslant\; i\,, \end{cases} \tag{B}$$

dont la première résulte d'expliciter $2\big(i+(3-d_{\boldsymbol{X}})a\big)$ suivant que $d_{\boldsymbol{X}}=2$ ou $d_{\boldsymbol{X}}\geqslant 3$ et moyennant la majoration (‡).

Il faut encore remarquer que le foncteurs $\boldsymbol{\Theta}^a$ considérés sont à valeurs dans $\mathrm{Mod}(([\mathbf{FI}])\,k)_{\geqslant 2a}$ et que dans tous les cas on a $2a\leqslant 2i$ de sorte que les majorations (B) sont aussi valables pour $\mathcal{B}(\boldsymbol{X};i)$.

• **(C)** *Le cas de* $\{\Delta_{m-a}(\boldsymbol{X})\}_m$.— On s'intéresse au $\boldsymbol{FI}$-module

$$\mathcal{C}_a(\boldsymbol{X};i) := \{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m\,.$$

On raisonne exactement comme dans (B) à l'aide de la formule 9.1.1-(d), ce qui nous conduit à calculer les rangs de stabilité des $\boldsymbol{FI}$-modules

$$\boldsymbol{I}^a\Big(\sum\nolimits_{0\leqslant b<m-a}\boldsymbol{\Theta}^b\big(\big\{H^{i-b\,(d_{\boldsymbol{X}}-1)}_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{X}^{m-(a+b)}\big\}_{m-(a+b)}\big)\Big)\,.$$

On est conduit à trouver le borne supérieures

$$\begin{cases} \mathrm{rg_{ms}} \;\leftrightarrow \sup_{0\leqslant b}\big\{2\big(i-b\,(d_{\boldsymbol{X}}-1)\big)+4b+4a\big\} \\ \mathrm{rg_{m}} \;\leftrightarrow \sup_{0\leqslant b}\big\{\big(i-b\,(d_{\boldsymbol{X}}-1)\big)+b+a\big\} \end{cases}$$

sachant que $b\,(d_{\boldsymbol{X}}-1)\leqslant i$. On trouve les majorations

$$\begin{cases} \mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{C}_a(\boldsymbol{X};i)_{\geqslant 2a+2\tilde{\imath}}) \leqslant \begin{cases} 4i+4a, \text{ si } d_{\boldsymbol{X}}=2, \\ 2i+4a, \text{ si } d_{\boldsymbol{X}}\geqslant 3, \end{cases} \\ \mathrm{rg_{m}}(\mathcal{C}_a(\boldsymbol{X};i)_{\geqslant 2a+2\tilde{\imath}}) \leqslant i+a\,, \end{cases} \tag{C}$$

qui sont également valables pour $\mathcal{C}_a(\boldsymbol{X};i)$ puisque $\tilde{\imath}=\lfloor i/(d_{\boldsymbol{X}}-1)\rfloor\leqslant i$.

• **(D)** *Le cas de* $\{\Delta_{\leqslant m-a}(\boldsymbol{X})\}_m$.— On s'intéresse au $\boldsymbol{FI}$-module (9.1)

$$\mathcal{D}_a(\boldsymbol{X};i) := \{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$$

On trouve encore les mêmes majorations des rangs que dans (C). Pour s'en convaincre, on pourrait raisonner à l'aide de la formule 9.1.1-(d), mais il s'avère plus intéressant d'appliquer (**C**) au complexe fondamental de $\boldsymbol{FI}$-modules pour la cohomologie de Borel-Moore (9.1.1-(b)),

$$0\to\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m\to H(m{-}a)\to H(m{-}a{-}1)\to\cdots\to H(1)\to 0$$

avec $H(m{-}a{-}\ell):=\{H^{i-(d_{\boldsymbol{X}}-1)\ell}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a-\ell}\boldsymbol{X}^m)\}_m$ et aussi $i\geqslant(d_{\boldsymbol{X}}-1)\ell$, et qui est exact dans le cas présent puisque $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique.

Le ***FI***-module $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m)\}_m$ apparaît ainsi comme somme alternée des ***FI***-modules $H(m-a-\ell)$ dans le groupe de Grothendieck $K_0(\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]))$, et hérite donc des mêmes rangs de monotonie et stabilité d'après 7.4.5-(b-ii).

Résumons les conclusions de ces observations sous forme de théorème.

9.2.3. Théorème. *Soit $\boldsymbol{X}$ une pseudovariété i-acyclique connexe orientable de dimension $d_{\boldsymbol{X}} \geqslant 2$. Pour $a, i \in \mathbb{N}$, le **FI**-module $\{\mathcal{S}_m : H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$ est monotone pour $m \geqslant i+a$ et est monotone et stable pour $m \geqslant 4i+4a$, si $d_{\boldsymbol{X}} = 2$, et pour $m \geqslant 2i+4a$, si $d_{\boldsymbol{X}} \geqslant 3$. Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont (donc) polynomiales sur les mêmes intervalles d'entiers m.*

9.2.4. Remarque. Dans les arguments qui précèdent, $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$ a une structure à priori de ***FI***-module, celle donnée par les morphismes image-inverse (9.1). Lorsque nous utilisons le théorème 9.1.1-(d) nous passons de la catégorie des ***FI***-modules à son groupe de Grothendieck $K_0(\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}]))$ mais la conclusion se fait de nouveau dans $\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])$. Par exemple, le ***FI***-module $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{X}^m)\}_m$ (†) se retrouve identifié à une somme alternée de ***FI***-modules ayant les bons rangs de monotonie et stabilité, mais cette somme alternée provient en fait d'une résolution dans $\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant ?}$ par des ***FI***-modules à la fois monotones et stables. Le fait que la sous-catégorie pleine $\mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant ?}$ de ce type de ***FI***-modules en soit une sous-catégorie abélienne permet de conclure que (†) est également monotone et stable pour $m \geqslant ?$. C'est d'ailleurs ce que dit la proposition 7.4.5-(b-ii).

9.3. Stabilité des familles de représentations $\{\boldsymbol{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}M^m)}\}_m$

On rappelle que $\boldsymbol{M}$ désigne une pseudovariété orientée de type fini.

Nous démontrerons l'analogue du dernier théorème 9.2.3 pour la famille de représentations $\{\mathcal{S}_m : H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$ où $\boldsymbol{M}$ est une pseudovariété orientée générale, *i.e.* qu'elle soit i-acyclique ou non.

9.3.1. Stabilité dans les suites spectrales basiques. Le théorème 6.7.1 établit que les ***FI***-modules définis par les morphismes

$$\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)_1^{p,q} : \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} \to \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p+1,q},$$

sont canoniquement isomorphes aux ***FI***-modules définis par les morphismes

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \boldsymbol{\sigma} \otimes H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m}) \xrightarrow{\mathrm{ind}\, p_m^*} \mathrm{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+2}}^{\mathcal{S}_{m+1}} \boldsymbol{\sigma} \otimes H^q_{\mathrm{BM}}(U^{m+1}_{m-p,\dots,m+1})$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ indique que l'action de $\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathbf{1}$ est tordue $\boldsymbol{\sigma}_{m-(p+1)}$ et lorsque le couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ est soumis à la contrainte $q = i + (m-(p+1))$.

Le théorème (*loc.cit.*) décrit aussi, dans son assertion (c), le diagramme commutatif d'*espaces vectoriels*

$$\begin{array}{ccc} H^q_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m}) & \xrightarrow{\quad p_m^* \quad} & H^q_{\mathrm{BM}}(U^{m+1}_{m-p,\dots,m+1}) \\ {\scriptstyle \Xi^m_{p+1}}\downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \uparrow{\scriptstyle (\Xi^{m+1}_{p+2})^{-1}} \\ \bigoplus_{f\in\mathcal{F}(p+1,m)} H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}(f)}(\boldsymbol{M}_{>0})) & \xrightarrow{\oplus p_{p+1}^*} & \bigoplus_{f^\bullet\in\mathcal{F}^\bullet(p+2,m+1)} H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}(f^\bullet)}(\boldsymbol{M}_{>0})) \end{array}$$

où les isomorphismes Ξ^m_{p+1} pourraient nous inciter à transporter l'action des $\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}$ pour en faire un diagramme commutatif de *représentations*, quelque chose dont nous n'avons pas encore eu besoin. Or, un tel transfert formel de structure sur des sommes directes dont la définition est basée sur un ordre précis des $m-(p+1)$ premières coordonnées ne rend pas transparent le fait que l'on est en présence de sommes directes de ***FI***-modules. C'est pour cette raison que nous introduisons dans les sections qui suivent une nouvelle décomposition de $H_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m})$ qui respecte par construction les symétries et pour laquelle les analogues du diagramme précédent seront à priori compatibles à l'action de $\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}$.

9.3.2. Tableaux et fonctions de $\mathcal{F}(p+1,m)$. Nous encodons une fonction $f\in\mathcal{F}(p+1,m)$ sous la forme d'un tableau à $p+1$ lignes et m boites.

L'idée est la suivante. Soit $a>0$. Pour toute suite $\overline{x}=(x_1,\dots,x_a)$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1,a]\!]$, associons la fonction $f_{\overline{x}}\in\mathcal{F}(1,a+1)$ définie pour $i\leqslant a$, par la règle suivante

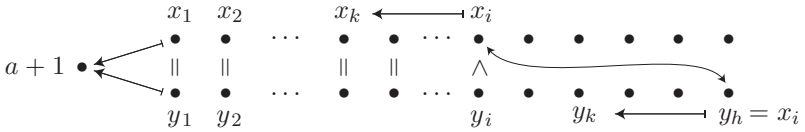
Pour $i\in[\![1,a]\!]$, notons $I_{\overline{x}}(i):=\{j\leqslant i\mid x_j>x_i\}$. Alors

$$f_{\overline{x}}(x_i)=\begin{cases} a+1\,, & \textit{si } I_{\overline{x}}(i)=\emptyset \\ x_{\sup I_{\overline{x}}(i)}, & \textit{autrement.}\end{cases}$$

Par exemple :

$$\overline{x}=(1,2,\dots,a{-}1,a)\mapsto f_{\overline{x}}(i)=a{+}1$$
$$\overline{x}=(a,a{-}1,\dots,2,1)\mapsto f_{\overline{x}}(i)=\sup\{i{+}1,a{+}1\}$$

Cette correspondance est injective. En effet, si $\overline{x}\neq\overline{y}$, il existe un premier i tel que $x_i\neq y_i$. Supposons que l'on ait $x_i<y_i$. Alors, comme il existe $h>i$ avec $y_h=x_i$, on aura $f_{\overline{y}}(x_i)=f_{\overline{y}}(y_h)=y_k\neq a+1$ pour un certain $k\geqslant i$, tandis que $f_{\overline{x}}(x_i)=x_k=y_k$ pour un certain $k<i$, ou bien $f_{\overline{x}}(x_i)=a+1$. dans tous les cas, $f_{\overline{x}}\neq f_{\overline{y}}$.



Comme d'autre part $a!=|\mathcal{F}(1,a+1)|$, on conclut que la correspondance en question est bijective. Cette idée est la base de la preuve du lemme suivant.

9.3.3. Lemme et notations. *L'ensemble $\mathcal{F}(p{+}1,m)$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{T}(p{+}1,m)$ des tableaux à $(p{+}1)$ lignes et m boites de formes :*

$\tau :=$

$m{-}p$	•	•		
$m{-}p{+}1$	•			
$m{-}p{+}2$	•	•	•	•
⋮	(j) ←			(i)
$m{-}2$				
$m{-}1$	•			
m	•	•	•	

où les boites marquées par '•' sont remplies par les entiers de $[\![1,m{-}(p{+}1)]\!]$ de manière biunivoque. La correspondance associe au tableau τ la fonction f_τ qui, appliquée à $i \in [\![1,m{-}(p{+}1)]\!]$, donne le premier entier $j > i$ à gauche de i sur la ligne de τ où il figure.

L'ensemble $\mathcal{F}^\bullet(p{+}2,m{+}1)$ est en bijection avec l'ensemble des tableaux $\mathcal{T}^\bullet(p{+}2,m{+}1)$ dont la ligne $(m{+}1)$ est de longueur 1. L'application

$$(_)^\bullet : \mathcal{T}(p{+}1,m) \to \mathcal{T}^\bullet(p{+}2,m{+}1)$$

qui associe à τ le tableau $\tau^\bullet$ obtenu en rajoutant la boite $(m{+}1)$ est bijective.

9.3.4. Décomposition symétrique de $H_c(\Delta_{a+b}(Z^a \times X^b))$

Avant d'aborder le cas spécifique de $U^m_{m-p,\dots,m} = \Delta_m(M^{m-(p+1)}_{\geqslant 0} \times M^{p+1}_{>0})$, on se place dans un contexte plus général avec des notations plus légères.

9.3.4.1. Données et notations

N-1) Soit $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Z}$ une inclusion d'espaces i-acycliques et $H_c(\boldsymbol{Z}) = 0$.

N-2) Pour $\boldsymbol{I} \subseteq [\![1,a]\!]$, on note $\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{I}}$ le produit $\boldsymbol{Z}^{|\boldsymbol{I}|}$ où les coordonnées sont indexées par $\boldsymbol{I}$. On notera $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}} := \Delta_{|\boldsymbol{I}|}(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{I}})$ et $\boldsymbol{F}_b := \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X})$. Les notations $\Delta_{?\ell}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}} \times \boldsymbol{F}_b)$ et $\Delta_{?\ell}(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{I}} \times \boldsymbol{F}_b)$ ont alors le sens habituel de 2.1-(N-1).

N-3) Soit $\mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})$ l'ensemble des tableaux à $(|\boldsymbol{I}|{+}b)$ boites dont la première colonne est $(1,\dots,b)$ et dont la forme est

$\tau :=$

1	•	•				
2	•					
3	•	•	•	•	•	•
⋮						
$b{-}2$	•					
$b{-}1$						
b	•	•	•			

où les boites '•' sont remplies avec tous les éléments de $\boldsymbol{I}$. Le groupe $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{I}} \times \mathcal{S}_b$ agit sur $\mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})$ par son action sur le contenu des tableaux. Par exemple, si $\tau := \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & x & y \\ \hline 2 & z \\ \cline{1-2}\end{array}$, on a $(1,2)(x,y,z)\cdot\tau = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & y & z \\ \hline 1 & x \\ \cline{1-2}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & x \\ \hline 2 & y & z \\ \cline{1-3}\end{array}$

N-4) Pour $\tau \in \mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})$, on notera $\mathfrak{p}(\tau)$ la partition de $\boldsymbol{I} \sqcup [\![1,b]\!]$ déterminée par les lignes de τ. Par exemple,

$$\tau := \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & x & y & z \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 3 & a \\ \cline{1-2}\end{array} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{p}(\tau) = \big\{\{1,x,y,z\},\{2\},\{3,a\}\big\}\,.$$

Alors, conformément à la notation de 2.3.2, on pose

$$\boldsymbol{F}_\tau := \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}(\tau)} \subseteq \Delta_b(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{I}} \times \boldsymbol{F}_b)\,.$$

La projection $\pi_b : \boldsymbol{F}_\tau \to \boldsymbol{F}_b$ est clairement un homéomorphisme.

9.3.4.2. Les isomorphismes $\Psi_b^{\boldsymbol{I}}$

On définit par induction sur $|\boldsymbol{I}|$ un isomorphisme de $\mathcal{S}_{\boldsymbol{I}} \times \mathcal{S}_b$-modules

$$\boxed{\Psi_b^{\boldsymbol{I}} : \bigoplus\nolimits_{\tau \in \mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\tau) \xrightarrow[+|\boldsymbol{I}|]{} H_{\mathrm{c}}(\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b}(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{I}} \times \boldsymbol{F}_b))}$$

On utilisera de manière systématique le complexe fondamental (3.5.4) pour l'espace $(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}} \times \boldsymbol{F}_b)$. Lorsque $\boldsymbol{I} \neq \emptyset$, on a $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}} \times \boldsymbol{F}_b) = 0$, car $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}) = 0$, et ce complexe donne la présentation de $\mathcal{S}_{|\boldsymbol{I}|} \times \mathcal{S}_b$-modules

$$\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b-2}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}} \times \boldsymbol{F}_b) \xrightarrow[+1]{c_2} \Delta_{|\boldsymbol{I}|+b-1}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}} \times \boldsymbol{F}_b) \xrightarrow[+1]{c_1} \Delta_{|\boldsymbol{I}|+b}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}} \times \boldsymbol{F}_b) \qquad (\diamond)$$

où la notation '$H_{\mathrm{c}}(_)$' est absente pour gagner de la place.

On rappelle qu'on est sous l'hypothèse $b > 0$.

Le cas $|\boldsymbol{I}| = 0$. L'ensemble $\mathcal{T}_b(\emptyset)$ comporte l'unique tableau $\tau = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \vdots \\ \cline{1-1} b \\ \cline{1-1}\end{array}$. On a clairement $\boldsymbol{F}_\tau = \boldsymbol{F}_b = \Delta_{|\boldsymbol{I}|+b}(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{I}} \times \boldsymbol{F}_b)$ et l'on pose $\Psi_b^{\emptyset} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{F}_b}$.

Le cas $|\boldsymbol{I}| = 1$. L'ensemble $\mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})$ comporte b tableaux

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \bullet \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \vdots \\ \cline{1-1} b \\ \cline{1-1}\end{array}\,, \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \vdots \\ \cline{1-1} b \\ \cline{1-1}\end{array}\!\!\begin{array}{|c|}\hline \bullet \\ \cline{1-1}\end{array}\,, \qquad \cdots \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \vdots \\ \cline{1-1} b \\ \cline{1-1}\end{array}\,.$$

Le complexe fondamental $(\diamond)$ est réduit au seul isomorphisme

$$c_1 : H_{\mathrm{c}}(\Delta_b(\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{F}_b)) \xrightarrow[+1]{\simeq} H_{\mathrm{c}}(\Delta_{1+b}(\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{F}_b))$$

où le terme de gauche se décompose naturellement en

$$H_{\mathrm{c}}(\Delta_b(\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{F}_b)) = \bigoplus\nolimits_{\tau \in \mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\tau)\,.$$

On définit alors $\Psi_b^{\boldsymbol{I}} = c_1$, c'est un isomorphisme de $\mathcal{S}_{\boldsymbol{I}} \times \mathcal{S}_b$-modules

$$\Psi_b^{\boldsymbol{I}} : \bigoplus\nolimits_{\tau \in \mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\tau) \xrightarrow[+|\boldsymbol{I}|]{\Sigma\, \Psi_\tau} H_{\mathrm{c}}(\Delta_{1+b}(\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{F}_b))\,.$$

où on a noté Ψ_τ la restriction de $\Psi_b^{\boldsymbol{I}}$ au facteur $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\tau)$.

Le cas $|\boldsymbol{I}|>1$. Le complexe fondamental ($\diamond$) fournit la surjection

$$c_1 : H_{\mathrm{c}}(\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b-1}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b)) \xrightarrow[+1]{} H_{\mathrm{c}}(\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b))$$

où le terme de gauche se décompose en

$$H_{\mathrm{c}}(\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b-1}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b)) = \bigoplus\nolimits_{x\in\boldsymbol{I},\,1\leqslant j\leqslant b} H_{\mathrm{c}}(\Delta^{(x,j)}_{|\boldsymbol{I}|+b-1}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b))$$

où $\Delta^{(x,j)}_{|\boldsymbol{I}|+b-1}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b)$ est l'ouvert-fermé de $\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b-1}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b)$ des uplets dont les éléments en coordonnées $x\in\boldsymbol{I}$ et $j\in[\![1,b]\!]$ coïncident. Notons $c_1(x,j)$ la restriction de c_1 au terme en question, *i.e.*

$$c_1(x,j) : H_{\mathrm{c}}(\Delta^{(x,j)}_{|\boldsymbol{I}|+b-1}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b)) \xrightarrow[+1]{} H_{\mathrm{c}}(\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b))\,.$$

En négligeant la coordonnée redondante x, on identifie ensuite

$$H_{\mathrm{c}}(\Delta^{(x,j)}_{|\boldsymbol{I}|+b-1}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b)) = H_{\mathrm{c}}(\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b-1}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}-x}\times\boldsymbol{F}_b))\,,$$

où le terme de droite est l'image de l'isomorphisme $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{I}-x}\times\mathcal{S}_b$-modules

$$\Psi_b^{\boldsymbol{I}-x} : \bigoplus_{\tau\in\mathcal{T}_b(\boldsymbol{I}-x)} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\tau) \xrightarrow[+|\boldsymbol{I}-x|]{\sim} H_{\mathrm{c}}(\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b-1}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}-x}\times\boldsymbol{F}_b))$$

que l'on peut supposer déjà défini (induction). On a donc les morphismes

$$\bigoplus_{\tau\in\mathcal{T}_b(\boldsymbol{I}-x)} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\tau) \xrightarrow[+|\boldsymbol{I}|]{\Psi_b^{\boldsymbol{I}-x}} H_{\mathrm{c}}\big(\Delta^{(x,j)}_{[-1]}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b)\big) \xrightarrow[+1]{c_1(x,j)} H_{\mathrm{c}}\big(\Delta_{[0]}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b)\big) \qquad (\diamond\diamond)$$

où la notation $\Delta_{[-i]}(_)$ abrège $\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b-i}(_)$.

Maintenant, pour $\nu\in\mathcal{T}_b(\boldsymbol{I}-x)$ notons $\nu{+}(x,j)$ le tableau de $\mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})$ obtenu en rajoutant la case x à l'extrémité droite de la ligne j de ν. Par exemple,

si $\nu=$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&u&v\\\hline 2\\\cline{1-1}3&a\\\cline{1-2}\end{array}$, $\quad\nu{+}(x,1)=$ $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&u&v&x\\\hline 2\\\cline{1-1}3&a\\\cline{1-2}\end{array}$ et $\nu{+}(x,2)=$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&u&v\\\hline 2&x\\\cline{1-2}3&a\\\cline{1-2}\end{array}$.

Alors, pour chaque (x,j) et $\nu\in\mathcal{T}_b(\boldsymbol{I}-x)$, on identifie $\boldsymbol{F}_{\nu+(x,j)}$ à $\boldsymbol{F}_\nu$ par l'oubli de la x-ième coordonnée et l'on définit le morphisme (de degré $|\boldsymbol{I}|$)

$$\Psi_{\nu,(x,j)} : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{\nu+(x,j)}) \xrightarrow[+|\boldsymbol{I}|]{} H_{\mathrm{c}}(\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b)) \qquad (\ddagger\ddagger)$$

comme la restriction de la composée de morphismes ($\diamond\diamond$) à $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\nu)$.

9.3.5. Lemme. *$\Psi_{\nu,(x,j)}$ est déterminé par le tableau $\tau:=\nu{+}(x,j)$.*

Démonstration. Dans la suite, l'opérateur '$H_{\mathrm{c}}(_)$' étant omniprésent, il sera effacé pour gagner de la place dans les diagrammes. De même, la notation $\Delta_{[-i]}$ sera un raccourci pour $H_{\mathrm{c}}(\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b-i}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b))$.

Soient $w,x,y,z\in\boldsymbol{I}$ et $i,j,k,l\in[\![1,b]\!]$, avec $x\neq y$ et $j\neq k$, et considérons le diagramme suivant.

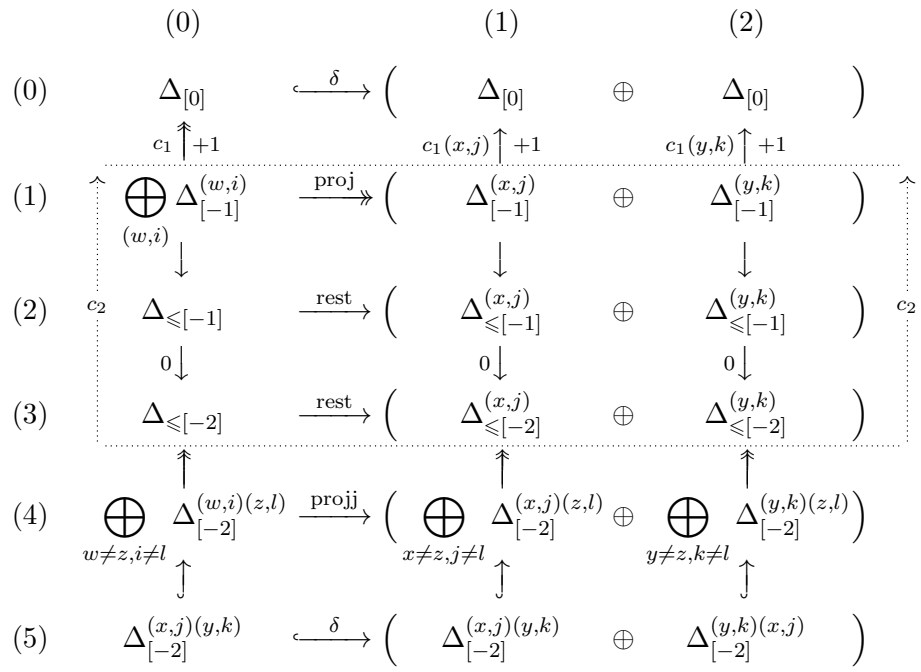


Diagramme I

Dans le diagramme I

– Les lignes (0) et (5) sont les plongements diagonaux.

– Les lignes (1,2,3) résultent d'appliquer verticalement la suite de foncteurs

$$\to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{[-1]}(_)) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant[-1]}(_)) \xrightarrow{\rho} H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant[-2]}(_)) \to ,$$

scindée en ρ (3.5.2). Les morphismes de liaison entre lignes $(3)[-1] \to (1)$ sont alors injectifs, et ceux des colonnes (1) et (2) sont même bijectifs puisque l'on a $H_{\mathrm{c}}(\Delta^{(x,j)}_{\leqslant[-1]}) = H_{\mathrm{c}}(\Delta^{(y,k)}_{\leqslant[-1]}) = 0, .$

– La flèche '$\xrightarrow{\text{proj}}$' en ligne (1) est la surjection de $H_{\mathrm{c}}(\Delta_{[-1]})$ sur les facteurs indiqués de sa décomposition en somme directe. Tandis que la flèche '$\xrightarrow{\text{projj}}$', en ligne (4) est la projection de $H_{\mathrm{c}}(\Delta_{[-2]})$, colonne par colonne, sur les sommes de facteurs indiqués, elle n'est pas nécessairement surjective.

– Les flèches '$\xrightarrow{\text{rest}}$' désignent les restrictions aux les sous-espaces fermés.

– La ligne (5) est restriction de la (4) aux espaces indiqués et c'est un plongement diagonal. L'injection $(5) \hookrightarrow (4)$ est par prolongement par zéro.

– Le diagramme est commutatif par construction.

Suite à ces remarques, on remplace le sous-diagramme en pointillé par les morphismes c_2 de complexes fondamentaux. On obtient alors le diagramme commutatif *II*.

$$
\begin{array}{lccccc}
(0) & \Delta_{[0]} & \xhookrightarrow{\delta} & \Big(\Delta_{[0]} & \oplus & \Delta_{[0]} \Big) \\
 & {\scriptstyle c_1}\uparrow\!\uparrow{\scriptstyle +1} & & {\scriptstyle c_1(x,j)}\uparrow{\scriptstyle +1} & & {\scriptstyle c_1(y,k)}\uparrow{\scriptstyle +1} \\
(1) & \bigoplus_{(w,i)} \Delta^{(w,i)}_{[-1]} & \xrightarrow{\text{proj}} & \Big(\Delta^{(x,j)}_{[-1]} & \oplus & \Delta^{(y,k)}_{[-1]} \quad \oplus \Delta^{(w,l)}_{[-1]} \Big) \\
 & {\scriptstyle (w,i)\,c_2}\uparrow{\scriptstyle +1} & & {\scriptstyle c_2(x,j)}\uparrow\!\uparrow{\scriptstyle +1} & & {\scriptstyle c_2(y,k)}\uparrow\!\uparrow{\scriptstyle +1} \quad {\scriptstyle c_2(w,l)}\uparrow\!\uparrow{\scriptstyle +1} \\
(4) & \bigoplus_{w\neq z, i\neq l} \Delta^{(w,i)(z,l)}_{[-2]} & \xrightarrow{\text{projj}} & \Big(\bigoplus_{x\neq z, j\neq l} \Delta^{(x,j)(z,l)}_{[-2]} & \oplus & \bigoplus_{y\neq z, k\neq l} \Delta^{(y,k)(z,l)}_{[-2]} \quad \oplus \Delta^{(w,l)}_{[-2]} \Big) \\
 & \uparrow\!\downarrow & & \uparrow\!\downarrow & & \uparrow\!\downarrow \\
(5) & \Delta^{(x,j)(y,k)}_{[-2]} & \xhookrightarrow{\delta} & \Big(\Delta^{(x,j)(y,k)}_{[-2]} & \oplus & \Delta^{(y,k)(x,j)}_{[-2]} \Big)
\end{array}
$$

Diagramme II

Maintenant, pour $\tau = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \vdots & & & \\ \hline j & \cdots & \cdots & x \\ \hline \vdots & & & \\ \hline k & \cdots & y & \\ \hline \vdots & & & \\ \hline \end{array} \in \mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})$, notons $\tau{-}x$, $\tau{-}y$, $\tau{-}xy$ les tableaux obtenus en enlevant les boites x, y comme indiquent les notations. Le morphisme $\Psi_{\tau-x,(x,j)}$ est, par la définition (‡‡), la composée

$$H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{\tau-xy}) \xrightarrow[+|\boldsymbol{I}-xy|]{\Psi_{\tau-xy,(y,k)}} \Delta_{[-1]}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}-x}\times\boldsymbol{F}_b) = \Delta^{(x,j)}_{[-2]} \xrightarrow[+2]{c_1(x,j)\circ c_2(x,j)} \Delta_{[0]}\,.$$

Or, l'image de $\Psi_{\tau-xy,(x,j)}$ est contenue dans le facteur $\Delta^{(x,j)(y,k)}_{[-2]}$ de $\Delta^{(x,j)}_{[-2]}$, facteur qui est le même pour $\Psi_{\tau-xy,(y,k)}$ modulo le plongement diagonal de la ligne (5). L'égalité

$$\Psi_{\tau-x,(x,j)} = \Psi_{\tau-y,(y,k)}$$

résulte alors de ce que la projection de $c_2\big(\Delta^{(x,j)(y,k)}_{[-2]}\big)$ sur un facteur de $\Delta_{[-1]}$ de la forme $\Delta^{(w,l)}_{[-1]}$ avec $(w,l) \notin \{(x,j),(y,k)\}$ est nul. Ce qui est clair déjà sur la ligne (4) où $\Delta^{(x,j)(y,k)}_{[-2]} \cap \Delta^{(w,l)}_{[-1]} = 0$ et par commutativité du diagramme.□

Le lemme précédent montre que le morphisme $\Psi_{(\tau-x),(x,j)}$ de la définition (††) est indépendant de l'écriture $\tau = (\tau{-}x){+}(x,j)$, raison pour laquelle il sera noté simplement

$$\Psi_\tau : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\tau) \xrightarrow[+|\boldsymbol{I}|]{} H_{\mathrm{c}}(\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b))\,.$$

9.3.6. Proposition. *Le morphisme*

$$\Psi^{\boldsymbol{I}}_b : \bigoplus\nolimits_{\tau\in\mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\tau) \xrightarrow[+|\boldsymbol{I}|]{\Sigma\,\Psi_\tau} H_{\mathrm{c}}(\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b))\,.$$

est un isomorphisme de $\mathcal{S}_{\boldsymbol{I}}\times\mathcal{S}_b$-modules.

Démonstration. Le fait que c'est un morphisme de $\mathcal{S}_{\boldsymbol{I}}\times\mathcal{S}_b$-modules résulte de ce que, par construction, pour tout $\alpha\in\mathcal{S}_{\boldsymbol{I}}\times\mathcal{S}_b$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\tau) & \xrightarrow[+|\boldsymbol{I}|]{\Psi_\tau} & H_{\mathrm{c}}(\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b)) \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow \\ H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{\alpha(\tau)}) & \xrightarrow[+|\boldsymbol{I}|]{\Psi_{\alpha(\tau)}} & H_{\mathrm{c}}(\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b)) \end{array}$$

est commutatif. Il est surjectif puisqu'il en est ainsi de

$$\bigoplus\nolimits_{(x,j)}\Delta_{[-1]}^{(x,j)}=\Delta_{[-1]}\xrightarrow{c_1}\!\!\!\!\rightarrow\Delta_{[0]}\,,$$

et que $\Psi_b^{\boldsymbol{I}-*}$ est une surjection sur chaque $\Delta_{[-1]}^{(*,\cdot)}$ par hypothèse de récurrence. Pour conclure maintenant que l'on a un isomorphisme il suffit de comparer les dimensions. On a

$$\dim\Big(\bigoplus\nolimits_{\tau\in\mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})}H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\tau)\Big)=|\mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})|\cdot\dim H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b)\qquad(d_1)$$

et, par 6.5.2(b),

$$\dim\big(H_{\mathrm{c}}(\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{F}_b))\big)=|\mathcal{F}(b,|\boldsymbol{I}|+b)|\cdot\dim H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b)\,.\qquad(d_2)$$

L'égalité de dimensions dans (d_1) et (d_2) résulte alors du lemme 9.3.3 qui établit que l'on a $|\mathcal{F}(b,|\boldsymbol{I}|+b)|=|\mathcal{T}(b,|\boldsymbol{I}|+b)|=|\mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})|$. □

Cette proposition achève la dernière étape de la définition inductive des isomorphismes $\Psi_b^{\boldsymbol{I}}$ commencée dans 9.3.4.2.

9.3.7. Structure de $\mathcal{S}_{m-b}\times\mathcal{S}_b$-module de $H_{\mathrm{c}}(\Delta_m(Z^{m-b}\times F_b(X)))$

On applique les considérations précédentes au cas où $\boldsymbol{I}=[\![1,m{-}b]\!]$ et où l'intervalle $[\![1,b]\!]$ est décalé vers $[\![m{-}b{+}1,m]\!]$. Il est alors avantageux de remplacer la notation de l'ensemble $\mathcal{T}_b^{\boldsymbol{I}}$ par celle, équivalente, de l'ensemble de tableaux $\mathcal{T}(b,m)$ de la section 9.3.2.

9.3.7.1. Tableaux normaux. Chaque orbite de $\mathcal{S}_{m-b}\times\mathcal{S}_b$ dans $\mathcal{T}(b,m)$ contient un unique tableau où la longueur des lignes est décroissante et le contenu des boites '•' est strictement croissant. Par exemple, si $m=50$ et $m{-}b=14$,

$$\tau=\left\{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 15&1&2&3&4&5&6\\\hline 16&7&8&9\\\cline{1-4}17&10&11&12\\\cline{1-4}18&13&14\\\cline{1-3}19\\\cline{1-1}\vdots\\\cline{1-1}29\\\cline{1-1}\vdots\\\cline{1-1}50\\\cline{1-1}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\}\,b\\\}\,b{-}(m{-}b)=22\end{array}\qquad(*)$$

Un tel tableau sera dit « *normal* », leur ensemble est noté $\mathcal{T}_0(b,m)$.

9.3.8. Remarque. On a indiqué en gris la plus petite colonne de lignes de cardinal 1 dans les tableaux normaux, son cardinal, $b-(m-b)$, est atteint lorsque la longueur des lignes de τ est $\leqslant 2$ et que $m \geqslant 2(m-b)$. Il y a alors autant de tableaux normaux que des partitions de $[\![1,m-b]\!]$ et l'application $(_)^\bullet : \mathcal{T}(b,m) \to \mathcal{T}^\bullet(b+1,m+1)$ de 9.3.3 est une bijection sur $\mathcal{T}(b+1,m+1)$.

9.3.9. Lemme et notation. *Le stabilisateur $\mathcal{H}_\tau$ de τ dans $\mathcal{S}_{m-b}\times\mathcal{S}_b$ est le produit direct*

$$\mathcal{H}_\tau = \mathcal{H}_{\underline{\tau}}\times\mathcal{S}_{m-|\underline{\tau}|}\,,$$

où $\underline{\tau}$ désigne le sous-tableau des lignes de longueur >1 de τ, et où $\mathcal{H}_{\underline{\tau}}$ désigne le stabilisateur de $\underline{\tau}$ dans $\mathcal{S}_{|\underline{\tau}|}\cap\big(\mathcal{S}_{m-b}\times\mathcal{S}_b\big)$. On a

$$\begin{cases}\mathcal{H}_{\underline{\tau}} \subseteq \mathcal{S}_{m-b}\times\mathcal{S}_{[\![m-b+1,m-|\underline{\tau}|]\!]}\,,\\ \mathbf{1}_{|\tau|}\times\mathcal{S}_{m-|\underline{\tau}|} \subseteq \mathbf{1}_{m-b}\times\mathcal{S}_b\,.\end{cases}$$

La projection $p_2 : \mathcal{H}_{\underline{\tau}} \to \mathcal{S}_{[\![m-b+1,m-|\underline{\tau}|]\!]}$ est un isomorphisme sur son image.

9.3.10. Commentaire. Dans 9.3.7.1-$(*)$, on a $\mathcal{H}_{\underline{\tau}} \subseteq \mathcal{S}_{[\![1,14]\!]}\times\mathcal{S}_{[\![15,18]\!]}$. C'est le groupe cyclique d'ordre 2 engendré par l'involution $\begin{pmatrix}16&7&8&9\\17&10&11&12\end{pmatrix}$.

9.3.11. Proposition. *Pour toute inclusion d'espaces i-acycliques $\boldsymbol{X}\subseteq\boldsymbol{Z}$ avec $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})=0$, il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{S}_{m-b}\times\mathcal{S}_b$-modules*

$$\Psi_b^m : \bigoplus_{\tau\in\mathcal{T}(b,m)} \mathrm{ind}_{\mathcal{H}_\tau}^{\mathcal{S}_{m-b}\times\mathcal{S}_b} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\tau(\boldsymbol{X})) \xrightarrow[+(m-b)]{\simeq} H_{\mathrm{c}}(\Delta_m(\boldsymbol{Z}^{m-b}\times\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X})))$$

Démonstration. Corollaire de 9.3.6. □

9.3.12. Structure de $\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}$-module de $H_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m})$

On reprend maintenant le sujet de 9.3 qui concerne la donnée d'une pseudovariété orientée $\boldsymbol{M}$ de type fini de dimension $d_{\boldsymbol{M}}$. On appliquera la proposition 9.3.11 au cas où $\boldsymbol{Z} := \boldsymbol{M}_{\geqslant 0}$, où $\boldsymbol{X} := \boldsymbol{M}_{>0}$ et où $b = p+1$. Pour chaque tableau $\tau\in\mathcal{T}(p+1,m)$, on a

$$\boldsymbol{F}_\tau(\boldsymbol{M}_{>0}) := \big\{\overline{x}\in\boldsymbol{M}_{\geqslant 0}^{m-(p+1)}\times\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}) \;\big|\; x_i = x_{f_\tau(i)}\big\}\,.$$

9.3.13. Proposition

a) *Il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}$-modules gradués, de degré $-(m-(p+1))d_{\boldsymbol{M}}$,*

$$\boldsymbol{\sigma}\otimes H_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m}) \cong \bigoplus_{\tau\in\mathcal{T}(p+1,m)} \mathrm{ind}_{\mathcal{H}_\tau}^{\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}} \boldsymbol{\sigma}^{d_M}\otimes H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_\tau(\boldsymbol{M}_{>0}))\,,$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est la signature de $\mathcal{S}_{m-(p+1)}$. On a $|\mathcal{T}(p+1,m)| \leqslant |\mathfrak{P}(m-(p+1))|$ avec égalité pour tout $m\geqslant 2(m-(p+1))$.

b) *Le* ***FI****-module défini dans 6.7.1 par les morphismes des suites spectrales*

$$\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)_1^{p,q} : \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} \to \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p+1,q}\,,$$

où $q{=}i{+}(m{-}(p{+}1))$*, est canoniquement isomorphe au* ***FI****-module défini par les morphismes*

$$\bigoplus_{\tau\in\mathcal{T}(p+1,m)} \begin{pmatrix} \mathrm{ind}_{\mathcal{H}_{\underline{\tau}}\times\mathcal{S}_{m-|\underline{\tau}|}}^{\mathcal{S}_m} \boldsymbol{\sigma}^{d_M} \otimes H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0})) \\ \downarrow \mathrm{ind}\, p_{p+1}^* \\ \mathrm{ind}_{\mathcal{H}_{\underline{\tau}}\times\mathcal{S}_{m+1-|\underline{\tau}|}}^{\mathcal{S}_{m+1}} \boldsymbol{\sigma}^{d_M} \otimes H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+2}(\boldsymbol{M}_{>0})) \end{pmatrix}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ *est la restriction à* $\mathcal{H}_{\underline{\tau}}$ *de la signature de* $\mathcal{S}_{m-(p+1)}$*, où* $\boldsymbol{F}_{p+1}$ *et* $\boldsymbol{F}_{p+2}$ *réfèrent respectivement à* $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}(\tau)}$ *et* $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}(\tau^\bullet)}$ *(cf.* 9.3.4.1-N-4 et 9.3.3*), et où*

$$Q := q - (m{-}(p{+}1))\,d_{\boldsymbol{M}} = i - (m{-}(p{+}1))\,(d_{\boldsymbol{M}}{-}1)\,.$$

Indication. (a) En dualisant 9.3.11 et en incorporant les caractères signature nécessaires (6.2.4-(b)), on a l'isomorphisme de $\mathcal{S}_{m-(p+1)}\times\mathcal{S}_{p+1}$-modules

$$(\Psi_b^m)^\vee : \boldsymbol{\sigma}_{m-(p+1)}^{d_M+1} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{p+1}^{d_M+1} \otimes H_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m}) \xrightarrow[-(m-(p+1))d_M]{\simeq} \bigoplus\nolimits_{\tau\in\mathcal{T}(b,m)} \mathrm{ind}_{\mathcal{H}_\tau}^{\mathcal{S}_{m-b}\times\mathcal{S}_b} \boldsymbol{\sigma}_{p+1}^{d_M+1} \otimes H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_\tau(\boldsymbol{X}))\,,$$

dont on conclut en simplifiant les caractères redondants (*cf.* note ([20])). L'assertion (b) est alors une simple reformulation de 6.7.1-b. □

9.3.14. Monotonie et stabilité dans les suites spectrales basiques

Pour chaque $\tau\in\mathcal{T}(p{+}1,m)$, on reconnaît dans 9.3.13-(b) le ***FI***-module

$$\boldsymbol{Ind}_{\rho,\tau}\left(\left\{H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}))\right\}_{p+1}\right) \in \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geqslant 2(m-(p+1))}\,.$$

où ρ désigne l'action de $\mathcal{H}_{\underline{\tau}}$ sur $\boldsymbol{\sigma}_{m-(p+1)}$ et $\boldsymbol{Ind}_{\rho,\tau}$ est le foncteur d'induction introduit dans 8.1.6.

9.3.15. Théorème. *Soit* $\boldsymbol{M}$ *une pseudovariété connexe orientée avec* $d_{\boldsymbol{M}}{\geqslant}2$*.*

a) *Pour* $Q := i - (m{-}(p{+}1))\,(d_{\boldsymbol{M}}{-}1)$ *et* $\tau\in\mathcal{T}(p{+}1,m)$*, on a*

$$\begin{cases} \mathrm{rg_{ms}}\left(\boldsymbol{Ind}_{\rho,\tau}\left(\{H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}))\}_{p+1}\right)\right) \leqslant \begin{cases} 4i\,, & \text{si } d_{\boldsymbol{M}}=2 \\ 2i\,, & \text{si } d_{\boldsymbol{M}}\geqslant 3. \end{cases} \\ \mathrm{rg_m}\left(\boldsymbol{Ind}_{\rho,\tau}\left(\{H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}))\}_{p+1}\right)\right) \leqslant i\,. \end{cases}$$

b) *Pour* $a,i\in\mathbb{N}$ *fixés, le* ***FI****-module* $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{?m-a}\boldsymbol{M}^m)\}_m$ *est monotone et stable pour* $m\geqslant 4i+4a$*, si* $d_{\boldsymbol{M}}=2$*, et pour* $m\geqslant 2i+4a$*, si* $d_{\boldsymbol{M}}\geqslant 3$*. Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont (donc) polynomiales sur les mêmes intervalles d'entiers* m*.*

Démonstration. (a) On applique le théorème 9.2.3 à l'espace i-acyclique $\boldsymbol{M}_{>0}$. Comme $\dim(\boldsymbol{M}_{>0}) \geqslant 3$, la famille $\{H^Q_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}))\}_{p+1}$ est monotone pour $(p{+}1) \geqslant Q$ et est monotone et stable pour $(p{+}1) \geqslant 2Q$. Le théorème 8.1.7 garantit alors que le $\boldsymbol{FI}$-module induit par $\boldsymbol{Ind}_{\rho,\tau}$ est monotone pour tout

$$m \geqslant Q + \big(m{-}(p{+}1)\big) = i - \big(m{-}(p{+}1)\big)(d_{\boldsymbol{M}}{-}2)\,,$$

et est monotone et stable pour tout

$$m \geqslant 2Q + 4\big(m{-}(p{+}1)\big) = 2i + \big(m{-}(p{+}1)\big)\big(4{-}2(d_{\boldsymbol{M}}{-}1)\big)\,, \qquad (*)$$

et comme on dispose de l'inégalité 6.5.2-(d) : $i \geqslant (m{-}(p{+}1))(d_{\boldsymbol{M}}{-}1)$, le dernier terme de $(*)$ est majoré par $4i$ si $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, et par $2i$ si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$.

(b_1) Le cas de la famille $\big\{p^*_m : H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})) \to H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}))\big\}_m$.

Fixons $i \in \mathbb{N}$. D'après 6.5.2 les termes $I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m)^{p,q}_r$ de la suite spectrale basique $(I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m)_r, d_r)$ qui convergent vers $H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$ sont ceux pour lesquels on a $q = i + (m{-}(p{+}1))$. Si maintenant on fixe q, la différence $(m{-}p)$ est constante et si l'on augmente m et p simultanément, ces contraintes décrivent un facteur direct du $\boldsymbol{FI}$-module défini par la famille de morphismes de suites spectrales basiques (6.7.1)

$$\big\{I\!E_\sigma(q^*_m)^{p,q}_r : I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m)^{p,q}_r \to I\!E_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})^{p+1,q}_r\big\}_m\,,$$

facteur que nous allons noter

$$\mathcal{E}^{i,q}_r := \big\{I\!E_\sigma(q^*_m)^{p,q}_r : I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m)^{p,q}_r \to I\!E_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})^{p+1,q}_r \;\big|\; q = i + (m{-}(p{+}1))\big\}_m\,.$$

Les différentielles des suites spectrales basiques définissent alors un complexe de $\boldsymbol{FI}$-modules

$$(\mathcal{E}_r(q), d_r) := \big(\cdots \longrightarrow \mathcal{E}^{i-1,q+r-1}_r \xrightarrow{d_r} \mathcal{E}^{i,q}_r \xrightarrow{d_r} \mathcal{E}^{i+1,q-r+1}_r \longrightarrow \cdots\big)\,. \qquad (*)$$

Nous avons des isomorphismes canoniques

$$h^i(\mathcal{E}_r(q), d_r) \simeq \mathcal{E}^{i,q}_{r+1} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^{i,q}_r = \mathcal{E}^{i,q}_{r+1}\,,\ \forall r > q{+}1\,,$$

et donc la condition de convergence (6.7.1-(a))

$$\Big(\bigoplus\nolimits_{q\in\mathbb{N}} \mathcal{E}^{i,q}_{q+2}\Big) \Longrightarrow \big\{p^*_m : H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})) \to H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}))\big\}_m\,. \qquad (\diamond)$$

Lemme. Pour tout $r \geqslant 1$, on a

$$\begin{cases} \text{rg}_{\text{m}}(\mathcal{E}^{i+1,q}_r) = \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{E}^{i,q}_r) = 0\,, & \forall i < 0\,,\\ \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{E}^{i,q}_r) \leqslant \sup\{i\,\epsilon, 1\}\,, & \forall i \geqslant 0\,,\\ \text{rg}_{\text{m}}(\mathcal{E}^{i,q}_r) \leqslant \sup\{(i{-}1)\epsilon, 1\}\,, & \forall i \geqslant 1\,, \end{cases}$$

avec $\epsilon = 4$ si $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, et $\epsilon = 2$ si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$.

$\mathcal{E}_r$	$\mathcal{E}^{-1}_r$	$\mathcal{E}^0_r$	$\mathcal{E}^1_r$	$\mathcal{E}^2_r$	$\mathcal{E}^3_r$	$\mathcal{E}^i_r$
$\text{rg}_{\text{ms}} \leqslant$	0	1	ϵ	2ϵ	3ϵ	$i\epsilon$
$\text{rg}_{\text{m}} \leqslant$	0	0	1	ϵ	2ϵ	$(i{-}1)\epsilon$

Preuve. • *Le cas $r = 1$.* On a par définition et 9.3.13-(b)

$$(\mathcal{E}_1^{i,q})_m = \bigoplus\nolimits_{\tau\in\mathcal{T}(p+1,m)} \boldsymbol{Ind}_{\rho,\tau}\, H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0}))\,. \qquad (\ddagger)$$

L'assertion (a) donne, pour chaque $\tau \in \mathcal{T}(p{+}1, m)$ et tout $i \geqslant 0$

$$\begin{cases} \mathrm{rg_{ms}}(\boldsymbol{Ind}_{\rho,\tau}(H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0})))) \leqslant i\epsilon \\ \mathrm{rg_m}(\boldsymbol{Ind}_{\rho,\tau}(H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0})))) \leqslant i \end{cases}$$

La majoration $\mathrm{rg_m}(\mathcal{E}_1^{i,q}) \leqslant i$ s'ensuit puisque $(_)^\bullet : \mathcal{T}(p{+}1, m) \to \mathcal{T}(p{+}2, m{+}1)$ est toujours injective, mais pour avoir $\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{E}_1^{i,q}) \leqslant \epsilon i$, il faut s'assurer que si l'on a $m \geqslant \epsilon i$ et $H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0})) \neq 0$, l'application $(_)^\bullet$ est bijective. Raisonnons par l'absurde, si $(_)^\bullet$ n'est pas bijective, on a $(p{+}1) < m/2$, et si de plus $m \geqslant \epsilon i$, on a

$$(d_{\boldsymbol{M}}{-}1)(m - (p{+}1)) > \frac{d_{\boldsymbol{M}}{-}1}{2} m \geqslant \frac{d_{\boldsymbol{M}}{-}1}{2}\epsilon i \geqslant i\,,$$

donc $Q = i - (d_{\boldsymbol{M}}{-}1)(m - p{+}1) < 0$ et alors $H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{p+1}(\boldsymbol{M}_{>0})) = 0$.

Le tableau qui suit illustre ces conclusions dont on remarquera qu'elles sont compatibles à celles du lemme pour $\mathcal{E}_1$ puisque $i \leqslant \epsilon(i{-}1)$ dès que $2 \leqslant i$.

$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_1^{-1}$	$\mathcal{E}_1^0$	$\mathcal{E}_1^1$	$\mathcal{E}_1^2$	$\mathcal{E}_1^3$	$\mathcal{E}_1^i$
$\mathrm{rg_{ms}}$	0	0	ϵ	2ϵ	3ϵ	$i\epsilon$
$\mathrm{rg_m}$	0	0	1	2	3	$i\epsilon$

$(\ddagger\ddagger)$

• *Le cas général.* Si nous appliquons au tableau $(\ddagger\ddagger)$ les règles suivantes, établies dans 7.4.4-(e),

$$\begin{cases} \mathrm{rg_m}\,\mathcal{E}_{r+1}^i \leqslant \sup\{\mathrm{rg_{ms}}\,\mathcal{E}_r^{i-1}, \mathrm{rg_m}\,\mathcal{E}_r^i\} \\ \mathrm{rg_{ms}}\,\mathcal{E}_{r+1}^i \leqslant \sup\{\mathrm{rg_{ms}}\,\mathcal{E}_r^{i-1}, \mathrm{rg_{ms}}\,\mathcal{E}_r^i, \mathrm{rg_m}\,\mathcal{E}_r^{i+1}\} \end{cases}$$

on obtient aussitôt le tableau du lemme pour $\mathcal{E}_2$, et comme ce tableau est laissé stable par ces règles le lemme résulte pour tout $r \geqslant 1$. ⊟

Ceci étant, on rappelle que la convergence $(\diamond)$ aboutit en fait sur le bigradué du $\boldsymbol{FI}$-module $\mathcal{H}^i := \{p_m^* : H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})) \to H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}))\}_m$ relativement à la filtration par le degré p des cochaînes de Čech (*cf.* 6.4.7). Or, comme nous sommes soumis à la condition $Q = i{-}(m{-}(p{+}1))(d_{\boldsymbol{M}}{-}1) > 0$, la filtration en question possède un nombre fini de termes ($\leqslant \frac{i}{d_{\boldsymbol{M}}-1} + 1$), et les majorations des rangs de $\mathcal{E}_{q+2}^{i,q}$ sont aussi valables pour $\mathcal{H}^i$ d'après 7.4.5.

Dans le cas particulier où $i = 0$, ces raisonnements donnent seulement la majoration $\mathrm{rg_{ms}}\,\mathcal{H}^0 \leqslant 1$ (c'est ce qui arrive lorsque $H^0_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{M}) = 0$). Lorsque $H^0_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{M}) = k$, un calcul direct élémentaire montre que l'on a $\mathcal{H}^0 = \mathcal{V}(0)$ et donc que $\mathrm{rg_{ms}}\,\mathcal{H}^0 = 0$.

(b_2) Le cas des familles $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{M}^m)\}_m$ résulte de a) exactement comme dans le cas (**C**) des espaces i-acycliques (p. 113).

(b_3) Pour le cas général des familles $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m)\}_m$, on ne peut pas faire appel au complexe fondamental des ***FI***-modules, comme dans le cas (**D**) des espaces i-acycliques (p. 113), puisque ce complexe n'est plus exact. On fait plutôt appel aux suites longues de ***FI***-modules de 9.1.1

$$\to \{H^{i-d_M}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a-1}\boldsymbol{M}^m)\} \to \{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m)\} \to \{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{M}^m)\} \to$$

où l'on peut supposer que les termes de droite et gauche sont monotones et stables pour $m \geqslant 2i+4a$ ou $m \geqslant 4i+4a$ suivant le cas. On en déduit (7.4.5-(b)) le même rang de monotonie et stabilité pour $\{H^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}\boldsymbol{M}^m)\}$ puisque extension d'un noyau et conoyau de ***FI***-modules monotones est stables sur le même rang des entiers m. C.Q.F.D □

9.3.16. Commentaire. Au delà du fait que $\boldsymbol{X}$ est maintenant une pseudo-variété, la démarche de Church dans la démonstration de son théorème de stabilité ([7], *cf.* 7.1) est très différente de la nôtre. Elle utilise de manière essentielle les résultats de Totaro ([35]) sur la de suite spectrale de Leray associée au plongement $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}) \hookrightarrow \boldsymbol{X}^m$, valable parce que $\boldsymbol{X}$ est lisse.

10. Calcul du caractère de $\mathcal{S}_m$-module de $H_c(F_m(X))$

On étend les résultats de Macdonald ([28]) concernant le caractère du $\mathcal{S}_m$-module $H_c(\boldsymbol{X}^m)$ au cas du $\mathcal{S}_m$-module $H_c(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ lorsque $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique.

Avertissement. Dans cette section et la suivante, $\mathbf{car}(k) = 0$ et la donnée d'un espace i-acyclique $\boldsymbol{X}$ présuppose que $\dim H_c(\boldsymbol{X}) < \infty$.

10.1. Série de caractères de $\mathcal{S}_m$

10.1.1. Série de caractères d'un $\mathcal{S}_m$-module gradué. Nous appellerons $\mathcal{S}_m$-module gradué, la donnée d'un k-espace vectoriel gradué $V := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V^i$, tel que chaque V^i est un $\mathcal{S}_m$-module.

Lorsque, de plus, chaque V^i de dimension finie sur k, la « *série de caractères de* V », est l'application $\chi_V : \mathcal{S}_m \to k[[T]]$ définie par (*cf.* [28] (2.3))

$$\mathcal{S}_m \ni \alpha \mapsto \chi_V(\alpha, T) := \sum\nolimits_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \operatorname{tr}(\alpha : V^i)\, T^i\,.$$

Le lemme suivant, pendant du lemme 4.1.2, est élémentaire.

10.1.2. Lemme

a) *Si* $(\cdots \to V_{i-1} \to V_i \to V_{i+1} \to \cdots)$ *est un complexe borné de* $\mathcal{S}_m$*-modules gradués, on a* $\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i\, \chi_{V^i}(\alpha, T) = 0\,.$

b) *Pour* $r \in \mathbb{Z}$*, on a* $\chi_{V[-r]}(\alpha, T) = \chi_V(\alpha, T) \cdot (-T)^r\,.$

c) $\chi_{V_1\otimes_k V_2}(\alpha_1 \otimes \alpha_2, T) = \chi_{V_1}(\alpha_1, T) \cdot \chi_{V_2}(\alpha_2, T).$

d) $\mathcal{P}(\mathrm{Homgr}_k(V_1, V_2))(T) = \mathcal{P}(V_1)(1/T) \cdot \mathcal{P}(V_2)(T)$

10.1.3. Série de caractères d'un $\mathcal{S}_m$-espace topologique. Si $\boldsymbol{M}$ est un espace topologique de type fini, muni d'une action de $\mathcal{S}_m$, les « *séries de caractères de $H_c(\boldsymbol{M})$ et de $H(\boldsymbol{M})$* » seront respectivement notées

$$\chi_c(\boldsymbol{M})(\alpha,T) := \chi_{H_c(\boldsymbol{M},k)}(\alpha,T)\,, \quad \text{et} \quad \chi(\boldsymbol{M})(\alpha,T) := \chi_{H(\boldsymbol{M},k)}(\alpha,T)\,.$$

On a donc vis-à-vis des définitions de 5.2.2, l'égalité

$$\chi_c(\boldsymbol{M})(_,T) = \sum\nolimits_{i\in\mathbb{N}} (-1)^i\, \chi_{H_c^i(\boldsymbol{M})}(_)\, T^i = \sum\nolimits_{i\in\mathbb{N}} (-1)^i\, \chi_c(\boldsymbol{M};i)(_)\, T^i\,.$$

10.1.4. Remarque. Il convient de retenir pour la suite les expression suivantes. Pour tout espace topologique $\boldsymbol{X}$ et tout $m \geqslant 0$, on a :

$$\frac{\mathcal{P}_c(\boldsymbol{X}^m)(-T)}{T^m} = \Big(\frac{\chi_c(\boldsymbol{X})(\mathbf{1},T)}{T}\Big)^m\,,$$

$$\frac{\mathcal{P}_c(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(-T)}{T^m} = \Big(\frac{\chi_c(\boldsymbol{X})(\mathbf{1},T)}{T}\Big)^{\underline{m}}\,.$$

10.2. Séries de caractères de $\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X})$

L'exactitude des complexes fondamentaux associés aux espaces $\Delta_{\leqslant\ell}(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}})$ du théorème 3.5.4 s'avère particulièrement adaptée à la détermination des séries de caractères. La proposition suivante est un ingrédient important dans le calcul des caractères.

10.2.1. Théorème. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Pour toute partition $\mathfrak{q}$ de $[\![1,m]\!]$, tout $\ell \leqslant m$ et tout $\alpha \in \mathcal{S}^{\mathfrak{q}}$ (3.4.3), on a*

$$\frac{\chi_c\big(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X})\big)(\alpha,T)}{T^\ell} = \sum\nolimits_{a\geqslant 0} \frac{\chi_c\big(\Delta_{\ell-a}\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X})\big)(\alpha,T)}{T^{\ell-a}}\,.$$

Démonstration. Corollaire immédiat de 3.5.4 et du lemme 10.1.2. □

10.3. Séries de traces pour un m-cycle

L'action de $\mathcal{S}_m$ sur $[\![1,m]\!]$ induit une action sur l'ensemble $\mathfrak{P}(m)$ des partitions de $[\![1,m]\!]$ qui sera sous-entendue dans la suite. Pour $m > 0$ donné, on note $\sigma_m \in \mathcal{S}_m$, ou simplement σ s'il est superflu de préciser l'entier m, la permutation cyclique $(1,2,\ldots,m)$. On notera $\boldsymbol{C}_m := \langle\sigma_m\rangle$ le sous-groupe de $\mathcal{S}_m$ engendré par σ_m.

10.3.1. Lemme. *Les points fixes de l'ensemble $\mathfrak{P}(m)$ sous l'action de $\boldsymbol{C}_m$ sont les partitions en orbites de $[\![1,m]\!]$ sous l'action des différents sous-groupes de $\boldsymbol{C}_m$. On a*

$$\begin{cases} \mathfrak{P}_d(m)^{\boldsymbol{C}_m} = \big\{[\![1,m]\!]/\langle\sigma_m^{m/d}\rangle\big\}\,, & \text{si } d\,|\,m,\\ \mathfrak{P}_d(m)^{\boldsymbol{C}_m} = \emptyset\,, & \text{sinon.}\end{cases}$$

En particulier, $\big|\mathfrak{P}(m)^{\boldsymbol{C}_m}\big| = \big|\big\{d\in\mathbb{N} \text{ t.q. } d\,\big|\,m\big\}\big|\,.$

Démonstration. L'application $\boldsymbol{C}_m \to [\![1,m]\!]$, $\alpha \mapsto \alpha(1)$ est un isomorphisme de $\boldsymbol{C}_m$-espaces lorsque l'on munit $\boldsymbol{C}_m$ de son action par multiplications à gauche. Les partitions $\boldsymbol{C}_m$ stables par multiplication à gauche sont aussi stables par multiplication à droite puisque $\boldsymbol{C}_m$ est abélien. Or, les partitions de $\boldsymbol{C}_m$ stables par multiplication à droite sont les ensemble des classes d'équivalence à gauche de $\boldsymbol{C}_m$ des sous-groupes $H \subseteq \boldsymbol{C}$, autrement dit, ce sont les partitions de $\boldsymbol{C}_m$ en H-orbites. Enfin, comme $\boldsymbol{C}_m$ est cyclique engendré par σ, ses sous-groupes sont les $\langle \sigma^d \rangle$ avec $d \,|\, m$. □

10.3.2. Théorème. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Pour tout $m \geqslant 1$, la série de traces de l'action de σ_m sur $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ vérifie*

$$\boxed{\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})(\sigma_m,T))}{T^m} = \sum_{d\,|\,m} \mu\Big(\frac{m}{d}\Big) \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1},T^d)}{T^d}}\,,$$

où $\mu(_)$ est la fonction de Möbius.

Démonstration. Le théorème 10.2.1 appliqué à la partition $\mathfrak{q} = (1,\dots,1)$ et pour $\ell = m$ donne l'égalité de séries de traces

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^m)(\sigma,T)}{T^m} = \sum_{a\geqslant 0} \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{X}^m)(\sigma,T)}{T^{m-a}} \tag{$*$}$$

D'après 2.3.3, on a la décomposition

$$H_{\mathrm{c}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{X}^m) = \bigoplus\nolimits_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}_{m-a}(m)} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}})\,,$$

et la trace de l'action de σ sur $H_{\mathrm{c}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{X}^m)$ se lit sur les termes $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}})$ tels que $\sigma\cdot\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. Or, on a vu dans le lemme 10.3.1 qu'il n'y a de telles partitions que lorsque $d := m-a$ est un diviseur de m, et dans ces cas, il y a une *et une seule* partition telle, à savoir $\mathfrak{p} := \boldsymbol{C}_m \cdot \langle \sigma_m^d \rangle$. L'action de σ_m sur $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}$ coïncide avec l'action de σ_d sur $\boldsymbol{F}_d$, on a donc l'égalité de séries de traces

$$\begin{cases} \chi_{\mathrm{c}}(\Delta_d\boldsymbol{X}^m)(\sigma_m,T) = \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{X}))(\sigma_d,T)\,, & \text{si } d\,|\,m\,,\\ \chi_{\mathrm{c}}(\Delta_d\boldsymbol{X}^m)(\sigma_m,T) = 0\,, & \text{si } d\nmid m\,, \end{cases}$$

dont on déduit l'expression du deuxième membre de $(*)$ suivante :

$$\sum_{a\geqslant 0} \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{X}^m)(\sigma_m,T)}{T^{m-a}} = \sum_{d\,|\,m} \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{X}))(\sigma_d,T)}{T^d}\,. \tag{$\dagger$}$$

Maintenant, si $p_i : \boldsymbol{X}^m \to \boldsymbol{X}$ est la projection $\overline{x} \mapsto x_i$, on a $\sigma^* \circ p_{\sigma i}^* = p_i^*$ et l'action de σ sur les tenseurs simples de $H_{\mathrm{c}}^k(\boldsymbol{X})^{\otimes m}$ se fait par permutation

signée (*cf.* [28]) :

$$\sigma^*(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \cdots \otimes \omega_m) = (-1)^{k(m-1)}(\omega_2 \otimes \omega_3 \otimes \cdots \otimes \omega_1)\,.$$

Comme l'opérateur σ^* agit sur une base de tenseurs simples de $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})^{\otimes m}$, sa trace le lit sur ceux de tels tenseurs fixés par σ, donc de la forme $\omega \otimes \cdots \otimes \omega$ pour ω appartenant à une base de $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$. On a alors l'égalité

$$\begin{cases} \operatorname{tr}(\sigma^*{:}H_{\mathrm{c}}^{km}\boldsymbol{X}^m) = (-1)^{k(m-1)} \dim H_{\mathrm{c}}^k(\boldsymbol{X}) \\ \operatorname{tr}(\sigma^*{:}H_{\mathrm{c}}^{j}\boldsymbol{X}^m) \quad = 0\,, \text{ si } m\nmid j, \end{cases}$$

et, par définition de la série des traces 10.1.1,

$$\begin{aligned} \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^m)(\sigma_m, T) &= \sum_{k\geqslant 0}(-1)^{km}\cdot(-1)^{k(m-1)} \dim H_{\mathrm{c}}^k(\boldsymbol{X})\cdot T^{km} \\ &= \sum_{k\geqslant 0}(-1)^{k} \dim H_{\mathrm{c}}^k(\boldsymbol{X})\cdot (T^m)^k = \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1}, T^m)\,. \end{aligned} \tag{‡}$$

En reportant les égalités (†) et (‡) dans la formule (∗), on obtient :

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1}, T^m)}{T^m} = \sum_{d\,|\,m} \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{X}))(\sigma_d, T)}{T^d}\,, \quad \forall m \geqslant 1\,,$$

et la formule d'inversion de Möbius donne l'égalité recherchée :

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})(\sigma_m, T))}{T^m} = \sum_{d\,|\,m} \mu\Big(\frac{m}{d}\Big) \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1}, T^d)}{T^d}\,.$$

□

10.3.3. Remarque pour $\boldsymbol{X^m}$. D'après l'égalité (‡) de la preuve précédente qui donne

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^m)(\sigma_m, T) = \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1}, T^m)\,,$$

l'analogue du théorème 10.3.2 pour l'espace $\boldsymbol{X}^m$ s'énonce par la même formule où la sommation est restreinte au seul terme d'indice $d := m$. On retrouve alors les résultats de Macdonald ([28], formule (3.2)).

10.4. Séries des traces pour une puissance d'un m-cycle

10.4.1. Partitions en orbites $\mathfrak{q}_r$

On s'intéresse maintenant au cas où $m = dr$ avec $1 \leqslant d \leqslant m$ et à la trace de l'opérateur σ_{dr}^r agissant sur $\boldsymbol{F}_{dr}(\boldsymbol{X})$. Notons $\mathfrak{q}_r$ la partition de $[\![1{,}dr]\!]$ et $\langle\sigma_{dr}^r\rangle$-orbites. Pour l'étude de $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{dr}(\boldsymbol{X}))(\sigma_{dr}^r, T)$ nous allons utiliser le théorème 10.2.1 avec $\mathfrak{q} := \mathfrak{q}_r$ et $\ell := dr$. Dans ce cas, on a (10.1.2-(c))

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}\big(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}_r}(\boldsymbol{X})\big)(\sigma_{dr}^r, T)}{T^{dr}} = \Big(\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{X}))(\sigma_d, T)}{T^d}\Big)^r\,,$$

d'où l'égalité :

$$\Big(\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{X}))(\sigma_d,T)}{T^d}\Big)^r=\sum_{a\geqslant 0}\frac{\chi_{\mathrm{c}}\big(\Delta_{dr-a}\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}_r}(\boldsymbol{X})\big)(\sigma_{dr}^r,T)}{T^{dr-a}}\,,$$

qui nous emmène à l'étude de l'espace $\Delta_{dr-a}\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}_r}(\boldsymbol{X})$ sous l'action de σ_m^r.

10.4.2. Proposition. *Soit $\mathfrak{q}_r$ la partition de $[\![1,dr]\!]$ en $\langle\sigma_{dr}^r\rangle$-orbites et soit $\mathfrak{p}=\{I_1,\dots,I_\ell\}\pitchfork\mathfrak{q}_r$ telle que $\sigma_{dr}^r\cdot\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$. Alors, $\ell=dr'$, pour un certain r' vérifiant $1\leqslant r'\leqslant r$, et l'on a une identification d'espaces munis d'actions*

$$(\sigma_{dr}^r:\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{X}))\simeq(\sigma_{dr'}^{r'}:\boldsymbol{F}_{dr'}(\boldsymbol{X}))\,.$$

Le cardinal de l'ensemble de telles partitions $\mathfrak{p}$ est

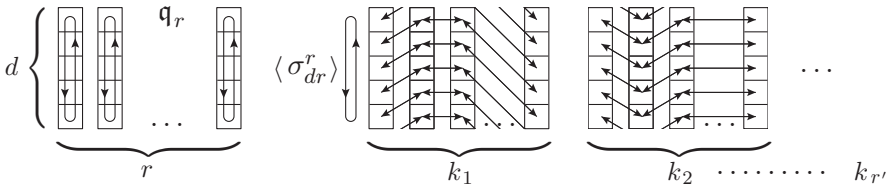
$$\Big|\big(\mathfrak{q}^{\pitchfork}\cap\mathfrak{P}_{dr'}(dr)\big)^{\sigma_{dr}^r}\Big|=\left\{{r\atop r'}\right\}d^{(r-r')}\,.$$

Démonstration. Commençons par remarquer qu'une partition $\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}(dr)$ vérifie $\sigma^r\cdot\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$, si et seulement si, la relation $\underset{\mathfrak{p}}{\sim}$ est « $\langle\sigma^r\rangle$-*équivariante* », c'est-à-dire :

$$i\underset{\mathfrak{p}}{\sim}j\Rightarrow\sigma^{ra}(i)\underset{\mathfrak{p}}{\sim}\sigma^{ra}(j)\,,\quad\forall a\in\mathbb{N}.$$

L'illustration ci-dessous représente, sur la partie gauche, la partition $\mathfrak{q}_r$. Chaque colonne étant l'une des parties de $\mathfrak{q}_r$, est remplie d'indices i de $[\![1,dr]\!]$ pour lesquels les coordonnées x_i de $\overline{x}\in\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}$ sont deux à deux distinctes. Le cycle à l'intérieur des colonnes rappelle l'action simplement transitive du groupe $\langle\sigma^r\rangle$ sur chacune d'elles.

Sur la partie droite, on représente, à l'aide de flèches, les identifications définies par l'équivalence $\underset{\mathfrak{p}}{\sim}$. Il faut remarquer le parallélisme des flèches dans le sens vertical qui reflète la σ^r-équivariance de $\underset{\mathfrak{p}}{\sim}$.



Les regroupements $k_1,k_2,\dots,k_{r'}$ sont tels que $r=\sum_i k_i$. On voit donc bien qu'au final on a $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}\simeq\boldsymbol{F}_{dr'}$ et que l'action $\sigma_{dr}^r:\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}$ s'identifie à $\sigma_{dr'}^{r'}:\boldsymbol{F}_{dr'}$.

La partie de droite de la figure permet aussi de comprendre que pour chaque partition de l'ensemble $\mathfrak{q}_r$ en r' parties non vides de cardinaux k_i, les différentes manières de définir les partitions $\mathfrak{p}\in(\mathfrak{q}^{\pitchfork})^{\sigma_{dr}^r}$ pour les regroupements k_i sont en bijection avec les différentes manières de dessiner les flèches, soit au nombre $d^{k_1-1}d^{k_2-1}\cdots d^{k_{r'}-1}=d^{r-r'}$, nombre qui seul dépend de r' et pas de la suite $(k_1,\dots,k_{r'})$. La proposition en découle. □

10.4.3. Théorème. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Pour tous $d, r \geqslant 1 \in \mathbb{N}$, la série de traces de l'action de σ_{dr}^r sur $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{dr}(\boldsymbol{X}))$ vérifie l'égalité :*

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{dr}(\boldsymbol{X}))(\sigma_{dr}^r, T)}{(dT^d)^r} = \Big(\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{X}))(\sigma_d, T)}{dT^d}\Big)^{\underline{r}},$$

soit

$$\boxed{\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{dr}(\boldsymbol{X}))(\sigma_{dr}^r, T)}{(dT^d)^r} = \Big(\sum_{e\,|\,d} \mu\big(\tfrac{d}{e}\big) \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1}, T^e)}{dT^e}\Big)^{\underline{r}}}$$

où μ est la fonction de Möbius et $(_)^{\underline{r}}$ est la factorielle décroissante de 14.1.

Démonstration. Dans la formule de l'introduction 10.4.1 :

$$\Big(\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{X}))(\sigma_d, T)}{T^d}\Big)^r = \sum_{a \geqslant 0} \frac{\chi_{\mathrm{c}}\big(\Delta_{dr-a}\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}_r}(\boldsymbol{X})\big)(\sigma_{dr}^r, T)}{T^{dr-a}},$$

nous pouvons maintenant préciser le membre de droite. Par 10.4.2, on a

$$\begin{cases} \chi_{\mathrm{c}}\big(\Delta_\ell \boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}_r}(\boldsymbol{X})\big)(\sigma_{dr}^r, T) = 0\,, \quad \text{si } d \nmid \ell\,, \\ \chi_{\mathrm{c}}\big(\Delta_{dr'} \boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}_r}(\boldsymbol{X})\big)(\sigma_{dr}^r, T) = \left\{ {r \atop r'} \right\} d^{(r-r')}\, \chi_{\mathrm{c}}\big(\boldsymbol{F}_{dr'}(\boldsymbol{X})\big)(\sigma_{dr'}^{r'}, T)\,. \end{cases}$$

En substituant les expressions, on obtient, pour tout $r \geqslant 1$,

$$\Big(\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{X}))(\sigma_d, T)}{(dT)^d}\Big)^r = \sum_{r' \geqslant 1} \left\{ {r \atop r'} \right\} \frac{\chi_{\mathrm{c}}\big(\boldsymbol{F}_{dr'}(\boldsymbol{X})\big)(\sigma_{dr'}^{r'}, T)}{(dT^d)^{r'}},$$

soi, en écriture vectorielle,

$$\begin{pmatrix} \Big(\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d)(\sigma_d, T)}{dT^d}\Big)^1 \\ \vdots \\ \Big(\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d)(\sigma_d, T)}{dT^d}\Big)^r \end{pmatrix} = \left(\left\{ {i \atop j} \right\} \right) \begin{pmatrix} \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{d\cdot 1})(\sigma_{d\cdot 1}^1, T)}{(dT^d)^1} \\ \vdots \\ \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{d\cdot r})(\sigma_{dr}^r, T)}{(dT^d)^r} \end{pmatrix}.$$

La matrice $\left(\left\{ {i \atop j} \right\} \right)$ est la matrice des nombres de Stirling de deuxième espèce $(\underline{S}(i,j))$ (14.4.1). Son inverse est la matrice des nombres de Stirling de première espèce signés $(\underline{s}(i,j))$. Cette matrice est aussi la matrice de changement d'un système de puissances $(X^1, \ldots, X^r)$ vers un système de factorielles décroissantes $(X^{\underline{1}}, \ldots, X^{\underline{r}})$ (14.3.3), par conséquent :

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{dr}(\boldsymbol{X}))(\sigma_{dr}^r, T)}{(dT^d)^r} = \Big(\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{X}))(\sigma_d, T)}{dT^d}\Big)^{\underline{r}}.$$

Le théorème découle alors de l'égalité du théorème 10.3.2 qui donne :

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{X})(\sigma_d,T))}{dT^d}=\sum_{e\,|\,d}\mu\big(\tfrac{d}{e}\big)\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1},T^e)}{dT^e}\,.\qquad\square$$

10.4.4. Remarque pour $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{m}}$. La remarque de l'introduction 10.4.1 est la même pour l'espace $\boldsymbol{X}^m$, mais en plus simple. On a clairement (*cf.* 10.3.3, mais aussi [28] (eq. 4.5))

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^{dr})(\sigma_{dr}^r,T)=\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1},T^d)^r\,.$$

Aussi, l'analogue du dernier théorème 10.4.3 pour l'espace $\boldsymbol{X}^m$ est donné par la même formule où la factorielle décroissante $(_)^{\underline{r}}$ est remplacée par la puissance $(_)^r$ et où la sommation est restreinte au terme d'indice $e:=d$.

10.5. Séries des traces pour une permutation générale

10.5.1. Permutations immiscibles

À une permutation $\alpha\in\mathfrak{S}_m$, on associe la partition $\mathfrak{p}_\alpha$ de $[\![1,m]\!]$ en $\langle\alpha\rangle$-orbites. Les cardinaux des $\langle\alpha\rangle$-orbites définissent une décomposition de m que l'on note $\lambda(\alpha)=(1^{\mathsf{x}_1(\alpha)},2^{\mathsf{x}_2(\alpha)},\dots,m^{\mathsf{x}_m(\alpha)})$, ce qui signifie le fait qu'il y a exactement $\mathsf{x}_i(\alpha)$ orbites de cardinal i.

Définition. Étant données deux parties non vides I et J de $[\![1,m]\!]$ et deux permutations $\alpha\in\mathfrak{S}_I$ et $\beta\in\mathfrak{S}_J$ (voir 3.4.3), on dit qu'elles sont « *immiscibles* », si l'on a $\sum_i\mathsf{x}_i(\alpha)\mathsf{x}_i(\beta)=0$, autrement dit, si les orbites de $\langle\alpha\rangle$ dans I ont toutes des cardinaux différents de celles de $\langle\beta\rangle$ dans J.

10.5.2. Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Pour toute partition $\mathfrak{q}:=\{J_1,\dots,J_r\}\in\mathfrak{P}(m)$, et toute famille de permutations $\{\alpha_i\in\mathfrak{S}_{J_i}\}_{i=1,\dots,r}$ deux à deux immiscibles, on a*

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\alpha,T)=\prod\nolimits_{i=1}^r\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{|J_i|}(\boldsymbol{X}))(\alpha_i,T)$$

où α désigne le recollement des α_i et où, dans les terme de droite, nous avons identifié le support J_i de α_i avec l'intervalle $[\![1,|J_i|]\!]$.

Démonstration. Grâce au complexe fondamental de $\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X})$, pour $\ell=m$ et pour α le recollement des α_i, on a l'égalité (10.2.1)

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}})(\alpha,T)}{T^m}=\sum\nolimits_{a\geqslant 0}\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\Delta_{m-a}\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X}))(\alpha,T)}{T^{m-a}}\,,$$

où, dans le premier membre, on a clairement

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}})(\alpha,T)=\prod\nolimits_{i=1}^r\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{|J_i|}(\boldsymbol{X}))(\alpha_i,T)\,.$$

Dans le second membre, pour $a = 0$, on a bien

$$\chi_{\mathrm{c}}(\Delta_m \boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X}))(\alpha, T) = \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\alpha, T)$$

ce qui nous emmène à montrer que pour tout $a \geqslant 1$, on a

$$\chi_{\mathrm{c}}(\Delta_{m-a} \boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X}))(\alpha, T) = 0 \qquad (*)$$

Or, d'après 3.4.5, on a la décomposition en sous-espaces ouverts

$$\Delta_\ell \boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X}) := \coprod\nolimits_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_\ell(m),\, \mathfrak{p} \pitchfork \mathfrak{q}} \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{X})\,,$$

et la série de traces de α pour $\Delta_\ell \boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}$ est concentrée sur les espaces $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}$ correspondants aux partitions $\mathfrak{p}$ vérifiant, de plus, $\alpha \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, donc, telles que

$$(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j) \Longrightarrow (\alpha^r i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} \alpha^r j)\,.$$

Maintenant, s'il existait une telle partition pour $\ell < m$, on aurait un certain couple $(i \neq j)$ vérifiant $(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j)$, auquel cas, par transversalité, on aurait $(i \underset{\mathfrak{q}}{\not\sim} j)$ et il existerait des parties $J_a \neq J_b$ de $\mathfrak{q}$ telles que $i \in J_a$ et $j \in J_b$. En particulier, les orbites $\langle\alpha\rangle \cdot i = \langle\alpha_a\rangle \cdot i$ et $\langle\alpha\rangle \cdot j = \langle\alpha_b\rangle \cdot j$ seraient de cardinaux différents puisque α_a et α_b sont immiscibles. Si $\epsilon := \mathrm{ord}(\alpha_a) < \mathrm{ord}(\alpha_b)$, on aurait

$$(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j) \text{ et } (i = \alpha_a^\epsilon\, i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} \alpha_b^\epsilon\, j)\,, \quad \text{et donc} \quad (j \underset{\mathfrak{p}}{\sim} \alpha_b^\epsilon\, j)\,,$$

avec $\alpha_b^\epsilon\, j \neq j$, et ceci contredirait la transversalité de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ puisque $(j \underset{\mathfrak{q}}{\sim} \alpha^\epsilon\, j)$.

L'égalité $(*)$ se trouve ainsi justifiée et la proposition résulte. □

On peut maintenant énoncer le théorème principal de cette section.

10.5.3. Théorème. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Étant donné une permutation $\alpha \in \mathcal{S}_m$, soit $\lambda(\alpha) = (1^{\mathsf{x}_1}, 2^{\mathsf{x}_2}, \ldots, m^{\mathsf{x}_m})$ la décomposition de m déterminée par la partition de $[\![1,m]\!]$ en $\langle\alpha\rangle$-orbites. Alors,*

$$\boxed{\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\alpha, T)}{T^m} = \prod_{d=1}^{m} d^{\mathsf{x}_d} \Big(\sum_{e \,|\, d} \mu\big(\tfrac{d}{e}\big) \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1}, T^e)}{dT^e} \Big)^{\underline{\mathsf{x}_d}}}$$

où μ est la fonction de Möbius et $(_)^{\underline{r}}$ est la factorielle décroissante de 14.1.

Démonstration. Pour chaque $d = 1, 2, \ldots, m$, notons J_d la réunion des $\langle\alpha\rangle$-orbites de $[\![1,m]\!]$ qui sont de cardinal d. Notons $\mathfrak{q}$ la partition de $[\![1,m]\!]$ définie par les parties J_d non vides, *i.e.* telles que $\mathsf{x}_d \neq 0$.

Pour chaque $J \in \mathfrak{q}$, notons α_J la restriction de α à J. On a $\alpha \in \mathcal{S}^{\mathfrak{q}}$, et ses différentes composantes α_J sont deux à deux immiscibles. On peut donc appliquer la proposition 10.5.2 à la partition $\mathfrak{q}$ et à la permutation α. On

obtient l'égalité

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\alpha,T)}{T^m} = \prod\nolimits_{J\in\mathfrak{q}} \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{|J|}(\boldsymbol{X}))(\alpha_J,T)}{T^{|J|}}\,. \qquad (*)$$

Maintenant, comme une partie $J_d \in \mathfrak{q}$ est la réunion de x_d orbites de cardinal d, l'action de α sur J_d est équivalente à l'action de $\sigma_{d\mathsf{x}_d}^{\mathsf{x}_d}$ sur $[\![1,d\mathsf{x}_d]\!]$ et chaque terme du produit dans $(*)$ est, d'après 10.4.3,

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{d\mathsf{x}_d}(\boldsymbol{X}))(\sigma_{d\mathsf{x}_d}^{\mathsf{x}_d},T)}{T^{d\mathsf{x}_d}} = d^{\mathsf{x}_d}\Big(\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{X}))(\sigma_d,T)}{dT^d}\Big)^{\underline{\mathsf{x}_d}}\,.$$

Le théorème résulte alors de remarquer que dans le produit de la formule à démontrer, les termes d'indices d tels que $\mathsf{x}_d = 0$ sont tous égaux à 1. □

10.5.4. Remarque pour $\boldsymbol{X}^m$. Tout comme dans les remarques 10.3.3 et 10.4.4, l'analogue du dernier théorème 10.5.3 pour l'espace $\boldsymbol{X}^m$ est donné par la même formule où $(_)^{\underline{r}}$ est remplacée par $(_)^r$ et où la sommation est restreinte au seul terme d'indice $e := d$ (*cf.* aussi [28] (eq. 4.5)). On a donc pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_m$ avec $\lambda(\alpha) = (1^{\mathsf{x}_1}, 2^{\mathsf{x}_2}, \dots, m^{\mathsf{x}_m})$:

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}^m)(\alpha,T) = \prod\nolimits_{d=1}^{m} d^{\mathsf{x}_d}\,\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1},T^d)^{\mathsf{x}_d}\,.$$

10.6. Comparaison entre $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ et $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}\smallsetminus a))$

Pour $\alpha \in \mathcal{S}_m$, notons $\lambda(\alpha) = (1^{\mathsf{x}_1(\alpha)}, 2^{\mathsf{x}_2(\alpha)}, \dots\dots) \vdash m$ son type. Le coefficient $\mathsf{x}_1(\alpha)$ est le cardinal de l'ensemble des α-orbites réduites à un point, autrement dit, de l'ensemble des $i \in [\![1,m]\!]$ fixés par α.

10.6.1. Le cas ou $\mathsf{x}_1(\alpha) = 0$. On a vu dans le corollaire de 3.1.3 que si $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, on dispose d'une suite exacte courte de $\mathcal{S}_m$-modules gradués

$$0 \to H_{\mathrm{c}}\big(\boldsymbol{F}_m^{\bullet}(\boldsymbol{X})\big)[-1] \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\mathring{\boldsymbol{X}})) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})) \to 0 \qquad (*)$$

où $\mathring{\boldsymbol{X}} := \boldsymbol{X}\smallsetminus\{\bullet\}$ pour un certain $\bullet \in \boldsymbol{X}$, et où $\boldsymbol{F}_m^{\bullet}(\boldsymbol{X})$ est la réunion disjointe des $\boldsymbol{F}_m^{x_i=\bullet}(\boldsymbol{X}) := \{(x_1,\dots,x_m) \in \boldsymbol{F}_m \mid x_i = \bullet\}$ où $i = 1,\dots,m$.

Or, par l'égalité évidente $\alpha(\boldsymbol{F}_m^{x_i=\bullet}) = \boldsymbol{F}_m^{x_{\alpha(i)}=\bullet}$, on voit que si $\mathsf{x}_1(\alpha) = 0$, on a $\alpha(\boldsymbol{F}_m^{x_i=\bullet}) \neq (\boldsymbol{F}_m^{x_i=\bullet})$, et donc que $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m^{\bullet})(\alpha,T) = 0$. On conclut alors, par l'exactitude de $(*)$, que $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}\smallsetminus 1))(\alpha,T) = \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\alpha,T)$, d'où le lemme suivant.

10.6.2. Lemme. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Pout tout $m > 0$ et toute permutation $\alpha \in \mathcal{S}_m$ telle que $\mathsf{x}_1(\alpha) = 0$, on a*

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}\smallsetminus a))(\alpha,T) = \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\alpha,T)$$

pour tout $a \in \mathbb{N}$.

10.6.3. Remarque. Ce lemme peut aussi être vérifié en appliquant le théorème 10.5.3. Dans ce cas, il suffit de voir que pour tout $d > 1$ on a

$$\sum_{e\,|\,d} \mu\big(\tfrac{d}{e}\big) \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus 1)(\mathbf{1}, T^e)}{T^e} = \sum_{e\,|\,d} \mu\big(\tfrac{d}{e}\big) \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1}, T^e)}{T^e}\,.$$

Or, d'après 4.1.5-(c), on a $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus 1)(\mathbf{1}, T) = \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1}, T) - T$, et alors

$$\sum_{e\,|\,d} \mu\big(\tfrac{d}{e}\big) \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus 1)(\mathbf{1}, T^e)}{T^e} = \sum_{e\,|\,d} \mu\big(\tfrac{d}{e}\big) \Big(\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1}, T^e)}{T^e} - 1\Big)\,.$$

On conclut par le fait bien connu sur la fonction de Möbius que affirme que l'on a $\sum_{e\,|\,d} \mu(d/e) = 0$ lorsque $d > 1$.

10.6.4. Le cas général. Pour $\alpha \in \mathcal{S}_m$, notons $I := \{i \in [\![1,m]\!] \mid \alpha(i) = i\}$ et $J := [\![1,m]\!] \smallsetminus I$. Les permutations $\mathrm{id}_I \in \mathcal{S}_I$ et $\alpha|_J \in \mathcal{S}_J$ sont clairement immiscibles et on peut appliquer 10.5.2. On a

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\alpha, T) = \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{|I|}(\boldsymbol{X}))(\mathbf{1}, T) \cdot \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{|J|}(\boldsymbol{X}))(\alpha|_J, T)\,,$$

d'où la proposition suivante.

10.6.5. Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. On a*

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\alpha, T)}{\Big(\dfrac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1}, T)}{T}\Big)^{\underline{x_1(\alpha)}}} = \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))(\alpha, T)}{\Big(\dfrac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1}, T)}{T} - a\Big)^{\underline{x_1(\alpha)}}}$$

10.7. Comparaison entre $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))$ et $\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a)) \cdot \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}))$

Dans la section 12, nous allons nous intéresser de plus près aux projections $\pi_a : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ de fibre $\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a)$. Le théorème 12.4.9 établit que lorsque $\boldsymbol{X}$ est, de plus, i-acyclique et localement connexe, la suite spectrale de Leray associée à π_a est dégénérée ($d_r = 0$, pour $r \geqslant 2$), auquel cas on a un isomorphisme

$$H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X})) \sim H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a)) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}))\,.$$

Notons $\mathcal{S}_a$ (resp. $\mathcal{S}_b$) le sous-groupe des permutations $\alpha \in \mathcal{S}_{b+a}$ telles que $\alpha(i) = i$ pour tout $i \leqslant b$ (resp. $b < i$). Le groupe $\mathcal{S}_a$ agit sur la base $\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$, et le groupe $\mathcal{S}_b$ sur la fibre $\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a)$.

La proposition suivante montre qu'il n'est généralement pas vrai que le caractère de $\mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_a$ sur $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{b+a})$ soit le produit des deux autres caractères, *i.e. on n'a pas* pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_a$ l'égalité :

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))((\beta, \alpha), T) = \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))(\beta, T) \cdot \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}))(\alpha, T)\,. \qquad (\ddagger)$$

10.7.1. Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique.*

a) *Pour $d>1$ et $r>r'\geqslant 1$, et pour $\pi : \boldsymbol{F}_{dr}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_{dr'}(\boldsymbol{X})$ la projection sur la réunion de r' orbites de $\langle\sigma_{dr}^r\rangle$. On a*

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{dr}(\boldsymbol{X}))(\sigma_{dr}^r)=(dT^d)^r Q_d(\boldsymbol{X})^{\underline{r}}$$

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X}\smallsetminus dr'))(\sigma_{dr''}^{r''})\cdot\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{dr'}(\boldsymbol{X}))(\sigma_{dr'}^{r'})=(dT^d)^r Q_d(\boldsymbol{X})^{\underline{r''}}\cdot Q_d(\boldsymbol{X})^{\underline{r'}}$$

où $r'':=r-r'$ et $Q_d(\boldsymbol{X}):=\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{X}))(\sigma_d,T)/(dT^d)$.
Dans cette situation, l'égalité (‡) n'est donc jamais vérifiée.

b) *Pour $a,b\geqslant 1$. On a pour tout $\alpha\in\mathcal{S}_a$,*

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))(\mathbf{1}_b\times\alpha,T)=T^{b+a}Q_1{}^{\underline{b+\mathsf{x}_1(\alpha)}}\cdot R$$

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X}\smallsetminus a))(\mathbf{1}_b,T)\cdot\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}))(\alpha,T)=T^{b+a}(Q_1-a)^{\underline{b}}\cdot Q_1{}^{\underline{\mathsf{x}_1(\alpha)}}\cdot R$$

où $Q_1:=(\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1},T)/T)$ et $R:=\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))(\alpha',T)/T^{b+a}$ avec α' tel que $\mathsf{x}_1(\alpha')=0$ et $\mathsf{x}_i(\alpha')=\mathsf{x}_i(\alpha)$ pour les autres indices i.
Dans cette situation, la formule (‡) est vérifiée si et seulement si $\alpha=\mathbf{1}_a$.

Démonstration. (a) La fibre de π étant $\boldsymbol{F}_{dr''}(\boldsymbol{X}\smallsetminus dr')$, on a par 10.4.3

$$\begin{cases} \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{dr}(\boldsymbol{X}))(\sigma_{dr}^r,T)=(dT^d)^r Q_d(\boldsymbol{X})^{\underline{r}} \\ \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{dr'}(\boldsymbol{X}))(\sigma_{dr'}^{r'},T)=(dT^d)^{r'} Q_d(\boldsymbol{X})^{\underline{r'}} \\ \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{dr''}(\boldsymbol{X}\smallsetminus dr'))(\sigma_{dr''}^{r''},T)=(dT^d)^{r''} Q_d(\boldsymbol{X}\smallsetminus dr')^{\underline{r''}}. \end{cases}$$

où, dans la troisième égalité on a $Q_d(\boldsymbol{X}\smallsetminus dr')=Q_d(\boldsymbol{X})$, d'après 10.6.2.

(b) Les égalités résultent aussitôt de 10.5.3. La formule (‡) est vérifiée si et seulement si,

$$Q_1{}^{\underline{b+\mathsf{x}_1(\alpha)}}=(Q_1-a)^{\underline{b}}\cdot Q_1{}^{\underline{\mathsf{x}_1(\alpha)}}$$

et la conclusion résulte de ce que $Q_1{}^{\underline{b+\mathsf{x}_1(\alpha)}}=Q_1{}^{\underline{\mathsf{x}_1(\alpha)}}\cdot(Q_1-\mathsf{x}_1(\alpha))^{\underline{b}}$. □

10.7.2. Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Si α et β sont immiscibles et si $\mathsf{x}_1(\beta)=0$, l'égalité (‡) est vérifiée.*

Démonstration. Conséquence du théorème 10.5.3 et du lemme 10.6.2. □

11. Quotients d'espaces de configuration généralisés

La possibilité d'un algorithme de calcul des caractères de $\mathcal{S}_m$-modules $H_{\mathrm{c}}^i(\Delta_\ell\boldsymbol{X}^m)$ donnée par le théorème 5.3.3 et évoquée dans la remarque 5.3.4, ouvre la porte à la détermination des polynômes de Poincaré de la cohomologie des espaces d'orbites $(\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)/\boldsymbol{H}$ où $\boldsymbol{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_m$.

11.1. Polynômes de Poincaré de $(\Delta_{?\ell}X^m)/H$

L'énoncé bien connu suivant rappelle le lien entre le polynôme de Poincaré des quotients et les séries de caractères.

11.1.1. Proposition. *Soit $\boldsymbol{Z}$ un espace topologique de type fini muni d'une action de $\mathcal{S}_m$. Pour tout sous-groupe $\boldsymbol{H} \subseteq \mathcal{S}_m$, on a*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{H})(-T) &= \frac{1}{|\boldsymbol{H}|}\sum\nolimits_{h\in\boldsymbol{H}} \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})(h,T)\\ &= \frac{1}{m!}\sum\nolimits_{g\in\mathcal{S}_m} \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})(g,T)\cdot\chi(\mathrm{ind}_{\boldsymbol{H}}^{\mathcal{S}_m}\,\mathbf{1})(g)\\ &= \frac{1}{m!}\sum\nolimits_{\lambda} h_\lambda\,\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})(g_\lambda,T)\cdot\chi(\mathrm{ind}_{\boldsymbol{H}}^{\mathcal{S}_m}\,\mathbf{1})(g_\lambda)\end{aligned}$$

Dans la dernière formule, la sommation est indexée par les décompositions $\lambda = \{1^{\mathsf{x}_1}, 2^{\mathsf{x}_2}, \ldots, m^{\mathsf{x}_m}\}$ de m, le nombre h_λ est le cardinal de l'ensemble $\pi(\lambda)$ des permutations dont la décomposition en produit de cycles disjoints est de type λ, l'élément g_λ est alors un représentant quelconque de $\pi(\lambda)$.

Démonstration. Un théorème classique de Grothendieck ([22])[35] donne l'équivalence $H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}/H) = H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})^H$, pour tout $i \in \mathbb{N}$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{H})(-T) &= \sum_{i\in\mathbb{N}}\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{H}|}\sum\nolimits_{h\in\boldsymbol{H}}\mathrm{tr}(h{:}H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}))\Big)(-T)^i\\ &= \frac{1}{|\boldsymbol{H}|}\sum\nolimits_{h\in\boldsymbol{H}}\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})(h,T)\,.\end{aligned}$$

Les autres égalités sont classiques (*cf.* [28] eq. (6.1) et (6.2)). □

11.1.2. Commentaire. Lorsque l'espace $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, cette proposition et l'explicitation des séries de caractères des $\mathcal{S}_m$-modules $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$ du théorème 10.5.3, donnent des formules très explicites des polynômes de Poincaré pour les espaces de configurations cycliques et non-ordonnées associés à $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$, ce qui constitue le sujet des deux sections suivantes.

11.2. Espaces de configurations cycliques $\boldsymbol{CF_m(X)}$

Soit $\boldsymbol{C}_m$ le sous-groupe de $\mathcal{S}_m$ engendré par le cycle $\sigma_m := (1,\ldots,m)$. L'« *espace de configurations cycliques de* $\boldsymbol{X}$ », noté $\boldsymbol{CF}_m(\boldsymbol{X})$, est l'espace

$$\boldsymbol{CF}_m(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\boldsymbol{C}_m\,.$$

[35] *Loc.cit.* Théorème 5.3.1 et corollaire de la Proposition 5.2.3.

11.2.1. Théorème. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a*

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{CF}_m)(-T) = \frac{T^m}{m}\sum_{d\,|\,m}\phi(d)\,d^{m/d}\Big(\sum_{e\,|\,d}\mu\big(\tfrac{d}{e}\big)\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e}\Big)^{\underline{m/d}}},$$

où $\phi(_)$ est la fonction indicatrice d'Euler, $\mu(_)$ est la fonction de Möbius et $(_)^{\underline{r}}$ est la factorielle décroissante de 14.1.

Démonstration. Par 11.1.1, on a

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{CF}_m)(-T)}{T^m} = \frac{1}{m}\sum\nolimits_{dr=m}\phi(d)\,\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m)(\sigma_m^r,T)}{T^m}\,.$$

Par 10.4.3, on a alors

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{CF}_m)(-T)}{T^m} = \frac{1}{m}\sum\nolimits_{dr=m}\phi(d)\,d^r\Big(\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{X}))(\sigma_d,T)}{dT^d}\Big)^{\underline{r}},$$

et la proposition résulte de l'égalité 10.3.2 :

$$\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{X})(\sigma_d,T))}{T^d} = \sum\nolimits_{e\,|\,d}\mu\big(\tfrac{d}{e}\big)\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{T^e}\,. \qquad \square$$

11.2.2. Remarque. Un cas particulier de la proposition précédente est lorsque m est un nombre premier p. Dans ce cas, on a simplement

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{CF}_p)(-T)}{T^p} &= \frac{1}{p}\Big(\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_p)(\mathbf{1},T)}{T^p} + (p-1)\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_p)(\sigma_p,T)}{T^p}\Big)\\ &= \frac{1}{p}\Big(\Big(\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1},T)}{T}\Big)^{\underline{p}} + (p-1)\Big(\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1},T^p)}{T^p} - \frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1},T)}{T}\Big)\Big)\end{aligned}$$

Où l'on remarquera que si nous notons $Q(T) := \chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(\mathbf{1},T)/T$, la dernière expression entre les grandes parenthèses est

$$Q(T)^{\underline{p}} + (p-1)\big(Q(T^p) - Q(T)\big)\,,$$

qui est nulle modulo p puisque l'on a

$$Q(T)^{\underline{p}} \equiv_p Q(T)^p - Q(T) \equiv_p Q(T^p) - Q(T)\,.$$

11.2.3. Remarque. En suivant la méthode décrite dans [28], la proposition résulte également comme application de la troisième égalité de 11.1.1. Dans ce cas, $\chi(\mathrm{ind}_{C_m}^{\mathfrak{S}_m})(g_\lambda) \neq 0$, si et seulement si, g_λ est conjuguée à $\sigma_m^{m/d}$ pour un certain $d\,|\,m$, auquel cas

$$\lambda = \big\{d^{m/d}\big\}\,,\quad h_\lambda = \frac{m!}{d^{m/d}}\,,\quad g_\lambda := \sigma_m^{m/d}\,,\quad \chi(\mathrm{ind}_{C_m}^{\mathfrak{S}_m})(g_\lambda) = \phi\big(d\big)\,\frac{d^{m/d}}{m}\,,$$

d'où

$$\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{CF}_m(\boldsymbol{X}))(-T) = \frac{1}{m}\sum\nolimits_{d\,|\,m}\phi(d)\,\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\sigma_m^{m/d},T)\,,$$

et la conclusion suit par application de 10.5.3 à la décomposition λ en question, ce qui donne

$$\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))(\sigma_m^{m/d},T) = T^m\ d^{m/d}\ \Big(\frac{\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{X}))(\sigma_d,T)}{dT^d}\Big)^{\underline{m/d}}\,.$$

11.2.4. Remarque pour $\boldsymbol{X^m}$. En accord avec la remarque 10.5.4, l'analogue du théorème 11.2.1 pour le produit cyclique $\boldsymbol{X}[m] := \boldsymbol{X}^m/\boldsymbol{C}_m$ ([36]) est donné par la même formule où la factorielle décroissante $(_)^{\underline{r}}$ est remplacée par la puissance $(_)^r$ et où la deuxième sommation est restreinte au seul terme d'indice $e := d$. On a donc :

$$\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}[m])(T) = \frac{1}{m}\sum\nolimits_{d\,|\,m}\phi(d)\,\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})((-1)^{d+1}T^d)^{m/d}\,,$$

qui est très précisément la formule (8.4) de [28].

11.3. Espaces de configurations non-ordonnées $\boldsymbol{BF_m(X)}$

On appelle « *espace de configurations non ordonnées de* $\boldsymbol{X}$ », noté $\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X})$, l'espace

$$\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\mathcal{S}_m\,.$$

11.3.1. Théorème. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Pour tout $m\in\mathbb{N}$, on a*

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X}))(-T)}{T^m} = \frac{1}{m!}\sum_{\lambda:=(1^{x_1},\dots,m^{x_m})\vdash m} h_\lambda \prod\nolimits_{d=1}^{m} d^{x_d}\Big(\sum_{e\,|\,d}\mu\big(\tfrac{d}{e}\big)\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(-T^e)}{dT^e}\Big)^{\underline{x_d}}$$

où $\mu(_)$ est la fonction de Möbius, $(_)^{\underline{r}}$ est la factorielle décroissante (14.1), et h_λ est le cardinal de l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_m$ dont la décomposition en cycles disjoints est de type $\lambda := (1^{x_1},\dots,m^{x_m})\vdash m$, soit :

$$h_\lambda = \frac{m!}{x_1!\,x_2!\,\dots x_m!\ (1!)^{x_1}(2!)^{x_2}\cdots(m!)^{x_m}}\,.$$

Démonstration. Corollaire immédiat de la troisième formule de 11.1.1 modulo le calcul de séries de traces de 10.5.3. La valeur de h_λ est classique et bien connue (*cf.* [3] thm. 13.2, p. 215). □

11.3.2. Remarque pour $\boldsymbol{X^m}$. Comme pour les autres remarques concernant $\boldsymbol{X}^m$, l'analogue du dernier théorème 11.3.1 pour le produit symétrique $\boldsymbol{X}(m) := \boldsymbol{X}^m/\mathcal{S}_m$ ([37]) est donné par la même formule où la factorielle décroissante $(_)^{\underline{r}}$ est remplacée par la puissance $(_)^r$ et où la deuxième som-

[36] Notation de [28] p. 568.

[37] Notation de [28] p. 568.

mation est restreinte au seul terme d'indice $e := d$. On a donc :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}(m))(T) = \frac{1}{m!} \sum_{\lambda:=(1^{\mathsf{x}_1},\dots,m^{\mathsf{x}_m})\vdash m} h_\lambda \prod_{d=1}^{m} \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})((-1)^{d+1}T^d)^{\mathsf{x}_d}}$$

qui est très précisément la formule (8.3) de [28].

Concernant cette formule, on rappelle que Macdonald en a donné une très belle fonction génératrice (*loc.cit.* eq (8.5)) : le k-ième coefficient de $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}(m))$ est le coefficient en $x^k t^m$ du développement en série entière de

$$\frac{(1+xt)^{\beta_1}(1+x^3t)^{\beta_3}\cdots}{(1-t)^{\beta_0}(1-x^2t)^{\beta_2}(1-x^4t)^{\beta_4}\cdots}$$

où β_k est le k-ième coefficient de $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$.

Nous ne connaissons pas de résultat semblable pour $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X}))$, la difficulté essentielle, par rapport à l'approche de Macdonald, réside dans les factorielles décroissantes.

11.3.3. Commentaire. Conformément au théorème 9.2.3 de monotonie et stabilité des familles $\{\mathcal{S}_m : H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$, lorsque $\boldsymbol{M}$ est une pseudovariété connexe orientable de dimension $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 2$ et pour chaque $i \in \mathbb{N}$ fixé, la famille de polynômes de Poincaré

$$\left\{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))(1/T)\cdot T^{md_M} \pmod{T^{i+1}}\right\}_m \qquad (*)$$

est stationnaire. C'est un phénomène qui n'est pas apparent à la lecture de la formule 11.3.1. Cela nous a intrigué et nous a conduit à la rédaction de la section suivante où nous déterminons assez précisément le rang de stabilité de la famille de nombres $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$. On y procède en deux temps. D'abord, lorsque $\boldsymbol{M}$ est i-acyclique (11.5.3), en étudiant le coefficient de T^i dans développement de la série $(1/m!)\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_m}\chi_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))(\alpha,T)$ d'après la formule 10.5.3. Ensuite, lorsque $\boldsymbol{M}$ est général, à l'aide des suites spectrales basiques. Ce faisant, nous obtenons la proposition 11.6.1 qui est une importante amélioration de l'estimation de la plage de stabilité de la famille de nombres $(*)$ puisque l'on passe de $\{m \geqslant 4i\}$ à $\{m \geqslant 2i\}$ si $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, et de $\{m \geqslant 2i\}$ à $\{m \geqslant i\}$ si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$. Cette dernière proposition généralise les théorèmes A et B de Randal-Williams [32], mais aussi le corollaire 3 de Church ([7], p. 470) valables seulement lorsque $\boldsymbol{M}$ est une variété topologique.[38]

[38] Il convient cependant de signaler que pour $\boldsymbol{M}$ une variété topologique de dimension $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, Church améliore encore la plage de stabilité à $\{m > i\}$ ce que nous n'avons pas établi, mais que nous n'excluons pas comme accessible avec nos méthodes.

11.4. Sur le rang de stabilité de la famille $\{\mathbf{Betti}^{i}_{\mathbf{BM}}(BF_m(M))\}_m$

11.4.1. Rang de stabilité des caractères polynomiaux. Dans 7.3.1, nous avons rappelé la notion de polynomialité d'une famille de caractères $\{\chi_{\mathcal{S}_m}(W_m)\}_m$. Nous y avons introduit la fonction $X_i : \mathcal{S}_m \to \mathbb{N}$ qui fait correspondre à $\alpha \in \mathcal{S}_m$ le nombre $X_i(\alpha)$ de cycles de longueur i dans la décomposition de $\alpha \in \mathcal{S}_m$ comme produit de cycles disjoints.

11.4.2. Polynomialité des fonctions centrales. Pour $m \geqslant 0$, on note $\mathbb{Q}_{\mathrm{cl}}(\mathcal{S}_m)$ la $\mathbb{Q}$-algèbre des *fonctions* $f : \mathcal{S}_m \to \mathbb{Q}$ *dites centrales*, *i.e.* constantes sur chaque classe de conjugaison de $\mathcal{S}_m$. On note ensuite

$$\rho_m : k[\overline{X}] := k[X_1, X_2, \ldots] \to \mathbb{Q}_{\mathrm{cl}}(\mathcal{S}_m)$$

l'homomorphisme d'algèbres défini et faisant correspondre à X_i la fonction centrale $\alpha \mapsto X_i(\alpha)$. On a donc

$$\rho_m(X_1^{d_1} X_2^{d_2} \cdots X_\ell^{d_\ell})(\alpha) := \prod\nolimits_k X_k(\alpha)^{d_k}\,, \quad \forall d_k \in \mathbb{N}\,.$$

11.4.3. Proposition. *L'homomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres*

$$\rho_m : k[\overline{X}] \to \mathbb{Q}_{\mathrm{cl}}(\mathcal{S}_m)$$

est surjectif et son noyau contient les polynômes :

$$\big(X_1 + 2X_2 + \cdots + mX_m - m\big) \quad \textit{and} \quad \big(X_i(X_i-1)\cdots\big(X_i - \lfloor m/i \rfloor\big)\big)\,.$$

En particulier, les caractères de $\mathcal{S}_m$ peuvent être réprésentés par des polynômes à coefficients rationnels en les variables $X_1, \ldots, X_{m-1}$.

Démonstration. Pour $i \in [\![1,m]\!]$ et $j \in [\![0, \lfloor m/i \rfloor]\!]$ soit le polynome de $\mathbb{Z}[Z]$:

$$Z_{i,j} := Z(Z-1)\cdots\widehat{(Z-j)}\cdots\big(Z - \lfloor m/i \rfloor\big)$$

et notons

$$Q_{i,j} := Z_{i,j}(X_i)/Z_{i,j}(j) \in k[\overline{X}]\,.$$

On a clairement l'égalité

$$\rho_m(Q_{i,j})(\alpha) = \delta_{X_i(\alpha),j} \text{ (delta de Kronecker)}$$

En particulier, si $\mu = (1^{a_1}, \ldots, m^{a_m}) \vdash m$, d'image par ρ_m du polynôme

$$Q_\mu := \prod\nolimits_{i=1}^{m} Q_{i,a_i}$$

est la fonction caractéristique de l'ensemble des permutations de type μ. □

11.4.4. La graduation $\underline{\deg}$ de $k[\overline{X}]$. Il s'agit de la graduation des polynômes dans l'algèbre $k[\overline{X}] := k[X_1, X_2, \ldots]$ qui résulte de poser $\underline{\deg}\, X_i = i$.

11.4.5. Proposition. *Pour $P \in k[X_1, \dots, X_\ell]$, la famille de nombres*

$$\Big\{ \frac{1}{m!} \sum\nolimits_{\alpha \in \mathcal{S}_m} P\big(X_1(\alpha), \dots, X_\ell(\alpha)\big) \Big\}_m$$

est constante pour $m \geqslant \underline{\deg}(P)$.

Démonstration. Il suffit de le prouver pour les monômes $P := X_1^{d_1} X_2^{d_2} \cdots X_\ell^{d_\ell}$, où $\underline{\deg}(P) > 0$, vu que pour $P = 1$ la proposition est évidente.

On introduit les ensembles $\mathcal{C}_i(m)$, pour $1 \leqslant i \leqslant m$.

On pose $\mathcal{C}_1(m) := [\![1,m]\!]$, et, pour $i > 1$, on pose $\mathcal{C}_i(m) :=$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_m$ des i-cycles. On fait agir $\mathcal{S}_m$ sur $\mathcal{C}_1(m)$ par son action naturelle et sur $\mathcal{C}_i(m)$ par conjugaison, $\alpha \cdot \gamma := \alpha\gamma\alpha^{-1}$. On note ensuite $\mathcal{E}_i(m)$ le $k[\mathcal{S}_m]$-module engendré par les éléments de $\mathcal{C}_i(m)$, et l'on note

$$\mathcal{E}_P(m) := \mathcal{E}_1(m)^{\otimes d_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_\ell(m)^{\otimes d_\ell} .$$

muni de sa structure de $\mathcal{S}_m$-module produit tensoriel de représentations.

(A) Rang de stabilité de $\dim_k(\mathcal{E}_P(m)^{\mathcal{S}_m})$.

L'espace $\mathcal{E}_P(m)$ a une base paramétrée par l'ensemble de $\underline{\deg}(P)$-uplets

$$\mathcal{C}_P(m) := \big\{ (\gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,d_1}, \gamma_{2,1}, \dots, \gamma_{2,d_2}, \dots, \gamma_{\ell,1}, \dots, \gamma_{\ell,d_\ell}) \big\} ,$$

où $\gamma_{i,j} \in \mathcal{C}_i(m)$, de sorte que le sous-espace $\mathcal{E}_P(m)^{\mathcal{S}_m}$ admet une base paramétrée par l'ensemble $\mathcal{C}_P(m)/\mathcal{S}_m$ des orbites de l'action $\mathcal{S}_m$ sur $\mathcal{C}_P(m)$.

L'inclusion canonique $\mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{S}_{m+1}$ induit des inclusions $\mathcal{C}_P(m) \subseteq \mathcal{C}_P(m+1)$, et donc $\mathcal{E}_P(m) \subseteq \mathcal{E}_P(m+1)$, compatibles aux actions des groupes symétriques. On vérifie alors aisément que les applications induites

$$\mathcal{C}_P(m)/\mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{C}_P(m+1)/\mathcal{S}_{m+1} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_P(m)^{\mathcal{S}_m} \subseteq \mathcal{E}_P(m+1)^{\mathcal{S}_{m+1}} , \qquad (*)$$

sont injectives.

Maintenant, pour $i > 1$ et $\gamma \in \mathcal{C}_i(m)$, notons $|\gamma|$ le « *support de γ* », *i.e.* l'ensemble des $x \in [\![1,m]\!]$ tels que $\gamma(x) \neq x$, et pour $i = 1$ et $\gamma \in \mathcal{C}_1(m)$, notons plus simplement $|\gamma| = \{\gamma\}$. Avec ces conventions, on définit le support de $\overline{\gamma} = (\gamma_{i,j}) \in \mathcal{C}_P(m)$ par $|\overline{\gamma}| := \bigcup_{i,j} |\gamma_{i,j}|$, où la réunion est paramétrée par les couples (i,j) tels que $d_i \geqslant 1$ et $1 \leqslant j \leqslant d_i$.

Le support de $\overline{\gamma} \in \mathcal{C}_P(m)$ vérifie $\#(|\overline{\gamma}|) \leqslant \underline{\deg}(P)$. Lorsque $m \geqslant \underline{\deg}(P)$, on peut trouver, pour $\overline{\gamma}$ donné, un élément $\alpha \in \mathcal{S}_{m+1}$ tel que $|\alpha \cdot \overline{\gamma}| \subseteq [\![1,\underline{\deg}(P)]\!]$. On vérifie alors que les injections $(*)$ sont bijectives, et donc

$$\dim_k \big(\mathcal{E}_P(m)^{\mathcal{S}_m} \big) = \#(\mathcal{C}_P(m)/\mathcal{S}_m) \qquad (\diamond)$$

est indépendant de $m \geqslant \underline{\deg}(P)$.

(*B*) *Formule de traces.*

Notons $\mathsf{Y}_i : \mathcal{S}_m \to k$ la fonction centrale définie par

$$\mathsf{Y}_i(\alpha) := \mathrm{tr}(\alpha : \mathcal{E}_i(m))\,.$$

On a

$$\dim_k \left(\mathcal{E}_P(m)^{\mathcal{S}_m}\right) = \frac{1}{m!}\sum\nolimits_{\alpha\in\mathcal{S}_m} \mathsf{Y}_1(\alpha)^{d_1}\cdots\mathsf{Y}_\ell(\alpha)^{d_\ell}\,. \qquad (\diamond\diamond)$$

et la sommation de droite est bien indépendant de $m \geqslant \underline{\deg}(P)$, d'après $(\diamond)$.

Nous devons obtenir la même conclusion en remplaçant les Y par des X.

- Pour $i = 1$, on a $\mathsf{Y}_1(\alpha) = \mathrm{tr}(\alpha : \mathcal{E}_1(m)) = \mathcal{C}_1(m)^{\langle\alpha\rangle} = \mathsf{X}_1(\alpha)$.
- Pour $i \geqslant 2$, on a

$$\mathsf{Y}_i(\alpha) = \mathrm{tr}(\alpha : \mathcal{E}_i(m)) = \mathcal{C}_i(m)^{\langle\alpha\rangle} = \#\{\gamma \in \mathcal{C}_i(m) \mid \alpha\gamma = \gamma\alpha\}\,.$$

  La condition $\alpha\gamma = \gamma\alpha$ implique que α laisse stable l'ensemble $|\gamma|$ qui va donc se décomposer en réunion disjointe de cycles de α, tous de la même longueur puisque γ agit transitivement sur son support. Il s'ensuit que les éléments de $\mathcal{C}_i(m)^{\langle\alpha\rangle}$ sont les i-cycles de $\mathcal{S}_m$ obtenus, pour chaque $d \,|\, i$, en concaténant i/d cycles distincts de α de longueur d. On en déduit l'égalité

$$\mathsf{Y}_i(\alpha) = \phi(i)\,\mathsf{X}_i(\alpha) + \sum\nolimits_{d\,|\,i,\ d<i} \phi(d)\,\frac{d^{(i/d)}}{i}\,\mathsf{X}_d(\alpha)^{\frac{i/d}{}}\,, \qquad (\ddagger)$$

  où ϕ est l'indicatrice d'Euler. Il convient de remarquer que dans le membre de droite tous les termes sont de degré $\underline{\deg}$ majoré par i, et que ceux après le signe somme ne concernent que des variables X_j avec $j < i$ avec un degré *polynôme* strictement supérieur à 1.

(*C*) *Conclusion.* La partie (*A*) nous dit que la proposition est vraie pour les monômes $\mathsf{Y}_1^{d_1}\cdots\mathsf{Y}_\ell^{d_\ell}$. Mais, si nous remplaçons chaque Y_i par son expression en termes des X_i de $(\ddagger)$, nous avons une somme de termes de la forme

$$\mathsf{Y}_1^{d_1}\cdots\mathsf{Y}_\ell^{d_\ell} = *\,\mathsf{X}_1^{d_1}\cdots\mathsf{X}_\ell^{d_\ell} + \sum *\,\mathsf{X}_1^{r_1}\cdots\mathsf{X}_\ell^{r_\ell}$$

avec $\underline{\deg}(\mathsf{X}_1^{r_1}\cdots\mathsf{X}_\ell^{r_\ell}) \leqslant \underline{\deg}(P)$, mais où le degré polynôme de $\mathsf{X}_1^{r_1}\cdots\mathsf{X}_\ell^{r_\ell}$ est strictement plus grand que celui de P. Il est donc envisageable de raisonner par récurrence inverse sur le degré *polynôme* des monômes $\mathsf{X}_1^{d_1}\cdots\mathsf{X}_\ell^{d_\ell}$, ce qui nous fait aboutir au monôme X_1^r, pour lequel la conclusion résulte de l'égalité $\mathsf{X}_1 = \mathsf{Y}_1$. □

11.4.6. La série de caractères $\boldsymbol{\chi_{\mathrm{BM}}(Y)(_, T)}$. De manière analogue à 10.1.3, nous définissons la série des caractères pour la cohomologie de Borel-Moore d'une pseudovariété $\boldsymbol{Y}$ orientable (6.1.1) et munie d'une action de $\mathcal{S}_m$

(6.2.1-[ad-4]), par la formule

$$\chi_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{Y})(\alpha,T)=\sum\nolimits_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\,\chi_{H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{Y})}(\alpha)\,T^i\,.$$

Nous avons montré dans 6.2.4-(b) que si $\boldsymbol{M}$ est une pseudovariété orientable de type fini de dimension $d_{\boldsymbol{M}}$, on a une identification de $\mathcal{S}_m$-modules

$$H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))=\mathrm{sgn}(_)^{d_M}\otimes H_{\mathrm{c}}^{md_M-i}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M});k)^\vee\,,$$

d'où

$$\chi_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))(\alpha,T)=\big(\mathrm{sgn}(\alpha)^{d_M}\,(-T)^{md_M}\big)\,\chi_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))(\alpha^{-1},T^{-1})\,,$$

avec $\mathrm{sgn}(\alpha)^{d_M}\,(-T)^{md_M}=\prod_d(-T^d)^{d_M\mathsf{x}_d(\alpha)}$ d'après un calcul élémentaire.

Maintenant, si $\boldsymbol{M}$ est en plus i-acyclique, le théorème 10.5.3 et des manipulations simples (10.1.4), nous conduisent à la formule explicite

$$\boxed{\chi_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))(\alpha,T)=\prod_{d=1}^{m}\Big(\frac{(-T^d)^{d_M}}{d^{-1}\,T^d}\Big)^{\mathsf{x}_d}\Big(\sum_{e\,|\,d}\mu\big(\tfrac{d}{e}\big)\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M})(-T^{-e})}{dT^{-e}}\Big)^{\underline{\mathsf{x}_d}}}$$

où 'x_d' est un raccourci pour '$\mathsf{x}_d(\alpha)$'.

11.5. Stabilité de $\{\mathbf{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$, cas i-acyclique. La proposition 11.5.2 qui suit étudie la formule de $\chi_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))(\alpha,T)$ indépendamment de toute théorie de représentation ou topologie. La formule dépend alors seulement de la donnée de m et $d_{\boldsymbol{M}}\in\mathbb{N}$ et de la suite des nombres de Betti compacts $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}_0,\dots,\boldsymbol{c}_{d_M})\subseteq\mathbb{Z}^{d_M+1}$, on notera

$$\chi(\boldsymbol{c})_m:=\chi_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))(\alpha,T)\,.$$

Polynomialité de la famille $\boldsymbol{\chi}^{[i]}(\boldsymbol{c})$. Évaluée en $\alpha\in\mathcal{S}_m$, la formule de $\chi(\boldsymbol{c})_m$ donne le polynôme de $\mathbb{Z}[T,1/T]$ noté

$$\chi(\boldsymbol{c})_m(\alpha)=\sum\nolimits_{i\in\mathbb{Z}}\chi^{[i]}(\boldsymbol{c})_m(\alpha)\,T^i\,,$$

d'où les familles de fonctions centrales $\chi^{[i]}(\boldsymbol{c})=\{\chi^{[i]}(\boldsymbol{c})_m:\mathcal{S}_m\to\mathbb{Z}\}_m$.

On dira d'une famille de fonctions centrales $\boldsymbol{f}=\{f_m:\mathcal{S}_m\to\mathbb{Z}\}_m$ qu'elle est « *(éventuellement) polynomiale* » s'il existe un polynôme $Q_{\boldsymbol{f}}\in\mathbb{Z}[\mathsf{x}_1,\mathsf{x}_2,\dots]$ tel que $f_m(\alpha)=Q_{\boldsymbol{f}}(\alpha)$ pour tout m (assez grand) et tout $\alpha\in\mathcal{S}_m$. Un tel $Q_{\boldsymbol{f}}$ est unique ([39]) et le « *degré polynôme de* $\boldsymbol{f}$ » est alors celui de $Q_{\boldsymbol{f}}$. Si $f_m=Q_{\boldsymbol{f}}$ pour tout $m\geqslant N$, on dira que « $\boldsymbol{f}$ *est polynomiale sur* $\{m\geqslant N\}$ ».

[39] En effet, si $Q(\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_\ell)\in\mathbb{Z}[\overline{\mathsf{X}}]$ est non nul, il existe $a_i\in\mathbb{N}$ tels que $Q(a_1,\dots,a_\ell)\neq 0$. Il est alors facile de fabriquer des permutations $\alpha_m\in\mathcal{S}_m$, pour tout $m\geqslant\sum_i a_i\,i$, telles que $a_i=\mathsf{X}_i(\alpha_m)$, auquel cas $Q(\alpha_m)=Q(a_1,\dots,a_\ell)$ et Q n'est pas éventuellement nulle.

11.5.1. Critère de polynomialité. *Soit $\boldsymbol{f}(X_{i_1},\dots,X_{i_\ell})$ une expression telle que pour tout m, la fonction $f_m(\alpha) := \boldsymbol{f}(X_{i_1}(\alpha),\dots,X_{i_\ell}(\alpha))$ soit bien définie sur $\mathcal{S}_m$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Alors, pour que la famille de fonctions centrales $\boldsymbol{f} = \{f_m : \mathcal{S}_m \to \mathbb{Z}\}$ soit polynomiale sur $\{m \geqslant N\}$, il est nécessaire que $\boldsymbol{f}(n_1,\dots,n_\ell)$ soit un polynôme en les entiers $n_j \geqslant 0$ tels que $\sum_j n_j \cdot i_j \geqslant N$.*

Démonstration. Pour $\boldsymbol{n} := (n_1,\dots,n_\ell)$, notons $|\boldsymbol{n}| = \sum_j n_j \cdot i_j$ et choisissons $\sigma(\boldsymbol{n}) \in \mathcal{S}_{|\boldsymbol{n}|}$ vérifiant $X_{i_j}(\sigma(\boldsymbol{n})) = n_j$, pour $1 \leqslant j \leqslant \ell$. Alors, si $Q \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots]$ est un polynôme tel que $f_m = Q$ sur tous les $\mathcal{S}_m$ tels que $m \geqslant N$, on a

$$\boldsymbol{f}(n_1,\dots,n_\ell) = f_{|\boldsymbol{n}|}(\sigma(\boldsymbol{n})) = Q(\sigma(\boldsymbol{n})) = Q'(n_1,\dots,n_\ell)$$

où $Q' \in \mathbb{Z}[Y_1,\dots,Y_\ell]$ est obtenu de Q en posant $Y_j := X_{i_j}$ et en annulant les autres variables. □

Factorielle décroissante modifiée. On utilisera une extension de la notion de factorielle décroissante (14.1). Pour a, b dans un anneau et $X \in \mathbb{N}$, on note

$$a^{\underline{0*b}} = 1\,, \quad \text{et} \quad a^{\underline{X*b}} := a(a-b)(a-2b)\cdots(a-(X{-}1)b)\,,$$

On a alors : $b^X a^{\underline{X*c}} = (ba)^{\underline{X*(bc)}}$ et $a^{\underline{X+1*b}} = a^{\underline{X*b}}(a - Xb)$.

11.5.2. Proposition. *Étant donnés $d_{\boldsymbol{M}} \in \mathbb{N}$ et $\boldsymbol{c} = \{\boldsymbol{c}_0,\dots,\boldsymbol{c}_{d_M}\} \subseteq \mathbb{Z}$, on note $P_{\boldsymbol{c}}(T) = \boldsymbol{c}_0 + \boldsymbol{c}_1 T + \cdots + \boldsymbol{c}_{d_M} T^{d_M}$ et*

$$\chi(\boldsymbol{c})_m(\overline{X}, T) := \prod_{d=1}^{m} \Big(\frac{(-T^d)^{d_M}}{d^{-1}\,T^d} \Big)^{X_d} \Big(\sum_{e\,|\,d} \mu\big(\tfrac{d}{e}\big) \frac{P_{\boldsymbol{c}}(-T^{-e})}{d\,T^{-e}} \Big)^{\underline{X_d}}.$$

Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la famille $\chi^{[i]}(\boldsymbol{c})$ est éventuellement polynomiale si et seulement si, $\boldsymbol{c}_{d_M} \in \{0,1\}$. Dans ce cas, on a les propriétés suivantes de $\chi(\boldsymbol{c})$ suivant les valeurs de $d_{\boldsymbol{M}}$.

$d_{\boldsymbol{M}}$	$\chi^{[i]}(\boldsymbol{c}_0,\dots,\boldsymbol{c}_{d_M})$
0	• $\underline{\deg}\,\chi^{[-i]}(\boldsymbol{c}_0{=}1) \leqslant 2i$, $\quad \forall i \geqslant 0$ • $\chi^{[-i]}(\boldsymbol{c}_0{=}0)_m = 0$, $\quad \forall m, \forall i \geqslant 0$
1	• $\chi^{[0]}(\boldsymbol{c}_0{=}0, \boldsymbol{c}_1) = (\boldsymbol{c}_1)^{\underline{X_1*(-1)}} \prod_{d>1} 0^{\underline{X_d*(-d)}}$, • $\chi^{[i]}(\boldsymbol{c}_0{=}0, \boldsymbol{c}_1)_m = 0$, $\quad \forall m, \forall i > 0$
2	• $\underline{\deg}\,\chi^{[i]}(\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2{=}1) \leqslant 2i$, $\quad \forall i \geqslant 0$ • $\chi^{[i]}(\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2{=}0)_m = 0$, $\quad \forall m > i \geqslant 0$
$\geqslant 3$	• $\underline{\deg}\,\chi^{[i]}(\boldsymbol{c}_0,\dots,\boldsymbol{c}_{d_M}{=}1) \leqslant i$, $\quad \forall i \geqslant 0$ • $\underline{\deg}\,\chi^{[i]}(\boldsymbol{c}_0,\dots,\boldsymbol{c}_{d_M}{=}0) \leqslant \frac{i}{d_M - 1}$, $\quad \forall i \geqslant 0$

Démonstration. Pour $d \geqslant 1$, notons

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_d(\boldsymbol{c})(\mathsf{X}_d, T) := \Big(\frac{(-T^d)^{d_M}}{d^{-1}\,T^d}\Big)^{\mathsf{X}_d} \Big(\sum_{e\,|\,d} \mu\big(\frac{d}{e}\big)\,\frac{P_{\boldsymbol{c}}(-T^{-e})}{d\,T^{-e}}\Big)^{\underline{\mathsf{X}_d}}, \\ \mathcal{R}(\boldsymbol{c})_d(T) := \Big(\frac{(-T^d)^{d_M}}{d^{-1}\,T^d}\Big) \quad \Big(\sum_{e\,|\,d} \mu\big(\frac{d}{e}\big)\,\frac{P_{\boldsymbol{c}}(-T^{-e})}{d\,T^{-e}}\Big), \end{cases} \tag{1}$$

de sorte que ([40])

$$\mathcal{Q}_d = (\mathcal{R}_d)^{\underline{\mathsf{X}_d} * ((-1)^{d_M}\, d T^{d(d_M-1)})}. \tag{2}$$

Lorsque l'on évalue $\mathcal{Q}_d$ en $\alpha \in \mathcal{S}_m$, on a $\mathsf{X}_d(\alpha) \in \mathbb{N}$ et le développent de la factorielle décroissante génère une série

$$\mathcal{Q}_d(\mathsf{X}_d(\alpha), T) = \sum\nolimits_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{Q}_d^{[i]}(\mathsf{X}_d(\alpha))\, T^i$$

où $\mathcal{Q}_d^{[i]}$ définit la famille fonctions centrales $\{\mathcal{S}_m \ni \alpha \mapsto \mathcal{Q}_d^{[i]}(\mathsf{X}_d(\alpha)) \in \mathbb{Z}\}_m$.

Le terme $\mathcal{R}_d(\boldsymbol{c})$ dans (1) vaut, suivant les cas $d = 1$ ou $d > 1$,

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1(\boldsymbol{c})(T) = \displaystyle\sum_{0\leqslant j\leqslant d_M} \boldsymbol{c}_j\,(-T)^{(d_M-j)}, \\ \mathcal{R}_d(\boldsymbol{c})(T) = \displaystyle\sum_{0\leqslant j\leqslant d_M,\ j\neq 1,\ e\,|\,d} \mu\big(\frac{d}{e}\big)\ \boldsymbol{c}_j (-1)^{d_M-j}\, T^{d(d_M-1)-e(j-1)}. \end{cases} \tag{3}$$

Il s'agit de polynômes, en $T^{\pm}$, en T si $d_{\boldsymbol{M}} > 0$ et en $1/T$ si $d_{\boldsymbol{M}} = 0$. Le coefficient du terme constant est $\boldsymbol{c}_{d_M}$, sauf si $d_{\boldsymbol{M}} = 1$ et $d > 1$ auquel cas il est nul. Ensuite, le premier terme non constant, de la forme $?T^{\epsilon\neq 0}$, varie suivant les situations. Le calcul explicite à partir des formules (3) donne

– Si $d = 1$, $\qquad (\forall d_{\boldsymbol{M}}) \quad ?T^{\epsilon} = -\boldsymbol{c}_{d_M-1}\, T^{\pm}$.

– Si $d > 1$,
$$\begin{cases} d_{\boldsymbol{M}} = 0, & ?T^{\epsilon} = \quad \boldsymbol{c}_0\, T^{-d(p-1)/p} \\ d_{\boldsymbol{M}} = 1, & ?T^{\epsilon} = -\boldsymbol{c}_0\, \mu(d)\, T \\ d_{\boldsymbol{M}} = 2, & ?T^{\epsilon} = \quad \boldsymbol{c}_2\, T^{d(p-1)/p} \\ d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3, & ?T^{\epsilon} = -\boldsymbol{c}_{d_M-1}\, T^{d} \end{cases}$$

d'où les expressions

$$\begin{cases} \forall d_{\boldsymbol{M}} \quad \mathcal{Q}_1(\boldsymbol{c}) = \big(?T^{\pm} + \boldsymbol{c}_{d_M}\big)^{\underline{\mathsf{X}_1} * ((-1)^{d_M} T^{(d_M-1)})} \\ d_{\boldsymbol{M}} = 0, \ \mathcal{Q}_d(\boldsymbol{c}) = \big(?T^{-d(p-1)/p} + \boldsymbol{c}_0\big)^{\underline{\mathsf{X}_d} * (d\,T^{-d})} \\ d_{\boldsymbol{M}} = 1, \ \mathcal{Q}_d(\boldsymbol{c}) = \big(?T\big)^{\underline{\mathsf{X}_d} * (-d)} \\ d_{\boldsymbol{M}} = 2, \ \mathcal{Q}_d(\boldsymbol{c}) = \big(?T^{d(p-1)/p} + \boldsymbol{c}_2\big)^{\underline{\mathsf{X}_d} * (d\,T^{d})} \\ d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3, \ \mathcal{Q}_d(\boldsymbol{c}) = \big(?T^{d} + \boldsymbol{c}_{d_M}\big)^{\underline{\mathsf{X}_d} * ((-1)^{d_M}\, d\, T^{d(d_M-1)})} \end{cases} \tag{4}$$

où p désigne le plus petit facteur premier de d.

[40] On omet d'indiquer '$\boldsymbol{c}$' lorsqu'il est sous-entendu superflu.

• *Conditions nécessaires à la polynomialité.* En dehors du cas $d_{\boldsymbol{M}}=1$ qui pose de problèmes particuliers, dans tous les autres cas, le critère de polynomialité 11.5.1 appliqué aux expressions (4) donne aussitôt la condition

$$\Big(\mathcal{Q}_d^{[i]}(\boldsymbol{c}) \ \begin{matrix}\text{est éventuellement}\\ \text{polynomiale}\end{matrix}\ \Big) \Longrightarrow \Big(\boldsymbol{c}_{d_M} \in \{0,1\}\Big)$$

En effet, c'est déjà clairement la condition pour que $\mathcal{Q}_d^{[0]}(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}_{d_M}^{\mathsf{X}_d}$ soit polynomial. Ensuite, par exemple dans les cas $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$, le terme qui suit est $\mathcal{Q}_d^{[d]} = ?\boldsymbol{c}_{d_M}^{\mathsf{X}_d-1}T^d$ où la même condition apparaît, etc...

• *Les cas* $d_{\boldsymbol{M}}=1$. On a $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}_0,\boldsymbol{c}_1)$ et

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_1(\mathsf{X}_1,T) = \big(-\boldsymbol{c}_0\,T+\boldsymbol{c}_1\big)^{\underline{\mathsf{X}_1}*(-1)} \\ \mathcal{Q}_d(\mathsf{X}_d,T) = \Big(-\boldsymbol{c}_0\sum\nolimits_{e\,|\,d}\mu\big(\frac{d}{e}\big)\,T^e\Big)^{\underline{\mathsf{X}_d}*(-d)}\,, \text{ si } d>1, \end{cases}$$

Le critère de polynomialité appliqué à $\mathcal{Q}_1$ nous emmène à regarder les produits de n facteurs

$$\big(-\boldsymbol{c}_0\,T+\boldsymbol{c}_1\big)\big(-\boldsymbol{c}_0\,T+\boldsymbol{c}_1+1\big)\cdots\big(-\boldsymbol{c}_0\,T+\boldsymbol{c}_1+(n-1)\big)\,.$$

Pour chaque $i>0$, le coefficient en T^i du produit est $(-\boldsymbol{c}_0)^i\big(\sum x_1\cdots x_{n-i}\big)$, où la somme concerne les $(n-i)$-uplets d'éléments deux à deux distincts de l'ensemble $\{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_1+1,\dots,\boldsymbol{c}_1+(n-1)\}$. Une telle somme est donnée par un polynôme en n de degré $n-i+1$, le coefficient en question n'est pas polynomial, sauf évidemment si $\boldsymbol{c}_0=0$ auquel cas on a

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_1^{[0]}(0,\boldsymbol{c}_1) = \boldsymbol{c}_{\underline{1}}^{\underline{\mathsf{X}_1}*(-1)} \\ \mathcal{Q}_d^{[0]}(0,\boldsymbol{c}_1) = 0^{\underline{\mathsf{X}_d}*(-d)} \end{cases} \quad\text{et}\quad \mathcal{Q}_d^{[i]}(0,\boldsymbol{c}_1)=0\,,\ \forall i\geqslant 1\,,\forall d\geqslant 1\,.$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} \chi^{[0]}(0,\boldsymbol{c}_1) = \boldsymbol{c}_{\underline{1}}^{\underline{\mathsf{X}_1}*(-1)}\Big(\prod\nolimits_{d>1} 0^{\underline{\mathsf{X}_d}*(-1)}\Big) \\ \chi^{[i]}(0,\boldsymbol{c}_1) = 0\,, \quad \forall i>0\,. \end{cases}$$

• *Les cas* $d_{\boldsymbol{M}}\in\{0,2\}$. Pour $\boldsymbol{c}$ respectivement $(\boldsymbol{c}_0)$ et $(\boldsymbol{c}_0,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2)$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_d(\boldsymbol{c}_0) &= \Big(\sum\nolimits_{e\,|\,d}\mu\big(\tfrac{d}{e}\big)\,\frac{\boldsymbol{c}_0}{T^{d-e}}\Big)^{\underline{\mathsf{X}_d}*(d/T^d)}\,, \\ \mathcal{Q}_d(\boldsymbol{c}_0,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2) &= \Big(\sum\nolimits_{e\,|\,d}\mu\big(\tfrac{d}{e}\big)\big(\boldsymbol{c}_0\,T^{d+e}+\boldsymbol{c}_1\,T^d+\boldsymbol{c}_2\,T^{d-e}\big)\Big)^{\underline{\mathsf{X}_d}*(d\,T^d)}\,, \end{aligned}$$

où l'on constate aussitôt l'égalité

$$\mathcal{Q}_d(\boldsymbol{c}_0)(\mathsf{X}_d,1/T) = \mathcal{Q}_d(0,0,\boldsymbol{c}_0)(\mathsf{X}_d,T)\,, \tag{5}$$

qui réduit le cas $d_{\boldsymbol{M}}=0$ à un cas particulier de $d_{\boldsymbol{M}}=2$.

Pour $d_M = 2$, on a vu dans (4) que l'on a les expressions

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_1(\boldsymbol{c}) = \big(?\,T + \boldsymbol{c}_2\big)^{\underline{\mathsf{X}_1} * T} \\ \mathcal{Q}_d(\boldsymbol{c}) = \big(?\,T^{d((p-1)/p)} + \boldsymbol{c}_2\big)^{\underline{\mathsf{X}_d} * (dT^d)}\,, \text{ si } d > 1. \end{cases} \tag{6}$$

où seuls les cas $\boldsymbol{c}_2 \in \{0, 1\}$ nous intéressent.

– Pour $\boldsymbol{c}_2 = 1$, on a $\mathcal{Q}_d^{[0]} = 1$. Ensuite, les propriétés élémentaires des factorielles décroissantes dans les expressions (6) justifient les relations

$$\mathcal{Q}_1(\mathsf{X}_1, T) - \mathcal{Q}_1(\mathsf{X}_1{-}1, T) = \mathcal{Q}_1(\mathsf{X}_1{-}1, T)\,(? - (\mathsf{X}_1{-}1))\,T$$
$$\mathcal{Q}_d(\mathsf{X}_d, T) - \mathcal{Q}_d(\mathsf{X}_d{-}1, T) = \mathcal{Q}_d(\mathsf{X}_d{-}1, T)\,(?\,T^{d((p-1)/p)} - ?(\mathsf{X}_d{-}1)\,T^d)\,,$$

dont on déduit, pour tout $i \geqslant 1$,

$$\text{(i)}\ \underline{\deg}\,\mathcal{Q}_1^{[i]} \leqslant 2 + \underline{\deg}\,\mathcal{Q}_1^{[i-1]}$$
$$\text{(ii)}\ \underline{\deg}\,\mathcal{Q}_d^{[i]} \leqslant d + \sup\Big\{\underline{\deg}\,\mathcal{Q}_d^{[i-d((p-1)/p)]},\ d + \underline{\deg}\,\mathcal{Q}_d^{[i-d]}\Big\}\,.$$

On peut alors prouver par induction sur i que l'on a

$$\underline{\deg}\,\mathcal{Q}_d^{[i]}(\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2{=}1) \leqslant 2i\,, \quad \forall i \geqslant 0\,, \forall d \geqslant 1\,. \tag{7}$$

En effet, pour $i = 0$ l'assertion est claire puisque $\mathcal{Q}_d^{[0]} = 1$. Ensuite, si l'on suppose $\underline{\deg}\,\mathcal{Q}_1^{[i-1]} \leqslant 2(i{-}1)$, l'égalité (i) donne $\underline{\deg}\,\mathcal{Q}_1^{[i]} \leqslant 2i$. Pour $\mathcal{Q}_d^{[i]}$, on remarque que $2i - 2d(p-1)/p \leqslant 2i - d$, puisque $1/2 \leqslant (p-1)/p$, et, à l'aide de (ii), on tire

$$\underline{\deg}\,\mathcal{Q}_d^{[i]} \leqslant d + \sup\big\{2i - d,\ d + 2(i-d)\big\} = 2i\,,$$

ce qui prouve (7). Par conséquent,

$$\underline{\deg}\,\chi^{[i]}(\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2{=}1) \leqslant 2i\,, \quad \forall i \geqslant 0\,,$$

puisque $\chi^{[i]}(\boldsymbol{c}) = \sum_{i_1+i_2+\cdots=i} \mathcal{Q}^{[i_1]}(\boldsymbol{c})_1\,\mathcal{Q}^{[i_2]}(\boldsymbol{c})_2 \cdots$. On en déduit

$$\underline{\deg}\,\chi^{[-i]}(\boldsymbol{c}_0{=}1) \leqslant 2i\,, \quad \forall i \geqslant 0\,,$$

grâce à l'égalité (5).

– Lorsque $\boldsymbol{c}_2 = 0$, on a

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_1(\mathsf{X}_1, T) = \big(\boldsymbol{c}_0\,T^2 + \boldsymbol{c}_1\,T\big)^{\underline{\mathsf{X}_1} * T} = (-T)^{\mathsf{X}_1}\,(-\boldsymbol{c}_0\,T - \boldsymbol{c}_1)^{\underline{\mathsf{X}_1} * (-1)} \\ \mathcal{Q}_d(\mathsf{X}_d, T) = \Big((-T^d)\sum_{e\,|\,d} \mu\big(\frac{d}{e}\big)(-\boldsymbol{c}_0)\,T^e\Big)^{\underline{\mathsf{X}_d} * (dT^d)}\,, \text{ si } d > 1, \\ \qquad\qquad = \big(-T^d\big)^{\mathsf{X}_d}\Big(\sum_{e\,|\,d} \mu\big(\frac{d}{e}\big)(-\boldsymbol{c}_0)\,T^e\Big)^{\underline{\mathsf{X}_d} * (-d)} \end{cases}$$

ce qui montre que pour tout m, la fonction centrale

$$\chi(\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2{=}0) : \mathcal{S}_m \to \mathbb{Z}[T]$$

coïncide avec

$$(-T)^m \chi(\boldsymbol{c}_0, -\boldsymbol{c}_1) : \mathcal{S}_m \to \mathbb{Z}[T]\,.$$

En particulier,

$$\chi^{[i]}(\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2{=}0)_m = 0\,, \quad \forall m > i \geqslant 0\,,$$

alors que $\chi(\boldsymbol{c}_0{=}0) = \prod_{d\geqslant 1} 0^{\underline{\mathsf{x}}_d * (d/T^d)}$ et donc

$$\chi^{[-i]}(\boldsymbol{c}_0{=}0)_m = 0\,, \quad \forall m \geqslant 1\,, \forall i \geqslant 0\,.$$

• *Les cas $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$.* On suit la même démarche que pour le cas $d_{\boldsymbol{M}} = 2$ en se restreignant (donc) aux cas où $\boldsymbol{c}_{d_M} \in \{0, 1\}$.

– Pour $\boldsymbol{c}_{d_M} = 1$ et tout $d \geqslant 1$, on a $\mathcal{Q}_d^{[0]} = 1$, et grâce à (6), la relation

$$\mathcal{Q}_d(\mathsf{x}_d, T) - \mathcal{Q}_d(\mathsf{x}_d{-}1, T) = \mathcal{Q}_d(\mathsf{x}_d{-}1, T)\,(?\,T^d - ?(\mathsf{x}_d{-}1)\,T^{d(d_M-1)})\,,$$

dont on déduit, pour tout $i \geqslant 1$, la majoration

$$\underline{\deg}\, \mathcal{Q}_d^{[i]} \leqslant d + \sup\left\{\underline{\deg}\, \mathcal{Q}_d^{[i-d]},\ d + \underline{\deg}\, \mathcal{Q}_d^{[i-d(d_M-1)]}\right\}, \tag{8}$$

où $d(d_{\boldsymbol{M}}{-}1) \geqslant 2d$, ce qui permet de prouver par induction sur i

$$\underline{\deg}\, \mathcal{Q}_d^{[i]}(\boldsymbol{c}_{d_M}{=}1) \leqslant i\,, \quad \forall i \geqslant 0\,, \forall d \geqslant 1\,.$$

et donc

$$\underline{\deg}\, \chi^{[i]}(\boldsymbol{c}_{d_M}{=}1) \leqslant i\,, \quad \forall i \geqslant 0\,,$$

– Lorsque $\boldsymbol{c}_{d_M} = 0$, la majoration (8) se simplifie en

$$\underline{\deg}\, \mathcal{Q}_d^{[i]} \leqslant \sup\left\{\underline{\deg}\, \mathcal{Q}_d^{[i-d]},\ d + \underline{\deg}\, \mathcal{Q}_d^{[i-d(d_M-1)]}\right\},$$

ce qui permet de prouver par induction sur i

$$\underline{\deg}\, \mathcal{Q}_d^{[i]}(\boldsymbol{c}_{d_M}{=}0) \leqslant \frac{i}{d_{\boldsymbol{M}}{-}1}\,, \quad \forall i \geqslant 0\,, \forall d \geqslant 1\,.$$

et donc

$$\underline{\deg}\, \chi^{[i]}(\boldsymbol{c}_{d_M}{=}0) \leqslant \frac{i}{d_{\boldsymbol{M}}{-}1}\,, \quad \forall i \geqslant 0\,,$$

ce qui termine la preuve de la proposition. □

11.5.3. Corollaire. *Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété i-acyclique de type fini telle que $\dim H_{\mathrm{c}}^{d_M}(\boldsymbol{M}; \mathbb{Q}) \leqslant 1$. Pour $i \in \mathbb{N}$, la famille $\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}; \mathbb{Q}))\}_m$ est constante pour $m \geqslant i$. On a aussi,*

a) *si $d_{\boldsymbol{M}} = 1$, constance sur $\{m \geqslant 1\}$;*

b) *si $d_{\boldsymbol{M}} = 2$ et $\boldsymbol{c}_2 = 0$, nullité sur $\{m > i\}$;*

c) *si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$ et $\boldsymbol{c}_{d_M} = 0$, constance sur $\left\{m \geqslant \frac{i}{d_M - 1}\right\}$.*

Démonstration. On applique les estimations de 11.5.2 avec $\boldsymbol{c}_{d_M} \in \{0,1\}$. Pour $d_{\boldsymbol{M}} = 1$, seul le cas $i = 0$ et $\boldsymbol{c}_0{=}0$ est à considérer. On a pour tout $m \geqslant 1$

$$\frac{1}{m!}\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_m}\chi^{[0]}(\boldsymbol{c}_0{=}0,\boldsymbol{c}_1)(\alpha) = \frac{1}{m!}\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_m}(\boldsymbol{c}_1)\,\underline{x_1}^{*(-1)}\prod\nolimits_{d>1}0\,\underline{x_d}^{*(-d)}(\alpha)$$
$$= \begin{cases}1 \text{ si } \boldsymbol{c}_1 = 1\\ 0 \text{ si } \boldsymbol{c}_1 = 0\end{cases}$$

Les estimations de 11.5.2 pour le degré $\underline{\deg}$ des familles de fonctions centrales polynomiales $\chi^{[i]}(\boldsymbol{c})$ jointes à la proposition 11.4.5 justifient les autres assertions à l'exception du cas $d_{\boldsymbol{M}} = 2$. Dans ce cas, le procédé donne la constance seulement sur $\{m \geqslant 2i\}$. Pour aller plus loin, on remarque que ${\chi_{\text{BM}}}^{[i]}(\boldsymbol{M})$ seul dépend des nombre de Betti compacts de $\boldsymbol{M}$. Le cas $\boldsymbol{M} = \mathbb{C}$ est connu depuis Arnold ([2]) qui montre que la cohomologie rationnelle de $\boldsymbol{BF}_m(\mathbb{C})$ est nulle en degrés $i \geqslant 2$ et est de dimension constante 1 sur $\{m \geqslant i\}$ pour $i \in \{0,1\}$, ce qui règle le cas i-acyclique avec $d_{\boldsymbol{M}} = 2$ et $\boldsymbol{c}_1 = 0$. Le cas $\boldsymbol{c}_1 > 0$ résulte de considérer la suite exacte courte de $\mathcal{S}_m$-modules de 10.6.1

$$0 \to H_{\text{c}}\big(\boldsymbol{F}^{\bullet}_m(\boldsymbol{M})\big)[-1] \to H_{\text{c}}(\boldsymbol{F}_m(\overset{\circ}{\boldsymbol{M}})) \to H_{\text{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})) \to 0 \qquad (*)$$

où $\overset{\circ}{\boldsymbol{M}} := \boldsymbol{M} \smallsetminus \{\bullet\}$ pour un certain $\bullet \in \boldsymbol{M}$, et où $\boldsymbol{F}^{\bullet}_m(\boldsymbol{M})$ est la réunion disjointe des ouverts $\boldsymbol{F}^{j=\bullet}_m(\boldsymbol{M}) := \{\overline{x} \in \boldsymbol{F}_m \mid x_i = \bullet\}$ où $j = 1,\dots,m$. On remarquera ici que $H^k_{\text{BM}}(\boldsymbol{M})$ et $H^k_{\text{BM}}(\overset{\circ}{\boldsymbol{M}})$ seul diffèrent en degré $d_{\boldsymbol{M}}{-}1$ où

$$\dim H^{d_M-1}_{\text{BM}}(\overset{\circ}{\boldsymbol{M}}) = \dim H^{d_M-1}_{\text{BM}}(\boldsymbol{M}){+}1\,.$$

En dualisant $(*)$ on obtient :

$$0 \to H^i_{\text{BM}}\big(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})\big) \to H^i_{\text{BM}}\big(\boldsymbol{F}_m(\overset{\circ}{\boldsymbol{M}})\big) \to \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_{m-1}}^{\mathcal{S}_m} H^{i-(d_M-1)}_{\text{BM}}\big(\boldsymbol{F}_{m-1}(\overset{\circ}{\boldsymbol{M}})\big) \to 0$$

et donc

$$\text{Betti}^i(\boldsymbol{BF}_m(\overset{\circ}{\boldsymbol{M}})) = \text{Betti}^i(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M})) + \text{Betti}^{i-(d_M-1)}(\boldsymbol{BF}_{m-1}(\overset{\circ}{\boldsymbol{M}}))\,.$$

Lorsque $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, ces remarques montrent que $\{\text{Betti}^i(\boldsymbol{BF}_m(\mathbb{C} \smallsetminus \boldsymbol{c}_1))\}_m$ est constante pour $m \geqslant i$, alors que $\text{Betti}^1(\mathbb{C} \smallsetminus \boldsymbol{c}_1) = \boldsymbol{c}_1$. Ceci termine la justification du cas $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, et achève la preuve du corollaire. □

11.6. Stabilité de $\{\text{Betti}^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$, cas général

On étend le corollaire 11.5.3 au cas des pseudovariétés générales $\boldsymbol{M}$ orientables. Nous procédons comme dans la preuve du théorème 9.3.15, à l'aide de la suite spectrale basique

$$\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)^{p,q}_1 = \bigoplus_{\tau\in\mathcal{T}(p+1,m)} \operatorname{ind}^{\mathcal{S}_m}_{\mathcal{H}_{\mathcal{T}}\times\mathcal{S}_{m-|\mathcal{T}|}} \boldsymbol{\sigma}^{d_M} \otimes H^Q_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_\tau(\boldsymbol{M}_{>0})) \;\Rightarrow\; H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))$$

avec $Q = i - (d_{\boldsymbol{M}}{-}1)(m{-}(p{+}1))$.

La compatibilité entre les morphismes $p_m^* : H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M})) \to H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M}))$ et ceux des suites spectrales basiques (9.3.13-(b))

$$I\!E_\sigma(q_m^*)_1^{p,q} : I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} \to I\!E_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p+1,q}\,, \qquad (\dagger)$$

y compris avec les actions des groupes symétriques, ramènent la question de la stabilité de la famille $\{\text{Betti}^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{M}))\}_m$, à celle de la stabilité des morphismes de suites spectrales de co-invariants (7.9.1) induits par (†), *i.e.*

$$\Phi_0(I\!E_\sigma(q_m^*)_1^{p,q}) : \Phi_0(I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q}) \to \Phi_0(I\!E_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p+1,q})\,.$$

On est alors emmené à trouver le rang de stabilité des familles de morphismes

$$\bigoplus_{\tau\in\mathcal{T}(p+1,m)} H^Q_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_\tau(\boldsymbol{M}_{>0}))_{\mathcal{H}_{\underline{\tau}}\times\mathcal{S}_{m-|\underline{\tau}|}} \xrightarrow{\sum p_\tau^*} \bigoplus_{\tau\in\mathcal{T}(p+2,m+1)} H^Q_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_\tau(\boldsymbol{M}_{>0}))_{\mathcal{H}_{\underline{\tau}}\times\mathcal{S}_{m+1-|\underline{\tau}|}} \qquad (\diamond)$$

définis par les morphismes de $\mathcal{H}_{\underline{\tau}}$-modules

$$\Phi_{\underline{\ell}}(p_\tau^*) : \Phi_{\underline{\ell}}(H^Q_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_\tau(\boldsymbol{M}_{>0})) \to \Phi_{\underline{\ell}}(H^Q_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_{\tau\bullet}(\boldsymbol{M}_{>0}))) \qquad (\diamond\diamond)$$

où $p_\tau : \boldsymbol{F}_{\tau\bullet}(\boldsymbol{M}_{>0}) \to \boldsymbol{F}_\tau(\boldsymbol{M}_{>0})$ est la projection sur les $p{+}1$ premières coordonnées, et où $\underline{\ell}$ est tel que $m{-}|\underline{\tau}| = (p{+}1){-}\underline{\ell}$, conformément à la notation 8.1.2-(b). L'étude de cette question conduit à l'énoncé suivant.

11.6.1. Proposition. *Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété connexe orientée. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ fixé, le morphisme*

$$\Phi_0(p_m^*) : \Phi_0(H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))) \to \Phi_0(H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M})))$$

est bijectif pour $m \geqslant 2i$ si $d_{\boldsymbol{M}} = 2$, et pour $m \geqslant i$ si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$.

Démonstration. Soit $\epsilon := 2$ si $d_{\boldsymbol{M}} = 2$ et $\epsilon := 1$ si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$. D'après les remarques préliminaires, la proposition résultera de montrer que les morphismes $\sum p_\tau^*$ dans $(\diamond)$ sont des isomorphismes pour $m \geqslant \epsilon i$, ce qui découle clairement de ce que pour tout $m \geqslant \epsilon i$,
a) le morphisme $\Phi_{\underline{\ell}}(p_\tau^*)$ dans $(\diamond\diamond)$ est un isomorphisme ;
b) l'application $(_)^\bullet : \mathcal{T}(p{+}1, m) \to \mathcal{T}(p{+}2, m{+}1)$ est bijective pour $Q \geqslant 0$.

(a) Commençons la généralisation suivante du corollaire 11.5.3.

Lemme. Soit $\boldsymbol{X}$ est une pseudovariété i-acyclique connexe orientée de dimension $d_{\boldsymbol{X}} \geqslant 2$. Pour tout $t \geqslant 0$, le morphisme induit

$$\Phi_t(p_m^*) : \Phi_t(H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))) \to \Phi_t(H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{X})))$$

est bijectif pour $m \geqslant i + t$.

Preuve. On raisonne par induction sur $t \in \mathbb{N}$ puis, pour chaque t par induction sur $i \in \mathbb{N}$. Le cas $t = 0$ est réglé pour tout $i \in \mathbb{N}$, par le corollaire 11.5.3 modulo le théorème 9.2.3 qui donne le rang de monotonie $m \geqslant i$. Supposons donc $t > 0$ et le lemme vérifié pour $(t{-}1)$. En dualisant la suite exacte du

théorème de scindage 3.1.1-(a) et en appliquant le foncteur $\Phi_t(_)$ (possible puisque $t>0$), on a la suite exacte courte

$$0 \to \bigoplus_{a+b=i} H^a_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{X}) \otimes \Phi_{t-1}(H^b_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{m-1})) \to \Phi_t(H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m)) \\ m \to \Phi_{t-1}(\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_{m-2}}^{\mathcal{S}_{m-1}} H_{\mathrm{BM}}^{i-(d_{\boldsymbol{X}}-1)}(\boldsymbol{F}_{m-1})) \to 0 \qquad (\ddagger)$$

qui montre que la bijectivité de $\Phi_t(p_m^*)$ au niveau du terme central est subordonnée par celle des termes extrêmes.

Lorsque $i=0$, le terme de droite de $(\ddagger)$ est nul puisque $d_{\boldsymbol{X}}>1$ et le lemme résulte des terme de gauche $\Phi_{t-1}(H^b_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{m-1}(\boldsymbol{X})))$ par l'hypothèse inductive.

Lorsque $i>0$, le terme de droite n'est pas forcément nul. On remarque alors que la preuve du lemme 1 (p. 105) dans la démonstration du théorème 8.1.5, donnait déjà l'identification

$$\Phi_{t-1}(\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_{m-2}}^{\mathcal{S}_{m-1}}(_)) \;\simeq\; \bigoplus\nolimits_{\overline{\alpha}\in\left(\mathcal{S}_{m-2}\backslash\mathcal{S}_{m-1}/\mathcal{S}_{m-t}\right)} (_)_{\mathcal{S}_{[\![2,m-1]\!]\cap\alpha[\![t,m-1]\!]}}\,,$$

où

$$\left|[\![2,m-1]\!]\cap\alpha[\![t,m-1]\!]\right| = (m-1)-t'\,, \quad \text{avec } t'\in[\![t-1,t]\!].$$

On y montrait aussi que l'application naturelle

$$(_)_m^\bullet : \left(\mathcal{S}_{m-2}\backslash\mathcal{S}_{m-1}/\mathcal{S}_{m-t}\right) \longrightarrow \left(\mathcal{S}_{m-1}\backslash\mathcal{S}_m/\mathcal{S}_{m-(t-1)}\right),$$

où $\alpha^\bullet=\alpha$ sur $[\![1,m-1]\!]$ (donc $\alpha^\bullet(m)=m$), est bijective dès que $m\geqslant t+1$.

De ces remarques, suit que sur les termes de droite de $(\ddagger)$, l'application

$$\Phi_{t-1}(\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_{m-2}}^{\mathcal{S}_{m-1}}(H_{\mathrm{BM}}^{i-(d_{\boldsymbol{X}}-1)}(\boldsymbol{F}_{m-1}))) \to \Phi_{t-1}(\mathrm{ind}_{\mathcal{S}_{m-1}}^{\mathcal{S}_m}(H_{\mathrm{BM}}^{i-(d_{\boldsymbol{X}}-1)}(\boldsymbol{F}_m))) \quad (*)$$

sera bijective dès lors que

$$m\geqslant i+t\,. \qquad (\diamond)$$

En effet, pour que $(*)$ soit bijective, il suffit de vérifier que

i) l'application $(_)_m^\bullet$ est bijective, donc que $m\geqslant t+1$;

ii) l'application $\Phi_{t'}(H_{\mathrm{BM}}^{i-(d_{\boldsymbol{X}}-1)}(\boldsymbol{F}_{m-1})) \to \Phi_{t'}(H_{\mathrm{BM}}^{i-(d_{\boldsymbol{X}}-1)}(\boldsymbol{F}_m))$ est bijective pour $t'\in[\![t-1,t]\!]$, donc, que $m-1\geqslant i-(d_{\boldsymbol{X}}-1)+t'$, par hypothèses inductives puisque $i-(d_{\boldsymbol{X}}-1)<i$ et $t'\leqslant t$;

et comme $i\geqslant 1$, la condition $(\diamond)$ suffit pour avoir (i,ii), ce qui termine la preuve du lemme. ⊟

Revenons à la preuve de l'assertion (a). Lorsque $d_{\boldsymbol{M}}\geqslant 1$, le lemme s'applique aux morphismes $(\diamond\diamond)$

$$\Phi_{\underline{\ell}}(p_\tau^*) : \Phi_{\underline{\ell}}(H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_\tau(\boldsymbol{M}_{>0}))) \to \Phi_{\underline{\ell}}(H^Q_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{\tau\bullet}(\boldsymbol{M}_{>0})))$$

et montre que $\Phi_{\underline{\ell}}(p_\tau^*)$ est bijective sous les conditions

$$\big((p+1)\geqslant(Q+\underline{\ell})\big) \quad \text{ou bien} \quad \big(Q<0\big)\,. \qquad (\ddagger)$$

En substituant (*cf.* notations 8.1.2-(b))

$$\begin{cases} Q & \leftrightarrow i-(d_{\boldsymbol{M}}-1)(m-(p+1))\,, \\ \underline{\ell} & \leftrightarrow |\underline{\tau}|-(m-(p+1))\,, \\ m-(p+1) & \leftrightarrow |\underline{\tau}|-\underline{\ell}\,, \end{cases}$$

la première condition dans (‡) s'écrit aussi

$$\big(m \geqslant i-(d_{\boldsymbol{M}}-2)|\underline{\tau}|+(d_{\boldsymbol{M}}-1)\underline{\ell}\big)\,, \qquad (‡‡)$$

et comme $|\underline{\tau}| \geqslant 2\underline{\ell}$, on voit aisément que si $d_{\boldsymbol{M}}=2$, l'intervalle $\{m \geqslant 2i\}$ est conforme à (‡‡), tandis que si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$, c'est le cas de $\{m \geqslant i\}$.

(b) On raisonne par l'absurde. Nous avons vu dans la preuve du théorème 9.3.15-(b) (p. 125) que l'application $(_)^{\bullet}$ n'est pas bijective si et seulement si, $2(p+1) < m$. Dans ce cas, si $m \geqslant \epsilon i$, on a

$$Q = i-(m-(p+1)) < i-(d_{\boldsymbol{M}}-1)\frac{m}{2} \leqslant \big((2/\epsilon)+1-d_{\boldsymbol{M}}\big)\frac{m}{2} \leqslant 0\,,$$

puisque $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 2$, ce qui est contraire à la condition $Q \geqslant 0$. □

11.7. Stabilité de $\{\mathbf{Betti}^{i}_{\mathbf{BM}}(\boldsymbol{\Delta}_{?m-a}(\boldsymbol{M}^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$, cas général

Dans cette dernière section nous esquissons la démarche à suivre pour démontrer la généralisation suivante de la proposition 11.6.1.

11.7.1. Théorème. *Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété connexe orientable, et soient $a, i \in \mathbb{N}$.*

a) *La famille $\big\{\mathrm{Betti}^{i}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}(\boldsymbol{M}^m)/\mathcal{S}_m)\big\}_m$ est constante pour*

$$\begin{cases} m \geqslant 2i+2a\,, & \text{si } d_{\boldsymbol{M}}=2, \\ m \geqslant\ i\ +2a\,, & \text{si } d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3. \end{cases}$$

b) *La famille $\big\{\mathrm{Betti}^{i}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}(\boldsymbol{M}^m)/\mathcal{S}_m)\big\}_m$ est constante pour*

$$\begin{cases} m \geqslant 2i+\ 4a\,, & \text{si } d_{\boldsymbol{M}}=2, \\ m \geqslant\ i\ +d_{\boldsymbol{M}}a\,, & \text{si } d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3. \end{cases}$$

Indications. Des modifications simples dans la preuve de la proposition 11.6.1 conduisent à l'énoncé suivant :

Proposition. Soit $\boldsymbol{M}$ une pseudovariété connexe orientée. Pour tous $t, i \in \mathbb{N}$ fixés, le morphisme

$$\Phi_t(p_m^*) : \Phi_t(H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{M}))) \to \Phi_t(H^i_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{m+1}(\boldsymbol{M})))$$

est bijectif pour $m \geqslant \epsilon i + t$, où $\epsilon = 2$ si $d_{\boldsymbol{M}}=2$, et $\epsilon = 1$ si $d_{\boldsymbol{M}} \geqslant 3$.

• *Les cas* $\big\{\mathrm{Betti}^{i}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}(\boldsymbol{M}^m)/\mathcal{S}_m)\big\}_m$. Par la proposition 5.3.1, on a

$$\Delta_{m-a}(\boldsymbol{M}^m)/\mathcal{S}_m \cong \coprod\nolimits_{\lambda \in \mathcal{Y}_{m-a}(m)} \boldsymbol{F}_{m-a}(\boldsymbol{M})/\mathcal{S}_\lambda\,.$$

où $\mathcal{S}_\lambda \supseteq \mathbf{1}_a \times \mathcal{S}_{m-2a}$, de sorte que la stabilité recherchée est majorée par celle des familles $\{\mathrm{Betti}^i(\Phi_a H_{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{F}_{m-a}(\boldsymbol{M}))\}$, donc par $\{m-a \geqslant \epsilon i + a\}$ d'après la *Proposition*.

• *Les cas* $\left\{\mathrm{Betti}^i_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}(\boldsymbol{M}^m)/\mathcal{S}_m)\right\}_m$. Par induction sur $a \in \mathbb{N}$. Le cas $a=0$ est le lemme 4.2 de Church ([7], p. 492). Dans le cas général on considère le complexe exact de $\mathcal{S}_m$-modules de cohomologie de Borel-Moore :

$$\begin{aligned}\to H^{i-1}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}) \to H^{i-1}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}) \to \\ \to H^{i-d_M}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-(a+1)}) \to \\ \to H^{i}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{\leqslant m-a}) \to H^{i}_{\mathrm{BM}}(\Delta_{m-a}) \to\end{aligned}$$

et le théorème résulte du lemme des cinq. □

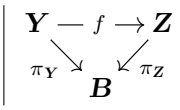
12. Suites spectrales de Leray

Cette section est consacrée à l'étude de la dégénérescence des suites spectrales de Leray associées aux fibrations $\pi_a = \Delta^{[a]}_{?\ell} \boldsymbol{X}^m \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ (en particulier $\pi_a = \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$), lorsque $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique et localement connexe.

Avertissement. Le corps k est de caractéristique quelconque et l'espace i-acyclique $\boldsymbol{X}$ n'est pas supposé de type fini.

12.1. Cohomologie à support π-propre

12.1.1. Catégorie d'espaces au-dessus de $\boldsymbol{B}$. Soit $\boldsymbol{B}$ un espace topologique. On rappelle qu'on appelle « *espace de base $\boldsymbol{B}$, ou au-dessus de $\boldsymbol{B}$,* » la donnée d'une application continue $\pi_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{B}$, et « *morphisme d'espaces au-dessus de $\boldsymbol{B}$* » de $\pi_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{B}$ vers $\pi_{\boldsymbol{Z}} : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{B}$ la donnée une application continue $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ rendant commutatif le diagramme ci-contre.



Pour $\pi_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{B}$ donné, la « *cohomologie à support $\pi_{\boldsymbol{Y}}$-propre* », notée $H_{\pi!}(\pi_{\boldsymbol{Y}})$ où $H_{\pi!}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B})$ où même $H_{\pi!}(\boldsymbol{Y})$, suivant les contextes, comme la cohomologie du complexe

$$(\mathcal{C}_{\pi!}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B}), d_{\pi!}) := I\!R\Gamma(\boldsymbol{B}, I\!R\pi_{\boldsymbol{Y}!}\, \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{Y}})\,.$$

Les morphismes naturels de complexes

$$I\!R\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{B}, I\!R\pi_{\boldsymbol{Y}!}\, \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{Y}}) \to I\!R\Gamma(\boldsymbol{B}, I\!R\pi_{\boldsymbol{Y}!}\, \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{Y}}) \to I\!R\Gamma(\boldsymbol{B}, I\!R\pi_{\boldsymbol{Y}*}\, \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{Y}})$$

induisent des morphismes naturels en cohomologie :

$$H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}) \to H_{\pi!}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B}) \to H(\boldsymbol{Y})\,. \qquad (\ddagger\ddagger)$$

12.1.2. On rappelle (*cf.* 1.1.2) que dans la mesure où la résolution du faisceau constant par les cochaînes d'Alexander-Spanier $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{Y}} \to (\underline{\underline{\mathcal{A}}}^\bullet(\boldsymbol{X};k), d_\bullet)$

est une résolution Φ-molle pour toute famille paracompactifiante Φ de $\boldsymbol{B}$, on dispose du candidat canonique des « *cochaînes à support π-propre* » :

$$(\mathcal{C}_{\pi!}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B}), d_{\pi!}) := \Gamma(\boldsymbol{B}, \pi_{\boldsymbol{Y}!}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}^{\bullet}(\boldsymbol{X};k), d_{\bullet}))\,,$$

puisque $\pi_{\boldsymbol{Y}!}$ conserve la propriété d'être c-mou ([41]) et qu'un c-mou sur la pseudovariété dénombrable à l'infini $\boldsymbol{B}$ est $\Gamma(\boldsymbol{B}, _)$-acyclique ([42]). Des raisons qui expliquent aussi que $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})$ est calculée par le complexe des « *cochaînes à support compact* »

$$(\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B}), d_{\mathrm{c}}) := \Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{B}, \pi_{\boldsymbol{Y}!}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}^{\bullet}(\boldsymbol{X};k), d_{\bullet}))\,.$$

Dans la suite on notera

$$\mathcal{Z}_{\pi!}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B}) := \ker(d_{\pi!}) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{\pi!}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B}) := \mathrm{im}(d_{\pi!}).$$

et de manière analogue pour le complexe $(\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B}), d_{\mathrm{c}})$.

12.1.3. Lorsque $\boldsymbol{B} = \{\mathrm{pt}\}$, on a $H_{\pi!}(_;\boldsymbol{B}) = H_{\mathrm{c}}(_)$. La cohomologie à support π-propre étend la cohomologie à support compact et tout comme elle, si $j : U \hookrightarrow \boldsymbol{Y}$ est une inclusion ouverte, complémentaire de l'inclusion fermée $i : F \hookrightarrow \boldsymbol{Y}$, on munit U et F des structures d'espaces basés sur $\boldsymbol{B}$ en composant les inclusions avec $\pi_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{B}$, et l'on dispose alors des morphismes

- de prolongement par zéro $j_! : H_{\pi!}(U;\boldsymbol{B}) \to H_{\pi!}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B})$
- de restriction à un fermé $i^* : H_{\pi!}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B}) \to H_{\pi!}(F;\boldsymbol{B})$

et d'une suite exacte longue de cohomologie à support π-propre

$$\cdots \to H^{i-1}_{\pi!}(F;\boldsymbol{B}) \to H^{i}_{\pi!}(U;\boldsymbol{B}) \to H^{i}_{\pi!}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B}) \to H^{i}_{\pi!}(F;\boldsymbol{B}) \to H^{i+1}_{\pi!}(U;\boldsymbol{B}) \to \cdots$$

qui est aussi un complexe de $H(\boldsymbol{B})$-modules.

En effet, une décomposition en parties respectivement ouverte et fermée $\boldsymbol{Y} = U \sqcup F$ donne lieu à la suite exacte courte $0 \to j_! \underline{\underline{k}}_U \to \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{Y}} \to i_! \underline{\underline{k}}_F \to 0$ de $\mathrm{Mod}(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{Y}})$, et donc au triangle exact de $D^+_k(\boldsymbol{B})$:

$$I\!R\pi_{\boldsymbol{Y}!}\, j_! \underline{\underline{k}}_U \to I\!R\pi_{\boldsymbol{Y}!}\, \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{Y}} \to I\!R\pi_{\boldsymbol{Y}!}\, i_! \underline{\underline{k}}_F \to,$$

où nous avons $I\!R\pi_{\boldsymbol{Y}!}\, j_! = I\!R\pi_{U!}$ et $I\!R\pi_{\boldsymbol{Y}!}\, i_! = I\!R\pi_{F!}$, puisque $j_!$ et $i_!$ sont exacts et transforment c-mous en c-mous ([41]).

Enfin, dans le modèle des cochaînes d'Alexander-Spanier, les morphisme naturels $\pi_{\boldsymbol{Y}!} j_! \underline{\underline{\mathcal{A}}}^i_U \to \pi_{\boldsymbol{Y}!} \underline{\underline{\mathcal{A}}}^i_{\boldsymbol{Y}}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}!} \underline{\underline{\mathcal{A}}}^i_{\boldsymbol{Y}} \to \pi_{\boldsymbol{Y}!} \underline{\underline{\mathcal{A}}}^i_F$ correspondent clairement aux opérations de prolongement par zéro et de restriction habituels.

12.1.4. Si $f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}$ est une application continue et *propre* entre deux espaces au-dessus de $\boldsymbol{B}$, le morphisme d'adjonction $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{Y}} \to (I\!Rf_* \circ f^{-1})\, \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{Y}}$

[41] *cf.* [25] proposition 2.5.7-(ii), p. 105.

[42] *cf.* [25] proposition 2.5.10, p. 106.

donne lieu au morphisme de complexes de faisceaux

$$\mathbb{R}\pi_{\boldsymbol{Y}!}\,\underline{k}_{\boldsymbol{Y}} \to (\mathbb{R}\pi_{\boldsymbol{Y}!}\circ\mathbb{R}f_*)\,\underline{k}_{\boldsymbol{Z}} = (\mathbb{R}\pi_{\boldsymbol{Y}!}\circ\mathbb{R}f_!)\,\underline{k}_{\boldsymbol{Z}} = \mathbb{R}\pi_{\boldsymbol{Z}!}\,\underline{k}_{\boldsymbol{Z}}\,,$$

d'où le morphisme « *image-inverse* » pour la cohomologie à support π-propre $f^*: H_{\pi!}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B}) \to H_{\pi!}(\boldsymbol{Z};\boldsymbol{B})$. La naturalité des morphismes (‡‡) de 12.1.1, donne alors lieu au diagramme commutatif de morphismes image-inverse

$$\begin{array}{ccccc} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}) & \longrightarrow & H_{\pi!}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B}) & \longrightarrow & H(\boldsymbol{Y}) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}) & \longrightarrow & H_{\pi!}(\boldsymbol{Z};\boldsymbol{B}) & \longrightarrow & H(\boldsymbol{Z}) \end{array}$$

L'analogue pour la cohomologie $H_{\pi!}(_;\boldsymbol{B})$ de la propriété caractéristique des espaces i-acycliques, le théorème 1.3.1-(d), est également vérifiée.

12.1.5. Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Étant donnés des espaces basés $\pi_{\boldsymbol{Z}}: \boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{B}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}}: \boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{B}$, soit $\pi_{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}}: \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{B}$, $(x,y)\mapsto \pi_{\boldsymbol{Y}}(y)$ et notons $p_2: \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{Y}$, $(x,m)\mapsto m$. Soit $f:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$ un morphisme d'espaces au-dessus de $\boldsymbol{B}$, notons $f_2 := p_2\circ f$. Soit $j: V\hookrightarrow\boldsymbol{Y}$ un plongement ouvert, notons $f_2': f^{-1}(V)\to V$ la restriction de f_2. On a le diagramme commutatif d'espaces au-dessus de $\boldsymbol{B}$ suivants,*

$$\begin{array}{ccccc} f_2^{-1}(V) & \hookrightarrow & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{f} & \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y} \\ & {\scriptstyle f_2'}\searrow & & {\scriptstyle f_2}\searrow & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ & & V & \xrightarrow{j} & \boldsymbol{Y}\,. \end{array}$$

Alors, si f et f_2' sont propres et si $j_!: H_{\pi!}(V;\boldsymbol{B})\to H_{\pi!}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B})$ est surjectif, on a

$$\big(f^*: H_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B})\to H_{\pi!}(\boldsymbol{Z};\boldsymbol{B})\big) = 0\,.$$

Démonstration. C'est presque littéralement la même preuve que 1.3.1-(d).

Soient $p_1:\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{X}$ la projection canonique et $f_1 := p_1\circ f$. Par Künneth, on a $H_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B}) = H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})\otimes H_{\pi!}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B})$ et il suffit de montrer que pour tous cocycles $\omega\in\mathcal{Z}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ et $\varpi\in\mathcal{Z}_{\pi!}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B})$, le cocycle

$$f^*(\omega\otimes\varpi) = f^*(p_1^*\omega\cup p_2^*\varphi) = f_1^*\omega\cup f_2^*\varpi\in\mathcal{Z}_{\pi!}(\boldsymbol{Z};\boldsymbol{B}) \qquad (*)$$

est la différentielle d'une cochaîne à support π-propre de $\boldsymbol{Z}$. Or, il existe par hypothèse $\tau\in\mathcal{Z}_{\pi!}(V;\boldsymbol{B})$ qui représente la classe de ϖ dans $H_{\pi!}(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{B})$. On peut donc remplacer dans $(*)$ $f_2^*\varpi$ par $f_2^*\tau$ qui est à support π-propre dans $f_2^{-1}(V)$ donc dans $\boldsymbol{Z}$ par le prolongement par zéro $j_!$. D'autre part, comme $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, on a $f_1^*\omega = f_1^* d\alpha$ pour une certaine cochaîne α de $\boldsymbol{X}$ (à support non nécessairement compact), et alors

$$f_1^*\omega\cup f_2^*\tau = d(f_1^*\alpha\cup f_2^*\tau)\,,$$

où $f_1^*\alpha\cup f_2^*\tau$ est à support π-propre de $\boldsymbol{Z}$ puisqu'il en est ainsi de $f_2^*\tau$. On a donc bien $f^*(\omega\otimes\varpi)=0$ dans $H_{\pi!}(\boldsymbol{Z};\boldsymbol{B})$. □

12.2. Localisation du théorème de scindage

12.2.1. Naturalité de $H_{\pi!}(_;B)$ relative aux ouverts de B. Soit B' un ouvert de B. Étant donné $\pi_Y : Y \to B$, on note $Y' := \pi_Y^{-1}(B')$ et $\pi_{Y'} : Y' \to B'$ la restriction de π_Y. Nous avons ainsi un diagramme cartésien de plongements ouverts :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \hookrightarrow & Y \\ {\scriptstyle \pi_{Y'}}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ B' & \hookrightarrow & B \end{array}$$

et un morphisme naturel de restriction de complexes

$$I\!R\Gamma(B, I\!R\pi_{Y!}\, \underline{k}_Y) \to I\!R\Gamma(B', I\!R\pi_{Y!}\, \underline{k}_Y) = I\!R\Gamma(B', I\!R\pi_{Y'!}\, \underline{k}_{Y'})\,.$$

donnant lieu à un morphisme naturel de restriction :

$$H_{\pi!}(Y;B) \to H_{\pi!}(Y';B')\,.$$

Nous aurons besoin du résultat classique suivant ([43]).

12.2.2. Proposition. *Soient Y et B des espaces localement compacts et soit $\pi : Y \to B$ une application continue. Pour tout $b \in B$, le morphisme canonique*

$$\varinjlim_{B' \ni b} H_{\pi!}(\pi^{-1}(B');B') \to H_c(\pi^{-1}(b))$$

est un isomorphisme.

12.2.3. Notations. Pour la suite de cette section nous fixons un espace X et un entier $0 \leqslant a \in \mathbb{N}$. On note $F_a := F_a(X)$, si $a > 0$, et $F_0 := \{\mathrm{pt}\}$.

Pour tous $a \leqslant \ell \leqslant m \in \mathbb{N}$, nous avons introduit (2.1-(N-3)) les espaces

$$\Delta^{[a]}_{?\ell} X^m := \Delta_{?\ell} X^m \cap (X^{m-a} \times F_a)\,,$$

que nous notons aussi $\Delta^{m[a]}_{?\ell} := \Delta^{[a]}_{?\ell} X^m$ lorsque l'on aura besoin d'une écriture plus compacte. Nous y avons aussi introduit la projection $\pi_a : X^m \to X^a$ sur les dernières a coordonnées, et les espaces de base F_a

$$\pi_a : \Delta^{m[a]}_{?\ell} \to F_a \quad \text{et} \quad \pi_a : F_m \to F_a\,.$$

Maintenant, pour tout ouvert $U \subseteq F_a$, nous notons

$$U\Delta^{m[a]}_{?\ell} := \pi_a^{-1} U \cap \Delta^{m[a]}_{?\ell} \quad \text{et} \quad UF_m := \pi_a^{-1} U \cap F_m\,,$$

et considérons les produits fibrés :

$$\begin{array}{ccc} U\Delta^{m[a]}_{?\ell} & \hookrightarrow & \Delta^{m[a]}_{?\ell} \\ {\scriptstyle \pi_a}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle \pi_a} \\ U & \hookrightarrow & F_a \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} UF_m & \hookrightarrow & F_m \\ {\scriptstyle \pi_a}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle \pi_a} \\ U & \hookrightarrow & F_a \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} X \times UF_m & \hookrightarrow & X \times F_m & \ni & (x, \overline{y}) \\ {\scriptstyle \pi_a}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle \pi_a} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_a} \\ U & \hookrightarrow & F_a & \ni & \pi_a(\overline{y}) \end{array}$$

[43] Conséquence immédiate de la proposition 2.5.2 p.103, [25].

Les décompositions ouvertes-fermées

$$\boldsymbol{U}\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell} = \boldsymbol{U}\Delta^{m[a]}_{\ell} \sqcup \boldsymbol{U}\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell-1}$$
$$\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_m = \boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{1+m} \sqcup \Delta_m(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_m)$$

sont alors des décompositions d'espaces basés sur $\boldsymbol{U}$.

On peut maintenant énoncer l'analogue du théorème 3.1.1 dans le contexte d'espaces basés sur $\boldsymbol{U}$. Il est important de remarquer que si dans 3.1.1 la i-acyclicité était une condition suffisante, maintenant elle apparaît comme une condition nécessaire et suffisante.

12.2.4. Théorème de scindage local. *Soient $1 \leqslant a \leqslant \ell \leqslant m \in \mathbb{N}$. On fixe un ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a$. Les espaces dans cet énoncé sont des sous-espaces de $\pi_a : \boldsymbol{X}^{m-a}\times\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}$. On note $H_{\pi!}(_)$ la cohomologie à support π_a-propre. Alors, $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, si et seulement si, il vérifie les assertions suivantes.*

a) *Pour $m \geqslant a \geqslant 1$ et un ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a$, le morphisme de restriction*
$$H_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_m) \to H_{\pi!}(\Delta_{\leqslant m}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_m))$$
est nul et la suite
$$0 \to H_{\pi!}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_m)[-1]^m \to H_{\pi!}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{m+1}) \to H_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_m) \to 0\,,$$
extraite de la suite longue de cohomologie à support π-propre, est exacte.

b) *Pour $m \geqslant \ell \geqslant a \geqslant 1$ et un ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a$, le morphisme de restriction*
$$H_{\pi!}(\boldsymbol{U}\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell}) \to H_{\pi!}(\boldsymbol{U}\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell-1})$$
est nul et la suite
$$0 \to H_{\pi!}(\boldsymbol{U}\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell-1})[-1] \to H_{\pi!}(\boldsymbol{U}\Delta^{m[a]}_{\ell}) \to H_{\pi!}(\boldsymbol{U}\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell}) \to 0\,,$$
extraite de la suite longue de cohomologie à support π-propre, est exacte.

Démonstration. On suppose que $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique. La preuve de (a) et (b) est alors la même que dans 3.1.1 modulo la version de la propriété fondamentale des espaces i-acycliques pour les espaces basés sur $\boldsymbol{U}$ de la proposition 12.1.5.

Pour l'assertion (a), on est conduit au diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\leqslant m}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_m) & \hookrightarrow & \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_m \\ & \searrow^{f_2} & \downarrow p_2 \\ & & \boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_m \end{array}$$

où l'application f_2 est propre car revêtement trivial d'ordre m.

Pour (b), on raisonne par induction sur ℓ. Sa valeur la plus petite est $\ell := a$, auquel cas $\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell-1} = \emptyset$ et l'assertion est claire quel que soit m. Ensuite, en supposant l'assertion établie pour $\ell-1 \geqslant a$, on est conduit à considérer le

diagramme commutatif suivant où $m \geqslant \ell$

$$\begin{array}{ccccc} f_2^{-1}(\boldsymbol{U}\Delta_{\ell-1}^{m-1[a]}) & \hookrightarrow & \boldsymbol{U}\Delta_{\leqslant\ell-1}^{m[a]} & \hookrightarrow & \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{U}\Delta_{\leqslant\ell-1}^{m-1[a]} \\ & \searrow^{f_2'} & & \searrow^{f_2} & \downarrow p_2 \\ & & \boldsymbol{U}\Delta_{\ell-1}^{m-1[a]} & \hookrightarrow & \boldsymbol{U}\Delta_{\leqslant\ell-1}^{m-1[a]} \end{array}$$

où f_2' est propre car restriction (par l'image) de l'application propre de même nom $f_2' : f_2^{-1}(\Delta_{\ell-1}^{m-1}) \to \Delta_{\ell-1}^{m-1}$ de la preuve de 3.1.1-(b).

Réciproquement, si $m = \ell = a = 1$ et si $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{X}$, le morphisme $H_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}) \to H(\Delta_1(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}))$ est nul. Or, ce morphisme s'identifie au cup-produit

$$\cup : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{X})$$

et $\boldsymbol{X}$ est bien i-acyclique. □

12.2.5. Le corollaire suivant est un résultat technique qui sera très utile pour montrer que les faisceaux des cohomologie à support π-propre de la fibration $\pi_a : \boldsymbol{F}_m \to \boldsymbol{F}_a$ sont constants sur les composantes connexes de $\boldsymbol{F}_a$. Ceci participera ensuite de manière décisive dans l'étude des suites spectrales de Leray correspondantes. (Voir la remarque 4.2.4.)

12.2.6. Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Soient $a \leqslant m \in \mathbb{N}$ et $\pi_{m,a} : \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$, $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_{m-a+1}, \ldots, x_m)$. Pour tout $\overline{x} \in \boldsymbol{F}_a$, le morphisme de restriction*

$$\rho_{m,a} : H_{\pi!}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})) \to H_{\mathrm{c}}(\pi_{m,a}^{-1}\overline{x})$$

est surjectif.

Démonstration. On raisonne par induction sur $m \geqslant a$. Lorsque $m = a$, on a $\pi_a = \mathrm{id}_{\boldsymbol{F}_a}$ et donc $H_{\pi!}(\boldsymbol{F}_m) = H(\boldsymbol{F}_a)$, et cette cohomologie se surjecte clairement sur $H_{\mathrm{c}}(\overline{x}) = H^0(\overline{x}) = k$.

Dans le cas général, on considère décomposition en parties respectivement ouverte et fermée

$$\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m = \boldsymbol{F}_{m+1} \sqcup \Delta_m(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)$$

et la décomposition qu'elle induit sur le fermé $\boldsymbol{X}\times\pi_{m,a}^{-1}\overline{x}$, à savoir

$$\boldsymbol{X}\times\pi_{m,a}^{-1}\overline{x} = \pi_{m+1,a}^{-1}\overline{x} \sqcup \Delta_m(\boldsymbol{X}\times\pi_{m,a}^{-1}\overline{x})\,.$$

On considère alors le morphisme de restrictions des suites de cohomologie à supports π-propres

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{\pi!}(\boldsymbol{F}_m)[-1]^m & \longrightarrow & H_{\pi!}(\boldsymbol{F}_{m+1}) & \longrightarrow & H_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle (\rho_{m,a})^m} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{m+1,a}} & & \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \\ \longrightarrow & & H_{\mathrm{c}}(\pi_{m,a}^{-1}\overline{x})[-1]^m & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\pi_{m+1,a}^{-1}\overline{x}) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\pi_{m,a}^{-1}\overline{x}) & \longrightarrow & \end{array} \qquad (*)$$

où la première ligne est exacte d'après 12.2.4-(a) (la seconde aussi, mais on n'en aura pas besoin). La colonne de gauche est surjective puisque $\rho_{m,a}$ l'est par hypothèse de récurrence, et la colonne de droite l'est puisque le morphisme de restriction $\xi : H_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\pi_{m,a}^{-1}\overline{x})$ s'identifie trivialement à $\mathrm{id}\otimes\rho_{m,a} : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H_{\pi!}(\boldsymbol{F}_m) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\pi_{m,a}^{-1}\overline{x})$. Une chasse au diagramme élémentaire montre alors la surjectivité de $\rho_{m+1,a}$. □

12.2.7. Polynôme de Poincaré de la cohomologie à support π-propre

Pour tout ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a$ et tout $\pi : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{U}$ tel que $\dim_k H_{\pi!}(\boldsymbol{Z}; \boldsymbol{U}) < \infty$, on note, de manière analogue à 4.1.3,

$$\mathcal{P}_{\pi!}(\boldsymbol{Z}; \boldsymbol{U})(T) := \sum\nolimits_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k(H^i_{\pi!}(\boldsymbol{Z}; \boldsymbol{U}))\, T^i\,.$$

Le corollaire suivant de 12.2.4-(a) est un ingrédient essentiel dans la preuve de dégénérescence de la suite spectrale de Leray du théorème 12.4.9. (Comparer à 4.2.3.)

12.2.8. Corollaire. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique tel que $\dim_k H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) < \infty$ et soit $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ un ouvert tel que $\dim_k H(\boldsymbol{U}) < \infty$. Alors, pour tout $b > 0$,*

$$\mathcal{P}_{\pi!}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}); \boldsymbol{U}) = \mathcal{P}(\boldsymbol{U}) \cdot \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))\,.$$

Démonstration. Par 12.2.4-(a), on a l'égalité

$$\mathcal{P}_{\pi!}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_m; \boldsymbol{U}) = \mathcal{P}_{\pi!}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{m-1}; \boldsymbol{U}) \cdot (\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) + (m{-}1)T)$$

que l'on va itérer jusqu'à ce que $m{-}1 = a$, auquel cas $\mathcal{P}_{\pi!}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_a; \boldsymbol{U}) = \mathcal{P}(\boldsymbol{U})$ puisque $\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_a = \boldsymbol{U}$ et que $\pi_a = \mathrm{id}_{\boldsymbol{U}}$. Le produit résiduel

$$(\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) + aT) \cdots (\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) + (m{-}1)T)$$

étant alors clairement égal à $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m-a}(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))$. □

12.3. Constance des faisceaux de cohomologie à support π-propre

Pour $a \leqslant \ell \leqslant m$, reprenons les espaces $\boldsymbol{F}_m$ et $\Delta^{m[a]}_{?\ell}$ de base $\boldsymbol{F}_a$ et les décompositions ouvertes-fermées de base $\boldsymbol{F}_a$

$$\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m = \boldsymbol{F}_{1+m} \sqcup \Delta_m(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m) \qquad (\diamond_1)$$
$$\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell} = \Delta^{m[a]}_{\ell} \sqcup \Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell-1} \qquad (\diamond_2)$$

12.3.1. Les faisceaux $\mathcal{H}^i_{\pi!}(_)$ sur $\boldsymbol{F}_a$

Le cas $\Delta^{m[a]}_{?\ell}$. Reprenons l'application $\pi_a : \Delta^{m[a]}_{?\ell} \to \boldsymbol{F}_a$ et introduisons les faisceaux :

$$\boxed{\mathcal{H}^i_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{?\ell}) := I\!R^i\pi_{a!}(\underline{k}_{\Delta^{m[a]}_{?\ell}})\,, \quad \forall i \in \mathbb{Z}}$$

dont les fibres sont (12.2.2)

$$\boxed{\mathcal{H}^i_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{?\ell})_{\overline{x}} = H^i_{\mathrm{c}}(\pi_a^{-1}(\overline{x}))\,, \quad \forall \overline{x} \in \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})}$$

D'autre part, le foncteur $I\!R\pi_{a!}$ appliqué au le triangle exact de $D^+_k(\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell})$

$$j_!\underline{k}_{\Delta^{m[a]}_{\ell}} \xrightarrow{j_!} \underline{k}_{\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell}} \xrightarrow{\rho} i_!\underline{k}_{\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell-1}} \to$$

associé à la décomposition $(\diamond_2)$, où $j_!$ est le prolongement par zéro et ρ la restriction, donne la suite exacte longue de faisceaux localement constants :

$$\longrightarrow \mathcal{H}^i_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\ell}) \xrightarrow{j_{!i}} \mathcal{H}^i_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell}) \xrightarrow{\rho_i} \mathcal{H}^i_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell-1}) \xrightarrow{+1} . \qquad (\ddagger\ddagger)$$

Le cas $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$. La même démarche sur la décomposition $(\diamond_1)$, nous conduit à la suite longue de faisceaux localement constants sur $\boldsymbol{F}_a$:

$$\xrightarrow[+1]{} \mathcal{H}^i_{\pi!}(\boldsymbol{F}_{1+m}) \xrightarrow{j_{!i}} \mathcal{H}^i_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m) \xrightarrow{\rho_i} \mathcal{H}^i_{\pi!}(\Delta_m(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)) \xrightarrow[+1]{} . \qquad (\ddagger)$$

12.3.2. Théorème de scindage. *Soit* $\boldsymbol{X}$ *un espace* i*-acyclique.*

a) *Pour* $a \leqslant m \in \mathbb{N}$*, les morphismes de faisceaux de la suite* $(\ddagger)$

$$\mathcal{H}^i_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m) \xrightarrow{\rho_i} \mathcal{H}^i_{\pi!}(\Delta_m(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m))\,, \quad \forall i \in \mathbb{Z}\,,$$

sont nuls et l'on a une suite exacte courte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_m\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)[-1] \to \mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{F}_{1+m}) \to \mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m) \to 0\,.$$

b) *Pour* $0 \leqslant a \leqslant \ell-1$ *et* $\ell \leqslant m \in \mathbb{N}$*, les morphismes de faisceaux dans* $(\ddagger\ddagger)$

$$\mathcal{H}^i_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell}) \xrightarrow{\rho_i} \mathcal{H}^i_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell-1})\,, \quad \forall i \in \mathbb{Z}\,,$$

sont nuls et l'on a la suite exacte courte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell-1})[-1] \to \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\ell}) \to \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell}) \to 0\,.$$

c) *Si* $\boldsymbol{X}$ *est, de plus, localement connexe, les faisceaux dans* (a,b) *sont constants sur les composantes connexes de* $\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ (*cf.* 1.3.5 et 2.2.2).

Démonstration. La preuve de (a) et (b) est essentiellement la même que celle de 3.1.1. On indique brièvement les modifications à faire pour prouver (b). La preuve pour (a) suit exactement la même démarche.

Preuve de (b). On reprend les notations de 12.2.3. Pour un ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a$, on pose $\boldsymbol{U}\Delta^{m[a]}_{?\ell} := \pi_a^{-1}(\boldsymbol{U})$. On a les suites exactes courtes (12.2.4-(b)) :

$$0 \to H_{\pi!}(\boldsymbol{U}\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell-1})[-1] \to H_{\pi!}(\boldsymbol{U}\Delta^{m[a]}_{\ell}) \to H_{\pi!}(\boldsymbol{U}\Delta^{m[a]}_{\leqslant\ell}) \to 0\,. \qquad (*)$$

Cela étant, la naturalité de la cohomologie à supports propres relative à la base (12.2.1) permet de dire que si $\pi_a : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{F}_a$ est un espace topologique

basé sur $\boldsymbol{F}_a$, et que l'on note $\boldsymbol{UM} := \pi_a^{-1}(\boldsymbol{U})$, la correspondance

$$\boldsymbol{U} \rightsquigarrow H_{\pi!}(\boldsymbol{UM})$$

définit le préfaisceau $\overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\boldsymbol{M})$ de k-espaces vectoriels sur $\boldsymbol{F}_a$. Cette idée appliquée aux suites $(*)$ donne la suite exacte de préfaisceaux sur $\boldsymbol{F}_a$:

$$0 \to \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\leqslant \ell-1})[-1] \to \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\ell}) \to \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\leqslant \ell}) \to 0\,,$$

et comme le faisceau engendré par $\overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(_)$ est précisément le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(_)$, on obtient l'exactitude de la suite courte des faisceaux sur $\boldsymbol{F}_a$:

$$0 \to \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\leqslant \ell-1})[-1] \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\ell}) \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\leqslant \ell}) \to 0\,,$$

et donc aussi l'annulation du morphisme ρ_i dans la suite longue $(\ddagger\ddagger)$.

> *Commentaire. On remarquera que grâce à l'exactitude des ces suites courtes, l'assertion :* " le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\leqslant \ell})$ est constant sur une composante connexe $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{F}_a$ " *sera conséquence de ce que le faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\leqslant \ell-1})$ et $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\ell})$ la vérifient. Or, comme la plus petite valeur possible de ℓ vérifie $a = \ell-1$ et que $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\leqslant a}) = \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{a})$, une preuve de l'assertion par récurrence découle de prouver seulement que les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{\ell})$ sont constants sur $\boldsymbol{C}$ et ce, pour tout $\ell \geqslant a$ (et pas seulement $\ell > a$).*

Preuve de (c). Nous commençons par montrer que les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{F}_m)$ sont constants sur une composante connexe $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{F}_a$.

Nous procédons par induction sur $m \geqslant a$, le cas $m = a$ étant évident. Supposons maintenant que $\mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{F}_m)$ est constant sur $\boldsymbol{C}$. Comme $\Delta_m(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)$ est isomorphe au produit $[\![1,m]\!]\times\boldsymbol{F}_m$, le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_m\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{F}_m)^m$ et il est donc constant sur $\boldsymbol{C}$. D'autre part, on a $\mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m) \simeq H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes_k \mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{F}_m)$ et $\mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)$ est aussi constant sur $\boldsymbol{C}$. Par conséquent, dans la suite exacte courte de (a)

$$0 \to \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_m\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)[-1] \to \mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{F}_{1+m}) \to \mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m) \to 0\,, \qquad (**)$$

les faisceaux de droite et de gauche sont constants. Nous allons en déduire que celui du centre l'est également.

• *Critère de trivialité d'extensions de faisceaux constants.* ([44]) *Dans une suite exacte courte de faisceaux sur une composante connexe $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{F}_a$*

$$\mathbf{0} \to \underline{\underline{A}} \to \mathcal{L} \to \underline{\underline{B}} \to 0$$

où $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont constants, le faisceau $\mathcal{L}$ est constant, si et seulement si la suite est scindée, donc si et seulement si, l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{F}_a}}(\underline{\underline{B}}, \mathcal{L}) \to \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{F}_a}}(\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{B}})$$

est surjective, et comme $\underline{\underline{B}}$ est constant sur un espace localement connexe, ceci équivaut à la surjectivité de

$$\Gamma(\boldsymbol{C}, \mathcal{L}) \twoheadrightarrow \Gamma(\boldsymbol{C}, \underline{\underline{B}}) = B_z\,, \quad \forall z \in \boldsymbol{C}\,.$$

[44] Voir aussi la remarque 4.2.2.

Dans le cas de la suite de faisceaux (∗∗), si $\overline{x} \in \boldsymbol{F}_a$ et si $\boldsymbol{C}$ est la composante connexe de $\boldsymbol{F}_a$ contenant $\overline{x}$, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(\boldsymbol{C}, \mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)) &= \mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)_{\overline{x}} = H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes \mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{F}_m)_{\overline{x}} \\ &= H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\pi_a^{-1}\overline{x})\,, \end{aligned}$$

d'après 12.2.2. D'autre part, le morphisme $\Gamma(\boldsymbol{C}, _) \to (_)_{\overline{x}}$ « germe en $\overline{x}$ », donne sur le *préfaisceau* $\overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\boldsymbol{C}, \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)_{\overline{x}} = \Gamma(\boldsymbol{C}, \mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)) \quad (\dagger) \\ \| & & \| \\ H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H_{\pi!}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_m) & \overset{\mathrm{id}\otimes\rho_{\boldsymbol{C}}}{-\!\!-\!\!\!\twoheadrightarrow} & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\pi_a^{-1}\overline{x}) \end{array}$$

où l'on voit apparaître la restriction $\rho_{\boldsymbol{C}} : H_{\pi!}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_m) \to H_{\mathrm{c}}(\pi_a^{-1}\overline{x})$ qui est surjective comme conséquence de la surjectivité de $\rho_{m,a} : H_{\pi!}(\boldsymbol{F}_m) \to H_{\mathrm{c}}(\pi_a^{-1}\overline{x})$, d'après 12.2.6, et du fait que, dans la décomposition

$$H_{\pi!}(\boldsymbol{F}_m) = \bigoplus\nolimits_{\boldsymbol{C}'\in\Pi_0\boldsymbol{F}_a} H_{\pi!}(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{F}_m)\,,$$

la restriction $H_{\pi!}(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{F}_m) \to H_{\mathrm{c}}(\pi_a^{-1}\overline{x})$ est nulle si $\boldsymbol{C}' \not\ni \overline{x}$. Le morphisme (†) est par conséquent surjectif. Comme d'autre part une section globale d'un préfaisceau détermine une section globale du faisceau associé, le diagramme naturel induit par les prolongements par zéro

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\boldsymbol{C}, \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\boldsymbol{F}_{1+m})) & \overset{j_!}{\longrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow} & \Gamma(\boldsymbol{C}; \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)) \\ \downarrow & & \downarrow\!\!\downarrow (\dagger) \\ \Gamma(\boldsymbol{C}, \mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{F}_{m+1})) & \overset{j_!}{\longrightarrow} & \Gamma(\boldsymbol{C}; \mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)) \end{array}$$

permet de conclure à la surjectivité du morphisme

$$\Gamma(\boldsymbol{C}, \mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{F}_{1+m})) \longrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \Gamma(\boldsymbol{C}, \mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m))\,,$$

et le critère de trivialité d'extensions de faisceaux constants s'applique, et le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{F}_{1+m})$ est bien constant sur $\boldsymbol{C}$.

Preuve de la deuxième partie de (c). D'après le commentaire à la fin de la preuve de (b), il suffit de prouver que les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_\ell^{m[a]})$ sont constants sur les composantes connexes de $\boldsymbol{F}_a$.

On a la décomposition en parties ouvertes (*cf.* 2.3.3)

$$\Delta_\ell^m = \coprod\nolimits_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}_\ell(m)} \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}\,.$$

L'inclusion $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}} \subseteq \Delta_\ell^{m[a]}$ a lieu, si et seulement si, la partition $\mathfrak{p}$ de $[\![1,m]\!]$ décompose l'intervalle $[\![m-a+1,m]\!]$ en singletons. Appelons une telle partition « π_a-adaptée ». Si $\mathfrak{p}$ n'est pas π_a-adaptée, on a $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}} \cap \Delta_\ell^{m[a]} = \emptyset$.

Si $\mathfrak{p}$ est π_a-adaptée, la projection $\pi_a : \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}} \to \boldsymbol{F}_a$ (sur les a derniers termes) est trivialement équivalente à des projections $\pi_a : \boldsymbol{F}_\ell \to \boldsymbol{F}_a$ déjà traitées. Le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}})$ est donc constant sur les composantes connexes de $\boldsymbol{F}_a$. On

conclut ensuite grâce à la décomposition évidente

$$\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_\ell^{m[a]}) = \bigoplus\nolimits_{\mathfrak{p}} \mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}})\,,$$

où $\mathfrak{p}$ décrit l'ensemble des partitions $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_\ell(m)$ qui sont π_a-adaptées. □

12.3.3. Remarque et notation. L'assertion 12.3.2-(c) est la généralisation de la trivialité monodromique annoncée dans le commentaire 1.3.5 par le fait qu'elle montre pour $\pi_a : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ l'une identification canonique des fibres $\mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_{\overline{x}} = H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus \overline{x}))$ lorsque $\overline{x}$ parcourt une composante connexe $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$. Il est intéressant d'observer que la connexité par arcs n'est pas concernée et que le phénomène dépasse de ce fait le cadre classique de la monodromie. L'assertion permet de comprendre le sens à donner à la notation $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))$ où $a, m \in \mathbb{N}$ (*cf.* 12.4.4).

12.4. Dégénérescence des suites spectrales de Leray

12.4.1. Critère élémentaire de dégénérescence. Nous donnons ici un critère de dégénérescence de suites spectrales par comparaison à une suite spectrale dégénérée. Le critère est très élémentaire, mais il sera utilisé à plusieurs reprises, ce qui justifie que nous l'énoncions séparément.

Comme il est d'usage, l'expression « *« la suite spectrale $(\mathbb{E}_r, d_r)$ est dégénérée »* » sera synonyme de « $d_r = 0$, *pour tout* $r \geqslant 2$ ».

12.4.2. Proposition. *Soit* $\{\varphi_r : (\mathbb{E}_r, d_r) \to (\mathbb{E}'_r, d'_r) \mid r \in \mathbb{N}\}$ *un morphisme de suites spectrales.*

a) *Si* $(\mathbb{E}_r, d_r)$ *est dégénérée et* φ_2 *est surjectif, alors* $(\mathbb{E}'_r, d'_r)$ *est dégénérée.*

b) *Si* $(\mathbb{E}'_r, d'_r)$ *est dégénérée et* φ_2 *est injective, alors* $(\mathbb{E}_r, d_r)$ *est dégénérée.*

Dans les deux cas on a $\varphi_r = \varphi_2$, *pour tout* $r \geqslant 2$.

Démonstration. (a) On montre par induction sur $r \geqslant 2$, que $d'_r = 0$ et que $\varphi_r = \varphi_2$. Lorsque $r := 2$, le complexe $(\mathbb{E}'_2, d'_2)$ est quotient de $(\mathbb{E}_2, 0)$ par hypothèse, donc $d'_2 = 0$. Maintenant, si nous avons montré que $d'_r = 0$, on aura $\varphi_{r+1} = \varphi_r$ et alors $\varphi_{r+1} = \varphi_2$ puisque par hypothèse inductive $\varphi_r = \varphi_2$, le morphisme de complexes φ_{r+1} est alors surjectif et $d'_{r+1} = 0$. L'assertion (b) se démontre par un raisonnement dual. □

12.4.3. Les suites spectrales de Leray. Le théorème 12.3.2 établit que pour un espace i-acyclique $\boldsymbol{X}$ localement connexe, les faisceaux

$$\mathcal{H}^i_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{?\ell}) := \mathbb{R}^i\pi_{a!}(\underline{k}_{\Delta^{m[a]}_{?\ell}})\,, \quad \forall i \in \mathbb{Z}\,,$$

sont constants sur les composantes connexes de $\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$.

Notons $c : \boldsymbol{F}_a \to \{\mathrm{pt}\}$ l'application constante. Comme nous l'avons déjà rappelé dans 12.1.1, la théorie des foncteurs dérivés donne des identifications

$$I\!R\big(c_\phi \circ \pi_{a!}\big)\big(\underline{k}_{\Delta^{m[a]}_{?\ell}}\big) = I\!R c_\phi\big(I\!R\pi_{a!}(\underline{k}_{\Delta^{m[a]}_{?\ell}})\big)\,, \quad \text{où } \phi \in \{*, !\}\,,$$

dont on tire les suites spectrales de Leray

$$(I\!E_r(\Delta^{m[a]}_{?\ell})_\varphi, d_r)\,, \qquad \text{où } \varphi \in \{\pi!, \mathrm{c}\}\,.$$

Ces suites se décomposent en sommes directes de suites spectrales

$$I\!E_r(\Delta^{m[a]}_{?\ell})_\varphi = \bigoplus\nolimits_{\boldsymbol{C}\in\Pi_0\boldsymbol{F}_a} I\!E_r(\boldsymbol{C}\Delta^{m[a]}_{?\ell})_\varphi\,,$$

où $\boldsymbol{C}$ est une composante connexe de $\boldsymbol{F}_a$. Les termes de $I\!E_2(\boldsymbol{C}\Delta^{m[a]}_{?\ell})_\varphi$ sont

$$I\!E_2(\boldsymbol{C}\Delta^{m[a]}_{?\ell})_\varphi := H_\phi(\boldsymbol{C}, \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{?\ell}))\,, \quad \text{où } H_\phi \in \{H_{\pi!}, H_{\mathrm{c}}\}\,,$$

et comme le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta^{m[a]}_{?\ell})$ est constant sur $\boldsymbol{C}$, on a respectivement

$$\begin{cases} I\!E_2^{p,q}(\boldsymbol{C}\Delta^{m[a]}_{?\ell})_{\mathrm{c}} := H^p_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{C}) \otimes H^q_{\mathrm{c}}(F_{\boldsymbol{C}}) \implies H^{p+q}_{\mathrm{c}}\big(\Delta^{m[a]}_{?\ell}\big) \\ I\!E_2^{p,q}(\boldsymbol{C}\Delta^{m[a]}_{?\ell})_{\pi!} := H^p(\boldsymbol{C}) \otimes H^q_{\mathrm{c}}(F_{\boldsymbol{C}}) \implies H^{p+q}_{\pi!}\big(\Delta^{m[a]}_{?\ell}\big)\,. \end{cases} \qquad (I\!E_2(\boldsymbol{C}))$$

où $F_{\boldsymbol{C}}$ désigne la fibre de $\pi_a : \Delta^{m[a]}_{?\ell} \to \boldsymbol{F}_a$ au-dessus de $\boldsymbol{C}$.

12.4.4. Remarque sur les notations. Concernant l'expression « $F_{\boldsymbol{C}}$ *est la fibre de* π_a », on rappelle que bien que ces fibres ne sont généralement pas homéomorphes, nous les notons depuis 4.2.3 par la notation $\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a)$. C'est une notation commode mais qui demande à être réinterprétée en fonction du contexte. Par exemple, les termes $I\!E_2(\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_\varphi$ sont notés de manière succincte

$$I\!E_2(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_\varphi = H_\phi(\boldsymbol{U}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))\,. \qquad (*)$$

Lorsque $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ est connexe, la constance de $\mathcal{H}_{\pi!}(\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))$ au dessus de $\boldsymbol{U}$ enlève toute ambiguïté à la notation $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))$ (12.3.3). Autrement, l'égalité $(*)$ sous-entend de décomposer $\boldsymbol{U}$ en ses composantes connexes $\boldsymbol{C}$ et d'interpréter $I\!E_2(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_\varphi$ comme la somme $\bigoplus_{\boldsymbol{C}} I\!E_2(\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_\varphi$ des formules $(I\!E_2(\boldsymbol{C}))$ ci-dessus.

L'intérêt pratique de la notation $(*)$ est que comme $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))$ est intrinsèque d'après 4.2.3, elle donne une description immédiate du polynôme de Poincaré de termes $I\!E_2(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_\varphi$.

12.4.5. Le cas où $\dim_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{H}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})) < +\infty$. Lorsque $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique et que $\dim H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) < +\infty$, on a $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X} \smallsetminus n)) < +\infty$, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, d'après 2.4.2-(c). Les remarques 4.2.3 et 12.2.8 s'appliquent alors au cas de la fibration $\pi_a : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ de fibre $\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a)$, de sorte que, pour tout ouvert $\boldsymbol{U}$ de $\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$, on a

(A) si $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) < +\infty$, alors $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X})) = \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) \cdot \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))$;

(*B*) si $H(\boldsymbol{U}) < +\infty$, alors $\mathcal{P}_{\pi!}(\boldsymbol{UF}_{b+a}(\boldsymbol{X})) = \mathcal{P}(\boldsymbol{U}) \cdot \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))$.

On en déduit, respectivement dans chaque cas, que :

(*A*) si $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) < +\infty$, alors

$$\dim_k I\!E_2(\boldsymbol{UF}_{b+a})_{\mathrm{c}} = H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{UF}_{b+a}) = \dim_k I\!E_\infty(\boldsymbol{UF}_{b+a})_{\mathrm{c}}\,;$$

(*B*) si $H(\boldsymbol{U}) < +\infty$, alors

$$\dim_k I\!E_2(\boldsymbol{UF}_{b+a})_{\pi!} = H_{\pi!}(\boldsymbol{UF}_{b+a}) = \dim_k I\!E_\infty(\boldsymbol{UF}_{b+a})_{\pi!}\,;$$

et on conclut que les suites $(I\!E_r(\boldsymbol{UF}_{b+a})_{\mathrm{c}}, d_r)$ et $(I\!E_r(\boldsymbol{UF}_{b+a})_{\pi!}, d_r)$ sont dégénérées, car si jamais on avait $d_r \neq 0$ pour un certain r, on aurait forcément

$$\dim(I\!E_2) \geqslant \dim(I\!E_r) > \dim(I\!E_{r+1}) \geqslant \dim(I\!E_\infty)\,,$$

ce qui n'est pas le cas.

12.4.6. Remarque. Dans cette approche, la finitude joue un rôle essentiel mais nous verrons qu'elle n'est pas nécessaire. La proposition suivante s'affranchi des hypothèses de finitude sur $\boldsymbol{U}$, mais demande encore celle sur $\boldsymbol{X}$. Ce sera le théorème 12.4.9 qui aura l'énoncé le plus général, *i.e.* sans aucune hypothèse de finitude sur $\boldsymbol{X}$.

12.4.7. Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique, localement connexe et tel que $\dim_k H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) < +\infty$. Alors, pour tout ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$, les suites spectrales $(I\!E_r(\boldsymbol{UF}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_{\mathrm{c}}, d_r)$ et $(I\!E_r(\boldsymbol{UF}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_{\pi!}, d_r)$ sont dégénérées.*

Démonstration. Comme $\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ localement connexe, il suffit de considérer le cas où $\boldsymbol{U}$ est connexe. Nous pouvons alors fixer une famille croissante $\mathcal{U} := \{\uparrow \boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\}_{\mathfrak{m}\in\mathbb{N}}$ d'ouverts connexes et de type fini qui recouvre $\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$. Pour chaque $\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{U}$, on considère le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}} \times_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{UF}_{b+a} = \boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a} & \hookrightarrow^{j_{\mathfrak{m}}} & \boldsymbol{UF}_{b+a} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_a} & \boxtimes & \downarrow{\scriptstyle \pi_a} \\ \boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}} & \hookrightarrow_{j_{\mathfrak{m}}} & \boldsymbol{U} \end{array}$$

∘ *La suite spectrale $I\!E(\boldsymbol{UF}_{b+a})_{\mathrm{c}}$.* — Le cas où $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) < +\infty$ est celui déjà considéré dans 12.4.5-(*A*) où $(I\!E_r(\boldsymbol{F}_a)_{\mathrm{c}}, d_r)$ est bien dégénérée. Dans le cas général on a recours au recouvrement $\mathcal{U}$. Les morphismes canoniques

$$j_{\mathfrak{m}!}\, I\!R\pi_{a!}\, \underline{k}_{\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}} = I\!R\pi_{a!}\, j_{\mathfrak{m}!}\, \underline{k}_{\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}} \to \underline{k}_{\boldsymbol{UF}_{b+a}}$$

induisent un morphisme de "prolongement par zéro" de suites spectrales

$$j_{\mathfrak{m}!} : (I\!E_r(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}), d_r) \to (I\!E_r(\boldsymbol{U}, d_r)\,, \qquad (I\!E_r)$$

qui s'identifie pour $r = 2$, au morphisme de complexes

$$H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a)) \xrightarrow{j_{\mathfrak{m}!}\otimes \mathrm{id}} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))\,. \qquad (I\!E_2)$$

Maintenant, le fait que $\varinjlim_{\mathfrak{m}} j_{\mathfrak{m}!} : \varinjlim_{\mathfrak{m}} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}) = H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U})$ implique que le morphisme de complexes

$$\varinjlim_{\mathfrak{m}} j_{\mathfrak{m}!} \otimes \mathrm{id} : \varinjlim_{\mathfrak{m}} (I\!E_2(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}), d_2) \to (I\!E_2(\boldsymbol{U}, d_2)$$

est bijectif, et alors, comme les suites $(I\!E(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}), d_r)$ sont dégénérées, le critère de dégénérescence 12.4.2 s'applique et $(I\!E_r(\boldsymbol{U}), d_r)$ est bien dégénérée.

∘ *La suite spectrale* $I\!E(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a})_{\pi!}$. — Le cas où $H(\boldsymbol{U}) < +\infty$ est celui déjà considéré dans 12.4.5-(B) où $(I\!E_r(\boldsymbol{F}_a)_{\pi!}, d_r)$ est bien dégénérée. Dans le cas général on a recours au recouvrement $\mathcal{U}$. Les morphismes canoniques

$$I\!R\pi_{a!}\, \underline{k}_{\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}} \to I\!R j_{\mathfrak{m}*}\, j_{\mathfrak{m}}^{-1}\, I\!R\pi_{a!}\, \underline{k}_{\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}} = I\!R j_{\mathfrak{m}*}\, I\!R\pi_{a!}\, \underline{k}_{\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}}$$

donnent les morphismes "de restriction" de complexes

$$I\!R\Gamma(\boldsymbol{U}; I\!R\pi_{a!}\, \underline{k}_{\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}}) \to I\!R\Gamma(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}; I\!R\pi_{a!}\, \underline{k}_{\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}})$$

d'où les morphismes de suites spectrales

$$(I\!E_r(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a})_{\pi!}, d_r) \to (I\!E_r(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a})_{\pi!}, d_r)\,,$$

et donc le morphisme de suites spectrales

$$(I\!E_r(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a})_{\pi!}, d_r) \to \varprojlim_{\mathfrak{m}} (I\!E_r(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a})_{\pi!}, d_r)\,. \qquad (I\!E_r)$$

Or, comme l'application en homologie $\varinjlim_{\mathfrak{m}} H_*(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}, k) \to H_*(\boldsymbol{U}, k)$ est bijective, on a par dualité, que $H(\boldsymbol{U}) = \varprojlim_{\mathfrak{m}} H(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}})$ l'est également. On en déduit les identifications suivantes pour les termes $I\!E_2$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}I\!E_2(\boldsymbol{F}_{b+a})_{\pi!} &= H(\boldsymbol{U}) \otimes H_{\mathrm{c}}(F) \\ &= \big(\varprojlim_{\mathfrak{m}} H(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}})\big) \otimes H_{\mathrm{c}}(F) = \varprojlim_{\mathfrak{m}} \big(H(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}) \otimes H_{\mathrm{c}}(F)\big) \qquad (I\!E_2) \\ &= \varprojlim_{\mathfrak{m}} I\!E_2(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a})_{\pi!}, \end{aligned}$$

où on a noté $H_{\mathrm{c}}(F) := H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))$ et où l'égalité de la ligne centrale est justifiée par le fait que $\dim_k H_{\mathrm{c}}(F) < +\infty$. Ces identifications sont compatibles aux différentielles d_2. Les conclusions de (B) s'appliquent aux suites $(I\!E_r(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a})_{\pi!}, d_r)$, et alors $d_2 = 0$ dans $I\!E_2(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a})_{\pi!}$. Le critère de dégénérescence 12.4.2 s'applique et $(I\!E_r(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a})_{\pi!}, d_r)$ est bien dégénérée. □

12.4.8. Le cas général. Nous nous affranchissons maintenant de l'hypothèse de finitude pour $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ et montrons la dégénérescence des suites spectrales en question en nous appuyant sur la proposition précédente 12.4.7.

12.4.9. Théorème. *Soient $a \leqslant \ell \leqslant m \in \mathbb{N}$. Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique i-acyclique et localement connexe. Pour tout ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$, les applications $\pi_a : \boldsymbol{U}\Delta_{?\ell}^{m[a]} \to \boldsymbol{U}$ donnent lieu à des suites spectrales de Leray pour*

les cohomologies $H_{\mathrm{c}}(_)$ et $H_{\pi!}(_)$ notées respectivement

$$(I\!E_r(\boldsymbol{U}\Delta_{?\ell}^{m[a]})_{\mathrm{c}}, d_r) \quad et \quad (I\!E_r(\boldsymbol{U}\Delta_{?\ell}^{m[a]})_{\pi!}, d_r) \qquad (I\!E_r)\,.$$

telles que

$$\begin{cases} \bigoplus_{\boldsymbol{C}\in\Pi_0\boldsymbol{U}} I\!E_2^{p,q}(\boldsymbol{C}\Delta_{?\ell}^{m[a]})_{\mathrm{c}} = H_{\mathrm{c}}^p(\boldsymbol{C})\otimes H_{\mathrm{c}}^q(F_{\boldsymbol{C}}) \Rightarrow H_{\mathrm{c}}^{p+q}(\Delta_{?\ell}^{m[a]}) \\ \bigoplus_{\boldsymbol{C}\in\Pi_0\boldsymbol{U}} I\!E_2^{p,q}(\boldsymbol{C}\Delta_{?\ell}^{m[a]})_{\pi!} = H^p(\boldsymbol{C})\otimes H_{\mathrm{c}}^q(F_{\boldsymbol{C}}) \Rightarrow H_{\pi!}^{p+q}(\Delta_{?\ell}^{m[a]}) \end{cases}$$

où $\boldsymbol{C}$ désigne une composante connexe de $\boldsymbol{U}$ et où $F_{\boldsymbol{C}}$ désigne une fibre quelconque de π_a au-dessus de $\boldsymbol{C}$. De plus, les suites spectrales $(I\!E_r)$ sont dégénérées.

Démonstration. Compte tenu des résultats qui précèdent, il ne nous reste qu'à justifier la dégénérescence des suites spectrales, ce pour quoi nous allons nous limiter aux ouverts $\boldsymbol{U}$ connexes. Les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{?\ell}^{m[a]})$ sont donc constants sur $\boldsymbol{U}$.

On fixe une famille croissante $\mathcal{V} := \{\uparrow\boldsymbol{V}_{\mathfrak{n}}\}_{\mathfrak{n}\in\mathbb{N}}$ d'ouverts $\boldsymbol{V}_{\mathfrak{n}}$ (pas forcément connexes) de type fini qui recouvre $\boldsymbol{X}$.

• *Le cas des fibrations $\pi_a : \boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$*

∘ *Dégénérescence de $(\boldsymbol{U}I\!E_r(\boldsymbol{F}_{b+a})_{\mathrm{c},\pi!}, d_r)$.* — Compte tenu de la proposition 12.4.7, nous avons juste à vérifier le cas où $\dim_k(H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})) = +\infty$.

Pour chaque $\mathfrak{m}\in\mathbb{N}$, notons $\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}} := \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{V}_{\mathfrak{m}})\cap\boldsymbol{U}$. La famille $\mathcal{U} := \{\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\}_{\mathfrak{m}\in\mathbb{N}}$ est clairement un recouvrement ouvert croissant de $\boldsymbol{U}$. On remarquera aussi que l'on des inclusions ouvertes

$$\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}} \subseteq \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{V}_{\mathfrak{m}}) \subseteq \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{V}_{\mathfrak{n}}) \subseteq \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$$

pour tous $\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n}$.

Considérons ensuite les diagrammes commutatifs où $\mathfrak{n}\geqslant\mathfrak{m}$

$$\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{V}_{\mathfrak{n}}) & \hookleftarrow & \boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{V}_{\mathfrak{n}}) & \hookrightarrow{\scriptstyle j_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}} & \boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) & \hookleftarrow{\scriptstyle j_{\mathfrak{m}}} & \boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_a} & (\mathrm{I}) & \downarrow{\scriptstyle \pi_a} & (\mathrm{II}) & \downarrow{\scriptstyle \pi_a} & (\mathrm{III}) & \downarrow{\scriptstyle \pi_a} \\ \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{V}_{\mathfrak{n}}) & \hookleftarrow & \boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}} & = & \boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}} & \xhookrightarrow{j_{\mathfrak{m}}} & \boldsymbol{U} \end{array}$$

Les sous-diagrammes (I) et (III) sont des produits fibrés et les cohomologies à support compact des fibres de π_a y sont (constantes car $\boldsymbol{U}$ est connexe) respectivement $\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{V}_{\mathfrak{n}}\smallsetminus a)$ et $\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X}\smallsetminus a)$.

Dans le sous-diagramme (II), la base est constante et seul les fibres changent. La famille croissante de plongements ouverts $\{j_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}\}_{\mathfrak{n}}$ recouvre $\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X})$ et les morphismes de complexes

$$\varinjlim_{\mathfrak{n}\in\mathbb{N}} I\!Rc_\phi\, I\!R\pi_{a!}\, j_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}!}\, \underline{k}_{\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{V}_{\mathfrak{n}})} \to I\!Rc_\phi\, I\!R\pi_{a!}\, \underline{k}_{\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X})}$$

où $c : \boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}} \to \{\mathrm{pt}\}$ est l'application constante et $\phi \in \{*, !\}$, induisent alors les morphismes de suites spectrales

$$\varinjlim_{\mathfrak{n}\in\mathbb{N}} \big(I\!E_r(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{V}_{\mathfrak{n}}))_{\varphi}, d_r\big) \to \big(I\!E_r(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_{\varphi}, d_r\big) \qquad (I\!E_r)$$

où $\varphi \in \{\pi!, \mathrm{c}\}$, qui s'identifient pour $r = 2$, au morphisme

$$\varinjlim_{\mathfrak{n}\in\mathbb{N}} \big(H_{\phi}(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{V}_{\mathfrak{n}} \smallsetminus a)) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes j_{\mathfrak{n}!}} H_{\phi}(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))\big), \qquad (I\!E_2)$$

où $H_{\phi} \in \{H, H_{\mathrm{c}}\}$ et où $j_{\mathfrak{n}} : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V}_{\mathfrak{n}}) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ est le prolongement par zéro. Or, comme la famille $\{\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{V}_{\mathfrak{n}})\}_{\mathfrak{n}\geqslant\mathfrak{m}\in\mathbb{N}}$ recouvre $\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a)$, la limite inductive des morphismes $(\mathrm{id} \otimes j_{\mathfrak{n}!})$ est un isomorphisme.

Enfin, les suites spectrales $(I\!E_r(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{V}_{\mathfrak{n}}))_{\varphi}, d_r)$ sont dégénérées d'après 12.4.7 puisque $\dim H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V}_{\mathfrak{n}}) < +\infty$. Le critère de dégénérescence 12.4.2 s'applique et les suite spectrales $(I\!E_r(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_{\varphi}, d_r)$ sont bien dégénérées.

Revenons maintenant au sous-diagramme (III). Ici, les fibres sont fixes et égales à $\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a)$ mais la base change. Aussi, nous avons deux situations différentes à considérer.

∘ *La suite spectrale* $(I\!E_r(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_{\mathrm{c}}, d_r)$. — Les morphismes de complexes des prolongements par zéro

$$\varinjlim_{\mathfrak{m}} I\!R c_! \, I\!R\pi_{a!} \, j_{\mathfrak{m}!} \, \underline{k}_{\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X})} \to I\!R c_! \, I\!R\pi_{a!} \, \underline{k}_{\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X})} \,,$$

induisent un morphisme de suites spectrales

$$\varinjlim_{\mathfrak{m}} (I\!E_r(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_c, d_r) \to (I\!E_r(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_c, d_r)\,, \qquad (I\!E_r)$$

qui s'identifie pour $r = 2$, au morphisme

$$\varinjlim_{\mathfrak{m}} \big(H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))\big) \xrightarrow{\varinjlim_{\mathfrak{m}} j_{\mathfrak{m}!}\otimes \mathrm{id}} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a)), \quad (I\!E_2)$$

clairement bijectif puisque $\{\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\}$ recouvre $\boldsymbol{U}$. Ce fait, et la dégénérescence déjà établie des suites spectrales $(I\!E_r(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_c, d_r)$ font que le critère de dégénérescence 12.4.2 s'applique et la suite spectrale $(I\!E_r(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_c, d_r)$ est dégénérée.

∘ *La suite spectrale* $(I\!E_r(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_{\pi!}, d_r)$. — On commence par rappeler le morphisme canonique de restriction de complexes dans $D^+(\boldsymbol{U})$

$$I\!R\pi_{a!} \, \underline{k}_{\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X})} \to I\!R\pi_{a!} \, I\!R j_{\mathfrak{m}*} \, \underline{k}_{\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X})} = I\!R j_{\mathfrak{m}*} \, I\!R\pi_{a!} \, \underline{k}_{\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X})} \,,$$

où l'égalité est justifiée puisque (III) est un produit fibré. On en déduit le morphisme de complexes

$$I\!R\Gamma(\boldsymbol{U}; I\!R\pi_{a!} \, \underline{k}_{\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X})}) \to I\!R\Gamma(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}; I\!R\pi_{a!} \, \underline{k}_{\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X})})\,,$$

qui donne lieu au morphisme de suites spectrales

$$(I\!E_r(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_{\pi!}, d_r) \to \varprojlim_{\mathfrak{m}} (I\!E_r(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_{\pi!}, d_r)\,, \qquad (I\!E_r)$$

qui s'identifie pour $r = 2$, au morphisme

$$H(\boldsymbol{U})\otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X}\smallsetminus a))\xrightarrow{\varprojlim_{\mathfrak{m}} j_{\mathfrak{m}}^*\otimes\mathrm{id}}\varprojlim_{\mathfrak{m}}\big(H(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}})\otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X}\smallsetminus a))\big). \quad (\mathbb{E}_2)$$

Or, comme $\{\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\}$ recouvre $\boldsymbol{U}$, on a $H(\boldsymbol{U}) = \varprojlim_{\mathfrak{m}} H(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}})$ et $(\mathbb{E}_2)$ est injectif. Nous savons d'autre part, que les suites spectrales $(\mathbb{E}_r(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_{\pi!}, d_r)$ sont dégénérées. Le critère de dégénérescence 12.4.2 s'applique et la suite spectrale $(\mathbb{E}_r(\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}))_{\pi!}, d_r)$ est dégénérée.

Ceci termine la preuve du cas des fibrations $\pi_a : \boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$.

• *Le cas des fibrations* $\pi_a : \boldsymbol{U}\Delta_\ell^{[a]}\boldsymbol{X}^m \to \boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$

Résulte du cas précédent, en raison de la décomposition ouverte ([45])

$$\Delta_\ell^{[a]}\boldsymbol{X}^m = \coprod\nolimits_{\mathfrak{p}} \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}$$

où $\mathfrak{p}$ est une partition π_a-adaptée de $\mathfrak{P}_\ell(m)$, et où $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}} \simeq \boldsymbol{F}_\ell$.

• *Le cas des fibrations* $\pi_a : \boldsymbol{U}\Delta_{\leqslant\ell}^{[a]}\boldsymbol{X}^m \to \boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$

Notons $j : \boldsymbol{U}\Delta_\ell^{m[a]} \to \boldsymbol{U}\Delta_{\leqslant\ell}^{m[a]}$ l'inclusion ouverte. Le morphisme de prolongement par zéro dans $D^+(\boldsymbol{U})$

$$j_!\, I\!R\pi_{a!}\,\underline{k}_{\boldsymbol{U}\Delta_\ell^{m[a]}} = I\!R\pi_{a!}\, j_!\,\underline{k}_{\boldsymbol{U}\Delta_\ell^{m[a]}} \to I\!R\pi_{a!}\,\underline{k}_{\boldsymbol{U}\Delta_{\leqslant\ell}^{m[a]}}$$

donne lieu aux morphismes de complexes

$$I\!R\Gamma_\phi\big(\boldsymbol{U}; I\!R\pi_{a!}\,\underline{k}_{\boldsymbol{U}\Delta_\ell^{m[a]}}\big) \to I\!R\Gamma_\phi\big(\boldsymbol{U}; I\!R\pi_{a!}\,\underline{k}_{\boldsymbol{U}\Delta_{\leqslant\ell}^{m[a]}}\big)\,,$$

avec $\Gamma_\phi \in \{\Gamma, \Gamma_{\mathrm{c}}\}$, qui induisent des morphismes de suites spectrales

$$\big(\mathbb{E}_r(\boldsymbol{U}\Delta_\ell^{m[a]})_\varphi, d_r\big) \to \big(\mathbb{E}_r(\boldsymbol{U}\Delta_{\leqslant\ell}^{m[a]})_\varphi, d_r\big)\,, \quad (\mathbb{E}_r)$$

avec $\varphi \in \{\pi!, \mathrm{c}\}$, qui s'identifient pour $r := 2$, aux morphismes

$$H_\phi(\boldsymbol{U})\times H_{\mathrm{c}}(F_\ell) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes j_!} H_\phi(\boldsymbol{U})\times H_{\mathrm{c}}(F_{\leqslant\ell}) \quad (\mathbb{E}_2)$$

avec $H_\phi \in \{H, H_{\mathrm{c}}\}$, et où $F_{?\ell}$ désigne la fibre de $\pi_a : \boldsymbol{U}\Delta_{?\ell}^{m[a]} \to \boldsymbol{U}$, et

$$j_! : H_{\mathrm{c}}(F_\ell) \to H_{\mathrm{c}}(F_{\leqslant\ell}) \quad (\dagger)$$

est le prolongement par zéro. Or, le théorème 12.2.4-(b) établit la surjectivité du prolongement par zéro

$$H_{\pi!}(\boldsymbol{V}\Delta_\ell^{m[a]}) \longrightarrow H_{\pi!}(\boldsymbol{V}\Delta_{\leqslant\ell}^{m[a]}) \quad (\ddagger)$$

pour tout $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{F}_a$. Si maintenant $\boldsymbol{V}$ parcours une base de voisinages connexes d'un point, la proposition 12.2.2 assure la surjectivité de $(\dagger)$, et donc aussi celle des morphismes $(\mathbb{E}_2)$. Comme nous avons déjà établi la dégénérescence de $(\mathbb{E}_r(\boldsymbol{U}\Delta_{\leqslant\ell}^{m[a]})_\varphi, d_r)$, le critère 12.4.2 s'applique et $(\mathbb{E}_r(\boldsymbol{U}\Delta_{\leqslant\ell}^{m[a]})_\varphi, d_r)$ est aussi dégénérée. Ceci termine la preuve du théorème. □

[45] *Cf.* fin de la démonstration du théorème 12.3.2.

12.4.10. Sur l'action de $\mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_a$ sur la suite spectrale de Leray

Reprenons la discussion de 10.7. Pour $a, b \in \mathbb{N}$, réalisons $\mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_a$ comme le sous-groupe de $\mathcal{S}_{b+a}$ des permutations laissant stables les sous-intervalles $[\![1,b]\!]$ et $[\![b+1,b+a]\!]$ et faisons-le agir sur $\boldsymbol{F}_{b+a}$ par son action naturelle à travers $\mathcal{S}_{b+a}$. Faisons-le ensuite agir sur $\boldsymbol{F}_a$, à travers de la projection sur $\mathcal{S}_a$. La projection (2.1-(N-3))

$$\pi_a : \boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}),$$

est alors $\mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_a$-équivariante.

Action de $\mathcal{S}_b$ sur $I\!E_2^{p,q}(\boldsymbol{C})$

Notons par $\Phi_h : \boldsymbol{F}_{b+a} \to \boldsymbol{F}_{b+a}$ l'homéomorphismes de l'action de $h \in \mathcal{S}_b$. On a $\pi_a \circ \Phi_h = \pi_a$. L'action de Φ_h respecte donc les fibres de π_a et l'action induite sur $H_c(\boldsymbol{C}, \mathcal{H}^i_{\pi!}(\boldsymbol{F}_a))$ correspond à l'action de $\mathcal{S}_b$ sur le second facteur du produit tensoriel $H_c(\boldsymbol{C}) \otimes H_c(F_{\boldsymbol{C}})$.

Action de $\mathcal{S}_a$ sur $I\!E_2^{p,q}(\mathcal{S}_a\boldsymbol{C})$

Les exemples de la proposition 10.7.1, montrent bien que l'action de $\mathcal{S}_a$ sur $H_c(\mathcal{S}_a\boldsymbol{C}, \mathcal{H}^i_{\pi!}(\boldsymbol{F}_a))$ ne correspond pas à l'action de $\mathcal{S}_a$ sur le premier facteur du produit tensoriel $H_c(\mathcal{S}_a\boldsymbol{C}) \otimes H_c(F_{\boldsymbol{C}})$, et ne se voit donc pas sur la suite spectrale de Leray.

Conclusion

Ces remarques montrent que seule l'action $\mathcal{S}_b \times \mathbf{1}_a$ sur $H_c(\boldsymbol{F}_{b+a})$ et $H_{\pi!}(\boldsymbol{F}_{b+a})$ se voit sur les termes $I\!E_2$ des suites spectrales de Leray (*cf.* 12.4.9)

$$\begin{cases} \bigoplus_{\boldsymbol{C}} I\!E_2^{p,q}(\boldsymbol{C}) := H_c^p(\boldsymbol{C}) \otimes H_c^q(F_{\boldsymbol{C}}) \Rightarrow H_c^{p+q}(\boldsymbol{F}_{b+a}), \\ \bigoplus_{\boldsymbol{C}} I\!E_2^{p,q}(\boldsymbol{C}) := H^p(\boldsymbol{C}) \otimes H_c^q(F_{\boldsymbol{C}}) \Rightarrow H_{\pi!}^{p+q}(\boldsymbol{F}_{b+a}). \end{cases}$$

Elle se voit comme étant l'action de $\mathcal{S}_b$ sur $H_c(F_{\boldsymbol{C}}) = H_c(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{X} \smallsetminus a))$.

13. Questions diverses sur les espaces i-acycliques

Nous rassemblons ici des exemples d'espaces i-acycliques ainsi que des contre-exemples à certaines propriétés de l'i-acyclicité que l'on aurait souhaité avoir mais qui ne sont pas vérifiées en toute généralité.

13.1. Espaces de configuration généralisés

$\vdash$ *Si $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, l'espace $\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m$ est i-acyclique pour $0 < \ell \leqslant m$.*

Démonstration. Si $\boldsymbol{X}$ est i-acyclique, $\boldsymbol{X}^m$ l'est aussi (1.2.4-(e)), et donc aussi l'ouvert $\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}^m$ (1.2.4-(d)) de même que tout espace $\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m$, car réunion disjointe ouverte d'espaces homéomorphes à $\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X})$ (2.3.3).

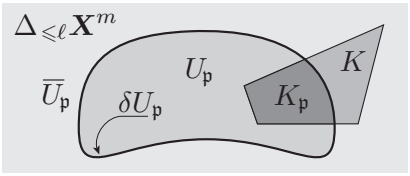
Pour établir la i-acyclicité des espaces $\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m$, nous utilisons le critère 1.3.1-(c) selon lequel un espace $\boldsymbol{Y}$ est i-acyclique lorsque pour tout compact

$K \subseteq \boldsymbol{Y}$, la restriction $\rho_K : H_c(\boldsymbol{Y}) \to H(K)$ est nulle. Dans le cas présent, comme en plus le prolongement par zéro $j_! : H_c(\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m) \to H_c(\Delta_{\leqslant \ell} \boldsymbol{X}^m)$ est surjectif (3.1.1-(b)) et que $\Delta_\ell \boldsymbol{X}^m$ est réunion disjointe des ouverts $U_{\mathfrak{p}} := \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{X})$, avec $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_\ell(m)$ (*cf.* 2.3.2), le critère en question sera validé par la nullité, pour tous $\mathfrak{p}$ et K, des composées

$$H_c(U_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{j_!} H_c(\Delta_{\leqslant \ell} \boldsymbol{X}^m) \xrightarrow{\rho_K} H(K)\,. \tag{$\diamond$}$$

Pour $\mathfrak{p}$ et K donnés, notons $\overline{U}_{\mathfrak{p}}$ l'adhérence de $U_{\mathfrak{p}}$ dans $\Delta_{\leqslant \ell} \boldsymbol{X}^m$, puis

$$\delta U_{\mathfrak{p}} := \overline{U}_{\mathfrak{p}} \smallsetminus U_{\mathfrak{p}} \quad \text{et} \quad K_{\mathfrak{p}} := K \cap \overline{U}_{\mathfrak{p}}\,.$$



Les triplets d'espaces $(U_{\mathfrak{p}} \subseteq \overline{U}_{\mathfrak{p}} \supseteq \delta U_{\mathfrak{p}})$ et $(\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}^\ell \supseteq \Delta^\ell_{\leqslant \ell-1})$ sont homéomorphes et l'annulation de ($\diamond$) résultera du lemme suivant qui généralise quelque peu le théorème 3.1.1-(b).

⊩ *Lemme. Soit $\boldsymbol{X}$ un espace i-acyclique. Pour tout compact $J \subseteq \boldsymbol{X}^\ell$, le morphisme de restriction*

$$H_c(\boldsymbol{X}^\ell) \to H_c((\Delta_{\leqslant \ell-1} \boldsymbol{X}^\ell) \cup J) \tag{$\ddagger\ddagger_J$}$$

est nul. En particulier, le prolongement par zéro $H_c(\boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{X}) \smallsetminus J) \to H_c(\boldsymbol{X}^\ell)$ est surjectif.

Preuve du lemme. On procède comme dans la démonstration de 3.1.1. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} f_2^{-1}(\boldsymbol{F}_{\ell-1}(\boldsymbol{X})) & \hookrightarrow & \big((\Delta_{\leqslant \ell-1} \boldsymbol{X}^\ell) \cup J\big) & \xhookrightarrow{f} & \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}^{\ell-1} = \boldsymbol{X}^\ell \\ & \searrow^{f_2'} & & \searrow^{f_2} & \downarrow p_2 \\ & & \boldsymbol{F}_{\ell-1}(\boldsymbol{X}) & \xhookrightarrow{j} & \boldsymbol{X}^{\ell-1} \end{array}$$

où f est l'inclusion (fermée) et j est l'inclusion (ouverte). La restriction f_2' de $f_2 := p_2 \circ f$ est propre puisque si $L \subseteq \boldsymbol{F}_{\ell-1}(\boldsymbol{X})$ est compact, on a

$$f_2^{-1}(L) = \big(p_2^{-1}(L) \cap \Delta_{\ell-1} \boldsymbol{X}^\ell\big) \cup \big(p_2^{-1}(L) \cap J\big)$$

où $p_2^{-1}(L) \cap \Delta_{\ell-1} \boldsymbol{X}^\ell$ est compact puisque la restriction de p_2 à $\Delta_{\ell-1} \boldsymbol{X}^\ell$ est un revêtement fini au-dessus de $\boldsymbol{F}_{\ell-1}(\boldsymbol{X})$ (cf. loc.cit.). L'annulation de ($\ddagger\ddagger_J$) résulte alors d'appliquer 1.3.1-(d), exactement comme dans 3.1.1. ◫

Dans la situation présente, ce lemme (avec $J := K_{\mathfrak{p}}$) nous dit que le morphisme de prolongement par zéro

$$H_c(U_{\mathfrak{p}} \smallsetminus K) \twoheadrightarrow H_c(\overline{U}_{\mathfrak{p}})$$

est surjectif. Une classe de cohomologie $[\alpha] \in H_c(U_{\mathfrak{p}})$ est donc représentée par une cocycle d'Alexander-Spanier $\alpha \in \underline{\underline{\mathcal{A}}}(U_{\mathfrak{p}})$ dont le support $|\alpha|$ est compact dans $U_{\mathfrak{p}} \smallsetminus K$. Comme cette partie est ouverte dans $\Delta_{\leqslant \ell} \boldsymbol{X}^m$, le cocycle α représente aussi l'image $j_![\alpha]$ de $[\alpha]$ dans $H_c(\Delta_{\leqslant \ell} \boldsymbol{X}^m)$. Or, on a $|\alpha| \cap K = \emptyset$ et donc $\rho_K(j_![\alpha]) = 0$. L'annulation des morphismes ($\diamond$) est ainsi établie et l'espace $\Delta_{\leqslant \ell} \boldsymbol{X}^m$ est bien i-acyclique. □

13.2. Variétés toriques affines

⊢ *On suppose le corps k de caractéristique nulle.*

a) *Si $\boldsymbol{G}$ un groupe fini agissant sur un espace i-acyclique $\boldsymbol{X}$, l'espace des orbites $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}$ est i-acyclique.*

b) *Une variété torique affine U_σ associée à un cône simplicial σ est i-acyclique.*

Démonstration. (a) Résulte aussitôt des égalités $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}) = H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})^{\boldsymbol{G}}$ et $H(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}) = H(\boldsymbol{X})^{\boldsymbol{G}}$ et de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}) & = & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})^{\boldsymbol{G}} & \hookrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \\ \downarrow & & & & \downarrow 0 \\ H(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}) & = & H(\boldsymbol{X})^{\boldsymbol{G}} & \hookrightarrow & H(\boldsymbol{X}) \end{array}$$

(b) On a $U_\sigma = \mathbb{A}_n(\mathbb{C})^{\boldsymbol{G}} \times (\mathbb{C}^*)^m$, où $\boldsymbol{G}$ est un groupe abélien fini agissant sur l'espace affine complexe $\mathbb{A}_n(\mathbb{C})$ (*cf.* [17], §2.1, p. 29 et §2.2, p. 34). □

13.3. Groupes de Lie non-compacts

⊢ *Tout groupe de Lie réel connexe non compact est i-acyclique.*

Démonstration. Comme un groupe de Lie $\boldsymbol{G}$ est toujours une variété différentielle orientable, il revient au même de montrer que $\boldsymbol{G}$ est $\cup$-acyclique (1.2.4-(c). Pour cela, on remarque que l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \Delta_{\boldsymbol{G}} \times \boldsymbol{G} &\to \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G} \\ (x, x)g &\mapsto (x, xg) \end{aligned}$$

est bien un homéomorphisme échangeant les plongements fermés

$$\Delta_{\boldsymbol{G}} \times \{e\} \subseteq \Delta_{\boldsymbol{G}} \times \boldsymbol{G}, \quad \text{et} \quad \Delta_{\boldsymbol{G}} \subseteq \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G}$$

Le morphisme de restriction à la diagonale s'identifie alors par Künneth au morphisme

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\boldsymbol{G}}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{G}) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\boldsymbol{G}}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\{e\}) \\ \omega \otimes \varpi \qquad \mapsto \qquad \omega \otimes \varpi\big|_e \end{array}$$

clairement nul lorsque $\boldsymbol{G}$ n'est pas compact. □

13.4. Ouverts i-acycliques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

⊢ *Si* $\operatorname{car} k \neq 2$*, tout ouvert de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est i-acyclique.*

Démonstration. Résulte de ce que $H^i(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}); k) = 0$ pour tout $i < n$. □

13.5. Ouverts i-acycliques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$

⊢ *Soit $\boldsymbol{U}$ un ouvert de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ dont le complémentaire contient une hypersurface complexe Z.*

a) *Si $\mathrm{car}(k) = 0$, l'espace $\boldsymbol{U}$ est i-acyclique.*

b) *Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, l'espace $\boldsymbol{U}$ est i-acyclique si $n = 1 \bmod 2$, ou bien si $n = 0 \bmod 2$ et si les degrés des composantes irréductibles de Z sont premiers à p.*

Démonstration. Par 1.2.4-(d), l'assertion résulte aussitôt du cas où l'ouvert est $U := \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \smallsetminus Z$. L'ouvert U est alors une variété complexe *affine* lisse de dimension n. D'après un théorème de Hamm (*cf.* [11] th. (6.8) p. 26), il a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini de dimension réelle n. Il s'ensuit que les groupes d'homologie $H_i(\boldsymbol{X}; A)$ sont nuls, pour $i > n$ et tout anneau A, et de même en cohomologie. Comme U est non singulière et orientable, on dispose de la dualité de Poincaré-Lefschetz $H_i(U; A) \simeq H_{\mathrm{c}}^{2n-i}(U; A)$, et donc $H_{\mathrm{c}}^i(U; A) = 0$ pour tout $i < n$. Par conséquent, on a à priori

$$\big(\epsilon_{U,i} : H_{\mathrm{c}}^i(U; A) \to H^i(U; A)\big) = 0\,, \quad \forall i \neq n\,,$$

et la preuve de la proposition se réduit à montrer l'annulation de $\epsilon_{U,n}$.

Notons $j : U \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ l'inclusion ensembliste.

Le morphisme $\epsilon_{U,n}$ se factorise à travers $H^n(\mathbb{P}_n)$ suivant les morphismes

$$H_{\mathrm{c}}^n(U; A) \xrightarrow{j_!} H^n(\mathbb{P}_n; A) \xrightarrow{j^*} H^n(U; A)$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\epsilon_{U,n}}$$

où $j_!$ désigne le prolongement par zéro et j^* la restriction. On a aussitôt deux cas à considérer suivant la parité de n.

$n = 1 \bmod 2$. On a $H^n(\mathbb{P}_n; A) = 0$ et donc $\epsilon_{U,n} = 0$. La proposition est alors prouvée et ce, quel que soit l'anneau de coefficients A.

$n = 0 \bmod 2$. On a $H(\mathbb{P}_n; A) = A$. Dans ce cas, on a intérêt à reprendre notre convention et considérer que l'anneau de coefficients A est un corps, auquel cas on a l'équivalence

$$(\epsilon_{U,n} = 0) \iff \begin{pmatrix} \text{le morphisme de restriction} \\ \rho_n : H^n(\mathbb{P}_n) \to H^n(Z) \\ \text{est injectif} \end{pmatrix} \qquad (\ddagger)$$

En effet, comme $H^n(\mathbb{P}_n)$ est une droite vectorielle, l'annulation de $\epsilon_{U,n}$ équivaut au fait que soit $j_!$, soit j^*, est nul. Or, la dualité de Poincaré échange ces morphismes et il sont tous les deux nuls ou non nuls. Ainsi, l'annulation de $\epsilon_{U,n}$ équivaux à l'annulation de $j_!$ et donc à l'injectivité de ρ_n, par la suite exacte longue de cohomologies.

$$\cdots \longrightarrow H_{\mathrm{c}}^n(U) \xrightarrow{j_!} H^n(\mathbb{P}_n) \xrightarrow{\rho_n} H^n(Z) \longrightarrow \cdots$$

Notons L l'opérateur sur $H(\mathbb{P}_n)$ et $H(Z)$ de multiplication par la classe fondamentale $\omega \in H^2(\mathbb{P}_n)$ de $\mathbb{P}_1 \subseteq \mathbb{P}_n$, et considérons le diagramme commutatif suivant où la deuxième ligne est la suite exacte de cohomologies

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & H^n(\mathbb{P}_n) & \xrightarrow{\rho_n} & H^n(Z) & & \\ & & & & {\scriptstyle L^{(n-2)/2}}\downarrow{\scriptstyle \simeq} & \oplus & \downarrow{\scriptstyle L^{(n-2)/2}} & & \\ \cdots H_{\mathrm{c}}^{2n-2}(U) & \xrightarrow{j_!} & H^{2n-2}(\mathbb{P}_n) & \xrightarrow{\rho_{2n-2}} & H^{2n-2}(Z) & \xrightarrow{c} & H_{\mathrm{c}}^{2n-1}(U) \cdots & & \end{array} \tag{‡‡}$$

Nous avons maintenant besoin de plus de renseignements sur le morphisme de liaison c. Pour cela, on commence par remarquer que l'on peut supposer Z *irréductible*. En effet, si Z' est une composante irréductible de Z, l'ouvert $U = \mathbb{P}_n \smallsetminus Z$ est contenu dans l'ouvert $U' = \mathbb{P}_n \smallsetminus Z'$ et il est donc i-acyclique si U' l'est (1.2.4-d).

Supposons donc que $Z = V(f)$ est irréductible et, compte tenu des hypothèses, que $\deg f$ n'est pas multiple de la caractéristique du corps de coefficients. L'espace vectoriel $H^{2n-2}(Z)$ est alors de dimension 1 et comme

$$H_{\mathrm{c}}^{2n-1}(U;\mathbb{Z}) = H_1(U;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(\deg f) \tag{$\star$}$$

(*cf.* [11] chap. 4, prop. 1.3, p. 102), on a $H_{\mathrm{c}}^{2n-1}(U) = H_1(U) = 0$. Ces données reportées sur (‡‡) assurent que ρ_{n-2} est surjective, et donc injective aussi. L'injectivité de ρ_n découle alors de la commutativité du même diagramme.□

13.5.1. Remarque. L'hypothèse dans la proposition 13.5 concernant la caractéristique du corps de coefficients de la cohomologie est optimale. En effet, si $Z = V(f) \subseteq \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ avec f irréductible homogène de degré p, on a pour $U := \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \smallsetminus V(f)$ d'après ($\star$) :

$$H_{\mathrm{c}}^3(U;\mathbb{F}_p) \simeq H_1(U;\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p\,,$$

auquel cas, la suite exacte longue de cohomologie devient

$$H^2(\mathbb{P}_2;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\rho_2} (H^2(V(f);\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p) \xrightarrow{c} (H^3(U;\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p) \to 0\,,$$

le morphisme c est bijectif, et alors nécessairement $\rho_2 = 0$.

On en déduit la surjectivité de $j_! : H_{\mathrm{c}}^2(U;\mathbb{F}_p) \to H_{\mathrm{c}}^2(\mathbb{P}_2;\mathbb{F}_p)$ et, par dualité, l'injectivité de $j^* : H^2(\mathbb{P}_2;\mathbb{F}_p) \to H^2(U;\mathbb{F}_p)$. À partir de là, la non nullité de $\epsilon_{U;2} = j^* \circ j_!$ découle de ce que $H^2(\mathbb{P}_2(\mathbb{C});\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$. L'ouvert U n'est donc pas i-acyclique pour la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{F}_p$.

13.5.2. Remarque. Dans le cas où la proposition 13.5 intéresse la cohomologie à coefficients dans un corps de caractéristique nulle, le fait que $H_!(U)$ soit concentrée en dimension moitié n, peut aussi être justifié en invoquant le théorème de comparaison de Grothendieck entre la cohomologie des formes différentielles holomorphes (dont le degré est à priori majoré par n) et la cohomologie du faisceau constant.

Dans le même ordre d'idées, si l'on se restreint au cas où l'hypersurface est supposée non-singulière, l'injectivité de ρ_n (et donc la i-acyclicité de U) admet aussi une justification via le théorème de Lefschetz vache. En effet, notons L l'opérateur de multiplication par la classe génératrice $\omega \in H^2(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$ et considérons, pour n pair, le diagramme commutatif ci-contre.

$$\begin{array}{ccc} H_c^{n-2}(U) & & \\ \downarrow{\scriptstyle j_!} & & \\ H^{n-2}(\mathbb{P}_n) & \xrightarrow[\sim]{L} & H^n(\mathbb{P}_n) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_{n-2}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_n} \\ H^{n-2}(Z) & \xrightarrow{L} & H^n(Z) \end{array}$$

L'injectivité de $\rho_n : H^n(\mathbb{P}_n) \to H^n(Z)$ découle alors par une chasse au diagramme élémentaire de ce que :

- $L : H^{n-2}(\mathbb{P}_n) \to H^n(\mathbb{P}_n)$ est trivialement bijectif,
- $L : H^{(n-1)-1}(Z) \to H^{(n-1)+1}(Z)$ est bijectif d'après le théorème vache de Lefschetz.
- $\rho_{n-2} : H^{n-2}(\mathbb{P}_n) \to H^{n-2}(Z)$ est injectif puisque $H_c^{n-2}(U) = 0$ en raison de précisément de l'affinité de U.

13.6. Ouverts non i-acycliques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$

⊢ *Un ouvert de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ dont le complémentaire est contenu dans un fermé $\boldsymbol{F}$ algébrique complexe (ou réel) et tel que $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{F}) < n$, n'est pas i-acyclique.*

Démonstration. Un tel ouvert contient le complémentaire $\boldsymbol{U}$ d'un fermé algébrique $\boldsymbol{Y}$ de petite dimension. Il suffira donc, d'après 1.2.4-(d), de ne considérer que ce cas. Des suites longues de cohomologie, on retire les sous-suites

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\boldsymbol{Y}) \to\ & H_c^n(\boldsymbol{U}) \to H^n(\mathbb{P}_n) \to\ \ H^n(\boldsymbol{Y}) = 0 \\ 0 = H^n_{\boldsymbol{Y}}(\mathbb{P}_n) \to\ & H^n(\mathbb{P}_n) \to\ H^n(\boldsymbol{U}) \to H^{n+1}_{\boldsymbol{Y}}(\mathbb{P}_n) \end{aligned}$$

où $H^n(\boldsymbol{Y}) = 0$ puisque $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{Y}) < n$, et $H^n_{\boldsymbol{Z}}(\mathbb{P}_n) = H^n(\boldsymbol{Y})^\vee = 0$ ([46]). □

13.7. Courbes algébriques i-acycliques

⊢ *Une courbe algébrique complexe irréductible $\boldsymbol{C}$ qui est i-acyclique est rationnellement lisse. Si de plus $\boldsymbol{C}$ est affine, elle est homéomorphe à un ouvert algébrique de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$, et tout voisinage ouvert $V \ni x$, le morphisme $\alpha_x : H_x(\boldsymbol{C}) \to H(\boldsymbol{C})$ se factorise à travers $H_c(\boldsymbol{C})$ de sorte que si $\boldsymbol{C}$ est supposée i-acyclique, on a $\alpha_x = 0$ d'où la suite exacte courte

$$0 \to H(\boldsymbol{C}) \to H(\boldsymbol{C} \smallsetminus \{x\}) \to H_x(\boldsymbol{C})[1] \to 0\,.$$

Il s'ensuit que lorsque $\boldsymbol{C}$ est complexe irréductible, on a $H^1_x(\boldsymbol{C}) = 0$ (‡) puisque $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{C} \smallsetminus \{x\}$ sont connexes. D'autre part, la singularité Σ de $\boldsymbol{C}$ est

[46] Par le formalisme de la dualité de Poincaré-Grothendieck-Verdier, cela résulte de ce que $\mathbb{D}^\bullet \mathbb{R}c_{Y!} c_{\boldsymbol{Y}}^! \underline{\underline{\mathbb{Z}}}_{\mathbb{P}} = \mathbb{R}c_{Y*} c_{\boldsymbol{Y}}^{-1} \underline{\underline{\mathbb{D}}}^\bullet_{\mathbb{P}} = \mathbb{R}c_{Y*} c_{\boldsymbol{Y}}^{-1} \underline{\underline{\mathbb{Z}}}_{\mathbb{P}}[2n]$ et du fait que $\underline{\underline{\mathbb{D}}}^\bullet_{\mathbb{P}} = \underline{\underline{\mathbb{Z}}}_{\mathbb{P}}[2n]$.

une partie fermée de dimension 0 donc discrète, et x admet des voisinages ouverts coniques $V = \hat{c}(\mathbb{L}(x, \boldsymbol{C}))$, où $\mathbb{L}(x, \boldsymbol{C})$, le « *lien de x dans $\boldsymbol{C}$* », est une réunion disjointe de cercles $\sqcup_{i=1}^{r} \mathbb{S}^1$. On a donc d'après (‡), l'égalité

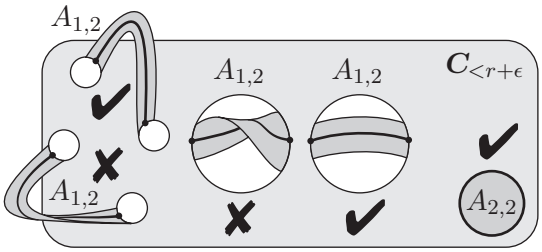
$$0 = H^1_x(\boldsymbol{C}) = H^1_x(\hat{c}(\mathbb{L}(x, \boldsymbol{C}))) = \overline{H}^0(\mathbb{L}(x, \boldsymbol{C})) = k^{r-1}\,,$$

où $\overline{H}$ désigne la cohomologie réduite. Par conséquent, $r = 1$ et x est rationnellement lisse dans $\boldsymbol{C}$.

Supposons maintenant que $\boldsymbol{C}$ est en plus affine. Quitte à remplacer les voisinages coniques $\hat{c}(\mathbb{S}^1)$ par des disques $\mathbb{D}^2$, nous pouvons supposer que $\boldsymbol{C}$ est une sous-variété fermée et différentiable de $\mathbb{A}_n(\mathbb{C})$ à laquelle nous pouvons appliquer la théorie de Morse ([47]). Soit donc $h : \boldsymbol{C} \to \mathbb{R}_+$ une fonction de Morse et notons $\boldsymbol{C}_{<r} := \{x \in \boldsymbol{C} \mid h(x) < r\}$, c'est un espace i-acyclique car ouvert de $\boldsymbol{C}$ qui l'est par hypothèse. Montrons que $\boldsymbol{C}_{<r}$ est homéomorphe à un ouvert algébrique de $\mathbb{C}$.

Pour r petit on a $\boldsymbol{C}_r \sim \mathbb{C}$. Supposons ensuite que pour une certaine valeur critique r, l'espace $\boldsymbol{C}_{<r}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}$ privé d'un ensemble fini de disques fermés disjoints homéomorphes à $\mathbb{D}^2$. Le bord $\boldsymbol{C}_r = \partial \boldsymbol{C}_{<r}$ est alors une réunion finie de cercles $\mathbb{S}^1$.

Par la théorie de Morse, $\boldsymbol{C}_{<r+\epsilon}$ est homéomorphe au récolement de $\boldsymbol{C}_{<r}$ et d'une anse $A_{1,2} = \overline{\mathbb{D}}^1 \times \overline{\mathbb{D}}^1$ de noyau de dimension 1, ou bien d'une anse $A_{2,2} = \overline{\mathbb{D}}^2 \times \overline{\mathbb{D}}^0$ de noyau de dimension 2. Comme $\boldsymbol{C}_{<r+\epsilon}$ est un ouvert d'une variété algébrique complexe, il est orientable, ce qui exclu certains recollements.



Pour une anse $A_{1,2}$, il y a deux recollements orientables possibles qui résultent du fait que le bord du cœur de $A_{1,2}$, à savoir $\overline{\mathbb{D}}^1 = [0, 1]$, possède deux composantes connexes $\{0, 1\}$. Ces composantes peuvent être collées tantôt sur deux composantes connexes de $\partial \boldsymbol{C}_{<r}$ tantôt sur la même. Dans le premier cas, $\boldsymbol{C}_{<r+\epsilon}$ serait homéomorphe à un tore $\boldsymbol{T} := \boldsymbol{S}^1 \times \boldsymbol{S}^1$ privé d'un ensemble fini de points $\boldsymbol{F}$, mais alors on aurait la suite exacte

$$0 \to \overline{H}^0(\boldsymbol{F}) \to H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{T} \smallsetminus \boldsymbol{F}) \to H^1(\boldsymbol{T}) \to 0\,,$$

et $H^1(\boldsymbol{T}) \hookrightarrow H^1(\boldsymbol{T} \smallsetminus \boldsymbol{F})$ par dualité. Donc $\dim H^1_!(\boldsymbol{C}_{r+\epsilon}) = \dim H^1(\boldsymbol{T}) = 2$, ce qui contredit la i-acyclicité de $\boldsymbol{C}_{<r+\epsilon}$. Dans le deuxième cas, un trou de $\boldsymbol{C}_r$ est partiellement comblé par l'anse et $\boldsymbol{C}_{<r+\epsilon}$ est bien comme annoncé.

[47] *Cf.* le théorème fondamental de structure dans [30], thm. 2.7, p. 47.

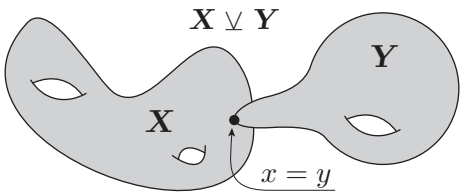
Pour une anse $A_{2,2}$. On recolle le disque $\mathbb{D}^2$ par son bord $\mathbb{S}^1$ sur le bord de $\boldsymbol{C}_{<r}$. Par connexité, il n'y a qu'une seule manière de le faire et c'est en comblant l'un des trous de $\boldsymbol{C}_{<r}$. L'espace $\boldsymbol{C}_{<r+\epsilon}$ est donc, de nouveau, homéomorphe à $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points. □

13.7.1. Remarque. Dans la preuve de 13.7, le tore $\boldsymbol{T} := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ privé d'un nombre fini non nul de points est une variété affine complexe non singulière $\boldsymbol{C}$ qui n'est pas i-acyclique. Les produits finis $\boldsymbol{P} := \prod_i \boldsymbol{C}_i$ de tels espaces sont des exemples de variété affine complexe non singulière non i-acycliques, contrairement à tout produit de la forme $\mathbb{C} \times \boldsymbol{P}$ (1.2.4).

13.8. Bouquet d'espaces i-acycliques

⊢ *Un bouquet d'espaces i-acycliques est i-acyclique. Et de même en remplaçant i-acyclique par (totalement) $\cup$-acyclique.*

Démonstration. Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ deux espaces i-acycliques. Notons $\boldsymbol{X} \veebar \boldsymbol{Y}$ le bouquet qui identifie $x \in \boldsymbol{X}$ et $y \in \boldsymbol{Y}$.



On considère le morphisme suivant de suites exactes de Mayer-Vietoris associées à la décomposition en parties fermées $\boldsymbol{X} \veebar \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{Y}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(x=y) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \veebar \boldsymbol{Y}) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \oplus H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}) & \longrightarrow \\
 & \| & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{\boldsymbol{X}\veebar\boldsymbol{Y}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{\boldsymbol{X}}} \quad \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{\boldsymbol{Y}}} & \\
\longrightarrow & H(x=y) & \longrightarrow & H(\boldsymbol{X} \veebar \boldsymbol{Y}) & \xrightarrow{\rho} & H(\boldsymbol{X}) \oplus H(\boldsymbol{Y}) & \longrightarrow
\end{array}$$

où $\rho : H^+(\boldsymbol{X} \veebar \boldsymbol{Y}) \to H^+(\boldsymbol{X}) \oplus H(\boldsymbol{Y})$ est clairement injectif. La nullité de $\epsilon_{\boldsymbol{X}\veebar\boldsymbol{Y}}$ résulte alors immédiatement de celles de $\epsilon_{\boldsymbol{X}}$ et $\epsilon_{\boldsymbol{Y}}$.

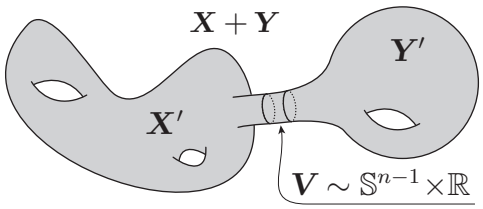
Le même raisonnement prouve que $\boldsymbol{X} \veebar \boldsymbol{Y}$ est (totalement) $\cup$-acyclique si les espaces $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ le sont. □

13.9. Sommes amalgamées d'espaces i-acycliques

⊢ *La somme amalgamée de variétés i-acycliques est i-acyclique si et seulement si au moins l'une des variétés est orientable.*

Démonstration. Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ deux variétés topologiques i-acycliques de dimension n. Notons $\boldsymbol{X}'$ et $\boldsymbol{Y}'$ des complémentaires d'un point dans $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ respectivement, ce sont des espaces i-acycliques d'après 1.2.4-(d). La somme amalgamée $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$ est la variété topologique obtenue en recollant homéomorphiquement $\boldsymbol{X}'$ et $\boldsymbol{Y}'$ le long du cylindre ouvert bordant $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ noté

$\boldsymbol{V}$ bordant respectivement $\boldsymbol{X}'$ et $\boldsymbol{Y}'$.



On considère alors les suites exactes longues de Mayer-Vietoris pour le recouvrement ouvert $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}'\cup\boldsymbol{Y}'$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V}) & \xrightarrow{\alpha_i} & H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}')\oplus H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}') & \xrightarrow{\beta_i} & H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) & \longrightarrow \\
 & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{\boldsymbol{V},i}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{\boldsymbol{X}',i}\oplus\epsilon_{\boldsymbol{Y}',i}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y},i}} & \\
\longleftarrow & H^i(\boldsymbol{V}) & \xleftarrow{\delta_i} & H^i(\boldsymbol{X}')\oplus H^i(\boldsymbol{Y}') & \xleftarrow{\gamma_i} & H^i(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) & \longleftarrow
\end{array} \qquad (\star)$$

où

$$\begin{cases} H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V}) = k(1)\otimes\big(k(0)\oplus k(n-1)\big) = k(1)\oplus k(n)\,, \\ H^i(\boldsymbol{V}) = k(0)\oplus k(n-1)\,. \end{cases}$$

Cas $\boldsymbol{i\neq n-1}$. Le morphisme β_i est surjectif et γ_i est injectif, soit parce que $i<n$ auquel cas $H^{i-1}(\boldsymbol{V})=0$, soit parce que $i=n$ auquel cas les cohomologies $H^n(_)$ sont nulles. On considère alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}')\oplus H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}') & \xrightarrow{\beta_i}\!\!\!\!\rightarrow & H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y},i}} & & \\
H^{i-1}(\boldsymbol{V}) & \longrightarrow & H^i(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) & \xhookrightarrow{\gamma_i} & H^i(\boldsymbol{X}')\oplus H^i(\boldsymbol{Y}')
\end{array} \qquad (*)$$

où les lignes sont exactes. On y voit que

$$\gamma_i\circ\epsilon_{\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y},i}\circ\beta_i = \epsilon_{\boldsymbol{X}',i}\oplus\epsilon_{\boldsymbol{Y}',i} = 0\,,$$

et nous concluons, indépendamment de l'orientabilité de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$, que

$$\epsilon_{\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y},i}=0\,,\quad \forall i\neq n-1\,.$$

Cas $\boldsymbol{i=n-1}$. La suite de Mayer-Vietoris en degré n est

$$\longrightarrow\big(H^n_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V})=k\big)\xrightarrow{\alpha_n}H^n_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}')\oplus H^n_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}')\longrightarrow H^n_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\to\mathbf{0}\,. \qquad (\ddagger)$$

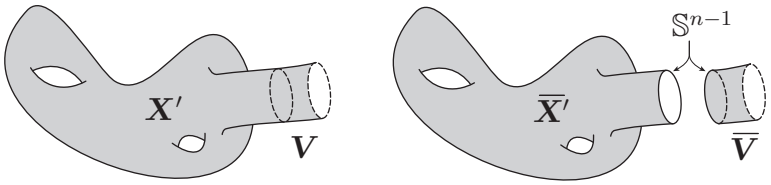
montre que α_n est injective pour peu que $\boldsymbol{X}$ ou $\boldsymbol{Y}$ soit orientable. Dans ces cas, β_{n-1} sera surjective et le diagramme $(*)$ pour $i=n-1$ fournit toujours l'annulation $\epsilon_{\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y},n-1}=0$ puisque γ_{n-1} est injective. Ceci termine la preuve de l'un des sens de la proposition.

Réciproquement, ni $\boldsymbol{X}$ ni $\boldsymbol{Y}$ ne sont orientables, ce qui équivaut à dire que ni $\boldsymbol{X}'$ ni $\boldsymbol{Y}'$ ne le sont. Nous allons nous intéresser à des suites longues de

cohomologies associées à la décomposition ouvert/fermé

$$\boldsymbol{X'} = \boldsymbol{V} \sqcup (\boldsymbol{X'} \smallsetminus \boldsymbol{V})$$

où $\boldsymbol{X'} \smallsetminus \boldsymbol{V}$ est clairement est une variété à bord $\mathbb{S}^{n-1}$ et d'intérieur homéomorphe à $\boldsymbol{X'}$, raison pour laquelle on la notera $\overline{\boldsymbol{X'}}$. Enfin, l'adhérence de $\boldsymbol{V}$ dans $\boldsymbol{X'}$ qui sera notée $\overline{\boldsymbol{V}}$, est une variété à bord dont le bord $\mathbb{S}^{n-1}$ est aussi le bord de $\overline{\boldsymbol{X'}}$.



On a alors le diagramme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccc}
H_{\mathrm{c}}^{n-1}(\boldsymbol{X'}) & \xrightarrow{\text{rest}} & H_{\mathrm{c}}^{n-1}(\overline{\boldsymbol{X'}}) & \xrightarrow{c_{\boldsymbol{X}}} & (H_{\mathrm{c}}^{n}(\boldsymbol{V}) = k) & \longrightarrow & (H_{\mathrm{c}}^{n}(\boldsymbol{X'}) = 0) \\
\text{rest}\downarrow & & \text{rest}\downarrow & \text{(I)} & \text{id}\downarrow & & \text{rest}\downarrow \\
(H_{\mathrm{c}}^{n-1}(\overline{\boldsymbol{V}}) = 0) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow[\simeq]{c_{\boldsymbol{X}}} & (H_{\mathrm{c}}^{n}(\boldsymbol{V}) = k) & \longrightarrow & (H_{\mathrm{c}}^{n}(\overline{\boldsymbol{V}}) = 0)
\end{array}$$

On y constate que la classe fondamentale de $\boldsymbol{V}$ se relève bien en un classe $[\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{X}}] \in H_{\mathrm{c}}^{n-1}(\overline{\boldsymbol{X'}})$ et que cette classe se restreint sur la classe fondamentale $[\mathbb{S}]$ de $\mathbb{S}^{n-1}$, d'où le carré :

$$\begin{array}{ccc}
H_{\mathrm{c}}^{n-1}(\overline{\boldsymbol{X'}}) \ni [\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{X}}] & \xmapsto{c_{\boldsymbol{X}}} & [\boldsymbol{V}] \\
\text{rest}\downarrow & \text{(I)} & \| \\
H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \ni [\mathbb{S}] & \xmapsto{c_{\boldsymbol{X}}} & [\boldsymbol{V}]
\end{array}$$

Maintenant, en remarquant que $H_{\mathrm{c}}(\overline{\boldsymbol{X'}}) \xrightarrow{\text{rest}} H_{\mathrm{c}}(\mathbb{S}^{n-1})$ se factorise suivant

$$H_{\mathrm{c}}(\overline{\boldsymbol{X'}}) \xrightarrow{\epsilon_{\overline{\boldsymbol{X'}}}} H(\overline{\boldsymbol{X'}}) \xrightarrow{\text{rest}} H(\mathbb{S}^{n-1})\,,$$

on déduit que

$$\epsilon_{\overline{\boldsymbol{X'}}}([\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{X}}]) \neq 0\,. \qquad (**)$$

Ces observations s'appliquent telles quelles également à $\boldsymbol{Y}$ et conduisent aux mêmes conclusions où $\boldsymbol{Y}$ vient remplacer $\boldsymbol{X}$.

Considérons à présent la décomposition ouvert/fermé

$$\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{V} \sqcup (\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} \smallsetminus \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V} \sqcup (\overline{\boldsymbol{X'}} \sqcup \overline{\boldsymbol{Y'}})$$

et le morphisme de suites exactes de cohomologie

$$\begin{array}{ccccc} H_{\mathrm{c}}^{n-1}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}^{n-1}(\overline{\boldsymbol{X}'})\oplus H_{\mathrm{c}}^{n-1}(\overline{\boldsymbol{Y}'}) & \xrightarrow{c_{\boldsymbol{X}}+c_{\boldsymbol{Y}}} & (H_{\mathrm{c}}^{n}(\boldsymbol{V})=k) \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}}} & \mathbf{II} & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{\overline{\boldsymbol{X}'}}\oplus\epsilon_{\overline{\boldsymbol{Y}'}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{\boldsymbol{V}}} \\ H^{n-1}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) & \longrightarrow & H^{n-1}(\overline{\boldsymbol{X}'})\oplus H^{n-1}(\overline{\boldsymbol{Y}'}) & \xrightarrow{c_{\boldsymbol{X}}+c_{\boldsymbol{Y}}} & (H^{n}(\boldsymbol{V})=0) \end{array}$$

La classe $([\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{X}}],-[\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{Y}}])\in H_{\mathrm{c}}^{n-1}(\overline{\boldsymbol{X}'})\oplus H_{\mathrm{c}}^{n-1}(\overline{\boldsymbol{Y}'})$ appartient clairement au noyau de $c_{\boldsymbol{X}}\oplus c_{\boldsymbol{Y}}$ et survit au morphisme $\epsilon_{\overline{\boldsymbol{X}'}}\oplus\epsilon_{\overline{\boldsymbol{Y}'}}$ d'après $(**)$. La commutativité de (**II**) permet alors de conclure que $\epsilon_{\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}}\neq 0$ et donc que l'espace $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$ n'est pas i-acyclique. □

13.10. La bouteille de Klein épointée

Dans l'implication ($\cup$-acyclique) $\Rightarrow$ (i-acyclique) de l'assertion 1.2.4-(c), l'hypothèse d'orientabilité est indispensable. On donne ici un contre-exemple lorsque cette hypothèse fait défaut.

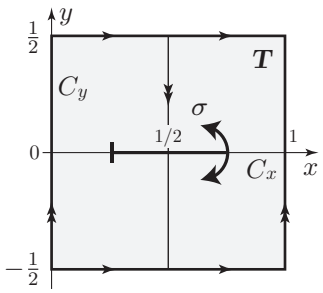
$\vdash$ *La bouteille de Klein épointée vérifie le théorème de scindage 3.1.1. Elle n'est ni i-acyclique ni totalement $\cup$-acyclique, mais elle est bien $\cup$-acyclique.*

Notons $\boldsymbol{T}$ le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. L'anneau de cohomologie $H(\boldsymbol{T})$ est engendré par les 1-cocycles dx et dy. Si nous notons $C_x:=\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\{0\}$ et $C_y:=\{0\}\times(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, on peut voir que

$$H^1_{C_x}(\boldsymbol{T})=\langle dy\rangle_k\subseteq H^1(\boldsymbol{T})\,,\quad H^1_{C_y}(\boldsymbol{T})=\langle dx\rangle_k\subseteq H^1(\boldsymbol{T})\,.$$

L'involution $\sigma:(x,y)\mapsto(x+1/2,-y)$, induit sur $H(\boldsymbol{T})$ l'action $\sigma:dx\mapsto dx$ et $\sigma:dy\mapsto -dy$ de sorte que l'on a

$$H(\boldsymbol{T})^{\langle\sigma\rangle}\simeq k(0)\oplus\langle dx\rangle_k(1)\,.$$



Comme la bouteille de Klein est la variété quotient $\boldsymbol{K}:=\boldsymbol{T}/\langle\sigma\rangle$, si $\nu:\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{K}$ est la surjection canonique, le morphisme $\nu^*:H(\boldsymbol{K})\to H(\boldsymbol{T})$ identifie $H(\boldsymbol{K})$ à $H(\boldsymbol{T})^{\langle\sigma\rangle}\simeq k(0)\oplus k(1)$.

On pose maintenant $\boldsymbol{X}:=\boldsymbol{K}\smallsetminus\mathrm{pt}$.

$\cup$-acyclicité de $\boldsymbol{X}$. L'examen des suites exactes longues

$$\begin{aligned}&\longrightarrow H^i_{\mathrm{pt}}(\boldsymbol{X})=k(2)\longrightarrow H^i(\boldsymbol{K})\xrightarrow{\rho_i}H^i(\boldsymbol{X})\longrightarrow\\&\longrightarrow H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})\xrightarrow{\iota_i}H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{K})\longrightarrow H^i_{\mathrm{c}}(\mathrm{pt})=k(0)\longrightarrow\end{aligned}\qquad(\diamond)$$

montre que l'on a

$$\begin{aligned}H(\boldsymbol{X})&=k(0)\oplus\big(\langle dx\rangle_k\oplus\langle dx\wedge dy\rangle_k\big)(1)=k(0)\oplus k(1)^2\,,\\H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})&=H^+(\boldsymbol{K})=\langle dx\rangle_k(1)=k(1)\,.\end{aligned}$$

et $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \wedge H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) = 0$. L'espace $\boldsymbol{X}$ est donc bien $\cup$-acyclique.

Non i-acyclicité de $\boldsymbol{X}$. Comme le cycle C_y est plongé (via ν) dans $\boldsymbol{X}$, l'espace $H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ est engendré par $dx \in H^1_{C_y}(\boldsymbol{X}) \subseteq H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ et le morphisme $\iota_1 : H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{K})$ est bijectif. D'autre part, il est clair par la première suite dans $(\diamond)$ que le morphisme $\rho_1 : H^1(\boldsymbol{K}) \hookrightarrow H^1(\boldsymbol{X})$ est injectif. On a donc

$$\begin{array}{ccccccc} & & H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow[\sim]{\iota_1} & H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{K}) & & \\ & & & & \| & & \\ 0 = H^1_{\mathrm{pt}}(\boldsymbol{K}) & \xrightarrow{0} & H^1(\boldsymbol{K}) & \xhookrightarrow{\rho_1} & H^1(\boldsymbol{X}) & \twoheadrightarrow & H^2_{\mathrm{pt}}(\boldsymbol{K}) = k(2) \end{array}$$

et $\epsilon_{\boldsymbol{X},1} = \rho_1 \circ \iota_1$ est non nul. L'espace $\boldsymbol{X}$ n'est donc pas i-acyclique.

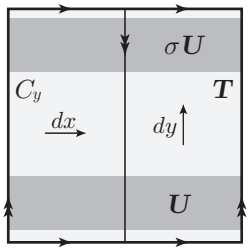
Non totale $\cup$-acyclicité de $\boldsymbol{X}$. Soit maintenant $\boldsymbol{U}$ un ouvert connexe de $\boldsymbol{X}$. Comme $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) = k(1)$, le cup-produit

$$\cup : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \times H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) \qquad (*)$$

est automatiquement nul si $\boldsymbol{U}$ n'est pas orientable car alors $H^2_c(\boldsymbol{U}) = 0$. Lorsque, par contre, $\boldsymbol{U}$ est orientable, la dualité de Poincaré s'applique et le cap produit $(*)$ est nul, si et seulement si, la restriction $H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{U})$ est nulle, donc si et seulement si $dx|_{\boldsymbol{U}} = 0$ dans $H(\boldsymbol{U})$.

On a deux cas possibles.

– Cas $C_y \subseteq \boldsymbol{U}$. La restriction du revêtement $\nu : \boldsymbol{T} \twoheadrightarrow \boldsymbol{K}$ à $\nu^{-1}(\boldsymbol{U})$ est triviale à deux nappes $\boldsymbol{U}_1$ et $\boldsymbol{U}_2 = \sigma\boldsymbol{U}_1$, car $\boldsymbol{U}$ orientable. On peut supposer $C_y \subseteq \boldsymbol{U}_1$ et alors $\sigma C_y \cap \boldsymbol{U}_1 = \emptyset$. On a donc $\boldsymbol{U} \simeq \boldsymbol{U}_1 \subseteq \boldsymbol{T} \smallsetminus C_y$, et $\boldsymbol{U}$ est i-acyclique puisque ouvert de $\boldsymbol{T} \smallsetminus C_y \sim \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, espace i-acyclique. Maintenant, comme $C_y \subseteq \boldsymbol{U}_1$, l'image de $H^1_{C_y}(\boldsymbol{X}) = H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H^1(\boldsymbol{U})$ est l'image de $H^1_{C_y}(\boldsymbol{U}) \to H^1(\boldsymbol{U})$, morphisme qui se factorise naturellement à travers $\epsilon_{\boldsymbol{U}} : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}) \to H(\boldsymbol{U})$, nul puisque $\boldsymbol{U}$ i-acyclique. Par conséquent, si $C_y \subseteq \boldsymbol{U}$ le cup produit $(*)$ est nul.



– Cas $C_y \not\subseteq \boldsymbol{U}$. Il existe des ouverts $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ tels que $(*)$ n'est pas nul. En effet, si $\boldsymbol{U}$ est l'ouvert indiqué par la figure ci-contre, on y voit que c'est un cylindre et que dx ne s'intègre pas en une fonction sur $\boldsymbol{U}$. Par conséquent, $dx \neq 0$ dans $H^1(\boldsymbol{U})$ et l'espace $\boldsymbol{X}$ n'est pas totalement $\cup$-acyclique.

Le théorème de scindage 3.1.1 pour $\boldsymbol{X}$. L'espace $\boldsymbol{X}$ vérifie les assertions (a) et (b) de ce théorème, et la raison vient de ce que $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ est concentrée en degré 1. En effet, dans de tels cas, on s'aperçoit rapidement que $H_{\mathrm{c}}(\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m)$ doit être concentré en degré ℓ, ce que l'on démontre par induction sur ℓ et prouve, en passant, les assertions en question.

Plus précisément, dans le cas des espaces $\boldsymbol{F}_m$, on s'intéresse au morphisme

$$H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant m}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m)) \sim H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m)^m \qquad (\ddagger)$$

où le terme de gauche est concentré en degré $m+1$ puisque $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) = k(1)^{\#}$ et que $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m) = k(m)^{\#}$, par hypothèse inductive. Le morphisme $(\ddagger)$ est alors nul puisque $H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant m}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m))k(m)^{\#}$, également par hypothèse inductive. On a donc la suite exacte courte

$$0 \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_m)[-1]^m \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1}) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}_m) \to 0\,,$$

et elle montre que $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{m+1})$ est concentré en degré $m+1$, et l'étape inductive peut être itérée.

Dans le cas des espaces $\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m$, on s'intéresse au morphisme

$$H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell-1}\boldsymbol{X}^m) \qquad (\ddagger\ddagger)$$

dont la preuve de 3.1.1 montre que son annulation résulte de l'annulation de

$$H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \otimes H_{\mathrm{c}}(\Delta^{m-1}_{\leqslant\ell-1}) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta^{m}_{\leqslant\ell-1})\,.$$

Cela résulte pour les mêmes raisons de degré que précédemment, sous l'hypothèse d'induction que $\Delta^{??}_{\leqslant\ell-1}$ est concentré en degré $\ell-1$. À partir de là, on a la suite exacte courte

$$0 \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell-1}\boldsymbol{X}^m)[-1] \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\ell}\boldsymbol{X}^m) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m) \to 0\,,$$

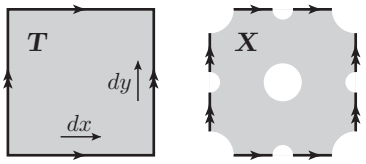
où le terme central est concentré en degré ℓ car somme directe d'espaces gradués isomorphes à $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\ell)$ (*cf.* 2.3.3). On conclut que $H_{\mathrm{c}}(\Delta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{X}^m)$ est concentré en degré ℓ, et l'étape inductive peut être itérée.

13.11. Revêtements non i-acycliques à base i-acyclique

$\vdash$ *Un revêtement fini de base i-acyclique peut ne pas être i-acyclique.*

Une manière élémentaire de produire des contre-exemples consiste à prendre une variété orientable $\boldsymbol{Y}$ non i-acyclique, donc telle que $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}) \wedge H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}) \neq 0$, et à faire agir librement sur $\boldsymbol{Y}$ un groupe fini $\boldsymbol{W}$ qui conserve l'orientation et tel que $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})^{\boldsymbol{W}} \wedge H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})^{\boldsymbol{W}} = 0$.

Le tore $\boldsymbol{T}$ de dimension 2 est le domaine carré ci-contre sur lequel on a identifié les côtés opposés. Cet espace privé de quatre points, noté $\boldsymbol{X}$, est représenté par la figure à droite. La suite exacte longue



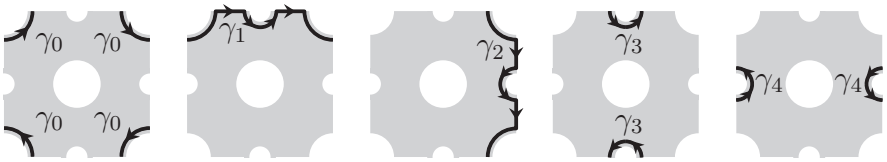
$$0 \to H^0_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{T}) \to H^0_{\mathrm{c}}(4) \to H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{T}) \to 0 \to H^2_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H^2_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{T}) \to 0\,, \qquad (\dagger)$$

montre que les 1-cocycles dx et dy dans $\boldsymbol{T}$ sont représentés par des 1-cocycles à support compact dans $\boldsymbol{X}$. La classe fondamentale de $\boldsymbol{X}$ se retrouve alors représentée comme le produit de ces deux cocycles. Il s'ensuit que $\boldsymbol{X}$ n'est pas $\cup$-acyclique (ni i-acyclique). La suite $(\dagger)$ révèle aussi l'apparition de trois

nouveaux 1-cocycles dans $\boldsymbol{X}$ provenant de $H^0_{\mathrm{c}}(4)$, nous avons donc

$$H^0_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) = \mathbf{0}\,, \qquad H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) = \mathbb{Q}^5\,, \qquad H^2_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) = \mathbb{Q}\,.$$

Voici une représentation de 1-cycles de $\boldsymbol{X}$ générant $H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})(= H_1(\boldsymbol{X}))$:



(‡)

Notons maintenant $\theta : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}$ l'isomorphisme d'ordre 4 qui se voit sur $(*)$ par une rotation horaire d'angle $\pi/4$. Il est clair que θ agit librement sur $\boldsymbol{X}$ et préserve son orientation. L'espace quotient $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{X}/\langle\theta\rangle$ est par conséquent une variété différentiable orientable et

$$H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{B}) = H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})^{\langle\theta\rangle}\,.$$

Or, l'action de θ sur les 1-cycles se lit facilement sur (‡). On y voit que

$$\theta(\gamma_0) = \gamma_0\,, \quad \begin{cases} \theta(\gamma_1) = \gamma_2 \\ \theta^2(\gamma_1) = \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_3 \\ \theta^3(\gamma_1) = \gamma_0 - \gamma_2 + \gamma_4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \theta(\gamma_3) = \gamma_4 \\ \theta(\gamma_4) = \gamma_3\,, \end{cases}$$

de sorte que $H^0_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{B}) = 0$, $H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{B}) = [\gamma_0]\mathbb{Q} \oplus [\gamma_3 + \gamma_4]\mathbb{Q}$, et $H^2_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{B}) = \mathbb{Q}$, où $[\gamma_0] \wedge [\gamma_3 + \gamma_4] = 0$ puisque l'intersection des cycles sous-jacents est vide. On conclut que $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{B}) \wedge H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{B}$ est $\cup$-acyclique et donc i-acyclique. (En fait, on peut vérifier que $\boldsymbol{B}$ est un cylindre ouvert épointé $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \smallsetminus \bullet$.)

Le revêtement $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{B}$ est bien à base i-acyclique alors que $\boldsymbol{X}$ ne l'est pas.

13.12. Fibrations non i-acycliques à fibre et base i-acycliques

⊢ *Une fibration à fibre et base i-acycliques peut ne pas être i-acyclique.*

Rappelons que la cohomologie de l'espace projectif complexe $\mathbb{P} := \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à l'anneau gradué $\mathbb{Q}[\boldsymbol{z}]/(\boldsymbol{z}^{n+1})$ où $\deg(\boldsymbol{z}) = 2$.

Le fibré tautologique $\mathcal{T}\mathbb{P}$ au-dessus de $\mathbb{P}$ est le sous-espace de $\mathbb{P}\times\mathbb{C}^{n+1}$ des couples $(\mathcal{D}, z)$ où $\mathcal{D}$ est une droite vectorielle de $\mathbb{C}^{n+1}$ et $z \in \mathcal{D}$. L'application $\pi : \mathcal{T}\mathbb{P} \to \mathbb{P}$, $(\mathcal{D}, z) \mapsto \mathcal{D}$, est une fibration vectorielle localement triviale de fibres isomorphes à $\mathbb{C}$. Notons $\mathbb{P} \subseteq \mathcal{T}\mathbb{P}$ sa section nulle. La classe de Thom $\Phi_{(\mathbb{P},\mathcal{T}\mathbb{P})} \in H^2_{\mathrm{c}}(\mathcal{T}\mathbb{P})$ de la section nulle se restreint à la classe génératrice de $H(\mathbb{P})$, autrement dit,

$$\Phi_{(\mathbb{P},\mathcal{T}\mathbb{P})}\big|_{\mathbb{P}} = \boldsymbol{z}$$

En fait, on a

$$H_{\mathrm{c}}(\mathcal{T}\mathbb{P}) = \mathbb{Q}[\Phi]/(\Phi^{n+2})$$

et la restriction à la section nulle s'identifie à l'isomorphisme canonique

$$\mathbb{Q}[\Phi]/(\Phi^{n+2}) \to \mathbb{Q}[\boldsymbol{z}]/(\boldsymbol{z}^{n+1})\,, \quad \Phi \mapsto \boldsymbol{z}$$

En particulier, la multiplication par $\Phi_{I\!P,\mathcal{T}}$ n'est pas une opération nulle dans $H_{\mathrm{c}}^{+}(\mathcal{T}I\!P)$ pour peu que $n \geqslant 1$.

Maintenant, si nous restreignons le fibré tautologique au complémentaire de deux points $I\!P' := I\!P \smallsetminus 2$, nous avons la suite exacte longue

$$\mathbf{0} \to H_{\mathrm{c}}^{2}(\mathcal{T}I\!P') \longrightarrow H_{\mathrm{c}}^{2}(\mathcal{T}I\!P) = \Phi \cdot \mathbb{C} \xrightarrow{\rho} H_{\mathrm{c}}^{2}(\mathbb{C})^2 \longrightarrow H_{\mathrm{c}}^{3}(\mathcal{T}I\!P') \to \mathbf{0}$$

où ρ est injective. On en déduit que $H_{\mathrm{c}}^{i}(\mathcal{T}I\!P) = 0$ pour $i \in \{0,1,2\}$, puis que $H_{\mathrm{c}}^{3}(\mathcal{T}I\!P) = \mathbb{Q}$, et enfin que

$$H_{\mathrm{c}}^{i}(\mathcal{T}I\!P') = H_{\mathrm{c}}^{i}(\mathcal{T}I\!P)\,, \quad \text{pour tout } i \geqslant 4. \tag{$*$}$$

Par conséquent, si $n \geqslant 4$ on a

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$\dim H_{\mathrm{c}}^{i}(\mathcal{T}I\!P')$	0	0	0	0	1	0	1	0	1	…
$\dim H_{\mathrm{c}}^{i}(I\!P')$	0	1	1	0	1	0	1	0	1	…

et si ω est non nulle de $H_{\mathrm{c}}^{4}(\mathcal{T}I\!P')$, on a $\omega \wedge \omega \neq 0$ dans $H_{\mathrm{c}}^{8}(\mathcal{T}I\!P')$ compte tenu de $(*)$ et du fait qu'il en est ainsi pour $H_{\mathrm{c}}(\mathcal{T}I\!P)$ (pour $n \geqslant 3$).

Considérons maintenant $I\!P'$ pour $n = 3$. Dans ce cas, on dispose sur $I\!P_3(\mathbb{C})$ de l'involution θ sans point fixes :

$$\theta(\langle a, b, c, d\rangle) = \langle b, -a, d, -e\rangle$$

dont on sait que son action sur $\boldsymbol{z}$ est $\theta\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{z}$, de même par ailleurs que l'action sur le générateur de $H_{\mathrm{c}}^{1}(I\!P')$. Il s'ensuit que l'on a

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\dim H_{\mathrm{c}}^{i}(\mathcal{T}I\!P')$	0	0	0	0	1	0	1	0	1
$\dim H_{\mathrm{c}}^{i}(I\!P')$	0	1	1	0	1	0	1		
$\dim H_{\mathrm{c}}^{i}(I\!P'/\langle\theta\rangle)$	0	0	0	0	1	0	0		
$\dim H^{i}(I\!P')$	1	0	1	0	1	1	0		
$\dim H^{i}(I\!P'/\langle\theta\rangle)$	0	0	1	0	0	0	0		

Et on voit bien que la variété $(I\!P_3(\mathbb{C}) \smallsetminus 2)/\langle\theta\rangle$ n'est pas $\cup$-acyclique.

14. Rappels sur les nombres de Stirling

Pour les notions de cette section de rappels, nous renvoyons à [23] pour plus de détails.

14.1. Factorielles croissantes et décroissantes

Pour $n \in \mathbb{N}$, les « *n-ièmes factorielles croissante et décroissante* » ([48]) d'un élément x d'un anneau, notées respectivement $x^{\overline{n}}$ et $x^{\underline{n}}$, sont définies par

$$\begin{cases} x^{\overline{0}} := 1\,, & \text{et} \quad x^{\overline{n}} := x(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-1))\,, \\ x^{\underline{0}} := 1\,, & \text{et} \quad x^{\underline{n}} := x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))\,. \end{cases}$$

On a clairement

$$x^{\underline{n+1}} = x^{\underline{n}}(x-n) \quad \text{et} \quad x^{\overline{n+1}} = x^{\overline{n}}(x+n)\,.$$

14.2. Nombres de Stirling de première espèce

Dans l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[X]$, le sous-module $\mathbb{Z}^n[X]$ des polynômes de degré majoré par n admet les trois bases suivantes

$$\mathcal{B} := \{x^0, x^1, \ldots, x^n\}\,, \quad \underline{\mathcal{B}} := \{x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, \ldots, x^{\underline{n}}\}\,, \quad \overline{\mathcal{B}} := \{x^{\overline{0}}, x^{\overline{1}}, \ldots, x^{\overline{n}}\}\,,$$

Le développement des polynômes $X^{\underline{n}}$ et $X^{\overline{n}}$ en somme de monômes donne les coefficients des matrices de passage de $\mathcal{B}$ vers les deux autres bases. On note ces matrices respectivement par $(\underline{s}(i,j))$ et $(\overline{s}(i,j))$. On a donc

$$X^{\underline{i}} = \sum\nolimits_{i\geqslant j\geqslant 0} \underline{s}(i,j)X^j \quad \text{et} \quad X^{\overline{i}} = \sum\nolimits_{i\geqslant j\geqslant 0} \overline{s}(i,j)X^j\,.$$

Les matrices $(\underline{s}(i,j))$ et $(\overline{s}(i,j))$ sont triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale. On voit clairement que $\overline{s}(i,j) \geqslant 0$ et que $(-1)^{i-j}\underline{s}(i,j) \geqslant 0$.

On étend la définition de $\underline{s}(i,j)$ et $\overline{s}(i,j)$ à tous les indices $i,j \in \mathbb{N}$, par la valeur 0 lorsque $j > i$. Ainsi, les sommations ci-dessous peuvent être indexées tout simplement indexées par '$j \geqslant 0$'.

14.2.1. Définition. Pour $i,j \in \mathbb{N}$, les entiers naturels $\overline{s}(i,j) \in \mathbb{N}$ sont « *les nombres de Stirling de première espèce (non signés)* », et les entiers relatifs $\underline{s}(i,j) \in \mathbb{Z}$ sont « *les nombres de Stirling de première espèce (signés)* ».

14.2.2. Lemme. *Les nombres de Stirling de première espèce vérifient les propriétés suivantes.*

a) *Pour tous $i,j \in \mathbb{N}$, on a $\underline{s}(i,j) = (-1)^{i-j}\,\overline{s}(i,j)$. En particulier, si D désigne la matrice diagonale* $\mathrm{diag}(1,-1,\ldots,(-1)^i)$, *on a*

$$(\underline{s}(i,j)) = D(\overline{s}(i,j))D^{-1}$$

b) *Pour tout $i \geqslant 0$, on a $\underline{s}(i,i) = 1$ et $\overline{s}(i,i) = 1$.*

c) *Pour tout $i \geqslant 1$, on a $\underline{s}(0,i) = \underline{s}(i,0) = 0$ et $\overline{s}(0,i) = \overline{s}(i,0) = 0$.*

d) *Pour tous $i,j \geqslant 1$, on a*

$$\begin{cases} \underline{s}(i,j) = \underline{s}(i-1,j-1) - (i-1)\,\underline{s}(i-1,j)\,, \\ \overline{s}(i,j) = \overline{s}(i-1,j-1) + (i-1)\,\overline{s}(i-1,j)\,. \end{cases}$$

[48] « *rising and falling factorials* » en anglais.

e) *Pour tout* $i \geqslant 1$, *on a* $\underline{s}(i,1) = (-1)^{i-1}\,(i-1)!$ *et* $\overline{s}(i,1) = (i-1)!$.

Démonstration. (a) Évident puisque $X^{\overline{i}} = (-1)^i(-X)^{\underline{i}}$. (b,c) Pour tout $i>0$, les polynômes $X^{\underline{i}}$ sont clairement de coefficient constant 0 et de coefficient principal 1. (d) Résulte de ce que pour $i \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} X^{\underline{i}} &= X^{\underline{i-1}}(X-(i-1)) = \Big(\sum\nolimits_{j\geqslant 0} \underline{s}(i-1,j)X^j\Big)(X-(i-1)) \\ &= \sum\nolimits_{j\geqslant 0} \underline{s}(i-1,j)X^{j+1} - \sum\nolimits_{j\geqslant 0} \underline{s}(i-1,j)(i-1)X^j = \sum_{j\geqslant 0} \underline{s}(i,j)X^j\,. \end{aligned}$$

(e) Pour $i>0$, on a

$$\big(\underline{s}(i,1) = (X-1)\cdots(X-(i-1))\big)\big|_{X=0} = (-1)(-2)\cdots(-i+1)\,.$$

Les égalités concernant les coefficients $\overline{s}(i,j)$ résultent ensuite de (a). □

14.3. Nombres de Stirling de deuxième espèce

Les coefficients des matrices $(\underline{S}(i,j)) := (\underline{s}(i,j))^{-1}$ et $(\overline{S}(i,j)) := (\overline{s}(i,j))^{-1}$ vérifient :

$$X^i = \sum\nolimits_{j\geqslant 0} \underline{S}(i,j)X^{\underline{j}} = \sum\nolimits_{j\geqslant 0} \overline{S}(i,j)X^{\overline{j}}\,, \qquad \forall\ i \geqslant 0.$$

Les matrices $(\underline{S}(i,j))$ et $(\overline{S}(i,j))$ sont triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale. On verra que $\underline{S}(i,j) \geqslant 0$ et que $(-1)^{i-j}\overline{S}(i,j) \geqslant 0$.

14.3.1. Définition. Pour $i,j \in \mathbb{N}$, les entiers naturels $\underline{S}(i,j) \in \mathbb{N}$ sont « *les nombres de Stirling de seconde espèce (non signés)* », et les entiers relatifs $\overline{S}(i,j) \in \mathbb{Z}$ sont « *les nombres de Stirling de seconde espèce (signés)* ».

14.3.2. Lemme. *Nombres de Stirling de deuxième espèce vérifient les propriétés suivantes*

a) *Pour tous* $i,j \in \mathbb{N}$, *on a* $\overline{S}(i,j) = (-1)^{i-j}\,\underline{S}(i,j)$. *En particulier, si* D *désigne la matrice diagonale* $\mathrm{diag}(1,-1,\ldots,(-1)^i)$, *on a*

$$(\overline{S}(i,j)) = D(\underline{S}(i,j))D^{-1}$$

b) *Pour tout* $i \geqslant 0$, *on a* $\underline{S}(i,i) = 1$ *et* $\overline{S}(i,i) = 1$.

c) *Pour tout* $i \geqslant 1$, *on a* $\underline{S}(0,i) = \underline{S}(i,0) = 0$ *et* $\overline{S}(0,i) = \overline{S}(i,0) = 0$.

d) *Pour tous* $i,j \geqslant 1$, *on a*

$$\begin{cases} \underline{S}(i,j) = \underline{S}(i-1,j-1) + j\,\underline{S}(i-1,j)\,, \\ \overline{S}(i,j) = \overline{S}(i-1,j-1) - j\,\overline{S}(i-1,j)\,. \end{cases}$$

e) *Pour tous* $i,j \in \mathbb{N}$, *on a* $\underline{S}(i,j) \geqslant 0$ *et* $(-1)^{i-j}\overline{S}(i,j) \geqslant 0$.

f) *Pour tout* $i \geqslant 0$, *on a* $\underline{S}(i,1) = 1$ *et* $\overline{S}(i,1) = (-1)^{i+1}$.

Démonstration. (a) Évident d'après 14.2.2-(a). (b,c) Évidents. (d) Résulte de ce que pour $j \geqslant 0$, on a $X\underline{^j}X = X\underline{^{j+1}} + jX\underline{^j}$ et alors

$$X^i = X^{i-1}X = \Big(\sum_{j\geqslant 0} \underline{S}(i-1,j)X\underline{^j}\Big)X$$
$$= \sum_{j\geqslant 0} \underline{S}(i-1,j)X\underline{^{j+1}} + \sum_{j\geqslant 0} \underline{S}(i-1,j)jX\underline{^j} = \sum_{j\geqslant 0} \underline{S}(i,j)X\underline{^j}\,.$$

(e) La positivité de $\underline{S}(i,j)$ résulte inductivement de (d) à partir de la positivité de $\underline{S}(0,j)$ et $\underline{S}(1,j)$, ce qui a été établi dans (b) et (c). (f) La question (b) fixe le cas $i = 1$, pour $i > 1$, on a $\underline{S}(i,1) = \underline{S}(i-1,0) + \underline{S}(i-1,1) = \underline{S}(i-1,1)$, d'après (c) et (d), et par induction, $\underline{S}(i,1) = \underline{S}(1,1) = 1$. □

14.3.3. Remarques

– *Valeurs initiales des nombres de Stirling.* Les nombres de Stirling ont été indexés par les couples $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Dans tous les cas, les coefficients de la colonne $(j = 0)$ et la ligne $(i = 0)$ sont nuls sauf pour $i = j = 0$ où ils valent 1. Tous les autres termes découlent de ces « *valeurs initiales* » via les quatre règles de récurrence (d) des lemmes 14.2.2 et 14.3.2.

– On remarquera aussi les égalités suivantes qui concernent les sous-matrices de nombres de Stirling d'indices non nuls.

$$\begin{cases} (\underline{S}(i,j)_{i,j\geqslant 1})^{-1} = (\underline{s}(i,j)_{i,j\geqslant 1}) \\ (\overline{S}(i,j)_{i,j\geqslant 1})^{-1} = (\overline{s}(i,j)_{i,j\geqslant 1}) \end{cases}$$

14.4. Nombres de Stirling non signés et cardinaux

Pour tous $i, j \geqslant 0 \in \mathbb{N}$, on définit :

- $\left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right]$:= cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble à i éléments qui sont produits d'exactement j cycles.
- $\left\{\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right\}$:= cardinal de l'ensemble $\mathfrak{P}_j(E)$ de partitions d'un ensemble E à i éléments en j parties non vides.

On remarquera l'égalité $\left\{\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right\} = 1$ qui dit qu'il y a une unique partition de l'ensemble vide en 0 parties non vides, et l'égalité $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = 1$ qui dit qu'il y a une unique permutation qui soit produit de 0 cycles.

14.4.1. Proposition. *Pour tous $i \geqslant j \geqslant 0 \in \mathbb{N}$, on a*

a) $\left\{\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right\} = \underline{S}(i,j)$. *Lorsque $i \geqslant 1$, on a* $\left\{\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right\} = \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}k^i$.

b) $\left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right] = \overline{s}(i,j) = (-1)^{i-j}\underline{s}(i,j)$.

Démonstration. On a bien $1 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$ et $0 = \begin{Bmatrix}i\\0\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}i\\0\end{bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\j\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\j\end{bmatrix}$ pour tous $i, j \neq 0$. Les familles des nombres en question ont donc bien les même valeurs initiales que les nombres de Stirling.

Pour $i \geqslant j \geqslant 1$, on trie les partitions de $\mathfrak{P}_j([\![1,i]\!])$ en deux parties suivant qu'elles contiennent ou non le singleton $\{i\}$. Les cardinaux de ces parties sont respectivement $\begin{Bmatrix}i-1\\j-1\end{Bmatrix}$ et $j\begin{Bmatrix}i-1\\j\end{Bmatrix}$. On a donc $\begin{Bmatrix}i\\j\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}i-1\\j-1\end{Bmatrix} + j\begin{Bmatrix}i-1\\j\end{Bmatrix}$, ce qui correspond à la récurrence 14.3.2-(d) pour les nombres $\underline{S}(i,j)$.

De même, en triant les permutations de $[\![1,i]\!]$, suivant que $\{i\}$ est fixé ou non, on obtient deux classes de cardinaux $\begin{bmatrix}i-1\\j-1\end{bmatrix}$ et $(i-1)\begin{bmatrix}i-1\\j\end{bmatrix}$, on a donc : $\begin{bmatrix}i\\j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}i-1\\j-1\end{bmatrix} + (i-1)\begin{bmatrix}i-1\\j\end{bmatrix}$, ce qui correspond à la récurrence 14.2.2-(d) pour les nombres $\overline{s}(i,j)$.

Enfin, on rappelle que la formule dans (a) provient du dénombrement des surjections de $[\![1,i]\!] \twoheadrightarrow [\![1,j]\!]$ (modulo les permutations de $[\![1,j]\!]$). Cet ensemble est le complémentaire F_* dans l'ensemble F de toutes les applications de $[\![1,i]\!] \to [\![1,j]\!]$ de l'ensemble des applications qui ne sont pas surjectives. Notons F_t le sous-ensemble ses applications de F qui n'atteignent pas la valeur $t \in [\![1,j]\!]$. Notons $F_{t_1,\dots t_k} := F_{t_1} \cap \cdots \cap F_{t_k}$. On a alors

$$|F_*| = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant j} |F_{t_1,\dots t_k}| = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k-1} \binom{j}{k} (j-k)^i \,,$$

et la formule découle aussitôt. □

Références bibliographiques

[1] V.I. Arnold. The cohomology ring of the colored braid group. Mat. Zametki 5 No 2 (1969), 227–231 (Russian). English transl. Mathematical Notes 5, no. 2, 138–140 (1969).

[2] V.I. Arnold. On some topological invariants of algebraic functions. Trans. Moscow Math. Soc. Vol. 21, 30–52 (1970).

[3] G.E. Andrews. *"The theory of partitions"*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2. Addison-Wesley, (1976).

[4] A. Borel et al. *"Intersection cohomology"*. Progress in Mathematics, vol. 50, Birkhäuser, (1984).

[5] R. Bott, L.W. Tu *"Differential forms in algebraic topology"* Graduate Texts in Mathematics, 82. Springer-Verlag, New York-Berlin (1982)

[6] G.E. Bredon. *"Sheaf theory"*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 170. Springer-Verlag, New York, (1997).

[7] T. Church. Homological stability for configuration spaces of manifolds. Invent. Math. 188, no. 2, 465–504 (2012).

[8] T. Church, B. Farb. Representation theory and homological stability. Adv. Math. 245, 250–314 (2013).

[9] T. Church, J.S. Ellenberg, B. Farb, R. Nagpal FI-modules over Noetherian rings. Geom. Topol. 18, no. 5, 2951–2984, (2014).

[10] T. Church, J.S. Ellenberg, B. Farb. FI-modules and stability for representations of symmetric groups. Duke Math. J. 164, no. 9, 1833–1910 (2015).

[11] A. Dimca. *"Singularities and topology of hypersurfaces"*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992.

[12] S. Eilenberg, J.C. Moore. Limits and spectral sequences. Topology 1, 1–23, (1962).

[13] E. Fadel, L. Neuwirth. Configuration spaces. Mathematica Scandinavica 10, pp. 111-118 (1962).

[14] B. Farb. Representation Stability. Contribution to Proceedings of the ICM 2014, Seoul. arXiv :1404.4065 (2014).

[15] Y. Félix, J.-C. Thomas. Rational Betti numbers of configuration spaces. Topology Appl. 102, no. 2, 139–149 (2000).

[16] R. Fox, L. Neuwirth. The braid groups. Math. Scand. 10, 119–126 (1962).

[17] W. Fulton. *"Introduction to toric varieties"*. Annals of Mathematical Studies 131, Princeton University Press (1993).

[18] W. Fulton, J. Harris. *"Representation theory. A first course"*. Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, (1991)

[19] W. Fulton, R. MacPherson. A Compactification of Configuration Spaces. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 139, No. 1, pp. 183-225 (1994).

[20] E. Getzler. Resolving mixed Hodge modules on configuration spaces. Duke Math. J. 96, no. 1, 175–203 (1999).

[21] R. Godement. *"Topologie algébrique et théorie des faisceaux"*. Troisième édition revue et corrigée. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

[22] A. Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku Math. J. (2) 9, 119–221 (1957).

[23] Graham-Knuth-Patashnik. Concrete mathematics. A foundation for computer science. Second edition. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, (1994).

[24] D.J. Hemmer. Stable decompositions for some symmetric group characters arising in braid group cohomology. J. Combin. Theory Ser. A 118, no. 3, 1136–1139 (2011).

[25] M. Kashiwara, P. Schapira. *"Sheaves on manifolds"*.Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 292. Springer-Verlag, Berlin, (1994).

[26] G.I. Lehrer. On the Poincaré series associated with Coxeter group actions on complements of hyperplanes. J. London Math. Soc. (2) 36, no. 2, 275–294, (1987).

[27] G.I. Lehrer, L. Solomon. On the action of the symmetric group on the cohomology of the complement of its reflecting hyperplanes. J. Algebra 104, no. 2, 410–424 (1986).

[28] I.G. Macdonald. The Poincaré polynomial of a symmetric product. Proc. Cambridge Philos. Soc. 58, pp. 563–568, (1962).

[29] I.G. Macdonald. *"Symmetric functions and Hall polynomials"*. Second edition. Oxford University Press, New York, (1995).

[30] L. Nicolaescu. *"An invitation to Morse theory"*. Second edition. Universitext. Springer, New York, (2011).

[31] D. Petersen. A spectral sequence for stratified spaces and configuration spaces of points. `https://arxiv.org/pdf/1603.01137v2`, (2016).

[32] O. Randal-Williams. Homological stability for unordered configuration spaces. (The Quarterly Journal of Mathematics) Q. J. Math. 64, no. 1, 303–326, (2013).

[33] S. Sam, A. Snowden. *Gl*-equivariant modules over polynomial rings in infinitely many variables. Trans. of the AMS. Volume 368, Number 2, February (2016), Pages 1097–1158. Article electronically published on June 17, (2015) at `http://dx.doi.org/10.1090/tran/6355`

[34] G. Segal. The topology of spaces of rational functions. Acta Mathematica 143, no. 1, 39–72, (1979).

[35] B. Totaro. Configuration spaces of algebraic varieties. Topology 35(4), 1057–1067 (1996).

[36] V.V. Vershinin. Homology of braid groups and their generalizations. Knot theory (Warsaw, 1995), 421–446, Banach Center Publ., 42, Polish Acad. Sci., Warsaw, (1998).

[37] C. Weibel. *"An introduction to homological algebra"*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, (1997).

Notations

Généralités sur les espaces i-acycliques

$(\underline{\underline{\mathcal{A}}}^\bullet(\boldsymbol{X};k), d_*)$, complexe des faisceaux de germes de cochaînes d'Alexander-Spanier de $\boldsymbol{X}$ 18
$\mathcal{K}(\boldsymbol{X})$ famille des parties compactes $K \subseteq \boldsymbol{X}$ 19
$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \ldots$, pseudovariétés 19
$\epsilon_{\boldsymbol{X}} : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{X})$, morphisme induit par l'inclusion $\Omega_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \subseteq \Omega(\boldsymbol{X})$ 20
$H_!(\boldsymbol{X}) := \mathrm{im}(\epsilon_{\boldsymbol{X}})$, cohomologie « *intérieure* » de $\boldsymbol{X}$ 20
$\delta^*_{\boldsymbol{X}} : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$, restriction à la diagonale 20
$\boldsymbol{X} \smallsetminus \boldsymbol{a}$ "complémentaire" dans $\boldsymbol{X}$ d'une partie finie $\boldsymbol{a}$ de cardinal a 22
$\phi_{\overline{\gamma}} : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\smallsetminus\overline{\gamma}(0)) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\smallsetminus\overline{\gamma}(1))$, action par monodromie le long du chemin $\overline{\gamma}$ . . 24

Espaces de configuration généralisés

$\Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m, \Delta^m_{?\ell}$, espace de configurations (ordonnées) généralisé 24
$\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ espace de configurations (ordonnées) classique, noté aussi $\Delta_m\boldsymbol{X}^m$. 25
$\boldsymbol{Z}^{[a]}$ intersection $\boldsymbol{Z} \cap (\boldsymbol{X}^{m-a}\times\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X}))$ 25
$\pi_a = \boldsymbol{X}^m \to \boldsymbol{X}^a$, projection sur les a dernières coordonnées 25
$p_a = \boldsymbol{X}^m \to \boldsymbol{X}^a$, projection sur les a premières coordonnées 25
« $\boldsymbol{X}$ *est de type fini* », lorsque $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ et $H(\boldsymbol{X})$ sont de dimension finie 27

$\mathfrak{P}_\ell(E)$ ensemble des partitions de l'ensemble E en ℓ parties non vides 27
$(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j)$ Si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(E)$, on pose $(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j) \Leftrightarrow_{\text{def}} (\exists\, I \in \mathfrak{p})$ t.q. $\{i,j\} \subseteq I$ 28
$[\![a,b]\!]$ (resp. $[\![a,b[\![$), entiers naturels m vérifiant $a \leqslant m \leqslant b$ (resp. $a \leqslant m < b$) 28
$\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{X})$ Si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(m)$, on a $\overline{x} \in \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{X}) \Leftrightarrow_{\text{def}} ((x_i = x_j) \Leftrightarrow (i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j))$ 28
$\dim_{\text{ch}}(\boldsymbol{X})$ dimension cohomologique de $\boldsymbol{X}$ 28
$(\underline{\underline{\Omega}}^\bullet_{\boldsymbol{X}}, d_\bullet) := \tau_{\leqslant d_{\boldsymbol{X}}}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}^\bullet(\boldsymbol{X};k), d_*)$, résolution c-molle d'un espace $\boldsymbol{X}$ de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$ 28

Théorèmes de scindage et complexes fondamentaux

$\bullet$ point d'un espace 31
$\boldsymbol{X}^\circ$ l'espace $\boldsymbol{X}$ privé d'un point $\bullet$ 31
$\boldsymbol{F}_m^{x_i=\bullet}(\boldsymbol{X})$ ensemble des $\overline{x} \in \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ avec $x_i = \bullet$ 32
$\boldsymbol{F}_m^{\bullet}(\boldsymbol{X})$ ensemble des $\overline{x} \in \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})$ avec l'un des x_i égal à $\bullet$ 32
$\mathcal{S}_m$ groupe des permutations de l'ensemble fini $\{1,2,\dots,m\}$ 32
$\mathcal{S}_m{:}\boldsymbol{X}^m$, $\mathcal{S}_m{:}H^i_{\text{c}}(\boldsymbol{Z})$, $\mathcal{S}_m{:}H^i(\boldsymbol{Z})$, ..., action de $\mathcal{S}_m$ sur $\boldsymbol{X}^m$ par permutation des coordonnées et actions induites, pour $\boldsymbol{Z}$ partie $\mathcal{S}_m$ stable de $\boldsymbol{X}^m$ ... 32
$\boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X})$ Si $\mathfrak{q} \in \mathfrak{P}(m), \overline{x} \in \boldsymbol{F}^{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{X}) \Leftrightarrow_{\text{def}} (\forall i \neq j)((i \underset{\mathfrak{q}}{\sim} j) \Rightarrow (x_i \neq x_j))$ 37

Cohomologie des espaces de configuration, cas i-acyclique

$\mathcal{P}(V) \in \mathbb{Z}[T]$, polynôme de Poincaré d'un espace vectoriel gradué V 39
$\mathcal{P}(\boldsymbol{X}), \mathcal{P}_{\text{c}}(\boldsymbol{X})$, polynômes de Poincaré de $H(\boldsymbol{X})$ et $H_{\text{c}}(\boldsymbol{X})$ respectivement 39
$\mathcal{P}_{\text{c}}(\boldsymbol{X} \smallsetminus a)$ Polynôme de Poincaré compact du complémentaire dans $\boldsymbol{X}$ d'une partie finie de cardinal a 39
$\boldsymbol{Q}^m_{\leqslant \ell} \in \mathbb{Z}[P,T]$, polynôme universel pour $\mathcal{P}_{\text{c}}(\Delta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{X}^m)$ 43

Représentations du groupe symétrique

$\lambda \vdash m$ *alias* pour: λ est une décomposition de m 44
$|\lambda|$ nombre décomposé par λ, donc $|\lambda| := \sum_i \lambda_i$ 44
$\ell(\lambda)$ nombre de termes (non nuls) d'une décomposition 44
$\mathcal{Y}_\ell(m) := \{\lambda \vdash m \mid \ell(\lambda) = \ell\}$, ... 44
$\tau(\lambda)$ tableau de Young standard associé à une décomposition λ 44
$\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\lambda_\ell}$, sous-groupe des permutations de $\mathcal{S}_m$ qui conservent les lignes du tableau $\tau(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)$ 44
$\mathcal{S}_\lambda := N_{\mathcal{S}_m}(\mathcal{P}_\lambda)$, normalisateur de $\mathcal{P}_\lambda$ dans $\mathcal{S}_m$ 44
$G_\lambda := \mathcal{S}_\lambda/\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{\boldsymbol{X}_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\boldsymbol{X}_r}$, si $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_\ell) = (d_1^{\boldsymbol{X}_1},\dots,d_r^{\boldsymbol{X}_r})$ 45
$\chi_{\text{c}}(\boldsymbol{Z};i)\,, \chi(\boldsymbol{Z};i)$, caractères de $\mathcal{S}_m$-module de $H^i_{\text{c}}(\boldsymbol{Z},k)$ et de $H^i(\boldsymbol{Z},k)$ 45
$\boldsymbol{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_{|\lambda|}} := \text{ind}_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_{|\lambda|}} \circ \text{Res}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_\ell}$, où $\mathcal{S}_\lambda$ agit à travers de la surjection $\nu_\lambda : \mathcal{S}_\lambda \twoheadrightarrow G_\lambda$ .. 46
$\boldsymbol{I}^m_\ell : k_{\text{c}}[\mathcal{S}_\ell] \to k_{\text{c}}[\mathcal{S}_m]$, opérateur sur les fonctions centrales 46
$\boldsymbol{I}(\sigma) := \boldsymbol{I}^{m_0}_{m_1} \circ \cdots \circ \boldsymbol{I}^{m_{t-1}}_{m_t} : k_{\text{c}}[\mathcal{S}_{m_t}] \to k_{\text{c}}[\mathcal{S}_{m_0}]$, opérateur d'inductions itérées .. 47
$\boldsymbol{\Theta}^m_\ell := (-1)^{m-\ell} \sum_{\sigma : m \searrow \ell} (-1)^{|\sigma|-1}\, \boldsymbol{I}(\sigma) : k_{\text{c}}[\mathcal{S}_\ell] \to k_{\text{c}}[\mathcal{S}_m]$, opérateur d'inductions itérées 47

Cohomologie des espaces de configuration, cas général

$p_m : \boldsymbol{F}_{m+1} \twoheadrightarrow \boldsymbol{F}_m$, projection sur les m premières coordonnées 49
$H^i_{\text{BM}}(\boldsymbol{M}) := H^{d_{\boldsymbol{M}}-i}_{\text{c}}(\boldsymbol{M};k)^\vee$, **co**homologie de Borel-Moore d'une pseudovariété $\boldsymbol{M}$ dimension $d_{\boldsymbol{M}}$ 49

$\langle _, _ \rangle_{\boldsymbol{M}}$ accouplement de la dualité de Poincaré sur la variété topologique orientée $\boldsymbol{M}$ 50
$\sigma_{\boldsymbol{M}}(f_{\mathfrak{a}})$ action de $f_{\mathfrak{a}!}$ sur la classe fondamentale de $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}$, *i.e.* $f_!([\boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}]) = \sigma_{\boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}}(f) \cdot [\boldsymbol{M}_{f(\mathfrak{a})}]$ 51
$p_{b!} : H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{b+a}(\boldsymbol{M}) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{M}))[-a\, d_{\boldsymbol{M}}]$, intégration sur les fibres 52
$\mathrm{sgn}(g)$ signature de $g \in \mathcal{S}_m$ 52
$\sigma_{\boldsymbol{M}^m}(g) := \mathrm{sgn}(g)^{\dim_{\boldsymbol{M}}}$, action de $g \in \mathcal{S}_m$ sur l'orientation de $\boldsymbol{M}^m$ 52
$(_)^\vee$ dualité vectorielle 52
$\boldsymbol{\sigma}_m$ la représentation par « *signature* » de $\mathcal{S}_m$ 53
$(\check{C}^p(\mathcal{U}, _), d)$, complexe de p-cochaînes simpliciales (non ordonnées) 54
$(\check{C}^p_<(\mathcal{U}, _), d)$, complexe de p-cochaînes (simpliciales) ordonnées 55
$(\check{C}^p_\varepsilon(\mathcal{U}, _), d)$, complexe de p-cochaînes (simpliciales) alternées 55
$\mathrm{sgn}(\alpha)$ signature d'une permutation α 55
$\varepsilon_p : (\check{C}^p_<(\mathcal{U}, _), d) \to (\check{C}^p_\varepsilon(\mathcal{U}, _), d)$, quasi-isomorphisme d'antisymétrisation 55
$U_{(i_0,\dots,1_p)}$ une copie de $U_{i_0,\dots,i_p}$ paramétrée par l'uplet $(i_0, \dots, i_p)$ 55
$\mathcal{G}_{U^m}$ faisceaux $\mathcal{S}_m$-équivariant sur U^m 56
$(\Omega^*_{\mathrm{c}}(U), d) := \Gamma(U; (\underline{\underline{\mathcal{A}}}^\bullet(\boldsymbol{X}; k), d_*))$, le complexe des cochaînes à support compact de $\mathcal{U}$ 58
$(\underline{\underline{\Omega}}_{\boldsymbol{M},\mathrm{c}}, d)$ complexe de cofaisceaux (flasques) des cochaînes à support compact sur $\boldsymbol{M}$ 58
$(\Omega^*_{\mathrm{BM}}(U), d_*) := ((\Omega^*_{\mathrm{c}}(U), d_*)^\vee)[-d_{\boldsymbol{M}}]$, le complexe des cochaînes de Borel-Moore sur $U \subseteq \boldsymbol{M}$ 58
$(\underline{\underline{\Omega}}_{\boldsymbol{M},\mathrm{BM}}, d_*)$ complexe de faisceaux (flasques) de germes de cochaînes de Borel-Moore de $\boldsymbol{M}$ 59
$\check{C}(\mathcal{U}^m)^*_{\mathrm{c},\bullet} := \big(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}^m; \underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{M},\mathrm{c}}(_)), \partial_\bullet, d_*\big)$, bicomplexe de chaînes de Čech à support compact de $\mathcal{U}^m$ 59
$\check{C}(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM}} := \big(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}^m; \underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{M},\mathrm{BM}}), \delta_\bullet, d_*\big)$, bicomplexe de cochaînes de Čech-Borel-Moore de $\mathcal{U}^m$ 60
$I\!F H^*_{\mathrm{BM}}(\mathcal{U}^m)$, $I\!F\, \mathbf{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)^{\bullet,*}_{\mathrm{BM}})$, filtrés par degrés de cochaînes de Čech des objets concernés 60
$I\!E_\sigma(\mathcal{U}^m) := I\!E(\mathcal{U}^m) \otimes \boldsymbol{\sigma}_m$, suite spectrale pour le complexe de faisceaux $\mathcal{S}_m$-équivariants $\underline{\underline{\Omega}}^*_{U^m,\mathrm{BM}} \otimes \boldsymbol{\sigma}_m$ 62
Ξ^m_{p+1} décomposition canonique de $H_{\mathrm{BM}}(U^m_{m-p,\dots,m})$ 62
$\mathcal{F}(p{+}1, m)$ ensemble des applications $f : [\![1,m]\!]$ strictement croissantes sur $[\![1,m{-}p[\![$ qui fixent $[\![m{-}p,m]\!]$ 62
$\gamma_m(\omega) = (-1)^{|\omega|m + \frac{m(m-1)}{2} d_{\boldsymbol{M}}}\, c_m(\omega)$, renormalisation du morphisme de liaison . 67
$\mathcal{F}^\bullet(p{+}2, m{+}1)$, ensemble des applications $f : [\![1,m{+}1]\!]$ strictement croissantes sur $[\![1,m{-}p[\![$ qui fixent $[\![m{-}p,m{+}1]\!]$ 75

Stabilité des familles de représentations

FI catégorie des ensembles ***F***inis et des applications ***I***njectives 78
$\mathrm{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])$, catégorie des ***FI***-modules 78
$\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \to V_{m+1}\}_m$, famille dénombrable représentant un ***FI***-module 79
$\phi_{m+b,m} : V_m \to V_{m+b}$, morphisme de transition de $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \to V_{m+1}\}$ 79

$\mathcal{V}_{\geqslant q}$ tronqué de $\mathcal{V}$ qui préserve les V_m pour $m \geqslant q$ et annule les autres. .. 80
$\mathcal{V}_{\leqslant q}$ tronqué de $\mathcal{V}$ qui préserve les V_m pour $m \leqslant q$ et annule les autres. .. 80
$\boldsymbol{a} := [\![1,a]\!]$ notation pour l'ensemble fini représenté par l'intervalle $[\![1,a]\!]$ 80
$\mathcal{M}(\boldsymbol{a})$ le foncteur représentable $(_) \rightsquigarrow \mathcal{A}[\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{FI}}(\boldsymbol{a}, _)]$ 80
$\langle \Sigma \rangle \subseteq V$ sous-$\boldsymbol{FI}$-module de V engendré par $\Sigma \subseteq \coprod_m V_m$ 81
$\mathcal{W} := \{\mathcal{S}_m : W_m\}_m$, famille de représentations de dimensions finies des groupes symétriques 82
$\chi(\mathcal{W}) := \{\chi_{\mathcal{S}_m}(W_m)\}_m$, famille des caractères associée à $\mathcal{W}$ 82
$\dim_k(\mathcal{W}) := \{\dim_k(W_m)\}_m$, famille des dimensions associée à $\mathcal{W}$ 82
$V(\lambda)_m$ la représentation irréductible de $\mathcal{S}_m$ correspondante à $\lambda[m]$ 83
$\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ partie entière par excès de $x \in \mathbb{R}$, *i.e.* $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$. Le nombre $\lceil m/\ell \rceil$ est le plus petit nombre de colonnes d'un diagramme de Young de taille m possédant ℓ lignes, on convient que $\lceil 0/0 \rceil = 0$ 83
$c(\lambda)_m$ multiplicité de $V(\lambda)_m$ dans V_m 83
$\mathrm{rg_s}(\mathcal{V})$ rang de stabilité de $\mathcal{V}$ 84
$\mathrm{rg_m}(\mathcal{V})$ rang de monotonie de $\mathcal{V}$ 84
$\mathrm{rg_{ms}}(\mathcal{V}) := \sup\{\mathrm{rg_m}(\mathcal{V}), \mathrm{rg_s}(\mathcal{V})\}$, rang (de monotonie et stabilité) de $\mathcal{V}$ 84
Règles de Littlewood-Richardson, règles de Pieri, règles de branchement, ... 86
$\mathcal{P}(\mathcal{V})$ poids de $\mathcal{V}$ 87
$\mathcal{W}^{(>t)}, \mathcal{W}^{(\leqslant t)}, \mathcal{W}^{(t)}$, scindés par le poids de $\mathcal{W}$ 88
$\mathcal{M}_a^{\boldsymbol{H}} : \mathrm{Mod}(k[H]) \to \mathrm{Mod}(k[\mathbf{FI}])$, ... 89
$\mathcal{M}_a := \mathcal{M}_a^{\mathcal{S}_a}$, *alias de notation* 89
$\boldsymbol{FB}$ catégorie des ensembles $\boldsymbol{F}$inis et des applications $\boldsymbol{B}$ijectives 90
$\mathcal{M}(\lambda) := \mathcal{M}_{|\lambda|}(V_\lambda)$, ... 91
$V(\lambda)_{m+1} := \mathcal{M}(\lambda)^{(\geqslant |\lambda|)} / \mathcal{M}(\lambda)^{(>|\lambda|)}$, on a $\mathcal{V}(\lambda) = \{\phi_m : V(\lambda)_m \to V(\lambda)_{m+1}\}_m$ 91
$\Phi_t := (_)_{\mathcal{S}_{m-t}} : \mathrm{Mod}(\mathcal{S}_m) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{S}_t)$, foncteur de $\mathcal{S}_{m-t}$-co-invariants 93
$\Phi_t(\mathcal{W})$ $k[\mathcal{S}_t][T]$-module gradué associé au $\boldsymbol{FI}$-module $\mathcal{W}$ 94
$\mathfrak{c}_\lambda(m) := \mathfrak{l}_\lambda(m) \cdot \mathfrak{a}_\lambda \cdot \mathfrak{b}_\lambda$, symétriseur de Young associé à $\lambda_{[m]}$ 94
$\text{deg-stab}_t(\mathcal{W})$, degré de stabilité en $t \in \mathbb{N}$ d'un $\boldsymbol{FI}$-module $\mathcal{W}$ 96
$\text{deg-inj}_t(\mathcal{W})$, degré d'injectivité en $t \in \mathbb{N}$ d'un $\boldsymbol{FI}$-module $\mathcal{W}$ 96
$\text{deg-stab}(\mathcal{W}) := \sup_{t\in\mathbb{N}}\{\text{deg-stab}_t(\mathcal{W})\}$, degré de stabilité d'un $\boldsymbol{FI}$-module $\mathcal{W}$ .. 96
$\mathrm{rg^e_m}(\mathcal{W})$, $\mathrm{rg^e_{ms}}(\mathcal{W})$, rangs étendus du $\boldsymbol{FI}$-module $\mathcal{W}$ 97
$\lambda \backslash n$ si $\lambda = (1^{\boldsymbol{x}_1}, 2^{\boldsymbol{x}_2}, \ldots) \vdash m$, on pose $\lambda\backslash n = (1^{\boldsymbol{x}_1+n-m}, 2^{\boldsymbol{x}_2}, \ldots)$ 99
$\underline{\lambda}$ Si $\lambda = (1^{\boldsymbol{x}_1}, 2^{\boldsymbol{x}_2}, 3^{\boldsymbol{x}_3}, \ldots)$, on pose $\underline{\lambda} = (1^0, 2^{\boldsymbol{x}_2}, 3^{\boldsymbol{x}_3}, \ldots)$ 100
$\mathcal{S}_L$ on a $L \subseteq [\![1,m]\!]$ et $\mathcal{S}_L := \mathrm{Fix}_{\mathcal{S}_m}([\![1,m]\!] \smallsetminus L)$ 104
L' pour $L \subseteq [\![1,m]\!]$, on pose $L' := L \coprod \{m+1\}$ 104
$\mathcal{T}(p{+}1, m)$ ensemble de tableau paramétrant $\mathcal{F}(p{+}1, m)$ 116
$\mathcal{T}^\bullet(p{+}1, m)$ ensemble de tableau paramétrant $\mathcal{F}^\bullet(p{+}1, m)$ 116
$(_)^\bullet : \mathcal{T}(p{+}1, m) \to \mathcal{T}^\bullet(p{+}2, m{+}1)$, application qui rajoute une boite isolée 116
$\mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})$ ensemble des tableaux à $(|\boldsymbol{I}|{+}b)$ boites dont la première colonne est $[\![1,b]\!]$ et dont $\boldsymbol{I}$ remplit les autres boites 116
$\mathfrak{p}(\tau)$ partition de $[\![1,b]\!]$ déterminée par le tableau $\tau \in \mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})$ 117
$\Psi_b^{\boldsymbol{I}} : \bigoplus_{\tau\in\mathcal{T}_b(\boldsymbol{I})} H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\tau) \to H_{\mathrm{c}}(\Delta_{|\boldsymbol{I}|+b}(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{I}} \times \boldsymbol{F}_b))$, isomorphisme de $\mathcal{S}_{\boldsymbol{I}} \times \mathcal{S}_b$-modules 117
Ψ_τ restriction de $\Psi_b^{\boldsymbol{I}}$ à $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_\tau)$ 120
$\mathcal{T}_0(b, m)$ ensemble de tableaux « *normaux* » dans $\mathcal{T}(b, m)$ 121

$\mathcal{H}_\tau$ le stabilisateur de τ dans $\mathcal{S}_{m-b}\times\mathcal{S}_b$ 122
$\boldsymbol{F}_\tau := \{\overline{x} \in \boldsymbol{M}_{\geqslant 0}^{m-(p+1)} \times \boldsymbol{F}_{p+1} \mid x_i = x_{f_\tau(i)}\}$, ... 122

Calcul du caractère de $\mathcal{S}_m$-module de $H_c(\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X}))$

$\chi_V : \mathcal{S}_m \to k[[T]]$, série de caractères d'un $\mathcal{S}_m$-module gradué V 126
$\chi_c(\boldsymbol{M})(_, T) : \mathcal{S}_m \to k[[T]]$, série de caractères de $\mathcal{S}_m$-module de $H_c(\boldsymbol{M})$ 127
$\sigma_m \in \mathcal{S}_m$ la permutation cyclique $(1, 2, \ldots, m)$ 127
$\boldsymbol{C}_m := \langle\sigma_m\rangle$, sous-groupe de $\mathcal{S}_m$ engendré par σ_m 127
$\mu(_)$ fonction de Möbius 128

Nombres de Betti des quotients des espaces de configuration

$\boldsymbol{CF}_m(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\boldsymbol{C}_m$, espace de configurations cycliques de $\boldsymbol{X}$ 137
$\phi(_)$ fonction indicatrice d'Euler 138
$\boldsymbol{BF}_m(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{X})/\mathcal{S}_m$, espace de configurations non ordonnées de $\boldsymbol{X}$ 139
$\mathbb{Q}_{\text{class}}(\mathcal{S}_m)$ $\mathbb{Q}$-algèbre des fonctions $f : \mathcal{S}_m \to \mathbb{Q}$ *centrales*, *i.e.* constantes sur les classes de conjugaison. 141
$\underline{\deg}$ graduation de $k[X_1, X_2, \ldots]$ telle que $\underline{\deg} X_k = k$ 141
$a^{\underline{0*b}} = 1$, et $a^{\underline{X*b}} := a(a-h)(a-2h)\cdots(a-(X-1)h)$, factorielle décroissante étendue 145

Suites spectrales de Leray

$H_{\pi!}(\pi_{\boldsymbol{Y}})$, $H_{\pi!}(\boldsymbol{Y}; \boldsymbol{B})$, $H_{\pi!}(\boldsymbol{Y})$, cohomologie à support π-propre pour la fibration $\pi_a : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{B}$ 154
$D_k^+(\boldsymbol{Y})$ catégorie dérivée des complexes de faisceaux de k-espaces vectoriels sur $\boldsymbol{Y}$ bornés inférieurement 155
$\Delta_{?\ell}^{m[a]}$ notation abrégée de $\Delta_{?\ell}^{[a]}\boldsymbol{X}^m := \Delta_{?\ell}\boldsymbol{X}^m \cap (\boldsymbol{X}^{m-a}\times\boldsymbol{F}_a)$ 157
$\mathcal{P}_{\pi!}(\boldsymbol{Z}; \boldsymbol{U})(T)$, polynôme de Poincaré pour la cohomologie à support π-propre d'un espace $\boldsymbol{Z}$ basé sur $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{X})$ 160
$\mathcal{H}_{\pi!}^i(\boldsymbol{Y}) := \mathbb{R}^i\pi_{a!}(\underline{k}_{\boldsymbol{Y}})$, faisceau de cohomologie à support π-propre pour l'application $\pi_a : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{F}_a$ 160
$\boldsymbol{UY}$ $\pi_a : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{F}_a$ et $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{F}_a$, on pose $\boldsymbol{UY} := \pi_a^{-1}\boldsymbol{U}$ 161
$\boldsymbol{C}$ composante connexe de $\boldsymbol{F}_a$ 162
$c : \boldsymbol{Y} \to \{\text{pt}\}$, application constante 165
$\mathcal{S}_a\boldsymbol{C} := \bigcup_{g\in\mathcal{S}_a} g\cdot\boldsymbol{C}$, saturé d'une partie $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{F}_a$ sous l'action de $\mathcal{S}_a$ 171

Rappels sur les nombres de Stirling

$x^{\overline{n}} := x(x+1)\cdots(x+(n-1))$, n-ième factorielle croissante de x. 186
$x^{\underline{n}} := x(x-1)\cdots(x-(n-1))$, n-ième factorielle décroissante de x. 186
$\underline{s}(i,j)$, $\overline{s}(i,j)$, nombres de Stirling de première espèce resp. signés et non signés . . 186
$\overline{S}(i,j)$, $\underline{S}(i,j)$, nombres de Stirling de seconde espèce resp. signés et non signés . . 187
$\left[{m \atop \ell}\right] = \overline{s}(i,j)$ cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble à i éléments qui sont produits d'exactement j cycles 188
$\left\{{i \atop j}\right\} = \underline{S}(i,j)$, cardinal de l'ensemble $\mathfrak{P}_j(E)$ de partitions d'un ensemble E à i éléments en j parties non vides 188

Isospectralité et Transplantations

Alberto Arabia

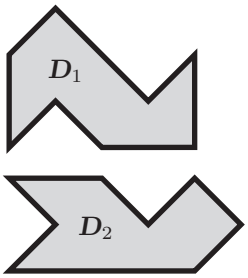
Les sons produits par un tambour sont des combinaisons de mouvements périodiques, de fréquences et d'amplitudes diverses, qui émanent de tous ses composants, tellement uniques et irréproductibles qu'il ne viendrait à l'esprit de personne de mettre en doute l'idée qu'il n'existe pas deux tambours produisant les mêmes sons, autrement dit, deux tambours dont la musique à elle toute seule ne pourrait trahir leur identité.

D'un point de vue mathématique la situation est différente. Peut on démontrer que c'est effectivement le cas ? Bien sûr, telle quelle, la question est inabordable car elle comporte trop de variables à la fois inconnues et impondérables. On peut alors simplifier les données et se restreindre à la seule membrane, et mieux encore uniquement à sa forme : circulaire, carrée, hexagonale, autre...

Can One Hear the Shape of a Drum ?

C'est le titre célèbre et maintes fois cité de l'article publié par Mark Kac en 1966 et qui va lancer les mathématiciens à la recherche de deux formes différentes de membranes planes que l'on pourrait découper sur une pièce de cuir et qui produiraient la même musique.

Presque trente années de recherches vont s'écouler avant de voir enfin apparaître dans un article de Gordon–Webb–Wolpert publié en 1992, les deux figures planes ci-contre.



Ces deux regions ont le même spectre étendu pour l'opérateur de Laplace. Elles produisent donc la même musique !

Mais, le plus surprenant dans cette histoire, qui a mobilisé des spécialistes de diverses discipline, comme : la géométrie riemannienne, la théorie des graphes, la théorie des groupes et ses représentations et la théorie des nombres, pour ne citer que les plus prépondérantes, le plus surprenant donc, c'est le découverte, après une dizaine d'années de recherches, de la méthode dite des « *transplantations* » (1992), qui donne l'isospectralité des régions ci-dessus de manière élémentaire à l'aide d'une matrice carrée de sept lignes et colonnes : la matrice de « *transplantation* »

$$\mathcal{T} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

avec laquelle n'importe quel lycéen peut « *transplanter* » la musique produite par la membrane $\boldsymbol{D}_1$ sur la membrane $\boldsymbol{D}_2$ et vice-versa, et se convaincre ainsi du fait qu'elles ne peuvent pas être distinguées par les sons qu'elles produisent.

Dans ces notes, j'ai voulu expliquer, dans le détail, le chemin à suivre pour parvenir à l'explicitation de la matrice en question, et pour montrer sa pertinence dans les questions d'isospectralité.

J'ai profité de l'occasion pour faire une introduction à la géométrie riemannienne des variétés plates à bords polygonaux et leurs quotients sous l'action de groupes finis d'isométries. Ce choix restreint présente de très nombreuses simplifications par rapport aux situations plus générales, mais c'est en même temps largement suffisant pour expliquer les travaux fondamentaux de cette aventure.

Paris, 16 septembre 2013

Table des matières

1 Rappels
1.1 Structure d'espace topologique métrique de $\mathbb{R}^n$ . . . 5
1.2 Fonctions réelles . . . 5
1.2.1 Fonctions continues. . . . 5
1.2.3 Fonctions continûment différentiables. . . . 6
1.2.6 Convention notationnelle. . . . 6
1.3 Applications de classe $\mathcal{C}^r$ . . . 6
2 Recollements
2.1 Relations d'équivalence et quotients. . . . 9
2.2 Recollement d'ensembles . . . 9
2.3 Recollement d'espaces topologiques . . . 11
2.3.1 Espaces topologiques. . . . 11
2.3.3 Topologie associée à un espace métrique. . . . 12
2.3.4 Continuité. . . . 13
2.3.12 Homéomorphie . . . 14
2.3.14 Métriques du produit et topologie produit. . . . 14
2.3.19 Réunion disjointe d'espaces topologiques et connexité. . . . 15
2.3.23 Contractibilité d'un espace topologique . . . 17
2.3.25 Deux exemples importants . . . 18
2.3.26 Bords et intérieurs. . . . 18
2.3.28 Espace topologique quotient. . . . 19
2.3.33 Applications ouvertes et fermées. . . . 20
2.3.35 Séparation de l'espace quotient. . . . 20
2.3.37 Recollement de deux espaces topologiques. . . . 21
2.3.40 Exemples de recollement d'espaces topologiques. . . . 23
2.4 Recollement d'une famille d'espaces topologiques. . . . 26
2.4.1 Recollements ouverts et recollements fermés. . . . 26
3 Variétés
3.1 Variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^k$ . . . 29
3.1.5 Structure canonique de variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$. . . . 30
3.1.6 Structure canonique de variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{S}^{n-1}$ . . . 30
3.2 Fonctions et applications différentiable sur une variété . . . 31
3.2.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^r$. . . . 31
3.2.2 Applications de classe $\mathcal{C}^r$. . . . 31
3.2.3 Isomorphismes de classe $\mathcal{C}^r$. . . . 31
3.3 Atlas et atlas complets . . . 33
3.3.1 Atlas. . . . 33
3.3.4 Atlas complet. . . . 34
4 Variétés plates
4.1 Isométries des ouverts de $\mathbb{R}^n$ . . . 34
4.1.2 . . . 36
4.2 Variétés plates . . . 36
4.2.4 Variétés plates de dimension 1. . . . 37
4.3 Longueur de courbes dans une variété plate . . . 37
4.4 Distance riemannienne dans une variété plate . . . 38
4.4.5 Isométries riemanniennes (locales). . . . 39
4.5 Surfaces plates . . . 41
4.5.1 Le tore plat : . . . 41
4.5.2 La bouteille de Klein : . . . 41

5 Groupes finis agissant sur les variétés plates
5.1 Action d'un groupe sur une variété . . . 42
5.1.2 Exemple commenté d'action de groupe . . . 42
5.2 Action des groupes finis . . . 42
5.2.1 Terminologie . . . 42
5.2.4 Revêtements principaux. . . . 44
5.2.5 Exemple de revêtement principal. . . . 45
5.2.6 Domaine Fondamental. . . . 45

6 Espaces d'orbites
6.1 Préliminiares . . . 46
6.2 Espace d'orbites d'une variété plate . . . 47
6.2.1 Voisinages distingués. . . . 47
6.2.2 Groupe d'isotropie d'un point. . . . 47
6.2.5 Parties G-régulière et G-singulière . . . 48
6.2.6 Espace d'orbites d'une surface plate . . . 48

7 Surfaces à bord
7.1 Fonctions différentiables des ouverts à bord . . . 50
7.2 Les surfaces à bord . . . 51
7.3 Bord d'une surface à bord . . . 51
7.4 Espace d'orbites des surfaces plates à bord et à coins . . . 52
7.4.1 Surfaces plates à bord. . . . 52
7.4.3 Surfaces plates à coins. . . . 52

8 Le Laplacien sur les variétés plates
8.1 Le Laplacien sur $\mathbb{R}^n$ . . . 54
8.1.1 Le groupe des isométries. . . . 54
8.1.3 L'algèbre $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n))$. . . . 54
8.1.5 L'algèbre $\mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$. . . . 55
8.1.9 L'algèbre $\mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(U)$. . . . 56
8.1.11 Action de $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$. . . . 56
8.1.12 Action de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ sur le Laplacien. . . . 57
8.2 Le Laplacien sur les variétés plates . . . 58
8.2.1 Fonctions sur une variété. . . . 58
8.3 Le Laplacien sur les ouverts à coin . . . 59
8.3.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ sur les ouverts à coin de $\mathbb{R}^2$. . . . 59
8.3.5 Le Laplacien sur $\mathcal{C}^\infty(V)$. . . . 60
8.3.6 Dérivée normale au bord. . . . 61
8.4 Le Laplacien sur les ouverts plats à coins . . . 61
8.4.1 Fonctions sur une surface plate à coins. . . . 61
8.4.2 Le Laplacien sur une surface plate à coins. . . . 61
8.4.3 Applications localement isométriques. . . . 62
8.5 Vibrations des surfaces plates à coin . . . 63
8.5.2 Vibrations et fonctions propres du Laplacien. . . . 63
8.5.3 Conditions aux limites. . . . 63
8.5.6 La question de Marc Kac. . . . 64
8.6 Fonctions propres du Laplacien . . . 64
8.6.1 L'exemple de la membrane carrée. . . . 64
8.6.3 Sous-espaces de fonctions propres. . . . 66
8.6.5 Unicité locale des fonctions propres du Laplacien. . . . 67
8.6.9 Ensembles nodaux. . . . 68
8.6.10 Domaines nodaux. . . . 70
8.6.13 Exemple de deux premières valeurs propres. . . . 71

9 Les questions de la géométrie spectrale
9.1 Problème direct . . . 72
9.2 Problème inverse . . . 73
10 Isospéctralité non isométrique
10.1 Les domaines D_1 et D_2 de GWW . . . 74
10.2 Les surfaces plates à coin de Buser . . . 74
10.2.1 Le domaine D vu comme espace d'orbites de M. . . . 75
10.2.3 Spectre étendu mixte de D. . . . 76
10.2.4 Fonctions invariantes et anti-invariantes. . . . 76
10.3 La stratégie de l'Isospectralité . . . 80
10.3.1 Groupes presque-conjugués. . . . 80
10.3.3 Propriété fondamentale des sous-groupes presque-conjugués. . . . 80
10.3.4 Isospectralité via les triplets de Gassmann. . . . 80
10.4 Graphes de Cayley et surfaces plates de Buser . . . 83
10.4.1 Graphes de Cayley. . . . 83
10.4.3 Exemples de graphes de Cayley . . . 83
10.4.8 Surfaces de Buser et graphes de Cayley. . . . 85
10.4.9 Des briques fléchées. . . . 85
10.4.10 Le recollement des briques fléchées. . . . 86
10.4.14 Isométries des surfaces de Buser. . . . 88
10.4.18 Involutions sur une surface de Buser. . . . 89
10.4.19 Surfaces plates isospectrales de Buser. . . . 90
10.4.22 Les domaines isospectraux de GWW. . . . 91
11 Transplantations
11.1 Un isomorphisme universel . . . 93
11.2 Opérateurs de transplantation . . . 94
11.2.1 Algèbre de groupe. . . . 94
11.2.3 Invariants et opérateurs de transplantation. . . . 94
11.2.7 Transplantations et isospectralité. . . . 96
11.3 Construction explicite des surfaces M_i de Buser . . . 97
11.3.1 Préliminaires sur $\mathrm{Sl}(3,\mathbb{F}_2)$. . . . 97
11.3.3 Paramétrisation et recollements. . . . 98
11.4 Construction explicite des domaines D_i de GWW . . . 101
11.4.1 Réflexions τ_i. . . . 101
11.5 Transplantation pour les surfaces M_i de Buser. . . . 102
11.6 Transplantation pour les domaines D_i de GWW. . . . 104
11.6.1 Préliminaires. . . . 104
11.6.2 Transplantation pour les conditions de Dirichlet. . . . 104
11.6.3 Transplantation pour les conditions de Neumann. . . . 105
11.6.6 À propos de la forme des briques. . . . 106
11.7 Calcul explicite d'une Transplantation . . . 107
11.7.1 Données . . . 107
11.7.2 Actions d'un groupe à gauche et à droite. . . . 108
11.7.3 Actions de G sur $\mathbb{P}$. . . . 108
11.7.4 Espace vectoriel engendré par un ensemble. . . . 109
11.7.6 Morphismes de G-modules à droite. . . . 110
11.7.10 Calcul des Γ_1-Invariants dans $\mathbb{R}[\mathbb{P}_2]$. . . . 112
11.7.12 La transplantation. . . . 112
12 Historique

Bibliographie **114**
Notations **115**
Index **117**

1. Rappels

1.1. Structure d'espace topologique métrique de $\mathbb{R}^n$

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ sont munis de leur « *produit scalaire canonique* » :

$$\langle _, _ \rangle : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \textstyle\sum_{i=1,\dots,n} x_i y_i\,,$$

de la « *norme euclidienne* »

$$||\vec{x}|| := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1,\dots,n} x_i^2}\,,$$

de la « *métrique ou distance euclidienne* »

$$d(\vec{x}, \vec{y}) := ||\vec{x} - \vec{y}||\,,$$

et de la « *topologie* » associée (*cf.* 2.3.1, 2.3.3), *i.e.* celle dont les ouverts sont les réunions de « *boules ouvertes* ». On pose, pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $R \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} B_n(\vec{x}, R) := \{\vec{y} \mid d(\vec{x}, \vec{y}) < R\} : \text{boule ouverte de } \mathbb{R}^n \text{ de centre } \vec{x} \text{ et rayon } R, \\ \overline{B}_n(\vec{x}, R) := \{\vec{y} \mid d(\vec{x}, \vec{y}) \leq R\} : \text{boule fermée de } \mathbb{R}^n \text{ de centre } \vec{x} \text{ et rayon } R. \end{cases}$$

Dans la suite, tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ sera implicitement muni de la métrique induite.

1.2. Fonctions réelles

On appelle « *fonction (réelle)* » d'une partie $\boldsymbol{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ toute application d'ensembles

$$f : \boldsymbol{S} \to \mathbb{R}\,.$$

On notera $\mathrm{Appl}(\boldsymbol{S}, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces applications. Dans cette terminologie, on retiendra le fait que terme « *fonction* » réfère à l'espace d'arrivée de l'application, en la circonstance le corps des nombres réels $\mathbb{R}$, ce qui est pertinent pour l'étude des variétés différentielles *réelles*[1].

1.2.1. Fonctions continues. Comme $\boldsymbol{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ sont munis de la métrique euclidienne, on a aussitôt la notion de fonction « *continue* » sur $\boldsymbol{S}$. L'ensemble de ces fonctions est noté

$$\boxed{\mathcal{C}^0(\boldsymbol{S}) := \{f : \boldsymbol{S} \to \mathbb{R} \mid \ f \text{ est continue } \}} \tag{1}$$

et c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (voir exercice suivant).

1.2.2. Exercice. Pour $f, g \in \mathcal{C}^0(\boldsymbol{S})$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit, pour tout $s \in \boldsymbol{S}$,

$$\begin{cases} (f+g)(s) := f(s) + g(s) \\ (\lambda \cdot f)(s) := \lambda f(s) \end{cases}$$

où les membres de droite font référence à la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que les fonctions $f + g$ et $\lambda \cdot f$ ainsi définies sont encore dans $\mathcal{C}^0(\boldsymbol{S})$.

1. Dans d'autres contextes le corps pertinent, notons-le $\mathbb{K}$, pourra être autre que $\mathbb{R}$, par exemple le corps des nombres complexes $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ pour les variétés différentielles ou analytiques complexes, la clôture algébrique d'un corps fini $\mathbb{K} := \overline{\mathbb{F}_p}$ pour les variétés algébriques en caractéristique p. Dans chaque contexte, le terme « *fonction* » qui peut être complété par l'épithète *complexe*, *algébrique*, *régulière*, etc., fait donc référence à une application à valeurs dans un certain corps de référence $\mathbb{K}$ fixé une fois pour toutes.

b) Monter que l'ensemble $\mathcal{C}^0(\boldsymbol{S})$ muni des opérations

$$+ : \mathcal{C}^0(\boldsymbol{S}) \times \mathcal{C}^0(\boldsymbol{S}) \to \mathcal{C}^0(\boldsymbol{S}), \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{C}^0(\boldsymbol{S}) \to \mathcal{C}^0(\boldsymbol{S}),$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

c) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{C}^0(\boldsymbol{S})$ soit de dimension finie.

d) Comme $\mathbb{R}$ est un corps, on peut également définir le « *produit de fonctions* » en posant, pour tout $s \in \boldsymbol{S}$,

$$(f \cdot g)(s) := f(s)g(s).$$

Démontrer que la fonction ainsi définie $f \cdot g$ est encore dans $\mathcal{C}^0(\boldsymbol{S})$.

e) Notons $\mathbf{0} : \boldsymbol{S} \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{1} : \boldsymbol{S} \to \mathbb{R}$ les fonctions constantes prenant respectivement les valeurs 0 et 1. Montrer que $\big(\mathcal{C}^0(\boldsymbol{S}), +, \mathbf{0}, \cdot, \mathbf{1}\big)$ est un anneau commutatif (et même une $\mathbb{R}$-algèbre).

f) Quels sont les éléments inversibles $\big(\mathcal{C}^0(\boldsymbol{S}), +, \mathbf{0}, \cdot, \mathbf{1}\big)$ et à quelle condition c'est un corps.

1.2.3. Fonctions continûment différentiables. Lorsque $\boldsymbol{S}$ est une partie ouverte $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, on définit dans le cours la notion de « *différentiabilité* » pour une fonction $f : \boldsymbol{U} \to \mathbb{R}$. Sans entrer dans les détails, rappelons que l'on démontre que si f est différentiable, les « *dérivées partielles* » $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \boldsymbol{U} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions bien définies et réciproquement, lorsque les dérivées partielles existent **et sont continues** alors f est différentiable (voir 8.3.3).

On définit alors, pour chaque $r > 0$, l'espace $\mathcal{C}^r(\boldsymbol{U})$ des fonctions $f : \boldsymbol{U} \to \mathbb{R}$ qui sont « *r fois continûment différentiables* », par

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^r(\boldsymbol{U}) \iff \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} \subseteq \mathcal{C}^{r-1}(\boldsymbol{U})}$$

Comme dans le cas des fonctions continues, l'espace $\mathcal{C}^r(\boldsymbol{U})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre associative et commutative.

1.2.4. Exercice. Refaire l'exercice 1.2.2 en remplaçant $\mathcal{C}^0(\boldsymbol{S})$ par $\mathcal{C}^r(\boldsymbol{U})$.

1.2.5. Exercice et définition. *Pour tout ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, on a la suite décroissante décroissante d'ensembles :*

$$\mathrm{Appl}(\boldsymbol{U}, \mathbb{R}) \supseteq \mathcal{C}^0(\boldsymbol{U}) \supseteq \mathcal{C}^1(\boldsymbol{U}) \supseteq \mathcal{C}^2(\boldsymbol{U}) \supseteq \cdots$$

On note alors

$$\boxed{\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{U}) := \bigcap\nolimits_r \mathcal{C}^r(\boldsymbol{U})}$$

1.2.6. Convention notationnelle. Dans ces notes, l'exposant dans la notion "$\mathcal{C}^r$" appartient toujours à l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sauf précision supplémentaire.

1.3. Applications de classe $\mathcal{C}^r$

Soient $n, n' \in \mathbb{N}$, puis $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{U}' \subseteq \mathbb{R}^{n'}$ des ouverts, et $\alpha : \boldsymbol{U}' \to \boldsymbol{U}$ une application (ensembliste). Pour chaque $x \in \boldsymbol{U}'$, l'élément $\alpha(x) \in \boldsymbol{U}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et possède donc n « *fonctions coordonnées* » $\alpha_i : \boldsymbol{U}' \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, telles que $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))$.

Un résultat du classique du cours montre que α est continue, resp. différentiable, resp. r fois continûment différentiable, si et seulement il en est de même de chacune de ses fonctions coordonnées α_i.

On notera $\mathcal{C}^r(\boldsymbol{U}', \boldsymbol{U})$ l'ensemble des applications r fois continûment différentiables de $\boldsymbol{U}'$ à valeurs dans $\boldsymbol{U}$.

Maintenant, une des conséquences immédiates du fait que les parties $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{U}$ *sont munies de la métrique induite par celle de* $\mathbb{R}^n$, est le résultat suivant qui bien qu'élémentaire, joue un rôle important dans certains domaines mathématiques.

1.3.1. Proposition. *Avec les données en cours,*

a) *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace métrique quelconque (plus généralement un espace topologique). Une application (ensembliste) $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ est continue, si et seulement si pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\boldsymbol{S})$, on a $f \circ \alpha \in \mathcal{C}^0(\boldsymbol{X})$.*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \boldsymbol{S} \\ & {\scriptstyle f\circ\alpha\in\mathcal{C}^0(\boldsymbol{X})}\searrow \quad \Longleftarrow \quad \downarrow{\scriptstyle f\in\mathcal{C}^0(\boldsymbol{S})} & \\ & \qquad\qquad \mathbb{R} & \end{array}$$

b) *Soient $n, n' \in \mathbb{N}$ et $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{U}' \subseteq \mathbb{R}^{n'}$. Soit $\alpha : \boldsymbol{U}' \to \boldsymbol{U}$ une application ensembliste. Alors $\alpha \in \mathcal{C}^r(\boldsymbol{U}', \boldsymbol{U})$, si et seulement si pour tout $f \in \mathcal{C}^r(\boldsymbol{U})$, on a $f \circ \alpha \in \mathcal{C}^r(\boldsymbol{U}')$.*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{U}' & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \boldsymbol{U} \\ & {\scriptstyle f\circ\alpha\in\mathcal{C}^r(\boldsymbol{U}')}\searrow \quad \Longleftarrow \quad \downarrow{\scriptstyle f\in\mathcal{C}^r(\boldsymbol{U})} & \\ & \qquad\qquad \mathbb{R} & \end{array}$$

Indication. Pour (b), un sens de l'équivalence est le résultat du cours qui affirme que la composée de deux applications de classe $\mathcal{C}^r$ est encore de classe $\mathcal{C}^r$. La réciproque est plus simple car parmi les $f \in \mathcal{C}^r(\boldsymbol{U})$ se trouvent les fonctions coordonnées $\gamma_i : \boldsymbol{U} \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto x_i$, et alors $\alpha_i = \gamma_i \circ \alpha \in \mathcal{C}^r(\boldsymbol{U}')$ pour $i = 1, \ldots, n$, donc $\alpha \in \mathcal{C}^r(\boldsymbol{U}')$. □

1.3.2. Commentaire. Il est important de retenir l'idée de fond dans cette proposition qui dit que la propriété d'être de classe $\mathcal{C}^r$ pour une application $\alpha : \boldsymbol{U}' \to \boldsymbol{U}$ entre des ouverts $\boldsymbol{U}' \subseteq \mathbb{R}^{n'}$ et $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ se « *lit* » dans sa capacité à préserver par composition la classe $\mathcal{C}^r$ des fonctions. On peut donc *définir* la « *classe d'une application* » $\alpha : \boldsymbol{U}' \to \boldsymbol{U}$, comme le sup de l'ensemble

$$\left\{ r \in \mathbb{N} \;\middle|\; \alpha^\natural(\mathcal{C}^r(\boldsymbol{U})) \subseteq \mathcal{C}^r(\boldsymbol{U}') \right\}$$

où $\alpha^\natural : \mathcal{C}^r(\boldsymbol{U}) \to \mathrm{Appl}(\boldsymbol{U}', \mathbb{R})$ est par définition l'application $f \mapsto f \circ \alpha$.

Mise en garde. Lire le commentaire 2.3.11.

1.3.3. Exercice. Montrer que pour $\alpha : \boldsymbol{U}'' \to \boldsymbol{U}'$ et $\beta : \boldsymbol{U}' \to \boldsymbol{U}$, on a

$$(\beta \circ \alpha)^\natural = \alpha^\natural \circ \beta^\natural .$$

2. Recollements

Dans d'important domaines mathématiques, par exemple : la géométrie différentielle, la géométrie analytique, la géométrie algébrique, la géométrie riemannienne, les objets d'étude sont générés à partir d'un ensemble d'objets élémentaires, les "briques" de base, par des "règles de recollement" permettant des les assembler. Tout comme dans la vie ordinaire, où les maçons ne cessent d'inventer de nouvelles constructions en utilisant la même brique et le même mortier, les objets mathématiques ainsi construits sont souvent étonnants, paradoxaux parfois, et toujours riches en propriétés très éloignées des celles des briques elles-mêmes. En langage savant on distingue ces propriétés en qualifiant les premières de "globales" et les secondes de "locales". Voici deux exemples classiques

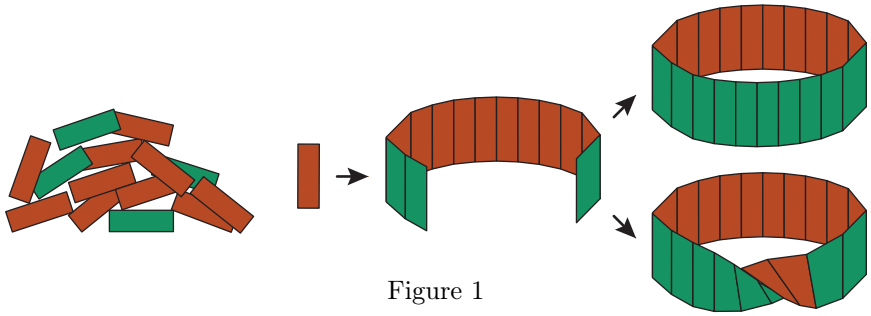


Figure 1

- Propriétés locales : *une brique a deux faces ; une brique est limitée dans toutes les directions ; une brique à un bord connexe ; tout lacet dessiné sur une brique peut se déformer en un point ; . . .*
- Propriétés globales : *le cylindre a deux faces, le ruban de Möbius n'en a qu'une ; tous les deux sont illimités dans une certaine direction ; le bord du cylindre à deux composantes connexes, celui du ruban une seule ; certains lacets ne peuvent pas se déformer en un point ; . . .*

Dans les sections §2 à §7, nous verrons avec un certain détail les notions de « *espace quotient* », « *recollement d'espaces* », « *variété* », « *variétés plates* » et leur quotient sous l'action d'un groupe fini d'isométries, avec l'accent porté sur les « *surfaces plates à bord et à coins* » ([2]).

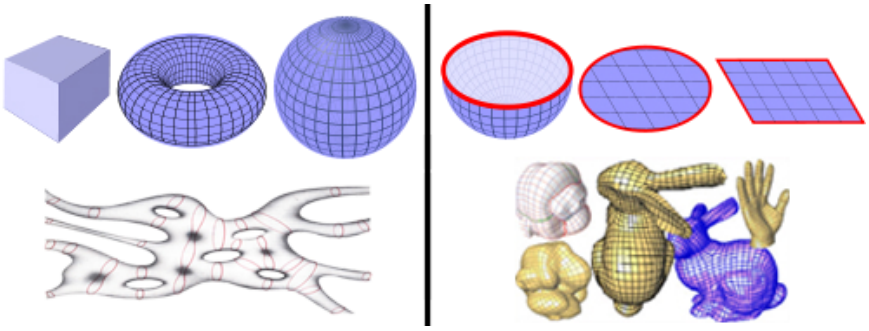


Figure 2

2. En anglais respectivement : « *quotient space* », « *gluing spaces* », « *manifolds* », « *flat manifold* » et « *manifold with boundary and corners* ».

2.1. Relations d'équivalence et quotients.

Soient $\boldsymbol{E}$ un ensemble. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\boldsymbol{E}$ est une « *équivalence* » lorsqu'elle est, réflexive, symétrique et transitive ([3]) :

$$\begin{cases} \textit{réflexivité} & \forall x \in \boldsymbol{E}\,, \quad x \mathcal{R} x \\ \textit{symétrie} & \forall x, y \in \boldsymbol{E}\,, \quad x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x \\ \textit{transitivité} & \forall x, y, z \in \boldsymbol{E}\,, \quad (x \mathcal{R} y) \,\&\, (y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z \end{cases} \tag{2}$$

Étant donné $x \in \boldsymbol{E}$, sa « *classe d'équivalence modulo* $\mathcal{R}$ » est l'ensemble

$$C_{\mathcal{R}}(x) := \big\{ y \in \boldsymbol{E} \;\big|\; x \mathcal{R} y \big\}$$

On vérifie à l'aide des axiomes (2) que deux classes d'équivalence sont, soit égales, soit disjointes. L'ensemble des classes d'équivalence est une « *partition* » de $\boldsymbol{E}$, notée $\boldsymbol{E}/\mathcal{R}$, appelé également « *quotient de* $\boldsymbol{E}$ *par* $\mathcal{R}$ ». L'application

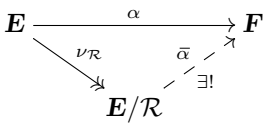
$$\nu_{\mathcal{R}} : \boldsymbol{E} \twoheadrightarrow \boldsymbol{E}/\mathcal{R}\,, \quad x \mapsto C_{\mathcal{R}}(x)\,,$$

qui fait correspondre à un élément sa classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$, est une surjection communément appelée « *la surjection canonique* ». Cette surjection possède la propriété suivante :

2.1.1. Propriété universelle de l'ensemble quotient. *Avec les données en cours, toute application d'ensembles* $\alpha : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ « *compatible à* $\mathcal{R}$ », i.e. *telle que*

$$(x \mathcal{R} y) \Longrightarrow \big(\alpha(x) = \alpha(y)\big)\,,$$

se factorise d'une et d'une seule manière à travers $\nu_{\mathcal{R}}$*, autrement dit, il existe une et une seule application* $\bar{\alpha} : \boldsymbol{E}/\mathcal{R} \to \boldsymbol{F}$ *telle que* $\alpha = \bar{\alpha} \circ \nu_{\mathcal{R}}$ *:*



$$\bar{\alpha}\big(C_{\mathcal{R}}(x)\big) = \alpha(x)\,.$$

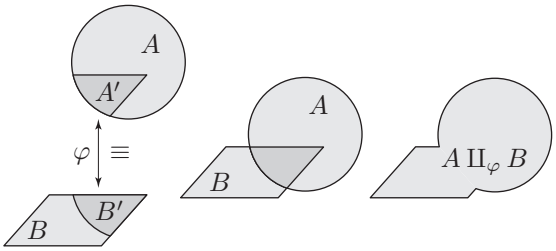
Démonstration. Les conditions sont telles que l'égalité $\bar{\alpha}\big(C_{\mathcal{R}}(x)\big) = \alpha(x)$ est nécessaire. Ensuite, on vérifie que $\bar{\alpha}$ est bien définie puisque les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ déterminent une partition de $\boldsymbol{E}$. □

2.2. Recollement d'ensembles

Nous sommes tous très familiers à l'opération de recollement d'ensembles. Étant donné deux ensembles disjoints A et B et des parties $A' \subseteq A$ et $B' \subseteq B$, recoller A et B en identifiant les points de A' et de B' par l'intermédiaire d'une **bijection** $\varphi : A' \to B'$ est une opération qui génère un nouvel ensemble que

3. Une autre forme de transitivité fut explicitement énoncée dans les Éléments d'Euclide : "*Deux choses égales à une même troisième sont égales entre elles*". Cet énoncé est aussi au coeur du petit récit "What the Tortoise Said to Achilles" (1895) de Lewis Carroll.

nous notons $A \amalg_\varphi B$ [4] :



Bien que cette description sommaire corresponde bien à notre expérience de tous les jours comme l'indique par ailleurs l'illustration, l'opération en question est en réalité d'un grande subtilité et c'est une source puissante d'objets mathématiques. En effet, ce qu'il a derrière c'est une relation d'équivalence et l'opération de passage au quotient.

2.2.1. Proposition et définition. *Avec les données en cours, soit $\mathcal{R}_\varphi$ la relation binaire sur la réunion disjointe $A \amalg B$ définie par*

$$x \,\mathcal{R}_\varphi\, y \iff \begin{cases} y = x\,, \text{ ou bien} \\ \big(x \in A' \text{ et } y = \varphi(x)\big)\,, \text{ ou bien} \\ \big(x \in B' \text{ et } y = \varphi^{-1}(x)\big) \end{cases} \tag{3}$$

Alors,

a) *$\mathcal{R}_\varphi$ est une relation d'équivalence sur $A \amalg B$ et*

$$\boxed{A \amalg_\varphi B = (A \amalg B)/\mathcal{R}_\varphi}$$

b) *Si $\mathcal{Q}$ est une autre relation d'équivalence sur $A \amalg B$ vérifiant*

$$a \,\mathcal{Q}\, \varphi(a) \text{ pour tout } a \in A',$$

on a $x \,\mathcal{R}_\varphi\, y \Rightarrow x \,\mathcal{Q}\, y$. Autrement dit, $\mathcal{R}_\varphi$ est la plus économe [5] *des relations d'équivalence identifiant a et $\varphi(a)$, on l'appelle « la relation d'équivalence engendrée par les couples $(a, \varphi(a))$. ».*

c) *Notons*

$$\nu : A \amalg B \to A \amalg_\varphi B$$

la surjection canonique, i.e. *celle qui fait correspondre à un élément sa classe d'équivalence. Notons $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ les images de A et B dans $A \amalg B$ respectivement. Alors*

i) *Les restrictions de ν respectivement à A et B, notées*

$$\nu_A : A \to \tilde{A}\,, \quad \nu_B : B \to \tilde{B}\,,$$

sont bijectives et identifient A' et B' à $\tilde{A} \cap \tilde{B}$.

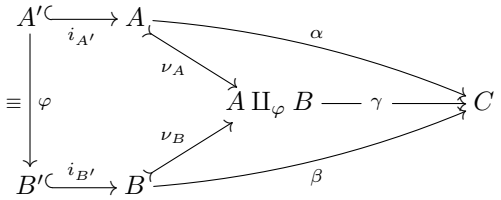
4. Le symbole '≡' indique une bijection.

5. La terminologie usitée est plutôt « *fine* » par opposition à « *grossière* », mais ces termes prêtent en général à confusion. Dans le cas présent, la relation d'équivalence $\mathcal{R}_\varphi$ est celle qui identifie le moins possible de points.

ii) *Pour toute paire d'applications* $\alpha : A \to C$ *et* $\beta : B \to C$, *telles que*

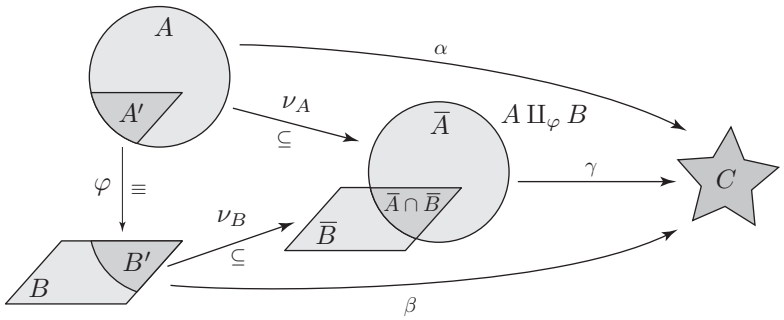
$$\alpha(a) = \beta(\varphi(a)), \text{ pour tout } a \in A',$$

il existe une et une seule application $\gamma : A \amalg_\varphi B \to C$ *rendant « commutatif » le diagramme* ([6])



Indication. Nous laissons aux soins du lecteur la preuve de cette proposition. Indiquons néanmoins que l'assertion (c) découle du fait que l'intersection d'une classe d'équivalence avec A ou avec B est vide ou réduite à un point ! et ceci, du fait de l'assertion (b). □

2.2.2. Voici une illustration qui reprend les éléments des énoncés de la proposition précédente



2.3. Recollement d'espaces topologiques

2.3.1. Espaces topologiques. Rappelons que l'on appelle « *espace topologique* » la donnée d'un couple $(\boldsymbol{X}, \mathcal{T}_{\boldsymbol{X}})$ où $\boldsymbol{X}$ est un ensemble et $\mathcal{T}_{\boldsymbol{X}}$ est un ensemble de parties de $\boldsymbol{X}$, appelée « *la topologie de* $\boldsymbol{X}$ ». Les éléments de $\mathcal{T}_{\boldsymbol{X}}$ son appelés les « *ouverts de* $\boldsymbol{X}$ ». Ces données sont assujetties à vérifier les conditions suivantes :

- $\boldsymbol{X}$ et $\emptyset$ sont des ouverts.
- Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.
- Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Les deux exemples le plus élémentaires de topologie sont : la « *topologie grossière* » $\mathcal{T}_{\boldsymbol{X}} = \{\boldsymbol{X}, \emptyset\}$, et la « *topologie discrète* » $\mathcal{T}_{\boldsymbol{X}} = \mathcal{P}(\boldsymbol{X})$ ([7]).

Le complémentaire d'un ouvert est appelé « *fermé* ». On a clairement

- $\boldsymbol{X}$ et $\emptyset$ sont des fermés.

6. Un diagramme de flèches et sommets est dit « *commutatif* » lorsque la composée des flèches permettant de passer d'un sommet à un autre est indépendante du chemin choisi. Par exemple, dans diagramme en question, la composée $\alpha \circ i_{A'}$ est la même que $\beta \circ i_{B'} \circ \varphi$.

7. $\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$= ensemble des sous-ensembles de $\boldsymbol{X}$.

- Une réunion finie de fermés est fermée.
- Une intersection quelconque de fermés est fermée.

On appelle « *voisinage* » d'un point $x \in \boldsymbol{X}$ toute partie de $\boldsymbol{X}$ contenant un ouvert $U \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{X}}$ tel que $x \in U$.

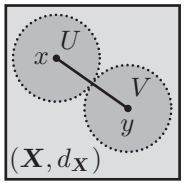
Lorsque la topologie de $(\boldsymbol{X}, \mathcal{T}_{\boldsymbol{X}})$ est sous-entendue, la référence explicite à $\mathcal{T}_{\boldsymbol{X}}$ est supprimée et l'on dit simplement « *l'espace (topologique)* $\boldsymbol{X}$ ».

2.3.2. Exercice : topologie induite. *Soient $\boldsymbol{X}$ un espace topologique et $\boldsymbol{X}'$ un sous-ensemble de $\boldsymbol{X}$. La « trace » d'une partie $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ sur $\boldsymbol{X}'$ est l'intersection $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{X}'$. L'ensemble des traces des ouverts de $\boldsymbol{X}$ sur $\boldsymbol{X}'$ est une topologie, on l'appelle la « topologie induite » sur $\boldsymbol{X}'$ par $\boldsymbol{X}$. C'est la topologie la plus économe*[8] *qui rend l'inclusion canonique $\iota : \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{X}$ continue. L'ensemble $\boldsymbol{X}'$ muni de la topologie induite est un « sous-espace (topologique) » de $\boldsymbol{X}$.*

1) *Soit A une partie ouverte (resp. fermée) de $\boldsymbol{X}$ munie de la topologie induite par $\boldsymbol{X}$. Montrer que $A' \subseteq A$ et un ouvert (resp. fermé) de la topologie induite, si et seulement si A' est un ouvert (resp. fermé) de $\boldsymbol{X}$.*
2) *Soient $A' \subseteq A \subseteq \boldsymbol{X}$. On munit A' et A des topologies induites par $\boldsymbol{X}$. Montrer que la topologie de A' est aussi la topologie induite par A.*

2.3.3. Topologie associée à un espace métrique. Soit $(\boldsymbol{X}, d_{\boldsymbol{X}})$ un « *espace métrique* ». Pour $x \in \boldsymbol{X}$ et $R \in \mathbb{R}$, l'ensemble $B(x, R) := \{y \in \boldsymbol{X} \mid d_{\boldsymbol{X}}(x, y) < R\}$ est la « *boule ouverte de centre x et rayon R* ». Une partie $U \subseteq \boldsymbol{X}$ est dite « *ouverte* » si pour chaque $x \in U$ il existe $R > 0$ tel que $B(x, R) \subseteq U$. Les parties ouvertes sont donc les réunions de boules ouvertes (le démontrer). L'ensemble de ces ouverts est une topologie, c'est la « *topologie associée à la métrique $d_{\boldsymbol{X}}$* ». Réciproquement, une topologie est dite « *métrisable* » lorsqu'elle est associée à une certaine métrique. Une telle topologie possède une propriété remarquable : « *la séparation* ».

Définition. Un espace topologique $\boldsymbol{X}$ est dit « *séparé* » lorsque des éléments différents $x \neq y$ dans $\boldsymbol{X}$ peuvent toujours être "séparés" pas des voisinages disjoints, *i.e.* s'il existe des ouverts $U \ni x$ et $V \ni y$ tels que $U \cap V = \emptyset$. Sur $(\boldsymbol{X}, d_{\boldsymbol{X}})$, si $R = d_{\boldsymbol{X}}(x, y) \neq 0$, on prend $U = B(x, R/2)$ et $V = B(y, R/2)$ par exemple.



$R = d_{\boldsymbol{X}}(x, y) \neq 0$
$U = B(x, R/2)$
$V = B(y, R/2)$

Sur un ensemble $\boldsymbol{X}$, la topologie discrète est toujours séparée et la topologie grossière ne l'est jamais pour peu que $\mathrm{Card}(\boldsymbol{X}) > 1$.

La séparation est une propriété qui nous est tellement familière (nous "vivons" dans un espace métrique !) que son défaut peut nous dérouter dans un premier temps. Nous verrons des exemples de ce phénomène apparaître naturellement lors des quotients et des recollements d'espaces topologiques, en particulier un quotient ou un recollement d'espaces métriques peut fort bien ne pas être métrisable.

8. On dit aussi la plus grossière, ou la moins fine.

2.3.4. Continuité. Une application $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ entre deux espaces topologiques est dite « *continue* » lorsque, pour tout ouvert U de $\boldsymbol{Y}$, l'image *réciproque* $\alpha^{-1}(U)$ est un ouvert de $\boldsymbol{X}$. On notera $\mathcal{C}^0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ l'ensemble de telles applications.

2.3.5. Exercice. Montrer qu'une application $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ entre deux espaces topologiques est continue, si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de $\boldsymbol{Y}$ est un fermé de $\boldsymbol{X}$.

2.3.6. Exercice. Si $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ sont non vides, on a $\mathcal{C}^0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \neq \emptyset$. Indication : Montrer qu'une application constante entre deux espaces topologiques est continue. Tant qu'on y est, montrer aussi que $(\mathrm{id} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}) \in \mathcal{C}^0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})$.

2.3.7. Exercice. Soit $\mathfrak{I}$ un ensemble (d'indices) de cardinal arbitraire.

1) Soit $\{\boldsymbol{U}_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ un « *recouvrement ouvert* » de $\boldsymbol{X}$, *i.e.* une famille d'ouverts de $\boldsymbol{X}$ telle que $\boldsymbol{X} = \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} \boldsymbol{U}_i$. Montrer que $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est continue, si et seulement si chaque restriction $\alpha\big|_{\boldsymbol{U}_i} : \boldsymbol{U}_i \to \boldsymbol{Y}$, $x \mapsto \alpha(x)$, est continue.
2) Supposons maintenant $\mathfrak{I}$ de cardinal *fini* et soit $\{\boldsymbol{F}_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ un « *recouvrement fermé* » de $\boldsymbol{X}$, *i.e.* une famille de fermés de $\boldsymbol{X}$ telle que $\boldsymbol{X} = \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} \boldsymbol{F}_i$. Montrer que $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est continue, si et seulement si chaque restriction $\alpha\big|_{\boldsymbol{F}_i} : \boldsymbol{F}_i \to \boldsymbol{Y}$, $x \mapsto \alpha(x)$, est continue.

2.3.8. Exercice. Soit $\boldsymbol{Y}$ un espace topologique dont la topologie n'est pas la topologie grossière. Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique quelconque. Montrer que $\mathcal{C}^0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \mathrm{Appl}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, si et seulement si $\boldsymbol{X}$ est muni de la topologie discrète.

2.3.9. Exercice. On rappelle qu'une application entre deux espaces métriques $\alpha : (\boldsymbol{X}, d_{\boldsymbol{X}}) \to (\boldsymbol{Y}, d_{\boldsymbol{Y}})$ est dite « *continue* » si pour tout $x \in \boldsymbol{X}$ et tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $d_{\boldsymbol{Y}}(\alpha(x), \alpha(y)) < \eta$, pour peu que $d_{\boldsymbol{X}}(x, y) < \eta$. Montrer que α est continue en ce sens, si et seulement si elle est continue au sens des topologies associées aux métriques.

2.3.10. Commentaire. On prendra soin de retenir le fait que si une métrique détermine une topologie, l'inverse n'est pas vrai à plusieurs titres. D'abord, bien de topologies ne proviennent d'aucune métrique, ensuite plusieurs métriques peuvent définir la même topologie [9]. Ce qu'il faut retenir, c'est que pour les besoins de la *continuité* seule la *topologie* des espaces est concernée, le reste étant superflu.

2.3.11. Commentaire. Dans la section 1.2 nous avons introduit les fonctions (réelles) continues sur une partie $\boldsymbol{S} \subseteq \mathbb{R}^n$. C'est une notion que nous pouvons bien évidemment étendre à n'importe quel espace topologique $\boldsymbol{Y}$ par la même définition (*cf.* (1)) :

$$\mathcal{C}^0(\boldsymbol{Y}) := \left\{ f : \boldsymbol{Y} \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ est continue} \right\}.$$

Si maintenant $\boldsymbol{X}$ est un autre espace topologique et $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est une application (ensembliste), l'assertion (a) de 1.3.1 qui affirme que α est continue, si et seulement si pour toute $f \in \mathcal{C}^0(\boldsymbol{Y})$ on a $f \circ \alpha \in \mathcal{C}^0(\boldsymbol{X})$, *n'est pas toujours vérifiée*. Par exemple, si $\boldsymbol{Y} = \{0, 1\}$ est muni de la topologie qui consiste en

9. Par exemple, si d est une métrique, $2d$ l'est aussi et les topologies associées coïncident.

trois ouverts $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$, les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\boldsymbol{Y})$ sont constantes (le démontrer), de même donc que $f \circ \alpha$ qui est alors continue (*cf.* 2.3.6), et ce quel que soit α. On voit donc que si le critère de continuité en question était vrai on aurait $\mathcal{C}^0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \mathrm{Appl}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, auquel cas, toute partie de $\boldsymbol{X}$ serait ouverte (le démontrer). Le critère en question est par conséquent faux pour un tel $\boldsymbol{Y}$ lorsque $\boldsymbol{X}$ n'est pas muni de la topologie discrète (*cf.* 2.3.8).

2.3.12. Homéomorphie

Définitions. Une bijection $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ entre deux espaces topologiques est un « *homéomorphisme* » lorsque α et α^{-1} sont toutes deux continues. On dit alors que $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ sont des espaces « *homéomorphes* ».

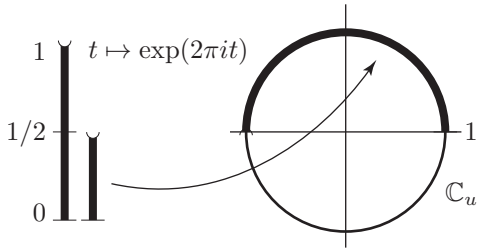
Une « *propriété topologique* » de $\boldsymbol{X}$ est une propriété commune aux espaces homéomorphes à $\boldsymbol{X}$. La (locale) connexité (par arcs) (2.3.20), la compacité, la (locale) contractibilité (2.3.23) sont des exemples classiques de telles propriétés.

2.3.13. Remarque. Lorsque l'application $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est continue et *bijective*, l'application inverse $\alpha^{-1} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ *n'est pas nécessairement continue*. En effet, par définition de la continuité, α^{-1} est continue, si et seulement si, pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ son image *directe* $\alpha(U)$ est ouverte dans $\boldsymbol{Y}$. On dit alors que « α *est une application ouverte* » (*cf.* 2.3.33).

Or, une bijection continue *n'est pas nécessairement ouverte*, par exemple [10]

$$\alpha : [0,1[\to \mathbb{C}_u\,, \quad t \mapsto \exp(2\pi i t)\,,$$

est continue et bijective, mais l'image de l'ouvert $[0, 1/2[$ n'est clairement pas ouverte dans $\mathbb{C}_u$. Nous verrons par ailleurs dans 2.3.25-(b) que les espaces $[0,1[$ et $\mathbb{C}_u$ ne sont pas homéomorphes. Nous y montrons que le premier possède la propriété topologique d'être « *contractile* » alors que le second ne l'est pas. (Voir aussi la question (1) de l'exercice 2.3.22.)



2.3.14. Métriques du produit et topologie produit. Étant donné deux espaces métriques, $(\boldsymbol{X}, d_{\boldsymbol{X}})$ et $(\boldsymbol{Y}, d_{\boldsymbol{Y}})$, le produit cartésien $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ peut être muni d'une métrique de multiples manières, entre autres :

$$\begin{cases} d_1\big((x,y),(x',y')\big) &= d(x,x') + d(y,y') \\ d_2\big((x,y),(x',y')\big) &= \sqrt{d(x,x')^2 + d(y,y')^2} \\ d_\infty\big((x,y),(x',y')\big) &= \sup\{d(x,x'), d(y,y')\} \end{cases}$$

On vérifie que l'application identique entre deux tels espaces métriques

$$\mathrm{id} : (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}, d_i), \to (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}, d_j)$$

est un homéomorphisme, ce qui signifie que les topologies associées à ces différentes métriques est bien la même. Cette topologie commune admet la description purement topologique suivante.

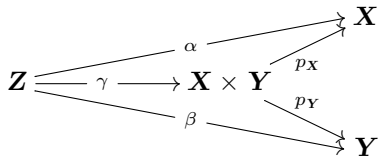
Définition. Étant donnés deux espaces topologiques, $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$, on appelle « *ouvert élémentaire* » de $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ toute partie de la forme $U \times V$ avec U ouvert

10. $\mathbb{C}_u$ désigne le « *cercle unité* » dans $\mathbb{C}$, *i.e.* l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

dans $\boldsymbol{X}$ et V ouvert dans $\boldsymbol{Y}$. On appelle alors « *ouvert* » de $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ toute réunion d'ouverts élémentaires. L'ensemble d'ouverts ainsi définis est une topologie, c'est la « *topologie produit* » ([11]). Un produit d'espaces topologiques sera toujours muni de la topologie produit sauf mention explicite du contraire.

La « *propriété universelle* » de la topologie produit est la suivante.

2.3.15. Proposition. *Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ deux espaces topologiques. La topologie produit sur $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ est la seule qui rend les projections $p_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$, $(x, y) \mapsto x$ et $p_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$, $(x, y) \mapsto y$ continues et telle que $\alpha : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{X}$ et $\beta : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}$ sont continues, si et seulement si $\gamma : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$, $z \mapsto (\alpha(z), \beta(z))$ est continue.*



(4)

Démonstration. Exercice aux soins du lecteur. □

2.3.16. Exercice. Vérifier que les topologies associées aux espaces métriques $(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}, d_i)$ coïncident bien avec la topologie produit des topologies associées aux espaces métriques $(\boldsymbol{X}, d_{\boldsymbol{X}})$ et $(\boldsymbol{Y}, d_{\boldsymbol{Y}})$.

2.3.17. Proposition (Critère de séparation d'une topologie). *Un espace topologique $\boldsymbol{X}$ est séparé (2.3.3), si et seulement si la « diagonale » de $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}$,* i.e. *le sous-espace*

$$\Delta_{\boldsymbol{X}} := \{(x, x) \mid x \in \boldsymbol{X}\} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}\,,$$

est fermé dans $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}$.

Démonstration. Exercice aux soins du lecteur. □

Voici une application classique de ce critère.

2.3.18. Proposition (Graphe d'une application). *Étant donnée une application $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, on appelle « graphe de α » le sous-ensemble de $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$*

$$\mathrm{Gr}(\alpha) := \big\{(x, \alpha(x)) \;\big|\; x \in \boldsymbol{X}\big\}\,.$$

Si $\boldsymbol{Y}$ est séparé et α est continue, alors $\mathrm{Gr}(\alpha)$ est fermé dans $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$.

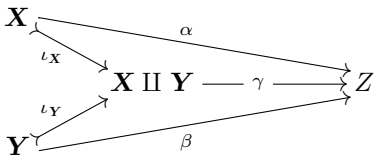
Démonstration. Si $\boldsymbol{Y}$ est fermé, la diagonale $\Delta_{\boldsymbol{Y}}$ est fermée dans $\boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Y}$. D'autre part, l'application $\alpha \times \mathrm{id}_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Y}$, $(x, y) \mapsto (\alpha(x), y)$ est continue, dont $\mathrm{Gr}(\alpha) = (\alpha \times \mathrm{id}_{\boldsymbol{Y}})^{-1}(\Delta_{\boldsymbol{Y}})$ est fermé dans $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$. □

2.3.19. Réunion disjointe d'espaces topologiques et connexité. Étant donnés deux espaces topologiques $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$, les réunions d'ouverts de $\boldsymbol{X}$ et de $\boldsymbol{Y}$ constituent une topologie sur $\boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y}$, c'est la « *topologie de la réunion dis-*

11. Généralisation : Étant donnée une famille d'espaces topologiques $\{\boldsymbol{X}_i\}_{i \in \mathfrak{A}}$, un « *ouvert élémentaire* » de $\prod_{i \in \mathfrak{A}} \boldsymbol{X}_i$ est tout produit $\prod_{i \in \mathfrak{A}} U_i$ où U_i est ouvert dans $\boldsymbol{X}_i$ et où l'ensemble des $i \in \mathfrak{A}$ tels que $U_i \neq \boldsymbol{X}_i$ est fini. Énoncer et prouver la propriété universelle correspondante.

jointe » ([12]), elle est la seule à vérifier (exercice) la « *propriété universelle* » suivante (comparer avec 2.3.15) :

- les inclusions $\iota_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y}$ et $\iota_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y}$ sont continues ;
- Pour toute paire de applications $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Z}$ et $\beta : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$, l'application $\gamma : \boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ telle que $\gamma|_{\boldsymbol{X}} = \alpha$ et $\gamma|_{\boldsymbol{Y}} = \beta$ est continue, si et seulement si α et β les sont ([13]).



(5)

2.3.20. Définition. L'espace topologique $\boldsymbol{X}$ est dit :

- « *connexe* » s'il n'est pas homéomorphe à la réunion disjointe de deux espaces topologiques non vides.
- « *localement connexe* » si tout point admet un voisinage connexe.
- « *connexe par arcs* » si, pour tous $x, y \in \boldsymbol{X}$ il existe un chemin dans $\boldsymbol{X}$ d'origine x et d'extrémité y, *i.e.* une application continue $\gamma : [0,1] \to \boldsymbol{X}$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.
- « *localement connexe par arcs* », si tout point admet un voisinage connexe par arcs.

2.3.21. Lemme

a) *$\boldsymbol{X}$ est connexe, si et seulement si il n'est pas la réunion disjointe de deux ouverts (resp. fermés) non vides.*

b) *Un intervalle de la droite réelle $\mathbb{R}$ est connexe.*

c) *Si $\boldsymbol{X}$ est connexe par arcs, $\boldsymbol{X}$ est connexe.*

d) *Si $\boldsymbol{X}$ est connexe et localement connexe par arcs, il est connexe par arcs.*

Démonstration. (a) Soit $\boldsymbol{X} = U_1 \cup U_2$ avec U_i ouvert et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. D'après la propriété universelle de la réunion disjointe l'application

$$U_1 \amalg U_2 \to \boldsymbol{X}\,, u_i \mapsto u_i$$

est une bijection continue. Elle est aussi clairement ouverte, c'est donc un homéomorphisme par 2.3.13.

(b) C'est le résultat fondamental. Raisonnons par l'absurde, si $\boldsymbol{I}$ est un intervalle qui n'est pas connexe, c'est la réunion disjointe de deux parties non vides F_1 et F_2, fermées dans $\boldsymbol{I}$. On peut supposer qu'il existe $t_1 \in F_1$ et $t_2 \in F_2$ tels que $t_1 < t_2$. On a alors la partition $[t_1, t_2] = F_1' \amalg F_2'$ où $F_i' := [t_1, t_2] \cap F_i$ est un fermé de $[t_1, t_2]$, donc un fermé de $\mathbb{R}$ (*cf.* 2.3.2). Comme le fermé F_2' est minoré par $t_1 \in F_1$, il contient sa borne inférieure $t_2' := \inf F_2' \in F_2$. Mais alors, le fermé $F_1' \cap [t_1, t_2']$ est majoré par $t_2' \in F_2$ et contient sa borne supérieure $t_1' \in F_1$.

12. Généralisation : Étant donnée une famille d'espaces topologiques $\{\boldsymbol{X}_i\}_{i \in \mathfrak{A}}$, un « *ouvert* » de $\coprod_{i \in \mathfrak{A}} \boldsymbol{X}_i$ est toute réunion d'ouverts des $\boldsymbol{X}_i$. Énoncer et prouver la propriété universelle correspondante.

13. On remarquera la symétrie des diagrammes (4) et (5), cela relève de la « *dualité* » des concepts sous-jacents.

Comme F_1 et F_2 sont disjoints, on a $t'_1 < t'_2$. Mais alors $]t'_1, t'_2[\cap \boldsymbol{I} = \emptyset$ et $\boldsymbol{I}$ n'est pas un intervalle.

(c) Si $\boldsymbol{X}$ n'est pas connexe, il est réunion disjointe de deux ouverts non vides $\boldsymbol{X} = U_0 \amalg U_1$. Soit $\gamma : [0,1] \to \boldsymbol{X}$ un chemin d'origine en U_0 et d'extrémité en U_1. On a alors $[0,1] = \gamma^{-1}(U_0) \amalg \gamma^{-1}(U_1)$, où les parties $\gamma^{-1}(U_i)$ sont ouvertes, par continuité de γ, et non vides. Ceci est contraire à la connexité de $[0,1]$ établie dans (b), donc $\boldsymbol{X}$ est connexe.

(d) Pour $x \in \boldsymbol{X}$, notons $\boldsymbol{C}_x$ l'ensemble des extrémités de tous les chemins d'origine x. Pour $y \in \boldsymbol{X}$, soit V_y un voisinage de y connexe par arcs et soit $z \in V_y$. Alors, $y \in \boldsymbol{C}_x$, si et seulement si $z \in \boldsymbol{C}_x$. En effet, si après un chemin de x à y, on continue avec un chemin y à z, le résultat est un chemin x à z, et vice-versa. Comme $\boldsymbol{X}$ est supposé localement connexe par arcs, on déduit que $\boldsymbol{C}_x$ et son complémentaire dans $\boldsymbol{X}$ sont tous les deux ouverts. La connexité de $\boldsymbol{X}$ force alors l'égalité $\boldsymbol{C}_x = \boldsymbol{X}$. □

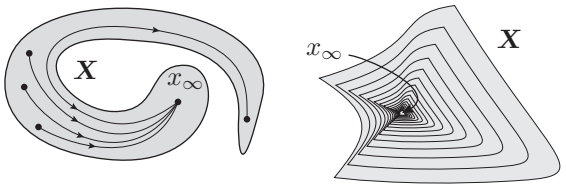
2.3.22. Exercice

1) Montrer qu'un intervalle réel $\boldsymbol{I}$ et $\mathbb{C}_u$ sont des espaces connexes. Montrer que $\mathbb{C}_u$ possède la propriété topologique suivante "*Pour tout $x \in \mathbb{C}_u$, l'espace $\mathbb{C}_u \backslash \{x\}$ est connexe*". Montrer qu'un intervalle réel *non vide* ne possède pas cette propriété. En déduire que $\boldsymbol{I}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{C}_u$.
2) Monter que si $\boldsymbol{C}$ est connexe non vide et si $\alpha : \boldsymbol{C} \to (\boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y})$ est continue, son image entièrement contenue dans $\boldsymbol{X}$ ou dans $\boldsymbol{Y}$. En particulier, si $f : C \to \mathbb{R}$ est continue et que $f^{-1}(0) = \emptyset$, alors ou bien $f > 0$, ou bien $f < 0$.

2.3.23. Contractibilité d'un espace topologique Un espace topologique $\boldsymbol{X}$ est dit « *contractile* », s'il existe une application continue

$$h : [0,1] \times \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$$

telle que $h(0, _) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ est l'identité, et $h(1, _) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ est une application constante vers un point x_∞.



(6)

Une telle application est souvent appelée une « *homotopie (de $\boldsymbol{X}$ vers x_∞)* ». Dans un tel cas, pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$, la courbe $t \mapsto h(t,x)$ est un chemin de x vers le point x_∞. L'application h « *déforme* » ainsi l'espace $\boldsymbol{X}$ continûment jusque le « rétracter » au point x_∞, ce qui explique l'appellatif de « contractile » pour un tel espace.

2.3.24. Exercice. Montrer que la propriété d'être contractile est topologique. Montrer que « *contractile* » implique « *connexe par arcs* » et donc « *connexe* ».

2.3.25. Deux exemples importants

a) Un « *ensemble étoilé* » de $\mathbb{R}^n$ est une partie $\boldsymbol{X}$ contenant un point $x_\infty \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $[x_\infty, x] \subseteq E$ (*cf.* figure de droite de (6)). L'ensemble $\boldsymbol{X}$ muni de la métrique euclidienne est contractile. En effet, l'application
$$(t, x) \mapsto h(t, x) := t\, x_\infty + (1 - t)\, x$$
répond à la question.

b) Le cercle unité $\mathbb{C}_u$, n'est pas contractile. En effet, raisonnons pas l'absurde et soit $h : [0, 1] \times \mathbb{C}_u$ une homotopie vers le point $1 \in \mathbb{C}_u$. Pour chaque $t \in [0, 1]$, notons $\gamma_t : \mathbb{C}_u \to \mathbb{C}$ le « *lacet* » ([14]) défini par $x \mapsto h(t, x)$. Le lacet γ_0 parcourt une fois le cercle unité, tandis que γ_1 est le lacet constant. La famille des lacets γ_t est une déformation continue de γ_0 sur γ_1, ils sont « *homotopes* ». La théorie de l'intégrale de Cauchy nous apprend l'invariance de l'intégrale curviligne de $\frac{dz}{z}$ le long de lacets homotopes de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, mais alors
$$2\pi i = \oint_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 0\,,$$
ce qui est évidemment faux.

2.3.26. Bords et intérieurs. La notion de bord ou d'intérieur d'un espace topologique n'a pas toujours de sens, mais nous verrons des catégories assez larges d'espaces où ces notions, complémentaires, peuvent être définies et sont de grande utilité.

Proposition. *Rappelons les définitions :*

- $\overline{\mathbb{D}}_u := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, *le disque unité (fermé).*
- $\mathbb{D}_u := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, *le disque unité ouvert, « intérieur » de* $\overline{\mathbb{D}}_u$.
- $\mathbb{C}_u := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, *le cercle unité, « bord » de* $\overline{\mathbb{D}}_u$.

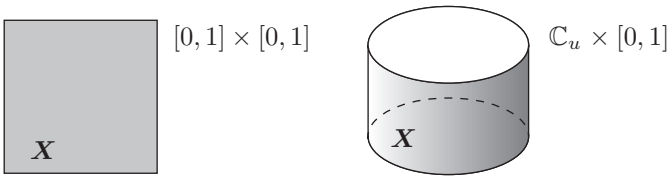
Soit $\alpha : \overline{\mathbb{D}}_u \to \overline{\mathbb{D}}_u$ un homéomorphisme. La restriction de α au bord (resp. intérieur) de $\overline{\mathbb{D}}_u$ est un homéomorphisme du bord (resp. de l'intérieur) de $\overline{\mathbb{D}}_u$.

Démonstration. Le bord $\mathbb{C}_u$ de $\overline{\mathbb{D}}_u$ de nature a priori métrique, est en fait de nature *topologique*. On a :
$$x \in \mathbb{C}_u \iff \overline{\mathbb{D}}_u\backslash\{x\} \text{ est un espace contractile} \qquad (*)$$
En effet, si $x \in \mathbb{C}_u$, l'ensemble $\overline{\mathbb{D}}_u\backslash\{x\}$ est toujours étoilé par rapport à 0, il est donc contractile (*cf.* 2.3.25-(a)). A contrario, si $x \in \mathbb{D}_u$ et si $\overline{\mathbb{D}}_u\backslash\{x\}$ était contractile, l'intégrale de Cauchy de $\frac{1}{z-x}$ le long du lacet $\mathbb{C}_u$ devrait être nulle ce qui est faux, tout comme dans l'exemple 2.3.25-(b).

Ainsi, lorsque α est un homéomorphisme, on a
$$\begin{aligned} x \in \mathbb{C}_u &\Leftrightarrow \overline{\mathbb{D}}_u\backslash\{x\} \text{ est contractile} \\ &\Leftrightarrow \alpha(\overline{\mathbb{D}}_u\backslash\{x\}) = \overline{\mathbb{D}}_u\backslash\{\alpha(x)\} \text{ est contractile} \Leftrightarrow \alpha(x) \in \mathbb{C}_u\,. \end{aligned}$$
C.Q.F.D. □

14. On appelle « *lacet (d'un espace $\boldsymbol{X}$)* » toute application continue $\gamma : \mathbb{C}_u \to \boldsymbol{X}$. Un lacet est donc un chemin $\gamma : [0, 1] \to \boldsymbol{X}$ vérifiant $\gamma(0) = \gamma(1)$.

2.3.27. Exercice. Soit $\boldsymbol{X}$ tantôt le carré $[0,1]\times[0,1]$ contenu dans $\mathbb{R}^2$, tantôt le cylindre $\mathbb{C}_u\times[0,1]$ contenu dans $\mathbb{C}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$, tous les deux munis de la métrique induite par la métrique euclidienne de l'espace ambiant.



On dira qu'un point x de $\boldsymbol{X}$ « *est intérieur* » s'il admet un voisinage homéomorphe au disque ouvert $\mathbb{D}_u$. L'ensemble de tels points, noté $\overset{\circ}{\boldsymbol{X}}$, est clairement ouvert, son complémentaire, le fermé $\partial\boldsymbol{X}:=\boldsymbol{X}\backslash\overset{\circ}{\boldsymbol{X}}$, est le « *bord de* $\boldsymbol{X}$ ».

Montrer que le bord du carré est connexe (2.3.20), tandis que celui du cylindre est la réunion disjointe de deux espaces connexes non vides. Puis, en vous inspirant de la proposition 2.3.26, conclure que le carré et le cylindre ne peuvent être homéomorphes.

2.3.28. Espace topologique quotient. Nous étendons maintenant la notion d'ensemble quotient à celle d'« *espace topologique quotient* ».

Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $\boldsymbol{X}$ et $\nu:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ la surjection canonique (2.1). Une partie $\tilde{U}$ de l'ensemble $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ des classes modulo $\mathcal{R}$ sera dite « *ouvert (de l'espace quotient)* », si et seulement si l'ensemble $\nu^{-1}(\tilde{U})$ est un ouvert de $\boldsymbol{X}$. On vérifie sans difficulté que ces ouverts définissent une topologie sur $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ (*cf.* 2.3.1), c'est la « *topologie quotient* ». La surjection canonique est alors clairement continue.

2.3.29. Remarque. La topologie quotient est la plus fine [15] rendant la projection $\nu_{\mathcal{R}}:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ continue.

2.3.30. Exercice. Montrer qu'une partie $\boldsymbol{F}$ de $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ est fermée, si et seulement si $\nu^{-1}(\boldsymbol{F})$ est fermée dans $\boldsymbol{X}$.

2.3.31. Exercice. Montrer que si $\boldsymbol{X}$ est muni de la topologie discrète, il en est de même de $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$. Qu'en est-il si $\boldsymbol{X}$ est muni de la topologie grossière ?

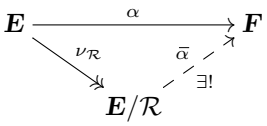
2.3.32. Propriété universelle de l'espace topologique quotient. *Avec les données en cours, pour toute application continue d'espaces topologiques* $\alpha:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ « *compatible à* $\mathcal{R}$ », i.e. *telle que*

$$(x\ \mathcal{R}\ y)\Longrightarrow\big(\alpha(x)=\alpha(y)\big)\,,$$

il existe une et une seule application continue

$$\bar{\alpha}:\boldsymbol{X}/\mathcal{R}\to\boldsymbol{Y}$$

telle que $\alpha=\bar{\alpha}\circ\nu_{\mathcal{R}}$ *:*



$$\bar{\alpha}\big(C_{\mathcal{R}}(x)\big):=\alpha(x)\,.$$

15. Celle qui a le plus d'ouverts.

Démonstration. D'un point de vue ensembliste, il n'y a rien de nouveau par rapport à 2.1.1. Il faut donc juste vérifier que $\bar{\alpha}$ est continue. Or, par définition, pour tout ouvert $\boldsymbol{V}$ de $\boldsymbol{Y}$, on a

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}^{-1}(\boldsymbol{V}) \text{ est ouvert dans } \boldsymbol{X}/\mathcal{R} &\iff \nu_{\mathcal{R}}^{-1}\big(\bar{\alpha}^{-1}(\boldsymbol{V})\big) \text{ est ouvert dans } \boldsymbol{X} \\ &\iff \alpha^{-1}(\boldsymbol{V}) \text{ est ouvert dans } \boldsymbol{X}\,,\end{aligned}$$

et la continuité de α permet de conclure. □

2.3.33. Applications ouvertes et fermées. Une application $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est dite « *ouverte* » (resp. « *fermée* ») si pour tout ouvert (resp. fermé) $W \subseteq \boldsymbol{X}$ l'image $\alpha(W)$ est ouverte (resp. fermée) dans $\boldsymbol{Y}$.

2.3.34. Exercice

1) Soit $\alpha : \boldsymbol{X} \twoheadrightarrow \boldsymbol{Y}$ une *surjection* continue et ouverte (resp. fermée). Notons $x\ \mathcal{R}_\alpha\ x'$, si et seulement si $\alpha(x) = \alpha(x')$. Montrer que l'application induite $\bar{\alpha} : \boldsymbol{X}/\mathcal{R}_\alpha \to \boldsymbol{Y}$ est un homéomorphisme.
2) Soit $\{U_i\}_{i\in\mathfrak{A}}$ une famille d'ouverts de $\boldsymbol{X}$, telle que $\boldsymbol{X} = \bigcup_{i\in\mathfrak{A}} U_i$. L'application canonique de la réunion disjointe d'espaces $\nu : \coprod_{i\in\mathfrak{A}} U_i \to \boldsymbol{X}$ (*cf.* bas de page 12, p. 16) est ouverte. En déduire que l'espace topologique $\boldsymbol{X}$ réalise le quotient $(\coprod_{i\in\mathfrak{A}} U_i)/\mathcal{R}_\nu$. Appliquer ceci pour prouver que $A \subseteq \boldsymbol{X}$ est fermé, si et seulement si $A \cap U_i$ est fermé pour chaque $i \in \mathfrak{A}$. (2.3.30)

2.3.35. Séparation de l'espace quotient. Il existe énormément de relations d'équivalence sur un ensemble et lorsque celui-ci est un espace topologique, les topologies quotient peuvent être assez déroutantes. Un propriété que l'on perd facilement dans un quotient est la séparation. Le critère suivant est fort utile dans la pratique.

2.3.36. Proposition (Critère de séparation du quotient). *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique et soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $\boldsymbol{X}$. Notons également par $\mathcal{R}$ le sous-ensemble de $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ des couples (x,y) tels que $x\,\mathcal{R}\,y$. L'espace topologique $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ est séparé, si et seulement si $\mathcal{R}$ est une partie fermée de $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$.*

Démonstration. Nous allons appliquer le critère de séparation 2.3.17 à l'espace $(\boldsymbol{X}/\mathcal{R})\times(\boldsymbol{X}/\mathcal{R})$.

L'application surjective

$$\nu\times\nu : \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X} \twoheadrightarrow (\boldsymbol{X}/\mathcal{R})\times(\boldsymbol{X}/\mathcal{R})$$

définit sur $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ la relation d'équivalence

$$(x,y)\ \mathcal{R}_{12}\ (x',y') \Leftrightarrow_{\text{def}} (\nu(x)=\nu(x'))\ \&\ (\nu(y)=\nu(y'))$$

et par la propriété universelle du quotient topologique (2.1.1), on déduit la *bijection* continue

$$(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X})/\mathcal{R}_{12} \xrightarrow{\overline{\nu\times\nu}} (\boldsymbol{X}/\mathcal{R})\times(\boldsymbol{X}/\mathcal{R})$$

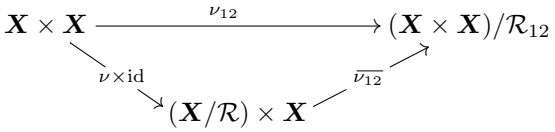
Nous allons montrer que c'est un homéomorphisme, ce pour quoi il suffira de vérifier qu'elle est ouverte (2.3.13).

Notons $\nu_{12} : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \twoheadrightarrow (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X})/\mathcal{R}_{12}$ la projection canonique. La relation d'équivalence :

$$(x, y)\ \mathcal{R}_1\ (x', y') \Leftrightarrow_{\text{def}} (x\ \mathcal{R}\ x')\ \&\ (y = y')\,.$$

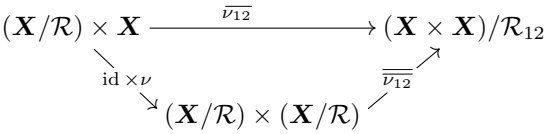
est compatible à ν_{12} ce qui donne, encore une fois par la propriété universelle du quotient, la factorisation

$$\nu_{12} = \overline{\nu_{12}} \circ (\nu \times \mathrm{id})\,.$$



Par le même type de raisonnement, que nous laissons aux soins du lecteur, l'application $\overline{\nu_{12}}$ se factorise à son tout à travers $(\boldsymbol{X}/\mathcal{R}) \times (\boldsymbol{X}/\mathcal{R})$ en

$$\overline{\nu_{12}} = \overline{\overline{\nu_{12}}} \circ (\mathrm{id} \times \nu)\,.$$



On vérifie ensuite que la composée

$$(\boldsymbol{X}/\mathcal{R}) \times (\boldsymbol{X}/\mathcal{R}) \xrightarrow{\overline{\overline{\nu_{12}}}} (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X})/\mathcal{R}_{12} \xrightarrow{\overline{\nu \times \nu}} (\boldsymbol{X}/\mathcal{R}) \times (\boldsymbol{X}/\mathcal{R})$$

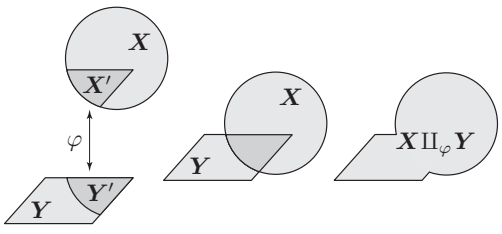
est bien l'identité et l'on conclut que $\overline{\nu \times \nu}$ est un homéomorphisme.

Maintenant, par le critère de séparation 2.3.17, l'espace $(\boldsymbol{X}/\mathcal{R})$ est séparé, si et seulement si la diagonale $\Delta_{\boldsymbol{X}/\mathcal{R}}$ de $(\boldsymbol{X}/\mathcal{R}) \times (\boldsymbol{X}/\mathcal{R})$ est fermée. Or, ceci équivaut à la fermeture de $\overline{\nu \times \nu}^{-1}(\Delta_{\boldsymbol{X}/\mathcal{R}})$ dans $(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X})/\mathcal{R}_{12}$ puisque $\overline{\nu \times \nu}$ est un homéomorphisme, et ceci équivaut à son tour à la fermeture de l'ensemble

$$\nu_{12}^{-1}\big(\overline{\nu \times \nu}^{-1}(\Delta_{\boldsymbol{X}/\mathcal{R}})\big) = (\nu \times \nu)^{-1}(\Delta_{\boldsymbol{X}/\mathcal{R}}) = \mathcal{R}\,,$$

par définition de la topologie quotient (*cf.* 2.3.30). □

2.3.37. Recollement de deux espaces topologiques. Nous reprenons maintenant le problème du recollement d'ensembles posé dans la section 2.2, mais cette fois pour des espaces topologiques. L'idée est la même à ceci près que l'on se donne maintenant des espaces topologiques $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$, des sous-espaces $\boldsymbol{X}' \subseteq \boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}' \subseteq \boldsymbol{Y}$, et une identification d'espaces topologiques $\varphi : \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{Y}'$, c'est-à-dire, un homéomorphisme.



Nous avons déjà discuté la nature de l'ensemble $\boldsymbol{X} \amalg_\varphi \boldsymbol{Y}$ qui est le quotient de la réunion disjointe $\boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y}$ modulo la relation d'équivalence engendrée par les

couples $(x, \varphi(x))$. La définition de l'espace topologique qui recolle les données en cours et l'exact analogue de la même idée. On pose

$$\boxed{\boldsymbol{X} \amalg_\varphi \boldsymbol{Y} := (\boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y})/\mathcal{R}_\varphi}$$

où dans le membre de droite, l'ensemble $(\boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y})/\mathcal{R}_\varphi$ est muni de la topologie quotient telle qu'introduite dans 2.3.28.
Avec cette définition, l'analogue de la proposition 2.2.1 est vérifiée.

2.3.38. Proposition. *Avec les données en cours, notons*

$$\nu : \boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X} \amalg_\varphi \boldsymbol{Y}$$

la surjection canonique, i.e. *celle qui fait correspondre à un élément sa classe d'équivalence. Notons $\tilde{\boldsymbol{X}}$ et $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ les images de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ dans $\boldsymbol{X} \amalg_\varphi \boldsymbol{Y}$ respectivement. Alors*

a) *Supposons les parties $\boldsymbol{X}'$ et $\boldsymbol{Y}'$ toutes deux ouvertes ou toutes deux fermées. Alors, les parties $\tilde{\boldsymbol{X}}$ et $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ sont respectivement ouvertes ou fermées et les restrictions de ν respectivement à $\boldsymbol{X}'$ et $\boldsymbol{Y}'$, notées*

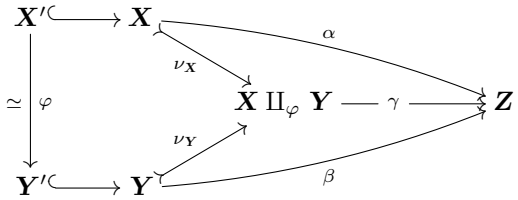
$$\nu_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \to \tilde{\boldsymbol{X}}\,, \quad \nu_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{Y} \to \tilde{\boldsymbol{Y}}\,,$$

sont des homéomorphismes qui identifient $\boldsymbol{X}'$ et $\boldsymbol{Y}'$ à $\tilde{\boldsymbol{X}} \cap \tilde{\boldsymbol{Y}}$

b) *Pour toute paire d'applications $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Z}$ et $\beta : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$, telles que*

$$\alpha(a) = \beta(\varphi(a))\,, \text{ pour tout } a \in \boldsymbol{X}',$$

l'application ensembliste $\gamma : \boldsymbol{X} \amalg_\varphi \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ qui recolle α et β (cf. 2.2.1-(c)-(ii)), est continue, si et seulement si α et β le sont. ([16])



Indication. Le fait que les applications de (a) sont des bijections continues est clair. Plaçons-nous dans le cas où $\boldsymbol{X}'$ et $\boldsymbol{Y}'$ sont toutes deux ouvertes.

La surjection canonique

$$\nu : \boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X} \amalg_\varphi \boldsymbol{Y}$$

est ouverte. En effet, il suffit de montrer que si U est un ouvert de $\boldsymbol{X}$, son image $\tilde{U} := \nu(U)$ est un ouvert de $\boldsymbol{X} \amalg_\varphi \boldsymbol{Y}$, c'est-à-dire : $\nu^{-1}(\tilde{U})$ est un ouvert. Or,

$$\nu^{-1}(\tilde{U}) = U \ \amalg \ \varphi(U \cap \boldsymbol{X}')\,.$$

On remarque alors que :

- $U \cap \boldsymbol{X}'$ est ouvert dans $\boldsymbol{X}'$ par définition de topologie induite,
- $\varphi\big(U \cap \boldsymbol{X}'\big)$ est ouvert dans $\boldsymbol{Y}'$ puisque φ est un homéomorphisme,
- un ouvert de $\boldsymbol{Y}'$ est ouvert dans $\boldsymbol{Y}$ puisque $\boldsymbol{Y}'$ est ouvert dans $\boldsymbol{Y}$ (2.3.2),

16. Le symbole '$\simeq$' indique un homéomorphisme.

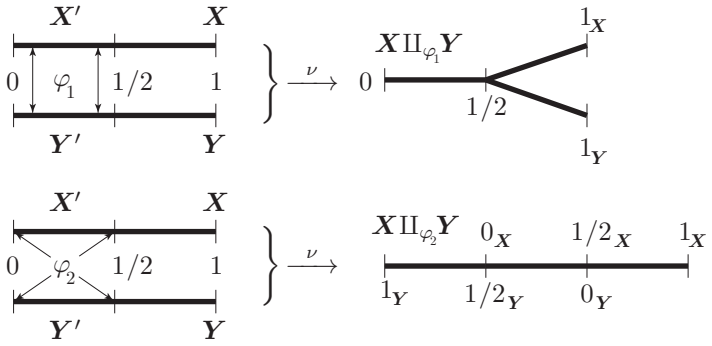
Par conséquent, $\nu^{-1}(\tilde{U})$ est réunion (disjointe) d'un ouvert de $\boldsymbol{X}$ et d'un ouvert de $\boldsymbol{Y}$, c'est donc un ouvert de $\boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y}$ par définition de la topologie de la réunion disjointe (2.3.19).

En particulier, $\tilde{\boldsymbol{X}}$ est ouvert dans $\boldsymbol{X} \amalg_\varphi \boldsymbol{Y}$ et $\nu_{\boldsymbol{X}}$ est un homéomorphisme. Le même raisonnement en remplaçant $\boldsymbol{X}$ par $\boldsymbol{Y}$ complète la preuve dans le cas "ouvert". Le cas fermé se démontre de la même manière. □

2.3.39. Commentaire. Il est important de retenir le fait que lorsque $\boldsymbol{X}'$ et $\boldsymbol{Y}'$ sont des parties ouvertes, l'espace $\boldsymbol{X} \amalg_\varphi \boldsymbol{Y}$ est la réunion de deux ouverts $\tilde{\boldsymbol{X}}$ et $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ et que ceux-ci sont respectivement homéomorphes à $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$. Il s'ensuit que toute analyse de nature « *locale* », *i.e.* sur des voisinages assez petits des points de $\boldsymbol{X} \amalg_\varphi \boldsymbol{Y}$, peut se faire tantôt dans $\boldsymbol{X}$ tantôt dans $\boldsymbol{Y}$.

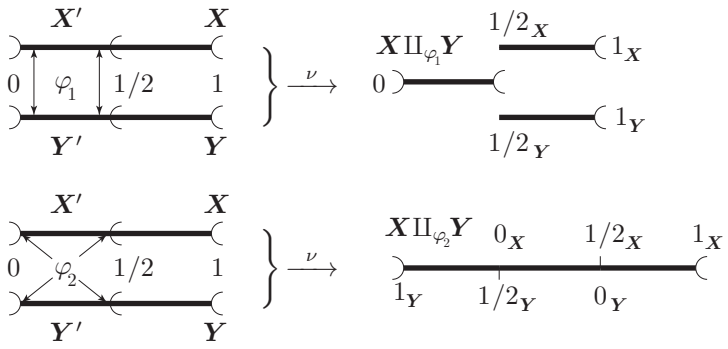
2.3.40. Exemples de recollement d'espaces topologiques. Contrairement au recollement des ensembles, le recollement de topologies est une source d'espaces qui défient l'imagination, notamment en raison de la non séparation. Les exemples suivants sont très classiques

1) Soient $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, puis $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{Y}' = [0,1/2]$ et $\varphi_1 = \mathrm{id} : \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{Y}'$ et $\varphi_2 : t \mapsto 1/2 - t$. Les recollements $\boldsymbol{X} \amalg_{\varphi_i} \boldsymbol{Y}$ sont les ensembles suivants



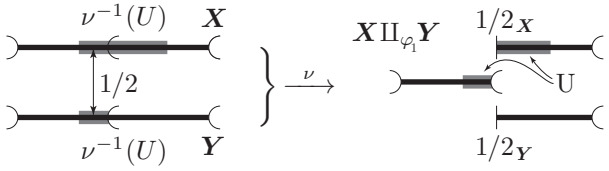
munis de la topologie de la métrique euclidienne du plan de dessin $\mathbb{R}^2$.

2) Soient $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} =]0,1[\subseteq \mathbb{R}$, puis $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{Y}' =]0,1/2[$ et $\varphi_1 = \mathrm{id} : \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{Y}'$ et $\varphi_2 : t \mapsto 1/2 - t$. Les recollements $\boldsymbol{X} \amalg_{\varphi_i} \boldsymbol{Y}$ sont les ensembles suivants



Dans le recollement $\boldsymbol{X} \amalg_{\varphi_1} \boldsymbol{Y}$, on a $1/2_{\boldsymbol{X}} \neq 1/2_{\boldsymbol{Y}}$. Un ouvert U de $\boldsymbol{X} \amalg_{\varphi_1} \boldsymbol{Y}$ contenant $1/2_{\boldsymbol{X}}$ est une partie telle que $\nu^{-1}(U)$ est un ouvert contenant le point $1/2$ de $\boldsymbol{X}$, et contenant par conséquent des points de la forme $1/2 - \epsilon$

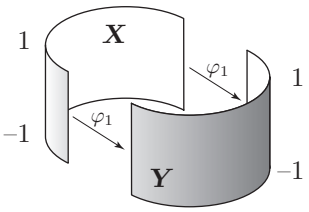
pour $\epsilon > 0$ assez petit, or de tels points s'identifient avec leur pendant dans $\boldsymbol{Y}$, de sorte que tout ouvert de $\boldsymbol{X} \amalg_{\varphi_1} \boldsymbol{Y}$ contenant $1/2_{\boldsymbol{X}}$ rencontre tout ouvert de $\boldsymbol{X} \amalg_{\varphi_1} \boldsymbol{Y}$ contenant $1/2_{\boldsymbol{Y}}$. L'espace topologique $\boldsymbol{X} \amalg_{\varphi_1} \boldsymbol{Y}$ n'est donc pas séparé et ne peut donc pas être réalisé comme sous-espace d'un espace métrique !



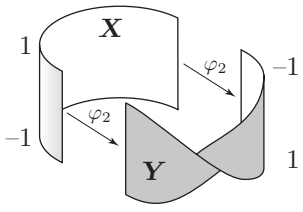
Connexité par arcs. Comme $\tilde{\boldsymbol{X}}$ et $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ sont homéomorphes à $[0,1]$ et comme $1/4 \in \tilde{\boldsymbol{X}} \cap \tilde{\boldsymbol{Y}}$, deux points de $\boldsymbol{X} \amalg_{\varphi_1} \boldsymbol{Y}$ peuvent toujours être reliés par un chemin passant par $1/4$, et aussi par $1/2 - \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ assez petit. Il s'ensuit qu'il n'y a pas de plus court chemin reliant $1/2_{\boldsymbol{X}}$ et $\mathbf{1}/2_{\boldsymbol{Y}}$, le inf des longueurs des tels chemins est nul. *C'est le paradoxe typique d'un espace non séparé : des points distincts peuvent se trouver à distance nulle !!*

3) **Les exemples de la Figure 1 (p. 8).** Ces exemples peuvent être obtenus en recollant juste les deux "briques" fermées : $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}=[0,1] \times [-1,1]$ en identifiant $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{Y}' = \{0,1\} \times [-1,1]$ par les bijections

$$\begin{cases} \varphi_1 = \{0,1\} \times [-1,1] \to \{0,1\} \times [-1,1]\,, & (x,y) \mapsto (x,y) \\ \varphi_2 = \{0,1\} \times [-1,1] \to \{0,1\} \times [-1,1]\,, & \begin{cases} (0,t) \mapsto (0,t) \\ (1,t) \mapsto (1,-t) \end{cases} \end{cases}$$



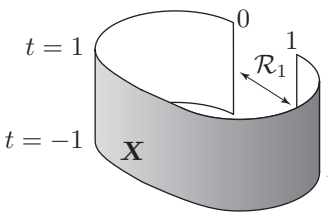
cylindre



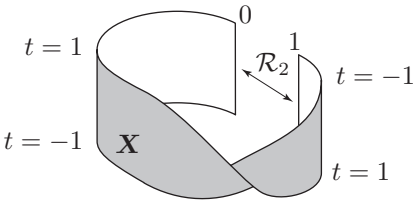
ruban de Möbius

Ces espaces peuvent également être obtenus en quotientant une seule "brique" $\boldsymbol{X} = [0,1] \times [-1,1]$ respectivement par les relations d'équivalence $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ engendrées par les relations

$$\begin{cases} \forall t \in [-1,1]\,, & (0,t)\ \mathcal{R}_1\ (1,t)\,, \\ \forall t \in [-1,1]\,, & (0,t)\ \mathcal{R}_2\ (1,-t)\,, \end{cases}$$

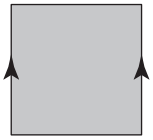


cylindre

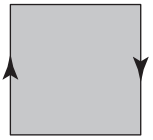


ruban de Möbius

Il est d'usage de représenter ces identifications par les dessins



cylindre



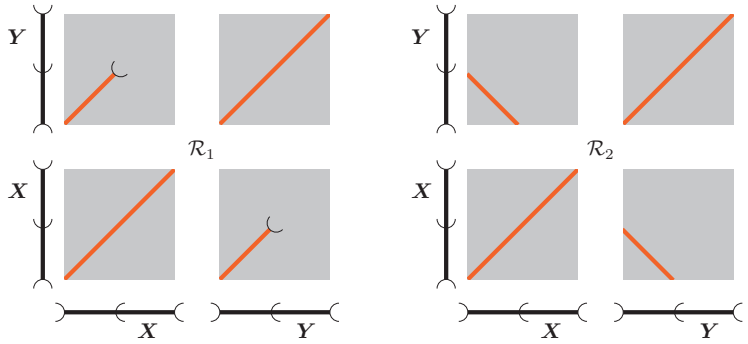
ruban de Möbius

où les côtés « *fléchés* » son à identifier suivant le sens des flèches.

On prendra garde du fait que, contrairement à la construction par recollement où chaque brique $\boldsymbol{X}$ reste homéomorphe à son image, dans la construction par passage au quotient de $\boldsymbol{X}$, la surjection canonique $\nu : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ n'est généralement pas un homéomorphisme.

2.3.41. Exercice. En vous inspirant de la définition du « *bord et intérieur* » de 2.3.26 et de 2.3.27, montrer que le bord du ruban de Möbius est homéomorphe à $\mathbb{C}_u$, tandis que celui du cylindre est homéomorphe à la réunion disjointe de deux copies de $\mathbb{C}_u$. En déduire que ces deux espaces ne sont pas homéomorphes (*cf.* 2.3.21, 2.3.22).

2.3.42. Commentaire. Il est intéressant d'observer l'utilité du critère de séparation du quotient 2.3.36. Les images suivantes montrent en rouge les sous-ensembles $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ de $(\boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y}) \times (\boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y})$ correspondant aux recollements de l'exemple 2, respectivement $\boldsymbol{X} \amalg_{\varphi_1} \boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{X} \amalg_{\varphi_2} \boldsymbol{Y}$.



On y voit très bien que $\mathcal{R}_1$ n'est pas fermé alors que $\mathcal{R}_2$ l'est.

2.3.43. Exercice. Appliquer le critère de séparation 2.3.36 aux quotients $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}_i$ de l'exemple 3 qui donnent lieu au cylindre et au ruban de Möbius. *Indication :* Montrer qu'un recollement par des parties fermées d'espaces séparés est toujours séparé, pour cela remarquer que $\mathcal{R}_i \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}$ est la réunion de trois graphes d'applications continues

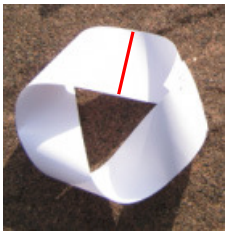
$$\mathcal{R}_i = \mathrm{Gr}(\mathrm{id}_{\boldsymbol{X}}) \cup \mathrm{Gr}(\varphi_i) \cup \mathrm{Gr}(\varphi_i^{-1}) \,,$$

et utiliser ensuite 2.3.18.

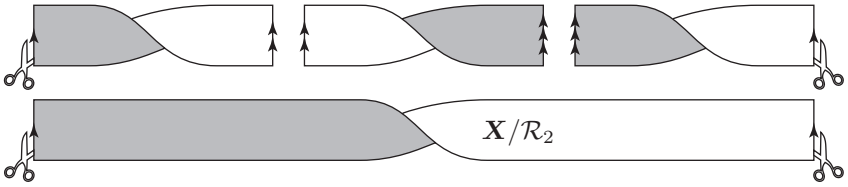
2.3.44. Remarque. Les exemples précédents sont de deux types assez caractéristiques. Dans le premier et troisième, on recolle en identifiant des parties fermées, tandis que dans le second, on identifie des parties ouvertes. Dans tous les cas, $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ sont homéomorphes à leurs images $\nu\boldsymbol{X}$ et $\nu\boldsymbol{Y}$ dans $\boldsymbol{X} \amalg_{\varphi_i} \boldsymbol{Y}$ conformément à la proposition 2.3.38.

2.3.45. Commentaire. Les techniques de recollement ou de quotient topologique permettent également de construire des homéomorphismes entre des espaces qui peuvent paraître de prime abord non homéomorphes.

Par exemple, le logo universel des matériaux recyclables depuis 1970, obtenu en faisant trois demi-tours sur un ruban rectangulaire avant de coller son bord, est homéomorphe au ruban de Möbius $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}_2$ de l'exemple 2.3.40-(3). On s'en aperçoit en le découpant à l'aide d'une paire de ciseaux suivant le trait rouge dans la photo. ([17])







2.4. Recollement d'une famille d'espaces topologiques.

La procédure de recollement décrite dans les paragraphes précédents, peut être reprise pour coller sur $\boldsymbol{X}\amalg_\varphi \boldsymbol{Y}$ une nouvelle partie $\boldsymbol{Z}$ suivant un certain sous-espace $\boldsymbol{Z'}$, et nous pouvons bien évidemment continuer d'itérer l'idée indéfiniment.

2.4.1. Recollements ouverts et recollements fermés. L'assertion (a) de la proposition 2.3.38 relève tout l'intérêt des recollements suivant des parties toujours ouvertes ou toujours fermées. On désignera ces types de recollements par les expressions « *recollement ouvert* » ou « *recollement fermé* ».

Dans la suite nous allons nous intéresser aux recollements ouverts puisqu'ils sont mieux adaptés au calcul différentiel, mais la plupart de ce que nous allons dire se transpose sans difficulté aux recollements fermés.

Supposons donc que nous soyons partis d'une famille finie d'espaces topologiques $\{U_i\}_{i=0,\dots,m}$ et que nous recollions U_1 à U_0 suivant φ_1 (qui identifie donc des ouverts U_1' et U_2'), puis U_2 à $U_0\amalg_{\varphi_1} U_1$ suivant φ_2, et ainsi de suite. Notons l'espace ainsi construit par

$$\boldsymbol{M} := (\cdots(U_0\amalg_{\varphi_1} U_1)\amalg_{\varphi_2}\cdots)\amalg_{\varphi_m} U_m$$

L'itération de la proposition 2.3.38 donne pour chaque $i\in[\![0,m]\!]$, une application continue

$$\nu_i : U_i \to \boldsymbol{M}\,, \tag{7}$$

17. L'homéomorphisme en question ne se prolonge cependant pas à un homéomorphisme de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$. C'est là, le point de départ de la « *théorie de noeuds* ».

homéomorphisme sur son image, la partie $\tilde{U}_i := \nu_i(U_i)$ ouverte dans $\boldsymbol{M}$. Nous avons donc le recouvrement ouvert

$$\boldsymbol{M} := \bigcup_{i=0,\dots,m} \tilde{U}_i$$

et la surjection naturelle (*cf.* bas de page 12, p. 16)

$$\nu = \coprod_{i=0,\dots,m} U_i \to \bigcup_{i=0,\dots,m} \tilde{U}_i \;=\; \boldsymbol{M}\,, \tag{8}$$

induite par la famille $\{\nu_i : U_i \to \tilde{U}_i\}_{i=0,\dots,m}$, clairement continue d'après la propriété universelle de la réunion disjointe d'espaces topologiques 2.3.19.

2.4.2. Théorème. *Avec les données en cours,*

a) *L'application* (8) *est ouverte et induit un homéomorphisme par passage au quotient*

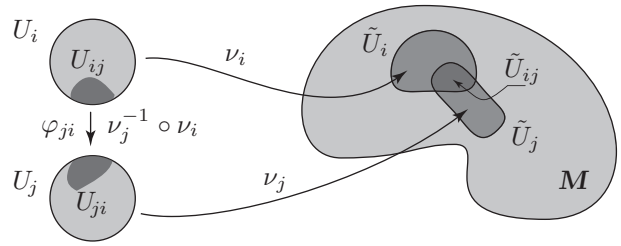
$$\bar{\nu} : \Big(\coprod_{i=0,\dots,m} U_i \Big) \Big/ \mathcal{R}_\nu \to \boldsymbol{M}\,, \tag{9}$$

où $\mathcal{R}_\nu$ dénote la relation

$$\big(x\ \mathcal{R}_\nu\ y\big) \Longleftrightarrow_{\text{def}} \big(\nu(x) = \nu(y)\big)\,.$$

b) *Pour $i, j \in [\![0, m]\!]$, notons $\tilde{U}_{ij} := \tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$, puis $U_{ij} := \nu_i^{-1}\big(\tilde{U}_{ij}\big)$ et posons*

$\varphi_{ji} : U_{ij} \to U_{ji}$
$\varphi_{ji} := \nu_j^{-1} \circ \nu_i$



   i) *L'application $\varphi_{ji} : U_{ij} \to U_{ji}$ est un homéomorphisme.*
   ii) *Pour $i \in [\![0, m]\!]$, on a $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{U_i}$*
   iii) *Pour $i, j, k \in [\![0, m]\!]$, on a l'égalité*

$$\varphi_{ki} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ji}\,, \tag{10}$$

   sur $\varphi_{ji}^{-1}(U_{jk} \cap U_{ji}) = \nu_i^{-1}\big(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \cap \tilde{U}_k\big)$.

c) *Dans (a), la relation $\mathcal{R}_\nu$ est la relation d'équivalence sur $\coprod_{i=0,\dots,m} U_i$ « engendrée »* [18] *par les couples $(x, \varphi_{ij}(x))$, avec $x \in U_{ij}$, et $i, j \in [\![0, m]\!]$.*

d) *$\boldsymbol{M}$ est séparé, si et seulement si la partie $\mathcal{R}_\nu$ est fermée dans $\Big(\coprod_{i=0,\dots,m} U_i\Big)^2$*

Démonstration. L'assertion (a) est conséquence immédiate de l'exercice 2.3.33. Les autres affirmations son laissées aux soins du lecteur. □

18. Étant donné un ensemble E et une partie $A \subseteq E \times E$, la « *relation d'équivalence engendrée par A* », notée $\mathcal{R}_A$, est l'intersection des relations d'équivalences $\mathcal{R}$ qui contiennent A, *i.e.* $\mathcal{R}_A := \bigcap_{\mathcal{R} \supseteq A} \mathcal{R}$ (vérifier que c'est encore une relation d'équivalence).

2.4.3. Commentaire. Lorsque $m = 1$, on retrouve la situation du recollement de deux ouverts, la proposition précédente est donc la généralisation de la procédure de recollement à un nombre fini quelconque d'ouverts. Sur ce point, il convient de relever quelques faits importants.

- L'assertion (b) constitue une définition de $\boldsymbol{M}$ comme recollement d'une famille arbitraire (pas seulement finie) d'ouverts.
- L'ordre des recollements n'est pas pertinent, seule la manière dont les ouverts se « *chevauchent* » est essentielle, ceci concerne les parties U_{ij} et les homéomorphismes $\varphi_{ji} : U_{ij} \to U_{ji}$.
- Le même théorème pour un recollement de fermés utilise le fait que l'application ν est fermée, et ceci n'est garanti en général que lorsque la famille à recoller est de cardinal fini, ce qui constitue une différence significative entre les deux procédures.

3. Variétés

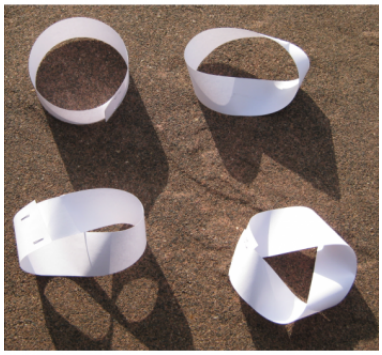
Le théorème 2.4.2 donne le paradigme des définitions des objets d'étude de diverses branches de mathématiques. Dans ce théorème, les espaces U_i peuvent être très différents les uns des autres, mais dans la pratique il seront d'une nature assez simple, pour ainsi dire « *élémentaire* ». L'idée alors pourra être de comprendre (voire de classifier) les espaces plus généraux, les « *variétés* », dont ces parties représentent la « *vision locale* », on dit aussi : « *en sont les modèles locaux* ».

Par exemple, dans l'immensité de l'espace tridimensionnel dans lequel nous vivons, nous ne percevons que notre proximité à l'échelle humaine et nous en avons seulement une vision locale qui est celle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ ([19]). On peut donc imaginer (ou postuler) que notre univers est un certain recollement d'ouverts chacun de la forme $\mathbb{R}^3$. C'est le postulat de l'« *homogénéité de l'espace* » (forme d'isotropie), si cher aux physiciens, et sans quoi il serait difficile de progresser dans l'analyse du monde. À partir de ce postulat, on peut se demander de combien de manières différentes (non homéomorphes) peut se présenter l'univers qui nous entoure. C'est une question de « *vision globale* » par opposition à notre « *vision locale* » ([20]). Par exemple, si nous étions des créatures vivant dans un monde à seulement deux dimensions, notre vision locale serait celle de $\mathbb{R}^2$, mais notre univers global pourrait être un cylindre, un ruban de Möbius (*cf.* 2.3.41), ou encore d'autres espaces, peut être même non séparés !

19. La structure euclidienne ou « *plate* » est intimement liée au fait que le rapport entre circonférence et diamètre d'un cercle est π, une valeur plus petite correspond à des espaces de courbure positive (sphère), et plus grande à des espaces de courbure négative (selle de cheval). L'expérience qui nous mène à la détermination du dit rapport concerne des magnitudes à notre échelle humaine, donc "petites", autrement dit « *locales* ».

20. On tombe ici dans le problème de la classification des variétés riemanniennes de dimension 3, problème qui est resté ouvert jusqu'en 2003 lorsque le mathématicien russe Grigori Perelman à prouve la conjecture de géométrisation de Thurston, formulée en 1976, qui proposait sans preuve une réponse à cette question.

Deux nombres sont rattachés à une variété : sa « *classe de différentiabilité :* $\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1, \ldots, \mathcal{C}^r, \ldots, \mathcal{C}^\infty$ » et sa « *dimension :* $0, 1, \ldots, n, \ldots$ ». Les variétés de dimension n sont des objets qui prennent naissance lorsque l'on cherche à étendre l'espace affine de dimension n, noté $\mathbb{R}^n$, « au delà de ses limites naturelles ». Si dans la figure 1, on voit dans la brique de base une représentation du plan affine $\mathbb{R}^2$, les figures de droite représentent deux extensions possibles de l'espace. Ce sont des exemples de variétés de classe $\mathcal{C}^0$ et de dimension 2. Enfin, si dans la manière de recoller les briques, on impose des conditions de « *lissité* » supplémentaires, on obtient des exemples de variétés de classes de différentiabilité supérieures (sans plis "jusqu'à l'ordre n"), et toujours de la même dimension.



3.1. Variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^k$

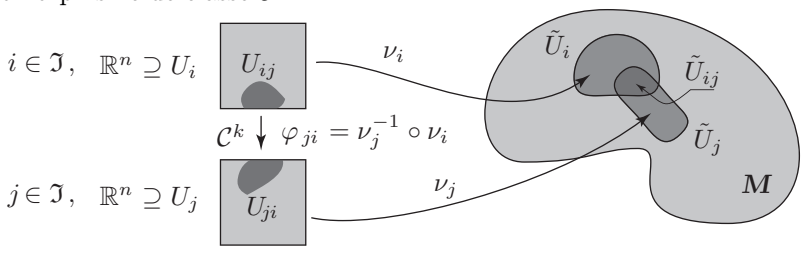
Dans ce type d'espace, le modèle local est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3.1.1. Définition. On appelle « *variété différentielle de dimension n et de classe $\mathcal{C}^k$* » la donnée simultanée de

- un espace topologique $\boldsymbol{M}$;
- un recouvrement ouvert $\boldsymbol{M} = \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} \tilde{U}_i$;
- une famille indexée par $i \in \mathfrak{I}$ d'homéomorphismes $\nu_i : U_i \to \tilde{U}_i$, où U_i est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, appelés « *cartes locales* », telle que, pour chaque couple $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$, l'application

$$\varphi_{ji} : U_{ij} \to U_{ji}\,, \quad \varphi_{ij} = \nu_j^{-1} \circ \nu_i\,,$$

avec $U_{ij} := \nu_i^{-1}(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$, appelée « *application de transition* », est un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$.



3.1.2. Proposition. *Il y a équivalence entre la donnée d'une variété différentielle suivant la définition 3.1.1, et la donnée de l'ensemble d'indices $\mathfrak{I}$, d'une famille $\{U_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ et pour chaque couple $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$, d'un ouvert $U_{ij} \subseteq U_i$ et d'une application de transition*

$$\varphi_{ji} : U_{ij} \to U_{ji}\,,$$

qui est un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ tel que

- *pour tout $i \in \mathfrak{I}$, on a $U_{ii} = U_i$ et $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{U_i}$;*

- *pour tout triplet* $(i,j,k) \in \mathfrak{I}^3$, *on a*
$$\varphi_{ki} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ji}\,, \tag{11}$$
sur l'ouvert $\varphi_{ji}^{-1}(U_{jk} \cap U_{ji})$.

Indication. Appliquer le théorème 2.4.2. □

3.1.3. Remarques

a) Dans beaucoup d'ouvrages, on demande des propriétés supplémentaires aux variétés, par exemple être séparées et dénombrables à l'infini [21]. Ce sont là des propriétés souhaitables lorsque l'on cherche à étendre la théorie de la mesure et de l'intégration aux variétés, ce qui n'est pas le but de ces notes, nous n'insisterons donc pas sur elles.

b) Dans notre définition de variété, les modèles locaux sont les ouverts de $\mathbb{R}^n$, tous les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Il est pourtant possible de donner une présentation encore plus simple avec comme modèle local uniquement l'espace affine $\mathbb{R}^n$ tout entier, mais cela rend la preuve de certaines affirmations plus élaborée. Par exemple, le fait : *un ouvert d'une variété de classe* $\mathcal{C}^k$ *est une variété de classe* $\mathcal{C}^k$ est immédiat à partir de notre définition, mais demande plus de travail avec l'autre.

3.1.4. Exercice. Supposons donnée une structure de variété de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\boldsymbol{M}$. Soit $\boldsymbol{W}$ un ouvert de $\boldsymbol{M}$. Montrer que la famille des cartes de $\boldsymbol{M}$ restreintes à $\boldsymbol{W}$, munit $\boldsymbol{W}$ d'une structure de variété de classe $\mathcal{C}^k$ telle que l'inclusion $\boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{M}$ est de classe $\mathcal{C}^k$. Est-ce que cette structure de « *variété induite* » sur $\boldsymbol{W}$ peut être de classe supérieure à celle de $\boldsymbol{M}$?

3.1.5. Structure canonique de variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$. Il existe beaucoup de structures de variété différentielle sur $\mathbb{R}$ (voir discussion 3.2.4). La structure canonique de variété $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ est celle qui découle de prendre l'unique carte $\nu : U \to \mathbb{R}^n$ avec $U = \mathbb{R}^n$ et $\nu = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

3.1.6. Structure canonique de variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{S}^{n-1}$

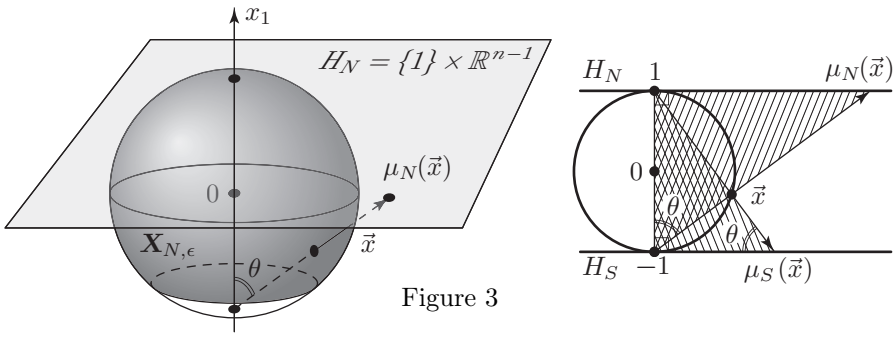


Figure 3

On note $\mathbb{S}^{n-1}$ la « *sphère* » de $\mathbb{R}^n$ des vecteurs de norme 1. Nous allons la munir de sa structure canonique de variété de dimension $n-1$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec les deux cartes $(\diamond)$ et l'application de transition de classe $\mathcal{C}^\infty$ $(*)$.

21. Union croissante dénombrable de compacts.

Soit $\boldsymbol{X}$ la sphère des vecteurs de norme 1 de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Fixons $0 < h \leq 1$

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_{N,h} := \big\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} \;\big|\; x_1 > -h\big\} \\ \boldsymbol{X}_{S,h} := \big\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} \;\big|\; x_1 < h\big\} \end{cases}$$

puis H_N et H_S respectivement les hyperplans de $\mathbb{R}^n$ de coordonnée $x_1 = 1$ et $x_1 = -1$. Considérons alors les « *projections stéréographiques* » respectivement de centres $(-1,0,\dots,0)$ et $(1,0,\dots,0)$ et sur les hyperplans H_N et H_S.

$$\mu_N : \boldsymbol{X}_{N,h} \to H_N = \{1\} \times \mathbb{R}^{n-1}\,, \qquad \mu_S : \boldsymbol{X}_{N,h} \to H_S = \{-1\} \times \mathbb{R}^{n-1}\,.$$

Dans la figure 3, les triangles rayés sont semblables, de sorte que

$$\tan(\theta) = \|\mu_N(\vec{x})\| = \frac{1}{\|\mu_S(\vec{x})\|}\,.$$

On en déduit que si $\theta \notin \{0, \pi/2\}$, on a

$$\mu_N(\vec{x}) = \frac{\mu_S(\vec{x})}{\|\mu_S(\vec{x})\|^2}\,. \tag{$*$}$$

Un peu de géométrie montre alors que les images respectives de μ_N et μ_S sont les boules ouvertes $B(0,R)$ des hyperplans H_N et H_S de centre 0 et de rayon $R = 2\sqrt{(1+h)/(1-h)}$. Par conséquent, si nous identifions ces hyperplans à $\mathbb{R}^{n-1}$, les inverses des applications en question sont des cartes locales de $\mathbb{S}^{n-1}$,

$$\mu_N^{-1} : B_{n-1}(0,R) \to \boldsymbol{X}_{N,h}\,, \quad \mu_S^{-1} : B_{n-1}(0,R) \to \boldsymbol{X}_{S,h}\,. \tag{$\diamond$}$$

L'intersection $\boldsymbol{X}_{N,h} \cap \boldsymbol{X}_{S,h}$ correspond alors à la « *couronne* »

$$C_{n-1}(0,1/R,R) = \left\{\vec{x} \;\middle|\; \frac{1}{R} < \|\vec{x}\| < R\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}\,,$$

sur laquelle l'application de transition $(*)$ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3.2. Fonctions et applications différentiable sur une variété

3.2.1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^r$. Une « *fonction de classe* $\mathcal{C}^r$ » sur une variété $\boldsymbol{M}$ de classe $\mathcal{C}^k$, où $r, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, est une application $f : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$ telle que les composées $f \circ \nu : U \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^r$, pour toute carte locale $\nu : U \to \boldsymbol{M}$. D'après 1.3.1, cette définition n'a de sens que pour $r \leq k$. On note $\mathcal{C}^r(\boldsymbol{M})$ l'ensemble de ces fonctions.

3.2.2. Applications de classe $\mathcal{C}^r$. Une application $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_\ell) : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}^\ell$ est dite de classe $\mathcal{C}^r$, si chacune des fonctions coordonnées $\alpha_i : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$ l'est.

Une application $\alpha : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ entre deux variétés de classe $\mathcal{C}^k$ est dite de classe $\mathcal{C}^r$ si elle est continue et si pour toute carte locale $\nu : U \to \boldsymbol{N}$, l'application

$$\nu^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(\nu(U)) \to U \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha^{-1}(\nu(U)) & \xrightarrow{\nu^{-1}\circ\alpha} & U \subseteq \mathbb{R}^m \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \nu} \\ \boldsymbol{M} & \xrightarrow{\alpha} & \boldsymbol{N} \end{array}$$

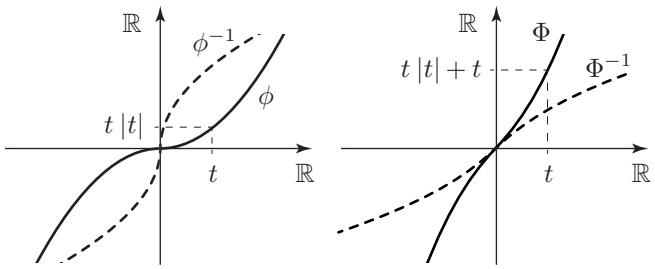
est de classe $\mathcal{C}^r$.

3.2.3. Isomorphismes de classe $\mathcal{C}^r$. Deux variétés $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sont dites « *isomorphes* » s'il existe un homéomorphisme $\alpha : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ tel que α et α^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$.

3.2.4. Discussion. La définition de variété est plus subtile qu'elle ne paraît de prime abord. Prenons par exemple $\boldsymbol{M} = \mathbb{R}$ muni de la topologie associée à la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}$.

L'application $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(t) = t|t|$ est strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ mais n'est pas deux fois dérivable. La fonction ϕ^{-1} est strictement croissante, mais n'est pas dérivable à l'origine. Par conséquent, ϕ et ϕ^{-1} sont des homéomorphismes, ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ et ϕ^{-1} et juste de classe $\mathcal{C}^0$.

L'application $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi(t) = \phi(t) + t$ est strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que son inverse Φ^{-1}.

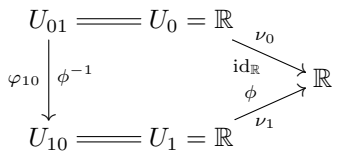


Voici maintenant quelques structures de variété différentielle sur $\boldsymbol{M} = \mathbb{R}$.

a) Recouvrement $\{U\}$, $U = \mathbb{R}$, carte locale $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \boldsymbol{M}$.
b) Recouvrement $\{U\}$, $U = \mathbb{R}$, carte locale $\phi : \mathbb{R} \to \boldsymbol{M}$.
c) Même que (b) en remplaçant ϕ par Φ.
d) Recouvrement $\{U_0, U_1\}$, $U_0 = U_1 = \mathbb{R}$, cartes locales :

$$\nu_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} : U_0 \to \boldsymbol{M}\,, \qquad \nu_1 = \phi : U_1 \to \boldsymbol{M}\,,$$

application de transition $\varphi_{10} = \phi^{-1}$, soit



e) Même que (d) en remplaçant ϕ par Φ.

Notons les variétés ainsi définies respectivement par $\boldsymbol{M}_a, \boldsymbol{M}_b, \ldots, \boldsymbol{M}_e$.

- $\boldsymbol{M}_a$, $\boldsymbol{M}_b$, $\boldsymbol{M}_c$, sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elles sont deux à deux isomorphes mais les structures sont différentes, *i.e.* l'application identique entr'elles n'est pas de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- $\boldsymbol{M}_d$ est de classe $\mathcal{C}^0$ et n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
- $\boldsymbol{M}_e$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

3.2.5. Exercice. Justifier les affirmations de la discussion précédente.

3.2.6. Remarque. Étant donnée une relation d'équivalence, il se pose immédiatement le problème de la détermination de *toutes* ses classes d'équivalence et de la recherche de critères « *effectifs* » permettant de décider si deux objets sont ou non équivalents. C'est le problème de la « *classification* ».

Par exemple, en algèbre linéaire deux espaces vectoriels sont isomorphes, si et seulement si ils ont des bases de même cardinal (fini ou non). Le théorème de la base incomplète, l'axiome du choix, le lemme de Zorn, l'induction finie et

même transfinie, interviennent dans la preuve de ce critère. Si $\mathrm{Vec}_f(\mathbb{R})$ désigne l'"ensemble" des espaces vectoriels réels de dimension finie, et si $\mathcal{R}$ est la relation « *être isomorphes* », on a $\mathrm{Vec}_f(\mathbb{R})/\mathcal{R} = \mathbb{N}$.

Le problème de la classification des variétés à isomorphie près est un problème très ardu, voire sans espoir. En dimension 1, les variétés de classe $\mathcal{C}^\infty$ connexes sont toujours isomorphes à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{S}^1$ (munis de leur structure canonique de variété). En dimension 2 et 3 des réponses assez larges existent, mais en dimensions supérieures la question de question de savoir si deux variétés sont isomorphes est indécidable ([22]).

3.2.7. Terminologie. Une variété de dimension 1 est appelée « *courbe* » ([23]). Une variété de dimension 2 est appelée « *surface* ».

3.3. Atlas et atlas complets

Un aspect important du problème de l'isomorphie de variétés concerne la donnée d'un espace topologique $\boldsymbol{M}$ que l'on munit de structures de variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ par des systèmes de cartes locales différents mais tels que id_M est un isomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$. Dans le but mieux comprendre ce qui est derrière cette question, il est important d'introduire la notion d'atlas.

3.3.1. Atlas. Nous avons déjà rencontré la notion d'atlas sans la nommer. En effet, étant donné un espace topologique on appelle « *atlas de classe* $\mathcal{C}^k$ », toute famille $\mathcal{A}$ de couples $\{(U_i, \nu_i)\}_{i\in\mathfrak{I}}$ vérifiant les conditions de la proposition 3.1.2. Lorsque une variété est définie à l'aide d'un atlas particulier, cet atlas est souvent appelé son« *atlas de définition* », même si la plupart du temps il n'a rien de canonique. On peut ainsi noter une variété en désignant son atlas de définition, par exemple par le couple $(\mathcal{A}, \boldsymbol{M})$. La proposition suivante est presque tautologique et laissée en exercice au lecteur.

3.3.2. Proposition. *Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux atlas de classe $\mathcal{C}^k$ pour l'espace topologique $\boldsymbol{M}$. L'application $\mathrm{id}_{\boldsymbol{M}} : (\mathcal{A}_1, \boldsymbol{M}) \to (\mathcal{A}_2, \boldsymbol{M})$ est un isomorphisme de classe $\mathcal{C}^r$, avec $r \leq k$, si et seulement si la réunion d'atlas $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est un atlas de classe $\mathcal{C}^r$.*

3.3.3. Commentaire. Cette proposition nous dit que si la réunion de deux atlas de classe $\mathcal{C}^k$ est encore de classe $\mathcal{C}^k$, les « *structures* » de variétés de classe $\mathcal{C}^k$ définies sur $\boldsymbol{M}$ par $\mathcal{A}_1$ et par $\mathcal{A}_2$ coïncident!

22. Extrait de Wikipedia : "Differentiable manifold" : *The classification of n-manifolds for n greater than three is known to be impossible, even up to homotopy equivalence. Given any finitely presented group, one can construct a closed 4-manifold having that group as fundamental group. Since there is no algorithm to decide the isomorphism problem for finitely presented groups, there is no algorithm to decide if two 4-manifolds have the same fundamental group. Since the previously described construction results in a class of 4-manifolds that are homeomorphic if and only if their groups are isomorphic, the homeomorphism problem for 4-manifolds is undecidable. In addition, since even recognizing the trivial group is undecidable, it is not even possible in general to decide if a manifold has trivial fundamental group, i.e. is simply connected.*

23. En dimension 1, les modèles locaux sont des ouverts de $\mathbb{R}$, donc des réunions d'intervalles ouverts disjoints. On peut donc toujours prendre $\mathbb{R}$ comme modèle local.

3.3.4. Atlas complet. Dans l'ensemble de "tous" les atlas de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\boldsymbol{M}$, la relation $\mathcal{R}$ qui dit que la réunion de deux atlas de classe $\mathcal{C}^k$ est encore un atlas de classe $\mathcal{C}^k$ est une relation d'équivalence. Le commentaire précédent peut alors se reformuler en disant que « *une structure de variété sur* $\boldsymbol{M}$ *"est" une classe d'équivalence d'atlas par la relation* $\mathcal{R}$ ». Maintenant, comme toutes les cartes possibles de $\boldsymbol{M}$ constituent un ensemble, on peut considérer l'atlas de toutes les cartes de tous les atlas d'une même classe d'équivalence. Cet atlas est un représentant *canonique* de la structure, on l'appelle « *l'atlas complet (ou maximal) de classe* $\mathcal{C}^k$ » de la variété. Il faut bien comprendre que l'atlas complet dépend, non seulement de la donnée d'un atlas (de définition) de la variété $\boldsymbol{M}$, mais aussi de la classe de différentiabilité "souhaitée", car en effet, l'atlas de définition peut a priori avoir une meilleure classe de différentiabilité !

3.3.5. Exercice. Reprenons l'exercice 3.1.4 en restreignant à l'ouvert $\boldsymbol{W}$, non pas un atlas de définition de $\boldsymbol{M}$, mais son atlas **complet** de classe $\mathcal{C}^k$, noté $\mathcal{A}_{\boldsymbol{M}}$. Montrer que l'atlas de $\boldsymbol{W}$ ainsi obtenu est complet et de même classe $\mathcal{A}_{\boldsymbol{M}}$.

4. Variétés plates

Dans cette section, nous nous rapprochons davantage de notre intuition des recollements puisque nous allons imposer aux identifications une condition de rigidité. On leur demandera d'être *isométriques*, ce qui va imposer aux modèles locaux d'être des ouverts de l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa métrique euclidienne. Dans cette section donc, nous ne recollerons pas uniquement de manière topologique, mais aussi de manière « *isométrique* ».

4.1. Isométries des ouverts de $\mathbb{R}^n$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure canonique d'espace euclidien telle que rappelée dans 1.1. Toute partie $\boldsymbol{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ est considérée munie de la structure d'espace métrique induite.

Une application $\alpha : U \to V$ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ est une « *isométrie* » si elle respecte les distances, *i.e.* si $d(\alpha(x), \alpha(y)) = d(x, y)$, pour tous $x, y \in U$. Une isométrie est une application continue, mais dans le contexte des ouverts de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ on peut dire beaucoup mieux.

4.1.1. Proposition. *Notons $O(n)$ le « groupe orthogonal », ses éléments sont les automorphismes linéaires de $\mathbb{R}^n$ qui préservent le produit scalaire canonique. Soient U et V deux ouverts* connexes *de $\mathbb{R}^n$ munis de la métrique euclidienne.*

a) *Les isométries $\alpha : U \to V$ sont les restrictions à U des applications de la forme $\varphi + \tau$ où $\varphi \in O(n)$ et τ est une translation de $\mathbb{R}^n$. On appellera de telles applications des « isométries affines ».*

b) *Pour toute application dérivable $\gamma :]a, b[\to U$, et toute isométrie $\alpha : U \to V$, on a*

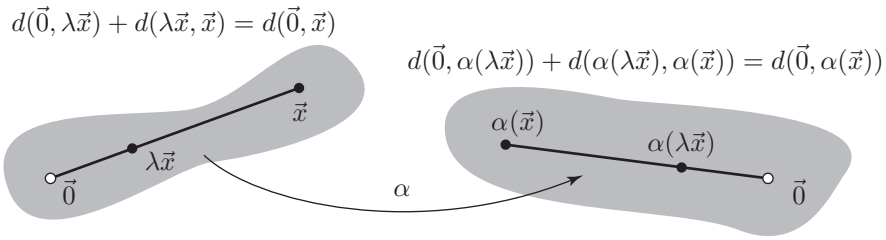
$$\|\gamma'(t)\| = \|(\alpha \circ \gamma)'(t)\| .$$

Indications. Pour (a). C'est une conséquence classique du « *théorème fondamental de la géométrie affine* » ([24]), mais on peut aussi raisonner comme suit.

Quitte à composer avec des translations, on peut supposer que $\vec{0} \in U \cap V$ et même que $\alpha(\vec{0}) = \vec{0}$. On montre alors que

$$\alpha(\lambda\vec{x}) = \lambda\alpha(\vec{x}) \qquad (*)$$

pour $\vec{x} \in U$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ assez petit. L'idée est assez simple : trois points sont alignés, si et seulement si les distances les séparant vérifient une condition d'additivité évidente (voir figure), et cette condition, de même que les proportions, sont trivialement conservées par une isométrie. Donc l'isométrie conserve l'alignement des points et vérifie bien $(*)$.



On prolonge alors α en $\tilde{\alpha} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en posant

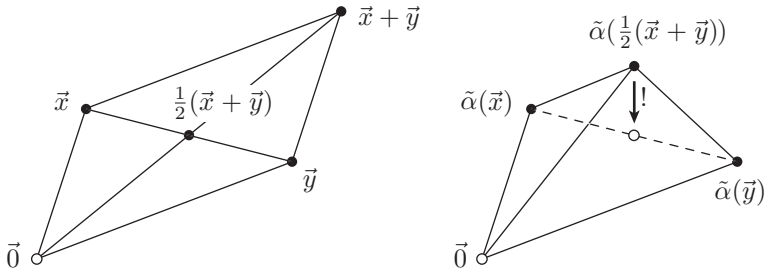
$$\tilde{\alpha}(\vec{z}) := \lambda^{-1}\,\alpha(\lambda\,\vec{z}) \qquad (\diamond)$$

pour λ "assez petit". Il faut bien sûr montrer que $(\diamond)$ est une bonne définition, c'est-à-dire que $\tilde{\alpha}(\vec{z})$ ne dépend pas du scalaire λ assez petit choisi. On vérifie ensuite que $\tilde{\alpha}$ est une isométrie et vérifie $(*)$ pour tous $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour avoir la $\mathbb{R}$-linéarité de $\tilde{\alpha}$, il ne nous reste donc plus qu'à montrer, pour des vecteurs non colinéaires, l'égalité

$$\tilde{\alpha}(\vec{x}+\vec{y}) = \tilde{\alpha}(\vec{x}) + \tilde{\alpha}(\vec{y})\,. \qquad (\star)$$

Or, les vecteurs de $\{\vec{0}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{x}+\vec{y}, \frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})\}$ sont les sommets et l'intersection des diagonales d'un parallélogramme P et se transforment par une isométrie en cinq points dont les distances deux à deux correspondent à celles dans P. On décompose P en réunion de quatre triangles, et en utilisant le fait que trois points non colinéaires déterminent un plan, des raisonnements élémentaires de géométrie euclidienne montrent que les points de $\tilde{\alpha}(P)$ sont sur un plan et déterminent un parallélogramme.



(Le point $\tilde{\alpha}(\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y}))$ **doit** se trouver sur la droite en pointillé $\overline{\tilde{\alpha}(\vec{x})\tilde{\alpha}(\vec{y})}$.) L'égalité $(\star)$ en découle.

24. Voir l'article de Wikipedia "Isométrie affine" : fr.wikipedia.org/wiki/Isométrie-affine.

Pour (b). Simplement parce que comme $\tilde{\alpha}$ est affine, on a

$$(\alpha\circ\gamma)'(t) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\tilde{\alpha}(\gamma(t+\epsilon))-\tilde{\alpha}(\gamma(t))}{\epsilon} = \tilde{\alpha}\Big(\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\gamma(t+\epsilon)-\gamma(t)}{\epsilon}\Big) = \tilde{\alpha}\big(\gamma'(t)\big)$$

et alors $\|(\alpha\circ\gamma)'(t)\| = \|\tilde{\alpha}\big(\gamma'(t)\big)\| = \|\gamma'(t)\|$ puisque $\tilde{\alpha}$ est isométrique. □

4.1.2. Il en résulte que les isométries de U dans V sont automatiquement des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nous notons $\mathrm{Iso}(U,V)\subseteq\mathcal{C}^\infty(U,V)$ l'ensemble de telles applications.

4.1.3. Exercice (nature locale d'une isométrie). Soient $\alpha,\beta : U\to V$ deux isométrie entre ouverts de $\mathbb{R}^n$. Montrer que s'il existe un ouvert non vide $U'\subseteq U$ tel que $\alpha=\beta$ sur U', alors $\alpha=\beta$.

4.2. Variétés plates

La démarche est la même que celle des variétés différentielles (3.1) à ceci près que les applications de transition sont des bijections isométriques.

Dans ce type d'espace, le modèle local est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne.

4.2.1. Définition. On appelle « *variété plate de dimension n* » la donnée simultanée de

- un espace topologique $\boldsymbol{M}$;
- un recouvrement ouvert $\boldsymbol{M}=\bigcup_{i\in\mathfrak{I}}\tilde{U}_i$;
- une famille, indexée par $i\in\mathfrak{I}$, d'homéomorphismes $\nu_i : U_i\to\tilde{U}_i$, où U_i est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, appelés « *cartes locales* », telle que, pour chaque couple $(i,j)\in\mathfrak{I}^2$, l'application

$$\varphi_{ji} : U_{ij}\to U_{ji}\,,\quad \varphi_{ji}=\nu_j^{-1}\circ\nu_i\,,$$

avec $U_{ij}:=\nu_i^{-1}(\tilde{U}_i\cap\tilde{U}_j)$, appelée « *application de transition* », est une bijection isométrique.

4.2.2. Proposition. *Il y a équivalence entre la donnée d'une variété plate suivant la définition 4.2.1, et la donnée de l'ensemble d'indices $\mathfrak{I}$, d'une famille $\{U_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ et pour chaque couple $(i,j)\in\mathfrak{I}^2$, d'un ouvert $U_{ij}\subseteq U_i$ et d'une application de transition*

$$\varphi_{ji} : U_{ij}\to U_{ji}\,,$$

qui est une bijection isométrique telle que

- *pour tout $i\in\mathfrak{I}$, on a $U_{ii}=U_i$ et $\varphi_{ii}=\mathrm{id}_{U_i}$;*
- *pour tout triplet $(i,j,k)\in\mathfrak{I}^3$, on a*

$$\varphi_{ki}=\varphi_{kj}\circ\varphi_{ji}\,, \tag{12}$$

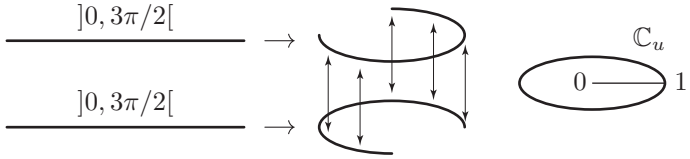
sur l'ouvert $\varphi_{ji}^{-1}(U_{jk}\cap U_{ji})$.

Indication. Penser au théorème 2.4.2. □

4.2.3. Remarques. • L'atlas de définition d'une variété plate est toujours de classe $\mathcal{C}^\infty$ puisque les application de transition sont affines (4.1.2). Tout comme dans le cas des variétés, on peut introduire la notion d'atlas complet pour de variétés plates : l'« *atlas plat complet* ». Les morphismes de transition étant affines, la classe de différentiabilité et toujours $\mathcal{C}^\infty$, c'est donc plus simple que le cas général. Les détails sont calqués de 3.3 et laissés aux soins du lecteur.

• On prendra garde du fait que même si le recollement isométrique est très proche de notre intuition, une variété plate peut être non séparée. C'est le cas de l'espace $\boldsymbol{X} \amalg_{\varphi_1} \boldsymbol{Y}$ dans l'exemple 2.3.40-(2), page 23.

4.2.4. Variétés plates de dimension 1. (Exercice) Une variété plate de dimension 1 est une réunion disjointe de segments ouverts $]a,b[$, avec $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, de la droite euclidienne $\mathbb{R}$ et de cercles de rayons positifs. Voici de manière imagée, la construction de la structure de variété plate pour le cercle unité $\mathbb{C}_u \subseteq \mathbb{C}$. On prend deux intervalles réels ouvert de longueur $3\pi/2$ que l'on colle isométriquement suivant le dessin.



4.3. Longueur de courbes dans une variété plate

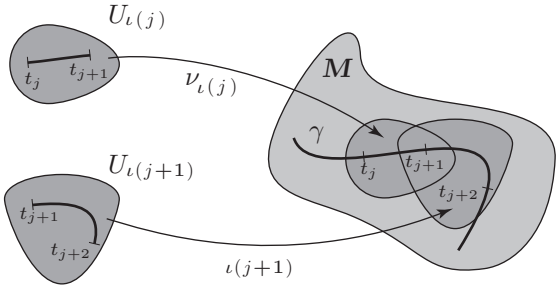
Soit $\boldsymbol{M}$ une variété plate. Étant donné une « *courbe de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux* », ou « *chemin* » de $\boldsymbol{M}$, *i.e.* une application $\gamma : [0,1] \to \boldsymbol{M}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceau. Il existe une famille de cartes locales $\nu_i : U_i \to \boldsymbol{M}$ telle que

$$\gamma([0,1]) \subseteq \bigcup_i \tilde{U}_i \,.$$

On en déduit le recouvrement ouvert

$$[0,1] = \bigcup_i \gamma^{-1}(\tilde{U}_i) \,,$$

et la propriété de Borel-Lebesgue de $[0,1]$ assure alors l'existence d'une suite croissante $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_s = 1]$ telle que $\gamma([t_j, t_{j+1}])$ est entièrement contenu dans l'un des U_i, que nous notons $U_\iota(j)$.



On pose alors

$$L(\gamma) = \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|(\nu_{\iota(i)}^{-1} \circ \gamma)'(t)\| \, dt \,. \tag{13}$$

4.3.1. Proposition et définition. *La quantité $L(\gamma)$ définie par la formule* (13) *est indépendante des choix des cartes locales et de la suite $\{t_j\}$ considérées dans la construction. Cette quantité est la « longueur de γ ».*

Indication. Il faut bien évidemment utiliser le fait que les changement de cartes sont des isométries affines ce qui garantit le caractère intrinsèque de la fonction

$$t \mapsto \|(\nu_{\iota(i)}^{-1} \circ \gamma)'(t)\|$$

(*cf.* 4.1.1-(b)). Ensuite, étant donné deux recouvrements distincts, on prend une suite $\{t_j\}$ convenant simultanément aux deux recouvrements et l'on compare les sommes (13) terme à terme. □

4.4. Distance riemannienne dans une variété plate

Soit $\boldsymbol{M}$ une variété plate « *connexe (par arcs)* » ([25]). Pour $x, y \in \boldsymbol{M}$, on définit

$$d_{\boldsymbol{M}}(x,y) := \inf L(\gamma)\,, \tag{14}$$

où l'inf porte sur toutes les courbes γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'origine x et d'extrémité y.

4.4.1. Remarque. Les espaces $\boldsymbol{M}_i := \boldsymbol{X} \amalg_{\varphi_i} \boldsymbol{Y}$ de 2.3.40-(2) (p. 23) sont des variétés plates de dimension 1. Dans les deux cas on a $1/2_{\boldsymbol{X}} \neq 1/2_{\boldsymbol{Y}}$, alors que $d_{\boldsymbol{M}_1}(1/2_{\boldsymbol{X}}, 1/2_{\boldsymbol{Y}}) = 0$ et $d_{\boldsymbol{M}_2}(1/2_{\boldsymbol{X}}, 1/2_{\boldsymbol{Y}}) = 1/2$. On peut donc d'ores et déjà dire que si la variété n'est pas séparée $d_{\boldsymbol{M}}(_,_)$ peut ne pas être une distance.

4.4.2. Théorème et définitions. *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété plate, connexe séparée.*

a) *L'égalité* (14) *définit une distance sur $\boldsymbol{M}$, c'est la « distance riemannienne de $\boldsymbol{M}$ ».*

b) *Pour tout $x \in \boldsymbol{M}$, il existe un voisinage ouvert V_x contenu dans l'image d'une carte locale $\nu : U \to \boldsymbol{M}$ tel que*

$$d_{\boldsymbol{M}}(x,y) = \|\nu^{-1}(x) - \nu^{-1}(y)\|\,, \quad \forall y \in V_x \subseteq \nu(U)\,.$$

c) *La topologie de $\boldsymbol{M}$ est la topologie associée à cette distance.*

d) *Pour tout $x \in \boldsymbol{M}$ et toute carte locale $\nu : U \to \boldsymbol{M}$ dont l'image contient x, il existe $R > 0$ tel que la la boule euclidienne $B_n(\nu^{-1}(x), R) \subseteq \mathbb{R}^n$ est contenue dans U et coïncide via ν à la « boule (riemannienne) »*

$$B_{\boldsymbol{M}}(x,R) := \big\{ y \in \boldsymbol{M} \;\big|\; d_{\boldsymbol{M}}(x,y) < R \big\}\,.$$

Indication. La symétrie et l'inégalité triangulaire pour d sont des conséquences rapides de la définition (13). Soit maintenant $\nu : U \to \boldsymbol{M}$ une carte locale. Notons $\overline{B}_x$ une boule euclidienne fermée de $\mathbb{R}^n$ centrée en $\nu^{-1}(x)$ et contenue dans U. Notons B_x l'intérieur de $\overline{B}_x$. Soit $\gamma : [0,1] \to \boldsymbol{M}$ un chemin vérifiant $\gamma(0) = x$. Notons $y := \gamma(1) \in \boldsymbol{M}$. Supposons que l'image de γ rencontre $\boldsymbol{M} \backslash \nu(B_x)$. L'ensemble des $t \in [0,1]$ tel que $\gamma(t) \notin \nu(B_x)$ est fermé, car image inverse du fermé $\boldsymbol{M} \backslash \nu(B_x)$, et contient par conséquent sa borne inférieure, notée t_0. On a alors

25. On rappelle que ceci signifie que deux points quelconques de $\boldsymbol{M}$ peuvent être reliés par un chemin continu. Une variété est toujours localement connexe par arcs (le justifier), il y a donc équivalence entre « *être connexe* » et « *être connexe par arcs* » (*cf.* 2.3.20, 2.3.21).

$\gamma(t') \in \nu(B_x)$, pour tout $t' < t_0$, et comme l'ensemble $\nu(\overline{B}_x)$ est fermé dans $\boldsymbol{M}$, car compact dans un espace *séparé*, donc

$$\gamma(t) = \lim_{t'<t} \gamma(t') \in \nu(\overline{B}_x)\,.$$

Ainsi, pour que la courbe γ puise sortir de $\nu(B_x)$, elle doit auparavant atteindre $\nu(\overline{B}_x \backslash B_x)$. Il s'en suit que pour x fixé, et si B_x est de rayon R, on a

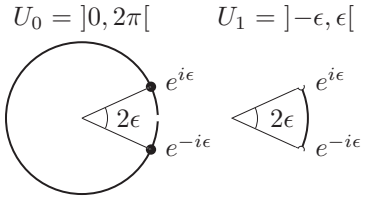
$$\begin{cases} d(x,y) = \|\nu^{-1}(x) - \nu^{-1}(y)\|\,, & \text{si } y \in B_x \\ d(x,y) > R, & \text{autrement.} \end{cases}$$

En particulier, $d(x,y) = 0$, si et seulement si $x = y$.

Les autres assertions du théorème en découlent. □

4.4.3. Remarque. Le théorème affirme que les « *petites* » distances se mesurent dans les cartes, mais ici l'adjectif « *petit* » est plus subtil qu'il ne paraît, car le degré de petitesse n'est pas uniforme, mais aussi parce que la distance riemannienne entre deux points de $\boldsymbol{M}$ appartenant à une même carte locale, n'est par nécessairement la distance mesurée dans la carte et ce quelque petite que la carte soit. Le théorème montré seulement que c'est le cas, si l'un des points est le centre d'une boule euclidienne !

En effet, lorsque les points sont "proches du bord de la carte", un plus court chemin les reliant peut exister en traversant d'autres cartes. C'est clair dans l'illustration ci-contre où $\mathbb{C}_u$ est obtenu en recollant l'intervalle $U_0 =]0, 2\pi[$ à l'intervalle $U_1 =]-\epsilon, \epsilon[$. Les points $e^{i\epsilon}$ et $e^{-i\epsilon}$ appartiennent tous les deux à U_0, et aucun n'appartient à U_1. Leur distance mesurée dans U_0 est $2(\pi - \epsilon)$. Alors que la distance riemannienne vaut 2ϵ et le chemin la réalisant n'est contenu entièrement dans aucune carte.



4.4.4. Exercice et définition. *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété séparée plate qui* n'est pas *connexe (par arcs). On définit $D_{\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}_+$ par*

$$\begin{cases} D_{\boldsymbol{M}}(x,y) = d_{\boldsymbol{M}}(x,y)\,, & \textit{s'il existe un chemin reliant } x \textit{ et } y, \\ D_{\boldsymbol{M}}(x,y) = 1\,, & \textit{autrement,} \end{cases}$$

Montrer que D est une distance dont la topologie associée est celle de $\boldsymbol{M}$.

4.4.5. Isométries riemanniennes (locales). Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ deux variétés de même dimension ([26]), séparées et plates. Une application $\alpha : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ est une « *isométrie (riemannienne)* » si elle respecte les distances riemanniennes, *i.e.*

$$d_{\boldsymbol{M}}(x,y) = d_{\boldsymbol{N}}\big(\alpha(x), \alpha(y)\big)\,, \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{M}\,.$$

On dit que α est une « *isométrie locale* » lorsque chaque $x \in \boldsymbol{M}$ admet un voisinage V_x tel que $\alpha\big|_{V_x}$ est une isométrie.

26. Cette hypothèse n'est pas indispensable, mais elle simplifiera la rédaction.

4.4.6. Proposition

a) *Une isométrie riemannienne est une application $\mathcal{C}^\infty$.*

b) *Une isométrie riemannienne locale inversible est une isométrie.*

Indication. (a) En effet, une isométrie $\alpha : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ est clairement continue. Ensuite, si l'on se restreint à des boules riemanniennes assez petites (4.4.2), la restriction de α s'identifie à une isométrie de boules euclidiennes de $\mathbb{R}^n$, *i.e.* à une application affine (4.1.1) et donc $\mathcal{C}^\infty$. (b) Une isométrie locale $\alpha : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ inversible est forcément un homéomorphisme et α^{-1} est clairement une isométrie locale aussi. D'autre part, α transforme une courbe en une courbe de même longueur (le démontrer en hachurant la courbe en petits morceaux). Il s'ensuit que pour tous $x, y \in \boldsymbol{M}$, on aura $d_{\boldsymbol{N}}(\alpha(x), \alpha(y)) \leq d_{\boldsymbol{M}}(x, y)$ et comme il en est de même pour α^{-1}, on a $d_{\boldsymbol{N}}(\alpha(x), \alpha(y)) = d_{\boldsymbol{M}}(x, y)$. □

La proposition suivante étend l'observation sur la nature locale des isométries affines (4.1.3) au contexte des variétés.

Proposition (nature locale d'une isométrie riemannienne). *Supposons $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ connexes (par arcs) (voir bas de page 38) et de même dimension. Soient $\alpha, \beta : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ deux isométries riemanniennes. S'il existe un ouvert non vide $V \subseteq \boldsymbol{M}$ tel que les restrictions de α et de β à U coïncident, alors $\alpha = \beta$.*

Indication. Par continuité, l'ensemble des $x \in \boldsymbol{M}$ tels que $\alpha(x) = \beta(x)$ est une partie fermée puisque c'est l'image réciproque de la diagonale $\Delta_{\boldsymbol{N}}$ de $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ par l'application continue

$$\alpha \times \beta : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$$

et que cette diagonale est fermée d'après le critère de séparation 2.3.17. Soient maintenant $x \in V$ et $y \in \boldsymbol{M}$. Nous allons montrer, grâce à la connexité (par arcs) de $\boldsymbol{M}$, que $\alpha(y) = \beta(y)$. Soit $\gamma : [0, 1] \to \boldsymbol{M}$ un chemin continu d'origine x et extrémité y. Soit $J \subseteq [0, 1]$ l'ensemble des t tels que $\alpha = \beta$ sur un voisinage de $\gamma(t)$. L'ensemble J est clairement ouvert non vide car il contient 0. Supposons $J \neq [0, 1]$, alors l'ensemble $[0, 1] \backslash J$ est un fermé non vide de $[0, 1]$ et contient son inf, noté t_0. On a alors, $\alpha(\gamma(t_0 - \epsilon)) = \beta(\gamma(t_0 - \epsilon))$ pour $\epsilon > 0$ assez petit, et par continuité (à gauche) on déduit que

$$\alpha(\gamma(t_0)) = \beta(\gamma(t_0)\,.$$

Notons $x = \gamma(t_0) \in \boldsymbol{M}$ et $z = \alpha(x) = \beta(x) \in \boldsymbol{N}$. Il existe maintenant des cartes locales autour de x et z et des boules euclidiennes ouvertes $B_{\boldsymbol{M}}(x, r)$ et $B_{\boldsymbol{N}}(z, r')$ (4.4.2) de rayon assez petit telles que les restrictions de α et β à $B(x, r)$ sont à image dans $B(z, r')$. Or, par construction, ces restrictions coïncident sur deux ouverts autour des $\gamma(t')$ pour $t' < t_0$. On peut donc appliquer 4.1.3 et conclure de $\alpha = \beta$ sur $B(x, r)$. Par conséquent, $t_0 \in J$, ce qui est contraire au choix de t_0. Donc $J = [0, 1]$ et $y \in J$ et $\alpha(y) = \beta(y)$. □

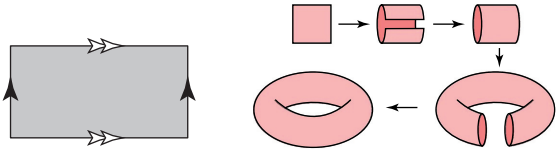
4.4.7. Corollaire. Une isométrie (riemannienne) d'une variété séparée plate et connexe (par arcs) $\alpha : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ est différente de l'identité, si et seulement si l'ensemble $\boldsymbol{M}^\alpha$ des points fixés par α est d'intérieur vide. ([27])

27. Une partie $A \subseteq \boldsymbol{X}$ est d'« *intérieur vide* » si A ne contient aucun ouvert non vide de $\boldsymbol{X}$.

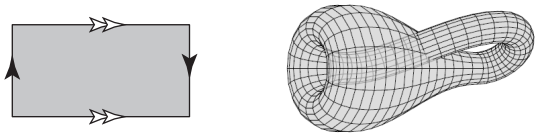
4.5. Surfaces plates

On appelle ainsi toute variété plate de dimension 2. Les espaces que nous pouvons imaginer en recollant sans déchirer de bouts de papier sont des exemples de telles surfaces. Nous en avons déjà vu trois : Le plan $\mathbb{R}^2$, le cylindre  et le ruban de Möbius  . D'autres exemples très classiques sont

4.5.1. Le tore plat : qu'on peut très difficilement voir plongé dans $\mathbb{R}^3$ sans déformer sa métrique plate. ([28])

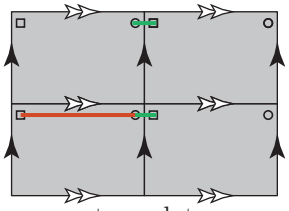


4.5.2. La bouteille de Klein : qu'il nous est impossible de construire, à nous, des êtres plongés dans $\mathbb{R}^3$. (La bouteille du dessin peut être construite en rajoutant une dimension temporelle à $\mathbb{R}^3$, soit dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. En effet, pour éviter de percer la bouteille, on se déplace vers le futur au moment où le col va rencontrer le corps de la bouteille, une fois à l'emplacement correspondant de l'intérieur de la bouteille, on revient vers le présent pour faire le raccordement avec le fond.)



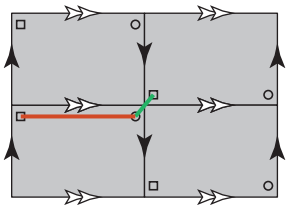
Commentaire. Il est intéressant de relever le fait que même en utilisant des modèles locaux de petite dimension, il faut souvent un espace ambiant de bien plus grande dimension pour contenir la variété, et de dimension encore plus grande pour respecter sa métrique.

4.5.3. Dans ces deux exemples, la méthode pratique pour calculer la distance entre deux points consiste à prolonger les domaines grisés et à répliquer les points suivant les symétries indiquées par les bords. On cherche ensuite le plus court segment reliant les répliques des points.



tore plat

Dans les images ci-contre on se donne deux points, respectivement identifiés par un cercle et un carré. On voit que non seulement la distance riemannienne (traits verts) n'est pas celle mesurée à l'intérieur du domaine grisé (traits rouges), mais en plus comment elle dépend de la manière de recoller. Les points en question sont plus proches dans le tore que dans la bouteille de Klein.



bouteille de Klein plate

28. Lire à ce sujet l'article images.math.cnrs.fr/Gnash-un-tore-plat.html.

5. Groupes finis agissant sur les variétés plates

5.1. Action d'un groupe sur une variété

Soit $\boldsymbol{M}$ une variété de classe $\mathcal{C}^k$. L'ensemble $\mathrm{Aut}^k(\boldsymbol{M})$ des bijections $\alpha : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ telles que α et α^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$, muni de la loi de composition d'applications, est un groupe.

5.1.1. Définition. Une « *action ($\mathcal{C}^k$) d'un groupe $\boldsymbol{G}$ sur $\boldsymbol{M}$* » est la donnée d'un « *homomorphisme de groupes* » $\rho : \boldsymbol{G} \to \mathrm{Aut}^k(\boldsymbol{M})$. On fait ainsi correspondre à $g \in \boldsymbol{G}$ une application $\rho(g) : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ de classe $\mathcal{C}^k$ de façon à ce que

$$\rho(\boldsymbol{e}) : \mathrm{id}_{\boldsymbol{M}}\,, \quad \text{et} \quad \rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h)\,.$$

Lorsque l'homomorphisme ρ est sous-entendu, la notation '$\rho(g)(x)$' où $g \in \boldsymbol{G}$ et $x \in \boldsymbol{X}$, est traditionnellement abrégée par

$$g \cdot x\,, \quad g(x)\,, \quad \text{et même} \quad gx\,.$$

5.1.2. Exemple commenté d'action de groupe Le groupe orthogonal $O(2)$ agit naturellement sur $\mathbb{R}^2$ par son action linéaire canonique. C'est une action de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur la variété $\mathbb{R}^2$ (*cf.* 3.1.5) qui stabilise le cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{C}_u$ d'où une action sur cet ensemble. Le cercle unité $\mathbb{S}^1$ a été muni d'une structure de variété $\mathcal{C}^\infty$ dans 3.1.6 et d'une structure de variété plate (donc $\mathcal{C}^\infty$) dans 4.2.4. Dans les deux cas, les éléments de $O(2)$ agissent de manière $\mathcal{C}^\infty$. C'est assez fastidieux de le voir dans le premier cas, puisqu'il faut passer par les projections stéréographiques et leurs inverses, et c'est par contre trivial dans le second cas, car dans les cartes en question, les éléments de $O(2)$ opèrent comme des isométries de $\mathbb{R}$, leur action (locale) est donc affine, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ (*cf.* 4.1.1).

5.2. Action des groupes finis

On se donne un groupe $\boldsymbol{G}$ de cardinal *fini* agissant par des homéomorphismes sur une variété $\boldsymbol{M}$.

5.2.1. Terminologie

- Pour tout $x \in \boldsymbol{M}$, l'« *orbite de x dans $\boldsymbol{G}$* » est l'ensemble :
$$\boldsymbol{G} \cdot x := \big\{ gx \;\big|\; g \in \boldsymbol{G} \big\}\,.$$
Le « *stabilisateur de x dans $\boldsymbol{G}$* » est le sous-groupe :
$$\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x) := \big\{ g \in \boldsymbol{G} \;\big|\; gx = x \big\}\,.$$
La « *formule de Lagrange* » est l'égalité $|\boldsymbol{G}| = |\boldsymbol{G} \cdot x| \cdot |\,\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x)|$.
- L'action de $\boldsymbol{G}$ est dite « *fidèle* » lorsque l'homomorphisme $\rho : \boldsymbol{G} \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{M})$ est injectif.
- L'action de $\boldsymbol{G}$ est dite « *libre* » lorsque $\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x) = \{\boldsymbol{e}\}$ pour tout $x \in \boldsymbol{M}$.
- La « *relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}$* » d'« *avoir la même $\boldsymbol{G}$-orbite* »
$$x \,\mathcal{R}\, y \iff \big(\boldsymbol{G} \cdot x = \boldsymbol{G} \cdot y\big)\,, \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{M}\,.$$
- L'« *espace d'orbites* » est l'espace topologique quotient
$$\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G} := \boldsymbol{M}/\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}\,.$$
- La « *surjection canonique* » $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$, est l'application $x \mapsto \boldsymbol{G} \cdot x$, qui fait correspondre à un point son orbite.

- Pour $g \in \boldsymbol{G}$, on note $\boldsymbol{M}^g := \{x \in \boldsymbol{M} \mid gx = x\}$ l'ensemble des « *points fixes de g dans $\boldsymbol{M}$* ». Puis, si $A \subseteq \boldsymbol{G}$, on note $\boldsymbol{M}^A := \bigcap_{g\in A} \boldsymbol{M}^g$ l'ensemble des points fixes de A dans $\boldsymbol{M}$. ([29])

5.2.2. Lemme. *La surjection canonique $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ est une application à la fois* ouverte *et* fermée *(2.3.33).*

Démonstration. Soit $H \subseteq \boldsymbol{M}$, par définition de topologie quotient (2.3.28), l'ensemble $\nu(H)$ est ouvert (resp. fermé), si et seulement si $\nu^{-1}(\nu(H))$ est ouvert (resp. fermé). Or, cette partie est ouverte (resp. fermée) car réunion finie

$$\nu^{-1}(\nu(H)) = \bigcup\nolimits_{g\in\boldsymbol{G}} g \cdot V$$

ou chaque $g \cdot H$ est ouvert (resp. fermé) si H l'est, puisque $g : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ est un homéomorphisme. □

5.2.3. Proposition. *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété séparée, de dimension n, de classe $\mathcal{C}^k$, munie d'une action de même classe d'un groupe fini $\boldsymbol{G}$,*

a) *Pour chaque $x \in \boldsymbol{M}$, il existe un ouvert $V_x \ni x$ tel que, pour $g \in \boldsymbol{G}$, on a*
   - *$g \cdot V_x = V_{gx}$,*
   - *V_x est contenu dans une carte de l'atlas de définition de $\boldsymbol{M}$ et*

$$\boxed{gV_x \cap V_x \neq \emptyset, \text{ si et seulement si } g \in \mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x)} \qquad (*)$$

b) *La relation $\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}} \subseteq \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ est une relation d'équivalence fermée. En particulier, l'espace d'orbites $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ est séparé.*

c) *Lorsque $\boldsymbol{G}$ opère librement sur $\boldsymbol{M}$, l'espace quotient admet une, et une seule, structure de variété de dimension n telle que la surjection canonique $\nu : \boldsymbol{M} \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$, est un « isomorphisme local de classe $\mathcal{C}^k$ » ([30]). En particulier, l'application*

$$\nu^\natural : \mathcal{C}^r(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}) \to \mathcal{C}^r(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{G}}, \quad \phi \mapsto \phi \circ \nu,$$

est bijective, pour $r \leq k$.

Indication. Pour (a), l'ensemble $\boldsymbol{G} \cdot x$ est fini. Pour chaque $y \in \boldsymbol{G} \cdot x$, on choisit un voisinage ouvert W_y contenu dans une carte de l'atlas de définition de $\boldsymbol{M}$. Comme $\boldsymbol{M}$ est séparé, on peut même avoir

$$W_y \cap W_{y'} = \emptyset, \qquad \text{pour tous } y \neq y' \text{ dans } \boldsymbol{G} \cdot x. \qquad (\diamond)$$

On pose

$$V_x := \bigcap\nolimits_{g\in\boldsymbol{G}} g^{-1} W_{gx},$$

d'où

$$hV_x = \bigcap\nolimits_{g\in\boldsymbol{G}} hg^{-1} W_{gx} = \bigcap\nolimits_{g\in\boldsymbol{G}} (gh^{-1})^{-1} W_{gh^{-1}hx} = V_{hx},$$

et l'équivalence $(*)$ suit d'après le choix $(\diamond)$.

29. Exercice : Montrer que si $\boldsymbol{M}$ est séparée, $\boldsymbol{M}^A$ est fermé. *Indication :* Pour $g \in \boldsymbol{G}$, considérer l'application $(g, \mathrm{id}) : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$, $x \mapsto (gx, x)$, remarquer alors que $\boldsymbol{M}^g$ est l'image inverse par cette application de la diagonale, etc.

30. Une application entre deux variétés $\alpha : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ est un « *isomorphisme local* » si pour chaque $x \in \boldsymbol{M}$ on a des voisinages ouverts V_x et $V_{\alpha(x)}$ tels que $\alpha(V_x) = V_{\alpha(x)}$ et isomorphes par la restriction $\alpha_{|V_x} : V_x \to V_{\alpha(x)}$.

Pour (b), si $\boldsymbol{M}$ est séparé, la diagonale $\Delta_{\boldsymbol{M}} \subseteq \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ est fermée d'après le critère général de séparation 2.3.17. Maintenant, comme $g \in \boldsymbol{G}$ opère continûment sur $\boldsymbol{M}$, l'application $g \times \mathrm{id} : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ est un homéomorphisme et alors $(g \times \mathrm{id})\Delta_{\boldsymbol{M}}$ est fermé dans $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$. Or, il est clair que

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}} = \bigcup\nolimits_{g \in \boldsymbol{G}} (g \times \mathrm{id})\Delta_{\boldsymbol{M}} \,,$$

et $\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}$ est fermé car réunion finie de fermés.

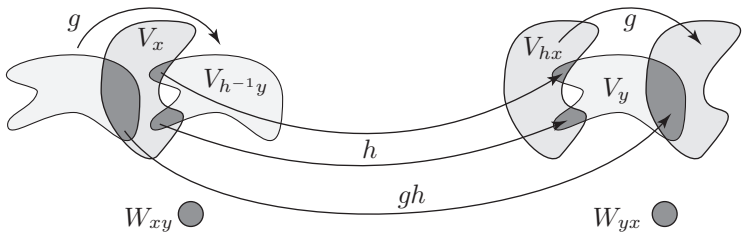
Pour (c), on remarque que, d'après (a), l'ensemble des cartes locales restreintes aux voisinages V_x, constitue un atlas de variété de classe $\mathcal{C}^k$ de $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$. En effet, la restriction de la surjection canonique $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ à V_x, notée $\nu_x : V_x \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$, est une application continue ouverte (5.2.2) et injective *puisque l'action de* $\boldsymbol{G}$ *est libre* ([31]), c'est donc un homéomorphisme sur l'ouvert $\nu(V_x)$ (2.3.33). Nous devons maintenant expliquer les applications de transition. L'incidence de V_x et V_y dans $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ se voit sur les ouverts

$$W_{xy} := V_x \cap \boldsymbol{G} \cdot V_y \,, \qquad W_{yx} := V_y \cap \boldsymbol{G} \cdot V_x$$

reliés par l'application de transition

$$\nu_y^{-1} \circ \nu_x : W_{xy} \to W_{yx}$$

localement égale à l'action de certains éléments de $\boldsymbol{G}$, donc de classe $\mathcal{C}^k$. La figure suivante illustre assez bien la situation.



Il est enfin évident, par construction, que la restriction de $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ à chaque V_x est un isomorphisme sur son image, l'ouvert $\nu(V_x)$. L'application $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ est donc bien un isomorphisme local.

Notons $\mathcal{A}$ l'atlas ainsi construit et soit $\mathcal{A}'$ un autre atlas munissant vérifiant les conditions de (c). L'application $\mathrm{id} : (\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}, \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}, \mathcal{A}')$ est alors un homéomorphisme et un isomorphisme local, c'est donc un isomorphisme et les structures de variétés coïncident (3.3.3). □

5.2.4. Revêtements principaux. La proposition 5.2.3 montre dans son assertion (c) que lorsqu'un groupe fini $\boldsymbol{G}$ opère librement sur une variété $\boldsymbol{M}$, l'espace des orbites $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ est encore une variété et que la surjection canonique $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ est un isomorphisme local dont les « *fibres* » ([32]) sont les orbites de $\boldsymbol{G}$. C'est ce que l'on appelle un « *revêtement principal de groupe* $\boldsymbol{G}$ ». L'exemple suivant tente d'expliquer de manière imagée le choix du mot « *revêtement* » ([33]).

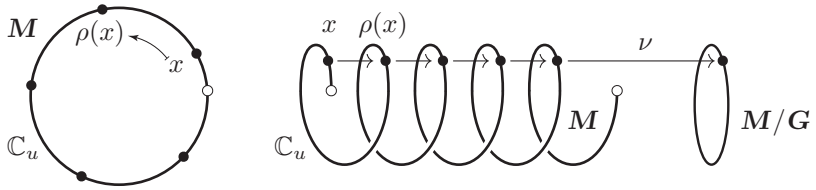
31. Ce point est capital, mais l'hypothèse de liberté n'est pas optimale, en effet il suffit de demander que $\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x)$ agisse trivialement sur V_x, ce qui est le cas par (a) (*cf.* 6.2.2).

32. Pour toute application d'ensembles $\alpha : A \to B$, on appelle « *fibre de* α *au-dessus de* $b \in B$ » l'ensemble $\alpha^{-1}(b)$. L'ensemble A est la réunion disjointe des fibres de α.

33. 1364-65 revestir « couvrir d'un dessus qui rehausse, qui garnit, qui protège (par exemple de planches) »

5.2.5. Exemple de revêtement principal. Soit $\boldsymbol{M}$ le cercle unité $\mathbb{C}_u \subseteq \mathbb{C}$ muni de sa structure de variété différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ (3.1.6, 4.2.4). Soit N un entier naturel positif. La rotation du plan complexe $\rho : z \mapsto z\, e^{2\pi i/N}$ engendre un groupe $\boldsymbol{G}$ d'ordre N qui opère de manière libre et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\boldsymbol{M}$.

La figure suivante est une illustration possible de la surjection canonique $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ pour $N = 5$.



(15)

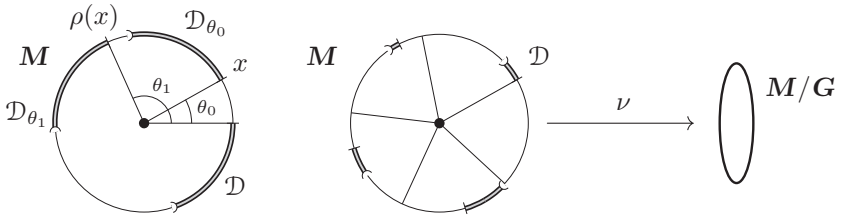
où les points blancs sur la spirale représentent le même point. Nous verrons dans la section suivante que cet exemple illustre aussi le cas plat. En effet, $\mathbb{C}_u$ a une structure de variété plate de longueur 2π (*cf.* 4.2.4) et l'action de $\boldsymbol{G}$ se fait par des isométries. Le quotient $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ est alors le cercle $\frac{1}{5}\mathbb{C}_u$, de longueur $2\pi/5$.

5.2.6. Domaine Fondamental. Un « *domaine fondamental* » pour l'action d'un groupe $\boldsymbol{G}$ sur un ensemble E est une partie $\mathcal{D}$ de E dont les images par l'action du groupe forment une partition de E. C'est donc une partie contenant exactement un point de chaque orbite du groupe. La restriction de la surjection canonique $E \to E/\boldsymbol{G}$ à $\mathcal{D}$ est donc bijective (mais ce n'est pas forcément un homéomorphisme).

Dans l'exemple 5.2.5, les ensembles

$$\mathcal{D}_{\theta_0} := \{e^{i\theta} \mid \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi/5\} \subseteq \mathbb{C}_u$$

sont tous des domaines fondamentaux. Il y en a bien entendu beaucoup d'autres, mais l'intérêt de ceux-ci repose en leur simplicité, car on cherche des domaines fondamentaux qui aident à la compréhension de l'espace d'orbites.



La restriction de la surjection canonique $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\mathbb{G}$ à un domaine fondamental $\mathcal{D}$ muni de la topologie induite (2.3.2) et une bien bijection continue $\nu : \mathcal{D} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$, mais son inverse n'est généralement pas continue. La proposition suivante est souvent utilisée dans la pratique.

5.2.7. Proposition. *Avec les données en cours, notons $\overline{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{D}_\epsilon$ respectivement la fermeture et un voisinage ouvert d'un domaine fondamental dans $\boldsymbol{M}$. Les*

restriction de la surjection canonique à ces sous-espaces :

$$\nu : \overline{\mathcal{D}} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}\,, \qquad \nu : \mathcal{D}_\epsilon \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$$

induisent des homéomorphismes

$$\bar\nu : \overline{\mathcal{D}}/\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}\,, \qquad \bar\nu : \mathcal{D}_\epsilon/\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$$

où $\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}$ est la relation d'équivalence induite par l'action de $\boldsymbol{G}$ sur las parties concernées.

Indication. Les applications $\bar\nu$ sont des bijections continues, il suffit donc de montrer qu'elles sont ouvertes ou fermées pour conclure.

Notons $\mu : \overline{\mathcal{D}} \to \overline{\mathcal{D}}/\mathcal{R}$ la surjection canonique. On a le diagramme d'applications continues *fermées*

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{D}} & \xrightarrow[\subseteq]{\iota} & \boldsymbol{M} \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\nu} \\ \overline{\mathcal{D}}/\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}} & \xrightarrow[\sim]{\bar\nu} & \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G} \end{array}$$

Si maintenant F est une partie fermée de $\overline{\mathcal{D}}/\mathcal{R}$, on a

$$\bar\nu(F) = \nu(\mu^{-1}(F))\,.$$

Or, $\mu^{-1}(F)$ est fermé (2.3.30), et c'est aussi fermé dans $\boldsymbol{M}$ puisque $\overline{\mathcal{D}}$ l'est (2.3.2). Enfin, son image par ν reste fermée puisque ν est fermée (5.2.2).

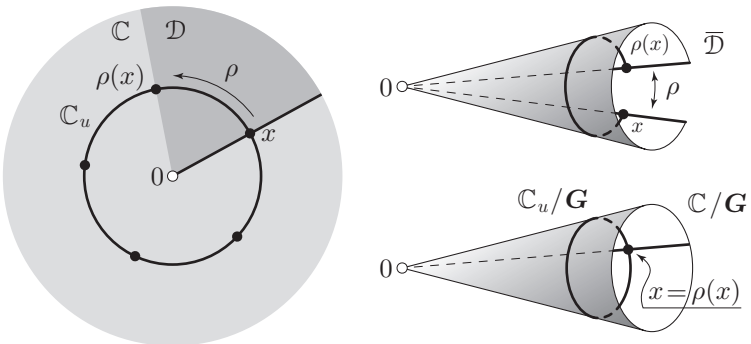
Le même type de raisonnement s'applique $\mathcal{D}_\epsilon$, nous laissons les détails aux soins du lecteur. □

6. Espaces d'orbites

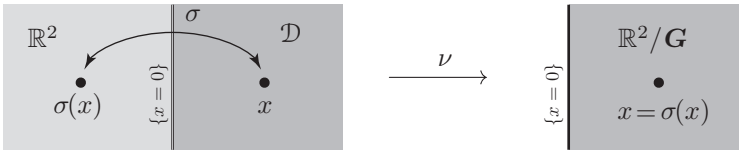
6.1. Préliminiares

La proposition 5.2.3 traite efficacement la situation ou un groupe fini agit librement sur une variété, mais ne dit rien des cas où l'action n'est pas libre.

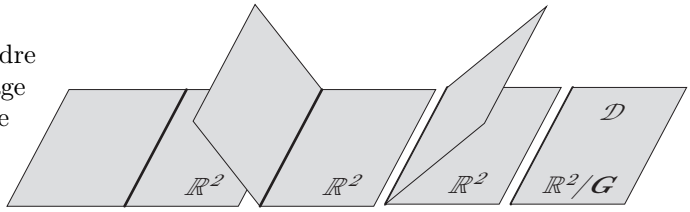
Rotations et cônes. Dans l'exemple 5.2.5, la rotation ρ d'ordre 5 agissant sur le plan complexe $\mathbb{C}$ induit une action libre sur $\mathbb{C}_u$, mais elle n'est pas libre sur $\mathbb{C}$ tout entier, ρ fixe $0 \in \mathbb{C}$. Les fibres de la surjection canonique $\nu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\boldsymbol{G}$ sont tantôt de cardinal 5 tantôt de cardinal 1. On peut facilement imaginer à quoi ressemble l'espace topologique $\mathbb{C}/\boldsymbol{G}$ puisqu'un domaine fondamental $\mathcal{D}$ est donné par un secteur angulaire d'ouverture $2\pi/5$ et de sommet 0. Le recollement de son adhérence $\overline{\mathcal{D}}$ donne un cône de révolution (*cf.* 5.2.7) :



Réflexions et plis. Un autre exemple est celui où $\boldsymbol{M} := \mathbb{R}^2$ et où $\boldsymbol{G}$ est le groupe engendré par la symétrie axiale $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(x, y) = (-x, y)$. Là aussi, l'action n'est pas libre puisque l'axé $\{x = 0\}$ est fixé. Un domaine fondamental est le demi-plan fermé $\mathcal{D} = \{x \geq 0\}$, et comme celui-ci est fermé, la proposition 5.2.7 montre aussitôt que $\mathbb{R}^2/\boldsymbol{G}$ est homéomorhe à $\mathcal{D}$.



On peut comprendre l'opération du passage au quotient comme le résultat du pliage du plan le long de l'axe vertical.



On remarquera que l'espace topologique $\mathbb{R}^2/\boldsymbol{G}$ (donc $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$) ne peut pas être muni d'une structure de variété différentielle de dimension 2. La raison étant l'apparition d'un bord (*cf.* 2.3.26), quelque chose qui est de nature topologique, alors que dans une variété, telle que définie dans 3.1.1, il n'y a pas de bord. La section 7 introduira cette nouvelle notion : les « *surfaces à bord* ».

6.2. Espace d'orbites d'une variété plate

Soit $\boldsymbol{M}$ une variété de dimension n séparée, plate et connexe (par arcs) et soit $\boldsymbol{G}$ un groupe fini d'isométries riemanniennes de $\boldsymbol{M}$.

Mise en garde. On rappelle que dans le contexte présent une isométrie riemannienne différente de $\mathrm{id}_{\boldsymbol{M}}$ est différente de $\mathrm{id}_{\boldsymbol{M}}$ *au voisinage de chaque point de* $\boldsymbol{M}$ (4.4.7), on demandera donc à l'action de $\boldsymbol{G}$ d'être fidèle (voir 5.2.1). Par conséquent, *l'ensemble* $\boldsymbol{M}^g$ *des points fixes de* $\boldsymbol{M}$ *par* $g \in \boldsymbol{G}$ *est d'intérieur vide si et seulement si* $g \neq \boldsymbol{e}$.

6.2.1. Voisinages distingués. D'après 5.2.3-(a) et 4.4.2-(b), chaque $x \in \boldsymbol{M}$ admet un voisinage ouvert V_x contenu dans l'image d'une carte $\nu : U \to \tilde{U} \subseteq \boldsymbol{M}$ de l'atlas de définition de $\boldsymbol{M}$, et tel que,

$$\begin{cases} \text{la distance riemannienne sur } V_x \text{ est la distance euclidienne (4.4.2-(b))} \\ gV_x = V_{gx}\,, \text{ pour tout } g \in \boldsymbol{G}, \\ gV_x \cap V_x \neq \emptyset\,, \text{ si et seulement si } g \in \mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x). \end{cases} \tag{16}$$

Nous pouvons même supposer que $\nu^{-1}(x) = 0$ et que $\nu^{-1}(V_x)$ est une certaine boule euclidienne $B_n(\vec{0}, \epsilon)$ de $\mathbb{R}^n$. Un tel voisinage V_x sera dit « *distingué* ».

6.2.2. Groupe d'isotropie d'un point. L'assertion (c) de 5.2.3 concerne le cas ou $\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x) = \{\boldsymbol{e}\}$. Dans le cas général, les éléments de $\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x)$ agissent sur la boule euclidienne $B_n(\vec{0}, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$, correspondante à un voisinage distingué V_x, comme des isométries *affines* (4.1.1) et même *vectorielles* puisque $\vec{0}$ est fixé. On a donc un homomorphisme de groupes $\rho_x : \mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x) \to O(n)$ qui est injectif d'après la nature locale des isométries riemanniennes sur $\boldsymbol{M}$ (4.4.7).

Définition. L'image de l'homomorphisme injectif $\rho_x : \mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x) \to O(n)$ est le « *groupe d'isotropie* » de $x \in \boldsymbol{M}$, il sera noté $\boldsymbol{W}_x$.

6.2.3. Exercice. Montrer que $\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(gx)$ et $\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x)$ sont des sous-groupes conjugués de $\boldsymbol{G}$. Plus précisément montrer l'égalité

$$\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(gx) = g\ \mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x)\, g^{-1} \tag{17}$$

Montrer que "le" groupe $\boldsymbol{W}_x \subseteq O(n)$ n'est défini qu'à conjugaison près. C'est-à-dire, si V_x est déterminé à l'aide d'une autre carte $\nu' : U' \to \tilde{U}'$, on aura une autre représentation $\rho' : \mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x) \to O(n)$, et un autre groupe d'isotropie $\boldsymbol{W}'_x = \mathrm{im}(\rho')$. Montrer alors qu'il existe $\Theta \in O(n)$ tel que $\rho'(g) = \Theta\rho(g)\Theta^{-1}$ et donc $\boldsymbol{W}_x = \Theta\, \boldsymbol{W}'_x\, \Theta^{-1}$.

Montrer de même que $\boldsymbol{W}_x$ et $\boldsymbol{W}_{gx}$ sont conjugués dans $O(n)$ quels que soient $x \in \boldsymbol{M}$ et $g \in \boldsymbol{G}$.

6.2.4. Proposition. *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété de dimension n, séparée, plate et connexe (par arcs) et soit $\boldsymbol{G}$ un groupe fini d'isométries riemanniennes de $\boldsymbol{M}$. La restriction à un ouvert distingué V_x de la surjection canonique $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ induit un homéomorphisme*

$$\bar{\nu} : B_n(\vec{0}, \epsilon)/\boldsymbol{W}_x \to \nu(V_x)\,.$$

En particulier, $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ est un recollement ouvert d'espaces d'orbites de boules ouvertes de $\mathbb{R}^n$ sous l'action de sous-groupes finis de $O(n)$.

Indication. Les constructions et remarques des paragraphes précédents donnent aussitôt l'identification $V_x/\,\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x) = B_n(\vec{0}, \epsilon)/\boldsymbol{W}_x$. □

6.2.5. Parties G-régulière et G-singulière

- La partie « *régulière* » de $\boldsymbol{M}$, notée $\boldsymbol{M}_{\mathrm{reg}}$, est l'ensemble des $x \in \boldsymbol{M}$ de groupe d'isotropie $\boldsymbol{W}_x$ trivial. Comme $\boldsymbol{W}_x$ est conjugué à $\boldsymbol{W}_{gx}$ (*cf.* (17)), le groupe $\boldsymbol{G}$ laisse stable $\boldsymbol{M}_{\mathrm{reg}}$ et son action y est libre. D'autre part, $\boldsymbol{M}_{\mathrm{reg}}$ est une partie ouverte car elle contient les voisinages distingués de ses points. En effet, soient $x \in \boldsymbol{M}_{\mathrm{reg}}$, $y \in V_x$ et $g \in \mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(y)$. Alors $gV_x \cap V_x \neq \emptyset$ et $g \in \mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x)$ par (16), donc $g = \boldsymbol{e}$.

  L'assertion (c) de proposition 5.2.3 s'applique à $\boldsymbol{M}_{\mathrm{reg}}$ et montre que la restriction de la surjection canonique $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ à $\boldsymbol{M}_{\mathrm{reg}}$ est un revêtement principal de groupe $\boldsymbol{G}$ de la variété plate $\boldsymbol{M}_{\mathrm{reg}}/\boldsymbol{G}$.
- La partie « *singulière* » de $\boldsymbol{M}$, notée $\boldsymbol{M}_{\mathrm{sing}}$ est le complémentaire de $\boldsymbol{M}_{\mathrm{reg}}$, c'est donc une partie fermée de $\boldsymbol{M}$ stable sous l'action de $\boldsymbol{G}$.

6.2.6. Espace d'orbites d'une surface plate Nous nous restreignons au cas des surfaces séparées, plates et connexes. Soit donc $\boldsymbol{M}$ une telle surface munie d'une action *fidèle* d'un groupe fini $\boldsymbol{G}$ par des isométries riemanniennes.

6.2.7. Lemme. *L'ensemble $\boldsymbol{M}_{\mathrm{sing}}$ est un fermé réunion finie de courbes (plates) et de points isolés.*

Indication. $\boldsymbol{M}_{\text{sing}}$ est l'ensemble des points tels que $gx = x$ pour un certain $g \in \boldsymbol{G}$ et $g \neq \boldsymbol{e}$. On a donc

$$\boldsymbol{M}_{\text{sing}} = \bigcup\nolimits_{g \in \boldsymbol{G}, g \neq \boldsymbol{e}} \boldsymbol{M}^g$$

Soit $g \in W_x$ non trivial. On a $gx = x$ et l'action de g sur V_x est linéaire et différente de id, ses points fixes sont donc soit l'intersection d'une droite de $\mathbb{R}^n$ avec V_x, notée $\mathbb{L}_x(g)$, soit uniquement l'origine x. Dans le premier cas si $y \in \mathbb{L}_x(g)$, on a évidemment $g \in \text{Stab}_{\boldsymbol{G}}(y)$ et $y \in \boldsymbol{M}_{\text{sing}}$, donc $\mathbb{L}_x(g) \subseteq \boldsymbol{M}_{\text{sing}}$. On note

$$\mathbb{L}_x := \bigcup\nolimits_{g \in W_x, g \neq \boldsymbol{e}} \mathbb{L}_x(g)\,,$$

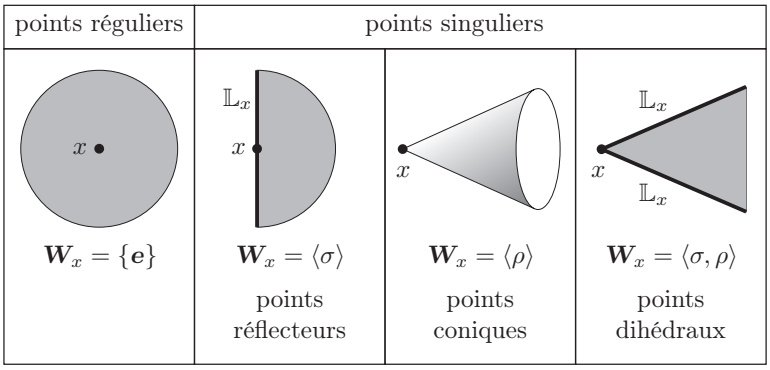
c'est clairement une réunion finie de courbes plates fermées dans V_x. On a

$$\boldsymbol{M}_{\text{sing}} \cap V_x = \mathbb{L}_x\,.$$

En effet, l'inclusion $\supseteq$ est déjà établie. Pour la réciproque, si $y \in \boldsymbol{M}_{\text{sing}} \cap V_x$, il existe $g \neq \boldsymbol{e}$ tel que $g(y) = y$, mais alors $gV_x \cap V_x \neq \emptyset$ et donc $g \in \text{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x)$, d'après le choix de V_x dans 6.2.2. Par conséquent $y \in \mathbb{L}_x(g) \subseteq \mathbb{L}_x$. □

6.2.8. Théorème. *L'espace d'orbites d'une surface séparée plate est un recollement ouvert d'espaces des formes suivantes*

- *Un disque : le disque ouvert $\mathbb{D}(0,\epsilon)$.*
- *Un disque plié : le disque ouvert $\mathbb{D}(0,\epsilon)$ quotienté par une réflexion.*
- *Un cône : le disque ouvert $\mathbb{D}(0,\epsilon)$ quotienté par l'action d'une rotation.*
- *Un cône aplatit : le disque ouvert $\mathbb{D}(0,\epsilon)$ quotienté par un groupe dihédral engendré par une réflexion et une rotation.*



Indication. Les groupes d'isotropie W_x sont des sous-groupes finis de $O(2)$.
Lemme. Les sous-groupes finis de $O(2)$ sont de l'une des formes suivantes

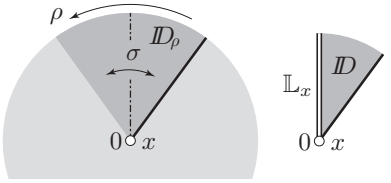
$$\{\boldsymbol{e}\}\,, \qquad \langle\sigma\rangle\,, \qquad \langle\rho\rangle\,, \qquad \langle\sigma,\rho\rangle$$

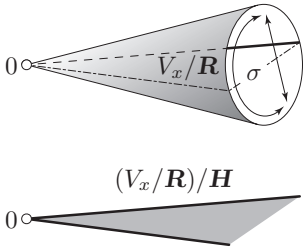
où σ est une réflexion et ρ est une rotation d'ordre fini [34].

Le cas $W_x = \{\boldsymbol{e}\}$ correspond aux $x \in \boldsymbol{M}_{\text{reg}}$ déjà étudie. Pour les cas $W_x = \langle\sigma\rangle$ et $\langle\rho\rangle$, voir la discussion préliminaire de 6.1. Reste le cas dihedral $W_x = \langle\sigma,\rho\rangle$. Comme le sous-groupe de rotations $\langle\rho\rangle$ est distingué dans $\boldsymbol{W}_x$, le sous-groupe $\langle\sigma\rangle$ agit naturellement sur (le cône) $V_x/\langle\rho\rangle$ de sorte et l'on a un homéomorphisme

34. Si ρ est une rotation d'ordre N, le groupe $\langle\sigma,\rho\rangle$ et le « *groupe dihédral* » $\mathbb{D}_N$, c'est le groupe des isométries du plan conservant un polygone régulier à N côtés.

canonique de $(V_x/\langle\rho\rangle)/\langle\sigma\rangle$ sur $V_x/\boldsymbol{W}_x$. Il est alors aisé de voir que $V_x/\boldsymbol{W}_x$ est le cône $V_x/\langle\rho\rangle$ aplati.

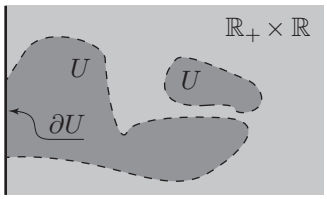




On remarquera aussi que dans ce cas, on a un domaine fondamental $\mathcal{D}$ fermé donc homéomorphe à $(V_x/\langle\rho\rangle)/\langle\sigma\rangle = V_x/W_x$ d'après 5.2.7. □

7. Surfaces à bord

Nous nous intéressons maintenant à une catégorie plus large que celle des surfaces : les « *surfaces à bord* ». Elles sont obtenues par recollement d'ouverts « *à bord* » de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire des ouverts du demi-plan fermé $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Reste à savoir ce que l'on appellera une application de transition de classe $\mathcal{C}^k$ entre de tels ouverts.



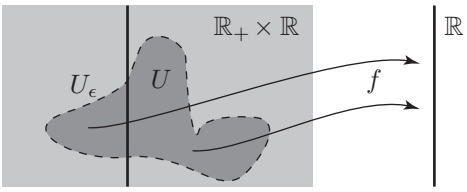
Dans la suite on appellera « *ouvert à bord (de $\mathbb{R}^2$)* » tout ouvert de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Pour un tel ouvert U, on notera $\partial U = U \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$ son « *bord* ».

7.1. Fonctions différentiables des ouverts à bord

Par définition de topologie induite, un partie U de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ est ouverte s'il existe un ouvert U_ϵ de $\mathbb{R}^2$ tel que $U = U_\epsilon \cap \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On remarquera qu'il y a d'infinité d'ouverts U_ϵ qui conviennent pour un U donné, et aussi que U l'intersection des ouverts de $\mathbb{R}^2$ qui le contiennent.

7.1.1. Une « *fonction de classe $\mathcal{C}^r$ sur U* » est par définition la restriction à U d'une fonction de classe $\mathcal{C}^r$ définie sur l'un des ouverts U_ϵ de $\mathbb{R}^2$ contenant U. On note alors $\mathcal{C}^r(U)$ l'ensemble de telles fonctions. On a donc

$$\mathcal{C}^r(U) = \Big(\bigcup_{U_\epsilon \supseteq U} \mathcal{C}^r(U_\epsilon) \Big)\Big|_U$$



Lorsque U est ouvert dans $\mathbb{R}^2$, *i.e.* lorsque $\partial U = \emptyset$, on retrouve bien évidemment la définition de fonction différentible de 1.2.3.

7.1.2. Une application $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : U \to V$ entre des ouverts de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^r$ lorsque chaque fonction coordonnée $\alpha_i : U \to \mathbb{R}$ l'est. On note alors $\mathcal{C}^r(U, V)$ leur ensemble.

Avec ces définitions, l'analogue de la proposition 1.3.1 est vérifié pour les ouverts à bord.

7.1.3. Proposition (Stabilité du bord). *Soit $\alpha : U \to V$ un homéomorphisme d'ouverts à bord de $\mathbb{R}^2$. Alors, $\alpha(\partial U) \subseteq \partial V$ et α induit un par restriction à ∂U, l'homéomorphisme $\partial\alpha : \partial U \to \partial V$. Si de plus α est de classe $\mathcal{C}^k$, il en est de même de $\partial\alpha$.*

Indication. Même idée que dans 2.3.26 et 2.3.27. □

7.2. Les surfaces à bord

La définition est calquée de celle de variété différentiable.

Dans ce type d'espace, le modèle local est un ouvert à bord de $\mathbb{R}^2$.

7.2.1. Définition. On appelle « *surface à bord de classe $\mathcal{C}^k$* » la donnée de

- un espace topologique $\boldsymbol{M}$;
- un recouvrement ouvert $\boldsymbol{M} = \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} \tilde{U}_i$;
- une famille indexée par $i \in \mathfrak{I}$ d'homéomorphismes $\nu_i : U_i \to \tilde{U}_i$, où U_i est un ouvert à bord de $\mathbb{R}^2$, appelés « *cartes locales* », telle que, pour chaque couple $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$, l'application
$$\varphi_{ji} : U_{ij} \to U_{ji}\,, \quad \varphi_{ij} = \nu_j^{-1} \circ \nu_i\,,$$
avec $U_{ij} := \nu_i^{-1}(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$, appelée « *application de transition* », est un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$.

7.2.2. Proposition. *Il y a équivalence entre la donnée d'une surface à bord suivant la définition 7.2.1, et la donnée de l'ensemble d'indices $\mathfrak{I}$, d'une famille $\{U_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ d'ouverts à bord de $\mathbb{R}^2$ et pour chaque couple $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$, d'un ouvert $U_{ij} \subseteq U_i$ et d'une application de transition*
$$\varphi_{ji} : U_{ij} \to U_{ji}\,,$$
qui est un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ tel que

- *pour tout $i \in \mathfrak{I}$, on a $U_{ii} = U_i$ et $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{U_i}$;*
- *pour tout triplet $(i,j,k) \in \mathfrak{I}^3$, on a*
$$\varphi_{ki} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ji}\,, \tag{18}$$
sur l'ouvert $\varphi_{ji}^{-1}(U_{jk} \cap U_{ji})$.

7.3. Bord d'une surface à bord

Un point $x \in \boldsymbol{M}$ est un point « *du bord de $\boldsymbol{M}$* » s'il existe une carte locale $\nu : U \to \boldsymbol{M}$ telle que $x \in \nu(\partial U)$. Par le théorème de stabilité du bord 7.1.3, le choix de la carte locale est indifférent d'où le caractère intrinsèque de la définition. On note $\partial\boldsymbol{M}$ l'ensemble des points du bord de $\boldsymbol{M}$, il peut bien évidemment être vide. La proposition suivante est alors de preuve immédiate toujours grâce au même théorème.

7.3.1. Proposition. *Si $\boldsymbol{M}$ est une surface à bord, son bord $\partial\boldsymbol{M}$ est une partie fermée et c'est une variété de dimension 1 (ou vide).*

7.4. Espace d'orbites des surfaces plates à bord et à coins

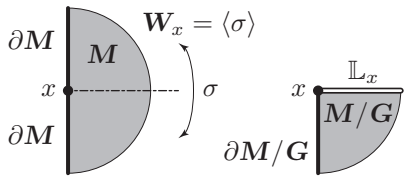
7.4.1. Surfaces plates à bord. La définition est calquée de celle des surfaces à bord, à ceci près que les ouverts à bord sont munis maintenant de la métrique induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^2$, et que les applications de transition sont des isométries.

Comme nous l'avons déjà remarqué, les applications de transition sont les restrictions des isométries affines de $\mathbb{R}^2$ (c'est 4.1.1 pour l'intérieur des ouverts à bord U_{ij}, et par continuité sur U_{ij} tout entier). Tout ce que nous avons dit sur les variétés plates, s'applique. En particulier, si $\boldsymbol{M}$ est séparée, on dispose aussi de la métrique riemannienne $d_{\boldsymbol{M}}$ (4.4.2).

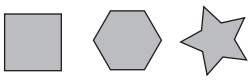
7.4.2. Maintenant, si $\boldsymbol{M}$ est munie d'une action d'un groupe fini $\boldsymbol{G}$ par des isométries, le théorème de la stabilité du bord garanti que $\boldsymbol{G}$ agit *séparément* sur l'intérieur et sur le bord de $\boldsymbol{M}$. On a ainsi une partition de $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ en parties ouverte et fermée (5.2.2) :

$$\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{M}\backslash\partial\boldsymbol{M})/\boldsymbol{G} \amalg \partial\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}.$$

La description locale la partie ouverte est donnée par le théorème 6.2.8 (p. 49). Autour d'un point du bord $x \in \partial\boldsymbol{M}$, un élément non trivial du groupe d'isotropie $\boldsymbol{W}_x$ est une isométrie affine qui préserve un demi-plan, ce ne peut être qu'une réflexion et l'espace quotient est alors un quart de disque.



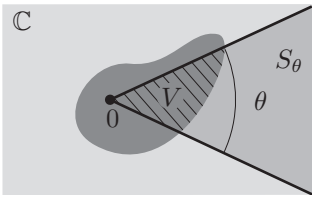
7.4.3. Surfaces plates à coins. Dans le paragraphe précédent nous avons introduit les surfaces plates à bords qui sont des segments de droite. On peut bien évidemment envisager des bords bien plus irréguliers, il suffirait pour cela de prendre une paire des ciseaux et découper une surface suivant une courbe quelconque pour produire des bords aussi irréguliers que souhaité. Après les surfaces plates à bord, le prochain degré de complication serait celui des bords polygonaux, ce qui nous emmène aux « *surfaces à coins* ».



Ouverts à coins. Une surface plate à coins est un recollement d'« *ouverts à coin* » V de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire d'ouverts des secteurs angulaires de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

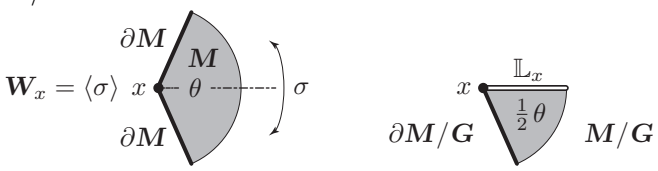
$$S_\theta = \left\{\rho\, e^{it} \;\middle|\; -\theta/2 \leq t \leq \theta/2\right\}.$$

avec $\theta \in]0, 2\pi]$. La définition est alors calquée de celle de 7.2.1 dans le contexte plat.



Maintenant, il est assez évident qu'une isométrie, non seulement préserve le bord de la surface à coins, mais en plus elle transforme un coin d'angle θ en un coin de même angle. Il s'ensuit que dans l'étude de l'espace d'orbites d'une surface séparée plate à coins $\boldsymbol{M}$ munie d'une action d'un groupe fini par des isométries, il ne nous manque que préciser le quotient $V_x/\boldsymbol{W}_x$ lorsque x est un coin d'angle θ. La réponse est de la même nature que celle des surfaces plates à bord. Si le groupe d'isotropie $\boldsymbol{W}_x$ est non trivial, il est nécessairement engendré

par une réflexion d'axe la bissectrice du coin. Le quotient $V_x/\boldsymbol{W}_x$ est donc un coin d'angle $\theta/2$.



On a démontré :

7.4.4. Proposition. *L'espace d'orbites d'une surface séparée plate à coins est encore une surface séparée plate à coins.*

8. Le Laplacien sur les variétés plates

8.1. Le Laplacien sur $\mathbb{R}^n$

8.1.1. Le groupe des isométries. On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle _, _ \rangle$ et de la structure euclidienne correspondante (1.1). On note

- $\mathbb{I}\mathrm{so}(n, \mathbb{R})$, le « *groupe des isométries de* $\mathbb{R}^n$ ».
- $O(n) := \mathrm{Stab}_{\mathbb{I}\mathrm{so}(n)}(\vec{0})$, le « *groupe orthogonal de* $\mathbb{R}^n$ », ses éléments sont les applications *linéaires* orthogonales (voir 4.1.1).
- $\mathbb{T}(n, \mathbb{R})$, le « *groupe des translations de* $\mathbb{R}^n$ ». Pour $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, la « *translation (de vecteur* $\vec{v}$*)* » est l'isométrie $\tau_{\vec{v}} : \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{v}$. On a

$$\tau_{\vec{0}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n}\,, \qquad \tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{w}} = \tau_{\vec{v}+\vec{w}}\,, \qquad \theta\, \tau_{\vec{v}}\, \theta^{-1} = \tau_{\theta(\vec{v})}\,,\ \forall \theta \in O(n)\,,$$

8.1.2. Proposition

a) *Le groupe des translations* $\mathbb{T}(n, \mathbb{R})$ *est distingué dans* $\mathbb{I}\mathrm{so}(n, \mathbb{R})$.

b) *L'application*

$$\Psi : O(n) \times \mathbb{T}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{I}\mathrm{so}(n, \mathbb{R})\,, \quad (\theta, \tau) \mapsto \theta \circ \tau\,,$$

est bijective et c'est un isomorphisme de groupes si l'on munit $O(n) \times \mathbb{T}(n, \mathbb{R})$ *de la loi de composition interne :*

$$(\theta', \tau_{\vec{x}})(\theta, \tau_{\vec{y}}) := (\theta'\theta, \tau_{\theta^{-1}(\vec{x})+\vec{y}})$$

8.1.3. L'algèbre $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n))$. Étant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V, l'ensemble $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ des ses « *endomorphismes* $\mathbb{R}$*-linéaires* » ([35]) est muni de trois opérations : le « *produit par des scalaires* '$\cdot$' », l'« *addition* '$+$' » et la « *composition* '$\circ$' ». Ces opérations sont telles que

- $(\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V), +, 0, \cdot, 1)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,
- $(\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V), +, 0, \circ, \mathrm{id}_V)$ est un anneau,
- pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, on a $\lambda \cdot (\alpha \circ \beta) = (\lambda \cdot \alpha) \circ \beta = \alpha \circ (\lambda \cdot \beta)$.
- la composition '$\circ$' est « *associative* », *i.e.* $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$

On dit alors que $(\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V), +, 0, \circ, \mathrm{id}_V, \cdot, 1)$ est une « $\mathbb{R}$*-algèbre associative* ».

Nous allons nous intéresser maintenant à l'algèbre $(\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)), +, \circ, \cdot)$ des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n)$ (1.2.4). Voici quelques fanilles importantes de ses éléments.

D1) Pour tout $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, la « *multiplication par* h » (*cf.* 1.2.2)

$$\mu_h : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\,, \quad f \mapsto h \cdot f\,,\ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\,.$$

D2) Pour tout $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, la « *composition par* α »

$$\alpha^\natural : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\,, \quad \alpha^\natural(f) = f \circ \alpha\,,\ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\,.$$

Si $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on a (*cf.* 1.3.3)

$$(\beta \circ \alpha)^\natural = \alpha^\natural \circ \beta^\natural\,. \tag{19}$$

35. C'est-à-dire, des application $\mathbb{R}$-linéaires de V dans lui-même.

D3) Pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, la « *dérivée directionnelle de direction* $\vec{v}$ »

$$\partial_{\vec{v}} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\,.$$

Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, la fonction $\partial_{\vec{v}}(f)$ associe à $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ la valeur

$$\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) := \frac{d}{dt} f(\vec{x} + t\vec{v})\big|_{t=0}\,.$$

La fonction $\partial_{\vec{v}}(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est encore $\mathcal{C}^\infty$ et $\partial_{\vec{v}}$ est bien $\mathbb{R}$-linéaire (8.3.3).

D4) Les « *dérivées partielles (canoniques)* ». Si $\{\vec{\boldsymbol{e}}_i\}_{i=1,\dots,n}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la « *est la i-ième dérivée partielle* » est

$$\partial_i := \partial_{\vec{\boldsymbol{e}}_i} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\,.$$

D5) Le « *Laplacien* »

$$\boxed{\Delta := \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2 : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)} \tag{20}$$

8.1.4. Proposition. *L'application*

$$\partial : \mathbb{R}^n \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n))\,, \quad \vec{v} \mapsto \partial_{\vec{v}}$$

est une injection $\mathbb{R}$-linéaire. *En particulier, si* $\vec{v} = x_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{e}}_n$, *on a :*

$$\boxed{\partial_{\vec{v}} = x_1\partial_1 + \cdots + x_n\partial_n} \tag{21}$$

Indication. Pour la linéarité voir 8.3.3. Pour l'injectivité, montrer l'égalité $\partial_{\vec{v}}(\gamma_j) = x_j$, où γ_j est la fonction j-ème coordonnée $\gamma_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto x_j$. □

8.1.5. L'algèbre $\mathbf{Diff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$. Dans ces notes, on entendra par « *opérateur différentiel sur* $\mathbb{R}^n$ » tout élément de la sous-algèbre '$\mathrm{Diff}_{\boldsymbol{R}}(\mathbb{R}^n)$' de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n))$ engendrée par les multiplications (D1) et par les dérivées partielles (D4).

Conventions notionnelles. Dans le but d'alléger les notations, il est d'usage de ne pas indiquer les opérations de multiplication par scalaires '$\cdot$' et de composition '$\circ$' dans l'algèbre $\mathrm{Diff}_{\boldsymbol{R}}(\mathbb{R}^n)$ et de simplifier le parenthésage autant que les règles de l'algèbre le permettent. L'écriture $\lambda \cdot (\alpha \circ \beta)$ devient donc $\lambda\alpha\beta$.

De même, pour $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, la multiplication $\mu_h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n))$ est simplement appelé "fonction" et noté "h", le contexte étant suffisamment clair pour éliminer toute ambiguïté

Le lemme suivant tient compte de ces conventions et rappelle les principales caractéristiques de cette sous-algèbre.

8.1.6. Lemme

a) *Règle de dérivation de Leibniz. Pour tout* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *et toute* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, *on a*

$$\partial_{\vec{v}}\, f - f\, \partial_{\vec{v}} = \partial_{\vec{v}}(f)\,. \tag{22}$$

b) *Pour tous* $\vec{v}, \vec{v}' \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\partial_{\vec{v}}\, \partial_{\vec{v}'} - \partial_{\vec{v}'}\, \partial_{\vec{v}} = 0\,.$$

c) *Un élément* $P \in \mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ *s'écrit d'une et d'une seule manière comme polynôme en* $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ *à coefficients dans* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$*, soit*

$$P = \sum\nolimits_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} f_{i_1,\ldots,i_n} \partial_1^{i_1} \cdots \partial_n^{i_n} .$$

où $f_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *et* $f_{i_1,\ldots,i_n} = 0$ *pour presque tout* $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$*.*

On résume ce résultat par la notation

$$\mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)[\partial_1, \ldots, \partial_n] . \tag{23}$$

où l'on rappelle que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *possède la structure d'un anneau (1.2.4).*

Démonstration. Exercice. *Indication pour* (c) : Raisonner par induction sur le nombre des dérivées partielles intervenant dans un monôme $T_1 T_2 \cdots T_r$, où T_j désigne soit une fonction soit l'un des opérateurs ∂_i. La règle de Leibniz permet la descente inductive. □

8.1.7. Remarque. Il faut bien retenir le fait que contrairement au produit des fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et à la composition des dérivées partielles qui sont des opérations commutatives, le produit d'une fonction et d'une dérivation ne l'est pas : il obéit à la règle de Leibniz (22). La notation (23) ne doit donc pas induire cette erreur par une analogie hâtive avec l'algèbre des polynômes.

8.1.8. Exercice. Soient $(i_1, \ldots, i_n)$ et $(j_1, \ldots, j_n)$ des n-uplets d'entiers naturels On note $X_1, \ldots, X_n$ les « *fonctions coordonnées* » sur $\mathbb{R}^n$, *i.e.* $X_i(\vec{x}) = x_i$. Montrer que si $i_k \leq j_k$ pour $k = 1, \ldots, n$, on a

$$\frac{\partial_1^{i_1}}{i_1!} \cdots \frac{\partial_n^{i_n}}{i_n!} (X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n}) = \binom{j_1}{i_1} \cdots \binom{j_n}{i_n} X_1^{j_1 - i_1} \cdots X_n^{j_n - i_n} .$$

Que devient l'égalité si $i_k > j_k$ pour l'un des k ?

Les fractions $\partial^i / i!$ sont appelées « *puissances divisées* », elles jouent un rôle central dans diverses disciplines mathématiques.

8.1.9. L'algèbre $\mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(U)$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Dans la liste d'opérations (D1-D5), la multiplication par une fonction, les dérivées partielles, et donc le Laplacien, opèrent également sur les fonctions de $\mathcal{C}^\infty(U)$, quel que soit l'ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$. De ce fait, on a une application naturelle de restriction

$$\mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(U) .$$

Le lemme 8.1.6 s'applique également à cette situation et donne l'égalité

$$\mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(U) = \mathcal{C}^\infty(U)[\partial_1, \ldots, \partial_n] .$$

8.1.10. Exercice. Montrer que pour que dans $\mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(U)$ une fonction commute aux dérivées partielles, il faut et il suffit qu'elle soit localement constante.

8.1.11. Action de $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$ sur $\mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$. Un cas particulièrement important d'opérateurs du type (D2) est fourni par les automorphismes *affines* de $\mathbb{R}^n$, *i.e.* par les composées des éléments $\theta \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$: le « *groupe général linéaire de* $\mathbb{R}^n$ », et des translations $\tau_{\vec{v}} \in \mathbb{T}(n, \mathbb{R})$: le « *groupe des translations de* $\mathbb{R}^n$ ». Une telle bijection $\phi = \theta \circ \tau_{\vec{v}}$ est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ (exercice) de même que son inverse ϕ^{-1}. L'élément $\phi^\natural \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ est donc inversible dans cette algèbre.

Lemme. *Soit* $\phi \in \mathrm{Aff}(n,\mathbb{R})$.

a) *Pour tout* $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $(\phi^{-1})^\natural \circ \mu_h \circ \phi^\natural = \mu_{h\circ\phi}$.

b) *Pour tout* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\begin{cases} (\phi^{-1})^\natural \circ \partial_{\vec{v}} \circ \phi^\natural = \partial_{\phi(\vec{v})} & \text{si } \phi \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}), \\ (\phi^{-1})^\natural \circ \partial_{\vec{v}} \circ \phi^\natural = \partial_{\vec{v}} & \text{si } \phi \in \mathbb{T}(n,\mathbb{R}). \end{cases}$

c) *L'application*

$(\phi^{-1})^\natural \circ (_) \circ \phi^\natural : \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)) \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n))\,, \quad \varphi \mapsto (\phi^{-1})^\natural \circ \varphi \circ \phi^\natural$

est un automorphisme d'algèbre qui stabilise $\mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$, i.e.

$$(\phi^{-1})^\natural \circ \mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \circ \phi^\natural = \mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$$

Démonstration. (b). On applique $(\theta^{-1})^\natural \circ \partial_{\vec{v}} \circ \theta^\natural$ à une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \big((\theta^{-1})^\natural \circ \partial_{\vec{v}} \circ \theta^\natural\big)(f)(\vec{x}) &= \big(\partial_{\vec{v}} \circ \theta^\natural\big)(f)(\theta^{-1}(\vec{x})) \\ &= \frac{d}{dt}\, \theta^\natural(f)(\theta^{-1}(\vec{x}) + t\vec{v})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\,(f)(\vec{x} + t\theta(\vec{v}))\Big|_{t=0} \\ &= \partial_{\theta(\vec{v})}(f)(\vec{x}) \end{aligned}$$

Le reste du lemme est laissé en exercice. □

8.1.12. Action de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ sur le Laplacien. Comme nous l'avons remarqué dans l'exercice 8.1.4, l'ensemble $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ est linéairement indépendant dans $\mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ et engendre un sous-espace vectoriel de dimension n noté $\partial_{\mathbb{R}^n}$. On exprime les éléments de $\partial_{\mathbb{R}^n}$ par l'écriture matricielle habituelle

$$\partial_{\vec{v}} = x_1\partial_1 + \cdots + x_n\partial_n = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}.$$

L'assertion (b) du lemme 8.1.11, exprime alors le fait que

$$(\theta^{-1})^\natural \circ \partial_{\vec{v}} \circ \theta^\natural = \partial_{\theta(\vec{v})} = \theta(x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix},$$

et en prenant $\vec{v} = \vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n$, on obtient l'égalité

$$\begin{pmatrix} (\theta^{-1})^\natural \circ \partial_1 \circ \theta^\natural \\ \vdots \\ (\theta^{-1})^\natural \circ \partial_n \circ \theta^\natural \end{pmatrix} = {}^t((\theta_{ij})) \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}, \tag{24}$$

utile pour démontrer la proposition suivante.

8.1.13. Théorème

a) *Si* $\theta \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$, *on a*

$$(\theta^{-1})^\natural \circ \Delta \circ \theta^\natural = (\partial_1, \ldots, \partial_n)\, ((\theta_{ij}))\, {}^t((\theta_{ij})) \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$$

b) *Si* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\tau^\natural_{-\vec{v}} \circ \Delta \circ \tau^\natural_{\vec{v}} = \Delta$$

c) *Le Laplacien commute aux isométries de* $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\phi^\natural \circ \Delta = \Delta \circ \phi^\natural\,, \quad \forall \phi \in \mathbb{I}\mathrm{so}(n,\mathbb{R})}$$

d) *Une isométrie* $\phi : U \to V$ *entre deux ouverts de l'espace euclidien* $\mathbb{R}^n$ *induit l'application* $\mathbb{R}$*-linéaire* $\phi^\natural : \mathcal{C}^\infty(V) \to \mathcal{C}^\infty(U)$*. On a alors*

$$\boxed{\phi^\natural \circ \Delta_V = \Delta_U \circ \phi^\natural\,, \quad \forall \phi \in \mathbb{I}\mathrm{so}(U,V)}$$

où l'on a noté Δ_U *et* Δ_V *les restrictions respectives du Laplacien (8.1.9).*

Indication. On écrit le Laplacien sous forme de produit matriciel

$$\Delta = (\partial_1, \ldots, \partial_n) \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$$

on utilise alors le fait que $\phi^\natural \circ (_) \circ (\phi^{-1})^\natural$ est un automorphisme d'algèbre, on applique (24) et le fait que l'on a $\theta\, {}^t\theta = \mathrm{id}$ pour tout $\theta \in O(n)$. □

8.1.14. Corollaire. *Pour toute base orthonormée* $\{\vec{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{w}}_n\}$ *de* $\mathbb{R}^n$*, on a*

$$\Delta = \partial^2_{\vec{\boldsymbol{w}}_1} + \cdots + \partial^2_{\vec{\boldsymbol{w}}_n}$$

8.2. Le Laplacien sur les variétés plates

Nous avons introduit dans la section section 3.2.1 l'espace $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété $\boldsymbol{M}$ de même classe ce qui comprend le cas des variétés plates.

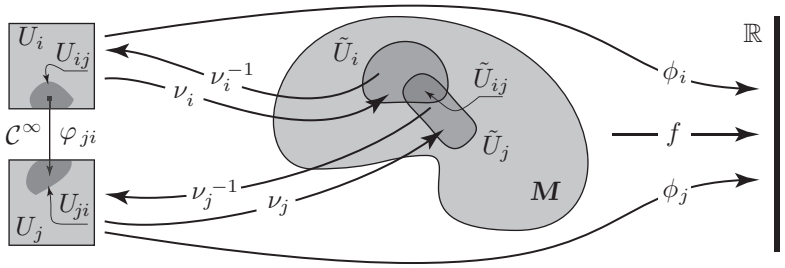
Le but de cette section est de montrer que la définition du Laplacien $\Delta \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n))$ s'étend de manière canonique à l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M}))$ où $\boldsymbol{M}$ est une variété plate de dimension n.

8.2.1. Fonctions sur une variété. Soit $\boldsymbol{M}$ un espace topologique muni d'une structure de variété de dimension n et de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'aide d'un atlas (de définition) $\mathcal{A} = \{\nu_i : U_i \to \tilde{U}_i \subseteq \boldsymbol{M}\}_{i\in\mathfrak{I}}$.

8.2.2. Proposition. *Il y a équivalence entre la donnée de* $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$ *(d'après la définition 3.2.1), et la donnée d'une famille de fonctions* $\{\phi_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i)\}_{i\in\mathfrak{I}}$ *telle que pour tout couple* $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ *on ait*

$$\phi_i = \phi_j \circ \varphi_{ji}\,, \ \textit{sur l'ouvert}\ U_{ij}\,. \qquad (*)$$

où $\varphi_{ji} : U_{ij} \to U_{ji}$ *désigne la fonction de transition.*



Démonstration. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$, on pose $\phi_i := f \circ \nu_i$ et $(*)$ est claire. Réciproquement, si $x \in \boldsymbol{M}$, on pose $f(x) := \phi_i(\nu^{-1}(x))$ si $x \in \tilde{U}_i$. La condition $(*)$ sert à montrer que $f : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$ est ainsi bien définie. La condition de différentiabilité de 3.2.1 est alors automatique. □

8.2.3. Théorème et définition. *Soit $\boldsymbol{M}$ est une variété plate d'atlas plat complet $\mathcal{A} = \{\nu_i : U_i \to \tilde{U}_i \subseteq \boldsymbol{M}\}$ (4.2.3) . Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$, la famille de fonctions*

$$\{\Delta_{U_i}(f \circ \nu_i) : U_i \to \mathbb{R}\}_{i \in \mathfrak{I}}$$

*définit une fonction $\Delta(f) \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$. L'opérateur $\Delta : \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M}) \to \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$ ainsi défini est $\mathbb{R}$-linéaire, on l'appelle « **le Laplacien de $\boldsymbol{M}$** ».*

Démonstration. Il suffit de vérifier que la famille en question satisfait la condition de recollement $(*)$ de 8.2.2. Notons $\phi_j := \Delta(f \circ \nu_j)$, on a sur l'ouvert U_{ij}

$$\phi_j \circ \alpha_{ji} = (\alpha_{ji}^\natural \circ \Delta)(f \circ \nu_j) \underset{1}{=} (\Delta \circ \alpha_{ji}^\natural)(f \circ \nu_j) = \Delta(f \circ \nu_j \circ \varphi_{ji}) = \phi_i \,,$$

où $(\underset{1}{=})$ est la commutation du Laplacien et les isométries (8.1.13-(d)). □

8.3. Le Laplacien sur les ouverts à coin

Nous suivons la même démarche que dans le cas des variétés plates, mais nous devons auparavant préciser ce que l'on va appeler « *fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$* » sur un ouvert à coin V de $\mathbb{R}^2$ (7.4.3, p. 52).

8.3.1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ sur les ouverts à coin de $\mathbb{R}^2$. Il est évident que ce sera une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ continue et de classe $\mathcal{C}^r$ sur $V \backslash \partial V$, mais la condition de dérivabilité sur les points de ∂V mérite quelques commentaires.

Dans un ouvert à coin V, pour tout $\vec{y} \in \partial V$ et pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\vec{y} \pm \epsilon \vec{v} \in V \,, \text{ pour } \epsilon > 0 \text{ assez petit,} \tag{25}$$

on peut étudier l'existence de la dérivée directionnelle "latérale" (55)

$$\partial_{\vec{v}}(f)(\vec{y}) := \lim_{\epsilon \to 0\pm} \frac{f(\vec{y} + \epsilon \vec{v}) - f(\vec{y})}{\epsilon} \,, \tag{26}$$

où $\lim_{\epsilon \to 0\pm}$ indique que l'approche de 0 se fera par des valeurs tantôt négatives, tantôt positives, de manière à garantir que $\vec{y} + \epsilon \vec{v} \in V$.

8.3.2. Lemme. *Soit $f : V \to \mathbb{R}$ continue et telle que les dérivées partielles $\partial_i(f)$ existent sur $V \backslash \partial V$ et admettent un prolongement continu à V tout entier. Alors :*

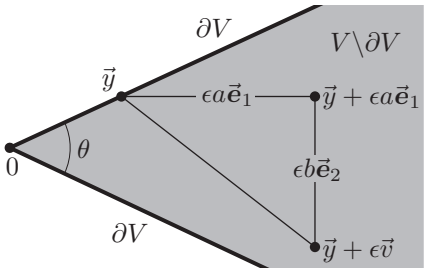
a) *Pour tout $\vec{y} \in \partial V$ et tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ vérifiant la condition (25), la dérivée directionnelle latérale $\partial_{\vec{v}}(f)(\vec{y})$ existe et l'on a*

$$\partial_{\vec{v}}(f)(\vec{y}) = \lim_{\vec{x} \in V \backslash \partial V \,, \vec{x} \to \vec{y}} a\, \partial_1(f)(\vec{x}) + b\, \partial_2(f)(\vec{x}) \,.$$

b) *Pour tout $y \in V$ qui n'est pas un « coin » dans ∂V,* i.e. *$y \neq 0$, les dérivées directionnelles $\partial_{\vec{v}}(f)$ existent pour tout vecteur $\vec{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et l'on a*

$$\partial_{\vec{v}}(f)(\vec{y}) = a\, \partial_{\vec{e}_1}(f)(\vec{y}) + b\, \partial_{\vec{e}_2}(f)(\vec{y}) \,.$$

Démonstration. Cela résulte d'appliquer le théorème des accroissements finis à la situation décrite dans la figure.



On a grâce à ce théorème

$$\frac{f(\vec{y}+\epsilon\vec{v})-f(\vec{y})}{\epsilon} = \frac{f(\vec{y}+\epsilon\vec{v})-f(\vec{y}+\epsilon a\vec{e}_1)+f(\vec{y}+\epsilon a\vec{e}_1)-f(\vec{y})}{\epsilon}$$
$$= b\,\partial_{\vec{e}_2}(f)(\vec{y}+\epsilon a\vec{e}_1+\epsilon' b\vec{e}_2)+a\,\partial_{\vec{e}_1}f(\vec{y}+\epsilon'' a\vec{e}_1)$$

où $\epsilon', \epsilon'' \in]0,\epsilon[$, et l'hypothèse de prolongement continu des dérivées partielles de f depuis l'intérieur de V permet de conclure. □

8.3.3. Remarque. L'énoncé du lemme et sa démonstration ne sont autres que l'adaptation au contexte des ouverts à coin du théorème, déjà cité dans ces notes (1.2.3), qui affirme l'équivalente pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entre être de classe $\mathcal{C}^1$ et avoir des dérivées partielles continues. *Ce lemme est très important puisqu'il nous permettra de faire du calcul différentiel sur des ouverts à coin et, ultérieurement, sur les surfaces plates à coins.*

Forts de ces observations, on définit une fonction de classe $\mathcal{C}^r$ sur un ouvert à coin de la manière suivante

8.3.4. Définition. Soit V un ouvert à coin de $\mathbb{R}^2$ et soit r un entier positif. Une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^r$ si

- $f : V \to \mathbb{R}$ est continue ;
- f est de classe C^1 sur $V\backslash\partial V$;
- chaque dérivée partielle $\partial_i(f)$, définie sur $V\backslash\partial V$, se prolonge continûment à V tout entier en une fonction que nous notons pareillement $\partial_i(f) : V \to \mathbb{R}$;
- les applications $\partial_i(f) : V \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^{r-1}$.

On pose alors

$$\mathcal{C}^\infty(V) := \bigcap\nolimits_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^r(V)\,.$$

8.3.5. Le Laplacien sur $\mathcal{C}^\infty(V)$. La définition de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert à coin V introduit les dérivées partielles, et donc directionnelles, en faisant agir ces opérateurs à l'intérieur des ouverts à coin concernés, puis en passant à la limite sur ∂V. Il s'ensuit que les propriétés des opérateurs différentiels

de 8.1.5 continuent d'être vérifiées pour les ouverts à coin. Les applications

$$\partial_{\vec{v}} : \mathcal{C}^\infty(V) \to \mathcal{C}^\infty(V)$$

sont bien définies et $\mathbb{R}$-linéaires, le lemme 8.1.6 est vérifié et l'on a

$$\mathrm{Diff}_{\mathbb{R}}(V) := \mathcal{C}^\infty(V)[\partial_1, \partial_2]\,.$$

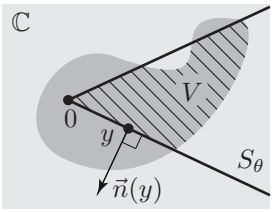
Le lapacien sur $\mathcal{C}^\infty(V)$ est défini par la même formule

$$\boxed{\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2}\,, \tag{27}$$

et pour toute base orthonormée $\{\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, on a (8.1.14)

$$\Delta = \partial^2_{\vec{\mathbf{w}}_1} + \partial^2_{\vec{\mathbf{w}}_2}\,. \tag{28}$$

8.3.6. Dérivée normale au bord. Un ouvert à coin V à été défini dans 7.4.3 comme un ouvert d'un secteur angulaire S_θ de $\mathbb{C}$. Il est évident que pour tout $y \in \partial V$ différent de $0 \in \mathbb{C}$, il existe un unique vecteur normal au bord de norme 1 et sortant de l'ouvert, on le notera $\vec{n}(y)$. L'application $\vec{n} : \partial V\backslash\{0\} \to \mathbb{C}_u$, $y \mapsto \vec{n}(y)$ est localement constante.



On appèlera « *dérivée normale (en $y \in \partial V$)* » l'opérateur

$$\partial_{\vec{n}} : \mathcal{C}^\infty(\partial V\backslash\{0\}) \to \mathcal{C}^\infty(\partial V\backslash\{0\})$$

défini par (26), c'est-à-dire

$$\partial_{\vec{n}}(f)(y) := \partial_{\vec{n}(y)}(f)(y) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{f(\vec{y}) - f(\vec{y} - \epsilon\,\vec{n}(y))}{\epsilon}\,.$$

8.3.7. Exercice. Monter que la fonction $\partial_{\vec{n}}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\partial V\backslash\{0\}$, quelle que soit $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$.

8.4. Le Laplacien sur les ouverts plats à coins

8.4.1. Fonctions sur une surface plate à coins. Soit $\boldsymbol{M}$ une variété plate à coins. L'espace $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$ est défini, comme pour les variétés plates (8.2), à l'aide de la proposition de recollement 8.2.2. Il suffit juste de comprendre que l'isométrie (affine) de transition $\varphi_{ji} : V_{ij} \to V_{ji}$ échange intérieurs, bords, coins et dérivées directionnelles qu'elles soient latérales ou non. L'application $\varphi_{ji}^\natural : \mathcal{C}^\infty(V_{ji}) \to \mathcal{C}^\infty(V_{ij})$, $\phi_j \mapsto \phi_j \circ \varphi_{ji}$, est donc bien définie. Á partir de là, la définition de $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$ est calquée de la proposition 8.2.2.

8.4.2. Le Laplacien sur une surface plate à coins. Tout comme nous avons procédé dans les paragraphes précédents, la vérification de la commutation des Laplaciens et de l'isométrie φ_{ji}, *i.e.* l'égalité

$$\varphi_{ji}^\natural\big(\Delta_{V_{ji}}(f)\big) = \Delta_{V_{ij}}\big(\varphi_{ji}^\natural(f)\big)\,, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(V_{ji})\,,$$

est automatique dans la mesure ou φ_{ji} respecte les bords et ramène la question de la commutation aux intérieurs des ouverts en question sur les quels le résultat est déjà connu, un passage à la limite achève alors la vérification. La proposition 8.1.13, notamment son assertion (d), se voit ainsi établie pour les ouverts à coin ce qui est l'ingrédient qui valide le théorème-définition 8.2.3. Ce théorème donne maintenant la définition du Laplacien d'une surface plate à coins.

8.4.3. Applications localement isométriques. Une application entre variétés plates (à bords, à coins, ...) $\alpha : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$, est dite « *localement isométrique* » lorsque tout $x \in \boldsymbol{M}_1$ admet un voisinage ouvert V_x tel que $\alpha(V_x)$ est ouvert dans $\boldsymbol{M}_2$ et $\alpha : V_x \to \alpha(V_x)$ est une isométrie inversible.

On dira aussi que α « *respecte bords et coins* » lorsque

$$\alpha^{-1}(\text{bord}) = \text{bord et } \alpha^{-1}(\text{coin}) = \text{coin}.$$

8.4.4. Proposition. *Désignons par $\boldsymbol{M}$ une variété plate (à bords, à coins, ...).*

a) *Une application $\alpha : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$, localement isométrique, respecte bords et coins et « commute aux Laplaciens »,* i.e.

$$\alpha^\natural \circ \Delta_{\boldsymbol{M}_2} = \Delta_{\boldsymbol{M}_1} \circ \alpha^\natural .$$

b) *Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe agissant par des isométries sur $\boldsymbol{M}$. Alors,*

i) *L'action de $\boldsymbol{G}$ sur $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$ commute au Laplacien $\Delta_{\boldsymbol{M}}$. En particulier,*

- *$\boldsymbol{G}$ agit sur les sous-espaces propres de $\Delta_{\boldsymbol{M}}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$.*
- *$\Delta_{\boldsymbol{M}}$ agit sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{G}}$ des fonctions $f : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui sont $\boldsymbol{G}$-invariantes,* i.e. *telles que $f \circ g = f$ pour tout $g \in \boldsymbol{G}$.*

ii) *Lorsque $\boldsymbol{G}$ est fini et agit **librement** sur $\boldsymbol{M}$, La surjection canonique*

$$\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$$

respecte bords et coins et c'est une isométrie locale. L'application induite

$$\nu^\natural : \mathcal{C}^r(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}) \to \mathcal{C}^r(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{G}}, \quad \phi \mapsto \phi \circ \nu ,$$

est un isomorphisme pour tout r, et commute aux Laplaciens si $r \geq 2$.

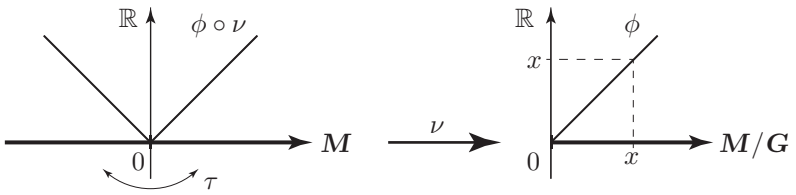
Indication. Exercice (utiliser 5.2.3-(c)). □

8.4.5. Remarque. Soit $\boldsymbol{M} = \mathbb{R}$. L'application $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$, est une isométrie involutive, *i.e.* $\tau^2 = \text{id}$. Le groupe $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{e}, \tau\}$ engendré par τ n'opère pas librement car $\tau(0) = 0$. La demi-droite fermée $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty[$ est un domaine fondamental fermé (5.2.7) et s'identifie à la variété plate à bord $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$.

On a bien un isomorphisme

$$\nu^\natural : \mathcal{C}^0(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}) \to \mathcal{C}^0(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{G}}, \quad \phi \mapsto \phi \circ \nu ,$$

mais sa restriction à $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G})$ n'est pas à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{G}}$, ni d'ailleurs même pas dans $\mathcal{C}^1(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{G}}$. En effet, la fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais $\nu^\natural(\phi)$, $x \mapsto |x|$, n'est pas dérivable en 0.



Par cet exemple, nous montrons que la liberté de l'action de $\boldsymbol{G}$ sur $\boldsymbol{M}$ est indispensable dans l'assertion (b)-(ii) de la proposition précédente.

Ce le genre de difficulté dont il faut s'attendre lorsque l'action de $\boldsymbol{G}$ n'est pas libre. Le preuve du théorème 10.2.6 est un exemple où ce phénomène exige une attention particulière.

8.5. Vibrations des surfaces plates à coin

Lors de la vibration d'une membrane de tambour $\boldsymbol{M}$, c'est-à-dire d'un domaine à bord $\partial\boldsymbol{M}$ du plan $\mathbb{R}^2$, chaque point de $\vec{x} \in \boldsymbol{M}$ a une coordonnée verticale "h" qui varie avec le temps "t". Ce phénomène est repéré par une fonction à deux variables $h(t, \vec{x})$. On démontre que si h est supposée de classe $\mathcal{C}^2$, elle vérifie une certaine équation au dérivées partielles (« *une EDP* ») : l'« *équation des membranes vibrantes* », a savoir

$$\partial_t^2(h) = c^2(\partial_1^2 + \partial_2^2)(h)\,, \quad \text{et} \quad h(t,\vec{x}) = 0\,,\ \forall \vec{x} \in \partial\boldsymbol{M}\,,\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{29}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une certaine constante positive qui relève des caractéristiques physiques de la membrane, p.e. densité, elasticité, tension.

La transposition au contexte des surfaces plates à coins est immédiate.

8.5.1. Définition. Une « *vibration* » d'une surface plate à coin $\boldsymbol{M}$ est la donnée d'une fonction $h : \boldsymbol{M} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ astreinte à vérifier l'équation différentielle

$$\boxed{\partial_t^2(h) = c^2\Delta_{\boldsymbol{M}}(h)} \tag{30}$$

et satisfaisant la « *condition au bord* »

$$h(t,x) = 0 \text{ pour tout } x \in \partial\boldsymbol{M} \text{ et tout } t \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

8.5.2. Vibrations et fonctions propres du Laplacien. Si dans (30) on pose

$$h(t,x) = \big(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\big)f(x)\,, \tag{32}$$

on voit que h est une vibration si et seulement si

$$-\omega^2 f = c^2\Delta(f) \tag{33}$$

soit donc

$$\boxed{-\Delta(f) = \lambda f} \tag{34}$$

pour $\lambda = (\omega/c)^2 \in \mathbb{R}$.

Une telle fonction fonction, si elle est non nulle, est appellée « *fonction propre* » de $-\Delta_{\boldsymbol{M}}$ (parfois appelé « *le moins-Laplacien* »), et le nombre réel λ est la « *valeur propre* » ([36]) associée.

8.5.3. Conditions aux limites. Deux conditions au bord pour les fonctions propres vont jouer un rôle important dans la suite

- (D) *Conditions aux limites de Dirichlet.* Elle traduit la condition (31) :

$$\boxed{f|_{\partial\boldsymbol{M}} = 0}$$

- (N) *Conditions aux limites de Neumann.*

$$\boxed{\partial_\nu(f)(x) = 0\,, \quad \forall x \in \partial\boldsymbol{M}}$$

où $\partial_{\vec{n}}$ est l'opérateur de dérivée directionnelle normale au bord (8.3.1-(26)).

Notation. On désignera par 'β' l'une des deux conditions, soit $\beta \in \{D, N\}$.

36. Respectivement « *Eigenfunction* » et « *eigenvalue* » en anglais.

8.5.4. Définition. Le « *spectre* » $\sigma(\boldsymbol{M})$ (du moins-Laplacien) est l'ensemble des valeurs propres de $-\Delta_{\boldsymbol{M}}$. Le « *spectre de Dirichlet* » $\sigma_D(\boldsymbol{M})$ est de même, mais ne concerne que les fonctions propres vérifiant la condition de Dirichlet, et pareillement pour « *spectre de Neumann* » $\sigma_N(\boldsymbol{M})$.

8.5.5. Remarque. On observera que compte tenu des égalités (33) et (34) le spectre de Dirichlet $\sigma_D(\boldsymbol{M})$ est, à un facteur près, l'ensemble des fréquences des vibrations de $\boldsymbol{M}$.

8.5.6. La question de Marc Kac. ([37]) En 1966, il synthétise un problème de géométrie spectrale sous la forme d'une question devenue célèbre : « *Peut-on entendre la forme d'un tambour ?* » [Kac] ([38])

Compte tenue de la remarque 8.5.5, cette question se transcrit naturellement dans le contexte des surfaces plates à coins, par la question suivante.

8.5.7. Question. *Soient $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$ deux surfaces plates à coins telles que $\sigma_D(\boldsymbol{M}_1) = \sigma_D(\boldsymbol{M}_2)$. Est-ce que $\boldsymbol{M}_1$ est $\boldsymbol{M}_2$ sont isométriques,* i.e. *existe-t-il une bijection isométrique $\phi : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$?*

Mais avant d'aborder cette question (*cf.* §10), nous rappelons quelques résultats sur les fonctions propres du Laplacien qui nous seront indispensables.

8.6. Fonctions propres du Laplacien

L'étude quantitative et qualitative des fonctions propres du Laplacien est un vaste sujet dans la littérature mathématique. La plupart du temps, on cherche de telles fonctions satisfaisant des « *conditions limites* », et dans un petit nombre de cas on sait expliciter toutes les fonctions possibles.

8.6.1. L'exemple de la membrane carrée. ([39]) Soit $\boldsymbol{M} = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Les fonctions

$$f_{m,n}(x,y) = \sin(m\pi x)\sin(n\pi y)\,,$$

vérifient

$$-\Delta(f_{m,n}) = (n^2+m^2)\pi^2 f_{m,n}\,, \quad f_{m,n}\big|_{\partial \boldsymbol{M}} = 0\,.$$

Il s'agit donc des fonctions propres du Laplacien satisfaisant la condition de Dirichlet sur $\partial\boldsymbol{M}$ et de valeurs propres associées

$$\lambda = (n^2+m^2)\pi^2\,.$$

On remarquera le fait qu'il peut fort bien exister des fonctions propres indépendantes (*i.e.* non colinéaires) associées à la même valeur propre. Ici par

37. Extrait de Wikipedia : *Mark Kac (ou Marek Kac) (1914-1984) (prononcer : katz) était un mathématicien américain d'origine polonaise, spécialiste de la théorie des probabilités.*

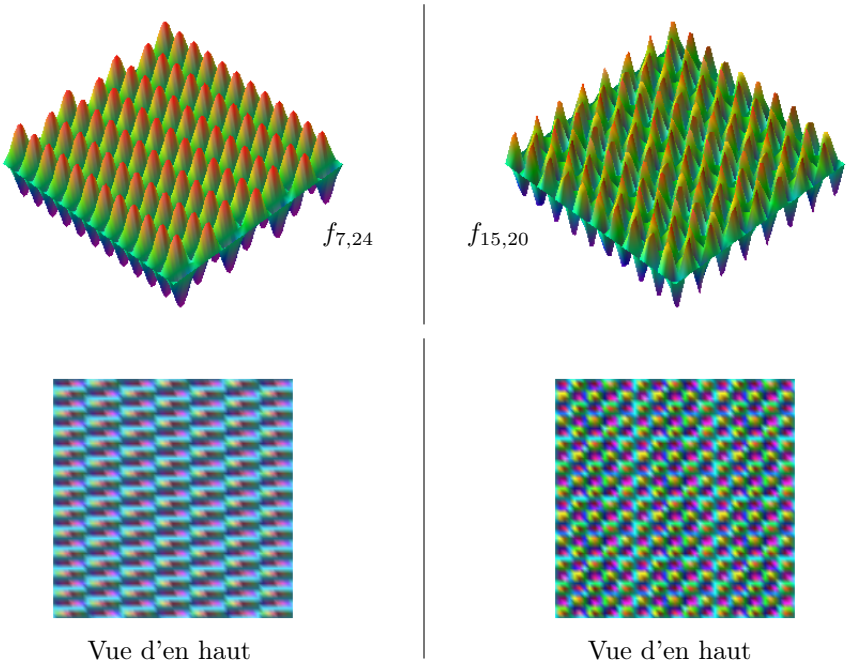
38. Voici une citation antérieure de la même nature due à Sir Arthur Schuster (1851-1934), physicien germano-britannique : *To find out the different tunes sent out by a vibrating system is a problem which may or may not be solvable in certain special cases, but it would baffle the most skillful mathematician to solve the inverse problem and to find out the shape of a bell by means of the sounds which it is capable of giving out. And this is the problem which ultimately spectroscopy hopes to solve in the case of light. In the meantime we must welcome with delight even the smallest step in the right direction (Schuster, 1882.).*

Note du rédacteur. En spectroscopie, on cherche à identifier un corps en étudiant la lumière qu'il émet.

39. La référence pour cette partie est le paragraphe §V.5 *The Vibrating Membrane*, p. 297, et §V.5.4 *Rectangular Membrane*, p. 300 du livre de Courant & Hilbert [CH].

exemple, la question se ramène à la recherche des triangles pythagoriciens de même hypoténuse. Voici le plus petit exemple de tels triangles non semblables. ([40])

$$25^2 = 7^2 + 24^2 = 15^2 + 20^2$$



Et bien évidemment, toute combinaison linéaire non triviale

$$f = a\, f_{7,24} + b\, f_{15,20}\,,$$

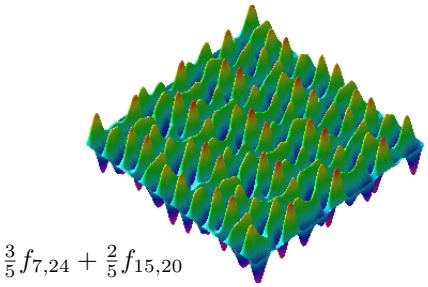
est aussi une fonction propre de Δ_M pour la même valeur propre, car

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= \Delta(a\, f_{7,24} + b\, f_{15,20}) = \Delta(a\, f_{7,24}) + \Delta(b\, f_{15,20}) \\ &= a\,\Delta(f_{7,24}) + b\,\Delta(f_{15,20}) = a\,\lambda f_{7,24} + b\,\lambda f_{15,20} = \lambda f\,.\end{aligned}$$

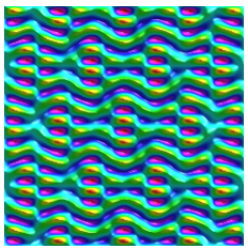
40. Voici la liste des premiers triangles pythagoriciens vérifiant cette propriété, trouvée sur le site http ://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Addition/TripTrg.htm

7^2	+	24^2	=	15^2	+	20^2	=	25^2
14^2	+	48^2	=	30^2	+	40^2	=	50^2
16^2	+	63^2	=	25^2	+	60^2	=	65^2
			=	33^2	+	56^2	=	65^2
			=	39^2	+	52^2	=	65^2
21^2	+	72^2	=	45^2	+	60^2	=	75^2
13^2	+	84^2	=	36^2	+	77^2	=	85^2
			=	40^2	+	75^2	=	85^2
			=	51^2	+	68^2	=	85^2
28^2	+	96^2	=	60^2	+	80^2	=	100^2
35^2	+	120^2	=	44^2	+	117^2	=	125^2
			=	75^2	+	100^2	=	125^2
32^2	+	126^2	=	50^2	+	120^2	=	130^2
			=	66^2	+	112^2	=	130^2
			=	78^2	+	104^2	=	130^2
17^2	+	144^2	=	24^2	+	143^2	=	145^2
			=	87^2	+	116^2	=	145^2
			=	100^2	+	105^2	=	145^2
42^2	+	144^2	=	90^2	+	120^2	=	150^2
80^2	+	150^2	=	102^2	+	136^2	=	170^2

La fonction $\frac{3}{5}f_{7,24} + \frac{2}{5}f_{15,20}$ appartient donc aussi à $\mathcal{H}_{(25\pi)^2}(\boldsymbol{M})$.



$\frac{3}{5}f_{7,24} + \frac{2}{5}f_{15,20}$



Vue d'en haut

8.6.2. Commentaire. L'inspection de cet exemple et d'autres où l'on arrive à expliciter les solutions cherchées, emmène à se poser un certain nombre de questions. En voici deux très importantes et dont l'étude demande des techniques très sophistiques, bien au delà de la portée de ces notes.

- Combien de fonctions propres linéairement indépendantes peuvent exister pour une valeur propre donnée ?
- Est-ce que deux fonctions propres peuvent coïncider au voisinage d'un point tout en étant différentes ?

Les sections suivantes apportent quelques éléments de réponse.

8.6.3. Sous-espaces de fonctions propres. Soit $\boldsymbol{M}$ une surface plate à coin.

On note $\mathcal{H}_\lambda(\boldsymbol{M}) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$ (resp. $\mathcal{H}_{\lambda,D}(\boldsymbol{M})$ et $\mathcal{H}_{\lambda,N}(\boldsymbol{M})$) l'ensemble de toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$ telles que $-\Delta_{\boldsymbol{M}}(f) = \lambda f$ (et qui satisfont respectivement la condition de Dirichlet ou Neumann).

8.6.4. Théorème. *On rappelle que β l'une des lettres D, N.*

a) *$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$.*

b) *$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M}) \cap \mathcal{H}_{\lambda',\beta}(\boldsymbol{M}) \neq 0$, si et seulement si $\lambda = \lambda'$.*

c) *$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M}) = 0$, pour tout $\lambda < 0$. $\mathcal{H}_{0,D}(\boldsymbol{M}) = 0$ et $f \in \mathcal{H}_{0,N}(\boldsymbol{M})$, si et seulement si f est localement constante.*

d) *Si $\boldsymbol{M}$ est compacte la dimension de $\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})$, appelée « multiplicité de λ (pour la condition β) », est finie.*

e) *Si $\alpha : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$ est une bijection isométrique, l'application*

$$\alpha^\natural : \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M}_2) \to \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M}_1)\,, \quad f \mapsto f \circ \alpha\,,$$

induit un isomorphisme de $\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M}_2)$ sur $\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M}_1)$ pour tous λ et β. On dit alors que les surfaces $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$ son « isospectrales ». En particulier,

$$\sigma_\beta(\boldsymbol{M}_1) = \sigma_\beta(\boldsymbol{M}_2)\,.$$

Indications. (a) car Δ est un opérateur $\mathbb{R}$-linéaire. (b) car $-\Delta(f) = \lambda f$ et $-\Delta(f) = \lambda' f$, impliquent $(\lambda - \lambda')f = 0$, et alors $\lambda = \lambda'$, puisque $f \neq 0$.

(c) se démontre à l'aide des formules de Green ([41]). Elles montrent, pour une fonction propre f du moins-lapacien telle que $\partial_{\vec{n}}(f)f\big|_{\partial \boldsymbol{M}} = 0$, l'égalité remarquable

$$\lambda = \|f\|^{-2} \int_{\boldsymbol{M}} |\operatorname{Grad} f|^2 \, dV \,,$$

on en déduit, d'une part, que $\lambda \geq 0$, et d'autre part, que $\lambda = 0$, si et seulement si $\operatorname{Grad} f = 0$, autrement dit, si et seulement si f est localement constante.

(d) par contre, est bien plus profonde. Le résultat sous cette forme peut être consulté dans [Bé$_1$] Th. 18, p. 53. Les conditions de régularité du bord $\partial \boldsymbol{M}$ sont assez cruciales et il est difficile de trouver une référence les donnant précisément. On peut dire grosso modo que tout se passe bien si $\boldsymbol{M}$ est compacte et $\partial \boldsymbol{M}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, ce qui est une condition largement satisfaite dans notre contexte où $\partial \boldsymbol{M}$ est une réunion de segments de la droite euclidienne $\mathbb{R}$.

(e) est claire puisque $\alpha^\natural$ commute aux Laplaciens (8.4.4). □

8.6.5. Unicité locale des fonctions propres du Laplacien. Les résultats du paragraphe précédent concernent les valeurs propres du Laplacien mais ne disent rien sur la nature des fonctions propres. À quoi ressemblent-elles ? Dans l'exemple de la membrane carrée (8.6.1), on a des produits de fonctions trigonométriques, mais qu'en est-il dans le cas général. C'est encore un énorme sujet dans la littérature sur les EDP et plus particulièrement sur ce que l'on appelle « *les solutions des opérateurs différentiels elliptiques* » (le Laplacien en est un!). L'un des acteurs le plus importants dans cette discipline fut Lipman Bers ([42]), il a prouvé ([Ber], 1955) un résultat qui, replacé dans notre contexte, dit :

8.6.6. Théorème (L. Bers). *Soit Δ le Laplacien de $\mathbb{R}^2$. Soit $B(\vec{0}, r)$ une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction de $\mathcal{C}^\infty(B(\vec{0}, r))$ vérifiant*

$$f(\vec{0}) = 0 \,, \quad \textit{et} \quad -\Delta(f) = \lambda f \,, \ \textit{pour un certain } \lambda \in \mathbb{R},$$

Il n'y a alors que deux cas possibles

- *il existe un polynôme* ***non nul*** *$P(x, y)$ homogène en $\{x, y\}$ et tel que*

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x,y) = P(x,y) + O(\|(x,y)\|^{\deg P + 1}) \,, \\ -\Delta(P) = \lambda P \,. \end{array} \right. \qquad (*)$$

- *ou bien $f = 0$ sur toute la boule $B(\vec{0}, r)$,*

8.6.7. Remarque. Dans cet énoncé, il doit être clair que le rôle joué par l'origine de $\mathbb{R}^2$ est purement cosmétique. En effet, on aurait pu le remplacer par n'importe quel $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, à condition bien évidemment de remplacer en même temps le développement limité autour de $\vec{0}$ dans $(*)$ par un développement limité autour de $\vec{x}$. La justification mathématique de cette remarque est l'invariance du Laplacien par isométries de $\mathbb{R}^2$ (8.1.13).

Grâce au théorème de Bers, le corollaire suivant, version édulcorée d'un théorème de Cheng ([Che], 1976), est de démonstration élémentaire.

41. Chapitre I du livre d'Isaac Chavel [Cha], formule (46), page 8. La validité des formules de Green sur $\boldsymbol{M} \backslash \partial \boldsymbol{M}$ implique leur validité partout par passage à la limite

42. Extrait de Wikipedia : Lipman "Lipa" Bers (1914–1993) was an American mathematician born in Riga who created the theory of pseudoanalytic functions and worked on Riemann surfaces and Kleinian groups. He was also known for his work in human rights activism.

8.6.8. Corollaire (Cheng). *Soit $\boldsymbol{M}$ une surface plate à coins **connexe** et soit f une fonction propre du Laplacien $\Delta_{\boldsymbol{M}}$.*

a) *L'ensemble $f^{-1}(0)$, appelé « ensemble nodal de f », est d'intérieur vide.*

b) *Soient f et g deux fonctions propres de $\Delta_{\boldsymbol{M}}$ (pas forcément pour la même valeur propre), alors $f = g$ sur $\boldsymbol{M}$ tout entier, si et seulement si $f = g$ au voisinage d'un point de $\boldsymbol{M}$.*

Indication. (a) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$ une fonction propre du Laplacien. Notons $\mathcal{Q}_f$ l'ensemble des points $y \in \boldsymbol{M}$ tels que f s'annule sur un voisinage ouvert W_y de y. L'ensemble $\mathcal{Q}_f$ est ouvert dans $\boldsymbol{M}$ puisqu'il est la réunion des ouverts W_y. Soit maintenant x un élément dans l'adhérence de $\mathcal{Q}_f$. Il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $y_n \in \mathcal{Q}_f$ telle que $x = \lim_n y_n$. Mais alors pour tous $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, on a par continuité

$$\partial_1^{m_1}\partial_2^{m_2}(f)(x) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \partial_1^{m_1}\partial_2^{m_2}(f)(y_n) = 0$$

car autour de chaque y_n la fonction f s'annule identiquement. Le théorème de Bers nous dit alors que f est, soit identiquement nulle autour de x, soit elle admet un développement limité. Or ce deuxième cas est incompatible avec l'annulation de toutes les dérivées partielles, c'est donc que $f = 0$ sur un voisinage autour de x. Par conséquent $x \in \mathcal{Q}_f$, et $\mathcal{Q}_f$ est fermé dans $\boldsymbol{M}$.

Le théorème de Bers dit par conséquent que l'ensemble Q_f est à la fois ouvert et fermé dans $\boldsymbol{M}$. Comme $\boldsymbol{M}$ est supposée connexe, c'est que $\mathcal{Q}_f$ est soit vide soit $\boldsymbol{M}$ tout entier. L'assertion (a) en résulte aussitôt, puisque $f \neq 0$, c'est que $\mathcal{Q}_f = \emptyset$. Or, Q_f est l'intérieur de $f^{-1}(0)$.

(b) en découle. En effet, supposons que $f = g$ sur un ouvert U. Alors, ou bien $f|_U$ et $g|_U$ ne sont pas nulles, et alors nécessairement $f|_U, g|_U \in \mathcal{H}_\lambda(U)$ pour un même λ (8.6.4-(b)), auquel cas $f, g \in \mathcal{H}_\lambda(\boldsymbol{M})$ et $f - g \in \mathcal{H}_\lambda(\boldsymbol{M})$ s'annule sur U et donc $f - g = 0$ sur $\boldsymbol{M}$ d'après (a). Ou bien $f|_U = g|_U = 0$, mais alors $f = g = 0$ sur $\boldsymbol{M}$ toujours d'après (a). □

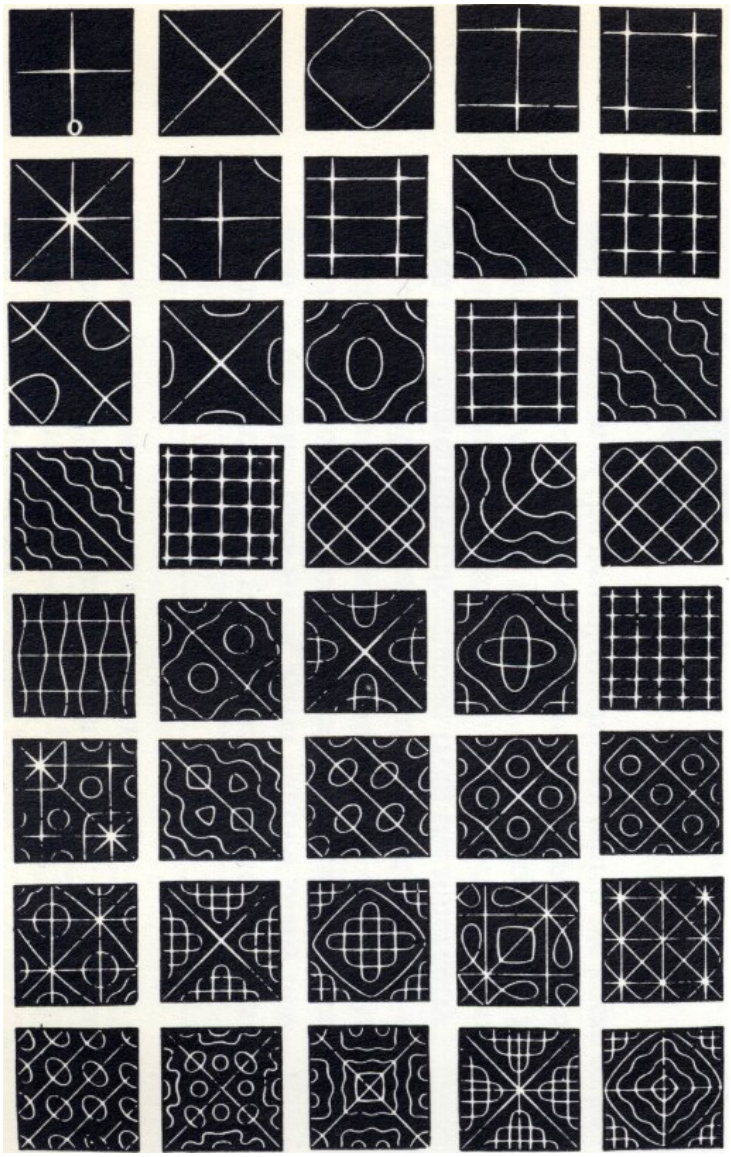
8.6.9. Ensembles nodaux. Lorsque l'on fait vibrer une membrane plane $\boldsymbol{M}$ saupoudrée de farine, sable ou sucre, les grains s'organisent suivant des figures géométrique présentant des symétries parfois très étonnantes



Ces figures ont fasciné le physicien allemand Ernst Chladni ([43]) qui les étudia pendant de nombreuses années. Elles sont appelées « *les figures acoustiques de*

43. Extrait de Wikipedia : Ernest Chadli. *Ernst Florens Friedrich Chladni (1756-1827), physicien allemand, voyagea toute sa vie. C'est le fondateur de l'acoustique moderne. Il étudiait expérimentalement les vibrations des plaques, en les saupoudrant de sable fin, obtenant ainsi les figures acoustiques qui portent son nom. Il fit plusieurs découvertes intéressantes, inventa un nouvel instrument de musique, l'euphone ou clavicylindre, un instrument dérivé de l'harmonica de verre de Benjamin Franklin. Il publia en 1802 un Traité d'acoustique, en allemand, traduit en français, 1809. On lui doit aussi des Dissertations sur les météores et les aérolithes (Vienne, 1819).*

Chladni ». En voici des images datant de 1869 dues au physicien irlandais John Tyndall (1820-1893).

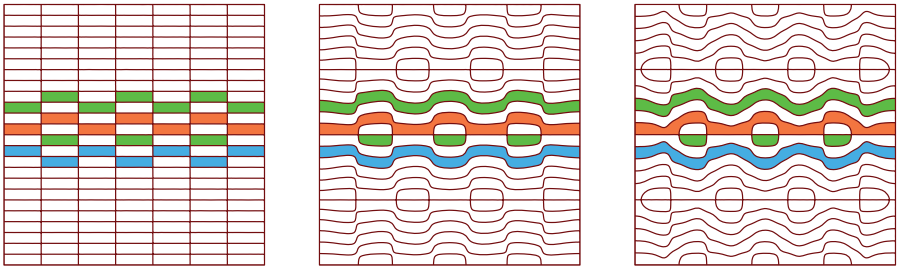


L'explication du phénomène est fort simple. Lors de la vibration de la membrane par une fréquence bien précise, une certaine fonction propre du Laplacien de $\boldsymbol{M}$ se manifeste. La vibration d'un point $x \in \boldsymbol{M}$ est alors de la forme (32)

$$h(t,x) = \big(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\big) f(x)\,.$$

Lorsque $f(x) \neq 0$, le point $x \in \boldsymbol{M}$ est soumis à des vibrations qui vont secouer toute particule de sable se trouvant à cette place. Au bout de quelques instants, les particules quittent ces endroits et se positionnent naturellement autour des points $x \in \boldsymbol{M}$ qui ne bougent pas, *i.e.* qui vérifient $f(x) = 0$. Les figures de Chladni révèlent donc l'« *ensemble nodal* » $f^{-1}(0) \subseteq \boldsymbol{M}$.

Voici l'ensemble nodal calculé par Maple pour certaines fonctions propres de l'intervalle $[f_{7,24}, f_{15,20}]$ de l'exemple 8.6.1 de la membrane carrée. Nous y avons colorié certaines régions pour faciliter l'observation du processus qui fait passer d'une grille de 7×25 à une autre de 15×20 ([44]) (Comparer aux vues d'en haut des images de la page 65 et suivante.)



$f_{7,24}=0$ $\quad \frac{4}{5}f_{7,24}+\frac{1}{5}f_{15,20}=0$ $\quad \frac{3}{5}f_{7,24}+\frac{2}{5}f_{15,20}=0$

$\frac{2}{5}f_{7,24}+\frac{3}{5}f_{15,20}=0$ $\quad \frac{5}{5}f_{7,24}+\frac{1}{4}f_{15,20}=0$ $\quad f_{15,20}=0$

Les théorèmes de Bers et de Cheng nous indiquent que les parties nodales sont d'intérieur vide. Dans ces images, on trouve en fait des réunions de courbes. Ce n'est pas un hasard, c'est un théorème ([Che]).

8.6.10. Domaines nodaux. Si f est une fonction propre de Δ_M, on appelle « *domaine nodal (de f)* » chaque « *composante connexe* » ([45]) du complémentaire de l'ensemble nodal de f. Si Ω est une telle région, la fonction f y garde un signe constant (2.3.22-(2)). Le théorème suivant est de grande importance, c'est le « *Théorème de Courant des domaines nodaux* » (*cf.* [Cha], p. 19).

44. Routine Maple utilisée :

```
>with(plots):
>f1:=sin(07*Pi*x)*sin(24*Pi*y):
>f2:=sin(15*Pi*x)*sin(20*Pi*y):
>for i from 0 to 5 do
   implicitplot(((5-i)/5)*f1+(i/5)*f2=0,x=0..1,y=0..1,numpoints=10000);
 end do;
```

45. « *composante connexe* » : c'est une partie connexe maximale d'un espace topologique. Si l'espace est une variété, une composante connexe est constituée d'un point et tous ceux que l'on peut relier à celui-ci par un chemin continu.

8.6.11. Théorème (R. Courant). *Soit $\boldsymbol{M}$ une surface plate à coins et compacte. Suite à la proposition 8.6.4, notons*

$$\lambda_1(\boldsymbol{M},\beta) \leq \lambda_2(\boldsymbol{M},\beta) \leq \lambda_3(\boldsymbol{M},\beta) \leq \cdots \leq \lambda_k(\boldsymbol{M},\beta) \leq \ldots$$

la liste complète des valeurs propres du spectre $\sigma_\beta(\boldsymbol{M})$, $\beta \in \{D,N\}$, chacune répétée autant des fois que sa multiplicité. Soit maintenant

$$\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k, \ldots\}$$

une suite de fonctions linéairement indépendantes et telles que $f_k \in \mathcal{H}_{\lambda_k,\beta}(\boldsymbol{M})$. Alors, le nombre des domaines nodaux de f_k est majoré par k, pour $k = 1, 2, \ldots$

8.6.12. Corollaire

a) *La fonction f_1 est de signe constant.*
b) *La valeur propre $\lambda_1(\beta,\boldsymbol{M})$ et de multiplicité 1. Donc $\lambda_1(\boldsymbol{M},\beta) < \lambda_2(\boldsymbol{M},\beta)$.*
c) *La fonction f_2 admet exactement deux domaines nodaux.*
d) *La valeur propre $\lambda_1(\beta,\boldsymbol{M})$ est caractérisée pour être la seule valeur propre à posséder une (toute) fonction propre de signe constant.*

Indication. (a) C'est le théorème de Courant. (b) On remarque que si f et f' appartiennent à $\mathcal{H}_{\lambda_1,\beta}(\boldsymbol{M})$, toute combinaison linéaire $af + bf'$ est de signe constant sur $\boldsymbol{M}$ puisque c'est encore une fonction de $\mathcal{H}_{\lambda_1,\beta}(\boldsymbol{M})$, mais ce n'est possible que si f_1 et f_2 sont colinéaires (exercice). (c) Dans des variétés compactes à bord, on dispose de la formule de Green ([46])

$$\int_{\boldsymbol{M}} \{f_1\Delta(f_2) - \Delta(f_1)f_2\}\, dV = \int_{\partial\boldsymbol{M}} \{f_1\, \partial_{\vec{n}}(f_2) - \partial_{\vec{n}}(f_1)\, f_2\} dA\,. \qquad (*)$$

où $\partial_{\vec{n}}$ désigne la dérivée normale sortant du bord (8.3.6). Lorsque les f_i vérifient la même condition au bord β, le second membre de $(*)$ s'annule, et si $f_i \in \mathcal{H}_{\lambda_i,\beta}(\boldsymbol{M})$, on a la relation d'« *orthogonalité* »

$$\int_{\boldsymbol{M}} f_1(V) f_2(V)\, dV = 0\,,$$

puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Or, ceci est impossible si les deux fonctions gardent leur signe sur $\boldsymbol{M}$ et comme c'est le cas pour f_1, c'est que f_2 change de signe et possède par conséquent au moins deux domaines nodaux ; la majoration de Courant permet de conclure. Enfin, pour (d), on raisonne comme pour (c) : l'orthogonalité de $\mathcal{H}_{\lambda_1}(\boldsymbol{M})$ vis-à-vis de chacun des $\mathcal{H}_{\lambda_k}(\boldsymbol{M})$, $k > 1$, implique que les fonctions dans $\mathcal{H}_{\lambda_1}(\boldsymbol{M})$ sont les seules à ne pas changer de signe. □

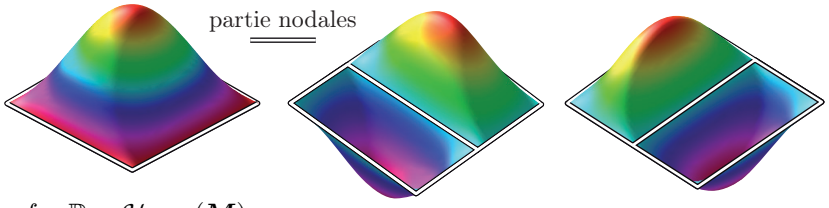
8.6.13. Exemple de deux premières valeurs propres. Dans le cas de la membrane rectangulaire 8.6.1, pour la condition de Dirichlet

$$\lambda_1 = (1^2+1^2)\pi^2 = 2\pi^2 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = (1^2+2^2)\pi^2 = 5\pi^2$$

On a les fonctions propres

- $f_1 := \sin(\pi x)\sin(\pi y) \in \mathcal{H}_{\lambda_1,D}(\boldsymbol{M})$,
- $\left\{ \begin{array}{l} f_{1,2} := \sin(\pi x)\sin(2\pi y) \\ f_{2,1} := \sin(2\pi x)\sin(\pi y) \end{array} \right\} \in \mathcal{H}_{\lambda_2,D}(\boldsymbol{M})$.

46. Chapitre I du livre d'Isaac Chavel [Cha], formule (40), page 7.



$f_{1,1}\,\mathbb{R} = \mathcal{H}_{\lambda_1,D}(\boldsymbol{M})$

$f_{1,2}\,\mathbb{R} \oplus f_{2,1}\,\mathbb{R} = \mathcal{H}_{\lambda_2,D}(\boldsymbol{M})$

9. Les questions de la géométrie spectrale

Cette section est un extrait presque littéral du texte de Pierre Bérard « *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour* » ([Bé$_3$]).

Soit $\boldsymbol{M}$ un domaine borné assez régulier de $\mathbb{R}^n$, par exemple une surface plate à coins compacte. On peut lui associer le spectre $\sigma_D(\boldsymbol{M})$ du Laplacien pour le problème de Dirichlet et le spectre $\sigma_N(\boldsymbol{M})$ du Laplacien pour le problème de Neumann (*cf.* 8.5.4). Les méthodes d'analyse développées à partir des travaux de David Hilbert permettent d'établir l'existence de ces spectres : ils sont constitués d'une suite —tendant vers l'infini— de valeurs propres de multiplicités finies (*cf.* 8.6.4). Nous écrirons ces spectres sous la forme

$$\lambda_1(\boldsymbol{M},\beta) \leq \lambda_2(\boldsymbol{M},\beta) \leq \lambda_3(\boldsymbol{M},\beta) \leq \ldots \leq \lambda_k(\boldsymbol{M},\beta) \leq \ldots\,,$$

où $\beta \in \{D, N\}$ indique quel problème aux limites on considère, et où chaque valeur propre λ_j est repérée par son rang (dans l'ordre croissant) et répétée autant de fois que sa multiplicité (ce qui explique l'utilisation du signe $\leq$ au lieu du signe $<$). La suite des valeurs propres de $\boldsymbol{M}$ est bien sûr invariante par isométrie. Le spectre du Laplacien (pour une condition au bord déterminée) fournit donc, pour chaque $\boldsymbol{M}$, une suite d'invariants. On appelle « *géométrie spectrale* » l'étude des relations entre la géométrie de $\boldsymbol{M}$ et les valeurs propres du Laplacien (ou plus généralement de tout opérateur différentiel). On peut diviser les questions qui se posent en deux grandes problématiques

9.1. Problème direct

Étant donné $\boldsymbol{M}$ (et sa géométrie), que peut-on dire de son « *spectre étendu* », *i.e.* de la suite des valeurs propres

$$\mathrm{Spec}(\boldsymbol{M},\beta) := \{\lambda_j(\boldsymbol{M},\beta), j \geq 1\}\,.$$

1) Peut-on décrire explicitement la suite $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{M},\beta)$ (comme dans le cas des segments, des rectangles, etc.) ?
2) À défaut de pouvoir la décrire explicitement, peut-on donner des renseignements asymptotiques, qualitatifs ou quantitatifs (par exemples inégalités) sur (une partie de) la suite $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{M},\beta)$ en fonction de la géométrie ?

Il n'est peut-être pas inutile de préciser que l'on connaît explicitement très peu de spectres. Par exemple, on ne connaît pas explicitement le spectre d'un hexagone régulier de $\mathbb{R}^2$.

Donnons deux exemples typiques de réponses à la deuxième question.

- Le théorème de Hermann Weyl (1911) dit que
$$\lambda_j(\boldsymbol{M},\beta) \sim c(n)\,\mathrm{Vol}(\boldsymbol{M})^{2/n} j^{2/n} \text{ quand } j \to \infty\,,$$
où n est la dimension de $\boldsymbol{M}$ et où $c(n)$ est une constante universelle (que l'on peut expliciter). Ce théorème apporte une réponse à une question —relative à la théorie des radiations de Jeans— posée par le physicien H.A. Lorentz à l'occasion d'une conférence donnée à Göttingen en octobre 1910. ([47])
- Le théorème de Faber–Krahn (1923) dit que pour tout domaine borné $\boldsymbol{M} \subseteq \mathbb{R}^n$, on a
$$\lambda_1(\boldsymbol{M}, Dir) \geq \lambda_1(B(\boldsymbol{M}), D)\,,$$
où $B(\boldsymbol{M})$ est une boule euclidienne de volume égal à $\mathrm{Vol}(\boldsymbol{M})$. L'égalité dans cette inégalité a lieu si et seulement si $\boldsymbol{M}$ est isométrique à $B(\boldsymbol{M})$. Les inégalités de ce type sont très importantes dans les problèmes d'existence, dans les problèmes de stabilité ou dans les problèmes de résistance des matériaux pour lesquels la plus petite valeur propre (celle qui est associée à l'état fondamental, dans le vocabulaire de la physique) joue un rôle critique.

9.2. Problème inverse

Quelles informations sur $\boldsymbol{M}$ peut-on tirer de la donnée d'une suite de valeurs propres $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{M},\beta) := \{\lambda_j(\boldsymbol{M},\beta), j \geq 1\}$?

Cette question revêt une importance particulière dans le contrôle de certaines structures comme les axes des grands alternateurs ou les essieux de wagons (souvenons-nous des cheminots qui frappaient les roues des trains en gare pour détecter d'éventuelles fissures ; ils sont remplacés aujourd'hui par des microprocesseurs) ([Bou]).

10. Isospéctralité non isométrique

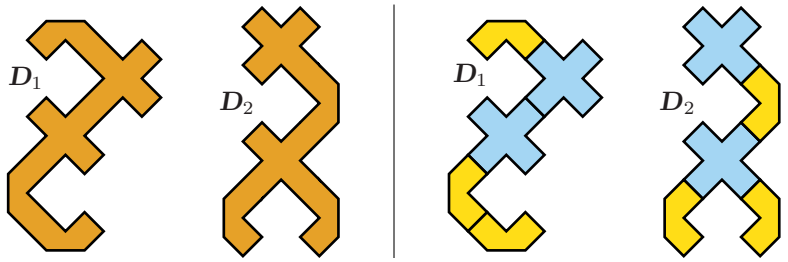
Deux variétés plates isométriques sont isospectrales (8.6.4), mais qu'en est-il de la réciproque ? Elle est fausse ! C'était connu depuis les contrexemples de Milnor en 1964 ([Mil]) avec des variétés de dimension 16. Vinrent ensuite les travaux de Vigneras ([Vig], 1980), Sunada ([Sun], 1985) et Buser ([Bu_1], 1986), qui donnent des contrexemples en dimension 2, sans toutefois atteindre l'analogue des membranes de tambour de la question de Kac ([Kac], 1966), *i.e.* des surfaces plates à coins que l'on peut "découper" dans $\mathbb{R}^2$. Il faut pour cela attendre l'année 1992 où Gordon–Webb–Wolpert, dans [GWW], décrivent pour la première fois deux telles membranes $\boldsymbol{D}_1$ et $\boldsymbol{D}_2$ isospectrales et non isométriques.

Cette section explique la démarche de [GWW], qui, il faut bien le dire, repose énormément sur les travaux qui l'ont précédée.

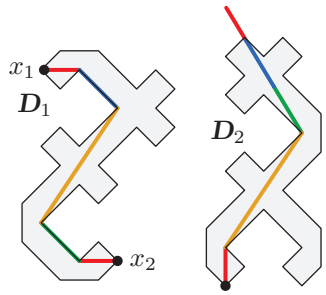
47. *Remarque.* Le théorème de H. Weyl montre aussi que l'on peut "entendre" le volume d'un tambour. Une anecdote historique à ce sujet : quand Hilbert a entendu parler du problème (i.e. peut-on entendre l'aire d'une membrane ?), il a parié que la question resterait sans réponse de son vivant. Moins de deux ans plus tard, Weyl (qui était son étudiant) a utilisé la théorie des équations intégrales de Hilbert pour en trouver la réponse !

10.1. Les domaines D_1 et D_2 de GWW

Gordon–Webb–Wolpert (GWW dans la suite) s'intéressent aux deux domaines $\boldsymbol{D}_1$ et $\boldsymbol{D}_2$ de $\mathbb{R}^2$ suivants, obtenus en recollant les cinq parties de l'image de droite.



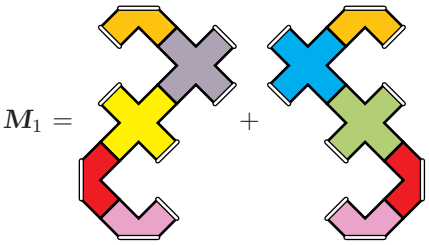
10.1.1. Lemme. *Les domaines $\boldsymbol{D}_1$ et $\boldsymbol{D}_2$ de $\mathbb{R}^2$ munis de la structure de surface plate induite par $\mathbb{R}^2$, sont contractiles, ont même périmètre et superficie, mais ne sont pas isométriques.*

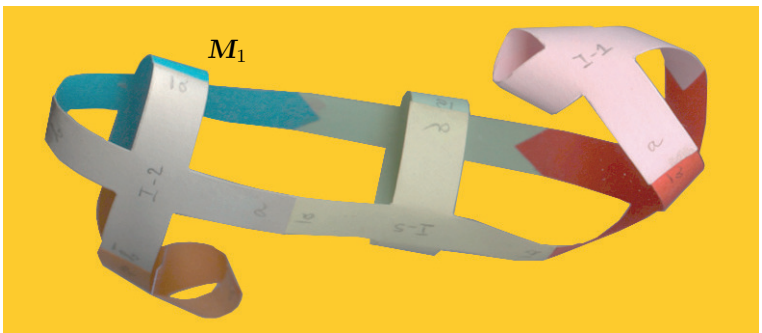


Indication. Contractibilité, égalité de périmètre et de superficie sont évidentes. Ensuite, une isométrie entre deux parties d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^2$ est la restriction d'une isométrie de $\mathbb{R}^2$ (4.1.1-(a)). Or, $\boldsymbol{D}_1$ et $\boldsymbol{D}_2$ ne sont pas semblables. On peut aussi dire que : « *le diamètre (riemannien)* », *i.e.* la plus grande distance séparant deux points (*cf.* 4.4) n'est pas le même. En effet, la corde multicolore, tendue dans $\boldsymbol{D}_1$, ne peut l'être dans $\boldsymbol{D}_2$, donc $\operatorname{diam}(\boldsymbol{D}_1) > \operatorname{diam}(\boldsymbol{D}_2)$. □

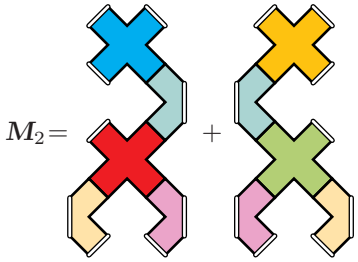
10.2. Les surfaces plates à coin de Buser

Les surfaces $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$ que nous décrivons ici sont celles de Buser ([Bu$_1$]). On note $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$ les espaces obtenus en collant deux copies symétriques de $\boldsymbol{D}_1$ et $\boldsymbol{D}_2$ suivant les côtés correspondants indiqués par un double trait.

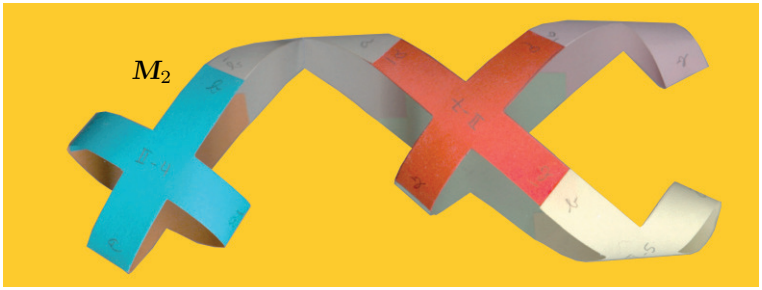




(35)



([48])



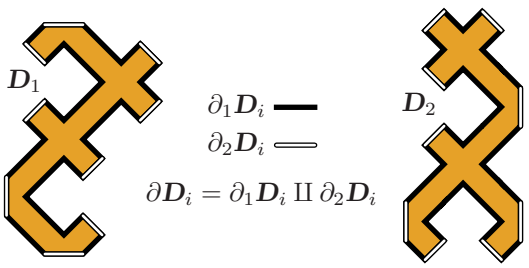
(36)

Convention. Dans la suite, lorsque la précision de l'indice 'i' sera superflue nous l'omettrons. Les affirmations portant sur '$\boldsymbol{M}$' et '$\boldsymbol{D}$' s'appliquent donc à chacun des $\boldsymbol{M}_i$ et $\boldsymbol{D}_i$.

10.2.1. Le domaine $\boldsymbol{D}$ vu comme espace d'orbites de $\boldsymbol{M}$. Nous munissons l'espace topologique $\boldsymbol{M}$ de la structure de surface plate à coins compacte évidente. On note $\tau : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ la réflexion par rapport au plan des photos (35) et (36). L'espace d'orbites $\langle\tau\rangle\backslash\boldsymbol{M}$ s'identifie clairement au domaine $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbb{R}^2$. On a donc la surjection canonique

$$\nu : \boldsymbol{M} \to \langle\tau\rangle\backslash\boldsymbol{M} = \boldsymbol{D}\,. \tag{37}$$

Décomposition du bord de $\boldsymbol{D}$. Notons $\partial\boldsymbol{M}$ et $\partial\boldsymbol{D}$ les bords de $\boldsymbol{M}$ et de $\boldsymbol{D}$. La surjection canonique (37) ne surjecte pas $\partial\boldsymbol{M}$ sur $\partial\boldsymbol{D}$, mais plutôt sur une partie fermée de $\partial\boldsymbol{D}$ que nous notons $\partial_1\boldsymbol{D}$. Nous notons alors $\partial_2\boldsymbol{D} := \partial\boldsymbol{D}\backslash\partial_1\boldsymbol{D}$. La figure suivante illustre cette terminologie.



48. Les images photographiques ont été extraites de [Bé$_2$].

10.2.2. Remarque. Le bord $\partial_2 \boldsymbol{D}$ est l'image des « *lignes de pli* » de la réflexion τ, *i.e.* des points fixes de τ, à l'intérieur de $\boldsymbol{M}$. Plus précisément, on a

$$\nu^{-1}(\partial_1 \boldsymbol{D}) = \partial \boldsymbol{M}\,, \qquad \nu^{-1}(\partial_2 \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{M}^\tau \backslash \partial \boldsymbol{M}\,.$$

10.2.3. Spectre étendu mixte de $\boldsymbol{D}$. Notons $\mathcal{H}_{\lambda,\beta_1,\beta_2}(\boldsymbol{D})$, avec $\beta_1, \beta_2 \in \{D, N\}$, l'espace des fonctions propres de $-\Delta_{\boldsymbol{D}}$ de valeur propre λ et vérifiant les conditions β_1 sur $\partial_1 \boldsymbol{D}$ et β_2 sur $\partial_2 \boldsymbol{D}$. L'analogue de la proposition 8.6.4, qui établit la finitude des dimensions des espaces $\mathcal{H}_{\lambda,\beta_1,\beta_2}(\boldsymbol{D})$ est aussi vérifié ([49]). On pose alors

$$\mathrm{Spec}_{\beta_1,\beta_2}(\boldsymbol{D}) := \begin{cases} \text{la liste des valeurs propres } \lambda \text{ de } -\Delta_{\boldsymbol{D}_i} \text{ de} \\ \text{« } \textit{multiplicité} \text{ » non nulle, } \textit{i.e.} \text{ telle que} \\ \qquad \mu(\lambda, \boldsymbol{D}) := \dim\left(\mathcal{H}_{\lambda,\beta_1,\beta_2}(\boldsymbol{D})\right) \neq 0\,, \\ \text{chaque valeur propre étant alors répétée au-} \\ \text{tant de fois que sa multiplicité.} \end{cases}$$

10.2.4. Fonctions invariantes et anti-invariantes. La réflexion τ est une isométrie sur $\boldsymbol{M}$ qui laisse stables les ensembles

$$\partial \boldsymbol{M} = \nu^{-1}(\partial_1 \boldsymbol{D}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{M}^\tau \backslash \partial \boldsymbol{M} = \nu^{-1}(\partial_2 \boldsymbol{D})$$

et qui commute au Laplacien $\Delta_{\boldsymbol{M}}$ (8.4.4). L'action de τ sur $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$ laisse donc stable les espaces $\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})$ qui se décomposent alors en somme directe d'« *invariants* » et d'« *anti-invariants* » ([50]) :

$$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M}) = \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^\tau \oplus \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{-\tau} \tag{38}$$

10.2.5. Lemme

a) *Si $f \in \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^\tau$, alors f satisfait la condition de Neumann sur $\boldsymbol{M}^\tau$,*

b) *Si $f \in \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{-\tau}$, alors f satisfait la condition de Dirichlet sur $\boldsymbol{M}^\tau$.*

Démonstration. Pour (a). Soit $y \in \boldsymbol{M}^\tau$, notons $\vec{N}(y)$ un vecteur normal à $\boldsymbol{M}^\tau$ en y. La réflection τ laisse invariante f et échange $\vec{N}(y)$ en $-\vec{N}(y)$. On a donc

$$\tau(\partial_{\vec{N}}(f)) = \partial_{-\vec{N}}(\tau(f)) = -\partial_{\vec{N}}(f)\,,$$

et $\partial_{\vec{N}} f(y) = 0$. Pour (b) c'est encore plus simple et laissé en exercice. □

10.2.6. Théorème (GWW). ([51]) *Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \{N, D\}$, on a*

a) $\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^\tau \simeq \mathcal{H}_{\lambda,\beta,N}(\boldsymbol{D})$.

b) $\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{-\tau} \simeq \mathcal{H}_{\lambda,\beta,D}(\boldsymbol{D})$.

c) $\mathrm{Spec}_\beta(\boldsymbol{M}) = \mathrm{Spec}_{\beta,N}(\boldsymbol{D}) \amalg \mathrm{Spec}_{\beta,D}(\boldsymbol{D})$

---

49. [Bé$_1$] Th. 18, p. 53.

50. Si $f \in \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})$, on écrit $f = f^+ + f^-$ avec
$$\begin{cases} f^+ := \frac{1}{2}(f + \tau f) \in \mathcal{H}_{\lambda,D}(\boldsymbol{M})^\tau\,, \\ f^- := \frac{1}{2}(f - \tau f) \in \mathcal{H}_{\lambda,D}(\boldsymbol{M})^{-\tau}\,. \end{cases}$$
On a alors $f_+ \circ \tau = f_+$ et $f_- \circ \tau = -f_-$.

51. [GWW], lemma 4.6, p. 12

Indication. a) Considérons l'application

$$\nu^\natural : \mathcal{C}^0(\boldsymbol{D}) \to \mathcal{C}^0(\boldsymbol{M}), \quad \phi \mapsto \phi \circ \nu, \qquad (*)$$

qui est une bijection sur $\mathcal{C}^0(\boldsymbol{M})^\tau$ (8.4.4-(b-ii)).
Si $\phi \in \mathcal{H}_{\lambda,\beta,N}(\boldsymbol{D})$, la fonction $f := \nu^\natural(\phi)$ est :

- continue sur $\boldsymbol{M}$,
- τ-invariante, *i.e.* $f \circ \tau = f$,
- de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\boldsymbol{M}\backslash\boldsymbol{M}^\tau$ (partie τ-régulière de $\boldsymbol{M}$ (6.2.5)), sur laquelle on a aussi $-\Delta_{\boldsymbol{M}}(f) = \lambda f$,
- vérifie la condition aux limites β sur $\partial\boldsymbol{M}$.

Un peu moins évident est le fait que les dérivées directionnelles de f existent en tout $y \in \boldsymbol{M}^\tau$.
Dérivées normales à $\boldsymbol{M}^\tau$. Considérons la figure 4 ci-dessous. Fixons un point $y \in \boldsymbol{M}^\tau$, notons $\vec{N}$ le vecteur perpendiculaire à $\boldsymbol{M}^\tau$ en y de norme 1 et orienté comme dans la figure, vers le bas. Le calcul des dérivée directionnelles $\partial_{\vec{N},\pm}(f)(y)$ "latérales", c'est-à-dire

$$\partial_{\vec{N},\pm}(f)(y) := \lim_{\epsilon \to 0^\pm} \frac{f(y + \epsilon\vec{N}) - f(y)}{\epsilon}$$

donne respectivement $\partial_{\vec{n}}(\phi)(\nu(y))$ et $\partial_{-\vec{n}}(\phi)(\nu(y)) = -\partial_{\vec{n}}(\phi)(\nu(y))$. Cette valeur est nulle puisque $\nu(y) \in \partial_2\boldsymbol{D}$ et que ϕ vérifie la condition de Neumann sur $\partial_2(\boldsymbol{D})$. Par conséquent : la dérivée directionnelle $\partial_{\vec{N}} f(y)$ existe et est nulle.

Notons $\mathcal{V}_y$ un voisinage ouvert de y où $\vec{N}$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{M}^\tau$ en tout point $y' \in \mathcal{V}_y \cap \boldsymbol{M}^\tau$. Les remarques précédentes montrent que $\partial_{\vec{N}}(f) : \mathcal{V}_y \to \mathbb{R}$ est bien définie, continue et nulle sur $\mathcal{V}_y \cap \boldsymbol{M}^\tau$.

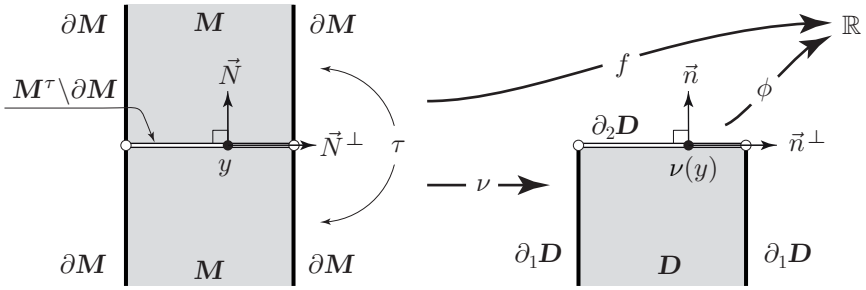


Figure 4

Dérivées tangentielles à $\boldsymbol{M}^\tau$. Notons $\vec{N}^\perp$ le vecteur normal à $\vec{N}$ tel qu'indiqué dans la figure. Pour tout $y' \in \mathcal{V}_y$, les dérivées directionnelles

$$\partial^m_{\vec{N}^\perp}(f)(y') \quad \text{et} \quad (\partial^m_{\vec{N}^\perp}\partial_{\vec{N}})(f)(y'), \qquad \forall m \in \mathbb{N},$$

se calculent sur $\boldsymbol{D}$ où elles existent et sont continues. Il en est donc de même de

$$\partial^m_{\vec{N}^\perp} f : \mathcal{V}_y \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \partial^m_{\vec{N}^\perp}\partial_{\vec{N}} f : \mathcal{V}_y \to \mathbb{R}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}. \qquad (\star)$$

Maintenant, comme ϕ est une fonction propre de $-\Delta_{\boldsymbol{D}}$, on a (*cf.* (28))

$$\partial^2_{\vec{n}}\phi + \partial^2_{\vec{n}^\perp}\phi = -\lambda\phi,$$

et donc

$$\partial^2_{\vec{n}}\phi = -\lambda\phi - \partial^2_{\vec{n}^\perp}\phi.$$

On en déduit que la fonction $\partial^2_{\vec{N}} f$, bien définie sur $\mathcal{V}_y \backslash \boldsymbol{M}^\tau$, se prolonge continûment à $\mathcal{V}_y$ tout entier. Par conséquent,

$$f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{V}_y) \quad \text{et} \quad -\Delta_{\mathcal{V}_y}(f) = \lambda f\,.$$

En particulier, on a la relation sur $\mathcal{V}_y$

$$\partial^{m+2}_{\vec{N}} f = -\lambda \partial^m_{\vec{N}} f - \partial^2_{\vec{N}^\perp} \partial^m_{\vec{N}} f\,,$$

qui ramène le problème de l'existence et continuité de $\partial^m_{\vec{N}} \partial^n_{\vec{N}^\perp} f$, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, à celles des fonctions $(\star)$ déjà établies.

La fonction $f : \mathcal{V}_y \to \mathbb{R}$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et comme le choix de $y \in \boldsymbol{M}^\tau$ est arbitraire, on a bien montré que

- $f : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et vérifie la condition de Neumann sur $\boldsymbol{M}^\tau$.

Comme conséquence de ces préliminaires, l'injection $(*)$ se restreint en une injection

$$\nu^\natural : \mathcal{H}_{\lambda,\beta,N}(\boldsymbol{D}) \to \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^\tau\,, \quad \phi \mapsto \phi \circ \nu\,.$$

Cette application est surjective. En effet, une fonction $f \in \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^\tau$ étant τ-invariante, se factorise de manière unique en $f = \phi \circ \nu$ (2.1.1). L'application $\phi : \boldsymbol{D} \to \mathbb{R}$ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$, vérifie la condition β sur $\partial_1 \boldsymbol{D}$ et de Neumann sur $\partial_2 \boldsymbol{D}$ d'après le lemme 10.2.5.

b) Nous procédons différemment que pour (a). Nous commençons par remarquer que $\boldsymbol{D}$ se "réalise" dans $\boldsymbol{M}$ de deux manières différentes, comme le « *domaine fondamental* » fermé (5.2.7), tantôt au-dessus, tantôt en dessous, du plan des photos (35) et (36). Notons $\boldsymbol{D}_+$ le domaine du dessus. La restriction d'une application $\mathcal{C}^\infty$ de $\boldsymbol{M}$ à $\boldsymbol{D}_+$ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$, car l'existence et continuité des dérivées "latérales" est automatique. On a donc une application de restriction :

$$\rho : \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M}) \to \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{D}_+)\,, \quad f \mapsto f\big|_{\boldsymbol{D}_+}\,,$$

dont la restriction aux fonctions anti-invariantes est injective (exercice)

$$\rho : \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})^{-\tau} \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{D}_+)\,, \quad f \mapsto f\big|_{\boldsymbol{D}_+}\,.$$

D'autre part, comme l'inclusion $\boldsymbol{D}_+ \subseteq \boldsymbol{M}$ est isométrique, l'application ρ commute bien aux Laplaciens. Par ces remarques et le lemme 10.2.5, l'application ρ induit l'injection :

$$\rho : \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{-\tau} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\lambda,\beta,D}(\boldsymbol{D}_+)\,, \quad f \mapsto f\big|_{\boldsymbol{D}_+}\,. \qquad (**)$$

Cette application est surjective. En effet, soit $\phi \in \mathcal{H}_{\lambda,\beta,D}(\boldsymbol{D}_+)$ et définissons

$$f : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}\,, \qquad \begin{cases} f := \phi \text{ sur } \boldsymbol{D}_+, \\ f := -\phi \text{ sur } \boldsymbol{D}_-. \end{cases}$$

La fonction f est bien définie et est

- continue sur $\boldsymbol{M}$, de restriction $f\big|_{\boldsymbol{D}+} = \phi : \boldsymbol{D}_+ \to \mathbb{R}$,
- τ-anti-invariante, *i.e.* $f \circ \tau = -f$,
- de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\boldsymbol{M} \backslash \boldsymbol{M}^\tau$ (6.2.5), sur laquelle on a $-\Delta_{\boldsymbol{M}}(f) = \lambda f$,
- vérifie la condition β sur $\partial \boldsymbol{M}$ et de Dirichlet sur $\boldsymbol{M}^\tau$.

Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on suit la démarche de (a) dont on reprend les notations. Soit donc $y \in \boldsymbol{M}^\tau$. Pour voir que $\partial_{\vec{N}} f(y)$ existe nous

devons montrer que les dérivées "latérales" existent et coïncident (voir figure 4, p. 77). Or, on a (en identifiant y et $\nu(y)$ pour alléger la notation)

$$\partial_{\vec{N},+}(f)(y) := \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{f(y+\epsilon\vec{N})-f(y)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\phi(y-\epsilon\vec{n})-\phi(y)}{\epsilon} = \partial_{-\vec{n}}(\phi)(y)$$

$$\partial_{\vec{N},-}(f)(y) := \lim_{\epsilon\to 0^-} \frac{f(y+\epsilon\vec{N})-f(y)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0^-} \frac{-\phi(y+\epsilon\vec{n})+\phi(y)}{\epsilon} = \partial_{\vec{n}}(-\phi)(y)$$

où $\partial_{-\vec{n}}(\phi)(y) = \partial_{\vec{n}}(-\phi)(y)$ de sorte que $\partial_{\vec{N}} f(y)$ existe et coïncide avec sa valeur calculée dans $\boldsymbol{D}$.

En reprenant le voisinage $\mathcal{V}_y$ de (a), ces remarques prouvent que l'application $\partial_{\vec{N}}(f) : \mathcal{V}_y \to \mathbb{R}$ est bien définie et est continue.

À partir de là, on montre que f est de classe C^∞ sur $\boldsymbol{M}$ tout entier en procédant exactement comme dans la question (a).

Par conséquent, $f \in \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{-\tau}$ et l'application $(**)$ est bien bijective.

c) La décomposition (38) que nous rappelons :

$$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M}) = \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\tau} \oplus \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{-\tau}\,,$$

permet de partitionner le spectre de $\boldsymbol{M}$ en deux parties

$$\mathrm{Spec}_\beta(\boldsymbol{M}) := \mathrm{Spec}^{\tau}_\beta(\boldsymbol{M}) \;\amalg\; \mathrm{Spec}^{-\tau}_\beta(\boldsymbol{M})\,, \qquad (\diamond)$$

où l'on note $\mathrm{Spec}^{\tau}_\beta(\boldsymbol{M})$ la liste des valeurs propres λ admettant une fonction propre *invariante* répétée $\dim(\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\tau})$ fois, et *mutatis mutandis* pour $\mathrm{Spec}^{-\tau}_\beta(\boldsymbol{M})$. L'additivité des dimension dans (38) justifie l'égalité $(\diamond)$.

Comme conséquence (a) et (b), l'égalité $(\diamond)$ se réécrit immédiatement sous la forme de l'assertion (c) du théorème :

$$\mathrm{Spec}_D(\boldsymbol{M}) = \mathrm{Spec}_{\beta,N}(\boldsymbol{D}) \;\amalg\; \mathrm{Spec}_{\beta,D}(\boldsymbol{D})\,. \qquad (\diamond\diamond)$$

Mais il y a ici une petite ambiguïté notationnelle qu'il convient de supprimer. En effet, le signe "II" peut signifier, soit : *la réunion disjointe des deux listes en question*, auquel cas nous n'avons plus rien à démontrer, ou bien : *que les deux listes sont, en plus, disjointes,* i.e. *qu'il n'y a pas de fonction propre sur $\boldsymbol{D}$ qui soit à la fois N et D sur $\partial_2\boldsymbol{D}$.*

Bien que nous n'ayons pas vraiment besoin de cette information supplémentaire pour la suite de ces notes, mais comme c'est tout de même signalé dans l'article [GWW], nous justifions cette assertion. Montrons donc que

$$\mathcal{H}_{\lambda,\beta,N}(\boldsymbol{D}) \;\cap\; \mathcal{H}_{\lambda,\beta,D}(\boldsymbol{D}) = 0\,.$$

Soit $\phi \in \mathcal{H}_{\lambda,\beta,N}(\boldsymbol{D}) \;\cap\; \mathcal{H}_{\lambda,\beta,D}(\boldsymbol{D}) = 0$. Les preuves de (a) et (b) produisent sur $\boldsymbol{M}$ une paire de fonctions

$$f_1 \in \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\tau} \quad \text{et} \quad f_2 \in \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{-\tau}$$

dont la restriction à $\boldsymbol{D}_+$ coïncide à ϕ.

Compte tenu des variances sous l'action de τ, la fonction $f_1 + f_2$ est nulle sur le domaine $\boldsymbol{D}_-$ et comme $f_1 + f_2$ est une fonction propre du Laplacien et que $\boldsymbol{D}_-$ est d'intérieur non vide, les théorèmes de Bers et Cheng (8.6.6, 8.6.8) sur les ensembles nodaux forcent l'annulation de cette fonction sur $\boldsymbol{M}$ tout entier, mais alors aussi celle de ϕ, car $f_1 + f_2$ vaut 2ϕ sur $\boldsymbol{D}_+$.

Le théorème est ainsi entièrement justifié. □

10.3. La stratégie de l'Isospectralité

La stratégie dans la recherche de domaines isospectraux repose, depuis l'article de Vigneras, sur une « *formule de traces* » que nous rappelons brièvement.

10.3.1. Groupes presque-conjugués. Soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes d'un groupe fini $\boldsymbol{G}$. On dit que « Γ_1 *et* Γ_2 *sont presque-conjugués dans* $\boldsymbol{G}$ », ou que « $(\boldsymbol{G}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ *est un triplet de Gassmann, ou encore de Sunada* », lorsqu'il existe une bijection $\varphi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ telle que g et $\varphi(g)$ sont conjugués dans $\boldsymbol{G}$, pour tout $g \in \Gamma_1$.

10.3.2. Exercice. Montrer que Γ_1 et Γ_2 sont presque-conjugués dans $\boldsymbol{G}$, si et seulement si chaque classe de conjugaison de $\boldsymbol{G}$ rencontre Γ_1 et Γ_2 dans le même nombre d'éléments.

10.3.3. Propriété fondamentale des sous-groupes presque-conjugués. Le théorème suivant donne la propriété fondamentale de ce type de sous-groupes, à savoir la « *formule des traces* ».

Proposition. *Soit K un corps commutatif de caractéristique 0. On se donne : un espace vectoriel V sur K de dimension finie, un groupe fini $\boldsymbol{G}$ d'automorphismes de V, est deux sous-groupes Γ_1 et Γ_2 presque conjugués. Alors, pour tout $\varphi \in (\mathrm{End}_K\ V)^{\boldsymbol{G}}$, on a*

$$\mathrm{tr}(\varphi|_{V^{\Gamma_1}}) = \mathrm{tr}(\varphi|_{V^{\Gamma_2}}).$$

En particulier (si $\varphi = \mathrm{id}_V$), on a

$$\dim_K(V^{\Gamma_1}) = \dim_K(V^{\Gamma_2})\,.$$

10.3.4. Isospectralité via les triplets de Gassmann. En 1985 apparaît l'article de Sunada [Sun] où l'auteur met en place une stratégie générale pour démontrer l'isospectralité de variétés non isométriques profondément inspirée de l'article de Vigneras [Vig] (1980). Voici son résultat, rédigé pour le besoins de ces notes.

10.3.5. Théorème (Sunada). *Soit $\boldsymbol{M}$ une surface plate compacte (sans bord) munie d'une action d'un groupe fini $\boldsymbol{G}$ par des isométries. Soit $(\boldsymbol{G}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ un triplet de Gassmann tel que Γ_i opère librement sur $\boldsymbol{M}$. Alors, les variétés ${}_{\Gamma_1}\backslash\boldsymbol{M}$ et ${}_{\Gamma_2}\backslash\boldsymbol{M}$ sont isospectrales.*

Sa stratégie est la suivante :

On se donne un triplet de Gassmann $(\boldsymbol{G}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ et une variété plate (à bords, coins,...) $\boldsymbol{M}$ munie d'une action de $\boldsymbol{G}$ par des isométries telle que que les actions induites des sous-groupes Γ_i sur $\boldsymbol{M}$ sont *libres*.

Alors, d'après 8.4.4-(b-ii), l'espace d'orbites ${}_{\Gamma_i}\backslash\boldsymbol{M}$ est une variété plate (à bord, à coins, ...) et la surjection canonique

$$\nu_i : \boldsymbol{M} \to {}_{\Gamma_i}\backslash\boldsymbol{M}$$

induit un isomorphisme qui commute aux Laplaciens

$$\nu_i^\natural : \mathcal{C}^\infty({}_{\Gamma_i}\backslash\boldsymbol{M}) \to \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})^{\Gamma_i}\,, \quad \phi \mapsto \phi \circ \nu_i\,.$$

On a donc un isomorphisme entre sous-espaces propres

$$\boxed{\nu_i^\natural : \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\Gamma_i\backslash\boldsymbol{M}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\Gamma_i}} \qquad (\diamond)$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \{D, N\}$.

Maintenant, **si nous pouvons nous assurer que les espaces vectoriels dans (⋄) sont de dimension fine**, nous pourrons appliquer la formule des traces 10.3.3 aux espaces $\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\Gamma_i}$ et conclure à l'égalité

$$\dim(\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\Gamma_1\backslash\boldsymbol{M})) = \dim(\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\Gamma_2\backslash\boldsymbol{M}))\,,$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \{D, N\}$. Autrement dit, on aura prouvé

$$\mathrm{Spec}_\beta(\Gamma_1\backslash\boldsymbol{M}) = \mathrm{Spec}_\beta(\Gamma_2\backslash\boldsymbol{M})$$

pour tout $\beta \in \{D, N\}$, soit : l'isospectralité de $\Gamma_1\backslash\boldsymbol{M}$ et $\Gamma_2\backslash\boldsymbol{M}$.

On voit donc que la stratégie générale est assez simple, mais voici quelques unes des questions que l'on rencontre dans sa mise en pratique.

D-1) Trouver des triplets de Gassmann $(\boldsymbol{G}, \Gamma_1, \Gamma_2)$.
D-2) Trouver une variété plate (à bords, coins, ...) $\boldsymbol{M}$ et une action fidèle de $\boldsymbol{G}$ sur $\boldsymbol{M}$ par des isométries, de préférence telle que les Γ_i agissent librement.
D-3) Assurer la finitude des dimensions des espaces de fonctions $\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\Gamma_i}$.
D-4) En dimension 2, trouver des exemples où $\Gamma_i\backslash\boldsymbol{M}$ sont des domaines de $\mathbb{R}^2$, et même qu'ils soient contractiles (comme les membranes des tambours).
D-5) Trouver de tels exemples tels que $\Gamma_1\backslash\boldsymbol{M}$ ne soit pas isométrique à $\Gamma_2\backslash\boldsymbol{M}$.

Chacune de ses questions a été l'objet de recherche de plusieurs articles, nous n'en citerons que les plus relevants.

Pour ce qui est (D-1), la notion de sous-groupes presque-conjuguées apparaît pour la première en 1925 fois dans l'appendice d'un article de A. Hurwitz [52] rédigé par F. Gassmann [53] ([Ga], 1926) qui cherchait une condition d'équivalence arithmétique pour deux corps de nombres. Dans cet article, Gassmann donne aussi le premier exemple connu de sous-groupes presque-conjugués non conjugués, avec $\boldsymbol{G} = \mathfrak{S}_6$ et

$$\begin{cases} \Gamma_1 = \{\mathrm{id}; (1,2)(3,4); (1,3)(2,4); (1,4)(2,3)\} \\ \Gamma_2 = \{\mathrm{id}; (1,2)(3,4); (1,2)(5,6); (3,4)(5,6)\}. \end{cases}$$

Dans cette exemple, les sous-groupes Γ_i sont d'indice 180.

Par la suite, R. Perlis reprend la question ([Pe], 1977) et met davantage en lumière l'aspect théorie des groupes, il appelle de tels triplets « *des triplets de Gassmann* », et met la main sur $(\mathrm{Sl}(3,\mathbb{F}_2), \Gamma_1, \Gamma_2)$, utilisé plus tard par Buser et GWW. Dans cet exemple $\mathrm{Sl}(3,\mathbb{F}_2)$ est de cardinal 168 et les sous-groupes Γ_i sont d'indice 7. Cependant, à cet époque on n'avait pas encore relevé l'intérêt

52. Extrait de Wikipedia : *Adolf Hurwitz (1859-1919), mathématicien allemand, fut une des figures importantes des mathématiques de la seconde moitié du xixe siècle.*

53. Extrait de Wikipedia : *Fritz Gassmann (1899–1990) was a Swiss mathematician and geophysicist. Gassmann is the eponym for the Gassmann triple and Gassmann's equation. His Ph.D. advisors at ETH Zurich were George Pólya and Hermann Weyl. He was a geophysics professor at the ETH Zurich. Gassmann triples have been used to construct examples of pairs of mathematical objects with the same invariants that are not isomorphic, including arithmetically equivalent number fields and isospectral graphs and isospectral Riemannian manifolds.*

de tels triplets dans les recherches de variété riemanniennes isospectrales, ce qui arrivera seulement avec M.-F. Vigneras ([Vig], 1980).

La question (D-2) présentait alors la difficulté de trouver et/ou construire des variétés différentielles plates $\boldsymbol{M}$ (à bords, à coins, ...) sur lesquelles les exemples de triplets de Gassmann connus pouvaient agir isométriquement. De ce point de vue, il faut attendre Buser et son idée d'utiliser le graphes de Cayley ([Bu$_2$], 1988), d'une part pour démontrer que quel que soit le groupe fini $\boldsymbol{G}$ il existe une surface plate à coins $\boldsymbol{M}$ munie d'une action fidèle et libre de $\boldsymbol{G}$ par isométries, et d'autre part pour construire explicitement les surfaces $\Gamma_i\backslash\boldsymbol{M}$ sans être obligés de construire explicitement $\boldsymbol{M}$. Dans son travail, Buser propose de définir $\boldsymbol{M}$ comme un épaississement du graphe de Cayley associé à $\boldsymbol{G}$ et à un système de générateurs de $\boldsymbol{G}$, ce qui donne aussitôt des variétés plates à coins (voir 10.4).

Les questions (D-4) et (D-5) concernent largement les travaux de Buser et GWW, sur lesquelles nous reviendrons longuement.

Quand à la question (D-3), c'est un problème d'« *Analyse fonctionnelle* ». Elle a été abordée par P. Bérard dans de nombreux travaux ([Bé$_1$, Bé$_3$], 1992) où il donne une réponse très satisfaisante. De plus, Bérard reprend les théorème de Sunada et le libère de plusieurs limitations, les variétés pouvant admettre des coins et les groupes Γ_i pouvant même ne pas agir librement. Voici son théorème énoncé toujours pour le besoin de ces notes.

10.3.6. Théorème (Bérard). *Soit $\boldsymbol{M}$ une surface plate compacte à coins munie d'une action d'un groupe fini $\boldsymbol{G}$ par des isométries. Soit $(\boldsymbol{G}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ un triplet de Gassmann. Alors,*

a) *Les espaces de fonctions propres Γ_i-invariantes*

$$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\Gamma_1} \quad et \quad \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\Gamma_2},$$

sont de même dimension finie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \{D, N\}$.

b) *Si les groupes Γ_i agissent librement, les espaces quotient sont isospectraux :*

$$\mathrm{Spec}_\beta(\Gamma_1\backslash\boldsymbol{M}) = \mathrm{Spec}_\beta(\Gamma_2\backslash\boldsymbol{M}), \quad pour\ tout\ \beta \in \{D, N\}.$$

10.3.7. Remarque. Lorsque $\boldsymbol{M}$ est sans bord et que les sous-groupes Γ_i agissent librement les quotients $\boldsymbol{M} \to \Gamma_i\backslash\boldsymbol{M}$ sont des revêtements principaux (5.2.4,5.2.3-(c)), il n'y a pas de conditions aux bords et l'on a alors $\mathcal{H}_\lambda(\boldsymbol{M})^{\Gamma_1} = \mathcal{H}_\lambda(\Gamma_1\backslash\boldsymbol{M})$ de sorte que l'on retrouve le théorème de Sunada.

Lorsque $\boldsymbol{M}$ est une variété à coins, et que les groupes Γ_i agissent librement, ils opèrent sur les bords et les coins de $\boldsymbol{M}$ et la surjection canonique $\nu_i : \boldsymbol{M} \to \Gamma_i\backslash\boldsymbol{M}$ respecte bords et des coins (7.4.2), en particulier l'image inverse des bords et coins de $\Gamma_i\backslash\boldsymbol{M}$ sont des bords et coins de $\boldsymbol{M}$. On a alors $\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\Gamma_1} = \mathcal{H}_{\lambda\,\beta}(\Gamma_1\backslash\boldsymbol{M})$ et ceci explique comment (b) résulte de (a) dans le théorème de Bérard.

Il est important de souligner, sur ce point précis, le changement de point de vue lorsque l'on ne dispose pas d'actions libres. Plutôt que de montrer que les $\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\Gamma_i\backslash\boldsymbol{M})$ sont de même dimension, Bérard démontre, toujours à l'aide des triplets de Gassmann et la formule de traces, que les espaces $\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\Gamma_i}$ ont cette propriété. Nous verrons comment dans certains cas on a réussi à contourner cette limitation (*cf.* 10.4.24 et surtout 10.4.26 et 11.6.1).

10.4. Graphes de Cayley et surfaces plates de Buser

Nous décrivons dans cette section la méthode de Buser pour résoudre la question (D-2) : *Étant donné un groupe fini* $\boldsymbol{G}$, *construite une surface à coins* $\boldsymbol{M}$ *sur laquelle* $\boldsymbol{G}$ *opère fidèlement et librement par isométries.*

10.4.1. Graphes de Cayley. Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe et $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{G}$ un « *système de générateurs* » ([54]) de $\boldsymbol{G}$. Le « *graphe de Cayley de* $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S})$ » ([55]), noté $\mathcal{G}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S})$, est un graphe d'ensemble de « *sommets* » ([56]) le groupe $\boldsymbol{G}$ et d'ensemble d'« *arêtes* » l'ensemble ([57])

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S}) := \big\{(g, gs) \;\big|\; g \in \boldsymbol{G} \;\&\; s \in \boldsymbol{S}\big\}$$

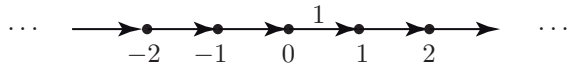
Si $\alpha = (g, gs)$ est une arête, g est sa « *source* », gs son « *but* », et s est son « *type* ».

Convention. Pour éviter des hypothèses parasites, on suppose que $\boldsymbol{e} \notin \boldsymbol{S}$.

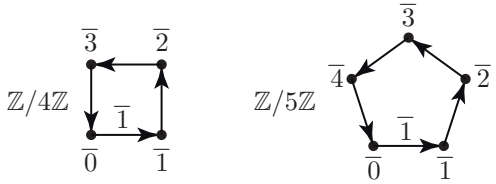
10.4.2. Remarque. Dans cette définition, les arêtes sont définies par l'action des éléments $s \in \boldsymbol{S}$ *à droite* de l'ensemble des sommets $\boldsymbol{G}$. Un version symétrique est bien entendu possible, mais elle n'est adaptée pour l'idée de Buser qui cherche une surface munie d'une action de $\boldsymbol{G}$ *à gauche* (voir 10.4.7-(a)).

10.4.3. Exemples de graphes de Cayley

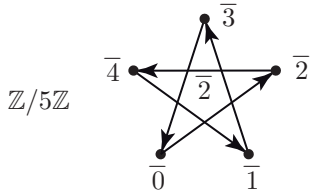
- $\mathcal{G}(\mathbb{Z}, \boldsymbol{S} := \{1\})$



- $\mathcal{G}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \boldsymbol{S} := \{\overline{1}\})$



- $\mathcal{G}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, 0), \boldsymbol{S} := \{\overline{2}\})$



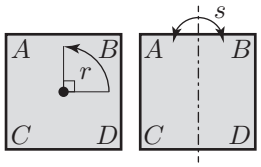
54. Dans ces notes un « *système de générateurs* » d'un groupe $\boldsymbol{G}$ est un **ensemble** $\boldsymbol{S}$ d'éléments $s \in \boldsymbol{G}$ tel que tout élément $g \in \boldsymbol{G}$ peut s'obtenir comme produit fini d'élément de $\boldsymbol{S}$, *i.e.* tel qu'il existe $s_1, \ldots, s_r \in \boldsymbol{S}$ vérifiant $g = s_1 \cdots s_r$. Il arrive souvent que l'on demande à $\boldsymbol{S}$ d'être une "famille" plutôt qu'un "ensemble", dans ce cas nous exigerions qu'il s'agisse d'une famille d'éléments deux à deux distincts.

55. Extrait de Wikipedia : *Arthur Cayley (1821 - 1895) est un mathématicien britannique. Il fait partie des fondateurs de l'école britannique moderne de mathématiques pures.* Le théorème de Cayley-Hamilton, c'est lui.

56. Aussi appelés « *vertex ou noeud* », « *vertices* » en anglais. On désigne classiquement par la lettre $\boldsymbol{V}$ l'ensemble des sommets.

57. En anglais « *edge* ». On désigne classiquement par la lettre $\boldsymbol{E}$ l'ensemble des arêtes.

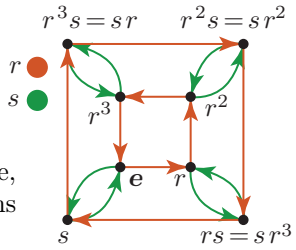
- $\mathcal{G}(\mathbb{D}_4, \boldsymbol{S} := \{r, s\})$. Le groupe $\mathbb{D}_4$ est le « *groupe diédral d'ordre* $2\times4 = 8$ », appelé aussi « *groupe du carré* » puisqu'il se réalise comme le groupe des isométries d'un carré. Ce groupe est engendré par la rotation anti-horaire r d'angle $\pi/2$ et par la réflexion s d'axe vertical.



Ces isométries vérifient les relations

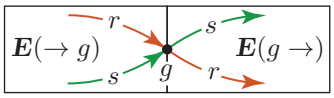
$$\begin{cases} r^4 = s^2 = 1\,, \\ s\,r\,s = r^{-1}\,, \end{cases}$$

qui caractérisent complètement le groupe $\mathbb{D}_4$. Ci-contre, le graphe de Cayley de $(\mathbb{D}_4, \{r, s\})$ où nous indiquons par deux couleurs différentes l'action de r et de s.



10.4.4. Lemme et notations

a) *Pour $g \in \boldsymbol{G}$, notons $\boldsymbol{E}(g \to)$ et $\boldsymbol{E}(\to g)$ les ensembles des arêtes de $\mathcal{G}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S})$, respectivement de source et de but g.*



Les applications

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{E}(\to g) & \xrightarrow{\text{type}} & \boldsymbol{S} \\ (h, g) & \longmapsto & h^{-1}g \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{E}(g \to) & \xrightarrow{\text{type}} & \boldsymbol{S} \\ (g, h) & \longmapsto & g^{-1}h \end{array}$$

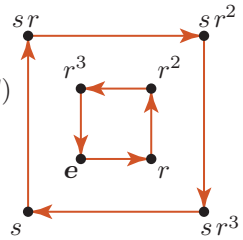
sont bijectives et l'on a

$$\boldsymbol{E}(\to g) \cap \boldsymbol{E}(g \to) = \emptyset \quad \textit{et} \quad |\boldsymbol{E}(\to g)| = |\boldsymbol{E}(g \to)| = |\boldsymbol{S}|\,.$$

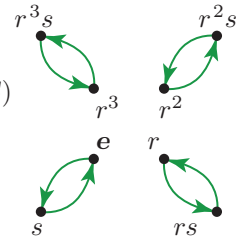
b) *Pour $s \in \boldsymbol{S}$, notons $\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S})$ l'ensemble d'arêtes « de type s », i.e. de la forme (g, gs). On a, pour tous $s \neq s' \in \boldsymbol{S}$,*

$$\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S}) \cap \boldsymbol{E}_{s'}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S}) = \emptyset \quad \textit{et} \quad |\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S})| = |\boldsymbol{G}|\,.$$

$\boldsymbol{E}_r(\mathbb{D}_4, \boldsymbol{S})$



$\boldsymbol{E}_s(\mathbb{D}_4, \boldsymbol{S})$



Démonstration. Exercice. □

10.4.5. Commentaire et terminologie. Ce qu'il faut retenir de ce lemme, c'est que dans un sommet de $\mathcal{G}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S})$ il y a des "entrées" et des "sorties", que "entrées" et "sorties" sont deux à deux distinctes et qu'elles sont indexées par les éléments de $\boldsymbol{S}$. Pour $s \in \boldsymbol{S}$, on pourra parler de l'« *entrée s* » et de la « *sortie s* » d'un sommet.

10.4.6. Définition. Un « *morphisme de graphes de Cayley* » de $\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$ vers $\mathcal{G}(\boldsymbol{G}',\boldsymbol{S}')$ est la donnée d'une application $\alpha:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}'$ telle que l'application induite $\varphi:\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})\to\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}',\boldsymbol{S}')$, $(g,h)\mapsto(\varphi(g),\varphi(h))$, respecte les types des arêtes, *i.e.* pour tout $s\in\boldsymbol{S}$ il existe $s'\in\boldsymbol{S}'$ tel $\varphi(\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S}))\subseteq\boldsymbol{E}_{s'}(\boldsymbol{G}',\boldsymbol{S}')$. ([58])

10.4.7. Proposition

a) *L'action* à gauche *de $g\in\boldsymbol{G}$ sur les sommets de $\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$ est un automorphisme de graphe de Cayley qui conserve les types des arêtes,* i.e. *tel que $g\boldsymbol{E}_s=\boldsymbol{E}_s$. Le groupe $\boldsymbol{G}$ opère ainsi à gauche sur $\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$.*

b) *Un homomorphisme de groupes $\varphi:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}'$ tel que $\varphi(\boldsymbol{S})\subseteq\boldsymbol{S}'$ est un morphisme de graphes de Cayley de $\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$ vers $\mathcal{G}(\boldsymbol{G}',\boldsymbol{S}')$.*

c) *Si $\varphi:\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})\to\mathcal{G}(\boldsymbol{G}',\boldsymbol{S}')$ est un morphisme de graphes de Cayley, l'application*

$$\beta:=\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}',\quad g\mapsto\alpha(\boldsymbol{e})^{-1}\alpha(g),$$

est un homomorphisme de groupes et φ se décompose en

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})\xrightarrow{\ \beta\ }\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})\xrightarrow{\ \varphi(\boldsymbol{e})\cdot(_)\ }\mathcal{G}(\boldsymbol{G}',\boldsymbol{S}')$$
$$\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})\xrightarrow{\qquad\varphi\qquad}\mathcal{G}(\boldsymbol{G}',\boldsymbol{S}')$$

Indication. (a,b) Exercice. c) Soit $\beta:\boldsymbol{S}\to\boldsymbol{S}'$ telle que $\varphi(\boldsymbol{E}_s)\subseteq\boldsymbol{E}_{\beta(s)}$. On a $\varphi(s_1\cdots s_\ell)=\varphi(\boldsymbol{e})\beta(s_1)\cdots\beta(s_\ell)$ par induction sur ℓ. On en déduit que les produits $\beta(s_1)\cdots\beta(s_\ell)$ seul dépendent de $s_1\cdots s_\ell$. En particulier, β s'étend à $\boldsymbol{G}$ tout entier en posant $\beta(g)=\beta(s_1)\cdots\beta(s_\ell)$, où $g=s_1\cdots s_\ell$. Par construction, on a $\beta(gh)=\beta(g)\beta(h)$. □

10.4.8. Surfaces de Buser et graphes de Cayley. L'idée très simple mais très efficace de Buser est d'épaissir les arêtes du graphe de Cayley de $(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$ pour fabriquer une variété à coins $\boldsymbol{M}$ munie d'un « *pavage* » sur laquelle le groupe $\boldsymbol{G}$ va agir *à gauche* par des isométries qui conservent le pavage.

10.4.9. Des briques fléchées. Fixons, une fois pour toutes, une couleur $c(s)$ pour chaque $s\in\boldsymbol{S}$, et ce de manière injective. Notons alors $\mathcal{F}_c(\boldsymbol{S})$ l'ensemble contenant, pour chaque $s\in\boldsymbol{S}$, une "flèche de sortie de couleur $c(s)$" et une "flèche d'entrée de couleur $c(s)$". Voici, par exemple, le cas où $|\boldsymbol{S}|=2$

$$c:\boldsymbol{S}\to\{\bullet,\bullet\},\quad \mathcal{F}_c(\boldsymbol{S}):=\Big\{\ \Big\}.$$



Buser place ensuite dans chaque sommet $g\in\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$, une surface plate à coins $\boldsymbol{T}_g\subseteq\mathbb{R}^2$ comportant $2|\boldsymbol{S}|$ branches rectangulaires régulièrement disposées et qu'il étiquette bijectivement des flèches colorées de $\mathcal{F}_c(\boldsymbol{S})$. On appellera une

58. Cette notion de "morphisme" de graphe de Cayley est celle que Buser qualifie de "forte" ([Bu$_2$], p. 66), c'est la seule dont nous aurons besoin.

telle surface « *une brique fléchée* ». Voici des exemples avec $|\boldsymbol{S}| = 1, 2, 6$.

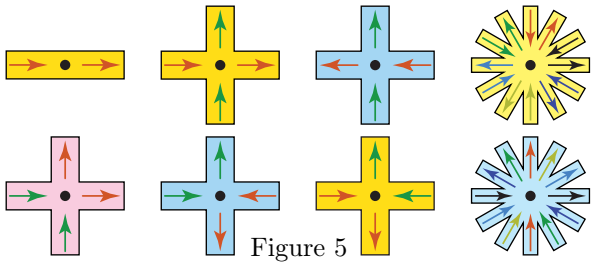


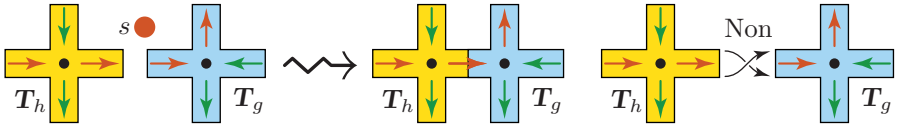
Figure 5

10.4.10. Le recollement des briques fléchées. Étant donnée une brique fléchée $\boldsymbol{T}_g$, on dira de sa branche portant la flèche de sortie de couleur $c(s)$ que c'est la « *sortie s (de $\boldsymbol{T}$)* » et de même pour les "entrées". Cette terminologie est en total accord avec celle de 10.4.5. Le lemme 10.4.4 établit que pour tout sommet $g \in \mathcal{G}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S})$ et tout $s \in \boldsymbol{S}$:

- *Il existe une et unique "sortie s" du sommet g et de la brique $\boldsymbol{T}_g$.*
- *Il existe une et unique "entrée s" du sommet g et de la brique $\boldsymbol{T}_g$.*

On colle alors des briques entr'elles en appliquant la recette suivante :

- *Si $g = hs$, on colle isométriquement la "sortie s" de $\boldsymbol{T}_h$ à l'"entrée s" de $\boldsymbol{T}_g$ en respectant l'orientation des briques.*



10.4.11. Remarque. Il existe beaucoup de manières d'étiqueter une brique de plus de 2 branches. Ce détail fait que les surfaces ainsi construites n'admettront pas toujours d'action isométrique de $\boldsymbol{G}$. On remarquera déjà que les briques à 6 branches de la figure 5, n'admettent pas d'isométrie respectant leur étiquetage.

10.4.12. Exercice. Classer les briques à 4 branches de la figure 5 par la relation : "admettre une isométrie qui respecte l'étiquetages".

Voici les constructions pour les exemples 10.4.3 où il faut encore coller les côtés portant les même lettres.

$\mathrm{Cay}((\mathbb{Z}, +, 0), \boldsymbol{S} := \{1\})$

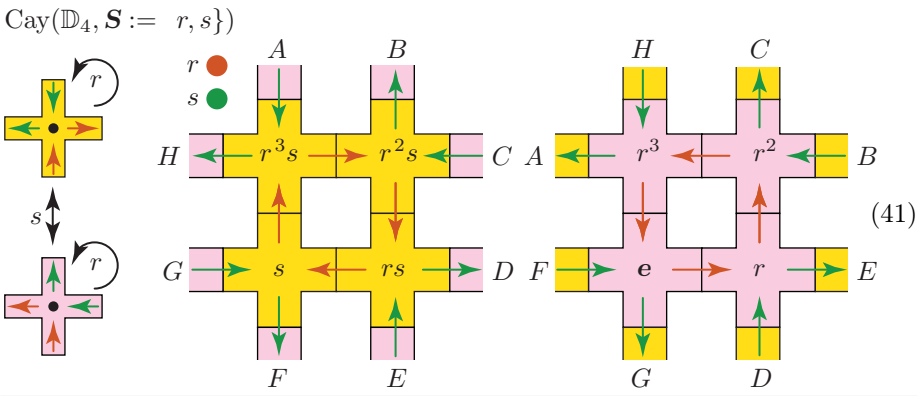


(39)

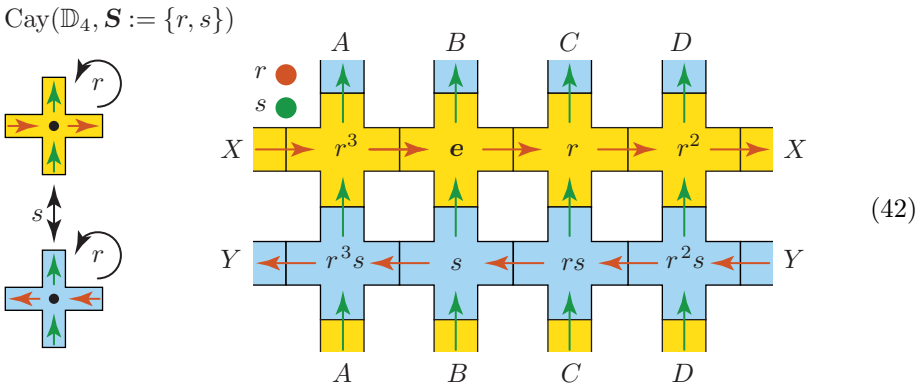
$\mathrm{Cay}((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, 0), \boldsymbol{S} := \{\overline{2}\})$



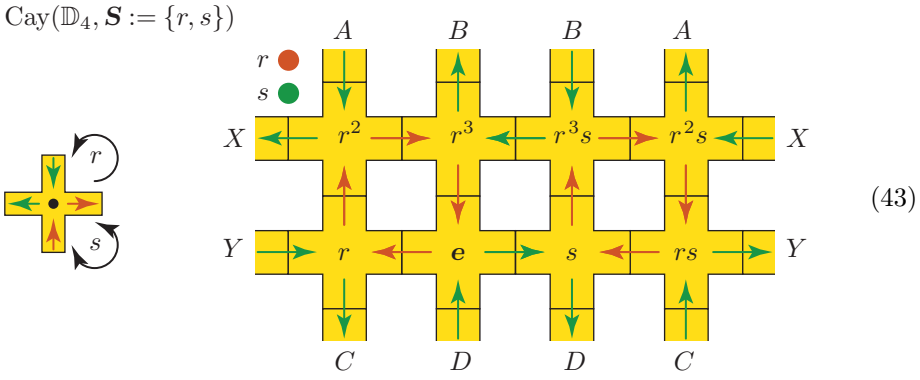
(40)



(41)



(42)



(43)

Sur la colonne de gauche, nous montrons les types de briques fléchée utilisés et la façon dont la multiplication *à gauche* les échange.

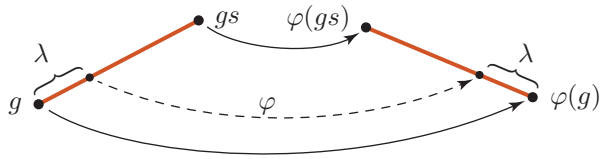
Pour $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, on obtient respectivement un ruban infini et un ruban cylindrique. Pour $\mathbb{D}_4$, on a présenté trois constructions possibles. La première est très compliquée à exécuter. La deuxième se voit comme un tore plat à 8 trous et la troisième comme une sphère plate à 10 trous. ([59])

59. Les surfaces sont néanmoins toutes homotopiquement équivalentes, car homotopes au même graphe de Cayley.

10.4.13. Définition. Soit $\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$ un graphe de Cayley. Pour toute famille $\mathscr{T} := \{T_g\}_{g\in\boldsymbol{G}}$ de briques à $2|\boldsymbol{S}|$ branches fléchées, on note $\boldsymbol{M}_{\mathscr{T}}$ la surface plate à coins obtenue par le procédé de recollement 10.4.10. La surface $\mathcal{M}_{\mathscr{T}}$ est « *la surface de Buser (de type $\mathscr{T}$) associée à $\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$* ».

10.4.14. Isométries des surfaces de Buser. Soit $\boldsymbol{M}_{\mathscr{T}}$ une surface Buser. Les lignes médianes des briques de $\mathscr{T}$ se recollent dans $\boldsymbol{M}_{\mathscr{T}}$ suivant une réunion de segments fermés qui s'identifie clairement le graphe de Cayley de $(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$, on a donc $\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S}) \subseteq \boldsymbol{M}_{\mathscr{T}}$. De même, les centres des briques de $\mathscr{T}$ s'identifient aux éléments correspondants de $\boldsymbol{G}$, d'où les inclusions $\boldsymbol{G} \subseteq \mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S}) \subseteq \boldsymbol{M}_{\mathscr{T}}$.

10.4.15. Exercice. On munit $\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$ de la topologie induite par $\mathcal{M}_{\mathscr{T}}$. Montrer que tout automorphisme de graphe de Cayley $\varphi : \mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S}) \to \mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$ s'étend d'une et une unique manière en une isométrie de $\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$. *Indication. On prolonge φ en l'interpolant affinement le long des arêtes correspondantes .*



On remarque ensuite que les arêtes de $\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$ se réalisent dans $\boldsymbol{M}_{\mathscr{T}}$ par des segments deux à deux isométriques.

10.4.16. Proposition. *Soit $\mathscr{T} := \{\boldsymbol{T}_g\}_{g\in\boldsymbol{G}}$ une famille de briques fléchées correspondant au système de générateurs $\boldsymbol{S}$.*

a) *Étant donnés $h, g \in \boldsymbol{G}$, il existe au plus une isométrie (affine) $\varphi_{g,h} : \boldsymbol{T}_h \to \boldsymbol{T}_g$ qui soit « fléchée », i.e. qui respecte l'orientation, les flèches et leur couleur. Dans ce cas on dira que les « briques fléchées sont isométriques ».*

b) *Il y a équivalence entre :*
   i) *Les briques fléchées dans $\mathscr{T}$ sont deux à deux isométriques.*
   ii) *Tout automorphisme $\varphi : \mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S}) \to \mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$ tel que $\varphi(\boldsymbol{E}_s) = \boldsymbol{E}_s$ pour $s \in \boldsymbol{S}$, se prolonge d'une et d'une seule manière en une isométrie de $\boldsymbol{M}_{\mathscr{T}}$ qui conserve l'orientation.*
   iii) *Il existe une et une seule action à gauche de $\boldsymbol{G}$ sur $\boldsymbol{M}_{\mathscr{T}}$ par isométries qui conservent l'orientation et dont la restriction à $\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$ coïncide avec l'action à gauche de $\boldsymbol{G}$ sur son graphe de Cayley. De plus cette action est libre.*

Indication. a) Exercice. b) (i)⇒(ii) Un tel morphisme est donné par l'action à gauche d'un certain $g \in \boldsymbol{G}$ (10.4.7-(a)). L'existence et unicité du prolongement isométrique orienté $\varphi_h : \boldsymbol{T}_h \to \boldsymbol{T}_{gh}$ résulte de (i), de (a) et du fait que les types d'arêtes sont conservés. Il faut ensuite contrôler que $\{\varphi_h : \boldsymbol{T}_h \to \boldsymbol{T}_{gh} \subseteq \boldsymbol{M}_{\mathscr{T}}\}_{h\in\boldsymbol{G}}$ se recolle en une isométrie locale φ de $\boldsymbol{M}_{\mathscr{T}}$, ce pour quoi comparer φ_h et φ_{hs} au-dessus du chevauchement $\boldsymbol{T}_h \cap \boldsymbol{T}_{hs}$, ce qui est aisé. Comme φ est inversible, c'est une isométrie (globale) d'après 4.4.6. (ii)⇒(iii)⇒(i) Exercice. □

10.4.17. Exercice. Contrôler que dans les exemples (39)-(43), les surfaces de Buser correspondantes sont munies d'une action libre $\boldsymbol{G}$ par isométries, à une exception près que l'on identifiera.

10.4.18. Involutions sur une surface de Buser. Le cas $\mathbb{D}_4$ est particulièrement intéressant parce que l'automorphisme intérieur $\tau := s(_)s : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$ transforme $\boldsymbol{S} := \{r, s\}$ en $\boldsymbol{S}' := \{r^{-1}, s^{-1}\}$ et induit donc un isomorphisme de graphes de Cayley $\tau : \mathcal{G}(\mathbb{D}_4, \boldsymbol{S}) \to \mathcal{G}(\mathbb{D}_4, \boldsymbol{S}')$.

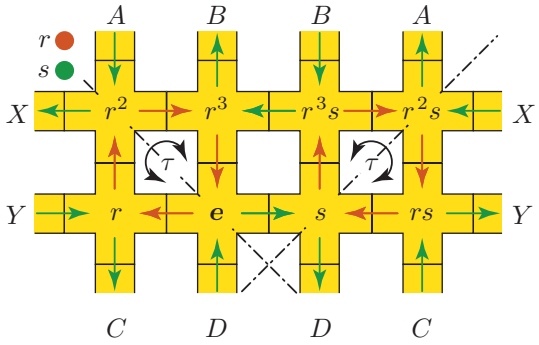
Cette situation sera rencontrée de nouveau dans le cas du groupe $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{F}_2)$ considéré par Buser et GWW dont le cardinal est 168 et sera difficile de représenter graphiquement. Il peut donc être instructif de regarder l'exemple de $\mathbb{D}_4$ dont le cardinal et seulement 8.

Si $\boldsymbol{M}_{\mathscr{T}}$ est une surface de Buser pour $\mathcal{G}(\mathbb{D}_4, \boldsymbol{S})$ avec $\mathscr{T} = \{\boldsymbol{T}_g\}_{g\in\boldsymbol{G}}$, notons $\mathscr{T}' := \{\boldsymbol{T}'_g\}_{g\in\boldsymbol{G}}$, où $\boldsymbol{T}'$ est obtenue de $\boldsymbol{T}$ en inversant le sens de ses flèches. Soit $\boldsymbol{M}_{\mathscr{T}'}$ la surface de Buser correspondante pour $\mathcal{G}(\mathbb{D}_4, \boldsymbol{S}')$. La preuve de de 10.4.16 fournit alors une isométrie canonique de surfaces de Buser $\tau : \boldsymbol{M}_{\mathscr{T}} \to \boldsymbol{M}_{\mathscr{T}'}$.

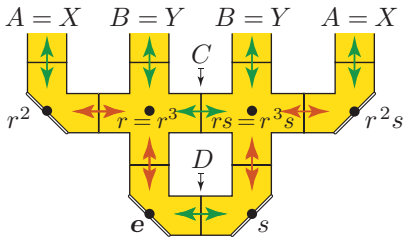
Or, dans ces constructions la seule chose qui change c'est l'orientation des flèches. On comprend donc si l'on efface les flèches de $\boldsymbol{M}_{\mathscr{T}}$ et $\boldsymbol{M}_{\mathscr{T}'}$, on retrouve deux exemplaires d'une même surface plate à coins que nous notons $\boldsymbol{M}$. L'automorphisme intérieur $\tau : \mathbb{D}_4 \to \mathbb{D}_4$ induit donc une involution isométrique canonique

$$\tau : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}\,.$$

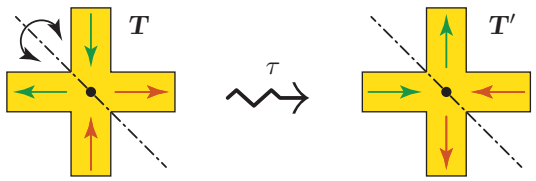
Voici la représentation graphique de l'action de τ sur la surface de Buser (43) :



et voici la réalisation de l'espace des orbites $\boldsymbol{M}/\langle\tau\rangle$

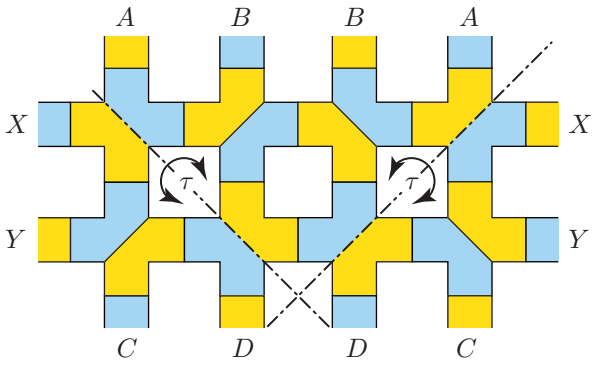


On aura remarqué que le changement des sens des flèches se voit sur la brique de base par une symétrie axiale

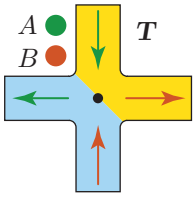


(44)

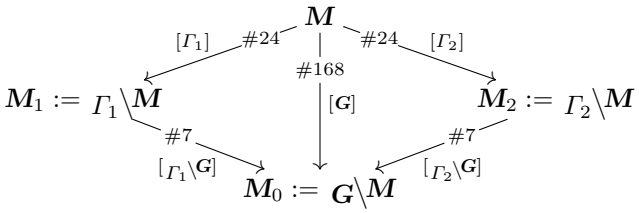
de sorte que si nous colorons différemment les composantes de part et d'autre de l'axe de réflexion, nous obtenons un pavage de $\boldsymbol{M}$. L'application τ respecte la forme du pavage mais fait passer d'un pavé d'une couleur à un pavé de couleur différente.



10.4.19. Surfaces plates isospectrales de Buser. Grâce à la méthode des graphes de Cayley, Buser construit des exemples de surfaces plates munies d'une action libre des groupes des triplets de Gassmann et s'approche du but à atteindre (D-4) avec ses surfaces plates à coins $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$ de §10.2 ([Bu$_1$]), qui ne sont toutefois pas contractiles mais qui sont un passage obligé pour la solution de GWW.



Buser considère la surface plate à coins $\boldsymbol{M}$ correspondante au graphe de Cayley $\mathcal{G}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{S})$, où $\boldsymbol{G}:=\mathrm{Sl}(3,\mathbb{F}_2)$ et $\boldsymbol{S}=\{A,B\}$ est un système de générateurs à deux éléments (nous y reviendrons dans 11.3). Il utilise la brique $\boldsymbol{T}$ de (44), dont on peut arrondir les coins concaves si l'on souhaite que $\partial\boldsymbol{M}$ soit une courbe $\mathcal{C}^\infty$. Le groupe $\boldsymbol{G}$ est de cardinal 128 et contient deux sous-groupes, Γ_1 et Γ_2, de cardinal 24, tels que que $(\boldsymbol{G},\Gamma_1,\Gamma_2)$ est un triplet de Gassmann (voir 11.3). Les groupe $\boldsymbol{G}$, et donc les Γ_i, opère librement par isométries (orientées) sur $\boldsymbol{M}$ (10.4.16-(b-iii)). Buser s'intéresse alors au diagramme d'espaces d'orbites suivant



(45)

où les flèches émanant de $\boldsymbol{M}$ sont les surjections canoniques (des revêtements en fait (5.2.4)), et les deux autres sont des revêtements de fibres indiquées entre crochets et de cardinal donné par le signe #. Le diagramme est commutatif et les applications sont des isométries locales (8.4.3, 8.4.4).

Le théorème suivant est maintenant immédiat.

10.4.20. Théorème (Buser). *Les surfaces $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$ de §10.2 sont isospectrales et non-isométriques :*

$$\mathrm{Spec}_\beta(\boldsymbol{M}_1)=\mathrm{Spec}_\beta(\boldsymbol{M}_2)\,,\quad \textit{pour } \beta\in\{D,N\}.$$

Indication. L'isospectralité est claire (p.e. par 10.3.6-(b)). Pour voir que $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$ ne sont pas isométriques on peut regarder leurs bords (page 74 et suivante) et remarquer qu'ils consistent en 9 "boucles" de longueurs différentes dont exactement deux sont de plus petite longueur. On remarque alors que ces deux boucles là ne sont pas à la même distance l'une de l'autre, dans les deux surfaces en question. Or, une une distance ainsi définie est un « *invariant isométrique* », *i.e.* une propriété conservée par toute isométrie. □

10.4.21. Remarque. Dans le diagramme (45) de Buser, la surface $\boldsymbol{M}_0$ provient de la « *brique fondamentale* » $\boldsymbol{T}$ ("Tile") (la même de §10.1 et §10.2), sur laquelle on colle les extrémités suivant les bords indiqués. On remarque une réflexion par rapport au plan horizontal de la figure, notée τ_0.

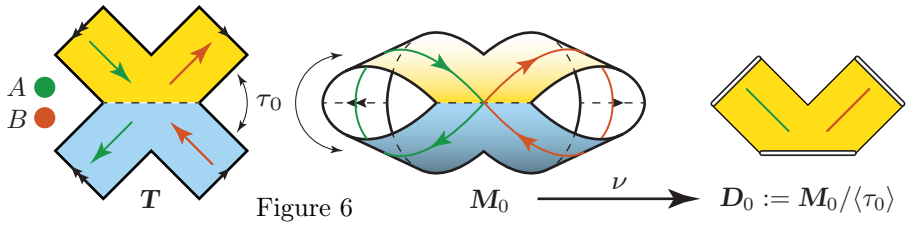
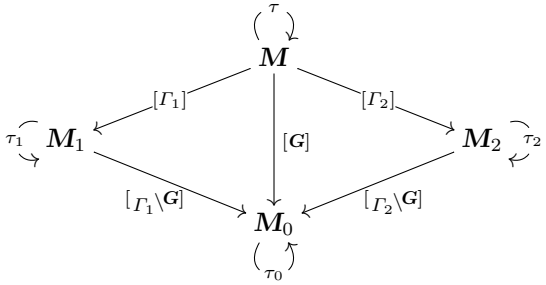


Figure 6

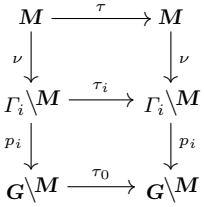
10.4.22. Les domaines isospectraux de GWW. Tout comme dans le cas groupe du carré (10.4.18), Gordon–Webb–Wolpert mettent en évidence l'existence d'un automorphisme intérieur τ de $\boldsymbol{G} = \mathrm{Sl}(3, \mathbb{F}_2)$ qui stabilise les groupes Γ_i du triplet de Gassmann $(\boldsymbol{G}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ et qui inverse les générateurs $\{A, B\}$ de $\boldsymbol{G}$. Ils en déduisent une réflexion isométrique $\tau : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ qui rend commutative la complétion suivante du diagramme de Buser ([60])



(46)

où les réflexions τ_1 et τ_2 sont celles de 10.2.1, utilisées dans la construction des domaines $\boldsymbol{D}_1$ et $\boldsymbol{D}_2$.

60. Ceci signifie, que les sous-diagrammes suivants sont commutatifs



10.4.23. Proposition (GWW) ([61])

a) *Il existe une isométrie τ de $\boldsymbol{M}$ qui normalise $\boldsymbol{G}$, et Γ_i. Elle induit par conséquent une action sur $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{G}\backslash\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}_1 = \Gamma_1\backslash\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{M}_2 = \Gamma_2\backslash\boldsymbol{M}$. Ces actions coïncident respectivement à celles des τ_0, τ_1 et τ_2.*

b) *Le triplet $(\langle\boldsymbol{G},\tau\rangle, \langle\Gamma_1,\tau\rangle, \langle\Gamma_2,\tau\rangle)$ est un triplet de Gassmann.*

Indication. Nous reviendrons sur ce résultat et sa preuve dans 11.4.2. □

Cette proposition permet à Gordon–Webb–Wolpert d'atteindre enfin l'isospectralité des domaines plans $\boldsymbol{D}_i$, ce qui répond pleinement à la demande D-4 et donc à la question de Kac (8.5.6). Voici leur théorème et démonstration.

10.4.24. Théorème (GWW). ([62]) *Les domaines $\boldsymbol{D}_1$ et $\boldsymbol{D}_2$ du §10.1 sont non-isométriques et isospectraux aussi bien pour les conditions limites de Dirichlet que pour celles de Neumann.*

Indication. Le résultat clef est 10.2.6 qui a établi

$$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M}_i)^{\tau} \simeq \mathcal{H}_{\lambda,\beta,N}(\boldsymbol{D}_i) \tag{a}$$

$$\mathrm{Spec}_{\beta}(\boldsymbol{M}_i) = \mathrm{Spec}_{\beta,N}(\boldsymbol{D}_i) \amalg \mathrm{Spec}_{\beta,D}(\boldsymbol{D}_i) \tag{c}$$

pour $i = 1, 2$ et $\beta \in \{D, N\}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par Buser (10.4.20), on a

$$\boxed{\mathrm{Spec}_{\beta}(\boldsymbol{M}_1) = \mathrm{Spec}_{\beta}(\boldsymbol{M}_2)} \tag{$*$}$$

et par Bérard (10.3.6-(a))

$$\dim \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle\Gamma_1,\tau\rangle} = \dim \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle\Gamma_2,\tau\rangle}\,. \tag{$\diamond$}$$

Or, comme τ normalise Γ_i, il agit naturellement sur $\mathcal{H}_{\beta}(\boldsymbol{M})^{\Gamma_i}$. En effet, si f est Γ_i-invariante, on a

$$g(\tau(f)) = (g\tau)(f) = \tau((\tau^{-1}g\tau)(f)) = \tau(f)$$

puisque $\tau^{-1}g\tau \in \Gamma_i$. Il s'ensuit que

$$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle\Gamma_i,\tau\rangle} = \big(\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\Gamma_i}\big)^{\tau} = \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\,\Gamma_i\backslash\boldsymbol{M})^{\tau}$$

et alors $\dim \mathcal{H}_{\lambda,\beta,N}(\boldsymbol{D}_1) = \dim \mathcal{H}_{\lambda,\beta,N}(\boldsymbol{D}_2)$, par $(\diamond)$ et (a). Par conséquent,

$$\mathrm{Spec}_{\beta,N}(\boldsymbol{D}_1) = \mathrm{Spec}_{\beta,N}(\boldsymbol{D}_2) \tag{$**$}$$

ce qui avec (c) et $(*)$ donne

$$\mathrm{Spec}_{\beta,D}(\boldsymbol{D}_1) = \mathrm{Spec}_{\beta,D}(\boldsymbol{D}_2) \tag{$**'$}$$

Le théorème découle des deux dernières égalités, car

$$\begin{cases} \mathrm{Spec}_{N}(\boldsymbol{D}_1) = \mathrm{Spec}_{N,N}(\boldsymbol{D}_1) = \mathrm{Spec}_{N,N}(\boldsymbol{D}_2) = \mathrm{Spec}_{N}(\boldsymbol{D}_2) \\ \mathrm{Spec}_{D}(\boldsymbol{D}_1) = \mathrm{Spec}_{D,D}(\boldsymbol{D}_1) = \mathrm{Spec}_{D,D}(\boldsymbol{D}_2) = \mathrm{Spec}_{D}(\boldsymbol{D}_2) \end{cases}$$

C.Q.F.D □

61. [GWW] Lemma 4.4, p. 11.
62. [GWW] Theorem 4.1, p. 10.

10.4.25. Remarque. On a aussi montré que l'on a $\mathrm{Spec}_{\beta,\beta'}(\boldsymbol{D}_1) = \mathrm{Spec}_{\beta,\beta'}(\boldsymbol{D}_2)$ quels que soient $\beta, \beta' \in \{D, N\}$.

10.4.26. Une simplification. La démonstration de 10.4.24 suit l'argumentation de GWW, mais elle peut être légèrement simplifiée en soulignant que dans 10.2.6 nous avons **deux** isomorphismes importants

$$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle \Gamma_i, \tau\rangle} \simeq \mathcal{H}_{\lambda,\beta,N}(\boldsymbol{D}_i) \quad \text{et aussi} \quad \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle \Gamma_i, -\tau\rangle} \simeq \mathcal{H}_{\lambda,\beta,D}(\boldsymbol{D}_i)\,.$$

Le premier rentre aussitôt dans hypothèses du théorème de Bérard 10.3.6 et donne l'égalité des dimensions des $\mathcal{H}_{\lambda,\beta,N}(\boldsymbol{D}_i)$. Par contre, dans le second, l'action des $\langle \boldsymbol{G}, -\tau\rangle$ n'est pas géométrique, ce groupe agit seulement sur l'espace vectoriel $\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})$ et le théorème de Bérard ne s'applique pas tel quel. Pourtant, le triplet $(\langle \boldsymbol{G}, -\tau\rangle, \langle \Gamma_1, -\tau\rangle, \langle \Gamma_2, -\tau\rangle)$ est aussi de Gassmann et agit sur l'espace de dimension finie $\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})$, de sorte que formule de traces s'applique et donne l'égalité des dimensions des $\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle \Gamma_i, -\tau\rangle}$ et donc des $\mathcal{H}_{\lambda,\beta,D}(\boldsymbol{D}_i)$.

11. Transplantations

11.1. Un isomorphisme universel

Comme nous avons pu le constater dans la démonstration du théorème 10.4.24 (et aussi dans 10.4.26), la suite d'isomorphismes canoniques d'espaces vectoriels

$$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle \Gamma_i, \pm\tau\rangle} \cong \big(\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\Gamma_i}\big)^{\pm\tau} \cong \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\,{}_{\Gamma_i}\backslash\boldsymbol{M})^{\pm\tau} \cong \mathcal{H}_{\lambda,\beta,\,{}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{D}}}(\boldsymbol{D}_i) \qquad (47)$$

est indépendante de λ et de β, ce qui nous permet de la qualifier d'« *universelle* ». Mais qu'en est-t-il d'éventuels isomorphismes

$$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle \Gamma_1, \pm\tau\rangle} \simeq \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle \Gamma_2, \pm\tau\rangle}\,,$$

justifiés l'égalité des dimensions fournie par la formule de traces 10.3.3. Existe-t-il un isomorphisme explicite

$$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle \Gamma_1, \pm\tau\rangle} \xrightarrow{\Phi_{\lambda,\beta}} \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle \Gamma_2, \pm\tau\rangle}\,, \qquad (*)$$

que l'on puisse définir indépendamment de λ et β ?

Oui, c'est le cas ! Nous verrons dans 11.2.8 et 11.6 qu'il existe des isomorphismes explicites

$$\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})^{\Gamma_1} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})^{\Gamma_2}$$

qui commutent au Laplacien, à l'action de τ et qui respectent les conditions au bord $\beta \in \{D, N\}$. On les appelle des « *transplantations* » ([63]). Les transplantations se restreignent alors naturellement aux sous-espaces $\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle \Gamma_1, \pm\tau\rangle}$ et fournissent automatiquement tous les isomorphismes $(*)$.

11.1.1. Commentaire. On comprend immédiatement tout l'intérêt des transplantations, mais on verra que la preuve de leur existence n'est pas « *effective* », *i.e.* elle ne résulte pas d'une méthode permettant de les construire ! Il faut donc un travail supplémentaire pour les expliciter. Ce que fait Bérard ([Bé$_2$, Bé$_3$]) pour les surfaces de Buser $\boldsymbol{M}_i$ et pour les domaines $\boldsymbol{D}_i$ de GWW (voir 11.5, 11.6.2, et 11.7.12).

63. Le terme apparaît pour la première fois dans l'article de Buser [Bu$_1$] (1986).

11.2. Opérateurs de transplantation

11.2.1. Algèbre de groupe. Soit $\boldsymbol{F}$ un groupe fini et notons $\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$ l'espace vectoriel de base, l'ensemble $\{\delta_g \mid g \in \boldsymbol{F}\}$, où '$\delta_g$' est un symbole. Tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$ s'écrit d'une et d'une seule manière sous la forme

$$\vec{v} = \sum\nolimits_{g\in\boldsymbol{F}} x_g\,\delta_g\,, \quad \text{avec } x_g \in \mathbb{R}.$$

On définit une multiplication sur $\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$ en posant l'égalité

$$\delta_g \cdot \delta_{g'} := \delta_{gg'}$$

et en l'étendant par distributivité et associativité. On pose donc

$$\Big(\sum\nolimits_{g\in\boldsymbol{F}} x_g\,\delta_g\Big)\cdot\Big(\sum\nolimits_{g'\in\boldsymbol{F}} x'_{g'}\,\delta_{g'}\Big) := \sum\nolimits_{g''\in\boldsymbol{F}}\Big(\sum\nolimits_{gg'=g''} x'_{g'}x_g\Big)\delta_{g''}$$

11.2.2. Lemme et définition. *$(\mathbb{R}[\boldsymbol{F}],+,0,\cdot,\delta_{\boldsymbol{e}})$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre associative, on l'appelle « la $\mathbb{R}$-algèbre du groupe $\boldsymbol{F}$ ». Elle est commutative, si et seulement si $\boldsymbol{F}$ l'est. Comme d'habitude l'indication de la multiplication par le signe '$\cdot$' sera omise si jugée superflue.*

Démonstration. Exercice. □

11.2.3. Invariants et opérateurs de transplantation. Un élément $h \in \boldsymbol{F}$ agit sur $\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$ de deux manières $\left\{\begin{array}{l}\text{« à gauche » : } h\cdot\delta_g := \delta_{hg}\\ \text{« à droite » : } \delta_g\cdot h := \delta_{gh}\end{array}\right\}$, pour tout $h \in \boldsymbol{F}$.

- Si $\boldsymbol{H}_1$ et $\boldsymbol{H}_2$ sont des sous-groupes de $\boldsymbol{F}$, les sous-espace des « $\boldsymbol{H}_1$-*invariants à gauche* » et « $\boldsymbol{H}_2$-*invariants à droite* » est, par définition
$$^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}_2} := \big\{\vec{v}\in\mathbb{R}[\boldsymbol{F}] \;\big|\; h_1\cdot\vec{v}\cdot h_2 = \vec{v}\,,\ \forall h_i\in\boldsymbol{H}_i\big\}\,.$$
- Si $\boldsymbol{H}$ est un sous-groupe de $\boldsymbol{F}$, le « *opérateur de symétrisation de $\boldsymbol{H}$* » est
$$\epsilon_{\boldsymbol{H}} := \big(1/|\boldsymbol{H}|\big)\sum\nolimits_{h\in\boldsymbol{H}}\delta_h\,.$$

11.2.4. Théorème et définitions

a) *L'opérateur de symétrisation $\epsilon_{\boldsymbol{H}}$ est $\boldsymbol{H}$-invariant à gauche et à droite et c'est un « idempotent » de $\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$,* i.e. $\epsilon_{\boldsymbol{H}}^2 = \epsilon_{\boldsymbol{H}}$. *On a*
$$^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}_2} = \epsilon_{\boldsymbol{H}_1}\cdot\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]\cdot\epsilon_{\boldsymbol{H}_2}\,.$$

b) *Le sous-espace $\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}}$ (resp. $^{\boldsymbol{H}}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$) est l'idéal à gauche (resp. à droite) engendré par $\epsilon_{\boldsymbol{H}}$,* i.e.
$$\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}} = \mathbb{R}[\boldsymbol{F}]\cdot\epsilon_{\boldsymbol{H}}\,,\quad {}^{\boldsymbol{H}}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}] = \epsilon_{\boldsymbol{H}}\cdot\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]\,.$$
On a $\dim\big(\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}}\big) = \big|\boldsymbol{F}/\boldsymbol{H}\big| = \big|{}_{\boldsymbol{H}}\backslash\boldsymbol{F}\big| = \dim\big({}^{\boldsymbol{H}}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]\big)$.

c) *Une application $\varphi : {}^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}] \to {}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$ est dite « un morphisme de $\boldsymbol{F}$-modules (à droite) » si elle est compatible à l'action à droite de $\boldsymbol{F}$,* i.e. *si pour tout $g\in\boldsymbol{F}$, on a $\varphi(\vec{v}\cdot g) = \varphi(\vec{v})\cdot g$. Notons* $\mathrm{Mor}^{\delta}_{\boldsymbol{F}}({}^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}], {}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}])$ *l'ensemble des morphismes de $\boldsymbol{F}$-modules en question.*

Les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{F}}^{\delta}({}^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}], {}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]) & \underset{\Omega}{\overset{\Xi}{\rightleftarrows}} & \epsilon_{\boldsymbol{H}_2}\cdot\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]\cdot\epsilon_{\boldsymbol{H}_1} = {}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}_1} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(\epsilon_{\boldsymbol{H}_1}) \\ (\vec{v}\mapsto\vec{w}\cdot\vec{v}) & \longmapsfrom & \vec{w} \end{array}$$

sont inverses l'une de l'autre. (64)

Lorsque $\varphi\in\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{F}}^{\delta}({}^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}], {}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}])$ *est bijectif, l'élément* $\Xi(\varphi)\in{}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}_1}$ *est appelé «* ***opérateur de transplantation*** *».*

d) *Il y a équivalence entre*

i) $\mathcal{T}_{21}\in{}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}_1}$ *est un opérateur de transplantation,*

ii) $|\boldsymbol{H}_1|=|\boldsymbol{H}_2|$ *et* $\mathcal{T}_{21}\,{}^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]={}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$,

iii) *Il existe* $\mathcal{T}_{12}\in{}^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}_2}$ *tel que* $\mathcal{T}_{12}\,\mathcal{T}_{21}=\epsilon_{\boldsymbol{H}_1}$ *et* $\mathcal{T}_{21}\,\mathcal{T}_{12}=\epsilon_{\boldsymbol{H}_2}$.

Indications. a) Invariance et idempotence claires, d'où $\vec{v}\in{}^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}_2}$ équivaux à $\vec{v}=\epsilon_{\boldsymbol{H}_1}\vec{v}\,\epsilon_{\boldsymbol{H}_2}$. (b) début évident par (a), puis si $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{H}\amalg g_1\boldsymbol{H}\amalg\cdots\amalg g_r\boldsymbol{H}$ est la partition de $\boldsymbol{F}$ en classes d'équivalence à gauche modulo $\boldsymbol{H}$, on vérifie que $\{\epsilon_{\boldsymbol{H}},g_1\epsilon_{\boldsymbol{H}},\dots,g_r\epsilon_{\boldsymbol{H}}\}$ est une base de $\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}}$. (c) on a $\varphi(\epsilon_{\boldsymbol{H}_1})\cdot h_1=\varphi(\epsilon_{\boldsymbol{H}_1}\cdot h_1)=\varphi(\epsilon_{\boldsymbol{H}_1})$, pour $h_1\in\boldsymbol{H}_1$; puis $\Omega(\Xi(\varphi))(\vec{v})=\varphi(\epsilon_{\boldsymbol{H}_1})\cdot\vec{v}=\varphi(\epsilon_{\boldsymbol{H}_1}\cdot\vec{v})=\varphi(\vec{v})$. (d) (ii)⇔(i) La multiplication à gauche $\mathcal{T}_{21}\cdot(_):{}^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]={}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$ est une surjection linéaire entre espaces vectoriels de même dimension, c'est donc un isomorphisme. (iii)⇔(i) Penser à $\Xi(\varphi^{-1})\,\Xi(\varphi)=\mathrm{id}_{{}^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]}$. □

11.2.5. Exercice. Suppososns $\boldsymbol{H}_1\subseteq\boldsymbol{H}_2$. Alors, il existe un opérateur de transplantation dans ${}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}_1}$, si et seulement si, $\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_2$.

Indication. Si ${}^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]\simeq{}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$, *l'inclusion naturelle* ${}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]\subseteq{}^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$ *est une égalité (penser à la dimension), mais alors* $|\boldsymbol{H}_1|\epsilon_{\boldsymbol{H}_1}=\sum_{h\in\boldsymbol{H}_1}\delta_h$ *est* $\boldsymbol{H}_2$*-invariant. En déduire que* $\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_2$.

Le corollaire suivant donne deux propriété fondamentales des opérateurs de transplantation.

11.2.6. Corollaire

a) *Si* $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2)$ *est un triplet de Gassmann, il existe au moins un opérateur de transplantation* $\mathcal{T}_{21}\in{}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}_1}$.

b) *Soit* $\boldsymbol{F}$ *un groupe d'automorphismes d'un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* V, *pas nécessairement de dimension finie, soit* $\mathcal{T}_{21}\in{}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}_1}$ *un opérateur de transplantation. Alors, l'application* $\mathcal{T}_{21}:V\to V$ *se restreint en un isomorphisme*

$$\mathcal{T}_{21}:V^{\boldsymbol{H}_1}\xrightarrow[\sim]{}V^{\boldsymbol{H}_2}\ .$$

64. Une règle mnémotechnique pratique pour se souvenir de l'ordre des indices est la relation

$${}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}_1}\,.\,{}^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]\subseteq{}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$$

qui montre la logique de l'accouplement. Dans le cas de triplets de Gassmann, l'inclusion est une égalité d'après (d-ii).

Indication. (a) On considère $\boldsymbol{F}$ comme groupe d'automorphismes $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$ par son action **à gauche**. Chaque $g \in \boldsymbol{F}$, en agissant **à droite** sur $\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$ par l'application $\Delta(g) : \vec{v} \mapsto \vec{v} \cdot g$ défini un élément de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[\boldsymbol{F}])^{\boldsymbol{F}}$ (*cf.* 10.3.3). La formule des traces donne l'égalité

$$\mathrm{tr}(\Delta(g)|_{{}^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]}) = \mathrm{tr}(\Delta(g)|_{{}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]}), \quad \forall g \in \boldsymbol{F},$$

et les applications

$$\chi_i : \boldsymbol{F} \to \mathbb{R}, \quad g \mapsto \mathrm{tr}(\Delta(g)|_{{}^{\boldsymbol{H}_i}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]}),$$

appelées « *caractères* » de $\boldsymbol{F}$, coïncident. Un théorème célèbre de Frobenius ([65]) établit que deux $\boldsymbol{F}$-modules de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle, sont isomorphes si et seulement si leurs caractères coïncident ([66]). Il existe donc une bijection $\varphi : {}^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}] \to {}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$ compatible à l'action à droite de $\boldsymbol{F}$ et $\mathcal{T}_{21} := \Xi(\varphi) \in {}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}_1}$ est un opérateur de transplantation (11.2.4-(c)).

b) On applique 11.2.4-(d). On a $\mathcal{T}_{21}(V^{\boldsymbol{H}_1}) \subseteq V^{\boldsymbol{H}_2}$ et $\mathcal{T}_{12}(V^{\boldsymbol{H}_2}) \subseteq V^{\boldsymbol{H}_1}$, et l'on sait que $\mathcal{T}_{12}\,\mathcal{T}_{21} = \epsilon_{\boldsymbol{H}_1}$ et $\mathcal{T}_{21}\,\mathcal{T}_{12} = \epsilon_{\boldsymbol{H}_2}$. Or $\epsilon_{\boldsymbol{H}_i}\big|_{V^{\boldsymbol{H}_i}} = \mathrm{id}_{V^{\boldsymbol{H}_i}}$. □

11.2.7. Transplantations et isospectralité. L'existence des transplantations permet de compléter les théorèmes de Sunada (10.3.5), de Buser (10.4.20) et de Gordon–Webb–Wolpert (10.4.24).

11.2.8. Théorème. *Soit $\boldsymbol{N}$ est une variété plate (à bord, coins…) sur laquelle agit un groupe fini d'isométries $\boldsymbol{F}$. Soit $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2)$ un triplet de Gassmann et soit $\mathcal{T}_{21} \in {}^{\boldsymbol{H}_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}_1} \subseteq \mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$ un opérateur de transplantation. Alors, l'application*

$$\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{N})^{\boldsymbol{H}_1} \xrightarrow[\sim]{\Phi} \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{N})^{\boldsymbol{H}_2}, \quad f \mapsto \mathcal{T}_{21} \cdot f$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels qui commute au Laplacien et respecte les conditions au bord $\beta \in \{D, N\}$. En particulier, Φ induit, par restriction, un isomorphisme

$$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{N})^{\boldsymbol{H}_1} \xrightarrow[\sim]{\Phi_{\lambda,\beta}} \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{N})^{\boldsymbol{H}_2}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \beta \in \{D, N\}.$$

Indication. La première partie est 11.2.6. La commutation avec $\Delta_{\boldsymbol{N}}$ résulte de ce que Φ est donnée par l'action de $\mathcal{T}_{21} \in \mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$, *i.e.* par une combinaison linéaire d'isométries de $\boldsymbol{N}$. Enfin, comme l'action de $g \in \boldsymbol{F}$ respecte bords et coins (8.4.4), si f vérifie les conditions $\beta \in \{D, N\}$ sur $\partial\boldsymbol{N}$, il en sera de même de chaque fonction $g \cdot f$, et donc de $\mathcal{T}_{21}(f)$. □

11.2.9. Remarque. Il est à souligner l'importance dans l'assertion 11.2.6-(b) du fait que l'espace vectoriel V n'est plus supposé de dimension finie. Ceci élargit remarquablement la portée de la formule de traces qui n'aurait pas permis, telle quelle, de démontrer l'existence d'un isomorphisme $\Phi : \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{N})^{\boldsymbol{H}_1} \to \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{N})^{\boldsymbol{H}_2}$ entre deux espaces de dimension infinie.

11.2.10. Remarque. Le théorème est adapté au cas ou les groupes $\boldsymbol{H}_i$ opèrent librement puisqu'alors $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{N})^{\boldsymbol{H}_i} = \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{H}_i\backslash\boldsymbol{N})$ (8.4.4-(b-ii)). Il s'applique donc tel quel aux contextes de Sunada et de Buser. Il s'applique aussi au contexte de GWW moyennant la remarque 11.1.

65. Extrait de Wikipedia : *Georg Frobenius (1849-1917) est un mathématicien allemand, il a contribué de manière significative à la théorie des représentations de groupes et à la notion de caractère d'une représentation, qui constituent des outils essentiels pour l'étude des groupes.*

66. Lire l'article de Wikipedia : Caractère d'une représentation d'un groupe fini.

Dans tous les cas, la forme explicite des transplantations exige une connaissance détaillée des surfaces $\boldsymbol{M}_i$ et $\boldsymbol{D}_i$, ce à quoi sont destinées les deux sections suivantes.

11.3. Construction explicite des surfaces M_i de Buser

11.3.1. Préliminaires sur $\mathbf{Sl(3,\mathbb{F}_2)}$. Passons en revue quelques aspects de théorie des groupes qui interviennent dans la construction des surfaces de Buser $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{M}_i$, notamment pour ce qui est du triplet $(\boldsymbol{G}, \Gamma_1, \Gamma_2)$.

- Le groupe $\boldsymbol{G} = \mathrm{Sl}(3,\mathbb{F}_2)$ ([67]) des matrices 3×3 à coefficients dans le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2 := \{0,1\}$ et de déterminant égal à 1 ([68]).

  On a $|\boldsymbol{G}| = (2^3-2^0)(2^3-2^1)(2^3-2^2) = 168$. Nous verrons dans 11.3.2 qu'il est engendré par les deux éléments suivants :

$$A := \begin{bmatrix} 0&1&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&1 \end{bmatrix}.$$

- Le sous-groupes Γ_i, constitués des matrices de $\mathrm{Sl}(3,\mathbb{F}_2)$ de la forme

$$\Gamma_1 := \begin{bmatrix} 1&*&*\\0&*&*\\0&*&* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&\mathbb{F}_2&\mathbb{F}_2\\0&\boxed{\mathrm{Sl}(2,\mathbb{F}_2)}&\\0& \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 := \begin{bmatrix} 1&0&0*&*&**&*&* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0\\\mathbb{F}_2&\boxed{\mathrm{Sl}(2,\mathbb{F}_2)}&\\\mathbb{F}_2& \end{bmatrix}.$$

  On a $|\Gamma_i| = 2\times2\times(2^2-2^0)(2^2-2^1) = 24$.

11.3.2. Lemme

a) *Les éléments A, et B sont respectivement d'ordre 4, et 3.*

b) *Le « commutateur » de A et B,* i.e.

$$C := [A,B] := ABA^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 0&1&1\\1&1&1\\0&1&0 \end{bmatrix},$$

est d'ordre 7. On a

$$C^0 = \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix},\ C^1 = \begin{bmatrix} 0&1&1\\1&1&1\\0&1&0 \end{bmatrix},\ C^2 = \begin{bmatrix} 1&0&1\\1&1&0\\1&1&1 \end{bmatrix},\ C^3 = \begin{bmatrix} 0&0&1\\1&0&0\\1&1&0 \end{bmatrix},$$
$$C^4 = \begin{bmatrix} 0&1&0\\0&1&1\\1&0&0 \end{bmatrix},\ C^5 = \begin{bmatrix} 1&1&1\\1&0&1\\0&1&1 \end{bmatrix},\ C^6 = \begin{bmatrix} 1&1&0\\0&0&1\\1&0&1 \end{bmatrix}, \tag{48}$$

c) *Les restrictions des surjections canoniques suivantes*

$$\langle C\rangle \subseteq \boldsymbol{G} \xrightarrow{\nu_i} \boldsymbol{G}\backslash\Gamma_i \quad \text{et} \quad \langle C\rangle \subseteq \boldsymbol{G} \xrightarrow{\nu_i} \boldsymbol{G}/\Gamma_i$$

sont bijectives. En particulier, $\begin{cases} \{\epsilon_{\Gamma_i}\delta_{C^0},\dots,\epsilon_{\Gamma_i}\delta_{C^6}\} \text{ est une base de } {}^{\Gamma_i}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}] \\ \{\delta_{C^0}\epsilon_{\Gamma_i},\dots,\delta_{C^6}\epsilon_{\Gamma_i}\} \text{ est une base de } \mathbb{R}[\boldsymbol{G}]^{\Gamma_i} \end{cases}$

67. Extrait du livre de Buser [Bu$_3$] (p. 289) : *The group* $\mathrm{Sl}(3,\mathbb{F}_2)$ *is isomorphic to* $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{F}_7)$ *and, up to isomorphism, the only simple group of order* 168. Γ_1 *and* Γ_2 *have index* 7 *in* $\mathrm{Sl}(3,\mathbb{F}_2)$. *Perlis [Pe] has shown that this is the smallest possible index of almost conjugate non-conjugate subgroups in any group (see also Guralnick [Gu]).*

68. Comme $\mathbb{F}_2$ n'a que deux éléments, il revient au même de demander aux matrices d'être inversibles, autrement dit, on a $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{F}_2) = \mathrm{Gl}(n,\mathbb{F}_2)$.

d) *L'action naturelle de* $\boldsymbol{G} = \mathrm{Sl}(3,\mathbb{F}_2)$ *sur* $\mathbb{V} := \mathbb{F}_2^3$ *n'a que deux orbites :*

$$\mathbb{F}_2^3 = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{0} \amalg \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{p}_0 = \{\boldsymbol{0}\} \amalg (\mathbb{V}\backslash\{\boldsymbol{0}\})$$

où $\boldsymbol{p}_0 := \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. *La restriction de l'application*

$$\langle C\rangle \subseteq \boldsymbol{G} \to (\mathbb{V}\backslash\{\boldsymbol{0}\}), \quad g \mapsto g(\boldsymbol{e}_1)$$

est bijective.

e) $\mathrm{Sl}(3,\mathbb{F}_2)$ *est un groupe (simple) engendré par les éléments* A *et* B.

Démonstration. a,b) Calcul. (c) On a $\nu_i(C^a) = \nu_i(C^b)$, si et seulement si $C^{a-b} \in \Gamma_i$. Or, l'ordre d'un élément $\langle C\rangle \cap \Gamma_i$ doit diviser 7 et 24, c'est donc l'identité. Les restrictions en question sont donc injectives et comme d'autre part, $\#(\Gamma_i\backslash\boldsymbol{G}) = 128/24 = 7$, la bijectivité s'ensuit. Pour les bases, voir la preuve de 11.2.4-(b).

d) L'égalité $\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}_1 = \mathbb{V}\backslash\{0\}$ est classique ([69]). L'application $g \mapsto g\cdot\boldsymbol{e}_1$ établit alors une bijection entre $\boldsymbol{G}/\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{e}_1)$ et $\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}_1$. Or, $\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{e}_1) = \Gamma_1$, donc

$$\langle C\rangle \xrightarrow[\sim]{\nu_i} \boldsymbol{G}/\Gamma_1 = \boldsymbol{G}/\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}_1 = \mathbb{V}\backslash\{0\}.$$

d'après (c).

e) Compte tenu des ordres (relativement premiers) de A, B et C, le sous-groupe $\boldsymbol{H} := \langle A, B\rangle$ est de cardinal multiple de $4\times3\times7 = 168/2$, donc d'« *indice* » 1 ou 2 dans $\boldsymbol{G}$. Si $\boldsymbol{H} \neq \boldsymbol{G}$, il est d'indice 2 et il est « *distingué* » dans $\boldsymbol{G}$ ([70]). A partir de là, plusieurs démarches sont possibles. On peut par exemple utiliser le fait que $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{F}_2)$ est simple ([71]), ce qui exclu le cas $\boldsymbol{H} \lhd \boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{H} \neq \boldsymbol{G}$. Une autre possibilité, serait de faire appel au théorème de Sylow qui affirme que dans un groupe d'ordre $p^a s$ avec $(p,s) = 1$, l'ensemble des sous-groupes de cardinal p^a est de cardinal r avec $r|s$ et $r = 1 \pmod p$. Dans notre cas, si $\boldsymbol{H} \neq \boldsymbol{G}$, on aurait $|\boldsymbol{H}| = 7\times12$ et $r = 1$ est la seule possibilité. Ceci signifie que $\langle C\rangle$ est distingué dans $\boldsymbol{H}$, autrement dit, qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $ACA^{-1} = C^a$ et $BCB^{-1} = C^b$. Or, le calcul de ces matrices conjuguées donne

$$ACA^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix} \quad et \quad BCB^{-1} = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix},$$

et l'on voit qu'elles ne figurent pas dans la liste (48) des puissances de C.

Quel que soit le raisonnement, la conclusion est bien que $\langle A, B\rangle = \boldsymbol{G}$. □

11.3.3. Paramétrisation et recollements. Comme nous l'avons déjà annoncé dans 10.4.19, la surface $\boldsymbol{M}$ de Buser correspond au graphe de Cayley $\mathcal{G}(\mathrm{Sl}(3,\mathbb{F}_2), \{A, B\})$ par un recollement d'une famille de briques fléchées $\mathscr{T} := \{\boldsymbol{T}_g\}_{g\in\boldsymbol{G}}$ modelées sur la brique $\boldsymbol{T}$ (44), ou sa version arrondie (p. 90).

La surface $\boldsymbol{M}$ est munie d'une action libre à gauche de $\boldsymbol{G}$ par des isométries (10.4.16-(b-iii)) qui laissent stable le pavage défini par $\mathscr{T}$. Il s'ensuit que les

69. Exercice : Montrer que $\mathrm{Gl}(n,K)$ opère transitivement sur $K^n\backslash\{0\}$, et de même pour $\mathrm{Sl}(n,K)$ pourvu que $n > 1$ ou $K = \mathbb{F}_2$. *Indication : Théorème de la base incomplète.*

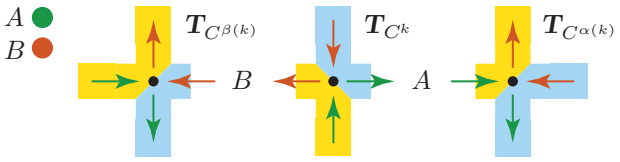
70. C'est un résultat général : *Si* $\boldsymbol{K}$ *est un groupe fini, et que* $\boldsymbol{H}$ *est un groupe d'indice* 2, *alors* $\boldsymbol{H} \lhd \boldsymbol{G}$. En effet, la partition de $\boldsymbol{K}$ en $\boldsymbol{H}$-orbites à gauche puis à droite est $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{H} \amalg \boldsymbol{H}g$, puis $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{H} \amalg g\boldsymbol{H}$, où $g \notin \boldsymbol{H}$. On en déduit que $g\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}g$, donc $g\boldsymbol{H}g^{-1} = \boldsymbol{H}$. Ce résultat ne se généralise pas à d'autres indices que 2 !

71. Cas particulier d'un résultat plus général qui montre que tous les groupes $\mathrm{PSL}(n,K) := \mathrm{Sl}(n,K)/Z(\mathrm{Sl}(n,K))$ sont simples sauf dans deux cas : $n = 2$, avec $\mathrm{Card}(K) \in \{2,3\}$. Références : Daniel Perrin *Cours d'algèbre*, mais aussi le Polycopié du cours d'Algèbre à l'ENS d'Olivier Biquard, plus précisément le théorème 2.1.9 page 37, téléchargeable à l'adresse www.math.ens.fr/enseignement/fiche_cours.html ?cours=41

espaces quotient $\boldsymbol{M}_i := {}_{\Gamma_i}\backslash\boldsymbol{M}$ sont des recollements des classes d'équivalences des briques de $\mathscr{T}$ modulo Γ_i. Or, l'ensemble des classes ${}_{\Gamma_i}\backslash\mathscr{T}$ est paramétré par ${}_{\Gamma_i}\backslash\boldsymbol{G}$ lequel est, à son tour, paramétré par les sept puissances de $C := [A, B]$ d'après 11.3.2-(c).

L'idée de la reconstruction de $\boldsymbol{M}_i$, *sans avoir à connaître explicitement* $\boldsymbol{M}$, est alors la suivante

- *Pour chaque $k = 0, \dots, 6$, on considère la brique $\boldsymbol{T}_{C^k}$ et l'on détermine les deux briques adjacentes $\boldsymbol{T}_{C^k A}$ et $\boldsymbol{T}_{C^k B}$ qui correspondent modulo Γ_i à des briques $\boldsymbol{T}_{C^{\alpha(k)}}$ et $\boldsymbol{T}_{C^{\beta(k)}}$.*



  On recommence alors avec les deux nouvelles briques $\boldsymbol{T}_{C^{\alpha(k)}}$ et $\boldsymbol{T}_{C^{\beta(k)}}$. Au bout de sept itérations on aura terminé la construction de $\boldsymbol{M}$!

On doit donc résoudre les 28 équations

$$\begin{cases} C^k X\, C^{-\alpha(k)} \in \Gamma_i \\ C^k X\, C^{-\beta(k)} \in \Gamma_i \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X \in \{A, B\} \\ k = 0, \dots, 6 \text{ et } i = 1, 2 \end{cases}$$

qui sont faciles, vue la forme très simple des matrices des groupes Γ_i.

Du point de vue pratique, nous avons rédigé une procédure Maple qui parcourt, pour chaque $k = 0, \dots, 6$, les matrices $C^k A\, C^{-h}$ pour h allant de 0 jusqu'à ce que l'on arrive (fatalement) à une matrice dont les deux coefficients ad hoc s'annulent.

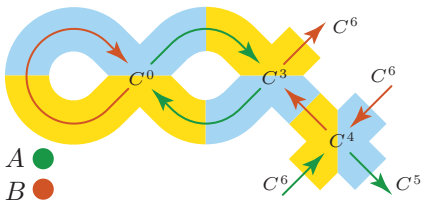
On obtient ainsi les deux tableaux suivants

${}_{\Gamma_1}\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha(k)$	3	1	6	0	5	2	4
$\beta(k)$	0	2	5	6	3	1	4

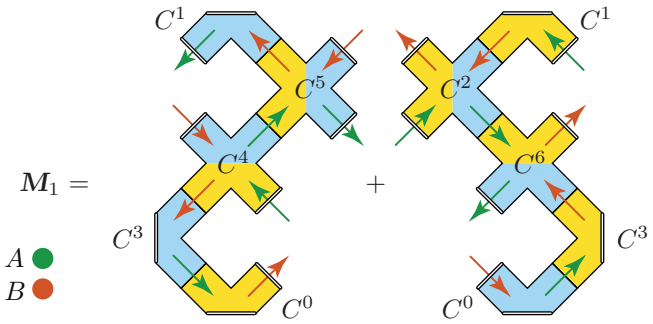
${}_{\Gamma_2}\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha(k)$	1	6	5	0	4	2	3
$\beta(k)$	0	4	5	1	3	6	2

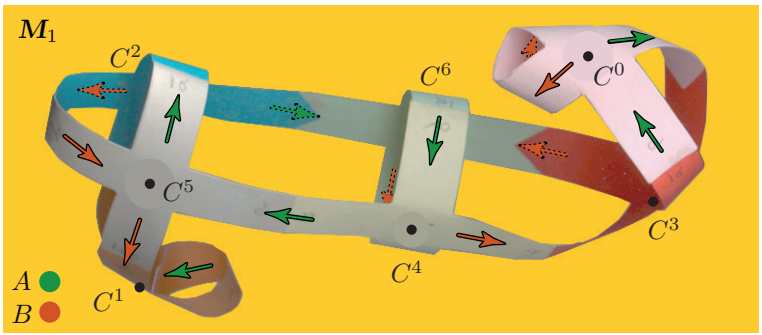
qui codent la suite des recollements à faire.

Voici une image des prémières étapes dans la construction de la surface $\boldsymbol{M}_1 := {}_{\Gamma_1}\backslash\boldsymbol{M}$ où nous avons déformé non isométriquement les branches pour en faciliter le dessin.

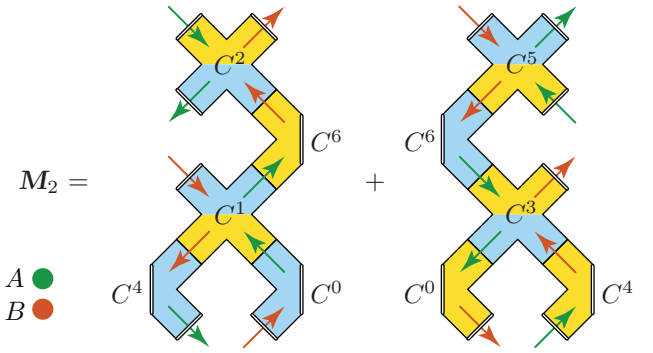


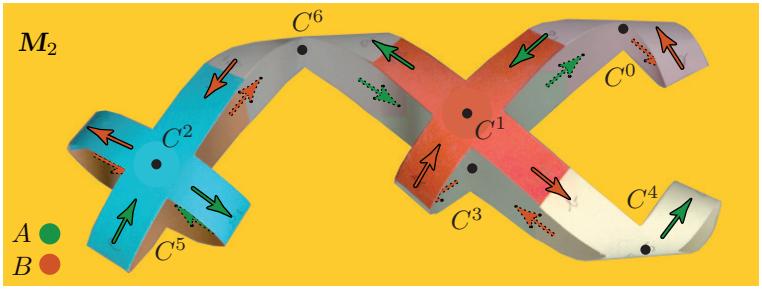
Une fois toutes les opération de recollement menées à bien, on retrouve les images de notre introduction 10.2 (p. 74).





(49)





(50)

11.4. Construction explicite des domaines D_i de GWW

11.4.1. Réflexions τ_i. Les domaines $\boldsymbol{D}_i$ de GWW s'obtiennent en applatissant les surfaces $\boldsymbol{M}_i$ par l'identification des points symétriques par rapports aux plans de réfléxion évidents dans les images (49) et (50). On a :

- sur $\boldsymbol{M}_1$: $C^0 \leftrightarrow C^0$, $C^1 \leftrightarrow C^1$, $C^3 \leftrightarrow C^3$, $C^2 \leftrightarrow C^5$, $C^4 \leftrightarrow C^6$;
- sur $\boldsymbol{M}_2$: $C^0 \leftrightarrow C^0$, $C^4 \leftrightarrow C^4$, $C^6 \leftrightarrow C^6$, $C^2 \leftrightarrow C^5$, $C^1 \leftrightarrow C^3$.

Ces réflexions, que nous notons $\tau_i : \boldsymbol{M}_i \to \boldsymbol{M}_i$, ont la particularité remarquable d'être induites par une réflexion $\tau : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$, elle même induite par un automorphisme intérieur de $\boldsymbol{G} := \mathrm{Sl}(3, \mathbb{F}_2)$ (tout comme dans 10.4.18 pour $\boldsymbol{G} = \mathbb{D}_4$).

11.4.2. Proposition (GWW). ([72])

a) *L'élement* $S := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, *est d'ordre* 2 *et l'automorphisme intérieur*

$$\tau : \mathrm{Sl}(3, \mathbb{F}_2) \to \mathrm{Sl}(3, \mathbb{F}_2), \quad \tau(g) := S\, g\, S^{-1}.$$

vérifie $\tau(A) = A^{-1}$, $\tau(B) = B^{-1}$, $\tau(\Gamma_i) = \Gamma_i$.

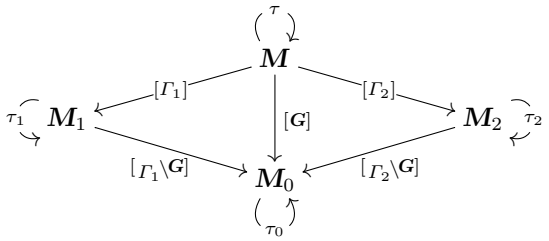
L'action induite de τ *sur* $\Gamma_i \backslash \boldsymbol{G}$ *est celle de la réflexion* τ_i *(11.4.1).*

b) *Par 10.4.7, l'automorphisme* τ *induit une isométrie* $\tau : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$. *C'est une isométrie qui « inverse l'orientation (les flèches) » des briques et qui vérifie*

$$\tau \circ g \circ \tau = \tau(g) = SgS^{-1}, \quad \textit{pour tout } g \in \boldsymbol{G} = \mathrm{Sl}(3, \mathbb{F}_2),$$

où g *désigne l'action à gauche de* $g \in \boldsymbol{G}$ *sur* $\boldsymbol{M}$.

Le diagramme suivant d'isométries est commutatif.



(51)

On notera désormais

$$\boldsymbol{G}^* := \langle \boldsymbol{G}, \tau \rangle, \quad (\text{resp. } \Gamma_i^* := \langle \Gamma_i, \tau \rangle) \tag{52}$$

les sous-groupes engendrés dans $\mathrm{Iso}(\boldsymbol{M})$.

c) *Tout élément de* $\boldsymbol{G}^*$ (resp. de Γ_i^*), *s'écrit d'une et d'une seule manière comme* $g\,\tau^a$ *avec* $g \in \boldsymbol{G}$ *(resp.* Γ_i*) et* $a \in \{0, 1\}$. *Les applications*

$$\psi : \boldsymbol{G}^* \to \boldsymbol{G} \times \langle \tau \rangle, \quad \psi : \Gamma_i^* \to \Gamma_i \times \langle \tau \rangle, \quad \psi : g\tau^a \mapsto (gS^a, \tau^a)$$

sont des isomorphismes de groupes.

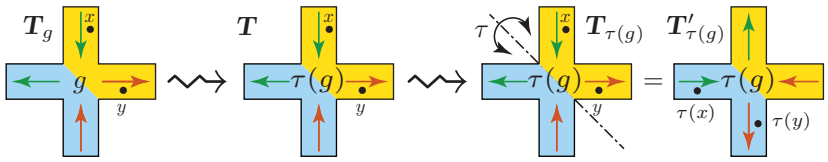
d) *Les triplets* $(\boldsymbol{G}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, $(\boldsymbol{G}^*, \Gamma_1^*, \Gamma_2^*)$ *sont de Gassmann.*

e) *Si* $\mathcal{T}_{21} \in {}^{\Gamma_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}]^{\Gamma_1}$ *est un opérateur de transplantation pour* $(\boldsymbol{G}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, *il l'est aussi pour* $(\boldsymbol{G}^*, \Gamma_1^*, \Gamma_2^*)$. *De plus,*

$$\tau\, \mathcal{T}_{21} = \mathcal{T}_{21}\, \tau.$$

72. [GWW] Lemma 4.4, p. 11.

Indication. a) Par le calcul. b) D'après (a) τ induit un isomorphisme de graphes de Cayley $\tau : \mathcal{G}(\boldsymbol{G}, \{A, B\}) \to \mathcal{G}(\boldsymbol{G}, \{A^{-1}, B^{-1}\})$ et les surfaces de Buser correspondantes coïncident lorsque l'on efface les flèches, c'est donc la même surface $\boldsymbol{M}$. Mais τ, en renversant les flèches, change le sens de parcours des briques, *i.e.* « *change l'orientation* ». L'illustration suivante montre comment opère τ.



On commence par passer de la brique $\boldsymbol{T}_g$ à la brique $\boldsymbol{T}_{\tau(g)}$, et là on la retourne, ce qui a comme effet de changer les sens des flèches, on trouve alors les emplacements des images des points $x, y \in \boldsymbol{T}_g$.

Enfin, une isométrie de la forme $\tau \circ g \circ \tau$ respecte les flèches de $\boldsymbol{M}$ et est donc entièrement déterminée par son action sur $\mathcal{G}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S})$ (10.4.16-(b-ii)), qui n'est autre que l'action à gauche de $\tau(g)$.

c) Les applications ψ sont bien définies puisque $S \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Ensuite

$$\begin{aligned}\psi(g\tau^a)\,\psi(h\tau^b) &= (gS^a, \tau^a)(hS^b, \tau^b) = (gS^a hS^b, \tau^{a+b}) \\ &= (gS^a hS^{-a} S^{a+b}, \tau^{a+b}) = (g\tau^a h\tau^{-a} S^{a+b}, \tau^{a+b}) = \psi(g\tau^a h\tau^b)\end{aligned}$$

d) Par (c), le triplet $(\boldsymbol{G}^*, \Gamma_1^*, \Gamma_2^*)$ est isomorphe à $(\boldsymbol{G}\times\langle\tau\rangle, \Gamma_1\times\langle\tau\rangle, \Gamma_2\times\langle\tau\rangle)$. Ainsi, deux éléments (g, τ^a) (h, τ^b) sont dans la même classe de conjugaison, si et seulement si, leurs premières et deuxièmes composantes sont respectivement conjuguées. On est donc ramené à prouver seulement que $(\mathrm{Sl}(3, \mathbb{F}_2), \Gamma_1, \Gamma_2)$ est un triplet de Gassmann. C'est un résultat qui demande une étude explicite de $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{F}_2)$ que nous ne ferons pas. La première référence est [Pe] (1977), mais la version la plus lisible est celle de Buser [Bu$_3$] dans 11.2.5 Example (p. 288).

e) Par (c), l'élément $S\tau \in \boldsymbol{G}^*$ est d'ordre 2 et « *central* », *i.e.* il commute à tout $g \in \boldsymbol{G}^*$. Nous avons aussi que $\Gamma_i^* = \langle \Gamma_i, S\tau\rangle$ car $S \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. On a alors

$$^{\Gamma_1^*}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}^*] = {}^{S\tau}\big({}^{\Gamma_i}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}]\big)[S\tau] = {}^{\Gamma_i}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}](1 + S\tau)\,.$$

Par conséquent, si $\mathcal{T}_{21} \in {}^{\Gamma_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}]^{\Gamma_1}$ est un opérateur de transplantation, on a

$$\mathcal{T}_{21}\,{}^{\Gamma_1^*}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}^*] = \mathcal{T}_{21}\,{}^{\Gamma_i}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}](1 + S\tau) = {}^{\Gamma_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}](1 + S\tau) = {}^{\Gamma_2^*}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}^*]\,,$$

et $\mathcal{T}_{21}$ est une transplantation pour $(\boldsymbol{G}^*, \Gamma_1^*, \Gamma_2^*)$. Enfin, on a aussi

$$\tau\,\mathcal{T}_{21} = \tau S\mathcal{T}_{21} = \mathcal{T}_{21}\tau S = \mathcal{T}_{21} S\tau = \mathcal{T}_{21}\tau$$

puisque $\mathcal{T}_{21}$ est $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ bi-invariant et que $S \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. □

11.5. Transplantation pour les surfaces M_i de Buser.

Dans 11.7, nous construirons un isomorphisme de $\boldsymbol{G}$-modules à droite

$$\mathcal{T}_{21} : {}^{\Gamma_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}] \to {}^{\Gamma_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}]\,,$$

i.e. une transplantation, qui s'exprime relativement aux bases (11.3.2-(c))

$$\mathcal{B}_i := \{\epsilon_{\Gamma_i}\delta_{C^0}, \ldots, \epsilon_{\Gamma_i}\delta_{C^6}\}$$

de ${}^{\Gamma_i}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}]$ (*cf.* 11.3.2-(c)) par l'expression matricielle

$$\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g \end{bmatrix} \xmapsto{\mathcal{T}_{21}} \begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&0&0&1\\ 1&1&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d+e+g\\ a+e+f\\ b+f+g\\ a+c+g\\ a+b+d\\ b+c+e\\ c+d+f \end{bmatrix} \tag{53}$$

L'un des intérêts des réalisations des surfaces de Buser de la section 11.3.3, est qu'elles établissent un lien très précis entre les briques qui constituent les surfaces $\boldsymbol{M}_i$ et les éléments de ${}_{\Gamma_i}\backslash\boldsymbol{G}$, donc les éléments de la base $\mathcal{B}_i$. Ceci permet l'explicitation de l'action à gauche de l'opérateur de transplantation (11.2.6-(b))

$$\Phi : \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M}_1) = \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})^{\Gamma_1} \xrightarrow[\simeq]{\mathcal{T}_{21}\cdot(_)} \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})^{\Gamma_2} = \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M}_2)$$

L'idée est la suivante. Etant donnée un fonction $f : \boldsymbol{M}_1 \to \mathbb{R}$, on la décompose en $f = f_0 + \cdots + f_6$, avec $f_i := \chi_i \cdot f$, où χ_i est la fonction caractéristique de la brique $\boldsymbol{T}_{C^i}$. L'opérateur $\mathcal{T}_{21} \in {}^{\Gamma_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}]^{\Gamma_1}$ s'écrit $\mathcal{T}_{21} = (x_0\delta_{C^0} + \cdots + x_6\delta_{C^6})\epsilon_{\Gamma_1}$, de sorte que si f est Γ_1-invariante, on a

$$\mathcal{T}_{21}\cdot f = \sum\nolimits_{j=0,\ldots,6} x_j(f \circ C^{-j}) = \sum\nolimits_{i,j=0,\ldots,6} x_j(f_i \circ C^{-j})$$

où $f_i \circ C^{-j}$ apparaît clairement comme la "transplantation isométrique" de la fonction f_i, de la brique T_{C^i} à la brique $T_{C^{i+j}}$.

On représente alors la transplantation (53) graphiquement par :

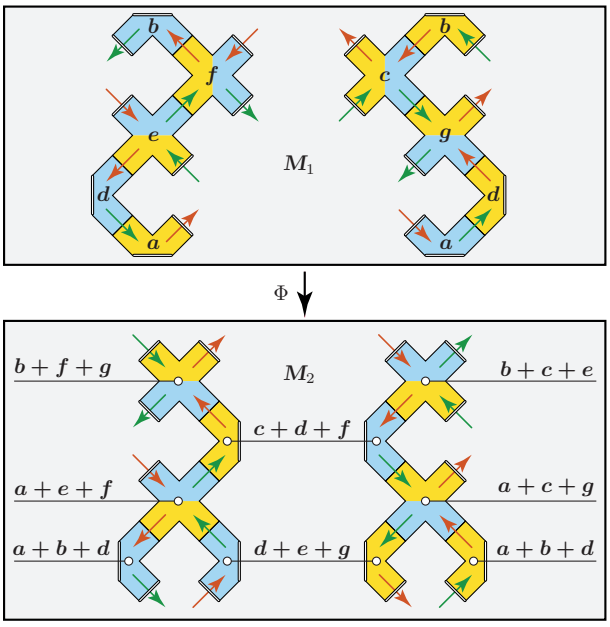


Figure 7

où les régions fermées $a, b, \ldots, g$ de $\boldsymbol{M}_1$ correspondent, dans l'ordre, aux briques $\boldsymbol{T}_{C^0}, \ldots, \boldsymbol{T}_{C^6}$ des images (49) et (50). La figure du bas indique comment (53) "transplante" ces fonctions sur $\boldsymbol{M}_2$. Par exemple : sur la première brique de $\boldsymbol{M}_2$, on met $f_b + f_f + f_g$, mais il y a un sens à respecter, c'est celui indiqué par les flèches et couleurs qui doivent coïncider.

Les fonctions $f_a, \dots, f_g$ ne sont plus différentiables individuellement mais leur somme l'est puisqu'elle donne f. Le fait que Φ est une transplantation assure que les fonctions transplantées se recollent en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et que les conditions aux bord $\{D, N\}$ sont bien respectées. Il est remarquable que c'est aussi quelque chose que l'on peut vérifier à la main uniquement à partir de la figure.

Si, de plus, $f \in \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M}_1)$, il est clair que chaque fonction transplantée, p.e. $f_b + f_f + f_g$, est, nulle à l'extérieur de la région de transplantation et c'est une fonction propre de $-\Delta_{\boldsymbol{M}_2}$ de valeur propre λ à l'intérieur de la même région, puisque $-\Delta_{\boldsymbol{M}_2}$ est un opérateur linéaire et invariant par isométrie. Comme le recollement des toutes ces fonctions est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a bien $\Phi(f) \in \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M}_2)$.

11.5.1. Remarque. Comme le souligne Bérard ([Bé$_2$]) la figure 7 est, à elle toute seule, une démonstration complète de l'isospectralité des deux surfaces, mais bien entendu, il est pratiquement impossible de mettre la main sur une preuve aussi élémentaire, sans le travail théorique qui est en amont.

11.6. Transplantation pour les domaines $\boldsymbol{D_i}$ de GWW.

11.6.1. Préliminaires. L'assertion 11.4.2-(e) établit qu'un opérateur de transplantation $\mathcal{T}_{21} \in {}^{\Gamma_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}]^{\Gamma_1}$ définit un isomorphisme

$$\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})^{\Gamma_1} \xrightarrow[\sim]{\Phi} \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})^{\Gamma_2}\,, \quad f \mapsto \mathcal{T}_{21}(f)\,,$$

qui commute *automatiquement* à l'action de τ, au Laplacien $\Delta_{\boldsymbol{G}}$ et qui respecte les conditions aux bords. La transplantation (53) induit donc des isomorphismes

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle\Gamma_1,\tau\rangle} \xrightarrow[\sim]{\Phi_{\lambda,\beta}} \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle\Gamma_2,\tau\rangle} \\ \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle\Gamma_1,-\tau\rangle} \xrightarrow[\sim]{\Phi_{\lambda,\beta}} \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle\Gamma_2,-\tau\rangle} \end{cases}$$

lesquels, combinés aux isomorphismes (*cf.* 11.1-(47), p. 93) :

$$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\langle\Gamma_i,\pm\tau\rangle} \cong \big(\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})^{\Gamma_i}\big)^{\pm\tau} \cong \mathcal{H}_{\lambda,\beta}({}_{\Gamma_i}\backslash\boldsymbol{M})^{\pm\tau} \cong \mathcal{H}_{\lambda,\beta,\,\mathrm{N}_{\mathrm{D}}}(\boldsymbol{D}_i)$$

fournissent les transplantations

$$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{D}_1) \xrightarrow[\sim]{\Phi_{\lambda,\beta}} \mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{D}_2)\,, \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}\,,\ \forall\beta \in \{D, N\}\,.$$

11.6.2. Transplantation pour les conditions de Dirichlet. D'après les remarques précédentes, nous devons appliquer la transplantation (53) aux fonctions τ-anti-invariantes et vérifiant les conditions de Dirichlet sur $\boldsymbol{M}_1$. Ceci signifie entre autres, si nous reprenons la figure 7, qu'il faudra encore décomposer les fonctions $f_a, \dots, f_g$ suivant qu'elles sont sur la partie jaune ou bleue de la brique. On a donc 14 fonctions $f_{a,0}, f_{a,1}, \dots, f_{g,0}, f_{g,1}$ (0 pour jaune, 1 pour bleu), et des relations d'anti-symétrie du genre

$$f_{b,0} = -f_{b,1}\,, \quad f_{f,0} = -f_{c,1}\,, \quad f_{f,1} = -f_{c,0}\,, \quad f_{e,0} = -f_{g,1}\,, \quad \dots$$

qui nous ramènent de nouveau à 7 fonctions caractéristiques, par exemple celles des sept régions de la partie gauche de $\boldsymbol{M}_1$ dans la figure 7. Il y a clairement beaucoup de manières de faire le changement de variables nécessaire. Dans la figure suivante nous reprenons celle proposée par GWW.

On trouve ainsi la transplantation suivante

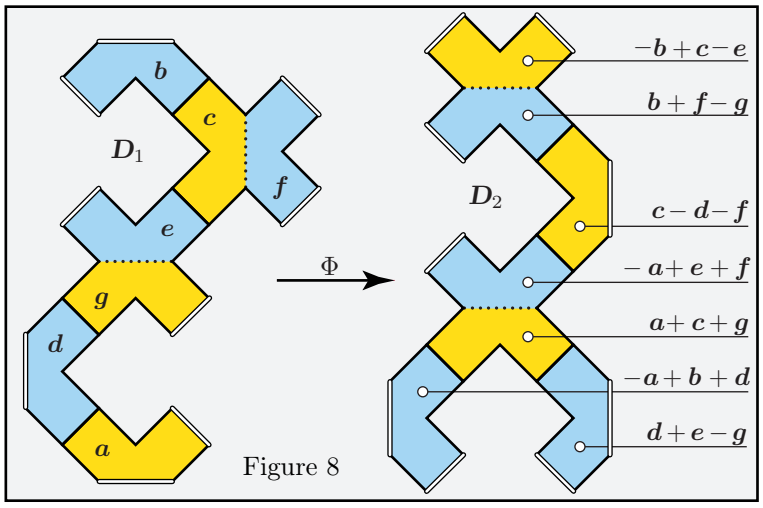


Figure 8

11.6.3. Transplantation pour les conditions de Neumann. Dans ce cas, la transplantation est bien plus simple car, en raison de l'identification $\mathcal{H}_{\lambda,N}(\boldsymbol{M})^{\langle\Gamma_i,\tau\rangle} = \mathcal{H}_{\lambda,N}(\boldsymbol{D}_i)$, il n'est donc plus nécessaire de faire des changements de signes dans les fonctions transplantées. Donc la même figure 8 s'applique à condition de substituer les signes '−' par des signes '+'.

11.6.4. Commentaire. Il est intéressant de relever la forme simple de l'isomorphisme $\mathcal{T}_{21} : {}^{\Gamma_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}] \to {}^{\Gamma_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}]$ (53). Il ne faut pas pour autant croire que son inverse l'est aussi. Voici la réponse de Maple :

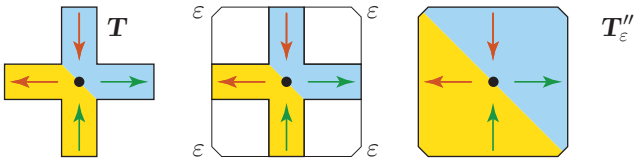
$$\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g \end{bmatrix} \xmapsto{\mathcal{T}_{21}^{-1}} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 2 & 2 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+d-e+f\\ a+b+d+2f+g\\ -a-b+c+e-2f\\ -b+e-f-g\\ 2a+2b-c+d-e+2f+g\\ -a+c-f-g\\ b-c+d+f \end{bmatrix}$$

11.6.5. Remarque. Extrait de GWW (alinéa (iii), p. 13) : *Bérard's approach to Sunada's Theorem exhibits explicitly the unitary isomorphism*

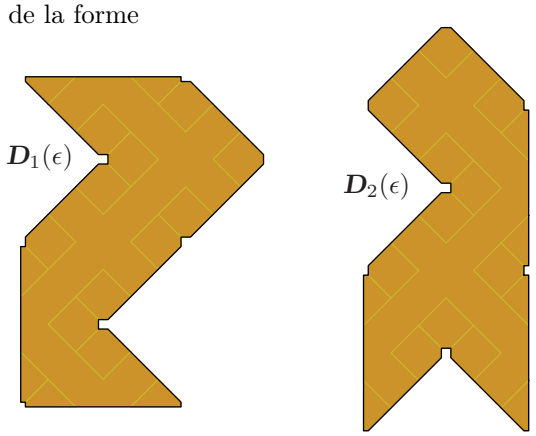
$$^{\Gamma_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}] \to {}^{\Gamma_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}]\,,$$

the "transplantation" of functions. One can compute from this how the drum $\boldsymbol{D}_2$ *must be struck in order to produce the same sound (i.e., the same frequencies with the same amplitudes) as would result from striking* $\boldsymbol{D}_1$ *at a given point with a given (unit) intensity. It turns out that in order to recover the sound produced by striking* $\boldsymbol{D}_1$ *at a point, one must strike* $\boldsymbol{D}_2$ *simultaneously at seven points with appropriate intensities.*

11.6.6. À propos de la forme des briques. Nous avons beaucoup de liberté dans le choix des formes de briques. Par exemple, nous aurions pu nous approcher d'un carré à ε près



et développer toute la théorie sans rencontrer aucun obstacle. Les domaines $\boldsymbol{D}_i$ seraient devenus de la forme



et seraient toujours des domaines isospectraux. Mais la théorie va tiquer pour prendre $\varepsilon = 0$. C'est pourtant possible, et c'est là tout l'avantage des transplantations. En effet, en prenant $\epsilon = 0$, la même transplantation de la figure 8 établit l'isospecrtalité des domaines $\boldsymbol{D}_i(0)$ pour les conditions de Dirichlet. La vérification est manuelle, la théorie n'est plus nécéssaire !

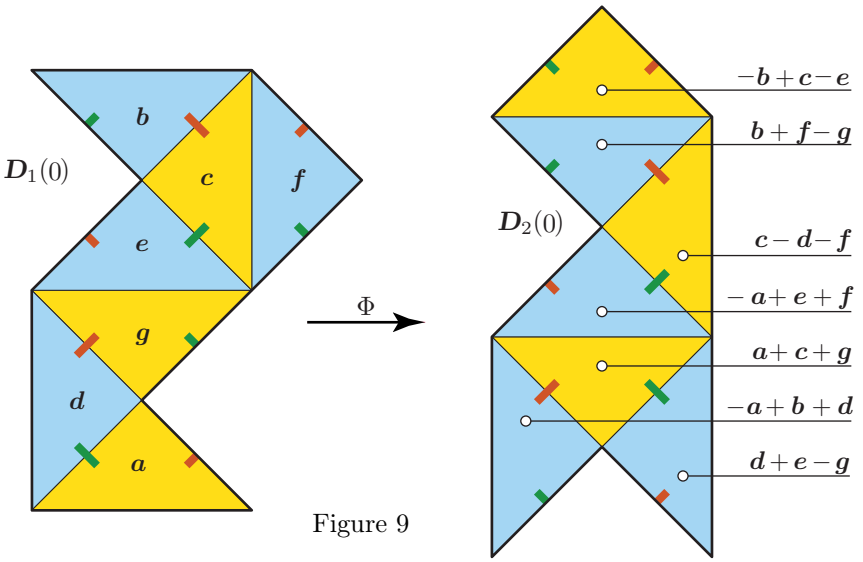
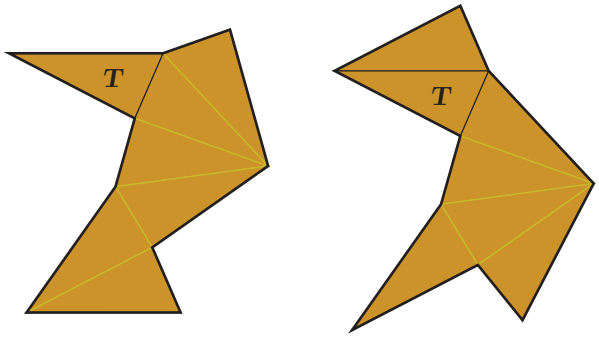


Figure 9

11.6.7. Exercice. Soit $\boldsymbol{T}$ une superficie triangulaire dont aucun angle n'est obtus. Monter que les régions ci-dessous, obtenues par pliages successifs de $\boldsymbol{T}$ le long de ses côtés, sont toujours isospectrales non isométriques. Que dire lorsque l'un des angles de $\boldsymbol{T}$ est obtus ?



11.7. Calcul explicite d'une Transplantation

Dans cette dernière partie nous montrons comment déterminer explicitement la transplantation

$$\mathcal{T}_{21} : {}^{\Gamma_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}] \to {}^{\Gamma_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}]\,,$$

pour les triplets de groupes de Buser et GWW donnée dans la formule (53).

11.7.1. Données

- Le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2 := \{0,1\}$ et l'espace vectoriel $\mathbb{V} := (\mathbb{F}_2)^3$.
- Le groupe $\boldsymbol{G} := \mathrm{Sl}(3,\mathbb{F}_2)$ des matrices inversibles 3×3 à coefficients dans $\mathbb{F}_2$.

$$\boldsymbol{G} := \left\{ g = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \;\middle|\; * \in \mathbb{F}_2 \;\&\; \det(g) = 1 \right\}$$

- On note ${}^t(_) : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$, l'application qui associe à une matrice sa transposée. C'est un « *anti-isomorphisme de groupes* » involutif, *i.e.* on a

$${}^t(gh) = {}^th\,{}^tg\,, \quad \text{et} \quad {}^{tt}g = g\,, \quad \text{pour tous } g,h \in \boldsymbol{G}.$$

- On note $(_)^{-1} : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$, l'application qui associe à une matrice son inverse. C'est aussi un « *anti-isomorphisme de groupes* » involutif. On a donc

$$(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}\,, \quad \text{et} \quad (g^{-1})^{-1} = g\,, \quad \text{pour tous } g,h \in \boldsymbol{G}.$$

- Γ_1 et Γ_2 sont les ensemble des matrices inversibles des formes suivantes

$$\Gamma_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \right\}, \quad \Gamma_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \right\}.$$

  Γ_1 et Γ_2 sont des sous-groupes de $\boldsymbol{G}$. On a clairement

$$(\Gamma_1)^{-1} = \Gamma_1\,, \quad \text{et} \quad {}^t(\Gamma_1) = \Gamma_2\,.$$

- Les vecteurs $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V} := \mathbb{F}_2^3$ seront notés par des matrices colonnes : $\boldsymbol{v} := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

11.7.2. Actions d'un groupe à gauche et à droite. Soient $\boldsymbol{G}$ un groupe et $\boldsymbol{A}$ un ensemble. Étant donnée une correspondance $\rho : \boldsymbol{G} \to \mathrm{Appl}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A})$, qui associe à chaque $g \in \boldsymbol{G}$ une application $\rho(g) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$, on peut lui associer au moins deux opérations suivant que l'on place $\boldsymbol{G}$ à gauche ou à droite de $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{cases} \triangleright : \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}\,, & g \triangleright a := \rho(g)(a) \\ \triangleleft : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{A}\,, & a \triangleleft g := \rho(g)(a) \end{cases}$$

Jusque là, c'est juste une affaire de goût. Mais, lorsque l'on fait opérer d'abord $g \in \boldsymbol{G}$ puis $h \in \boldsymbol{G}$, on se retrouve avec deux écritures :

$$h \triangleright (g \triangleright a) \quad \text{ou bien} \quad (a \triangleleft g) \triangleleft h\,,$$

qui vont exprimer la « *loi associative des opérations* » de manière différente. En effet, on aura

$$h \triangleright (g \triangleright a) = (hg) \triangleright a \quad \text{ou bien} \quad (a \triangleleft g) \triangleleft h = a \triangleleft (gh)\,,$$

ce qui revient à demander à l'application $\rho : \boldsymbol{G} \to \mathrm{Appl}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A})$ de vérifier

$$\rho(hg) = \rho(h) \circ \rho(g) \quad \text{ou bien} \quad \rho(gh) = \rho(h) \circ \rho(g) \qquad (54)\,.$$

Inversement, si l'on se donne $\rho : \boldsymbol{G} \to \mathrm{Appl}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A})$ vérifiant l'une ou l'autre des égalités (54), on dira que « $\boldsymbol{G}$ *agit à gauche ou droite de* $\boldsymbol{A}$ » suivant le cas.

Dans les actions de groupes, outre les égalités (54), on demande $\rho(\boldsymbol{e}) = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}$, ce qui garantit aux applications $\rho(g) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ d'être bijectives. On dit alors

- Le groupe « $\boldsymbol{G}$ *agit à gauche* », si l'application
$$\rho : \boldsymbol{G} \to \mathrm{Iso}(\boldsymbol{A})$$
est un « *homomorphisme de groupes* », *i.e.* :
$$\rho(\boldsymbol{e}) = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}} \quad \text{et} \quad \rho(gh) = \rho(g)\rho(h)\,.$$
- Le groupe « $\boldsymbol{G}$ *agit à droite* », si $\rho : \boldsymbol{G} \to \mathrm{Iso}(\boldsymbol{A})$ est un « *anti-homomorphisme de groupes* », *i.e.* :
$$\rho(\boldsymbol{e}) = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}} \quad \text{et} \quad \rho(gh) = \rho(h)\rho(g)\,.$$
- Deux actions $\rho_1, \rho_2 : \boldsymbol{G} \to \mathrm{Iso}(\boldsymbol{A})$ « *commutent* », si
$$\rho_1(g_1) \circ \rho_2(g_2) = \rho_2(g_2) \circ \rho_1(g_1)\,, \text{ pour tous } g_1, g_2 \in \boldsymbol{G}.$$
En particulier, une action à gauche $\triangleright : \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ « *commute* » à une action à droite $\triangleleft : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{A}$ si et seulement si
$$(g_1 \triangleright a) \triangleleft g_2 = g_1 \triangleright (a \triangleleft g_2)$$

11.7.3. Actions de $\boldsymbol{G}$ sur $\mathbb{P}$. On note

$$\boldsymbol{p}_0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{P} := \mathbb{V} \backslash \{\boldsymbol{0}\}\,.$$

On fait opérer les éléments de $\boldsymbol{G}$ *à droite* sur $\mathbb{P}$ par les deux formules suivantes.

$$\begin{cases} \boldsymbol{p} \triangleleft_1 g := g^{-1} \cdot \boldsymbol{p}\,, \\ \boldsymbol{p} \triangleleft_2 g := {}^t g \cdot \boldsymbol{p}\,, \end{cases} \quad \text{pour tous } g \in \boldsymbol{G} \text{ et } \boldsymbol{p} \in \mathbb{P}.$$

Lemme

a) *Les opérations* $\lhd_1$ *et* $\lhd_2$ *sont des actions de* $\boldsymbol{G}$ *« à droite » sur* $\mathbb{P}$, i.e.

$$\begin{cases} (\boldsymbol{p} \lhd_1 g) \lhd_1 h = \boldsymbol{p} \lhd_1 (gh) \\ \boldsymbol{p} \lhd_1 \boldsymbol{e} = \boldsymbol{p} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} (\boldsymbol{p} \lhd_2 g) \lhd_2 h = \boldsymbol{p} \lhd_2 (gh) \\ \boldsymbol{p} \lhd_2 \boldsymbol{e} = \boldsymbol{p} \end{cases}$$

Notation. *On notera* $\mathbb{P}_i$ *l'ensemble* $\mathbb{P}$ *muni de l'action* $\lhd_i$.

b) *Par ces actions,* $\boldsymbol{G}$ *opère « transitivement » sur* $\mathbb{P}$, i.e. *on a*

$$\mathbb{P} = \boldsymbol{p}_0 \lhd_1 \boldsymbol{G} = \boldsymbol{p}_0 \lhd_2 \boldsymbol{G}\,.$$

Les fixateurs de $\boldsymbol{p}_0$ *sont respectivement :*

$$\mathrm{Stab}_{\lhd_1 \boldsymbol{G}}(\boldsymbol{p}_0) = \Gamma_1 \quad et \quad \mathrm{Stab}_{\lhd_2 \boldsymbol{G}}(\boldsymbol{p}_0) = \Gamma_2\,.$$

c) *Les applications :*

$$\begin{cases} \psi_1 : \boldsymbol{G} \to \mathbb{P}_1 \\ \quad g \mapsto \boldsymbol{p} \lhd_1 g \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \psi_2 : \boldsymbol{G} \to \mathbb{P}_2 \\ \quad g \mapsto \boldsymbol{p} \lhd_2 g \end{cases}$$

induisent les bijections :

$$\Gamma_1 \backslash \boldsymbol{G} \xrightarrow[\equiv]{\bar{\psi}_1} \mathbb{P}_1 \quad et \quad \Gamma_2 \backslash \boldsymbol{G} \xrightarrow[\equiv]{\bar{\psi}_2} \mathbb{P}_2$$

compatibles aux actions à droite de $\boldsymbol{G}$, i.e.

$$\psi_1(\Gamma_1 gh) = \psi_1(\Gamma_1 g) \lhd_1 h \quad et \quad \psi_2(\Gamma_2 gh) = \psi_2(\Gamma_2 g) \lhd_2 h$$

Indications. a) Les applications $g \mapsto g^{-1}$ et $g \mapsto {}^t g$ sont des anti-homomorphismes de groupes. b) Étant donné deux vecteurs non nuls, il existe toujours un isomorphisme linéaire appliquant l'un sur l'autre (théorème de la base incomplète). Dans (c), on a

$$\begin{aligned} \big(\psi_i(g) = \psi_i(h)\big) &\iff \big(\boldsymbol{p}_0 \lhd_i g = \boldsymbol{p}_0 \lhd_i h\big) \iff \big(\boldsymbol{p}_0 \lhd_i gh^{-1} = \boldsymbol{p}_0\big) \\ &\iff \big(gh^{-1} \in \Gamma_i\big) \iff \big(\Gamma_i\, g = \Gamma_i\, h\big)\,. \end{aligned}$$

□

11.7.4. Espace vectoriel engendré par un ensemble. On réprend ici la méthode de construction de la $\mathbb{R}$-algèbre d'un groupe (11.2.1) pour l'appliquer à un ensemble quelconque. Étant donné un ensemble $\boldsymbol{A}$, supposé fini pour simplifier, on définit l'espace vectoriel

$$\mathbb{R}[\boldsymbol{A}] := \Big\{ \sum\nolimits_{a \in \boldsymbol{A}} x_a\, \delta_a \;\Big|\; x_a \in \mathbb{R} \Big\}\,,$$

où $\{\delta_a\}_{a \in \boldsymbol{A}}$ est une liste de symboles indexés par $\boldsymbol{A}$ qui joue le rôle d'une base canonique d'espace vectoriel.

Si $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ est une application d'ensembles, il existe une et une unique application linéaire, que nous notons pareillement

$$\alpha : \mathbb{R}[\boldsymbol{A}] \to \mathbb{R}[\boldsymbol{B}]\,,$$

telle que $\alpha : \delta_a \mapsto \delta_{\alpha(a)}$. Il s'agit de : [73]

$$\alpha\Big(\sum\nolimits_{a \in \boldsymbol{A}} x_a\, \delta_a \Big) = \sum\nolimits_{a \in \boldsymbol{A}} x_a\, \delta_{\alpha(a)} = \sum\nolimits_{b \in \boldsymbol{B}} \Big(\sum\nolimits_{a \in \alpha^{-1}(b)} x_a \Big) \delta_b\,. \tag{55}$$

On l'appellera l'application linéaire « *associée* » à $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$.

73. Cette définition n'a évidemment de sens que si $\alpha^{-1}(b)$ est fini, pour tout $b \in \boldsymbol{B}$.

Plus généralement, si $\boldsymbol{A}$ est muni d'une action à gauche (resp. à droite) du groupe $\boldsymbol{G}$, chaque $g \in \boldsymbol{G}$ définit l'application $g \triangleright (_) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$, $a \mapsto g \triangleright a$, (resp. $(_) \triangleleft g : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$, $a \mapsto a \triangleleft g$) et donne donc lieu à son application associée

$$g \triangleright (_) : \mathbb{R}[\boldsymbol{A}] \to \mathbb{R}[\boldsymbol{A}]\,, \quad (\text{resp. } (_) \triangleleft g : \mathbb{R}[\boldsymbol{A}] \to \mathbb{R}[\boldsymbol{A}])$$

et les éléments de $\boldsymbol{G}$ opèrent comme des *isomorphismes linéaires* de $\mathbb{R}[\boldsymbol{A}]$.

11.7.5. Lemme

a) *Si $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ est injective (resp. surjective, bijective), il en est de même de $\alpha : \mathbb{R}[\boldsymbol{A}] \to \mathbb{R}[\boldsymbol{B}]$.*

b) *Si $\boldsymbol{G}$ opère sur $\boldsymbol{A}$ par une action de groupe, l'action (linéaire) associée sur $\mathbb{R}[\boldsymbol{A}]$ est aussi une action de groupe.*

c) *Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont munis d'actions de $\boldsymbol{G}$ à gauche, resp. à droite, et que l'application $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ est « compatible à ces actions »*, i.e.

$$\alpha(g \triangleright a) = g \triangleright \alpha(a)\,, \quad \text{resp. } \alpha(a \triangleleft g) = \alpha(a) \triangleleft g,$$

il en est de même de $\alpha : \mathbb{R}[\boldsymbol{A}] \to \mathbb{R}[\boldsymbol{B}]$.

Démonstration. Exercice. □

11.7.6. Morphismes de G-modules à droite. Dans la suite, nous allons notamment nous intéresser aux diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[\boldsymbol{G}] & \xrightarrow{\quad\psi_i\quad} & \mathbb{R}[I\!P_i] \\ & {\scriptstyle\nu_i}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\bar\psi_i} & \\ & \mathbb{R}[\,\Gamma_i\backslash\boldsymbol{G}] & \end{array} \tag{56}$$

où les applications sont compatibles aux actions à droite de $\boldsymbol{G}$, c'est-à-dire : sont des « *morphismes de $\boldsymbol{G}$-modules à droite* » d'après la terminologie introduite dans 11.2.4-(c).

On aura remarqué dans (56) la réapparition de '$\mathbb{R}[\boldsymbol{G}]$' : « *la $\mathbb{R}$-algèbre de $\boldsymbol{G}$* », que nous avons introduite dans 11.2.1.

11.7.7. Proposition. *Notons $\epsilon_i \in \mathbb{R}[\boldsymbol{G}]$ l'opérateur de symétrisation associé au sous-groupe Γ_i (11.2.3). L'application $\Psi_i : {}^{\Gamma_i}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}] \to \mathbb{R}[I\!P_i]$, composée de*

$$\begin{array}{ccccccc} {}^{\Gamma_i}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}] = \epsilon_i\mathbb{R}[\boldsymbol{G}] & \subseteq & \mathbb{R}[\boldsymbol{G}] & \xrightarrow{\nu_i} & \mathbb{R}[\,\Gamma_i\backslash\boldsymbol{G}] & \xrightarrow[\simeq]{\bar\psi_i} & \mathbb{R}[I\!P_i] \\ \llcorner & & & & & & \lrcorner \\ & & & & \Psi_i & & \end{array}$$

est un isomorphisme de $\boldsymbol{G}$-modules à droite.

Démonstration. L'application $\nu_i : \boldsymbol{G} \to \Gamma_i\backslash\boldsymbol{G}$ est surjective. Chosissons pour chaque $b \in \Gamma_i\backslash\boldsymbol{G}$ un « *antécédent* », *i.e.* un élément $\hat b \in \boldsymbol{G}$ tel que $\nu_i(\hat b) = b$. L'application ν_i s'écrit alors (*cf.* (55))

$$\nu_i\Big(\sum\nolimits_{g\in\boldsymbol{G}} x_g\,\delta_g\Big) = \sum\nolimits_{b\in\Gamma_i\backslash\boldsymbol{G}}\Big(\sum\nolimits_{h\in\Gamma_i} x_{h\hat b}\Big)\delta_b\,. \tag{$*$}$$

Pour $b \in \Gamma_i\backslash\boldsymbol{G}$, posons $\boldsymbol{E}_{i,b} := \sum_{h\in\Gamma_i}\delta_{h\hat b}$. L'ensemble $\big\{E_{i,b} \;\big|\; b \in \Gamma_i\backslash\boldsymbol{G}\big\}$ est une base pour le sous-espace $\epsilon_i\mathbb{R}[\boldsymbol{G}]$ et la restriction de ν_i à $\epsilon_i\mathbb{R}[\boldsymbol{G}]$ s'écrit

$$\nu_i\Big(\sum\nolimits_{b\in\Gamma_i\backslash\boldsymbol{G}} x_b\,\boldsymbol{E}_{i,b}\Big) = \sum\nolimits_{b\in\Gamma_i\backslash\boldsymbol{G}} x_b\,\delta_b\,,$$

ce qui est, de toute évidence, un isomorphisme. □

11.7.8. La description d'une transplantation $\mathcal{T}_{21} : {}^{\Gamma_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}] \to {}^{\Gamma_2}\mathbb{R}[\boldsymbol{G}]$ se ramène par conséquent à la recherche d'un isomorphisme de $\boldsymbol{G}$-modules à droite

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}[I\!P_1] \to \mathbb{R}[I\!P_2]$$

et comme nous voulons retrouver l'expression de Bérard (53), nous devrons reprendre les mêmes paramétrages, autrement dit, nous devrons exprimer la matrice de $\mathcal{T}$ par rapport aux bases déterminées par l'action des puissances de $C := [A, B]$ sur le point $\boldsymbol{p}_0$ (*cf.* 11.3.2-(d)),

- Sur $\mathbb{R}[\mathbb{P}_1]$ la base $\{\boldsymbol{p}_0 \lhd_1 C^i\}_{i=0,\dots,6}$, soit

$$\boldsymbol{p}_0 := \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_1 := \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 := \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_3 := \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_4 := \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_5 := \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_6 := \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

- Sur $\mathbb{R}[\mathbb{P}_2]$ la base $\{\boldsymbol{p}_0 \lhd_2 C^i\}_{i=0,\dots,6}$, soit

$$\boldsymbol{q}_0 := \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_1 := \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_2 := \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_3 := \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_4 := \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_5 := \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_6 := \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Avec ces choix, tout élément de $\mathbb{R}[I\!P_1]$ s'écrit

$$\sum\nolimits_{i=0,\dots,6} x_i\, \delta_{\boldsymbol{p}_i} = \sum\nolimits_{i=0,\dots,6} x_i \big(\delta_{\boldsymbol{p}_0} \lhd_1 C^i\big)\,. \tag{57}$$

11.7.9. Lemme. *Soit $\mathcal{T} : \mathbb{R}[I\!P_1] \to \mathbb{R}[I\!P_2]$ un morphisme de $\boldsymbol{G}$-modules à droite.*
a) *On a, pour $i = 0, \dots, 6$,*

$$\mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_i}) = \mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_0}) \lhd_2 C^i\,,$$

et $\mathcal{T}$ est entièrement déterminé par l'élément $\mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_0})$.
b) *$\mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_0})$ est un élément Γ_1-invariant (à droite) de $\mathbb{R}[I\!P_2]$.*
c) *Si $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}[I\!P_2]^{\Gamma_1}$, il existe (un unique) $\mathcal{T}$ tel que $\mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_0}) = \boldsymbol{w}$.*

Démonstration. a) Par (57), on a

$$\mathcal{T}\Big(\sum\nolimits_{i=0,\dots,6} x_i \big(\delta_{\boldsymbol{p}_0} \lhd_1 C^i\big)\Big) = \sum\nolimits_{i=0,\dots,6} x_i \big(\mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_0}) \lhd_2 C^i\big)\,.$$

b) Évident puisque $\mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_0}) \lhd_2 g = \mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_0} \lhd_1 g) = \mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_0})$ si $g \in \Gamma_1 = \mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{p}_0)$.
c) Il suffit de vérifier que si l'on pose $\mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_0}) = \boldsymbol{w}$, l'égalité

$$\mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_0 \lhd_1 g}) = \boldsymbol{w} \lhd_2 g$$

n'entraine pas d'inconsistance, c'est-à-dire, si nous avons $\boldsymbol{p}_0 \lhd_1 g_1 = \boldsymbol{p}_0 \lhd_1 g_2$, nous devons avoir $\boldsymbol{w} \lhd_2 g_1 = \boldsymbol{w} \lhd_2 g_2$. Or,

$$(\boldsymbol{p}_0 \lhd_1 g_1 = \boldsymbol{p}_0 \lhd_1 g_2) \Longleftrightarrow \exists h \in \Gamma_1 \ t.q.\ g_2 = h g_1\,,$$

auquel cas

$$\boldsymbol{w} \lhd_2 g_2 = \boldsymbol{w} \lhd_2 h g_1 = (\boldsymbol{w} \lhd_2 h) \lhd_2 g_1 = \boldsymbol{w} \lhd_2 g_1\,.$$ □

11.7.10. Calcul des Γ_1-Invariants dans $\mathbb{R}[\mathbb{P}_2]$. L'action de Γ_1 sur $\mathbb{P}_2$ est l'action naturelle du groupe ${}^t(\Gamma_1) = \Gamma_2$ sur l'ensemble $\mathbb{P}$.

11.7.11. Lemme

a) *L'action du groupe* $\Gamma_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \right\}$ *sur* $\mathbb{P}_2$ *possède deux orbites :*

$$\left\{ \boldsymbol{q}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \left\{ \boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

b) *Le sous-espace* $\mathbb{R}[\mathbb{P}_2]^{\Gamma_1}$ *de* $\mathbb{R}[\mathbb{P}_2]$ *est engendré par les deux éléments suivants*

$$\xi_1 := \delta_{\boldsymbol{q}_0} + \delta_{\boldsymbol{q}_2} + \delta_{\boldsymbol{q}_5} + \delta_{\boldsymbol{q}_6} \quad \textit{et} \qquad \xi_2 := \delta_{\boldsymbol{q}_1} + \delta_{\boldsymbol{q}_3} + \delta_{\boldsymbol{q}_4}$$

Démonstration. Exercice, (ce doit être très rapide, sans calcul même). □

11.7.12. La transplantation. Suite au lemmes 11.7.9 et 11.7.11, nous regardons le cas le plus simple, *i.e.* $\mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_0}) = \xi_2$. Nous nous intéressons donc au morphisme de $\boldsymbol{G}$-modules à droite

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}[\mathbb{P}_1] \to \mathbb{R}[\mathbb{P}_2]$$

défini par

$$\mathcal{T}\big(\sum\nolimits_{i=0,\dots,6} x_i\, \delta_{\boldsymbol{p}_i}\big) = \sum\nolimits_{i=0,\dots,6} x_i \big(\xi_2 \lhd_2 C^i\big)\,. \tag{58}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_i}) &= \xi_2 \lhd_2 C^i \\ &= (\delta_{\boldsymbol{q}_1} + \delta_{\boldsymbol{q}_3} + \delta_{\boldsymbol{q}_4}) \lhd_2 C^i = \delta_{\boldsymbol{q}_1} \lhd_2 C^i + \delta_{\boldsymbol{q}_3} \lhd_2 C^i + \delta_{\boldsymbol{q}_4} \lhd_2 C^i \\ &= \delta_{\boldsymbol{q}_{1+i \pmod 7}} + \delta_{\boldsymbol{q}_{3+i \pmod 7}} + \delta_{\boldsymbol{q}_{4+i \pmod 7}} \end{aligned}$$

soit donc

$$\begin{cases} \mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_0}) = \delta_{\boldsymbol{q}_1} + \delta_{\boldsymbol{q}_3} + \delta_{\boldsymbol{q}_4} \\ \mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_1}) = \delta_{\boldsymbol{q}_2} + \delta_{\boldsymbol{q}_4} + \delta_{\boldsymbol{q}_5} \\ \mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_2}) = \delta_{\boldsymbol{q}_3} + \delta_{\boldsymbol{q}_5} + \delta_{\boldsymbol{q}_6} \\ \mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_3}) = \delta_{\boldsymbol{q}_0} + \delta_{\boldsymbol{q}_4} + \delta_{\boldsymbol{q}_6} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_4}) = \delta_{\boldsymbol{q}_0} + \delta_{\boldsymbol{q}_1} + \delta_{\boldsymbol{q}_5} \\ \mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_5}) = \delta_{\boldsymbol{q}_1} + \delta_{\boldsymbol{q}_2} + \delta_{\boldsymbol{q}_6} \\ \mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_6}) = \delta_{\boldsymbol{q}_0} + \delta_{\boldsymbol{q}_2} + \delta_{\boldsymbol{q}_3} \end{cases}$$

Nous retrouvons alors la matrice de la formule (53), à savoir :

$$((\mathcal{T}_{i,j})) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{59}$$

Cette matrice inversible (de déterminant 24), et le morphisme $\mathcal{T}$ de (58) est bien un bijectif.

11.7.13. Remarque. Toute combinaison $\mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_0}) = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$ donne aussi des morphismes de $\boldsymbol{G}$-modules à droite. Nous n'en cherchions qu'un, et "par chance" le plus simple était le bon. Le choix « *évident* » $\mathcal{T}(\delta_{\boldsymbol{p}_0}) = \xi_1 + \xi_2$ n'aurait rien donné d'intéressant. Pourquoi ? (La réponse doit être immédiate!) ([74])

74. Réponse : $\xi_1 + \xi_2$ est l'ensemble des vecteurs non nuls de $\mathbb{V}$, il est donc $\boldsymbol{G}$-invariant, la matrice de $\mathcal{T}$ ne comporte alors que des 1 et son déterminant est nul.

12. Historique

Petit historique d'après des textes de P. Bérard.

1964 J. Milnor (tores plats de dimension 16, arithmétique)
1966 M. Kac (Can one hear the shape of a drum ?)
1980 M.F. Vignéras (variétés hyperboliques, arithmétique)
1981 A. Ikeda (espaces lenticulaires, arithmétique)
1982 H. Urakawa (domaines dans R3, groupes cristallographiques)

Pendant la période 1970–1985, les recherches se sont plutôt concentrées sur une possible réponse positive à la question de M. Kac. Les contre-exemples restaient sporadiques et somme toute mystérieux.

1983 C. Gordon et E. Wilson (constructions systématiques, y compris déformations)
1985 T. Sunada (constructions systématiques)
1985 P. Buser (interprétation combinatoire)
1988 P. Buser (surfaces M1 et M2, domaines planaires)
1991 P. Bérard (méthode de transplantation)
1992 C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert (domaines plans)

A partir de 1985, les recherches ont porté sur la construction de nouveaux contre-exemples permettant de montrer quelles propriétés ne sont pas déterminées par le spectre. Il reste que l'on ne sait toujours pas, aujourd'hui, s'il y a des domaines lisses du plan, ou bien des domaines convexes du plan, ayant le même spectre pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann.

Bibliographie

[Bé$_1$] Bérard, Pierre. Spectral geometry : direct and inverse problems. With appendixes by Gérard Besson, and by Bérard and Marcel Berger. Lecture Notes in Mathematics, 1207. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Bé$_2$] Bérard, Pierre. On ne peut pas entendre la forme d'un tambour. Préprint http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/∼pberard/D/tambours.pdf

[Bé$_3$] Bérard, Pierre. Transplantation et isospectralité. I. Math. Ann. 292 (1992), no. 3, 547–559.

[Bé$_4$] Bérard, Pierre Transplantation et isospectralité. II. J. London Math. Soc. (2) 48 (1993), no. 3, 565–576.

[Ber] Bers, Lipman. Local behaviour of solution of general linear elliptic equations, Comm. Pt e Appl. Math., 8 (1955), 473-496.

[Bou] Bourguignon, Jean-Pierre. Formes, vibrations et essais non destructifs, Le Courrier du C.N.R.S. 64 (1986), 43 – 47.

[Bu$_1$] Buser, Peter. Isospectral Riemann surfaces. Ann. Inst. Fourier Vol. 36 no. 2 (1986), p. 167-192.

[Bu$_2$] Buser, Peter. Cayley graphs and planar isospectral domains. Geometry and analysis on manifolds (Katata/Kyoto, 1987), 64–77, Lecture Notes in Math., 1339, Springer, Berlin, 1988.

[Bu$_3$] Buser, Peter. Geometry and spectra of compact Riemann surfaces. Reprint of the 1992 edition. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010.

[Cha] Chavel, Isaac : *Eigenvalues in Riemannian geometry*. Academic Press 1984.

[Che] Cheng, Shiu Yuen. Eigenfunctions and nodal sets. Comment. Math. Helv. 51 (1976), no. 1, 43–55.

[Chi] Chiang, Yuan-Jen : Harmonic maps of V -manifolds. In : Ann. Global Anal. Geom., volume 8(3) :pp. 315–344, 1990.

[CH] Courant, Richard – Hilbert, David. *Methods of mathematical physics. Vol. I.* Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953.

[Ga] Gassmann, Fritz, "Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Hurwitz (Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe)", Mathematische Zeitschrift 25 (1926) : 665–675

[GWW] Gordon, C. ; Webb, D. ; Wolpert, S. Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds. Invent. Math. 110 (1992), no. 1, 1–22.

[Gu] Guralnick, Robert M. ; Wales, David B. Subgroups inducing the same permutation representation. II. J. Algebra 96 (1985), no. 1, 94–113.

[Kac] Kac, M. Can One Hear the Shape of a Drum ? The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 4, Part 2 : Papers in Analysis (Apr., 1966), pp. 1-23

[Mil] Milnor, J. Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds. Proc. Nat. Sci. U.S.A. 51 (1964), 542.

[Pe] Perlis, Robert. On the equation $\zeta_K(s) = \zeta_{K'}(s)$. J. Number Theory 9 (1977), no. 3, 342–360.

[Sun] T.Sunada, Riemannian coverings and isospectral manifolds, Ann. of Math. 121(1985), 169-186

[Vig] Vigneras, M.-F. Variétés Riemanniennes isospectrales et non isométriques, Ann. of Math. (1980) 112,21–32.

Notations

$\langle _, _ \rangle$	Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$	5
$\|\|_\|\|$	Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$	5
$d(_, _)$	Distance euclidienne	5
$B_n(\vec{x}, R)$	Boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ de centre $\vec{x}$ et rayon R	5
$\mathrm{Appl}(\boldsymbol{S}, \mathbb{R})$	Ensemble des fonctions ensemblistes définies sur $\boldsymbol{S}$.	5
$\mathcal{C}^0(\boldsymbol{S})$	Ensemble des fonctions continues définies sur $\boldsymbol{S}$	5
$\mathcal{C}^r(\boldsymbol{U})$	Ensemble des fonctions r fois continûment différentiables définies sur $\boldsymbol{U}$	6
$\mathcal{C}^r(\boldsymbol{U}', \boldsymbol{U})$	Ensemble des applications r fois continûment différentiables définies sur $\boldsymbol{U}'$ et à valeurs dans $\boldsymbol{U}$	7
$\alpha^\natural : \mathcal{C}^r(\boldsymbol{U}) \to \mathcal{C}^r(\boldsymbol{U}')$	Opérateur de composition $f \mapsto f \circ \alpha$	7
$A \amalg_\varphi B$	Recollement de A et de B par φ	10
$\equiv$	Symbole pour indiquer une bijection	10
$\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$	Ensemble des parties de $\boldsymbol{X}$	11
$\mathrm{Card}(\boldsymbol{E})$	Cardinal de l'ensemble $\boldsymbol{E}$.	12
$\mathbb{C}_u$	Cercle unité $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$.	14
$\Delta_{\boldsymbol{X}}$	Diagonale $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}$, *i.e.* $\Delta_{\boldsymbol{X}} := \{(x, x) \mid x \in \boldsymbol{X}\}$	15
$\mathrm{Gr}(\alpha) := \{(x, \alpha(x)) \mid x \in \boldsymbol{X}\}$	Graphe d'une application $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$	15
$\overline{\mathbb{D}}_u$	Disque unité (fermé) $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \leq 1\} \subseteq \mathbb{C}$	18
$\mathbb{D}_u$	Disque unité ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\} \subseteq \mathbb{C}$	18
$\simeq$	Symbole pour indiquer un isomorphisme	22
$\mathcal{R}_A$	Relation d'équivalence engendrée par A	27
$\mathbb{S}^{n-1}$	Sphère des vecteurs de norme 1 de $\mathbb{R}^n$	30
$C_n(\vec{0}, r, R)$	Couronne ouverte $D_n(\vec{0}, r, R) := B_n(\vec{0}, R) \backslash \overline{B}_n(\vec{0}, r)$	31
$\mathcal{A}$	Atlas de classe $\mathcal{C}^k$	33
$O(n)$	Groupe orthogonal de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$	34
$\mathrm{Iso}(_, _)$	Ensemble des isométries entre deux espaces métriques	36
$L(\gamma)$	Longueur de la courbe γ	37
$d_{\boldsymbol{M}}(_, _)$	Distance riemannienne de la variété plate $\boldsymbol{M}$	38
$B_{\boldsymbol{M}}(x, R)$	Boule ouverte dans une variété riemannienne plate	38
$\mathrm{Aut}^k(\boldsymbol{M})$	Bijections de classe $\mathcal{C}^k$ de la variété $\boldsymbol{M}$	42
$\boldsymbol{G} \cdot x$	Orbite de x	42
$\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x)$	Stabilisateur de x dans $\boldsymbol{G}$	42
$\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}$	Relation d'avoir la même $\boldsymbol{G}$-orbite	42
$\boldsymbol{M}^A := \bigcap_{g \in A} \boldsymbol{M}^g$	Ensemble des points fixes de A dans $\boldsymbol{M}$	43
V_x	Voisinage distingué	47
$\boldsymbol{W}_x$	Groupe d'isotropie de x	48
$\partial \boldsymbol{M}$	Bord d'une surface à bord $\partial \boldsymbol{M}$	51
$S_\theta = \{\rho\, e^{it} \mid -\theta/2 \leq t \leq \theta/2\}$	Secteur angulaire dans $\mathbb{C}$ d'angle θ	52
$\mathbb{I}\mathrm{so}(n, \mathbb{R})$	Le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$	54
$\mathbb{T}(n, \mathbb{R})$	Le groupe des translations $\tau_{\vec{v}}(\vec{x}) := \vec{x} + \vec{v}$	54

$\tau_{\vec{v}}{:}\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{v}$	Translation de $\mathbb{R}^n$	54
$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$	Algèbre des endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V	54
$\alpha^\natural$	Opérateur de composition $\alpha^\natural(f) := f \circ \alpha$	54
$\partial_{\vec{v}}$	Dérivée directionnelle de direction $\vec{v}$	55
∂_i	i-ième dérivée partielle	55
$\Delta_{\boldsymbol{M}}$	Le Laplacien sur la variété plate $\boldsymbol{M}$	55
$\mathrm{Diff}_{\boldsymbol{R}}(\mathbb{R}^n)$	Algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^n$	55
$\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$	Groupe des automorphismes linéaires de $\mathbb{R}^n$	56
$\partial_{\vec{n}}$	Dérivée normale au bord et sortant d'une surface à bord	63
$\sigma_\beta(\boldsymbol{M})$	Ensemble des v.p. de $-\Delta_{\boldsymbol{M}}$	64
$\mathcal{H}_{\lambda,\beta}(\boldsymbol{M})$	Espace des fonctions propres du laplacien de v.p. λ et satisfaisant la condition aux limites β : Dirichlet ou Neumann	66
$\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{D}$	Abréviations pour $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2$ et $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$	75
$\partial_1\boldsymbol{D}, \partial_2\boldsymbol{D}$	Dans $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{D}$, on pose $\partial_1\boldsymbol{D} := \nu(\partial\boldsymbol{M})$, $\partial_2\boldsymbol{D} := \partial\boldsymbol{D}\backslash\partial_1\boldsymbol{D}$	75
$\mathcal{H}_{\lambda,\beta_1,\beta_2}(\boldsymbol{D})$	Espace des fonctions propres aux conditions β_i sur $\partial_i\boldsymbol{D}$	76
$\mathrm{Spec}_{\beta_1,\beta_2}(\boldsymbol{D})$	Liste des v.p. avec multiplicité $\mu(\lambda, \boldsymbol{D}) := \dim\big(\mathcal{H}_{\lambda,\beta_1,\beta 2}(\boldsymbol{D})\big)$.	76
$\mathcal{G}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S})$	Le graphe de Cayley de $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S})$	83
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S})$	Ensemble des arêtes de $\mathcal{G}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{S})$	83
$\cong$	Symbole pour indiquer un isomorphisme canonique	93
$\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]$	Algèbre du groupe $\boldsymbol{F}$	94
${}^{\boldsymbol{H}_1}\mathbb{R}[\boldsymbol{F}]^{\boldsymbol{H}_2}$	$\boldsymbol{H}_1$-invariants à gauche, $\boldsymbol{H}_2$-invariants à droite	94
$\mathrm{Mor}^{\delta}_{\boldsymbol{F}}(_, _)$	Ensemble des morphismes de $\boldsymbol{F}$-modules à droite	94
$[A, B] := ABA^{-1}B^{-1}$	Commutateur de deux éléments d'un group	97
$\boldsymbol{H} \lhd \boldsymbol{G}$	$\boldsymbol{H}$ est un sous-groupe distingué de $\boldsymbol{G}$	98
$\rhd{:}\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$	Action d'un groupe à gauche	108
$\lhd{:}\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{A}$	Action d'un groupe à droite	108

Index

action
  d'un groupe, 42
  fidèle, 42
  libre, 42
actions qui commutent, 108
affine, 56
agir à gauche, à droite, 108
algèbre
  associative, 54
  d'un groupe, 94, 110
antécédent, 110
anti-homomorphisme, 108
anti-invariants, 76
anti-isomoprhisme, 107
application
  affine, 34
  compatible à une relation, 9
  continue, 13
  de transition, 29, 36, 44, 51
  différentiable, 7
    entre variétés, 31
  fermée, 20, 43
  graphe, 15
  ouverte, 14, 20, 43
arête, 83
associative (loi), 108
associativité, 54
atlas
  complet ou maximal, 34
  de classe C^k, 33
  de définition, 33
  plat complet, 37
automorphisme affine, 56

bord, 19, 50
  (surface à), 50
boule, 5
  ouverte, 12
brique fondamentale, 91
but d'une arête, 83

caractère de groupe, 96
carte locale, 29, 36, 51
Cayley (graphe), 83
central, 102
cercle unité, 14
chemin, 37
classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$, 9
classe de différentiabilité, 7, 29
classification, 32
coin, 52, 59
commutatif
  actions, 108
  diagramme, 11, 90, 91
commutatuer, 97
compatible, 9
  à l'action de groupe, 110
compatible aux Laplaciens, 62
composante connexe, 70
condition au bord, 63
connexe
  composante, 70
connexe par arcs, 16, 38
connexité, 16
continuité
  métrique, 13
  topologique, 13
contractile (espace), 14
courbe, 33

dérivée
  directionnelle, 55
    latérale, 59
  normale au bord, 61
  partielle, 6, 55
diagonale, 15
diagramme commutatif, 11, 90, 91
diamètre riemannien, 74
différentiabilité, 6
dihédral, 49
dimension, 29
disque unité, 18
distance, 38
  euclidienne, 5
  riemannienne, 38
distingué (sous-groupe), 98
domaine fondamental, 45, 46
domaine nodal, 70

EDP, 63
effectif, 93
eigenfunction, 63
eigenvalue, 63
endomorphisme, 54
ensemble
  nodal, 68, 69
ensemble étoilé, 18
entrée, 84
équivalence
  engendrée, 27
espace
  connexe, 16
    par arcs, 16
  contractile, 14, 17
  d'orbites, 42

homéomorphie, 14
localement connexe, 16
par arcs, 16
quotient, 8
topologique, 11
quotient, 19
séparé, 12

fermé, 11
recouvrement, 13
fibres, 44
fidèle (action), 42
fixe (point), 42
flat manifold, 8
fonction, 5
continue, 5
coordonnée, 6, 56
de clacsse C^r, 50
de classe $\mathcal{C}^r$, 50
différentiable, 6
localement constante, 56
propre, 63
r-fois cont. diff., 6
réelle, 5
sur une variété, 31
formule de Lagrange, 42
formule des traces, 80
Frobenius, 96

générateurs (système de), 83
géométrie spectrale, 72
Gassmann (triplet), 80–82, 90–93, 95, 96, 101, 102
gluing, 8
graphe d'une application, 15
graphe de Cayley, 83
groupe, 41
action ($\mathcal{C}^\infty$), 42
d'isotropie, 48, 49
des isométries, 54
des translations, 54
diédral, 84
dihédral, 49
du carré, 84
général linéaire, 56
orthogonal, 34

homéomorphisme, 14
homomorphisme, 108
de groupes, 42
homotopie, 17
de lacets, 18

idempotent, 94
image
directe, 14
réciproque, 13
indice, 98
intérieur, 19
vide, 40
invariant isométrique, 91
invariants, 76
invariants à droite, à gauche, 94
involution, 107
isométrie, 34
affine, 34, 38
locale, 62
riemannienne, 39
isométrie locale, 90
isomorphie, 31, 33
isomorphisme local, 43
isospectral, 66

lacet, 18
lacets homotopes, 18
Lagrange (formule de), 42
Laplacien, 55
libre (action), 42
lissité, 29
local, 23
connexité, 16
par arcs, 16
isométrie, 62
local (modèle), 28
loi associative, 108
longueur d'une courbe, 38

métrique
euclidienne, 5
métrique produit, 14
manifold, 8
flat, 8
with boundary and corners, 8
membrane vibrante, 63
modèle local, 28
moins-Laplacien, 63
morphisme de modules, 94, 110
multiplicité, 76

nodal, 70
nodal (ensemble), 68
norme euclidienne, 5

opérateur
de multiplication, 54
de symétrisation, 94
de transplantation, 95
opérateur différentiel, 55
orbite, 42

espace, 42
même, 42
orthogonalité, 71
ouvert, 11
à coin, 52, 59
de l'espace quotient, 19
élémentaire, 14
recouvrement, 13

partie
régulière, 48
singulière, 48
partition, 9
pavage, 85
point fixe, 42
presque-conjugué, 80
problème
direct, 72
inverse, 73
produit de fonctions, 6
produit scalaire, 5
projection stéréographique, 31
propriété
topologique, 14
universelle, 9, 15, 16

quotient, 9

région nodale, 70
régulière (partie), 48
recollement
d'ensemble, 9
d'espaces topologiques, 21
ouvert ou fermé, 26
recouvrement
fermé, 13
ouvert, 13
relation engendrée, 10
respecter hors et coins, 62
revêtement principal, 44

secteur angulaire, 52
singulière (partie), 48
sommet, 83
sortie, 84
source d'une arête, 83
sous-espace topologique, 12
sous-groupe distingué, 98
spectrale (géométrie), 72
spectre, 64
étendu, 72
sphère, 30
stabilisateur, 42
surface, 33
à bord, 50, 51
à coins, 52
plate, 40
surjection canonique, 9, 42
symétriseur, 94
système de générateurs, 83

topologie, 5, 11
associée à la métrique, 12
d'une réunion disjointe, 16
discrète, 11
grossière, 11
induite, 12
métrisable, 12
produit, 15
quotient, 19
trace d'une partie, 12
transitive (action), 109
translation, 54
transplantation, 93, 95
triplet de Gassmann, 80
type d'une arête, 83

valeur propre, 63
variété, 8, 28
différentielle, 29
induite, 30
isomorphisme, 31
plate, 36
voisinage
d'un point, 12
distingué, 47

ALBERTO ARABIA
CNRS–IMJ
Théorie des Groupes
1er janvier 2014

Equivariant Poincaré Duality, Equivariant Gysin Morphisms and Euler Classes

Alberto Arabia*

July 2017

The is an introduction to equivariant Poincaré duality of oriented G-manifolds, for a compact Lie group G, and to equivariant Gysin morphisms both for proper and for non-proper maps. As applications, we derive: the equivariant Gysin exact sequence, the equivariant Lefschetz fixed point theorem, the equivariant Thom isomorphism and the definition of the equivariant Thom and Euler classes.

While, for educational purposes, we have chosen to confine ourselves to the very basic setup of smooth manifolds and de Rham equivariant cohomology, and hence the non-trivial restriction that the coefficients field must be at least that of real numbers $\mathbb{R}$, we present in the last section a general approach, based on Grothendieck-Verdier duality formalism, whereby the same results can be proved for any field of arbitrary characteristic.

Introduction

Given a compact Lie group G, we prove the G-equivariant Poincaré duality for an oriented G-manifold M. In doing this, we follow the approach of J.-L. Brylinski when he introduced the equivariant intersection cohomology for G-pseudomanifolds ([Br], 1992), restricting it to the category of smooth varieties and cohomology with coefficients in the field of real numbers $\mathbb{R}$ for pedagogical reasons only.

We work in the derived category of Ω_G-differential graded modules $\mathrm{DGM}(\Omega_G)$, that we denote $\mathcal{D}^+(\mathrm{DGM}(\Omega_G))$. In this notation, Ω_G is the graded ring $S(\mathfrak{g}^\vee)^G$ of G-invariant real polynomial functions on $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$, where $\mathfrak{g}^\vee$ is homogeneous of degree 2. The differential in Ω_G is zero so that Ω_G coincides with its cohomology, denoted by H_G, which is the G-equivariant cohomology of a point. The basic duality in $\mathcal{D}^+(\mathrm{DGM}(\Omega_G))$ is the contravariant functor

$$\mathbb{R}Hom^\bullet_{\Omega_G}(_,\Omega_G) : \mathcal{D}^+(\mathrm{DGM}(\Omega_G)) \rightsquigarrow \mathcal{D}(\mathrm{DGM}(\Omega_G)). \qquad (\diamond)$$

The complexes of G-equivariant differential forms $\Omega_G(M)$ and $\Omega_{G,c}(M)$ (with compact support), which compute the (de Rham) equivariant cohomologies $H_G(M)$ and $H_{G,c}(M)$ respectively, belong to $\mathrm{DGM}(\Omega_G)$ and, if M is an oriented G-manifold of dimension d_M, we can consider the following equivariant analog of the familiar Poincaré pairing,

$$\mathbb{P}_{M,G} : \Omega_G(M) \otimes \Omega_{G,c}(M) \to \Omega_G, \quad \alpha \otimes \beta \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta,$$

*Université Paris Diderot-Paris 7, IMJ-PRG, CNRS, Bâtiment Sophie Germain, bureau 608, Case 7012, 75205. Paris Cedex 13, France. Contact: alberto.arabia@imj-prg.fr.

which leads to the equivariant Poincaré left and right adjunctions, i.e. the morphisms of Ω_G-differential graded modules:

$$\mathbb{D}_{G,M} : \Omega_G(M)[d_M] \to Hom^\bullet_{\Omega_G}\left(\Omega_{G,c}(M),\Omega_G\right)$$
$$\mathbb{D}'_{G,M} : \Omega_{G,c}(M)[d_M] \to Hom^\bullet_{\Omega_G}\left(\Omega_G(M),\Omega_G\right)$$

for which we prove the equivariant analog of the Poincaré duality theorem.

Theorem (4.5.1). Let G be a compact connected Lie group, and M an oriented G-manifold of dimension d_M.

a) *The morphism $\mathbb{D}_{G,M} : \Omega_G(M)[d_M] \to \mathbb{R}Hom^\bullet_{\Omega_G}\left(\Omega_{G,c}(M),\Omega_G\right)$ is an* isomorphism *in $\mathcal{D}^+(\mathrm{DGM}(\Omega_G))$.*

b) *There are natural spectral sequences converging to $H_G(M)[d_M]$*

$$\begin{cases} \mathbb{E}_2^{p,q}(M) = \left(Ext^p_{H_G}\left(H_{G,c}(M),H_G\right)\right)^{[q]} \Rightarrow H_G^{p+q}(M)[d_M] \\ \mathbb{F}_2^{p,q}(M) = H_G^p \otimes_{\mathbb{R}} Hom^\bullet_{\mathbb{R}}(H_c^q(M),\mathbb{R}) \Rightarrow H_G^{p+q}(M)[d_M] \end{cases}$$

where $[q]$ denotes the degree of homogeneity in the graded vector space.

c) *If $\dim(H_c(M)) < \infty$, the morphism*

$$\mathbb{D}'_{G,M} : \Omega_{G,c}(M)[d_M] \to \mathbb{R}Hom^\bullet_{\Omega_G}\left(\Omega_G(M),\Omega_G\right)$$

is an isomorphism in $\mathcal{D}^+(\mathrm{DGM}(\Omega_G))$, and the analogues of (b) *is verified.*

Let G-Man (resp. G-Man$_{\mathrm{pr}}$) denote the category of G-manifolds and G-equivariant differential (resp. proper) maps.

If $f : M \to M'$ is a proper map between oriented manifolds of dimensions d_M and $d_{M'}$ respectively, the pullback morphism $f^* : \Omega_{G,c}(M') \to \Omega_{G,c}(M)$ induces in $\mathcal{D}^+(\mathrm{DGM}(\Omega_G))$, by equivariant Poincaré duality, *the Gysin morphism for proper maps*:

$$f_! := (\mathbb{D}_{G,M})^{-1} \circ f^* \circ \mathbb{D}_{G,M'} : \Omega_G(M)[d_M] \to \Omega_G(M')[d_{M'}],$$

whence the Gysin covariant functor

$$(_)_! : \text{G-Man}_{\mathrm{pr}} \rightsquigarrow \mathcal{D}^+(\mathrm{DGM}(\Omega_G)), \quad M \rightsquigarrow \Omega_G(M)[d_M], \quad f \rightsquigarrow f_!.$$

When, in addition, $\dim(H_c(M)) < \infty$, we can proceed in the same way with non-proper maps $f : M \to M'$ and thus define in $\mathcal{D}^+(\mathrm{DGM}(\Omega_G))$

$$f_* := (\mathbb{D}'_{G,M})^{-1} \circ f^* \circ \mathbb{D}'_{G,M'} : \Omega_{G,c}(M)[d_M] \to \Omega_{G,c}(M')[d_{M'}],$$

and the Gysin covariant functor

$$(_)_* : \text{G-Man} \rightsquigarrow \mathcal{D}^+(\mathrm{DGM}(\Omega_G)), \quad M \rightsquigarrow \Omega_{G,c}(M)[d_M], \quad f \rightsquigarrow f_*.$$

———————×———————

One important feature of this approach is that, whereas Gysin morphisms are generally explicitly defined only for projections $p : M \times N \to N$ and closed embeddings $i : M \hookrightarrow M \times N$, and then extended to any $f = M \to N$ by setting $f_* := p_* \circ \mathrm{Gr}(f)_*$, where $\mathrm{Gr}(f) : M \to M \times N$ is the graph map, the formal approach is indifferent to the nature of f. This flexibility has many theoretical advantages:

- It automatically justifies functoriality of Gysin morphisms.

Alberto Arabia

- Given a closed inclusion of oriented manifolds $N \subseteq M$, we dualize the exact triangle $\Omega_{G,c}(M\backslash N) \to \Omega_{G,c}(M) \to \Omega_{G,c}(N) \to$ by $(\diamond)$ and immediately get, via equivariant Poincaré duality, the Gysin exact triangle:

$$\Omega_G(N)[d_N] \to \Omega_G(M)[d_M] \to \Omega_G(M\backslash N)[d_M] \to$$

leading to *the Gysin exact sequence of equivariant cohomology*:

$$\to H^i_G(N) \to H^{i+d_M-d_N}_G(M) \to H^{i+d_M-d_N}_G(M\backslash N) \to$$

- In the same easy way, if $E \to B$ is a vector bundle with fibers of dimension n and oriented base space, the zero section map $\iota : B \to E$, being proper, automatically induces the Gysin morphism $\iota_! : \Omega_G(B) \to \Omega_G(E)[n]$ in $\mathcal{D}^+(\mathrm{DGM}(\Omega_G))$, which is an isomorphism. We deduce the *equivariant Thom isomorphism* of H_G-graded modules $\iota_! : H^i_G(B) \simeq H^{i+n}_G(E)$, the *Thom equivariant class* then being $\iota_!(1) \in H^n_G(E)$.
- The equivariant Euler classes are also easily introduced for any closed embedding $i : N \subseteq M$ of oriented manifolds, by setting $\mathrm{Eu}_G\big(N,M\big) := i^*i_!(1)$ where $i^*i_! : H_G(N) \to H_G(N)$ is the push-pull operator.

———————×———————

The book is organized in four parts.

– The first part consists only of section **1**, which summarizes familiar results and constructions in ordinary (nonequivariant) cohomology related to Poincaré duality. It is here that we set the formalism to introduce Gysin morphisms as Poincaré duals of the usual pullback morphisms, formalism that we will extend to the equivariant framework.

– The second part consists of sections **2** to **5**. Following a brief review of the origins of equivariant cohomology in section **2**, we recall in section **3** standard definitions and constructions in equivariant cohomology of manifolds, and in section **4** we integrate them to the Grothendieck-Verdier's framework, which allows us to state in a formal way the equivariant analog of Poincaré duality and, thereby, to introduce Gysin morphisms and related constructions in section **5**.

– The third part, that consists of sections **6** and **7**, we confine ourselves to the case where G is a torus T and address localization questions related to Gysin morphisms. For example, we prove the following localization theorem.

Proposition (7.3.1). Let M be an oriented T-manifold of finite orbit type. For any closed subgroup H of T, denote by $\iota_H : M^H \hookrightarrow M$ the inclusion. The following morphisms of H_T-graded modules are isomorphisms modulo torsion.

$$\iota_{H!} : H_T(M^H)[d_{M^H}] \to H_T(M)[d_M]$$
$$\iota_{H*} : H_{T,c}(M^H)[d_{M^H}] \to H_{T,c}(M)[d_M]$$

– In the last part, section 8, we briefly explain changes to be done in order to work with coefficients in any field $\Bbbk$ of arbitrary characteristic. Among other changes, the replacement of the category $\mathcal{D}(\mathrm{DGM}(\Omega_G))$ by the derived category $\mathcal{D}(\mathbb{B}G;\Bbbk)$ of the category of sheaves of $\Bbbk$-vector spaces over the classifying space $\mathbb{B}G$, replacement that entails to substitute the complexes of equivariant differential forms $\Omega_{G,c}(M)$ and $\Omega_G(M)$ respectively by the complexes $\mathbb{R}p_!(\underline{\Bbbk}_{M_G})$ and $\mathbb{R}p_*(\underline{\Bbbk}_{M_G})$.

———————×———————

Equivariant Poincaré Duality and Gysin Morphisms

These notes started off as an appendix to the forthcoming book of Loring Tu: *Introductory Lectures on Equivariant Cohomology* ([1]), but as it soon became clear that they went beyond the level originally intended, the project was abandoned. We were, in the end, encouraged to publish by the flexibility of our approach, which enables parallel treatment of the equivariant and nonequivariant cases, as well as change of coefficient field from the field of real numbers to fields of arbitrary characteristic.

We assume that the reader has a good level in algebraic topology and is familiar with sheaf cohomology and with the language of derived categories as they appear in the framework of Grothendieck-Verdier duality, for example, in the reference books by Kashiwara-Schapira [KS_1, KS_2]. We also assume that the reader knows the basics of equivariant cohomology, both: as the ordinary cohomology (with arbitrary coefficients) of the Borel construction of G-spaces, and as the cohomology of the equivariant de Rham complex in the case of G-manifolds. The usual references for these topics are the books of W. Hsiang [H] and Allday-Puppe [AP], for ordinary cohomology, and the book of Guillemin-Sternberg [GS] for de Rham cohomology. Among these books, only [AP] addresses the questions of equivariant Poincaré duality and equivariant Gysin morphisms, and while our approaches are close, at the time they wrote the book, they gave only partial results, which is a further reason for the publication of the present text.

Acknowledgements. To Matthias Franz for his helpful criticism, notably on the equivalence between equivariant duality and reflexivity of equivariant cohomology, and to Frances Cowell's wise comments that helped us improve this work.

November 2019
Paris, France

Alberto Arabia

[1] In Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press.

Table of Contents

1 Nonequivariant Background
1.1 Category of Cochain Complexes . . . 1
1.2 Some Categories of Manifolds . . . 3
1.3 Poincaré Pairing . . . 4
1.4 Manifolds and maps of Finite de Rham Type . . . 6
1.5 Manifolds With Boundary . . . 8
1.6 Proof of Proposition 1.4.4 . . . 8
1.7 The Gysin Functor . . . 9
1.8 The Gysin Functor for Proper Maps . . . 14
1.9 Principal Examples of Gysin Morphisms . . . 15
1.10 Constructions of Gysin Morphisms . . . 17
1.11 Exercises . . . 18
1.12 Conclusion . . . 20

2 Equivariant Cohomology Background
2.1 Category of Cochain $\mathfrak{g}$-Complexes . . . 26
2.2 Equivariant Cohomology of $\mathfrak{g}$-Complexes . . . 29

3 Equivariant Cohomology of G-Manifolds
3.1 Equivariant Differential Forms . . . 33
3.2 The Borel Construction . . . 37

4 Equivariant Poincaré Duality
4.1 Differential Graded Modules over a Graded Algebra . . . 41
4.2 Deriving Functors . . . 44
4.3 Equivariant Integration . . . 50
4.4 Equivariant Poincaré Pairing . . . 52
4.5 G-Equivariant Poincaré Duality Theorem . . . 52
4.6 T-Equivariant Poincaré Duality Theorem . . . 55

5 Equivariant Gysin Morphism
5.1 G-Equivariant Gysin Morphism for General Maps . . . 57
5.2 G-Equivariant Gysin Morphism for Proper Maps . . . 59
5.3 Comparison Theorems . . . 60
5.4 Universal Property of the equivariant Gysin Morphism . . . 60
5.5 Group Restriction . . . 61
5.6 Explicit Constructions of Equivariant Gysin Morphisms . . . 62
5.7 Exercises . . . 64

6 Equivariant Euler Classes
6.1 The Nonequivariant Euler Class . . . 67
6.2 G-Equivariant Euler Class . . . 67
6.3 T-Equivariant Euler Classes of a Fixed Point . . . 68

7 Localizations
7.1 The Localization Functor . . . 71
7.2 Torsions in Equivariant Cohomology Modules . . . 72
7.3 Localization Theorems . . . 74

8 Changing the coefficients field
8.1 Preliminaries 77
8.2 Equivariant Poincaré Duality on arbitrary fields 83
8.3 Equivariant Gysin morphisms on arbitrary fields 84

9 Appendix **87**

Bibliographie **89**
Index **91**

1. Nonequivariant Background

1.1. Category of Cochain Complexes

1.1.1. Fields in Use. We denote by $\Bbbk$ an arbitrary field of coefficients, but, as soon as we will consider differential forms on manifolds and de Rham cohomology, it will be specialized to the field of real numbers $\mathbb{R}$ or complex numbers $\mathbb{C}$. In section 8 we explain changes to be done in order to overcome this restriction.

1.1.2. Vector Spaces Pairings. Whenever $\Bbbk$ is understood the expression "*vector space*" means vector space over $\Bbbk$. If V is a vector space, we denote by $V^\vee := \mathrm{Hom}_\Bbbk(V,\Bbbk)$ its *dual*.

Given a bilinear map $\beta : V \times W \to \Bbbk$, also called *a pairing*, consider the two linear maps $\gamma_\beta : V \to W^\vee$ and $\rho_\beta : W \to V^\vee$, defined by $\gamma_\beta(v)(w) = \rho_\beta(w)(v) := \beta(v,w)$ and respectively called the *left and right adjoint maps associated with* β. One says that β *is a nondegenerate pairing* whenever the adjoint maps are injective, and one says that β *is a perfect pairing* whenever they are bijective. For example, the canonical pairing $V^\vee \times V \to \Bbbk$, $(\lambda,v) \mapsto \lambda(v)$, is always nondegenerate and it is perfect if and only if V is finite dimensional.

1.1.3. Graded Vector Spaces. A *graded space* is a family $V := \{V^m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ of vector spaces. A *graded homomorphism* $\boldsymbol{\alpha} : V \to W$ *of degree* $d = \deg(\boldsymbol{\alpha})$ is a family of linear maps $\{\alpha_m : V^m \to W^{m+d}\}_{m\in\mathbb{Z}}$, composition of such is defined degree by degree, i.e. $\boldsymbol{\beta}\circ\boldsymbol{\alpha} = \{\beta_{m+d}\circ\alpha_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$. One has $\deg(\boldsymbol{\alpha}\circ\boldsymbol{\beta}) = \deg\boldsymbol{\alpha} + \deg\boldsymbol{\beta}$.

We denote by $Homgr^d_\Bbbk(V,W)$ the space of graded homomorphisms of degree d and by $Hom^\bullet_\Bbbk(V,W)$ the graded space of all graded homomorphisms, i.e. the family

$$Hom^\bullet_\Bbbk(V,W) = \left\{Homgr^d_\Bbbk(V,W)\right\}_{d\in\mathbb{Z}}.$$

When $d = 0$, we may write $Homgr_\Bbbk(V,W)$ for $Homgr^0_\Bbbk(V,W)$.

1.1.4 The *category* $\mathrm{GV}(\Bbbk)$ *of graded vector spaces* is the category whose objects are graded spaces and whose *morphisms* are the graded homomorphisms of degree 0. We denote equivalently $Mor_{\mathrm{GV}(\Bbbk)}(V,W) := Homgr_\Bbbk(V,W)$ the set of morphisms from V to W.

1.1.5. Differential Graded Vector Space. A *differential graded vector space* (V,d), *a complex* in short, is a graded vector space V together a *differential* or *coboundary* $d : Endgr^1(V)$ such that $d^2 = 0$. A *morphism of complexes* $\boldsymbol{\alpha} : (V,d) \to (V',d')$ is a morphism $\boldsymbol{\alpha} \in Homgr_\Bbbk(V,V')$ commuting with differentials, i.e. $\boldsymbol{\alpha}\circ d = d'\circ\boldsymbol{\alpha}$. The complexes and their morphisms constitute the *category* $\mathrm{DGM}(\Bbbk)$ *of differential graded vector spaces*.

1.1.6 A morphism of complexes $\boldsymbol{\alpha} : (V,d) \to (V',d')$ induces a morphism between the graded spaces of cohomologies $H(\boldsymbol{\alpha}) : H(V,d) \to H(V',d')$. The morphism $\boldsymbol{\alpha}$ is a *quasi-isomorphism, quasi-injection, quasi-surjection*, whenever $H(\boldsymbol{\alpha})$ is respectively, an isomorphism, injection, surjection.

1.1.7 Let $m \in \mathbb{Z}$. If L is a vector space, we denote by $L[m]$ the graded space defined by $L[m]^{-m} = L$ and $L[m]^n = 0$ if $n + m \neq 0$. If $\alpha : V \to W$ is a linear map, we denote by $\alpha[m] : V[m] \to W[m]$ the morphism of graded spaces equal

to α in degree $-m$ and 0 otherwise. The correspondence $L \rightsquigarrow (L[m],\mathbf{0})$ and $\alpha \rightsquigarrow \alpha[m]$ is a functor

$$[m] : \mathrm{Vec}(\Bbbk) \to \mathrm{DGM}(\Bbbk).$$

More generally, If V is a graded space we denote by $V[m]$ the graded space $(V[m])^i = V^{m+i}$, and if $\boldsymbol{\alpha} : V \to W$ is a graded homomorphism we denote by $\boldsymbol{\alpha}[m] : V[m] \to W[m]$ the graded homomorphism $\boldsymbol{\alpha}[m]_i = \alpha_{m+i}$. Next, if (V,d) is a complex, $(V,d)[m]$ is the complex $\big(V[m],(-1)^m d[m]\big)$. The correspondence $(V,d) \rightsquigarrow (V,d)[m]$, $\boldsymbol{\alpha} \rightsquigarrow \boldsymbol{\alpha}[m]$ is the *m-th shift functor*

$$[m] : \mathrm{DGM}(\Bbbk) \rightsquigarrow \mathrm{DGM}(\Bbbk).$$

1.1.8 Given two complexes (V,d) and (V',d'), we recall the definition of the complexes

$$\big(Hom^\bullet_\Bbbk(V,V'),D\big) \quad \text{and} \quad \big((V \otimes_\Bbbk V')^\bullet,\boldsymbol{\Delta}\big).$$

As graded vector spaces they are

$$m \in \mathbb{Z} \mapsto \begin{cases} Hom^m_\Bbbk(V,V') = Homgr^m_\Bbbk(V,V') \\ (V \otimes_\Bbbk V')^m = \prod_{b+a=m} V^a \otimes_\Bbbk V'^b \end{cases}$$

and their differentials are

$$\begin{cases} D_m(f) = d' \circ f - (-1)^m f \circ d \\ \Delta_m(v \otimes v') = d(v) \otimes v' + (-1)^{|v|} v \otimes d'(v') \end{cases}$$

where $v \otimes v' \in V^{|v|} \otimes V'^{|v'|}$. ([2])

1.1.9. Exercise. Verify that the following complexes coincide as graded vector spaces but not as complexes even though they are naturally isomorphic.

$$Hom^\bullet_\Bbbk(V[n],W[m]) \simeq Hom^\bullet_\Bbbk(V,W)[m-n]$$
$$V[n] \otimes W[m] \simeq (V \otimes W)[m+n]$$

1.1.10 Given a morphism of complexes $\boldsymbol{\varphi} : (V,d) \to (W,d)$ the map

$$Hom^m_\Bbbk(W,V') \to Hom^m_\Bbbk(V,V'), \quad \boldsymbol{\alpha} \mapsto \boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{\varphi},$$

is well defined for all $m \in \mathbb{Z}$ and commutes with differentials so that one has a morphism of complexes

$$Hom^\bullet_\Bbbk(\boldsymbol{\alpha},V') : \big(Hom^\bullet_\Bbbk(W,V'),D\big) \to \big(Hom^\bullet_\Bbbk(V,V'),D\big).$$

The correspondence $(V,d) \rightsquigarrow Hom^\bullet_\Bbbk(V,V')$, $\boldsymbol{\alpha} \rightsquigarrow Hom^\bullet_\Bbbk(\boldsymbol{\alpha},V')$ is then a *contravariant* functor

$$Hom^\bullet_\Bbbk(_,V') : \mathrm{DGM}(\Bbbk) \rightsquigarrow \mathrm{DGM}(\Bbbk).$$

[2] It is worth noting that these formulas are inspired by the super Lie bracket equalities

$$[\![d,f]\!] = df - (-1)^{|d||f|} fd \quad \text{and} \quad [\![d,ab]\!] = [\![d,a]\!] + (-1)^{|a||d|} a[\![d,b]\!]$$

where $[\![d,[\![d,_]\!]]\!] = 0$ is an immediate consequence of $|d| = 1$ and $d^2 = 0$.

1.1.11. The Dual Complex. The functor $Hom^\bullet_{\Bbbk}(_,\Bbbk[0])$ is the *duality functor*, simply denoted by $(_)^\vee := Hom^\bullet_{\Bbbk}(_,\Bbbk[0])$

$$(_)^\vee : \mathrm{DGM}(\Bbbk) \rightsquigarrow \mathrm{DGM}(\Bbbk).$$

The complex $(V,d)^\vee$ is called *the dual complex associated with* (V,d). One has

$$(V^\vee)^m = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V^{-m},\Bbbk), \quad D_m = (-1)^{m+1\,t} d_{-(m+1)}$$

1.1.12. Remark. One must take care that the natural embedding of vector spaces $V \subseteq V^{\vee\vee}$ gives only an inclusion of complexes $(V,-d) \subseteq (V,d)^{\vee\vee}$ where the sign of the differential has changed ! The canonical isomorphism

$$\boldsymbol{\epsilon} : (V,d) \to (V,-d), \quad \epsilon_m = (-1)^m \mathrm{id}_{V^m} \qquad (\boldsymbol{\epsilon})$$

is then necessary to get a canonical embedding $(V,d) \hookrightarrow (V,d)^{\vee\vee}$.

The next statement will be used without mention, it is left as an exercise.

1.1.13. Proposition

a) *A morphism of complexes* $\boldsymbol{\alpha} : (V,d) \to (V',d')$ *is a quasi-isomorphism if and only if* $\boldsymbol{\alpha}^\vee$ *is so.*

b) *There exists a canonical isomorphism between the cohomology of the dual and the dual of the cohomology, i.e.*

$$h\big((V,d)^\vee\big) \xrightarrow[\simeq]{} \big(h(V,d)\big)^\vee.$$

where h *denotes the graded vector space of the cohomologies of a complex.*

1.2. Some Categories of Manifolds

1.2.1. Manifolds. The names *manifold* and *map of manifolds* will be shortcuts for *real differentiable manifold* and *differentiable map of class* $\mathcal{C}^\infty$, in short *smooth map*. A manifold is equidimensional if all its connected components are of the same dimension, in that case "d_M" denotes this common dimension.

1.2.2 Man (resp. $\mathrm{Man}^{\mathrm{or}}$) denotes the *category of manifolds (resp. oriented) and smooth maps*. Over Man one has the *(real) de Rham complex* contravariant functor

$$\Omega(_) : \mathrm{Man} \rightsquigarrow \mathrm{DGM}(\mathbb{R})$$

and the *de Rham cohomology* contravariant functor

$$H(_) : \mathrm{Man} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R}).$$

1.2.3 $\mathrm{Man}_{\mathrm{pr}}$ (resp. $\mathrm{Man}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{pr}}$) denotes the subcategory of Man (resp. $\mathrm{Man}^{\mathrm{or}}$) with the same objects but with only **proper** maps. Over $\mathrm{Man}_{\mathrm{pr}}$ one has, in addition to the previous functors, the *(real) de Rham complex with* ***compact*** *supports* contravariant functor:

$$\Omega_{\mathrm{c}}(_) : \mathrm{Man}_{\mathrm{pr}} \rightsquigarrow \mathrm{DGM}(\mathbb{R})$$

and the *de Rham cohomology with compact support* contravariant functor

$$H_{\mathrm{c}}(_) : \mathrm{Man}_{\mathrm{pr}} \rightsquigarrow \mathrm{DGM}(\mathbb{R}).$$

The inclusion $\Omega_{\mathrm{c}}(_) \subseteq \Omega(_)$ induces a morphism of functors $H_{\mathrm{c}}(_) \to H(_)$.

1. Nonequivariant Background

1.2.4. *G*-Manifolds. Let G denote a Lie group. A manifold endowed with a smooth action of G is called *a G-manifold*. A map $f : M \to N$ between G-manifolds is called *a G-equivariant* if it commutes with the action of G. The class of G-manifolds and G-equivariant maps constitutes the category G-Man. The categories $G\text{-Man}^{\mathrm{or}}$, $G\text{-Man}_{\mathrm{pr}}$, $G\text{-Man}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{pr}}$ are the analogues of those already introduced in this section.

1.3. Poincaré Pairing

The reference for this section is [BT] (**I** §5 p. 44). Let M be an oriented manifold. The composition of the bilinear map $\Omega^{d_M-i}(M) \otimes \Omega^i_{\mathrm{c}}(M) \to \Omega^{d_M}_{\mathrm{c}}(M)$, $\alpha\otimes\beta \mapsto \alpha\wedge\beta$, with integration $\int_M : \Omega^{d_M}_{\mathrm{c}}(M) \to \mathbb{R}$, gives rise to a nondegenerate pairing

$$\mathbb{P}_M : \Omega^{d_M-i}(M) \otimes \Omega^i_{\mathrm{c}}(M) \to \mathbb{R}, \quad \alpha \otimes \beta \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta, \tag{$\mathbb{P}$}$$

inducing the *Poincaré pairing in cohomology*

$$\mathscr{P}_M : H^{d_M-i}(M) \otimes H^i_{\mathrm{c}}(M) \to \mathbb{R}, \quad [\alpha] \otimes [\beta] \mapsto \int_M [\alpha] \cup [\beta]. \tag{$\mathscr{P}$}$$

The left adjoint map associated with $\mathbb{P}$ is

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_M : \Omega^{d_M-i}(M) &\longrightarrow \Omega^i_{\mathrm{c}}(M)^\vee \\ \alpha &\longmapsto \mathbb{D}(\alpha) := \Big(\beta \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta\Big) \end{aligned} \tag{$\mathbb{D}$}$$

and one has

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_M\big((-1)^{d_M}\, d\alpha\big)(\beta) &= \int_M (-1)^{d_M}\, d\alpha \wedge \beta \\ &= \int_M (-1)^{d_M+|\alpha|+1} \alpha \wedge d\beta = (-1)^{|\beta|}\, \mathbb{D}_M(\alpha)(d\beta), \end{aligned}$$

Hence, following the conventions introduced in 1.1.7 and 1.1.8, $\mathbb{D}_M$ is a morphism of complexes from $\Omega(M)[d_M]$ to $\Omega_{\mathrm{c}}(M)^\vee$.

1.3.1. Exercise. Show that ($\mathbb{P}$) is a nondegenerate pairing.

1.3.2. Theorem (Poincaré duality). *Let M be an oriented manifold.*

a) *The morphism of complexes, called* the Poincaré morphism,

$$\mathbb{D}_M : \Omega(M)[d_M] \hookrightarrow \Omega_{\mathrm{c}}(M)^\vee \tag{$*$}$$

is a quasi-isomorphism, i.e. the morphism it induces in cohomology

$$\mathscr{D}_M : H(M)[d_M] \xrightarrow[\simeq]{} H_{\mathrm{c}}(M)^\vee, \tag{$**$}$$

is an isomorphism.

b) *The Poincaré pairing in cohomology*

$$\mathscr{P}_M : H(M) \otimes H_c(M) \to \mathbb{R} \tag{$***$}$$

is nondegenerate, *and it is* perfect *(1.1.2) if and only if* $\dim(H(M)) < +\infty$.

Proof. The (a) part (cf. [BT] p. 44–, for details) states the bijectivity of the left adjoint map associated with $\mathscr{P}$. Then, for each fixed i, one obtains by duality

the bijectivity of $\mathscr{D}^\vee_{M,i} : (H_c^{d_M-i}(M))^{\vee\vee} \to H^i(M)^\vee$ and the composition of this map with the canonical embedding $\epsilon_i : H_c^{d_M-i} \hookrightarrow (H_c^{d_M-i})^{\vee\vee}$ is the right adjoint map $\rho_{\mathscr{P}} : H_c(M)[d_M] \to H(M)^\vee$ (see 1.1.2). The "finite dimensional" condition then ensures the bijectivity of ϵ_i, hence of $\rho_{\mathscr{P}}$. □

1.3.3. Exercise. Let M and N be oriented manifolds. We denote by

$$\mathbb{D}(_) : \Omega(_)[d_] \to \Omega(_)^\vee_c, \quad \mathbb{D}(\alpha)(\beta) = \int \alpha \wedge \beta,$$

the left adjoint map of the Poincaré pairing, and by

$$\mathbb{D}'(_) : \Omega_c(_)[d_] \to \Omega(_)^\vee, \quad \mathbb{D}'(\beta)(\alpha) = \int \alpha \wedge \beta,$$

the right adjoint map.

A pair (L,R) of morphisms of complexes

$$L : \Omega(N) \to \Omega(M) \quad \text{and} \quad R : \Omega_c(M)[d_M] \to \Omega_c(N)[d_N]$$

is a *(Poincaré) adjoint pair* whenever

$$\int_M L(\alpha) \wedge \beta = \int_N \alpha \wedge R(\beta)$$

for all $\alpha \in \Omega(N)$ and $\beta \in \Omega_c(M)$. Show that

a) If (L,R_1) and (L,R_2) are adjoint pairs, then $R_1 = R_2$. One says that $R := R_1$ is the *(Poincaré) right adjoint of* L.

b) If (L_1,R) and (L_2,R) are adjoint pairs, then $L_1 = L_2$. One says that $L := L_1$ is the *(Poincaré) left adjoint of* R.

c) If (L,R) is an adjoint pair, then

$$\mathbb{D} \circ L = R^\vee \circ \mathbb{D}, \qquad \mathbb{D}' \circ R = L^\vee \circ \mathbb{D}',$$

i.e. the following diagrams are commutative

$$\begin{array}{ccc} \Omega(M) & \xrightarrow[(\simeq)]{\mathbb{D}_M} & \Omega_c(M)^\vee \\ {\scriptstyle L}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle R^\vee} \\ \Omega(N) & \xrightarrow[(\simeq)]{\mathbb{D}_N} & \Omega_c(N)^\vee \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Omega_c(M) & \xrightarrow{\mathbb{D}'_M} & \Omega(M)^\vee \\ {\scriptstyle R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L^\vee} \\ \Omega_c(N) & \xrightarrow{\mathbb{D}'_N} & \Omega(N)^\vee \end{array}$$

d) Do the exercise in the cohomological framework, i.e. replace Poincaré pairing $(\mathbb{P})$ by $(\mathscr{P})$, $\mathbb{D}$ by $\mathscr{D} : H[d] \to H^\vee_c$, $\mathbb{D}'$ by $\mathscr{D}' : H_c[d] \to H^\vee$, and define the notion of *(Poincaré) adjoint pair in cohomology*.

Show that if (L,R) is an adjoint pair of morphisms of complexes, then $(H(L),H_c(R))$ is an adjoint pair in cohomology so that one has

$$\mathscr{D} \circ H(L) = H_c(R)^\vee \circ \mathscr{D}, \qquad \mathscr{D}' \circ H_c(R) = H(L)^\vee \circ \mathscr{D}'.$$

In particular, $H(L)$ *identifies with the dual of* $H_c(R)$ *via Poincaré duality*.

1.3.4. Remark. We shall see that, given $f : M \to N$, the pullback morphism $f^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$ may or may not admit a right Poincaré adjoint at the complexes level, but that it will always do so at the cohomology level, this right adjoint is the Gysin morphism $f_* : H_c(M) \to H_c(N)$, so that $(H(f^*),f_*)$ is a

Poincaré adjoint pair in cohomology. On the other hand, when f is a proper map, the pullback $f^* : \Omega_c(N) \to \Omega_c(M)$ is also well defined and one may look for a left Poincaré adjoint to f^*, i.e. some morphism $L : \Omega(M)[d_M] \to \Omega(N)[d_N]$

$$\int_N L(\alpha) \wedge \beta = \int_M \alpha \wedge f^*(\beta).$$

Again, this will sometimes be possible at the complex level and will always be possible at the cohomology level leading to the notion of *the Gysin morphism for proper maps* $f_! : H(M) \to H(N)$, so that $(f_!, H_c(f^*))$ is a Poincaré adjoint pair in cohomology.

1.4. Manifolds and maps of Finite de Rham Type

1.4.1. Definitions. A manifold M is said to be *of finite (de Rham) type* when its de Rham cohomology ring $H(M)$ is finite dimensional. A map between manifolds $f : M \to N$ si said to be *of finite (de Rham) type* if N is the union of a countable ascending chain $\mathscr{U} := \{U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots\}$ of open subspaces of finite type such that each subspace $f^{-1}(U_m) \subseteq M$ is of finite type.

1.4.2. Remarks

a) By Poincaré duality (1.3.2), M is of finite type if and only if its compact support cohomology $H_c(M)$ is finite dimensional.

b) A compact manifold is of finite type ([BT] **5.3** pp. 42-43). An oriented manifold is of finite type if and only if its Poincaré pairing in cohomology is perfect (1.3.2-(b)). This will be soon used in our discussion of the Gysin morphism.

c) Since any manifold is the union of a countable ascending chain $\{\uparrow U_m\}$ of open submanifolds of finite type (*cf.* 1.4.4), any locally trivial fibration of manifolds $f : M \to N$ is of finite type (exercise).

1.4.3. Ascending Chain Property. Although general manifolds need not be of finite type, they are always the inductive limit of such. More precisely, any manifold M is the union of an ascending chain $\{U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots\}$ of open subsets of finite type of M. This weaker finiteness property, sufficient for our needs, is generally proved by a riemannian geometry argument ([3]). When a manifold is endowed with the action of a Lie group G, we will require in addition that each U_n be G-stable.

1.4.4. Proposition. *Let G be a compact Lie Group. A G-manifold M is the union of a countable ascending chain $\mathscr{U} := \{U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots\}$ of G-stable open subsets of M of finite type.*

The next sections recall some facts needed in the proof of this proposition.

1.4.5. Existence of Proper Functions. Recall that a map between manifolds $f : M \to N$ is said to be *proper* whenever $f^{-1}(F)$ is compact for any

[3] In these notes, a *good cover of M* (also known as *Leray cover*) is a finite open cover $\mathscr{U} = \{U_i \mid i = 1,\ldots,r\}$ of M such that all intersections $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_k}$ are either vacuous or acyclic ([BT], p. 5). The existence of good covers is established in *loc.cit.* §5, p. 42.

compact subset F of N. The aim of this section is to show that on a G-manifold there are always proper G-invariant functions.

Since the existence of proper functions over compact manifolds is clear, let M be a noncompact manifold. Fix a countable, locally finite cover $\mathscr{U} := \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of M, where each U_n is a *relatively compact* open subset of M, and note that the noncompactness of M implies that the family is necessarily infinite. Next, fix a smooth partition of unity $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ subordinate to $\mathscr{U}$. This means in particular that for each $n \in \mathbb{N}$, the equality $\phi_n(x) = 0$ holds whenever $x \notin U_n$. Then one has for every $N \in \mathbb{N}$

$$1 = \sum\nolimits_{n>N} \phi_n(x), \quad \forall x \notin U_0 \cup \cdots \cup U_N\,. \tag{$\diamond$}$$

Now, for every $x \in M$, the infinite sum $\Phi(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} n\cdot\phi_n(x)$ is finite and smooth with respect to $x \in M$, as it is a locally finite sum of smooth functions.

1.4.6. Lemma. *The positive function $\Phi : M \to \mathbb{R}$ is unbounded and proper.*

Proof. By property ($\diamond$) one has

$$\Phi(x) \geqslant \sum\nolimits_{n>N} n\cdot\phi_n(x) > N\Big(\sum\nolimits_{n>N} \phi_n(x)\Big) = N\,, \quad \forall x \notin U_0 \cup \cdots \cup U_N\,, \tag{$\diamond\diamond$}$$

which clearly implies that Φ is an unbounded function on M. Now, to see that Φ is proper, remark that if $F \subseteq \mathbb{R}$ is compact, then $F \subseteq [-N,N]$ for some $N \in \mathbb{N}$ and $\Phi^{-1}(F) \subseteq U_0 \cup \cdots \cup U_N$ by ($\diamond\diamond$). But the closure $\overline{U_0 \cup \cdots \cup U_N}$ is a compact subset of M because each $\overline{U}_i$ is assumed compact. As a closed subset of a compact set, $\Phi^{-1}(F)$ is compact. □

As a corollary of the preceding lemma one has:

1.4.7. Proposition. *Manifolds M endowed with a smooth action of a compact Lie group G admit proper G-invariant positive functions $\Phi : M \to \mathbb{R}$.*

Proof. If M is compact, any positive *constant* map Φ will do. If M is not compact, let $\phi : M \to \mathbb{R}$ denote any unbounded proper positive function (see 1.4.6), and set:

$$\Phi(x) := \int_G \phi(g\cdot x)\, dg,$$

where dg is a G-invariant form of top degree on G, such that $1 = \int_G dg$. The correspondence $x \mapsto \Phi(x)$ is clearly a well-defined nonnegative unbounded G-invariant function of M into $\mathbb{R}$. Now, for each $N \in \mathbb{N}$, the set

$$M_N := G\cdot\phi^{-1}([-N,N])$$

is compact and G-stable, and if $y \notin M_N$, one has $\phi(g\cdot y) > N$ for all $g \in G$, so that

$$\Phi(y) = \int_G \phi(g\cdot y)\, dg > N\,, \tag{$\diamond\diamond\diamond$}$$

and properness of Φ follows by the same argument as in lemma 1.4.6: If F is a compact subset of $\mathbb{R}$, then $F \subseteq [-N,N]$ for some $N \in \mathbb{N}$, and $\Phi^{-1}(F) \subseteq M_N$ by ($\diamond\diamond\diamond$). Then $\Phi^{-1}(F)$ is compact since it is closed in the compact set M_N. □

1. Nonequivariant Background

1.5. Manifolds With Boundary

1.5.1. Proposition. *The interior of a compact manifold with boundary is of finite type.*

Proof. Let B be a compact manifold with boundary and let M be its interior. Gluing B with itself along its boundary ∂B, one gets the "double" $B \sqcup_{\partial B} B$, which is a compact manifold without boundary. Then, from the long exact sequence of de Rham cohomology with compact support (see 1.11.1-(a))

$$\cdots \longrightarrow H^i_c(M) \times H^i_c(M) \longrightarrow H^i(B \sqcup_{\partial B} B) \longrightarrow H^0 i(\partial B) \longrightarrow \cdots,$$

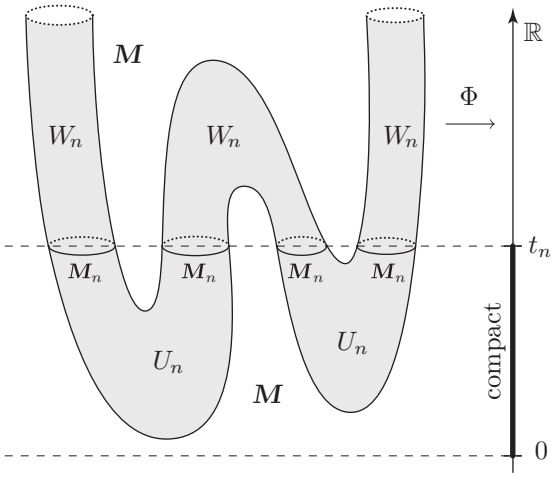
where $H^*(B \sqcup_{\partial B} B)$ and $H^*(\partial B)$ are finite-dimensional, the finiteness of $H^*_c(M)$ follows immediately. The finiteness of $H^*(M)$ results from Poincaré duality $H^*(M) \cong H^*_c(M)^\vee$. □

1.6. Proof of Proposition 1.4.4

Recall that the connected components of a manifold M are always open and closed submanifolds of M. In particular, if $M = \coprod_{\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}} C_\mathfrak{i}$ denotes the decomposition of M in connected components, the indexing set $\mathfrak{I}$ is finite or countable, and the restriction of a proper function $\Phi : M \to \mathbb{R}$ to each C_i remains proper.

If all the connected components of M are compact, we may index them by natural numbers $C_0, C_1, \ldots$ and define $U_n := C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$. Each U_n is then open in M and is also a compact manifold, hence it is of finite type. The ascending chain $\{U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots\}$ satisfies the conditions of the proposition.

If M contains a noncompact connected component C, fix any proper positive G-invariant function $\Phi : M \to \mathbb{R}$, which is possible due to 1.4.7, and note that $\Phi(C)$ is necessarily unbounded, since otherwise $C \subseteq \Phi^{-1}([0,T])$ for some $T \in \mathbb{R}$, and C would be compact as Φ is proper over C. Moreover, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that $\Phi(M) \supseteq \Phi(C) \supseteq]N, +\infty[$, since $\Phi(C)$ is unbounded *and* connected. Now, by Sard's theorem, the interior of the set of *critical* values of $\Phi : M \to \mathbb{R}$ is empty so that there exists an unbounded increasing sequence of positive real numbers $\{N < t_0 < \cdots < t_n < \cdots\}_{n \in \mathbb{N}}$ which are *regular* values of Φ.



Each subset $M_n := \Phi^{-1}(t_n)$ is then a submanifold of codimension 1 in M and, moreover, it is compact and G-stable since Φ is proper and G-invariant. Similarly, the sets $U_n := \Phi^{-1}(]-\infty,t_n[)$ and $W_n := \Phi^{-1}(]t_n,+\infty[)$, clearly nonempty, are G-stable open subsets of M. One then easily checks that $\overline{U}_n = U_n \sqcup M_n$ and $\overline{W}_n = M_n \sqcup W_n$ are in fact G-manifolds with boundary M_n embedded in M. Furthermore, $\overline{U}_n$ is compact as one has $\overline{U}_n := \Phi^{-1}(]-\infty,t_n]) = \Phi^{-1}([0,t_n])$ since Φ is positive.

We can then apply proposition 1.5.1 and state that U_n is a G-stable open subset of finite type of M. The ascending chain $\{U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots\}$ satisfies the conditions of the proposition. □

1.7. The Gysin Functor

In this section we dualize $\mathbb{D}_M : \Omega(M)[d_M] \to \Omega_c(M)^\vee$, getting an injection $\mathscr{D}'_M : H_c(M)[d_M] \hookrightarrow H(M)^\vee$ whose image will be shown to be functorial on the category $\mathrm{Man}^{\mathrm{or}}$ of oriented manifolds.

1.7.1. The Right Adjoint Map. In 1.3 we introduced the left adjoint map associated with Poincaré pairing, i.e. the quasi-isomorphism

$$\mathbb{D}_M : \Omega(M)[d_M] \xrightarrow[(\simeq)]{} \Omega_c(M)^\vee .$$

By duality, this map yields $\mathbb{D}_M^\vee : \Omega_c(M)^{\vee\vee} \to \Omega(M)[d_M]^\vee$ which is also a quasi-isomorphism and, composed with the embedding $\Omega_c(M) \subseteq \Omega_c(M)^{\vee\vee}$, gives rise to the injection and quasi-injection (1.3.1, 1.1.6)

$$\begin{array}{ccccc} \big(\Omega_c(M)[d_M],d\big) & \xhookrightarrow{\subseteq} & \big(\Omega_c(M)^{\vee\vee}[d_M],-d\big) & \xrightarrow[(\simeq)]{\mathbb{D}^\vee} & \big(\Omega(M)^\vee,-d\big) \\ \llcorner & & & & \uparrow \\ & & \xrightarrow{\quad\mathbb{D}'_M\quad} & & \end{array}$$

(See 1.1.11 for the sign of differentials.) One has (cf. 1.3.3)

$$\mathbb{D}'_M(\beta) = \Big(\alpha \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta\Big),$$

which clearly it is the *right adjoint map associated with the Poincaré pairing* $\mathbb{P}$.

The following proposition paraphrases the statement 1.3.2-(b).

1.7.2. Proposition. *Let M be an oriented manifold.*

a) *The morphism of complexes*

$$\mathbb{D}'_M : \big(\Omega_c(M)[d_M],d\big) \longhookrightarrow \big(\Omega(M)^\vee,-d\big)$$

is always an injection and a quasi-injection. We denote by

$$\mathscr{D}'_M : H_c(M)[d_M] \longhookrightarrow H(M)^\vee$$

the induced injection in cohomology.

b) *The morphism $\mathscr{D}'_M$ is an isomorphism if and only if M is of finite type.*

1.7.3. The Gysin Morphism. The last statement shows that for oriented manifolds of finite type, compact support cohomology canonically coincides with

the dual of arbitrary support cohomology so that if M and N are as such manifolds, the diagram

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{c}}(M)[d_M] & \xrightarrow[\simeq]{\mathscr{D}'_M} & H(M)^\vee \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & \oplus & \downarrow{\scriptstyle H(f^*)^\vee} \\ H_{\mathrm{c}}(N)[d_N] & \xrightarrow[\simeq]{\mathscr{D}'_N} & H(N)^\vee \end{array} \qquad (\mathscr{D}')$$

can be closed as a commutative diagram in a unique way by a morphism of graded spaces $f_* : H_{\mathrm{c}}(M)[d_M] \to H_{\mathrm{c}}(N)[d_N]$. It is then clear that the correspondence defined over the category of oriented finite type manifolds, that assigns $M \rightsquigarrow M_* := H_{\mathrm{c}}(M)[d_M]$ and $f \rightsquigarrow f_*$, is a covariant functor.

When the manifold N in $(\mathscr{D}')$ is not of finite type, $\mathscr{D}'_N$ is still an injection but it is no longer surjective so that it is not obvious that the diagram can be closed. Statement (b) in the next theorem states that this is in fact the case. It is therefore always possible to define the morphism $f_* : M_* \to N_*$, which we call *the Gysin morphism associated with* f. The resulting correspondence

$$M \rightsquigarrow M_* := H_{\mathrm{c}}(M)[d_M] \quad \text{and} \quad f \rightsquigarrow f_*$$

will thus appear to be a covariant functor defined over the ***whole*** category $\mathrm{Man}^{\mathrm{or}}$, which will be called *the Gysin functor*.

1.7.4. Theorem and definitions

a) *Let M be oriented and endow its open subsets with induced orientations. For any inclusion of open subsets $i : V \subseteq W$, denote by $i_* : \Omega_{\mathrm{c}}(V) \to \Omega_{\mathrm{c}}(W)$ the map that assigns to $\beta \in \Omega_{\mathrm{c}}(V)$ its extension by zero to W, called* the pushforward of β. *Then, the following diagrams*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{\mathrm{c}}(V)[d_M] & \xrightarrow{\mathbb{D}'_V} & \Omega(V)^\vee \\ {\scriptstyle i_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (i^*)^\vee} \\ \Omega_{\mathrm{c}}(W)[d_M] & \xrightarrow{\mathbb{D}'_W} & \Omega(W)^\vee \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_{\mathrm{c}}(V)[d_M] & \xrightarrow{\mathscr{D}'_V} & H(V)^\vee \\ {\scriptstyle H_{\mathrm{c}}(i_*)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H(i^*)^\vee} \\ H_{\mathrm{c}}(W)[d_M] & \xrightarrow{\mathscr{D}'_W} & H(W)^\vee \end{array}$$

are commutative, i.e. (i^*, i_*) is a Poincaré adjoint pair (1.3.3).

b) *For any map $f : M \to N$ between oriented manifolds, one has the diagram*

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{c}}(M)[d_M] & \xrightarrow{\mathscr{D}'_M} & H(M)^\vee \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H(f^*)^\vee} \\ H_{\mathrm{c}}(N)[d_N] & \xrightarrow{\mathscr{D}'_N} & H(N)^\vee \end{array} \qquad (\mathscr{D}')$$

where $H(f^*)^\vee\big(\mathrm{Im}(\mathscr{D}'_M)\big) \subseteq \mathrm{Im}(\mathscr{D}'_N)$, so that there exists one and only one morphism of graded spaces

$$f_* : H_{\mathrm{c}}(M)[d_M] \longrightarrow H_{\mathrm{c}}(N)[d_N] \qquad (\diamond)$$

called the Gysin morphism associated with f, *making $(\mathscr{D}')$ commutative, i.e. $(H(f^*), f_*)$ is a Poincaré adjoint pair in cohomology, which means that, for any $[\alpha] \in H(N)$ and $[\beta] \in H_{\mathrm{c}}(M)$, the equation in X,*

$$\int_M f^*[\alpha] \cup [\beta] = \int_N [\alpha] \cup X\,, \qquad (\diamond\diamond)$$

admits one and only one solution in $H_{\mathrm{c}}(N)$, namely $X = f_*[\beta]$.

Furthermore, f_* in ($\diamond$) is a morphism of $H(N)$-modules, i.e. the equality, called the projection formula,

$$f_*\big(f^*[\alpha] \cup [\beta]\big) = [\alpha] \cup f_*([\beta]) \qquad (\diamond\diamond\diamond)$$

holds for all $[\alpha] \in H(N)$ and $[\beta] \in H_c(M)$.

c) *The correspondence*

$$(_)_* : \mathrm{Man}^{\mathrm{or}} \rightsquigarrow \mathrm{GV}(\mathbb{R}) \qquad \text{with} \qquad \begin{cases} M \rightsquigarrow M_* := H_c(M)[d_M] \\ f \rightsquigarrow f_* \end{cases}$$

is a covariant functor. It will be called the Gysin functor.

d) *If M and N are oriented of finite type, then $f^* : H(N) \to H(M)$ is an isomorphism if and only if the Gysin morphism $f_* : H_c(M)[d_M] \to H_c(N)[d_N]$ is also an isomorphism.*

Proof. (a) The commutativity results from the equality

$$\int_V \alpha|_V \wedge \beta = \int_W \alpha \wedge i_*\beta$$

for $\alpha \in \Omega(W)$ and $\beta \in \Omega_c(V)$, which is evident since the support of $\alpha \wedge i_*\beta$ is contained in V.

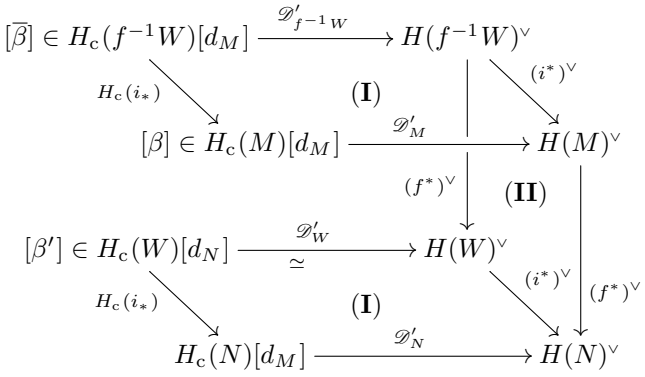
(b) One must verify that, given $[\beta] \in H_c(M)$, the linear form

$$[\alpha] \in H(N) \mapsto \int_M f^*[\alpha] \cup [\beta]$$

is of the form

$$[\alpha] \in H(N) \mapsto \int_N [\alpha] \cup [\beta']$$

for some $[\beta'] \in H_c(N)$. Now, thanks to proposition 1.4.4, there exists an open subset $W \in N$ of finite type such that $f^{-1}W$ contains the support of β, denoted $\overline{\beta} := \beta|_{f^{-1}W}$. One then has the following commutative diagram:



where subdiagrams (**I**) are commutative after (c) and the commutativity of (**II**) is just functoriality of pullbacks.

Following the arrows, we see that

$$\begin{aligned}(f^*)^\vee \circ \mathscr{D}'_M([\beta]) &= (i^*)^\vee \circ (f^*)^\vee \circ \mathscr{D}'_{f^{-1}W}([\overline{\beta}]) \\ &= (i^*)^\vee \circ \mathscr{D}'_W([\beta']) \\ &= \mathscr{D}'_N \circ H_c(i_*)([\beta'])\end{aligned}$$

where $[\beta'] \in H_c(W)[d_N]$ verifies

$$\mathscr{D}'_W([\beta']) = (f^*)^\vee \circ \mathscr{D}'_{f^{-1}W}([\overline{\beta}])$$

which is possible since $\mathscr{D}'_W$ is **surjective** as W is of finite type !

The statement about the equation ($\diamond\diamond$) is clear and implies formally the projection formula since

$$\begin{aligned}\int_N [\omega] \cup f_*\big(f^*[\alpha] \cup [\beta]\big) &= \int_M f^*[\omega] \cup f^*[\alpha] \cup [\beta] \\ &= \int_M f^*([\omega] \cup [\alpha]) \cup [\beta] = \int_N [\omega] \cup [\alpha] \cup f_*[\beta].\end{aligned}$$

Finally, (c) is trivial since $\mathscr{D}'$ is bijective over its image, and (d) is clear. □

1.7.5. Remark. It is important to note that the main ingredients in the proof are (i) the Poincaré pairings, (ii) Poincaré duality, (iii) the ascending chain property (1.4.3). In later sections of these notes we will show that all these ingredients exist also in the equivariant setting so that the last theorem and its proof will extend *verbatim* to G-manifolds and G-equivariant cohomology.

1.7.6. Exercise. Let $f : M \to N$ be a map between oriented manifolds. Show that the dual of the Gysin morphism $f_* : H_c(M)[d_M] \to H_c(N)[d_N]$ coincides, via Poincaré duality, with the *pullback morphism* $f^* : H(N) \to H(M)$.

1.7.7. The Image of $\mathscr{D}'_M$. The next proposition will be used when extending the Gysin functor to the equivariant context. It gives a description of the image of $\mathscr{D}'_M$ in terms of ascending chains of open finite type subsets of M, which was the main reason why we proved that such covers always exist (see 1.4.4).

1.7.8. Proposition. *Let $\mathscr{U}$ be a filtrant open cover ([4]) of a manifold M.*

a) *Let $i : V \subseteq W$ denote an inclusion of open subsets of M.*

The map $i_* : \Omega_c(V) \subseteq \Omega_c(W)$, that assigns to $\beta \in \Omega_c(V)$ the differential form $i_*(\beta) \in \Omega_c(W)$ equal to β over V and 0 otherwise, is a well-defined morphism of complexes inducing in cohomology the morphism of graded spaces $H_c(i_*) : H_c(V) \to H_c(W)$. One has also the morphism of complexes $i^* : \Omega(W) \to \Omega(V)$ that restricts a differential form of W to V, and the corresponding morphism of graded spaces $H(i^*) : H(W) \to H(V)$.

These constructions, applied to the elements of $\mathscr{U}$, give rise to the inductive systems $\{\Omega_c(U)\}_{U\in\mathscr{U}}$ and $\{H_c(U)\}_{U\in\mathscr{U}}$, and to the projective systems $\{\Omega(U)\}_{U\in\mathscr{U}}$ and $\{H(U)\}_{U\in\mathscr{U}}$, whence the canonical maps

$$\nu : \varinjlim_{U\in\mathscr{U}} \Omega_c(U) \to \Omega_c(M) \quad \text{and} \quad H(\nu) : \varinjlim_{U\in\mathscr{U}} H_c(U) \to H_c(M),$$

$$\mu : \Omega(M) \to \varprojlim_{U\in\mathscr{U}} \Omega(U) \quad \text{and} \quad H(\mu) : H(M) \to \varprojlim_{U\in\mathscr{U}} H(U).$$

All these maps are bijective.

[4] We recall that $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ is said *filtrant* whenever for all $U_1, U_2 \in \mathscr{U}$ there exists $U_3 \in \mathscr{U}$ such that $(U_1 \cup U_2) \subseteq U_3$.

b) *Suppose M is oriented, then the map*

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{D}'_{\mathscr{U}} : \big(\Omega_{\mathrm{c}}(M)[d_M], d\big) & \longrightarrow & \varinjlim_{U\in\mathscr{U}} \big(\Omega(U)^\vee, -d\big) \\ \beta & \mapsto & \Big(\alpha \longmapsto \displaystyle\int_M \alpha\wedge\beta\Big) \end{array}}$$

is a well-defined morphism of complexes inducing in cohomology the map

$$\mathscr{D}'_{\mathscr{U}} : H_{\mathrm{c}}(M)[d_M] \to \varinjlim_{U\in\mathscr{U}} H(U)^\vee$$

c) *Suppose further that each $U\in\mathscr{U}$ is of finite type. Then $\mathbb{D}'_{\mathscr{U}}$ is a quasi-isomorphism, and one has*

$$\mathrm{Im}(\mathscr{D}'_M) = \varinjlim_{U\in\mathscr{U}} H(U)^\vee \subseteq H(M)^\vee \qquad (\diamond)$$

Moreover, the adjoint $\mathscr{D}'^\vee_{\mathscr{U}}$ canonically identifies with $\mathscr{D}_M$; more precisely, the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{U\in\mathscr{U}} H(U)[d_M] = (\varinjlim_{U\in\mathscr{U}} H(U)^\vee)^\vee[d_M] & \xrightarrow{\mathscr{D}'^\vee_{\mathscr{U}}} & H_{\mathrm{c}}(M)^\vee \\ \uparrow\simeq & & \| \\ H(M)[d_M] & \xrightarrow{\qquad\mathscr{D}_M\qquad} & H_{\mathrm{c}}(M)^\vee \end{array}$$

Proof. (a) The map $\nu : \varinjlim_{U\in\mathscr{U}} \Omega^*_{\mathrm{c}}(U) \to \Omega^*_{\mathrm{c}}(M)$ is injective since it's the limit of a filtrant inductive system of injective maps. The image of ν is the union of $\Omega^*_{\mathrm{c}}(U)$ for the same reason. Now, if $\omega\in\Omega^*_{\mathrm{c}}(M)$, its support, being compact, is contained in some $U\in\mathscr{U}$ so that ω is the pushforward of $\omega|_U\in\Omega^*_{\mathrm{c}}(U)$. This justifies the equality $\Omega^*_{\mathrm{c}}(M) = \bigcup_{U\in\mathscr{U}}\Omega^*_{\mathrm{c}}(U)$ and proves that ν is surjective. Standard arguments on the homology of filtrant inductive systems of complexes prove that $H(\nu)$ is bijective.

The map $\mu : \Omega(M) \to \varprojlim_{U\in\mathscr{U}}\Omega(U)$ is injective, since a differential form is null if and only if it is locally null. To see it is also surjective, let $\{\alpha_U\in\Omega(U)\}_{U\in\mathscr{U}}$ be a given projective system of differential forms, and note that for any $x\in M$, the element $\tilde{\alpha}(x) := \alpha_U(x)$ is well defined since if $x\in U_1\in\mathscr{U}$ and $x\in U_2\in\mathscr{U}$, one chooses $U_3\in\mathscr{U}$ s.t. $U_1\cup U_2\subseteq U_3$, in which case $\alpha_{U_1}(x) = \alpha_{U_3}(x) = \alpha_{U_2}(x)$. Likewise, one verifies the differentiability of $\tilde{\alpha}$. It is clear that $\tilde{\alpha}|_U = \alpha_U$, which ends the proof that μ is surjective.

It remains only to justify why $H(\mu)$ is bijective. This is immediate when M is orientable, since $H(\mu)$ is then just the Poincaré dual of $H_{\mathrm{c}}(\nu)$ which has already been shown to be bijective. Otherwise, when M is not orientable, we lift $\mathscr{U}$ to the orientation manifold $\tilde{M}$ associated with M through the canonical $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-covering $p : \tilde{M}\twoheadrightarrow M$, setting therefore $\tilde{\mathscr{U}} := \{\tilde{U} := p^{-1}(U) \,|\, U\in\mathscr{U}\}$. As $\tilde{M}$ is orientable, the map $H(\tilde{M}) \to \varprojlim_{U\in\mathscr{U}} H(\tilde{U})$ is now bijective, and because this map is also compatible with the reversing-orientation action of $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, it induces a bijection between invariants subspaces $H(\tilde{M})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_{U\in\mathscr{U}} H(\tilde{U})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$, and one concludes since $H(U) = H(\tilde{U})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$.

(b) Endow each $U\in\mathscr{U}$ with the induced orientation. Taking the inductive limit of the maps $\mathbb{D}'_U : H_{\mathrm{c}}(U)[d_M] \to H(U)^\vee$ and applying (a) one sees immediately that $\mathbb{D}_{\mathscr{U}} = \varinjlim_{U\in\mathscr{U}} \mathbb{D}'_U$.

(c) By 1.7.2 the maps $\mathbb{D}'_U : H_c(U)[d_M] \to H(U)^\vee$ are quasi-isomorphisms for each $U \in \mathscr{U}$, hence $\mathbb{D}_{\mathscr{U}} = \varinjlim_{U\in\mathscr{U}} \mathbb{D}'_U$ is also a quasi-isomorphism since $\mathscr{U}$ is filtrant. The rest of the statement is then clear by duality. □

1.8. The Gysin Functor for Proper Maps

In this section, the Gysin morphism for compact supports

$$f_* : H_c(M)[d_M] \to H_c(N)[d_N]$$

will be extended to arbitrary supports

$$f_! : H(M)[d_M] \to H(N)[d_N]$$

when $f : M \to N$ is a **proper** map. As we will see this case is much simpler than the general one as it results immediately from Poincaré duality.

When $f : M \to N$ is proper, the pullback $f^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$ respects compact supports and induces a morphism of complexes $f^* : \Omega_c(N) \to \Omega_c(M)$, giving rise to the *covariant* functor from $\mathrm{Man}_{\mathrm{pr}}$ to $\mathrm{Vec}(\mathbb{R})$

$$M \rightsquigarrow H_c(M)^\vee, \qquad f \rightsquigarrow H_c(f^*)^\vee.$$

When M is oriented, $\mathbb{D}'_M$ may be extended from $\Omega_c(M)$ to $\Omega(M)$ by setting (see 1.7.1)

$$\mathbb{D}'_M(\alpha) = \Big(\beta \mapsto \int_M \beta\wedge\alpha\Big), \quad \forall\alpha\in\Omega(M), \quad \forall\beta\in\Omega_c(M),$$

so that the diagram

$$\begin{array}{ccc} \Omega(M) & \xrightarrow[(\simeq)]{\mathbb{D}'_M} & \Omega_c(M)^\vee \\ {\scriptstyle\subseteq}\uparrow & & \uparrow\!\!\uparrow \\ \Omega_c(M) & \xrightarrow{\mathbb{D}'_M} & \Omega(M)^\vee \end{array}$$

is commutative, and, moreover, with its first line a *quasi-isomorphism* as it is simply the Poincaré duality map $\mathbb{D}_M$ up to ±1.

1.8.1. Definition. If $f : M \to N$ is a proper map between oriented manifolds, the *Gysin morphism associated with* f is the map $f_! : H(M)[d_M] \to H(N[d_N])$ making commutative the diagram

$$\begin{array}{ccc} H(M)[d_M] & \xrightarrow[\simeq]{\mathscr{D}'_M} & H_c(M)^\vee \\ {\scriptstyle f_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_c(f^*)^\vee} \\ H(N)[d_N] & \xrightarrow[\simeq]{\mathscr{D}'_N} & H_c(N)^\vee \end{array}$$

The next theorem, analog to 1.7.4 and almost immediate, is left as an exercise.

1.8.2. Theorem and definitions

a) *For $\beta \in H_c(N)$ and $\alpha \in H(M)$, the equation in X,*

$$\int_M f^*[\beta]\cup[\alpha] = \int_N [\beta]\cup X, \qquad (\star\star)$$

admits one and only one solution in $H(N)$, namely $X = f_![\alpha]$.

Furthermore, $f_!$ is a morphism of $H_c(N)$-modules, i.e. the equality, called the projection formula for proper maps,

$$f_!\big(f^*[\beta]\cup[\alpha]\big)=[\beta]\cup f_![\alpha] \qquad (\star\star\star)$$

holds for all $[\beta]\in H_c(N)$ and $[\alpha]\in H(M)$.

b) *The following correspondence is a covariant functor:*

$$f_!:\mathrm{Man}_{\mathrm{pr}}^{\mathrm{or}}\rightsquigarrow \mathrm{GV}(\mathbb{R}) \qquad \textit{with} \qquad \begin{cases} M\rightsquigarrow M_!:=H(M)[d_M] \\ f\rightsquigarrow f_! \end{cases}$$

We will refer to it as the Gysin functor for proper maps.

c) *The pullback $f^*:H_c(N)\to H_c(M)$ is an isomorphism if and only if the Gysin morphism $f_!:H(M)[d_M]\to H(N)[d_N]$ is also an isomorphism.*

d) *The natural map $\phi(_):H_c(_)[d__]\to H(_)[d__]$ (1.2.3) is a homomorphism of Gysin functors $(_)_*\to(_)_!$ over the category $\mathrm{Man}_{\mathrm{pr}}^{\mathrm{or}}$, i.e. the diagrams*

$$\begin{array}{ccc} H_c(M)[d_M] & \xrightarrow{\phi(M)} & H(M)[d_M] \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_!} \\ H_c(N)[d_N] & \xrightarrow{\phi(N)} & H(N)[d_N] \end{array}$$

are natural and commutative.

1.9. Principal Examples of Gysin Morphisms

1.9.1. Universal Property of the Gysin Morphism. This property is the statement (b) in theorem 1.7.4, which says that if $f:M\to N$ is a map between oriented manifolds, then for each $[\beta]\in H_c(M)$, the element $f_*([\beta])\in H_c(N)$ is determined by the equality, for all $[\alpha]\in H(N)$,

$$\boxed{\int_M f^*[\alpha]\cup[\beta]=\int_N[\alpha]\cup f_*[\beta]} \qquad (\diamond\diamond)$$

The pair (f_*,f^*) is a Poincaré *adjoint pair* in cohomology (1.3.3).

1.9.2. Constant Map. Let M be oriented and denote by $c_M:M\to\{\bullet\}$ the constant map. One applies $(\diamond\diamond)$ taking $\alpha=1$:

$$c_{M*}([\beta])=\int_{\{\bullet\}}1\cup c_{M*}[\beta]=\int_M\beta.$$

so that the Gysin morphism $c_{M*}:H_c(M)[d_M]\to H_c(\{\bullet\})=\mathbb{R}$ is the integration map, Poincaré dual of the graded algebra homomorphism $c_M^*:\mathbb{R}\to H(M)$.

1.9.3. Exercise. Show that $c_M^*:\Omega(\{\bullet\})\to\Omega(M)$ admits a right Poincaré adjoint at the complex level, i.e. $c_{M*}:\Omega_c(M)[d_M]\to\Omega(\{\bullet\})$.

1.9.4. Open Embedding. Let M be oriented. Given an open embedding $i:U\subseteq M$, endow U with the induced orientation. For any $\beta\in\Omega_c(U)$ one has the tautological equality:

$$\int_U\alpha|_U\wedge\beta=\int_M\alpha\wedge i_*\beta \qquad (*)$$

where $i_*\beta \in \Omega_c(M)$ denotes the extension by zero of β. The Gysin morphism $i_* : H_c(U)[d_U] \to H_c(M)[d_M]$ is therefore the pushforward $i_* = H_c(i_*)[d_M]$ (see 1.7.8-(a)). Note also that the equality $(*)$ shows that the pair (i^*,i_*) is a Poincaré adjoint pair (1.3.3).

1.9.5. Locally Trivial Fibration. Let $\pi : E \to B$ be a locally trivial fibration with base space B (connected for simplicity) and total space E both assumed oriented, with fiber F of dimension d_F endowed with the induced orientation. Under these assumptions one has the *operation of integration along* F (see [BT] **I**§6 pp. 61-63) which is a morphism of complexes

$$\int_F : \Omega_c(E)[d_F] \to \Omega_c(B)$$

satisfying

$$\int_E \pi^*\alpha \wedge \beta = \int_B \Big(\alpha \wedge \int_F \beta\Big), \qquad (*)$$

so that after the adjunction property $(\diamond\diamond)$, one has $\pi_* = \int_F[d_B]$ and the Gysin morphism is the shift of integration along fibers. Note again that $(*)$ shows that the pair $(\pi^*,\int_F[d_B])$ is a Poincaré adjoint pair.

1.9.6. Proposition. *Let (π,V,B) and (π,V',B') be two oriented locally trivial fibrations. Let $g : B' \to B$ be a* ***proper*** *map and assume the following diagram cartesian:*

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{g} & V \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ B' & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

i.e. $V' = \big\{(b',v) \in B' \times V \;\big|\; g(b') = \pi(v)\big\}$. *Then*

$$\begin{cases} g^* \circ \pi_* = \pi_* \circ g^* : H_c(V) \to H_c(B') \\ \pi^* \circ g_! = g_! \circ \pi^* \;\; : H(B') \to H(V) \end{cases}$$

Hint. By adjointness, the first equality is equivalent to the second. The first equality follows from the equality for differential forms $g^*\big(\int_F \omega\big) = \int_F g^*(\omega)$ for all $\omega \in \Omega_c(V)$, that may be verified locally in B' (*loc.cit.*). ⊡

1.9.7. Zero Section of a Vector Bundle. Let (π,V,B) be a vector bundle and assume B and V oriented. The *zero section map* $\sigma : B \to V$ is a closed embedding, hence proper, so that we have the Gysin morphism for proper maps $\sigma_! : H(B) \to H(V)$. By the adjunction property $(\star\star)$ (see 1.8.2-(a)), one has for all $\beta \in H_c(V)$ and $\alpha \in H(B)$

$$\begin{aligned} \int_V [\beta] \cup \sigma_!([\alpha]) &= \int_B \sigma^*[\beta] \cup [\alpha] = \int_B \sigma^*[\beta] \cup \sigma^*(\pi^*[\alpha]) \\ &= \int_B \sigma^*([\beta] \cup \pi^*[\alpha]) \cup 1 = \int_V [\beta] \cup \pi^*[\alpha] \cup \sigma_!(1) \end{aligned} \qquad (\diamond)$$

where $\Phi := \sigma_!(1)$ is *the Thom class of the pair* (B,V). The Gysin morphism associated with the zero section of a fiber bundle

$$\sigma_! : H(B)[d_B] \to H(V)[d_V] \qquad (!)$$

is then the multiplication by the Thom class

$$\sigma_!([\alpha]) = \pi^*[\alpha] \cup \Phi. \tag{!!}$$

Finally, note that $\sigma_!$ is generally not an isomorphism, since it identifies, via Poincaré duality, with the dual of the proper pullback $\sigma^* : H_c(V) \to H_c(B)$ (see 1.8.1) which is generally not an isomorphism ([5]).

It can be seen ([BT] §I.6 p. 64) that if $\alpha \in H_c(B)$, then $\pi^*[\alpha] \cup \Phi$ naturally belongs to $H_c(V)$ so that the Gysin morphism

$$\sigma_* : H_c(B)[d_B] \to H_c(V)[d_V] \tag{$\star$}$$

is given by the same equality (!!),

$$\sigma_*([\beta]) = \pi^*[\beta] \wedge \Phi. \tag{$\star\star$}$$

On the other hand, the Poincaré lemma for vector bundles asserts that the pullback $\pi^* : H(B) \to H(V)$ is an isomorphism and this implies, via Poincaré duality (see 1.7.6), that $\pi_* : H_c(V)[d_V] \to H_c(B)[d_B]$ is also an isomorphism. Now, by functoriality, one has $\pi_* \circ \sigma_* = \mathrm{id}$, so that σ_* is also an isomorphism. This isomorphism is *the Thom isomorphism*.

1.9.8. Proposition. *Let (π,V,B) and (π,V',B') be two oriented vector bundles and assume the cartesian diagram in 1.9.6 with $g : B' \to B$* **proper**. *Denote by $\sigma : B \to V$ and $\sigma : B' \to V'$ the zero section maps. The diagram*

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ V' & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

is cartesian and the equalities $\begin{cases} g^* \circ \sigma_* = \sigma_* \circ g^* : H_c(B) \to H_c(V') \\ \sigma^* \circ g_! = g_! \circ \sigma^* : H(V') \to H(B) \end{cases}$ *hold.*

Hint. It is a corollary of 1.9.6 since σ_* is the inverse of π_*. ⊡

1.10. Constructions of Gysin Morphisms

In this last preliminary section we summarize the steps in the construction of the Gysin morphisms.

1.10.1. The Proper Case. Let $f : M \to N$ be a **proper** map of oriented manifolds. To $\alpha \in \Omega(M)$ we assign the linear form on $\Omega_c(N)$ defined by $\mathbb{D}'_f(\alpha) : \beta \mapsto \int_M f^*\beta \wedge \alpha$. In this way we obtain diagram

$$\begin{array}{ccc} \Omega(M)[d_M] & \xrightarrow{\quad f_! \quad} & \Omega(N)[d_N] \\ & \searrow^{\mathbb{D}'_f} \quad \oplus & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}'_N \text{ (quasi-iso)}} \\ & & \Omega_c(N)^\vee \end{array}$$

[5] For example, if B is compact, $H_c(B) = H(B) = H(V)$ and σ^* would give a graded isomorphism $H_c(V) \simeq H(V)$, and by Poincaré duality $H^0(V) \simeq H^{d_V}(V)$, which impossible if V is a vector bundle of positive dimension over B.

which may be closed in cohomology, since $\mathbb{D}'_N$ is a quasi-isomorphism. Note that the closing arrow $f_!$, the Gysin morphism for proper maps, in general exists *only* at the cohomology level.

1.10.2. The General Case. Let $f : M \to N$ be a map of oriented manifolds. To $\beta \in \Omega_c(M)$ we assign the linear form on $\Omega(N)$ defined by $\mathbb{D}'_f(\beta) : \alpha \mapsto \int_M f^*\alpha \wedge \beta$. In this way we obtain the diagram

$$\begin{array}{ccc} \Omega_c(M)[d_M] & \xrightarrow{\quad f_* \quad} & \Omega_c(N)[d_N] \\ & \searrow^{\mathbb{D}'_f} \quad \bigoplus & \downarrow \mathbb{D}'_N \quad \left(\begin{array}{c}\text{quasi-iso if } N \text{ is of}\\ \text{finite type}\end{array}\right) \\ & & \Omega(N)^\vee \end{array}$$

which may be closed in cohomology (as in the proper case), when N **is of finite type**, since then $\mathbb{D}'_N$ is a quasi-isomorphism (1.7.2-(b)).

When N is not of finite type, one fixes any filtrant cover $\mathscr{U}$ of N made up of open finite type subsets of N (see 1.4.4), and replaces $\mathbb{D}'_N$ with $\mathbb{D}'_{\mathscr{U}}$. In this way, we get (see 1.7.8-(b,c)), the following diagram:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_c(M)[d_M] & \xrightarrow{\quad f_* \quad} & \Omega_c(N)[d_N] & = & \Omega_c(N)[d_N] \\ & \searrow^{\mathbb{D}'_{f,\mathscr{U}}} \quad \bigoplus & \downarrow \mathbb{D}'_{\mathscr{U}} \text{ (quasi-iso)} & & \downarrow \mathbb{D}'_N \\ & & \varinjlim_{U\in\mathscr{U}} \Omega(U)^\vee & \xrightarrow[\subseteq]{} & \Omega(N)^\vee \end{array}$$

where $\mathbb{D}'_{f,\mathscr{U}}$ is defined as follows. For $\beta \in \Omega_c(M)$ denote by $|\beta|$ its support and by $\mathscr{U}_\beta \subseteq \mathscr{U}$ the system consisting of $U \in \mathscr{U}$ s.t. $|\beta| \subseteq f^{-1}U$. One has a natural map $\varinjlim_{\mathscr{U}_\beta} \Omega(U)^\vee \to \varinjlim_{\mathscr{U}} \Omega(U)^\vee$ (which is in fact is bijective). Now, for every $U \in \mathscr{U}_\beta$ the linear map $\left(\int_M f^*(_) \wedge \beta\right) : \Omega(U) \to \mathbb{R}$, is well defined and is compatible with restriction, so that it defines an element of $\varinjlim_{\mathscr{U}_\beta} \Omega(U)^\vee$, and then of $\varinjlim_{\mathscr{U}} \Omega(U)^\vee$. This element is $\mathbb{D}'_{f,\mathscr{U}}(\beta)$ by definition.

The closing arrow f_*, *the Gysin morphism associated with a general map* f, is then defined in cohomology as the composition ${\mathscr{D}'_{\mathscr{U}}}^{-1} \circ H(\mathbb{D}_{f,\mathscr{U}})$.

1.10.3. Remark. In all cases, the Gysin morphism appears as the composition of a morphism of complexes with the "inverse" of a quasi-isomorphism, which obviously is possible in cohomology but also in the *derived category of complexes* since this is its main property, i.e. a morphism in derived category is an isomorphism if and only if it induces an isomorphism in cohomology. Gysin morphisms are therefore well defined in the derived category.

1.11. Exercises

1.11.1. Gysin Long Exact Sequence. Let $i : F \subseteq M$ be a closed embedding of oriented manifolds. Assume F compact, for simplicity. Put $U := M \backslash F$ and $j : U \subseteq M$ the canonical injection.

a) i) Let $\mathscr{F}$ denote the set of open neighborhood of F. Restriction morphisms $R_V^W : \Omega(W) \to \Omega(V)$ for all $W \supseteq V \supseteq F$, give rise to a filtrant inductive

system $\{R_V^W \mid W \supseteq V \text{ in } \mathscr{F}\}$ and a canonical morphism of complexes $R_{\mathscr{F}}^M : \Omega(M) \to \varinjlim_{V\in\mathscr{F}} \Omega(V)$. Show that the short sequence

$$\mathbf{0} \to \Omega_{\mathrm{c}}(U) \xrightarrow{j_*} \Omega_{\mathrm{c}}(M) \xrightarrow{R_{\mathscr{F}}^M} \varinjlim_{\mathscr{F}} \Omega(V) \to \mathbf{0}$$

where j_* is the pushforward morphism, is exact.

ii) Restrictions $R_F^V : \Omega(V) \to \Omega(F)$ for $V \supseteq F$, define a morphism of the inductive system $\{R_V^W \mid W \supseteq V \text{ in } \mathscr{F}\}$ into $\Omega(F)$. Denote by $R_F^{\mathscr{F}} := \varinjlim_{\mathscr{F}} R_F^V$. Show that

$$R_F^{\mathscr{F}} : \varinjlim_{\mathscr{F}} \Omega(V) \to \Omega(F)$$

is a quasi-isomorphism.

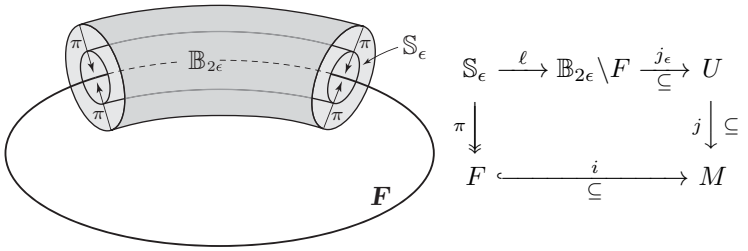
iii) Derive the existence of *the long exact sequence of compact support cohomology*

$$\cdots \to H_{\mathrm{c}}^k(U) \xrightarrow{i_*} H_{\mathrm{c}}^k(M) \xrightarrow{i^*} H^k(F) \xrightarrow{c_k} H_{\mathrm{c}}^{k+1}(U) \to \cdots \qquad (\diamond)$$

iv) Endow M with a Riemannian metric $d : M \times M \to \mathbb{R}$. For each $\epsilon \in \mathbb{R}$, denote

$$\begin{cases} \mathbb{B}_\epsilon(F) := \{m \in M \mid d(m,F) < \epsilon\} \\ \mathbb{S}_\epsilon(F) := \{m \in M \mid d(m,F) = \epsilon\} \end{cases}$$

If ϵ is small enough, $\mathbb{B}_{2\epsilon}(F)$ is a fiber bundle with fiber $\mathbb{R}^{d_M - d_F}$ over F via the geodesic projection $\pi : \mathbb{B}_{2\epsilon} \to F$. By restriction, $\pi : \mathbb{S}_\epsilon \to F$ is a fiber bundle with compact fiber $\mathbb{S}^{d_M - d_F - 1}$. Denote by $\ell : \mathbb{S}_\epsilon \hookrightarrow \mathbb{B}_{2\epsilon}\backslash F$ the canonical injection. We have the following maps



Show that the connecting morphism $c : H(F) \to H_{\mathrm{c}}(U)[1]$ is given by the composition of the following morphisms

$$H(F) \xrightarrow{\pi^*} H_{\mathrm{c}}(\mathbb{S}_\epsilon) \xrightarrow{\ell_*[-d_{\mathbb{S}_\epsilon}]} H_{\mathrm{c}}(\mathbb{B}_{2\epsilon}\backslash F)[1] \xrightarrow{j_{\epsilon,*}} H_{\mathrm{c}}(U)[1]$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{c}$$

where $\ell_* : H_{\mathrm{c}}(\mathbb{S}_\epsilon)[d_{\mathbb{S}_\epsilon}] \to H_{\mathrm{c}}(\mathbb{B}_{2\epsilon}\backslash F)[d_{\mathbb{B}_{2\epsilon}}]$ denotes the Gysin morphism associated with ℓ.

b) i) Dualizing and shifting the long exact sequence of compact support $(\diamond)$, justify the exactness of the *Gysin long exact sequence*

$$\xrightarrow{\delta[-1]} H(F)[d_F - d_M] \xrightarrow{i_*[-d_M]} H(M) \xrightarrow{j^*} H(U) \xrightarrow{\delta} \qquad (\diamond\diamond)$$

where $i : F \to N$ and $j : U \to N$ are the canonical injections and δ is adjoint to the shift of the connecting morphism c in $(\diamond)$.

ii) Show that the connecting morphism $\delta : H(U) \to H(F)[-(d_M - d_F - 1)]$ is simply the restriction to $\mathbb{S}_\epsilon$ followed by integration along fibers of π

$$\delta(\alpha) = \int_{\mathbb{S}^{d_M - d_F - 1}} \alpha|_{\mathbb{S}_\epsilon} .$$

1.11.2. Lefschetz Fixed Point Theorem. Let M be a oriented manifold. Denote by $\delta : M \to M \times M$ the diagonal embedding $x \mapsto (x,x)$ and let $\Delta := \mathrm{Im}(\delta)$. Given $f : M \to M$, denote $\mathrm{Gr}(f) : M \to M \times M$ *the graph map* $x \mapsto (f(x),x)$. The *Lefschetz class of* f is by definition

$$L(f) := \mathrm{Gr}(f)^*(\delta_!(1)) \in H^{d_M}(M),$$

and its *Lefschetz number* is $\Lambda_f := \int_M L(f)$.

a) Explain de following the equalities

$$\Lambda_f := \int_M \mathrm{Gr}(f)^*(\delta_!(1)) = \int_{M\times M} \delta_!(1) \cup \mathrm{Gr}(f)_!(1) = (-1)^{d_M} \int_M \delta^*(\mathrm{Gr}(f)_!(1)). \quad (\diamond)$$

b) Assuming that f has no fixed points, show that the Gysin morphism

$$\mathrm{Gr}(f)_! : H(M)[d_M] \to H(M \times M)[2d_M]$$

factorizes through $H_c(M \times M \backslash \Delta)$ so that $\Lambda_f = 0$.

c) From now on suppose that M is orientable. Let $\mathscr{B} := \{e_i\}_{i\in I}$ be a graded basis of $H(M)$ and let $\mathscr{B}' := \{e'_i\}_{i\in I}$ denote the Poincaré dual basis of $\mathscr{B}$, i.e. such that $e_i \cup e'_j = \delta_{i,j}[\zeta]$, where $[\zeta]$ denotes the fundamental class of M. Using the projection formula for $\delta : M \to M \times M$ show that

$$\delta_*(1) = \sum\nolimits_{i\in I} (-1)^{\deg(e_i)}\ e_i \otimes e'_i,$$

Prove the equality: $\displaystyle\int_M \delta_!(1)|_\Delta = \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \dim\big(H^k(M)\big)$.

d) Combining $(\diamond)$ with the last result, show the *Lefschetz fixed point formula*

$$\Lambda_f = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \,\mathrm{Tr}\big(f^* : H^k(M) \to H^k(M)\big)$$

In particular, if this alternating sum doesn't vanish, f has fixed points !

1.12. Conclusion. We have reached the end of the preliminaries on Poincaré duality and Gysin morphism in the nonequivariant setting and using the de Rham model for the cohomology.

As shown, the key ingredient is the Poincaré pairing so that, in order to extend everything to the context of G-manifolds and equivariant cohomology following exactly the same approach, we will need to begin recalling the equivariant de Rham model for equivariant cohomology, and then introduce the Poincaré pairing and the corresponding adjunctions, in a way that we gan give a sense and prove the equivariant analog to Poincaré duality. Section 4 is entirely devoted to this. In section 5, the G-equivariant Gysin morphisms associated with equivariant maps will then be defined formally following the same procedures described in 1.10.

But, before entering into those subjects, we first do a quick review of the origins of equivariant cohomology theory.

2. Equivariant Cohomology Background

1950 Cartan's ENS Seminar. In May/June 1950, Henri Cartan gave lectures n° 19/20 of the *Séminaire Cartan* at the *Ecole Normale Supérieure de Paris* ([6]). The talks, which concerned a principal fiber bundle $p : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ of base space a manifold $\mathscr{B}$, and fiber space a compact connected Lie group G (of Lie algebra $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$), focused on setting an algebraic framework for the study of the relationship between the cohomologies of $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ and G, and incorporating characteristic classes through an algebraized approach of the Chern-Weil homomorphism $\mathrm{ch} : S(\mathfrak{g})^G \to H(\mathscr{B})$.

In the first lecture, Cartan introduces the algebraic analog to the universal fiber bundle $\mathbb{E}G$ of G, *the Weil algebra* $W(\mathfrak{g})$, as an object of the category of $\mathfrak{g}$-differential graded algebras representing the functor "*algebraic connections*", in the same way the classifying space $\mathbb{B}G$ co-represents the *G-principal fiber bundles* functor.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Mor}_{\mathfrak{g}\text{-adg}}(W(\mathfrak{g})),\Omega(\mathscr{E})) & \xlongequal{\text{Weil}} & \{\text{algebraic connexions on } \Omega(\mathscr{E})\} \\
\Big\downarrow \text{restriction to basic subcomplexes} & & \Big\uparrow \\
\{\mathrm{ch} : S(\mathfrak{g})^G \to H(\mathscr{B})\} & \xleftarrow{\text{Chern}} & \{\text{infinitesimal connections on } \Omega(\mathscr{E})\} \\
\Big\uparrow & & \Big\downarrow \\
\mathrm{Hot}(\mathscr{B},\mathbb{B}G) & \xlongequal{\text{Steenrod}} & \{G\text{-principal fiber bundle } p : \mathscr{E} \to \mathscr{B}\}
\end{array}$$

It is in his second lecture that Cartan studies different ways to relate the cohomologies of $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ and G. Of these, the most interesting to us is the construction of a differential graded algebra whose cohomology is that of $\mathscr{B}$, taking as its main ingredients the de Rham complex of the total space $(\Omega(\mathscr{E}),d)$ and something else related to the Lie group G. For that, Cartan recalls that, through the pullback $p^* : \Omega(\mathscr{B}) \to \Omega(\mathscr{E})$, the complex $\Omega(\mathscr{B})$ is identified with the subcomplex $\Omega(\mathscr{E})^{\mathrm{bas}}$ of *basic* elements of $\Omega(\mathscr{E})$ viewed as a $\mathfrak{g}$-differential graded algebra. But this wouldn't really help, as $\Omega(\mathscr{E})$ is lost. Instead, Cartan pursues his previous idea and introduces the complex $W(\mathfrak{g})\otimes\Omega(\mathscr{E})$ as a candidate for the 'de Rham complex' of the *topological* space $\mathbb{E}G \times \mathscr{E}$, and replaces the previous pullback with the map $\Omega(\mathscr{B}) \to W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(\mathscr{E})$, $\omega \mapsto 1 \otimes p^*(\omega)$, the image of which lies in the subcomplex of basic elements of $W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(\mathscr{E})$, denoted by

$$\Omega_{\mathfrak{g}}(\mathscr{E}) := (W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(\mathscr{E}))^{\mathrm{bas}}.$$

Cartan then states that the resulting map $\Omega(\mathscr{B}) \to \Omega_{\mathfrak{g}}(\mathscr{E})$, which is a homomorphism of differential graded algebras, induces an isomorphism in cohomology, and, moreover, that one has

$$\boxed{\Omega_{\mathfrak{g}}(\mathscr{E}) = ((S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(\mathscr{E}))^{\mathfrak{g}}, d_{\mathfrak{g}})} \qquad (*)$$

with

$$d_{\mathfrak{g}}(P \otimes \omega) = P \otimes d\omega + \sum\nolimits_i Pe^i \otimes c(e_i)\omega, \qquad (**)$$

[6] Lecture 19 on May 15, and lecture 20 in two sessions: May 23 and June 19. The contents of these lectures where also presented at the *Colloque de topologie (espaces fibrés)*, held at Brussels on June 5 to 8.

where d is the differential in $\Omega(\mathscr{E})$, $\{e_i\}$ is a basis of $\mathfrak{g}$ of dual basis $\{e^i\}$, and $c(e_i)$ is the contraction operator associated with the vector field generated by the infinitesimal action of e_i on $\mathscr{E}$ ([7]). The differential graded algebra $\Omega_{\mathfrak{g}}(\mathscr{E})$, nowadays commonly known as *the Cartan's complex*, met Cartan's requirements perfectly.

At this point, it is worth emphasizing that the construction of $\Omega_{\mathfrak{g}}(M)$ made sense whether or not the action of G on M is free. Although clear, this was out of focus at the time of Cartan's lectures, where research was mostly concentrated on manifolds and principal fiber bundles rather than on general G-manifolds, and still less on general topological G-spaces.

———————×———————

1960 Borel's IAS Seminar. Some years later, in 1958-59, Armand Borel, who had been an active participant in the Cartan Seminar and in the Leray's courses at the *Collège de France* since his arrival in Paris in 1949, held his *Seminar on transformation groups* at the Institute for Advanced Study in Princeton ([B_2]). There, Borel drew attention to the advantages of considering for *any locally compact* G-space X, the orbit space of $\mathbb{E}G \times X$ under the diagonal action of G:

$$X_G := \mathbb{E}G \times_G X\,,$$

as the homotopically best-suited substitute for the orbit space X/G *in whatever way the group* G *(continuously) acts on* X ! It was best-suited, mainly because the space X_G bundles together not only the space X and the group G, but also orbits and classifying spaces.

Indeed, X_G appears as the total space of the following two maps

$$X_G := \mathbb{E}G \times_G X \;\begin{cases} \xrightarrow{\pi\ \text{fiber}=X} \mathbb{B}G \\ \xrightarrow{p\ \text{fiber}=\mathbb{B}G_x} X/G, \end{cases}$$

- $\pi : X_G \twoheadrightarrow \mathbb{B}G$, $\overline{(w,x)} \mapsto \overline{w}$, a locally trivial fibration of fiber space X, and
- $p : X_G \twoheadrightarrow X/G$, $\overline{(w,x)} \mapsto \overline{x}$, where the fibers are the classifying spaces $\mathbb{B}G_x$ of the different stability groups G_x for $x \in X$.

As Borel says in its introduction: *It allows us to tie together the cohomology groups of* X, X/G, *and the fixed point set* F, *with those of the classifying spaces of the stability groups and of* G.

The space X_G, which Borel called *twisted product*, is known today as *the homotopy quotient*, *the homotopy orbit space* or more frequently *the Borel construction*.

[7] All these statements, that are not difficult to prove, were given without any justification by Cartan. Later Michel André in his Ph.D. thesis ([A], 1962) directed by Claude Chevalley gave complete proofs for Cartan's lectures statements.

Excerpt from [B_2] (A. Borel, IV-§3 , p. 55, 1960), where, for the first time, a reference to the Borel construction appears [8].

3.9. REMARK. All our discussion will center around the space X_G, and the remarks 3.6, 3.7 will be basic. Similar arguments have been used by Conner [5] when G is a circle, in rational cohomology. For an algebraic analogue when G is discrete, see [7, Chap. V]. The space X_G and the embedding $F(X; G) \times B_G \subset X_G$ were also mentioned to the author by A. Shapiro. The proof of Smith's theorem 4.3 is also related to that of [2].

Beyond its immediate aim of the homological study of the set of fixed points $F := X^G$, the seminar laid most of the foundations of what would later be known as *the equivariant cohomology of locally compact G-spaces*. Orbit types, slice theorems, spectral sequences, fixed points theorems, were already present, if not yet in their final form, at least at a level that would appeal to other mathematicians for further development.

———————×———————

1968 Atiyah-Segal: Equivariant K-theory. The restriction map

$$H(X_G) \to H(F_G) \qquad (\dagger)$$

appears in almost every section of applications of the Borel Seminar. Conditions are often given to ensure it is an isomorphism, but they are quite restricting. In addition, in the case of the circle group $G := T^1$ action, although it is clear that Borel was aware of the fact that (†) is an isomorphism modulo $H(\mathbb{B}G)$-torsion, he never states it in these terms. It is only ten years later, in 1968, when Atiyah and Segal introduce the *equivariant K-theory for locally compact G-spaces* that the following enhancement of $(*)$ appears for the first time.

Localization theorem ([AS, S], 1968). The localized restriction map

$$K_G(X)_{\mathfrak{P}} \to K_G(G.X^S)_{\mathfrak{P}} \qquad (\ddagger)$$

where $\mathfrak{P}$ is a prime ideal of $K_G(\bullet)$, S is minimal among the subgroups of G such that $\mathfrak{P}$ is the inverse image of a prime ideal of $K_S(\bullet)$, and X^S is the set of S-fixed points, is an isomorphism.

———————×———————

1971 Quillen: Equivariant cohomology. As K-theory has a cohomological behavior, the equivariant *cohomology* theory soon came to light. Daniel Quillen did it in [Q] (1971), when he explicitly merged the ideas of Atiyah-Segal and Borel. The *equivariant cohomology of a G-space X with coefficients in a ring A*, denoted by $H_G(X)$, is then defined as the ordinary cohomology of Borel's construction X_G, i.e.

$$H_G(X) := H(X_G; A).$$

Quillen proves the localization theorem for the case where G is an elementary p-group, and for the case where G is a torus T.

[8] The references '[2]', '[5]' and '[7]' correspond respectively to [B_1], [Co] and [Gr].

Theorem. Assume either X is compact or paracompact with $\dim_{\mathrm{ch}}(X) < +\infty$ and that the set of identity components of the isotropy groups of points of X is finite. Then the inclusion of X^T in X induces an isomorphism

$$H_T(X)\big[\big(H_T^1(\bullet)-0\big)^{-1}\big] \to H_T(XT)\big[\big(H_T^1(\bullet)-0\big)^{-1}\big]. \qquad (\ddagger\ddagger)$$

———————×———————

1975. In this year, Wu-yi Hsiang's book "*Cohomology theory of topological transformation groups*" ([H]) appeared, in which the third chapter promptly introduces the reader to the foundations of equivariant cohomology for locally compact G-spaces. It includes a version of the localization theorem more in the vein of Atiyah-Segal that Hsiang calls the *Borel-Atiyah-Segal localization theorem*. It is stated as follows:

Theorem. Assume either X is compact or paracompact with $\dim_{\mathrm{ch}}(X) < +\infty$ and that the set of identity components of the isotropy groups of points of X is finite. For a multiplicative system $S \subseteq H_G(\bullet)$ $(= H(\mathbb{B}G))$, put

$$X^S = \big\{x \in X \;\big|\; \text{no element of } S \text{ maps to zero in } H(\mathbb{B}G) \to H(\mathbb{B}G_x)\big\}.$$

Then, the localized restriction map

$$S^{-1}H_G(X) \to S^{-1}H_G(X^S),$$

is an isomorphism.

For example, if G is a torus T, and $S = H_T(\bullet)\backslash\{0\}$, one has $X^S = X^F$ so that we again see that the kernel and cokernel of the restriction map

$$H_T(X) \to H_T(X^T)$$

are torsion $H_T(\bullet)$-modules as stated in Quillen's $(\ddagger\ddagger)$.

Comment. At this point, it should be noted that Hsiang's introduction to equivariant cohomology would have sufficed to introduce equivariant Poincaré duality, equivariant Gysin morphisms and localisation theorems. In this regard, we could have chosen to work with singular or sheaf cohomology with coefficients in arbitrary field and characteristic, and, in many cases, even in the ring of integers (see section 8 for details).

———————×———————

1980. Atiyah-Bott, Berline-Vergne: The equivariant differential forms. The reader may have noticed that the Cartan's complex played no role in the previous paragraphs. This is because, at the time, Borel, Quillen, Hsiang, ... were mostly interested in applying equivariant cohomology (often with coefficients in fields of positive characteristic) to find conditions for the existence of fixed points in locally compact G-spaces and to infer cohomological properties of the fixed point sets from those of the ambient space X (for example being a cohomological manifold when X is such).

In the early 1980s the whole theory underwent an unexpected development when N. Berline and M. Vergne succeeded in proving the Duistermaat-Heckman formula on the pushforward of the Liouville measure on a symplectic manifold under the moment map ([DH], 1982) by a new fixed point theorem for G-manifolds inspired by an old paper of R. Bott ([Bo], 1966).

Let G be a compact Lie group and M a G-manifold. For $X \in \mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$, let X^* be the vector field over M generated by the infinitesimal action of X, and denote by $c(X)$ and $\mathcal{L}(X)$ respectively the contraction and the Lie derivative operators associated with X^*, acting on the differential algebra of complex de Rham differential forms $(\mathbb{C}\otimes\Omega(M),d)$. The vector X is called *nondegenerate* if, for $m \in M$ fixed by the one-parameter group $\exp(tX)$, the linear operator $L_m(X)$ on the tangent space $T_m(M)$ induced by the Lie derivative $\mathcal{L}(X)$, is invertible. (Notice that this condition implies that $T_m(M)$ is even-dimensional.)

In their work, Berline-Vergne introduce the linear operator on $\mathbb{C}\otimes\Omega(M)$:

$$d_X := d - 2\pi i c(X^*). \qquad (\diamond)$$

It verifies $d_X^2 = -2\pi i\mathcal{L}(X)$, so that if one denotes by $\Omega(M)^X$ the sub-algebra of de Rham differential forms on M invariant under $\exp(tX)$, the pair $(\Omega(M)^X,d_X)$ is a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graded) differential algebra. Berline-Vergne denote by $H_X(M)$ its cohomology, and prove the following fixed point theorem.

Theorem ([BV$_1$, BV$_2$, BV$_3$]). Let G be a compact Lie group and M an oriented compact G-manifold (of even dimension). Then, if $X \in \mathfrak{g}$ is nondegenerate and $\mu \in H_X(M)$, one has:

$$\int_M \mu = \sum_{m\in M^X} \frac{\mu(m)}{\mathrm{Pf}(L_m(X))}$$

where $\mu(m)$ is the restriction of μ to the singleton $\{m\}$, M^X is the fixed point set (necessarily finite) of $\exp(tX)$ and $\mathrm{Pf}(L_m(X))$ is the Pfaffian of $L_m(X)$.

At about the same time the Atiyah-Bott paper ([AB], 1984) appeared. Motivated by the same work of Duistermaat-Heckman, as well as a recent work of E. Witten ([W]), it introduced a de Rham model for the equivariant cohomology of manifolds and states the corresponding localization theorems. In *loc.cit.* (th. 4.13) Atiyah-Bott, taking finite dimensional approximations of $\mathbb{E}G$, shows that the cohomology of the Cartan's complex $(\Omega_{\mathfrak{g}}(M),d_{\mathfrak{g}})$ is the ordinary cohomology of the topological space M_G. In this way the original, and somehow neglected, Cartan's complex $(\Omega_{\mathfrak{g}}(M),d_{\mathfrak{g}})$ turned out to have been an excellent model for the equivariant cohomology of manifolds. The elements of $\Omega_{\mathfrak{g}}(M)$ have since become known as the *G-equivariant (de Rham) differential forms*.

When one compares the Berline-Vergne operator d_X $(\diamond)$ to Cartan's operator $d_{\mathfrak{g}}$ (p. 21), one immediately understands that the map

$$\mathrm{ev}_X : \Omega_{\mathfrak{g}}(M) \longrightarrow \Omega(M)^X, \quad P\otimes\mu \longmapsto P(-2\pi i X)\mu$$

commutes with differentials inducing the map between cohomologies

$$\mathbb{C}\otimes H_G(M) \xrightarrow{\mathrm{ev}_X} H_X(M).$$

If $T \subseteq G$ is the torus topologically generated by $X \in \mathfrak{g}$, we have $M^X = M^T$ and the commutative diagram of restrictions to fixed point sets:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\otimes H_T(M) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_X} & H_X(M) \\ \overset{\sim}{\downarrow} & \oplus & \downarrow\simeq \\ \mathbb{C}\otimes H_T(M^T) & \xrightarrow[\mathrm{ev}_X]{} & H_X(M^X) \end{array} \qquad (*)$$

where the left vertical arrow is an isomorphism modulo H_T-torsion after Quillen.

Now, the proof of the Berline-Vergne fixed-point theorem proves also that the right vertical arrow in $(*)$ is a *true* isomorphism ([9]). As a consequence, the map $\mathrm{ev}_X : \mathbb{C}\otimes H_T(M) \to H_X(M)$ is surjective and the Berline-Vergne fixed point theorem could also be justified through the Atiyah-Bott's de Rham version of the localization theorem. Indeed, the equivariant integration map $\int_M$ gives rise to the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\otimes H_T(M) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_X} & H_X(M) \\ \int_M\downarrow & \oplus & \downarrow\int_M \\ H_T(\bullet) & \xrightarrow[\mathrm{ev}_X]{} & \mathbb{C} \end{array}$$

with, in the second line, $\mathrm{ev}_X(P) = P(-2\pi i X)$. Then, by the localization theorem for $H_T(M)$, we see that for all $\mu \in H_X(M)$ and every $\tilde{\mu} \in H_T(M)$ such that $\mathrm{ev}_X(\tilde{\mu}) = \mu$, one has:

$$\int_M \mu = \Big(\int_M \tilde{\mu}\Big)(-2\pi i X) = \sum_{m\in M^T} \frac{\mu(m)}{\mathrm{Eu}_T(m,M)(-2\pi i X)},$$

where $\mathrm{Eu}_T(m,M)$ is the equivariant Euler class of $m \in M$, as introduced by Atiyah-Bott in (2.19)-*loc.cit.*

The Berline-Vergne and Atiyah-Bott works stimulated renewed interest in equivariant cohomology, in particular because of its applications to Lie group representation theory. What happened next goes well beyond the aim of this work. Interested readers should read the excellent account of equivariant cohomology theory for manifolds that can be found in chapters 6 and 7 of the book [BGV] (1992), and for singular spaces in the [GKM] (1998) article, which also reviews the equivariant intersection cohomology following R. Joshua ([Jo], 1987) as well as the Poincaré duality in equivariant intersection cohomology following J-.L. Brylinski ([Br], 1992).

———————×———————

2.1. Category of Cochain $\mathfrak{g}$-Complexes

2.1.1. Field in Use. Lie groups and Lie algebras, vector spaces, complexes of vector spaces, linear maps, tensor products and related stuff, are defined over the field of real numbers $\mathbb{R}$.

2.1.2. $\mathfrak{g}$-modules. Let $\mathfrak{g}$ be a real *Lie algebra*. A *representation of* $\mathfrak{g}$, also called *a* $\mathfrak{g}$*-module*, will be a real vector space V together with a Lie algebra homomorphism $\rho_V : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. For simplicity, the notation "$Y\cdot v$" will frequently replace "$\rho_V(v)$" when the representation is understood.

The *trivial representation of* $\mathfrak{g}$ *on a vector space* V, is the one where $\rho_V = 0$.

[9] This results from the fact that, thanks to the Poincaré lemma for Berline-Vergne cohomology stating that the pullback map $H_X(M) \to H_X(\mathbb{R}\times M)$ is an isomorphism, it is easy to check that one has a long exact sequence of Berline-Vergne cohomologies:

$$\to H_{X,c}(M\backslash M^X) \to H_X(M) \to H_X(M^X) \to$$

where $H_{X,c}(M\backslash M^X) = 0$, after the original proof of the Berline-Vergne fixed point theorem.

Given $\mathfrak{g}$-modules V and W, a $\mathfrak{g}$-*module morphism from* V *to* W is a linear map $\lambda : V \to W$ s.t. $\lambda \circ \rho_V(Y) = \rho_W(Y) \circ \lambda$ for all $Y \in \mathfrak{g}$. We denote by $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$ the subspace of $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)$ of such maps.

A $\mathfrak{g}$-module V is said to be:

- *simple or irreducible*, if it is nonzero and has no nontrivial submodules;
- *semisimple*, if it is a direct sum of irreducible $\mathfrak{g}$-modules;
- *reducible* if it is a direct sum of two nonzero $\mathfrak{g}$-modules;
- *completely reducible* if it is a direct sum of irreducible modules;

The $\mathfrak{g}$-modules and their morphisms constitute a category, the *category of* $\mathfrak{g}$-*modules* denoted by $\mathrm{Mod}(\mathfrak{g})$.

2.1.3. Exercise. Let V be a $\mathfrak{g}$-module. Show the equivalence of:

a) V is completely reducible.

b) V is a sum of irreducible modules.

c) If W is a submodule of V then $V = V' \oplus W$ for some submodule V'.

2.1.4. Exercise. Given a $\mathfrak{g}$-module V, denote by $V^{\mathfrak{g}}$ the subspace of $\mathfrak{g}$-*invariant vectors of* V, i.e. of $v \in V$, such that $Y \cdot v = 0$ for all $Y \in \mathfrak{g}$.

a) Show that for all $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$, $\varphi(V^{\mathfrak{g}}) \subseteq W^{\mathfrak{g}}$. Derive the fact that the correspondence $V \rightsquigarrow V^{\mathfrak{g}}$, $\varphi \rightsquigarrow \varphi|_{V^{\mathfrak{g}}}$ is functorial from $\mathrm{Mod}(\mathfrak{g})$ intito $\mathrm{Vec}(\mathbb{R})$.

b) Endow $\mathbb{R}$ with the trivial action of $\mathfrak{g}$. Show that the map

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbb{R},V) \to V^{\mathfrak{g}}, \quad \varphi \mapsto \varphi(1),$$

is a natural isomorphism of functors $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbb{R},_) \to (_)^{\mathfrak{g}}$. In particular, $(_)^{\mathfrak{g}}$ is left exact but not necessarily exact.

2.1.5. Differential Graded $\mathfrak{g}$-Complexes. A *differential graded* $\mathfrak{g}$-*complex*, a $\mathfrak{g}$-*complex* in short, is a quadruple $(C,d,\boldsymbol{\theta},c)$ where:

- (C,d) is a complex in $\mathrm{DGM}(\mathbb{R})$ (cf. 1.1.5);
- $\boldsymbol{\theta} : \mathfrak{g} \to End_{\mathrm{GV}(\mathbb{R})}(C)$ is a Lie algebra morphism, the $\mathfrak{g}$-*derivation* ([10]);
- $c : \mathfrak{g} \to Mor_{\mathrm{GV}(\mathbb{R})}(C,C[-1])$ is a linear map, the $\mathfrak{g}$-*contraction*;

such that, for all $X,Y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{cases} \text{i) } c(X) \circ c(Y) + c(Y) \circ c(X) = 0 \\ \text{ii) } d \circ c(X) + c(X) \circ d = \boldsymbol{\theta}(X) \\ \text{iii) } \boldsymbol{\theta}(Y) \circ c(X) - c(X) \circ \boldsymbol{\theta}(Y) = c([Y,X]) \end{cases} \tag{$\diamond$}$$

2.1.6. Remark. From ($\diamond$)-(ii), one immediately obtains $d \circ \boldsymbol{\theta}(_) = \boldsymbol{\theta}(_) \circ d$ which implies that $\boldsymbol{\theta}$ naturally induces an action of $\mathfrak{g}$ on the cohomology of

[10] Recall that given two $\mathbb{Z}$-graded vector spaces C and D, we denote by $Mor_{\mathrm{GV}(\mathbb{R})}(C,D)$ the group of graded homomorphisms of degree zero from C into D. The terminology *derivation* comes from the fact that in the main case where (C,d) is the de Rham complex of a G-manifold, the group G acts on (C,d) by differential graded algebra automorphisms, so that the infinitesimal action of its Lie algebra $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ will be by differential graded algebra derivations.

(C,d). However, that same condition shows that $c(X)$ is a homotopy for $\boldsymbol{\theta}(X)$, so that this induced action is in fact trivial.

2.1.7. Morphisms of $\mathfrak{g}$-Complexes. A *morphism of graded $\mathfrak{g}$-complexes*, or *morphism of $\mathfrak{g}$-complexes* in short, $\boldsymbol{\alpha} : (C,d,\boldsymbol{\theta},c) \to (D,d,\boldsymbol{\theta},c)$, is a morphism of complexes $\boldsymbol{\alpha} : (C,d) \to (D,d)$ commuting with derivations and contractions, i.e. such that $\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \circ \boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\alpha} \circ c = c \circ \boldsymbol{\alpha}$.

2.1.8. Category of $\mathfrak{g}$-Complexes. The $\mathfrak{g}$-complexes $(C,d,\boldsymbol{\theta},c)$ and their morphisms constitute the *category of $\mathfrak{g}$-complexes* denoted by $\mathrm{DGM}(\mathfrak{g},\mathbb{R})$.

In the sequel, a $\mathfrak{g}$-complex $(C,d,\boldsymbol{\theta},c)$ may be denoted by (C,d) and even simply C, whenever the remaining data are understood.

2.1.9. Split $\mathfrak{g}$-Complexes. Given an inclusion of $\mathfrak{g}$-modules $N \subseteq M$, we will use the notation "$N|M$" to express that the natural map

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,M/N) \qquad (\ddagger)$$

is **surjective** for all **finite** dimensional $\mathfrak{g}$-module V.

Exercise. Show that the condition $N|M$ is equivalent to the fact that for every $\mathfrak{g}$-submodule $M' \subseteq M$ such that $N \subseteq M'$ is of finite codimension, there exists a $\mathfrak{g}$-submodule $H \subseteq M'$ such that $M' = H \oplus N$.

Definition. For a $\mathfrak{g}$-complex (C,d), let $B^i := \mathrm{im}(d_{i-1})$ and $Z^i := \ker(d_i)$ respectively be *the $\mathfrak{g}$-submodules of i-coboundaries and i-cocycles of* (C,d). The $\mathfrak{g}$-complex (C,d) will be called *$\mathfrak{g}$-split* whenever one has

$$B^i|Z^i|C^i, \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}.$$

2.1.10. Lemma. *Keep the above notations and prove the following,*

a) *If $N|M$, the natural map* $\dfrac{M^{\mathfrak{g}}}{N^{\mathfrak{g}}} \longrightarrow \left(\dfrac{M}{N}\right)^{\mathfrak{g}}$ *is an isomorphism.* $(\diamond)$

b) *The condition $B^i|Z^i$ is equivalent to the fact that $(Z^i)^{\mathfrak{g}} \to (Z^i/B^i)$ is surjective, and it is also equivalent to the existence of a $\mathfrak{g}$-submodule H^i of Z^i such that $Z^i = B^i \oplus H^i$, in which case H^i is a trivial $\mathfrak{g}$-module isomorphic to Z^i/B^i.*

c) *A $\mathfrak{g}$-complex (C,d) such that each C^i is completely reducible, is $\mathfrak{g}$-split.*

Proof

a) After 2.1.4, the functor $(_)^{\mathfrak{g}}$ is isomorphic to $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbb{R};_)$ and the sequence $\mathbf{0} \to N^{\mathfrak{g}} \to M^{\mathfrak{g}} \to (M/N)^{\mathfrak{g}}$ is left exact. The split condition ensures it is also right exact.

b) Recall that $\mathcal{H}^i := Z^i/B^i$ is a trivial $\mathfrak{g}$-module (see 2.1.6). Following (a), the split condition immediately gives the surjection $(Z^i)^{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow (\mathcal{H}^i)^{\mathfrak{g}} = \mathcal{H}^i$. Conversely, one clearly has $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{H}^i,_) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}^i,(_)^{\mathfrak{g}})$ and, thereafter, the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{H}^i,Z^i) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{H}^i,\mathcal{H}^i) \\ \| & & \| \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}^i,(Z^i)^{\mathfrak{g}}) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}^i,\mathcal{H}^i) \end{array}$$

where the surjectivity of the second line implies the surjectivity of the first one. In particular, there exists $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{H}^i, Z^i)$ such that $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}$ where $\pi : Z^i \twoheadrightarrow \mathcal{H}^i$ denotes the canonical projection. Setting $H^i := \mathrm{Im}(\sigma)$ completes de proof.

c) Clear from exercise 2.1.3. □

2.1.11. Proposition. *Let (C,d) be a $\mathfrak{g}$-split $\mathfrak{g}$-complex.*

a) *The inclusion $C^{\mathfrak{g}} \subseteq C$ is a quasi-isomorphism*

b) *If V is a finite dimensional **semi-simple** $\mathfrak{g}$-module, the inclusions*

$$\begin{array}{ccccc} V^{\mathfrak{g}} \otimes C & \supseteq & V^{\mathfrak{g}} \otimes C^{\mathfrak{g}} & \subseteq & (V \otimes C)^{\mathfrak{g}} \\ Hom^{\bullet}_{\mathbb{R}}(V^{\mathfrak{g}}, C) & \supseteq & Hom^{\bullet}_{\mathbb{R}}(V^{\mathfrak{g}}, C^{\mathfrak{g}}) & \subseteq & Hom^{\bullet}_{\mathfrak{g}}(V, C) \end{array}$$

are quasi-isomorphisms.

Proof

a) Immediate from (2.1.10-(a)).

b) Let us first show that if W is a simple $\mathfrak{g}$-module different from $\mathbb{R}$, the complexes $(W \otimes C)^{\mathfrak{g}}$ and $Hom^{\bullet}_{\mathfrak{g}}(W,C)$ are acyclic.

It suffices to treat only the $Hom^{\bullet}$ case, since one has

$$Hom^{\bullet}_{\mathfrak{g}}(W,C) = Hom^{\bullet}_{\mathbb{R}}(W,C)^{\mathfrak{g}} = (W^{\vee} \otimes C)^{\mathfrak{g}}.$$

An i-cocycle of $Hom^{\bullet}_{\mathfrak{g}}(W,C)$ is a $\mathfrak{g}$-module morphism $\lambda : W \to C^i$ such that $d \circ \lambda = 0$, i.e. such that $\mathrm{im}(\lambda) \subseteq Z^i$. But the composition of λ with the surjection $Z^i \twoheadrightarrow Z^i/B^i$ is null since $\mathfrak{g}$ acts trivially on cohomology, so that in fact $\mathrm{im}(\lambda) \subseteq B^i$. Now, thanks to the fact that $Z^i | C^i$, we can lift $\lambda : W \to B^i$ to $\mu : W \to C^{i-1}$ and we have thus proved that $\lambda = d \circ \mu$, i.e. that λ is a coboundary.

If V is a semisimple $\mathfrak{g}$-module, one decomposes V as $V^{\mathfrak{g}} \oplus W$, where W is a direct sum of simple $\mathfrak{g}$-modules different from $\mathbb{R}$. Then

$$Hom^{\bullet}_{\mathfrak{g}}(V,C) = Hom^{\bullet}_{\mathfrak{g}}(V^{\mathfrak{g}},C) \oplus Hom^{\bullet}_{\mathfrak{g}}(W,C)$$

is quasi-isomorphic to $Hom^{\bullet}_{\mathfrak{g}}(V^{\mathfrak{g}},C)$ after the previous paragraph. But

$$Hom^{\bullet}_{\mathfrak{g}}(V^{\mathfrak{g}},C) = Hom^{\bullet}_{\mathfrak{g}}(V^{\mathfrak{g}},C^{\mathfrak{g}}) = Hom^{\bullet}_{\mathbb{R}}(V^{\mathfrak{g}},C^{\mathfrak{g}}),$$

so that $Hom^{\bullet}_{\mathbb{R}}(V^{\mathfrak{g}},C^{\mathfrak{g}}) \subseteq Hom^{\bullet}_{\mathfrak{g}}(V,C)$ is clearly a quasi-isomorphism.

Finally, that the inclusion $Hom^{\bullet}_{\mathbb{R}}(V^{\mathfrak{g}},C^{\mathfrak{g}}) \subseteq Hom^{\bullet}_{\mathbb{R}}(V^{\mathfrak{g}},C)$ is a quasi-isomorphism results from (a) since $V^{\mathfrak{g}} \simeq \mathbb{R}^r$ and the inclusion being considered becomes simply $\prod_{1 \leqslant i \leqslant r} C^{\mathfrak{g}} \subseteq \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} C$. □

2.2. Equivariant Cohomology of $\mathfrak{g}$-Complexes

2.2.1. The symmetric Algebra of $\mathfrak{g}^{\vee}$. Let $S(\mathfrak{g})$ be the ring of polynomial maps from $\mathfrak{g}$ to $\mathbb{R}$, graded by twice the polynomial degree and denote by $S^d(\mathfrak{g})$ the subspace of elements of degree d, in particular $S^2(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{\vee}$ and $S^m(\mathfrak{g}) = 0$ for every odd integer m. Let $\boldsymbol{\theta} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(S(\mathfrak{g}))$ denote the Lie algebra homomorphism induce by coadjoint representation of $\mathfrak{g}$ on $\mathfrak{g}^{\vee}$.

Fix for later use a vector space basis $\{e_i\}$ of $\mathfrak{g}$, of dual basis $\{e^i\}$.

2. Equivariant Cohomology Background

2.2.2. Cartan Complexes. Given a $\mathfrak{g}$-complex $(C,d,\boldsymbol{\theta},c)$, we are interested in the polynomial maps $\omega : \mathfrak{g} \ni Y \mapsto \omega(Y) \in C$, i.e. the elements $\omega \in S(\mathfrak{g}) \otimes C$. The Lie algebra $\mathfrak{g}$ acts on each $S^a(\mathfrak{g}) \otimes C^b$ by the formula

$$\boldsymbol{\theta}(Y)(P \otimes \mu) := \boldsymbol{\theta}(Y)(P) \otimes \mu + P \otimes \boldsymbol{\theta}(Y)(\mu), \qquad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

A polynomial map $Y \mapsto \omega(Y)$ is then $\mathfrak{g}$-invariant if and only if it satisfies the equality

$$\theta(X)(\omega(Y)) + \omega([X,Y]) = 0,$$

for all $X,Y \in \mathfrak{g}$. Put

$$\boxed{C_{\mathfrak{g}} := (S(\mathfrak{g}) \otimes C)^{\mathfrak{g}} = \bigoplus\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} C^k_{\mathfrak{g}}} \qquad (C_{\mathfrak{g}})$$

where $C^k_{\mathfrak{g}} := \sum_{a+b=k} \big(S^a(\mathfrak{g}) \otimes C^b\big)^{\mathfrak{g}}$. The $S(\mathfrak{g})$-linear map $d_{\mathfrak{g}} : C_{\mathfrak{g}} \to C_{\mathfrak{g}}$,

$$\boxed{d_{\mathfrak{g}}(1 \otimes \omega) = 1 \otimes d\omega + \sum\nolimits_i e^i \otimes c(e_i)\omega} \qquad (d_{\mathfrak{g}})$$

is a morphism of graded spaces of degree $+1$. It verifies $d^2_{\mathfrak{g}} = \sum_i e^i \otimes \boldsymbol{\theta}(e_i)$, so that, over $C_{\mathfrak{g}}$, one has

$$d^2_{\mathfrak{g}} = \sum_i e^i \boldsymbol{\theta}(e_i) \otimes \mathrm{id}.$$

But $\Xi := \sum_i e^i \boldsymbol{\theta}(e_i)$ is the null operator on $S(\mathfrak{g})$. Indeed, since it acts as a derivation on $S(\mathfrak{g})$, it suffices to show that it vanishes on any $\lambda \in \mathfrak{g}^\vee$, i.e. that $\Xi(\lambda)(e_j) = 0$ for all j, which comes from the straightforward computation

$$\Xi(\lambda)(e_j) = \Big(\sum_i e^i \theta(e_i)(\lambda)\Big)(e_j) = \sum_i e^i(e_j)\lambda([e_i,e_j]) = \lambda([e_j,e_j]) = 0.$$

Hence, $d^2_{\mathfrak{g}} = 0$ in $C_{\mathfrak{g}}$. This $d_{\mathfrak{g}} \in End gr^1_{S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}}(C_{\mathfrak{g}})$ is the *Cartan differential*.

2.2.3. Definition. The pair $\big(C_{\mathfrak{g}},d_{\mathfrak{g}}\big)$ is a complex. It is *the Cartan (equivariant) complex associated with the* $\mathfrak{g}$*-complex* $(C,d,\boldsymbol{\theta},c)$, and the cohomology of $\big(C_{\mathfrak{g}},d_{\mathfrak{g}}\big)$ is its $\mathfrak{g}$*-equivariant cohomology*, denoted in the sequel by

$$\boxed{H_{\mathfrak{g}}(C) := h\big(C_{\mathfrak{g}},d_{\mathfrak{g}}\big)}$$

2.2.4. *Important Remark.* The graded space $C_{\mathfrak{g}}$ is an $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$-graded module (4.1.3), the differential $d_{\mathfrak{g}}$ is $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$-linear, and the cohomology $H_{\mathfrak{g}}(C)$ is an $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$-graded module.

2.2.5 Any morphism of $\mathfrak{g}$-complexes $\boldsymbol{\alpha} : (C,d,\boldsymbol{\theta},c) \to (D,d,\boldsymbol{\theta},c)$ induces a canonical $S(\mathfrak{g})$-linear morphism of complexes $\alpha_{\mathfrak{g}} : C_{\mathfrak{g}} \to D_{\mathfrak{g}}$ by the formula $\boldsymbol{\alpha}_{\mathfrak{g}} = \mathrm{id} \otimes \boldsymbol{\alpha}$.

2.2.6. Theorem. *With the above notations one has,*

a) *The correspondence* $(C,d,\boldsymbol{\theta},c) \rightsquigarrow (C_{\mathfrak{g}},d)$ *and* $\boldsymbol{\alpha} \rightsquigarrow \boldsymbol{\alpha}_{\mathfrak{g}}$ *is a covariant functor from* $\mathrm{DGM}(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ *into* $\mathrm{DGM}(\mathbb{R})$.

b) *For every* $\mathfrak{g}$*-complex* $(C,d,\boldsymbol{\theta},c)$*, there exists a spectral sequence converging to* $H_{\mathfrak{g}}(C)$ *with*

$$\big(I\!E^{p,q}_0 = \big(S^p(\mathfrak{g}) \otimes C^q\big)^{\mathfrak{g}},\ d_0 = 1 \otimes d\big) \Rightarrow H^{p+q}_{\mathfrak{g}}(C).$$

c) *Let G be a compact Lie group, $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ and C end D two **$\mathfrak{g}$-split** $\mathfrak{g}$-complexes (2.1.9).*

i) *The $(\mathbb{E}_2,d_2)$ spectral sequence term in (b) is given by*

$$\left(\mathbb{E}_2^{p,q} = S^p(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \otimes H^q(C),\ d_2 = \textstyle\sum_i e^i \otimes c(e_i)\right) \Rightarrow H_{\mathfrak{g}}^{p+q}(C).$$

ii) *If $H^m(C) = 0$ for all odd (or for all even) m, then*

$$H_{\mathfrak{g}}(C) = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \otimes h(C).$$

iii) *If $\boldsymbol{\alpha} : C \to D$ is a quasi-isomorphism of $\mathfrak{g}$-complexes, $\boldsymbol{\alpha}_{\mathfrak{g}} : C_{\mathfrak{g}} \to D_{\mathfrak{g}}$ is a quasi-isomorphism.*

d) *Let G be a **commutative** compact Lie group and $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$,*

i) *For every $\mathfrak{g}$-complex $(C,d,\boldsymbol{\theta},c)$, the subcomplex $(C^{\mathfrak{g}},d)$ is stable under $\boldsymbol{\theta}$ and c, i.e. $(C^{\mathfrak{g}},d,\boldsymbol{\theta},c)$ is a well defined $\mathfrak{g}$-complex.*

ii) *If $j : C^{\mathfrak{g}} \hookrightarrow C$ denotes the inclusion map, $j_{\mathfrak{g}}$ is a quasi-isomorphism.*

iii) *The $(\mathbb{E}_2,d_2)$ spectral sequence term in (b) is given by*

$$\left(\mathbb{E}_2^{p,q} = S^p(\mathfrak{g}) \otimes H^q(C^{\mathfrak{g}}),\ d_2 = \textstyle\sum_i e^i \otimes c(e_i)\right) \Rightarrow H_{\mathfrak{g}}^{p+q}(C)$$

iv) *If $H^m((C)^{\mathfrak{g}}) = 0$ for all odd (or for all even) m, then*

$$H_{\mathfrak{g}}(C) = S(\mathfrak{g}) \otimes h(C^{\mathfrak{g}}).$$

v) *If $\boldsymbol{\alpha} : C^{\mathfrak{g}} \to D^{\mathfrak{g}}$ is a quasi-isomorphism, $\boldsymbol{\alpha}_{\mathfrak{g}}$ is a quasi-isomorphism.*

Proof

a) Clear.

b) For $m \in \mathbb{Z}$, let $K_m = \left(S^{\geqslant m}(\mathfrak{g}) \otimes C\right)^{\mathfrak{g}}$. Each K_m is clearly a sub-complex of $(C_{\mathfrak{g}},d_{\mathfrak{g}})$ and $\left(C_{\mathfrak{g}} = K_0 \supseteq K_1 \supseteq \cdots\right)$ is a *regular* decreasing filtration of $(C_{\mathfrak{g}},d_{\mathfrak{g}})$ (see [Go] §4 pp. 76-) giving rise to the stated spectral sequence.

c) i) The assumption that G is compact ensures that each (finite dimensional) $\mathfrak{g}$-module $S^p(\mathfrak{g})$ is semisimple. Proposition 2.1.11-(b) may be used, and $\left(S^p(\mathfrak{g}) \otimes C)^{\mathfrak{g}},1 \otimes d\right)$ is quasi-isomorphic to $(S^p(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \otimes C,1 \otimes d)$. Consequently $(\mathbb{E}_0,d_0)$ in (b) is quasi-isomorphic to $\left(S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \otimes C,1 \otimes d\right)$ and $\mathbb{E}_1^{p,q} = S^p(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \otimes H^q(C)$. But the differential $d_1 : \mathbb{E}_1^{p,q} \to \mathbb{E}_1^{p+1,q}$ is null since the $S(\mathfrak{g})$ vanishes in odd degrees, therefore $\mathbb{E}_1 = \mathbb{E}_2$, which completes the proof of the claim.

ii) Since the differential d_r is of total degree 1 and that $\mathbb{E}_r^{p,q} = 0$ if p or q is odd for all $r \geqslant 2$, one has $d_r = 0$ for $r \geqslant 2$, and $\mathbb{E}_2 = \mathbb{E}_\infty$.

iii) Follows immediately from (c-i).

d) i) We must check that $\boldsymbol{\theta}(Y)c(X)C^{\mathfrak{g}} = 0$ for all $X,Y \in \mathfrak{g}$, but, on $C^{\mathfrak{g}}$ one has $\boldsymbol{\theta}(Y)c(X) = \boldsymbol{\theta}(Y)c(X) + c(X)\boldsymbol{\theta}(Y) = c([Y,X]) = c(0)$ since $\mathfrak{g}$ is abelian and from property (iii) of $\mathfrak{g}$-complexes (see 2.1.5-($\diamond$)).

ii,iii,iv,v) Left to the reader. □

2.2.7. Split G-Complexes. It's worth noting that the proof of 2.2.6-(c) makes use of the split condition (2.1.9) *only* for the finite dimensional sub-$\mathfrak{g}$-modules $V \in S(\mathfrak{g})$, whose $\mathfrak{g}$-module structure is obtained by differentiating its natural G-module structure.

The split condition 2.1.9 can easily be adapted to the context of G-modules. For any inclusion of G-modules $N \subseteq M$ one writes "$N|M$" whenever the natural map

$$\mathrm{Hom}_G(V,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(V,M/N) \qquad (\ddagger)$$

is **surjective** for all **finite dimensional** G-module V.

2.2.8. Definition. A complex of G-modules (C,d) is said to be *G-split* whenever $B^i|Z^i|C^i$, for all $i \in \mathbb{Z}$.

The proof of the following proposition is the same as 2.1.11.

2.2.9. Proposition. *Let (C,d) be a G-split complex of G-modules such that the natural action of G in cohomology is trivial. Then,*

a) *The inclusion $C^G \subseteq C$ is quasi-isomorphism.*

b) *If V is a **semisimple** finite dimensional G-module, the inclusions*

$$\begin{array}{ccccc} V^G \otimes C & \supseteq & V^G \otimes C^G & \subseteq & (V \otimes C)^G \\ Hom^\bullet_{\mathbb{R}}(V^G,C) & \supseteq & Hom^\bullet_{\mathbb{R}}(V^G,C^G) & \subseteq & Hom^\bullet_G(V,C) \end{array}$$

are quasi-isomorphisms.

3. Equivariant Cohomology of G-Manifolds

3.1. Equivariant Differential Forms

3.1.1. Fields in Use. Unless otherwise stated, manifolds, Lie groups and Lie algebras, vector spaces, complexes of vector spaces, linear maps, tensor products and related stuff, will be defined over the field of real numbers $\mathbb{R}$.

3.1.2. G-Derivations and Contractions. Let G be a **connected** Lie group. Denote by $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G) = T_eG$ the Lie algebra of G endowed with the adjoint action. As in 2.2.1, let $S(\mathfrak{g})$ be the ring of polynomial maps from $\mathfrak{g}$ to $\mathbb{R}$, graded by twice the polynomial degree.

Let M be a G-manifold. Each $Y \in \mathfrak{g}$ defines a vector field on M by setting

$$\vec{Y}(m) := \frac{d}{dt}\Big(t \mapsto \exp(tY)\cdot m\Big)_{t=0}$$

Let $\vec{Y}\cdot\omega$ denote the *contraction* of the differential form $\omega \in \Omega(M)$ by the vector field $\vec{Y}$. The map $c(Y) : \Omega(M) \to \Omega(M)$, $\omega \mapsto \vec{Y}\cdot\omega$, is then an *antiderivation* of degree -1 and the map $c : \mathfrak{g} \to Mor_{\mathrm{GV}(\Bbbk)}(\Omega(M),\Omega(M)[-1])$ verifies the condition (i) for $\mathfrak{g}$-complexes (see 2.1.5-($\diamond$)).

The Lie derivative with respect to the vector field $\vec{Y}$, gives a Lie algebra representation $\boldsymbol{\theta} : \mathfrak{g} \to End_{\mathrm{GV}(\Bbbk)}(\Omega(M))$ by *algebra derivations*.

Both of the operators $\boldsymbol{\theta}(Y)$ and $c(Y)$, resp. *the G-derivations and the G-contractions* stabilizes the subcomplex of compact support differential forms, and $(\Omega(M),d,\boldsymbol{\theta},c)$ and $(\Omega_{\mathrm{c}}(M),d,\boldsymbol{\theta}c)$ become $\mathfrak{g}$-complexes in the sense of 2.1.5.

3.1.3. Definition. Let G be a compact connected Lie group. The *complex of G-equivariant differential forms, resp. with compact support, of M*, are the following Cartan complexes (2.2.3)

$$\big(\Omega_G(M),d_G\big) := \big(\Omega(M)_{\mathfrak{g}},d_{\mathfrak{g}}\big) = \big(\big(S(\mathfrak{g})\otimes\Omega(M)\big)^G,d_{\mathfrak{g}}\big)$$
$$\textit{resp. } \big(\Omega_{G,\mathrm{c}}(M),d_G\big) := \big(\Omega_{\mathrm{c}}(M)_{\mathfrak{g}},d_{\mathfrak{g}}\big) = \big(\big(S(\mathfrak{g})\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(M)\big)^G,d_{\mathfrak{g}}\big).$$

Their cohomology, denoted by $H_G(M)$, resp. $H_{G,\mathrm{c}}(M)$, are the *G-equivariant cohomology, resp. with compact support, of M*.

In the case where $M = \{\bullet\}$, we have $H_G(\{\bullet\}) = S(\mathfrak{g})^G = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. The notation "$H_G$" stands for "$H_G(\{\bullet\})$".

The Cartan complexes $\Omega_G(M),\Omega_{G,\mathrm{c}}(M)$ and the equivariant cohomology spaces $H_G(M)$ and $H_{G,\mathrm{c}}(M)$ are H_G-graded modules (*cf.* 4.1.3).

3.1.4. Proposition. *Let G be a compact connected Lie group.*

a) *The complexes of G-modules $(\Omega(M),d)$ and $(\Omega_{\mathrm{c}}(M),d)$ are G-split (2.2.7). In particular, if C denotes $(\Omega(M),d)$ or $(\Omega_{\mathrm{c}}(M),d)$, the inclusions*

$$S(\mathfrak{g})^G\otimes C \supseteq S(\mathfrak{g})^G\otimes C^G \subseteq (S(\mathfrak{g})\otimes C)^G$$

are quasi-isomorphisms.

b) *The correspondence $M \rightsquigarrow (\Omega(M),d,\boldsymbol{\theta},c)$, $f \rightsquigarrow f^*$ is a contravariant functor from the category of G-manifolds into the category of G-split $\mathfrak{g}$-complexes.*

3. Equivariant Cohomology of G-Manifolds

c) *The correspondence* $M \rightsquigarrow (\Omega_{\mathrm{c}}(M),d,\boldsymbol{\theta},c)$, $f \rightsquigarrow f^*$ *is a contravariant functor from the category of* G*-manifolds and* ***proper*** *maps to the category of* G*-split* $\mathfrak{g}$*-complexes.*

d) *There exists a* ***functor*** *on the category* G-Man *of* G*-manifolds and* G*-equivariant maps that assigns to every* G*-manifold* M *a spectral sequence that converges to its equivariant cohomology*

$$\mathbb{E}_2^{p,q} = S^p(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \otimes H^q(M) \Rightarrow H_G^{p+q}(M).$$

e) *There exists a* ***functor*** *on the category* G-$\mathrm{Man}_{\mathrm{pr}}$ *of* G*-manifolds and* G*-equivariant* ***proper*** *maps that assigns to every* G*-manifold* M *a canonical spectral sequence that converges to its equivariant cohomology with compact support*

$$\mathbb{E}_2^{p,q} = S^p(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \otimes H_{\mathrm{c}}^q(M) \Rightarrow H_{G,\mathrm{c}}^{p+q}(M).$$

Proof

a) For $i \in \mathbb{N}$, the *pushforward action* of G on $\Omega^i(M)$ is defined as $g_*(\omega) := (g^{-1})^*(\omega)$ for all $g \in G$ and $\omega \in \Omega^i$, so that $(g_1 g_2)_* = g_{1*} \circ g_{2*}$.

If V be is a (smooth) finite dimensional representation of G over $\mathbb{C}$, we make the group G act on $\mathrm{Hom}(V,\Omega^i(M))$ by the formula

$$(g\cdot\lambda)(v) = g_*\big(\lambda(g^{-1}v)\big), \quad \forall \lambda \in \mathrm{Hom}(V,\Omega^i(M)),$$

so that λ is a G-module morphism if and only if $g\cdot\lambda = \lambda$. We claim that there exists a "symmetrization" operator

$$\Sigma : \mathrm{Hom}(V,\Omega^i(M)) \to \mathrm{Hom}(V,\Omega^i(M))^G$$

such that $\Sigma^2 = \Sigma$ and $\Sigma(\lambda) = \lambda$ if and only if λ is a G-module morphism.

Indeed, let λ be a linear map from V to $\Omega^i(M)$. For every i-tuple of vector fields $\{\chi_1,\ldots,\chi_i\}$ over M and each $v \in V$, the real function

$$M \ni x \mapsto \Big(\int_G g_*\big(\lambda(g^{-1}v)\big)(x)\big(\chi_1(x),\ldots,\chi_i(x)\big)\, dg\Big) \in \mathbb{R}$$

where dg is a G-invariant form of top degree on G, such that $1 = \int_G dg$, is a smooth function **because V is finite dimensional**, and it depends linearly on $v \in V$, and multilinearly and antisymmetrically on the χ_*. We therefore have an i-differential form which we denote by

$$\Sigma(\lambda)(v) := \int_G g_*\big(\lambda(g^{-1}v)\big)\, dg, \qquad (*)$$

and whose fundamental properties are

- $\Sigma(d\circ\lambda) = d\circ\Sigma(\lambda)$;
- $\Sigma(\lambda) : V \to \Omega^i(M)$ is a G-module morphism;
- $\Sigma(\lambda) = \lambda$ if λ is already a G-module morphism.

We can now resume the proof that $Z^i(M)|\Omega^i(M)$. Given a G-module morphism $\mu \in \mathrm{Hom}_G(V,B^{i+1}(M))$, there always exists a linear map $\lambda : V \to \Omega^i(M)$ lifting μ, i.e. such that $\mu = d\circ\lambda$, but then one applies the symmetrization operator Σ and one gets $\mu = \Sigma(\mu) = \Sigma(d\circ\lambda) = d\circ\Sigma(\lambda)$, which shows that the G-module morphism $\Sigma(\lambda)$ lifts μ.

For $Z^i_c(M)|\Omega^i_c(M)$, note that, since V is finite dimensional, the supports of the elements in $\lambda(V)$ are contained in one and the same compact subset $C \subseteq M$, but then the supports of the $g_*(\lambda(g^{-1}v))$ in $(*)$ are contained in $G{\cdot}C$ which is obviously compact. Therefore, given $\lambda : V \to \Omega_c(M)$, one gets a linear map $\Sigma(V) : V \to \Omega_c(M)$ which is a G-module morphism, and the preceding arguments apply to the compactly supported case.

To prove that $B^i(M)|Z^i(M)$, il suffices, from 2.1.10-(b), to show that every cocycle is cohomologous to a G-invariant cocycle. But before doing so, let us recall a general homotopy argument. Given a smooth map $\varphi : \mathbb{R}{\times}M \to N$, if $\omega \in \Omega^i(N)$ the pullback $\varphi^*\omega$ belongs to $\Omega^i(\mathbb{R}{\times}M)$, i.e. is a section of the exterior algebra bundle of the cotangent bundle $T^*(\mathbb{R}{\times}M)$ of $\mathbb{R}{\times}M$. Now, the canonical decomposition $T^*(\mathbb{R}{\times}M)$ as the direct sum of cotangent bundles $T^*(\mathbb{R}) \oplus T^*(M)$, gives rise to a canonical decomposition of the i-th exterior power of the cotangent bundle

$$\bigwedge^i T^*(\mathbb{R}{\times}M) = \bigwedge^i(T^*M) \oplus \Big(T^*(\mathbb{R}) \otimes \bigwedge^{i-1}(T^*M)\Big).$$

Consequently, the pullback $\varphi^*(\omega)$ canonically decomposes as

$$\varphi^*(\omega)(t,x) = \alpha(t,x) + dt \wedge \beta(t,x),$$

where α (resp. β) is a section of the vector bundle $\bigwedge^i T^*(M)$ (resp. $\bigwedge^{i-1} T^*(M)$) over the base space $\mathbb{R}{\times}M$.

When ω is in addition a cocycle, so is $\varphi^*(\omega)$ and, in view of the previous decomposition, this amounts to the following two conditions

$$d\alpha(t,x) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\alpha(t,x) = d\beta(t,x),$$

where d is the coboundary in $\Omega(M)$ (t is then assumed constant). In particular, if $\varphi_t : M \to N$ denotes the map $x \mapsto \varphi(t,x)$, we get

$$\begin{aligned}\varphi_t^*(\omega) - \varphi_0^*(\omega) &= \alpha(t) - \alpha(0)\\ &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\alpha(t)dt = \int_0^t d\beta(t)dt = d\Big(\int_0^t \beta(t)dt\Big),\end{aligned} \qquad (**)$$

and the cocycles $\varphi_t^*(\omega)$ are all cohomologous to $\varphi_0^*(\omega)$.

At this point it is worth noting that this process also gives a canonical element $\varpi(x) = \int_0^1 \beta(t,x)\ dt \in \Omega^{i-1}(M)$, depending on ω and such that $\varphi_1^*(\omega) - \varphi_0^*(\omega) = d\varpi$.

Under the hypothesis of our proposition, a first consequence of these notes, is that if $\omega \in Z^i(M)$ then $g^*\omega$ is cohomologous to ω for all $g \in G$. Indeed, since G is connected, there is a smooth path $\gamma : \mathbb{R} \to G$ such that $\gamma(0) = e$ and $\gamma(1) = g$, and then taking $\varphi : \mathbb{R}{\times}M \to M$, $(t,x) \mapsto \gamma(t){\cdot}x$, one concludes that $g^*\omega = \gamma_1^*(\omega) \sim \gamma_0^*(\omega) = \omega$.

More generally, given any diffeomorphism $\phi : \mathbb{R}^{d_G} \to G$ onto an open subset $U \subseteq G$, one defines a smooth multiplicative action of $\mathbb{R}$ over U by setting $t \star g := \phi(t \cdot \phi^{-1}(g))$ for all $t \in \mathbb{R}$ and $g \in U$, and considers, for each

$g \in U$, the map $\varphi_g : \mathbb{R}\times M \to M$, $\varphi_g(t,x) = (t \star g)x$. After that, if ω is a cocycle of $\Omega^i(M)$ we will have

$$g^*\omega - g_0^*\omega = d\Big(\int_0^1 \beta(t,g)dt\Big), \qquad (***)$$

with $g_0 := \phi(0)$ and where $\beta(t,g)$ denotes a family of elements of $\Omega^{i-1}(M)$ depending smoothly on $(t,g) \in \mathbb{R}\times U$, i.e. for any $(i-1)$-tuple $(\chi_1,\dots,\chi_{i-1})$ of vector fields over M, the following map is smooth:

$$\mathbb{R}\times U\times M \ni (t,g,x) \mapsto \beta(t,g,x)(\chi_1(x),\dots,\chi_{i-1}(x)) \in \mathbb{R}.$$

We now come to a key point. If in addition, one has a compactly supported function $\rho : U \to \mathbb{R}$, then, for any top degree form dg on G, one has

$$\begin{aligned}\int_G \rho(g)g^*\omega dg &= \int_G \rho(g)\big(g^*\omega - g_0^*\omega\big)dg + \Big(\int_G \rho(g)dg\Big)g_0^*\omega \\ &= d\Big(\int_G\int_0^1 \rho(g)\beta(t,g)dg\Big) + \Big(\int_G \rho(g)dg\Big)g_0^*\omega\end{aligned}$$

where $\int_G\int_0^1 \rho(g)\beta(t,g)dg$ is a **smooth** differential form over M. But, as we already show that $g_0^*\omega \sim \omega$, since G is connected, we may conclude that

$$\int_G \rho(g)g^*\omega dg \sim \Big(\int_G \rho(g)dg\Big)\omega,$$

something that is satisfied by any compactly supported function $\rho : G \to \mathbb{R}$ whose support is contained in any open subset of M diffeomorphic to $\mathbb{R}^d_G$.

If we now make use of the fact that G is compact (which we haven't done so far), we can choose the form dg to be G-invariant such that $\int_G dg = 1$, and we can fix a smooth partition of unity $\{\rho_i\}$ subordinate to a finite good cover (*cf.* ([3])) of G. Then

$$\begin{aligned}\Sigma(\omega) := \int_G g^*\omega dg &= \int_G \sum_i \rho_i(g)g^*\omega dg = \sum_i \int_G \rho_i(g)g^*\omega dg \\ &\sim \Big(\sum_i \int_G \rho_i(g)dg\Big)\omega = \Big(\int_G \sum_i \rho_i(g)dg\Big)\omega = \omega\end{aligned}$$

where, obviously, $\Sigma(\omega)$ is a G-**invariant** cocycle, which completes the poof that $B^i(M)|Z^i(M)$ as G-modules.

If we denote by $|_|$ the support of a differential form, we see in what precedes that for $t \in [0,1]$ and $g \in G$ one has

$$\begin{cases} |\beta(t)| \subseteq \gamma([0,1])\cdot|\omega| & \text{in } (**) \\ |\rho(g)\beta(t,g)| \subseteq ([0,1]\star|\rho|)|\omega| & \text{in } (***) \end{cases}$$

so that if $|\omega|$ is compact, the previous arguments show that $\Sigma(\omega) - \omega$ is in fact the differential of a compactly supported differential form, i.e. we have also proved that $B^i_c(M)|Z^i_c(M)$.

b,c,d) Follow by (a) and 2.2.6 by interchanging $\mathfrak{g}$ and G, by 2.2.7 and 2.2.9. □

3.1.5. Exercise and remarks. Show that the conclusion in 3.1.4-(a) does not change if we weaken the connectedness hypothesis of G to simply require the action of G on C to be homotopically trivial. Show that this arrives in particular when, G being connected, one is interested in $H_H(M)$ where H is a closed subgroup of G, connected or not. In that case, if $H_\circ$ denotes the connected component of $1 \in H$, one has $H_H(M) = H_{H_\circ}(M)^W$ and $H_{H,c}(M) = H_{H_\circ,c}(M)^W$, where $W = H/H_\circ$.

3.2. The Borel Construction

3.2.1. The Classifying Space. Let G be a compact connected Lie group and $\mathbb{E}G$ a *universal fiber bundle for* G. Recall that this topological space is the limit of an inductive system in the category of (right) G-manifolds $\{\mathbb{E}G(n) \to \mathbb{E}G(n+1)\}_{n\in\mathbb{N}}$, where $\mathbb{E}G(n)$ is compact, connected, oriented, n-acyclic and, moreover, the action of G on $\mathbb{E}G(n)$ is free. A *classifying space of* G is then the quotient manifold $\mathbb{B}G = \mathbb{E}G/G$, limit of the inductive system in the category of manifolds $\{\mathbb{B}G(n) \to \mathbb{B}G(n+1)\}$ where each $\mathbb{B}G(n) := \mathbb{E}G(n)/G$ is compact, simply connected since G is connected, and oriented.

3.2.2 Given a G-manifold M, the quotient M/G may lack good differentiability properties since the action of G is not, in general, a free action. A key idea to deal with this issue, dating to the 1950s, is to replace the G-manifold M by the product $\mathbb{E}G \times M$ endowed with the *diagonal action* of G, $g\cdot(e,x) := (eg^{-1},gx)$. Now, because $\mathbb{E}G$ is "contractible", the topological space $\mathbb{E}G\times M$ has the same homotopy type as M and moreover has the advantage that G acts freely on it. The quotient space is denoted, following Armand Borel ([11]):

$$\boxed{M_G := (\mathbb{E}G \times M)/G}$$

The natural fibration of fiber M (*cf.* page 22):

$$\begin{array}{ccc} M_G := \mathbb{E}G \times_G M & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{E}G/G =: \mathbb{B}G \\ [e,x] & \longmapsto & [e] \end{array}$$

establishes an important link between the three spaces M,M_G,$\mathbb{B}G$. Finally, if $f : M \to N$ is a G-equivariant map, the induced map $f_G : M_G \to N_G$, $[e,m] \mapsto [e,f(m)]$, is well defined and the diagram

$$\begin{array}{ccc} M_G & \xrightarrow{f_G} & N_G \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \mathbb{B}G & = & \mathbb{B}G \end{array}$$

is clearly commutative.

3.2.3. Definition. The functor $M \rightsquigarrow M_G$, $f \rightsquigarrow f_G$, from the category of G-manifolds to the category of fiber spaces over the classifying space $\mathbb{B}G$, is called *the Borel construction*

3.2.4 Although the topological space M_G is not a manifold, it is the limit of an inductive system of such. Indeed, for each $n \in \mathbb{N}$, since the compact group

[11] Confer §3 of chapter IV in [B$_2$], especially the remark §3.9, reproduced at page 23 of these notes, where Borel cites previous works of Conner and of Shapiro using this construction in some special cases.

3. Equivariant Cohomology of G-Manifolds

G acts freely on the product manifold $\mathbb{E}G(n) \times M$, the topological quotient $M_G(n) = \mathbb{E}G(n) \times_G M$ has a natural manifold structure, canonically oriented whenever M is so. One gets an inductive system in the category of manifolds $\{\mu_n : M_G(n) \to M_G(n+1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ with $M_G = \varinjlim M_G(n)$, and even an inductive system in the category of fibrations with fiber M and **compact** base spaces

$$\begin{array}{ccccccc} \dashrightarrow & M_G(n) & \xrightarrow{\mu_n} & M_G(n+1) & \dashrightarrow \cdots & & M_G \\ & \pi_n \downarrow & & \pi_{n+1} \downarrow & & & \pi \downarrow \\ \dashrightarrow & \mathbb{B}G(n) & \xrightarrow{\beta_n} & \mathbb{B}G(n+1) & \dashrightarrow \cdots & & \mathbb{B}G \end{array}$$

giving rise to the projective system of de Rham complexes Rham

$$\left\{\Omega^*(M_G(n+1)) \xrightarrow{\mu_n^*} \Omega^*(M_G(n))\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

and the projective system of the Rham cohomology

$$\left\{H^d(M_G(n+1)) \xrightarrow{H^d(\mu_n^*)} H^d(M_G(n))\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

for each $d \in \mathbb{N}$, which has the remarkable property that, for a given d, the system is stationary, i.e. $H^d(\mu_n^*)$ is bijective for sufficiently large n.

The same remarks hold for the compact support case since the maps μ_n are proper. One then has the projective system of de Rham complexes

$$\left\{\Omega_c^*(M_G(n+1)) \xrightarrow{\mu_n^*} \Omega_c^*(M_G(n))\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

and; for each $d \in \mathbb{N}$, the stationary projective systems of the Rham cohomology

$$\left\{H_c^d(M_G(n+1)) \xrightarrow{H^d(\mu_n^*)} H_c^d(M_G(n))\right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

3.2.5. Remark. One can show that in both cases $H^d(\mu_n^*)$ is bijective for all $n > d+1$. The projective limit of $\{H^d(M_G(n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ identifies then canonically with the d-th **singular** cohomology $H^d(M_G;\mathbb{R})$, and the projective limit of $\{H_c^d(M_G(n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ with the d-th **singular** cohomology of **vertical compact support** $H_{cv}^d(M_G;\mathbb{R})$ ([12]). Using Cartan's results in [Ca_1, Ca_2] one obtains canonical isomorphisms

$$H_G(M) \simeq H(M_G;\mathbb{R}) \quad \text{and} \quad H_{G,c}(M) \simeq H_{c.v.}(M_G;\mathbb{R}).$$

3.2.6. Serre Spectral Sequences. The fibrations π_n in 3.2.4 are Serre fibrations and as such, give rise to a projective system of spectral sequences

$$\begin{cases} \mathbb{E}_2^{p,q}(M_G(n)) := H^p(\mathbb{B}G(n)) \otimes H^q(M) \Rightarrow H^{p+q}(M_G(n)) \\ \mathbb{E}_{c,2}^{p,q}(M_G(n)) := H^p(\mathbb{B}G(n)) \otimes H_c^q(M) \Rightarrow H_c^{p+q}(M_G(n)) \end{cases}$$

whose limits are the *(Serre) spectral sequence associated with* $\pi : M_G \to \mathbb{B}G$.

$$\begin{cases} \mathbb{E}_2^{p,q}(M_G) := H^p(\mathbb{B}G) \otimes H^q(M) \\ \mathbb{E}_{c,2}^{p,q}(M_G) := H^p(\mathbb{B}G) \otimes H_c^q(M) \end{cases} \qquad (\mathbb{E}(M_G))$$

[12] The notation $H_{cv}(_)$, borrowed from [BT] p. 61, means *compact vertical cohomology*.

3.2.7. Proposition. *The Serre spectral sequences* $(\mathbb{E}(M_G))$ *associated with the fibration* $\pi : M_G \to \mathbb{B}G$ *canonically identifies with the spectral sequences already met in 3.1.4-(d).*

Proof. Implicit in [Ca$_1$, Ca$_2$]. □

3.2.8. Exercise. Let $f : M \to N$ be a G-equivariant map between oriented G-manifolds. For each $n \in \mathbb{N}$, as in 3.2.4, denote by $f_G(n) : M_G(n) \to N_G(n)$ the corresponding induced map over $\mathbb{B}G(n)$.

a) Show that the following diagrams are cartesian with $\mu(n)$ and $\nu(n)$ proper.

$$\begin{array}{ccc} M_G(n) & \xrightarrow{\mu(n)} & M_G(n+1) \\ {\scriptstyle f_G(n)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_G(n+1)} \\ N_G(n) & \xrightarrow{\nu(n)} & N_G(n+1) \end{array}$$

b) Prove the following equalities

$$\begin{cases} \nu(n)^* \circ f_G(n+1)_* = f_G(n)_* \circ \mu(n)^* \\ f_G(n+1)^* \circ \nu(n)_! = \mu(n)_! \circ f_G(n)^* \end{cases}$$

c) When $f : M \to N$ is moreover a closed embedding, one defines the *equivariant cohomology with support in* M by

$$H_{G,M}(N) := H_{M_G}(N_G).$$

Show that there exists a convergent spectral sequence $(\mathbb{E}_{M\subseteq N,r}, d_r)$

$$\mathbb{E}^{p,q}_{M\subseteq N,2} := H^p(\mathbb{B}G) \otimes H^q_M(N) \Rightarrow H^{p+q}_{G,M}(N).$$

4. Equivariant Poincaré Duality

4.1. Differential Graded Modules over a Graded Algebra

4.1.1. Graded Algebras. A *graded algebra* is a graded vector space $A \in \mathrm{GV}(\mathbb{R})$ with a family of bilinear maps $\cdot : A^a \times A^b \to A^{a+b}$ such that the triple $(A,0,+,\cdot)$ is an $\mathbb{R}$-algebra.

4.1.2. Examples

a) For a graded vector space $N \in \mathrm{GV}(\mathbb{R})$, the space of graded endomorphisms $(End^\bullet_{\mathbb{R}}(N),0,+,\mathrm{id},\circ)$ (1.1.3) is a noncommutative graded algebra.

b) $\Omega_G := S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ is a positively and evenly graded commutative algebra.

c) $\Omega(M)$ and $\Omega_G(M)$ are positively graded anticommutative algebras.

d) $\Omega_{\mathrm{c}}(M)$ and $\Omega_{G,\mathrm{c}}(M)$ are positively graded anticommutative algebras, with no unit element whenever M is not compact.

4.1.3. Graded Modules. An *Ω_G-graded module*, *Ω_G-gm* in short, is a graded space $V \in \mathrm{GV}(\mathbb{R})$ together with a homomorphism $\Omega_G \to Endgr^0_{\mathbb{R}}(V)$ of graded algebras of degree 0. Given two Ω_G-gm's V and W, a *graded homomorphism of Ω_G-gm's of degree d from V to W* is a graded homomorphism of graded spaces $\boldsymbol{\alpha} : V \to W$ of degree d (1.1.3), which is compatible with the action of Ω_G, i.e. $\boldsymbol{\alpha}(P\cdot v) = P \cdot \boldsymbol{\alpha}(v)$ for all $P \in \Omega_G$ and $v \in V$. We denote by $Homgr^d_{\Omega_G}(V,W)$ the space of such homomorphisms and by

$$Hom^\bullet_{\Omega_G}(V,W) = \left\{ Homgr^d_{\Omega_G}(V,W) \right\}_{d\in\mathbb{Z}}$$

the graded space of *graded homomorphisms of Ω_G-gm's*.

When $d = 0$, we may write $Homgr_{\Omega_G}(V,W)$ instead of $Homgr^0_{\Omega_G}(V,W)$.

4.1.4. Example. Examples 4.1.2-(c,d) are examples of Ω_G-graded modules.

4.1.5 The *category* $\mathrm{GM}(\Omega_G)$ *of Ω_G-graded modules* is the category whose objects are the Ω_G-gm and whose *morphisms* are the graded homomorphisms of degree 0. We will equivalently write $Mor_{\mathrm{GM}(\Omega_G)}(V,W)$ and $Homgr_{\Omega_G}(V,W)$ the set of morphisms from V to W.

4.1.6 A direct sum $\bigoplus_{\mathfrak{i}\in\mathfrak{I}} \Omega_G[m_{\mathfrak{i}}]$, with $m_{\mathfrak{i}} \in \mathbb{Z}$, is called *a free Ω_G-graded module*.

4.1.7. Proposition

a) *An object $V \in \mathrm{GM}(\Omega_G)$ is* projective (resp. injective) *if and only if the functor $Hom^\bullet(V,_) : \mathrm{GM}(\Omega_G) \rightsquigarrow \mathrm{GM}(\Omega_G)$* (resp. $Hom^\bullet(_,V)$) *is exact.*

b) *The category $\mathrm{GM}(\Omega_G)$ is an abelian category with enough injective and projective objects. The cohomological dimension of $\mathrm{GM}(\Omega_G)$ is finite and equals the rank of G.*

Proof. (a) is an immediate consequence of the direct decomposition of functors

$$Hom^\bullet_{\Omega_G}(_,_) = \bigoplus\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} Homgr_{\Omega_G}(_,_[m]) = \bigoplus\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} Homgr_{\Omega_G}(_[-m],_).$$

4. Equivariant Poincaré Duality

(b) *Projectivity.* Let $\{v_\mathfrak{i}\}_{\mathfrak{i}\in\mathfrak{I}}$ be a family of *homogeneous* generators for $V \in \mathrm{GM}(\Omega_G)$ and consider, for each $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$, the map $\gamma_\mathfrak{i} : \Omega_G[-d_\mathfrak{i}] \to V$, $x \mapsto xv_\mathfrak{i}$ which is clearly a morphism in $\mathrm{GM}(\Omega_G)$. The sum

$$\sum\nolimits_{\mathfrak{i}\in\mathfrak{I}} \gamma_\mathfrak{i} : \bigoplus\nolimits_{\mathfrak{i}\in\mathfrak{I}} \Omega_G[-d_\mathfrak{i}] \twoheadrightarrow V \qquad (\diamond)$$

represents V as the quotient in $\mathrm{GM}(\Omega_G)$ of a free, and thus projective, Ω_G-gm.

Injectivity. We reproduce the proof of theorem 1.2.2 in [Go] §1.4 in the context of graded rings.

The correspondence $\quad V \rightsquigarrow \widehat{V} := \mathit{Hom}^\bullet_\mathbb{Z}(V,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})[0]) \qquad (\diamond\diamond)$

is an additive contravariant functor from the category of *left* (resp. *right*) Ω_G-gm to the category of *right* (resp. *left*) Ω_G-gm ([13]), and is exact, by (a), since

$$\mathit{Homgr}_\mathbb{Z}(_,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})[0]) = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}((_)^0,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

and since $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ is an injective $\mathbb{Z}$-module.

Lemma 1. The map $\nu(V) : V \to \widehat{\widehat{V}}$, $v \mapsto (\gamma \mapsto \gamma(v))$ is an injective *morphism.*

Proof of lemma 1. Because $\nu(V)$ is clearly a morphism of graded modules, it is injective if and only if it doesn't kill any homogeneous nonzero element. If $0 \neq v \in V^d$, the subgroup $\mathbb{Z}\cdot v \subseteq V^d$ is isomorphic to some $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ for $n \neq \pm 1$, and there exists a nonzero homomorphism $\gamma'' : \mathbb{Z}\cdot v \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (exercise), restriction of some $\gamma' : V^d \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (thanks to the injectivity of $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$). Extend this γ' to the whole of V, assigning zero on the homogeneous factors V^e when $e \neq d$. This last extension, denoted by $\gamma : V \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, is a graded morphism of degree $-d$ and verifies $\nu(V)(v)(\gamma) = \gamma(v) \neq 0$ by construction, so that $\nu(V)(v) \neq 0$, which completes the proof of lemma 1. ⊟

Lemma 2. For any free right Ω_G*-gm F, the* left Ω_G*-gm $\widehat{F}$ is injective.*

Proof of lemma 2. We recall (*cf.* [Bk] Chap. II, §4, Prop. 1) that for any left Ω_G-dgm N, the maps

$$\begin{array}{ccc} \mathit{Hom}^\bullet_{\Omega_G}(N,\mathit{Hom}^\bullet_\mathbb{Z}(\Omega_G,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})[0])) & \rightleftarrows & \mathit{Hom}^\bullet_\mathbb{Z}(N,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})[0]) \\ \gamma & \longmapsto & \big(v \mapsto \gamma(v)(1)\big) \\ \big(v \mapsto (x \mapsto \xi(xv))\big) & \longmapsfrom & \xi \end{array}$$

are isomorphisms of graded vector spaces each inverse to the other. It follows that $\mathit{Hom}^\bullet_\mathbb{Z}(\Omega_G,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})[0]))$ is an injective left Ω_G-gm if and only if the functor $\mathit{Hom}^\bullet_\mathbb{Z}(_,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})[0])$ is exact, but this is equivalent, by (a), to the exactness of the functor $\mathit{Homgr}_\mathbb{Z}(_,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})[0]) = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}((_)^0,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, which is clear since $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ is an injective $\mathbb{Z}$-module. ⊟

Now, if V is a left Ω_G-gm, fix some epimorphism of right Ω_G-gm $\pi : F \twoheadrightarrow \widehat{V}$ where F is free as in $(\diamond)$. The morphism $\widehat{\pi} : \widehat{\widehat{V}} \to \widehat{F}$ is injective and composed with $\nu(V) : V \to \widehat{\widehat{V}}$, injective by lemma 1, we get an injective morphism $V \hookrightarrow \widehat{F}$

[13] If N is a *right* Ω_G-gm, the structure of *left* Ω_G-module of $\mathit{Hom}^\bullet_\mathbb{Z}(N,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})[0])$ is given by $(x\cdot\gamma)(y) := \gamma(yx)$ for all $x \in \Omega_G$ and $y \in N$. If N is a *left* Ω_G-gm, the structure of *right* Ω_G-module of $\mathit{Hom}^\bullet_\mathbb{Z}(N,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})[0])$ is given by $(\gamma\cdot x)(y) := \gamma(xy)$ for all $x \in \Omega_G$ and $y \in N$.

of left Ω_G-gm, where $\widehat{F}$ is an injective left Ω_G-gm by lemma 2. This completes the proof of the existence of enough injective objects in $\mathrm{GM}(\Omega_G)$.

The statement about $\dim_{\mathrm{ch}}(\mathrm{GM}(H_T))$ results from the fact (Chevalley's theorem) that Ω_G is a polynomial algebra in $\mathrm{rk}(G)$ variables. One may then refer to Hilbert's Syzygy Theorem (*cf.* [J] p. 385, and Ex. 2, p. 387). □

4.1.8. Exercise. Let A be a graded $\mathbb{R}$-algebra which is an integral domain.

a) Show that $S^{-1}A$, where S denotes the multiplicative system of homogeneous nonzero elements of A, is an injective object of $\mathrm{GM}(A)$. Also, prove that the canonical inclusion $A \hookrightarrow S^{-1}A$ is an injective envelope for A.

b) Show that when $\mathrm{rk}(G) > 0$, the degrees of a non trivial injective object of $\mathrm{GM}(\Omega_G)$ cannot be bounded below ([14]).

c) Show that if $V \in \mathrm{GM}(\Omega_G)$ is positively graded, it admits projective resolutions in $\mathrm{GM}(\Omega_G)$ all of whose terms are positively graded.

The next two sections are straightforward generalizations of sections 1.1.5 and 1.1.8 from graded vector spaces to Ω_G-graded modules.

4.1.9. Differential Graded Modules. An *Ω_G-differential graded module*, *Ω_G-dgm* in short, is a pair (V,d) with $V \in \mathrm{GM}(\Omega_G)$ and $d \in Endgr^1_{\Omega_G}(V)$, called *differential*, is such that (V,d) is a complex, i.e. $d^2 = 0$. A *morphism of Ω_G-dgm* $\boldsymbol{\alpha} : (V,d) \to (V',d')$ is a morphism of Ω_G-gm's which is also a morphism of complexes, i.e. $d' \circ \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \circ d$. The Ω_G-dgm's and their morphisms constitute the *category* $\mathrm{DGM}(\Omega_G)$ *of Ω_G-differential graded modules*. The category $\mathrm{DGM}(\Omega_G)$ is an abelian category.

4.1.10. The $\boldsymbol{Hom}^\bullet(_,_)$ and $(_\otimes_)^\bullet$ Bi-functors. Given two Ω_G-dgm's (V,d) and (V',d'), we recall the definition of the Ω_G-dgm's

$$\big(Hom^\bullet_{\Omega_G}(V,V'),D_\bullet\big) \quad \text{and} \quad \big((V\otimes_{\Omega_G} V')^\bullet,\boldsymbol{\Delta}_\bullet\big).$$

As Ω_G-graded modules they are defined by

$$m \mapsto \begin{cases} Hom^m_{\Omega_G}(V,V') := Homgr^m_{\Omega_G}(V,V') \\ (V\otimes_{\Omega_G} V')^m := \pi(V\otimes_{\mathbb{R}} V')^m \end{cases}$$

where $\pi : V\otimes_{\mathbb{R}} V' \twoheadrightarrow V\otimes_{\Omega_G} V'$, $v\otimes v' \mapsto [v\otimes v']$, is the canonical (graded) surjection (see remark 4.1.12). The differentials $D_\bullet$ and $\boldsymbol{\Delta}_\bullet$ are:

$$\begin{cases} D_m(f) = d'\circ f - (-1)^m f\circ d \\ \boldsymbol{\Delta}_m([v\otimes v']) = [d(v)\otimes v'] + (-1)^{|v|}[v\otimes d'(v')] \end{cases}$$

where $v\otimes v' \in V^{|v|}\otimes V'^{|v'|}$ and $|v|+|v'| = m$.

The fact that D and $\boldsymbol{\Delta}$ are Ω_G-linear results from the fact that Ω_G is graded only by **even** degrees (!).

[14] A graded space V is said to be *bounded below (resp. above)*, if there exists $N \in \mathbb{Z}$ such that $V^i = 0$ for all $i < N$ (resp. $i > N$). The graded algebra Ω_G is bounded below by 0.

4.1.11 These constructions are natural w.r.t. each side entry, which means that they define two bi-functors

$$Hom^{\bullet}_{\Omega_G}((_),(_)) : \mathrm{DGM}(\Omega_G) \times \mathrm{DGM}(\Omega_G) \rightsquigarrow \mathrm{DGM}(\Omega_G)$$
$$((_) \otimes_{\Omega_G} (_))^{\bullet} : \mathrm{DGM}(\Omega_G) \times \mathrm{DGM}(\Omega_G) \rightsquigarrow \mathrm{DGM}(\Omega_G)$$

which are bi-additive and have the usual variances and exactnesses. For example, the first is contravariant and left exact on the left entry, and covariant and left exact on the right entry, while the second is bi-covariant and right exact.

4.1.12. Remark. Some care must be taken with the tensor product since it hides some deep subtleties. A good way to understand it is to note that $V \otimes_{\Omega_G} V'$ is the quotient of the graded space $V \otimes_{\mathbb{R}} V'$ by the subspace W spanned by the tensors $Pv \otimes v' - v \otimes Pv'$ with $P \in \Omega_G$ and $(v,v') \in V \times V'$ both *homogeneous*. One then shows that W is a graded subcomplex of $(V \otimes_{\mathbb{R}} V', \mathbf{\Delta})$, so that the canonical surjection $\pi : (V \otimes_{\mathbb{R}} V', \mathbf{\Delta}) \twoheadrightarrow (V \otimes_{\mathbb{R}} V', \mathbf{\Delta})/W$ is an epimorphism of graded complexes, therefore inducing over $V \otimes_{\Omega_G} V'$ a structure of Ω_G-dgm. Again, a key point is that Ω_G is graded only by **even** degrees.

4.1.13. The Ω_G-Dual of a Complex. In section 1.1.11, we introduced the basic duality functor $Hom^{\bullet}_{\mathbb{k}}(_,\mathbb{k}) : \mathrm{DGM}(\mathbb{k}) \rightsquigarrow \mathrm{DGM}(\mathbb{k})$ and noted that it was an exact functor (1.1.13). In the framework of Ω_G-dgm's, the corresponding functor is the *basic Ω_G-duality functor*

$$Hom^{\bullet}_{\Omega_G}(_,\Omega_G) : \mathrm{DGM}(\Omega_G) \rightsquigarrow \mathrm{DGM}(\Omega_G)$$

which is generally **not** exact, **nor does** it respect quasi-isomorphisms.

4.1.14. The Forgetful Functor. If we disregard differentials, Ω_G-dgm's simply appear as Ω_G-gm's, and likewise for morphisms. Forgetting the complex structure gives the *forgetful functor* $o : \mathrm{DGM}(\Omega_G) \rightsquigarrow \mathrm{GM}(\Omega_G)$ which is exact and will often be implicit in some of our considerations.

4.2. Deriving Functors

4.2.1. Deriving Functors Defined on the Category GM(Ω_G). We have already shown (4.1.7) that the abelian category $\mathrm{GM}(\Omega_G)$ has enough projective and injective objects ([15]). We will now recall the definition of the *left and right derived functors* associated with an additive functor $F : \mathrm{Ab}' \to \mathrm{Ab}$ between abelian categories where Ab' has enough projective and injective objects.

The *left and right derived functors*, respectively $\mathbb{L}_{\star}F : \mathrm{Ab}' \rightsquigarrow \mathcal{K}_{\star}(\mathrm{Ab})$ and $\mathbb{R}^{\star}F : \mathrm{Ab}' \rightsquigarrow \mathcal{K}^{\star}(\mathrm{Ab})$ ([16]) applied to an object $V \in \mathrm{Ab}'$ are defined by the following steps. First, choose an injective and a projective resolution of V,

$$\mathbf{0} \longrightarrow V \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{I}^2 \xrightarrow{d_2} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{d_{-2}} \mathcal{P}^{-2} \xrightarrow{d_{-1}} \mathcal{P}^{-1} \xrightarrow{d_0} \mathcal{P}^0 \xrightarrow{\epsilon} V \longrightarrow \mathbf{0}.$$

[15] See also Grothendieck [Gr], chapter **I**, Thm. 1.10, p. 135.

[16] $\mathcal{K}^{\star}(\mathrm{Ab})$ (resp. $\mathcal{K}_{\star}(\mathrm{Ab})$) is the category of cochain (resp. chain) complexes of Ab whose morphisms are the morphisms of complexes modulo homotopy.

Next, let $\mathcal{I}^\star V$ stand for the truncated complex $\big(0 \to \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{d_1} \cdots\big)$, and $\mathcal{P}^\star V$ for $\big(\cdots \xrightarrow{d_{-1}} \mathcal{P}^{-1} \xrightarrow{d_0} \mathcal{P}^0 \to \mathbf{0}\big)$, and set

$$\begin{cases} \mathbb{L}^\star F(V) := F(\mathcal{P}^\star V) \\ \mathbb{R}^\star F(V) := F(\mathcal{I}^\star V) \end{cases} \tag{$*$}$$

One proves that the complexes $(*)$ are homotopically independent of the chosen resolutions, so that are well defined objects of $\mathcal{K}^*(\mathrm{Ab})$.

As the targets of the derived functors $\mathbb{R}^\star F$ and $\mathbb{L}^\star F$ are complexes, one is interested in their cohomologies. Their classical notations are

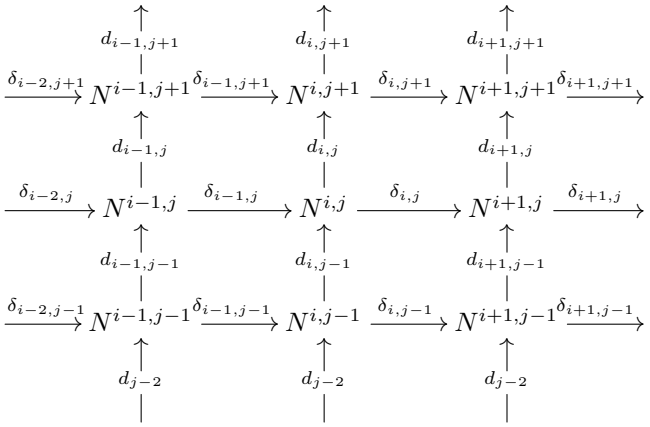
$$\begin{cases} (\mathbb{R}^i F)(V) := H^i(\mathbb{R}^\star(_)) \\ (\mathbb{L}^i F)(_) := H^i(\mathbb{L}^\star F(_)). \end{cases}$$

It is easily seen from the above definitions that the *augmentation morphisms* of complexes $\epsilon : V[0] \to \mathcal{I}^\star$ and $\epsilon : \mathcal{P}_\star \to V[0]$, give rise to natural morphisms of complexes $F(V[0]) \to (\mathbb{R}^\star F)(V)$ and $(\mathbb{L}^\star F)(V) \to F(V[0])$, inducing canonical morphisms

$$F(V) \to (\mathbb{R}^0 F)(V) \quad \text{and} \quad (\mathbb{L}^0 F)(V) \to V\,.$$

These are isomorphisms whenever F is respectively left and right exact.

4.2.2. Simple Complex Associated with a Double Complex. The category $\mathcal{C}^\natural(\mathrm{Ab})$ of (cochain) complexes of an abelian category Ab is again an abelian category so that we can look at the category $\mathcal{C}^{\star,\natural}(\mathrm{Ab}) := \mathcal{C}^\star(\mathcal{C}^\natural(\mathrm{Ab}))$ of (cochain) complexes of $\mathcal{C}^\natural(\mathrm{Ab})$ also called *double (cochain) complexes of* Ab. A double complex $N^{\star,\natural} := (N^{\star,\natural}, \delta_{\star,\natural}, d_{\star,\natural}) \in \mathcal{C}^{\star,\natural}(\mathrm{Ab})$ is generally represented as a two dimensional ladder all of whose subdiagrams are commutative.



The *simple (or total) complex* associated with$N^{\star,\natural}$ is the complex $(Tot^\circ(N^{\star,\natural}), D_\circ)$, where, for all $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} Tot^m(N^{\star,\natural}) := \bigoplus_{m=a+b} N^{i,j} \\ \quad D_m(n_{i,j}) := d_{i,j}(n_{i,j}) + (-1)^j \delta_{i,j}(n_{i,j}) \end{cases} \qquad \begin{array}{ccc} N^{i,j+1} & & \\ {\scriptstyle d_{i,j}}\uparrow & & \\ N^{i,j} & \xrightarrow{(-1)^j \delta_{i,j}} & N^{i+1,j} \end{array}$$

In this way, one obtains an additive exact functor

$$Tot^\circ := \mathcal{C}^{\star,\natural}(\mathrm{Ab}) \rightsquigarrow \mathcal{C}^\circ(\mathrm{Ab}).$$

4.2.3. Spectral Sequences Associated with Double Complexes. The double complex $N^{\star,\natural}$ is said to be *of the first quadrant* if $\{(i,j) \mid N^{i,j} \neq \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. As explained in [Go] (§4.8, p. 86), one assigns to this kind of double complex, two *regular* decreasing filtrations of $(Tot^\circ(N^{\star,\natural}), D_\circ)$. The first is relative to the *line* $\natural$*-filtration* $Tot^\circ(N^{\star,\natural})_\ell := Tot^\circ(N^{\star,\natural\geq\ell})$, and the second to the *column* $\star$*-filtration* $Tot^\circ(N^{\star,\natural})_c := Tot^\circ(N^{\star\geq c,\natural})$. Each filtration gives rise to a spectral sequence converging to the cohomology of $(Tot^\circ N^{\star,\natural}, D_\circ)$, respectively

$$\begin{cases} {}'\mathbb{E}_2^{p,q} := H_\natural^p H_\star^q(N^{\star,\natural}) \Rightarrow H_\circ^{p+q}(Tot^\circ N^{\star,\natural}, D_\circ), \\ {}''\mathbb{E}_2^{p,q} := H_\star^p H_\natural^q(N^{\star,\natural}) \Rightarrow H_\circ^{p+q}(Tot^\circ N^{\star,\natural}, D_\circ), \end{cases}$$

where $H_\star$ (resp. $H_\natural$) is the cohomology w.r.t. $\delta_\star$ (resp. $d_\natural$).

4.2.4. The $\mathbb{R}^\star Hom^\bullet_{\Omega_G}(_,_)$ and $(_)\otimes^{\mathbb{L}^\star}_{\Omega_G}(_)$ Bi-functors. Given two Ω_G-graded modules V, $W \in \mathrm{GM}(\Omega_G)$, we may consider the four functors

$$Hom^\bullet_{\Omega_G}(V,_), \quad Hom^\bullet_{\Omega_G}(_,W), \quad V\otimes_{\Omega_G}(_), \quad (_)\otimes_{\Omega_G} W,$$

where the first two are left exact and the other two are right exact.
In order to simplify notations we shall often write '$Hom^\bullet$' for '$Hom^\bullet_{\Omega_G}$'.

Now, given projective resolutions $\mathcal{P}^\natural(V) \to V$, $\mathcal{P}^\natural(W) \to W$ and an injective resolution $W \to \mathcal{I}^\star(W)$ in $\mathrm{GM}(\Omega_G)$, we have natural morphisms of double complexes ([17])

$$\begin{array}{ccccc} Hom^\bullet(\mathcal{P}^\natural(V), W[0]^\star) & \longrightarrow & Hom^\bullet(\mathcal{P}^\natural(V), \mathcal{I}^\star W) & \longleftarrow & Hom^\bullet(V[0]^\natural, \mathcal{I}^\star W) \\ \mathcal{P}^\natural(V)\otimes W[0]^\star & \longrightarrow & \mathcal{P}^\natural(V)\otimes\mathcal{P}^\star(W) & \longleftarrow & V[0]^\natural\otimes\mathcal{P}^\star(W) \end{array}$$

giving rise to canonical morphisms of complexes on Ω_G-gm

$$\begin{array}{ccccc} Hom^\bullet(\mathcal{P}^\natural(V), W) & \longrightarrow & Tot^\circ Hom^\bullet(\mathcal{P}^\natural(V), \mathcal{I}^\star W) & \longleftarrow & Hom^\bullet(V, \mathcal{I}^\star W) \\ \mathcal{P}^\natural(V)\otimes W & \longrightarrow & Tot^\circ\left(\mathcal{P}^\natural(V)\otimes\mathcal{P}^\star(W)\right) & \longleftarrow & V\otimes\mathcal{P}^\star(W) \end{array} \qquad (\ddagger)$$

The following proposition is classical (*loc. cit.*).

4.2.5. Proposition. *The morphisms* ($\ddagger$) *are quasi-isomorphisms.* ([18])

Sketch of the proof. For the first line of ($\ddagger$), one notes that the morphisms of complexes are compatible with line and column filtrations of double complexes of the first quadrant. In the case of

$$Hom^\bullet(\mathcal{P}^\natural(V), W) \to Tot^\circ Hom^\bullet(\mathcal{P}^\natural(V), \mathcal{I}^\star W),$$

since for each $i \in \mathbb{Z}$ the map $Hom^\bullet(\mathcal{P}^i(V), W) \to Tot^\circ Hom^\bullet(\mathcal{P}^i(V), \mathcal{I}^\star W)$ is a quasi-isomorphism, the induced map on the ${}''\mathbb{E}$ terms of the associated spectral sequences (4.2.3) is an isomorphism and we conclude. The case of

$$Tot^\circ Hom^\bullet(\mathcal{P}^\natural(V), \mathcal{I}^\star W) \longleftarrow Hom^\bullet(V, \mathcal{I}^\star W)$$

[17] By $W[0]^\bullet$ we denote the complex satisfying $W[0]^0 = W$ and $W[0]^i = \mathbf{0}$ for $i \neq 0$.

[18] In fact they are homotopic equivalences, but we won't need to be so precise.

is almost the same except that now we must consider the line filtration and use the $'\mathbb{E}$ spectral sequence.

The second line in (‡) is dealt with in the same way after observing that 4.2.3 also applies (dually) to double complexes of the *third* quadrant. ⊡

As a consequence of 4.2.5, in each line of (‡) the complexes represent the *same objet* in the derived category $\mathcal{D}^\star(\mathrm{GM}(\Omega_G))$. They are classically denoted by $I\!R^\star Hom^\bullet_{\Omega_G}(V,W)$ and $V\otimes^{I\!L^\star}_{\Omega_G} W$. The constructions are natural w.r.t. each entry so that we get two bi-functors

$$\begin{aligned} I\!R^\star Hom^\bullet_{\Omega_G}((_),(_)) &: \mathrm{GM}(\Omega_G)\times\mathrm{GM}(\Omega_G)\rightsquigarrow\mathcal{D}^\star(\mathrm{GM}(\Omega_G)) \\ ((_)\otimes^{I\!L^\star}_{\Omega_G}(_))^\bullet &: \mathrm{GM}(\Omega_G)\times\mathrm{GM}(\Omega_G)\rightsquigarrow\mathcal{D}^\star(\mathrm{GM}(\Omega_G)) \end{aligned} \qquad (\diamond)$$

which are bi-additive and have the usual variances and exactnesses. They clearly extend the bi-functors in 4.1.11 from $\mathrm{GM}(\Omega_G)$ to $\mathcal{D}^\star(\mathrm{GM}(\Omega_G))$.

4.2.6. The *Ext*$^\bullet$ and *Tor*$^\bullet$ Bi-functors. Given $V,W\in\mathrm{GM}(\Omega_G)$, one defines for $i\in\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} Ext^{i,\bullet}_{\Omega_G}(V,W) := H^i_\star\big(I\!R^\star Hom^\bullet_{\Omega_G}(V,W)\big) \\ Tor^\bullet_{\Omega_G,i}(V,W) := H^i_\star\big(V\otimes^{I\!L^\star}_{\Omega_G} W\big) \end{cases}$$

Where $H^i_\star$ is the i'th cohomology functor on $\mathcal{D}^\star(\mathrm{GL}(\Omega_G))$.

4.2.7. Defining $I\!R^\star Hom^\bullet_{\Omega_G}(_,\Omega_G)$ on $\mathrm{DGM}(\Omega_G)$. We proceed as in 4.2.4 except that we will consider only injective resolutions of Ω_G in $\mathrm{GM}(\Omega_G)$. ([19])

Let $V:=(V,d)\in\mathrm{DGM}(\Omega_G)$. For any $N\in\mathrm{GM}(\Omega_G)$, we already endowed the $\Omega^\bullet_G$-graded module $Hom^\bullet_{\Omega_G}(V,N)$ with a canonical structure of $\Omega^\bullet_G$-differential graded module $(Hom^\bullet_{\Omega_G}(V,N),D_\bullet)$ (*cf.* 4.1.11) in such a way that we obtain a left exact functor

$$Hom^\bullet_{\Omega_G}(V,_):\mathrm{GM}(\Omega_G)\rightsquigarrow\mathrm{DGM}(\Omega_G).$$

It follows that the target of the functor $I\!R^\star Hom^\bullet_{\Omega_G}(_,\Omega_G):=Hom^\bullet_{\Omega_G}(_,\mathcal{I}^\star N)$ is the category $\mathcal{C}^\star(\mathrm{DGM}(\Omega_G))$. The functor transforms homotopies to identities, and respects quasi-isomorphisms, it therefore induces a contravariant functor

$$I\!R^\star Hom^\bullet_{\Omega_G}(_,\Omega_G):\mathrm{DGM}(\Omega_G)\rightsquigarrow\mathcal{D}^\star(\mathrm{DGM}(\Omega_G)), \qquad (\diamond)$$

which we will call *the derived duality functor*. This functor, composed with the i'th cohomology functor $H^i_\star:\mathcal{D}^\star(\mathrm{DGM}(\Omega_G))\rightsquigarrow\mathrm{DGM}(\Omega_G)$ gives the *i'th extension functor*

$$Ext^{i,\bullet}_{\Omega_G}(_,\Omega_G):=H^i_\star\big(I\!R^\star Hom^\bullet_{\Omega_G}(_,\Omega_G)\big):\mathrm{DGM}(\Omega_G)\rightsquigarrow\mathrm{DGM}(\Omega_G).$$

[19] The good notion of projective resolution for an Ω_G-dgm (V,d) is the one of *simultaneous* projective resolutions. These are resolutions $\cdots\to\mathcal{P}^2\to\mathcal{P}^1\to\mathcal{P}^0\to V\to 0$ $(*)$ in $\mathrm{DGM}(H_T)$ where $\mathcal{P}^i$ is a projective Ω_G-gm's, and such that the *derived sequence* $\cdots\to h\mathcal{P}^2\to h\mathcal{P}^1\to h\mathcal{P}^0\to hV\to 0$ $(**)$ is a projective resolution in $\mathrm{GM}(\Omega_G)$. When the graded space V is bounded below (*cf.* ([14])), the complex (V,d) always admits *simultaneous projective resolutions* and the derived functor $I\!R^\star Hom^\bullet((V,d),\Omega_G)$ may as well be defined as $Hom^\bullet(\mathcal{P}^\natural,\Omega_G)$, as in the case of Ω_G-gm's, but we won't use this point of view in these notes.

4. Equivariant Poincaré Duality

The family (indexed by $\star \in \mathbb{Z}$) of all these functors

$$Ext^{\star,\bullet}_{\Omega_G}(_,\Omega_G) := H^\star\big(I\!R^\star Hom^\bullet_{\Omega_G}(_,\Omega_G)\big) : \mathrm{DGM}(\Omega_G) \rightsquigarrow \mathrm{DGM}^{\star,\bullet}(\Omega^\bullet_G) \quad (\diamond)$$

where $\mathrm{DGM}^{\star,\bullet}(\Omega^\bullet_G)$ is the category of $\star$-graded $\Omega^\bullet_G$-dgm (the action of $\Omega^\bullet_G$ does not affect the $\star$-degree), constitutes a ∂-functor in $\mathcal{K}^\star(\mathrm{DGM}(\Omega_G))$.

4.2.8. Spectral Sequences Associated with $I\!R^\star Hom^\bullet_{\Omega_G}(_,\Omega_G)$. In the last paragraph we defined the derived duality functor $(\diamond)$ for any Ω_G-dgm (V,d) as the complex of Ω_G-dgm's

$$I\!R^\star Hom^\bullet_{\Omega_G}((V,d),\Omega_G) := Hom^\bullet_{\Omega_G}((V,d),(\mathcal{I}^\star\Omega_G,\delta_\star)), \qquad (\dagger)$$

that will be represented as a double complex with lines indexed by '$\bullet$' and columns by ''$\star$'. The differentials d and $\delta_\star$ commute, d increases de $\bullet$-degree and leaves unchanged the $\star$-degree, while $\delta_\star$ does the opposite.

4.2.9. Proposition *Let $(V,d) \in \mathrm{DGM}(\Omega_G)$.*

a) *There exist convergent spectral sequences*

$$\begin{cases} {}'I\!E^{p,q} := H^p_\bullet(Ext^{q,\bullet}_{\Omega_G}(V,\Omega_G)) \Rightarrow H^{p+q}_\circ\big(Tot^\circ I\!R^\star Hom^\bullet_{\Omega_G}(V,\Omega_G),D_\circ\big) \\ {}''I\!E^{p,q} := Ext^{p,q}_{\Omega_G}(hV,\Omega_G)) \quad \Rightarrow H^{p+q}_\circ\big(Tot^\circ I\!R^\star Hom^\bullet_{\Omega_G}(V,\Omega_G),D_\circ\big) \end{cases}$$

b) *If V is projective as Ω_G-gm ([20]), then the following morphism of complexes induced by the augmentation $\epsilon : \Omega_G \to \mathcal{I}^\star$ is a quasi-isomorphism:*

$$Hom^\bullet_{\Omega_G}((V,d),\Omega_G) \xrightarrow{(\epsilon)} Tot^\circ I\!R^\star Hom^\bullet_{\Omega_G}((V,d),\Omega_G).$$

c) *If hV is projective as Ω_G-gm, then the following natural morphisms of Ω_G-gm's are isomorphisms:*

$$Hom^\bullet_{\Omega_G}(hV,\Omega_G) \xrightarrow{(\epsilon)} Tot^\circ Hom^\bullet_{\Omega_G}(hV,\mathcal{I}^\star) \longrightarrow h\big(Tot^\circ Hom^\bullet_{\Omega_G}(V,\mathcal{I}^\star)\big)$$

Proof. (a) By 4.1.7 we can fix an injective resolution $\Omega_G \to (\mathcal{I}^\star\Omega_G,\delta_\star)$ of Ω_G-gm of *finite length*, whereby the line $\bullet$-filtration and the column $\star$-filtration are both regular for the total order '$\bullet + \star$'. We have

$$({}'I\!E_0^{p,\star},d_0) = (Homgr^p(V,\mathcal{I}^*\Omega_G),\delta_\star)$$
$$({}''I\!E_0^{p,\bullet},d_0) = Hom^\bullet((V,d),\mathcal{I}^p\Omega_G)$$

and the proposition follows. (b,c) are straightforward consequences of (a). □

4.2.10. Proposition. *Let (V,d) be an Ω_G-dgm.*

a) *For any $N \in \mathrm{GM}(\Omega_G)$, there exists a natural morphism of Ω_G-modules*

$$\xi(V,N) : h(Hom^\bullet_{\Omega_G}((V,d),N)) \to Hom^\bullet_{\Omega_G}(hV,N)$$

b) *If V and hV are projective (free) Ω_G-gm, then $\xi(V,\Omega_G)$ is an isomorphism.*

c) *Let (V,d) and (V',d') be Ω_G-dgm's where V and V' are projective (free) Ω_G-gm's. If $\boldsymbol{\alpha} : (V,d) \to (V',d')$ is a quasi-isomorphism of Ω_G-dgm's, the following induced morphism of Ω_G-dgm's is a quasi-isomorphism:*

$$Hom^\bullet_H(\boldsymbol{\alpha},\Omega_G) : Hom^\bullet_H((V',d'),\Omega_G) \to Hom^\bullet_H((V,d),\Omega_G).$$

[20] A projective Ω_G-gm is always free, *cf.* in [J] the corollary of theorem 6.21, p. 386.

Proof. In order to simplify notations we write '$Hom^\bullet$' for '$Hom^\bullet_{\Omega_G}$'.

Let $Z \subseteq V$, resp. $B \subseteq V$, denote the Ω_G-graded submodules of cocycles, resp. coboundaries, of (V,d), and let N be any Ω_G-graded module.

(a) Applying the functor $Hom^\bullet(_,N)$ to the short exact sequence:

$$\mathbf{0} \to Z \longrightarrow V \xrightarrow{d} B[1] \to \mathbf{0}, \tag{$\dagger$}$$

one gets the left exact sequence of Ω_G-complexes

$$\mathbf{0} \to Hom^\bullet(B,N)[-1] \xrightarrow{\alpha} Hom^\bullet(V,N) \xrightarrow{\beta} Hom^\bullet(Z,N),$$

and the short exact sequence of Ω_G-complexes

$$\mathbf{0} \to Hom^\bullet(B,N)[-1] \xrightarrow{\alpha} Hom^\bullet(V,N) \xrightarrow{\beta} Q^\bullet(Z,N) \to \mathbf{0}, \tag{$*$}$$

where $Q^\bullet(Z,N)$ denotes the image of β. Note that the left and right complexes in $(*)$ have null differentials so that they coincide with their cohomology.

The cohomology sequence associated with $(*)$ is the long exact sequence

$$\xrightarrow{c_{i-1}} Hom^i(B,N) \xrightarrow{a_i} h^i\,Hom^\bullet(V,N) \xrightarrow{b_i} Q^i(Z,N) \xrightarrow{c_i} Hom^i(B,N) \xrightarrow{a_{i+1}},$$

where one easily verifies that c_i is the restriction to $Q^i(V,N)$ of the natural map $Hom^\bullet(Z,N) \to Hom^\bullet(B,N)$ induced by the inclusion $B \subseteq Z$. In this way we obtain the exact triangle of Ω_G-graded modules

$$h\,Hom^\bullet(V,N) \xrightarrow{b} Q^\bullet(Z,N) \xrightarrow{c} Hom^\bullet(B,N) \xrightarrow{a[+1]}. \tag{$**$}$$

On the other hand, if we apply $Hom^\bullet(_,N)$ to the short exact sequence

$$\mathbf{0} \to B \ \subseteq\ Z \to hV \to \mathbf{0}, \tag{$\dagger\dagger$}$$

we obtain the left exact sequence

$$\mathbf{0} \to Hom^\bullet(hV,N) \xrightarrow{b'} Hom^\bullet(Z,N) \xrightarrow{c'} Hom^\bullet(B,N),$$

which, joined to $(**)$, gives rise to the following commutative diagram with exact horizontal lines:

$$\begin{array}{ccccccc} & & h\,Hom^\bullet(V,N) & \xrightarrow{b} & Q^\bullet(V,N) & \xrightarrow{c} & Hom^\bullet(B,N) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \xi(V,N)} & & \downarrow{\scriptstyle \subseteq} & \bigoplus & \downarrow{\scriptstyle =} \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & Hom^\bullet(hV,N) & \xrightarrow{b'} & Hom^\bullet(Z,N) & \xrightarrow{c'} & Hom^\bullet(B,N) \end{array} \tag{$\mathcal{D}$}$$

establishing the existence of $\xi(V,N)$.

(b) If hV is projective, the morphism c' is surjective and

$$I\!R^i\,Hom^\bullet_{\Omega_G}(Z,N) = I\!R^i\,Hom^\bullet_{\Omega_G}(B,N), \quad \forall i \geq 1. \tag{$\diamond$}$$

It follows that $\xi(V,N)$ is bijective if and only if $Q^\bullet(V,N) = Hom^\bullet(Z,N)$, which is equivalent, as V is projective, to $I\!R^1\,Hom^\bullet_{\Omega_G}(B[1],N) = \mathbf{0}$, and to

$$I\!R^1\,Hom^\bullet_{\Omega_G}(Z[1],N) = \mathbf{0}, \tag{$\diamond\diamond$}$$

thanks to $(\diamond)$. Let us prove this equality.

4. Equivariant Poincaré Duality

For each $\ell \in \mathbb{Z}$, the projectivity of $V[\ell]$ and the exactness of (†), implies that

$$I\!R^i\, Hom^\bullet_{\Omega_G}(Z[\ell],N) \simeq I\!R^{i+1}\, Hom^\bullet_{\Omega_G}(B[\ell{+}1],N), \quad \forall i \geq 1,$$

and, again by (⋄),

$$I\!R^i\, Hom^\bullet_{\Omega_G}(Z[\ell],N) \simeq I\!R^{i+1}\, Hom^\bullet_{\Omega_G}(Z[\ell{+}1],N), \quad \forall i \geq 1,$$

so that we have, for all $m \geq 1$

$$I\!R^1\, Hom^\bullet_{\Omega_G}(Z[1],N) \simeq I\!R^{1+m}\, Hom^\bullet_{\Omega_G}(Z[1{+}m],N),$$

and (⋄⋄) follows from the fact that $\dim_{\mathrm{ch}}(\mathrm{GM}(\Omega_G)) < +\infty$ (4.1.7-(b)).

(c) Consider the exact triangle in $\mathrm{DGM}(\Omega_G)$

$$(V,d) \xrightarrow{\boldsymbol{\alpha}} (V',d') \xrightarrow{p_1} (\hat{c}(\boldsymbol{\alpha}),\Delta) \xrightarrow[[+1]]{p_2}$$

where $(\hat{c}(\boldsymbol{\alpha}),\Delta)$ denotes the *cone* of $\boldsymbol{\alpha}$, i.e. the Ω_G-gm $\hat{c}(\boldsymbol{\alpha}) := V' \oplus V[1]$ with differential $\Delta(v',w) := (d'v' + \boldsymbol{\alpha}\omega, -d\omega)$. Note that $h(\hat{c}(\boldsymbol{\alpha})) = 0$ since by the universal property of the cone construction, $\hat{c}(\boldsymbol{\alpha})$ is acyclic if and only if $\boldsymbol{\alpha}$ is a quasi-isomorphism. Now, since additive functors respect exactness of triangles and cones, the morphism $Hom^\bullet_{\Omega_G}(\boldsymbol{\alpha},\Omega_G)$ is a quasi-isomorphism if and only if the complex $\hat{c}(Hom^\bullet_{\Omega_G}(\boldsymbol{\alpha},\Omega_G)) = Hom^\bullet_{\Omega_G}(\hat{c}(\boldsymbol{\alpha}),\Omega_G)$ is acyclic. This is indeed the case following (b) because, $\hat{c}(\boldsymbol{\alpha})$ and $h(\hat{c}(\boldsymbol{\alpha}))$ being both projective Ω_G-gm, we have $h(Hom^\bullet_{\Omega_G}(\hat{c}(\boldsymbol{\alpha}),\Omega_G)) = Hom^\bullet_{\Omega_G}(h(\hat{c}(\boldsymbol{\alpha})),\Omega_G) = 0$. □

4.2.11. Remarks

a) If one disregards the morphism $\xi(V,\Omega_G)$ in 4.2.10-(a), then the fact that $h(Hom^\bullet_{\Omega_G}(V,\Omega_G))$ and $Hom^\bullet_{\Omega_G}(hV,\Omega_G)$ are isomorphic Ω_G-gm's when V and hV are projectives is an immediate result of 4.2.9-(b,c).

b) The statement 4.2.10-(c) is a straightforward consequence of 4.2.9-(b). Indeed, it claims that the restriction of the functor $Hom^\bullet_{\Omega_G}(_,\Omega_G)$ to the full subcategory of Ω_G-dgm's (V,d) with V projective (free) as Ω_G-gm is a derived functor, so that, as such, it preserves quasi-isomorphisms.

c) In 4.2.10 the projectivity assumption on the Ω_G-gm $W \in \{V,hV\}$ can be weaken to just assume that

$$I\!R^i\, Hom^\bullet_{\Omega_G}(W,\Omega_G) = 0, \qquad (\forall i > 0).$$

Exercice: Check that the proofs of 4.2.10-(b,c) remain valid under this assumption.

4.2.12. Exercise. Prove that V and hV are projective (free) Ω_G-gm if and only if Z and B are. *Hint. Follow the ideas in the proof of 4.2.10-(b).*

4.3. Equivariant Integration

Let G be a **compact connected** Lie group and M an oriented G-manifold of dimension d_M.

Extend the $\mathbb{R}$-linear integration map $\int_M : \Omega_{\mathrm{c}}(M) \to \mathbb{R}$ by $S(\mathfrak{g})$-linearity to the map

$$\int_M : S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_{\mathrm{c}}(M) \to S(\mathfrak{g}), \quad P \otimes \omega \mapsto P \int_M \omega \qquad (\diamond)$$

As G acts on $S(\mathfrak{g})\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(M)$ by $g\cdot(P\otimes\omega):=g\cdot P\otimes g\cdot\omega$, the above integration map is G-equivariant since one has $\int_M g\cdot\omega=\int_M\omega$, as a consequence of the connectedness of G (see proof 3.1.4-(a)). Therefore, the restriction of $(\diamond)$ to the subspace of G-equivariant differential forms with compact support

$$\Omega_{G,\mathrm{c}}(M):=\big(S(\mathfrak{g})\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(M)\big)^G=\big(S(\mathfrak{g})\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(M)\big)^{\mathfrak{g}}$$

takes values in $\Omega_G:=S(\mathfrak{g})^G$ (3.1.3). We denote this restriction by

$$\int_M:\Omega_{G,\mathrm{c}}(M)\to\Omega_G \qquad (\diamond\diamond)$$

and call it *the equivariant integration*, which is clearly a morphism of Ω_G-graded modules of degree $-d_M$.

Now, the graded algebra $\Omega_{G,\mathrm{c}}(M)$ has already been endowed with the differential $d_G(P\otimes\omega)=P\otimes d\omega+\sum_i Pe^i\otimes c(e_i)\omega$ (see 3.1.3, 2.2.2-($d_{\mathfrak{g}}$)), and a homogeneous equivariant form $\zeta\in\Omega^d_{G,\mathrm{c}}(M)$ of total degree d decomposes in a unique way as a sum

$$\zeta=\sum_{0\le i\le d/2}\Big(\sum_{Q\in\mathscr{B}(i)}Q\otimes\omega_Q\Big)$$

where $\mathscr{B}(i)$ denotes a vector space basis of $S^i(\mathfrak{g})$ and $\omega_Q\in\Omega^{d-2\deg Q}(M)$. As a consequence, one easily checks that if ζ is an equivariant coboundary, the terms $Q\otimes\omega_Q$ in the above decomposition such that $\omega_Q\in\Omega_{\mathrm{c}}(M)$ is of top degree d_M are already coboundaries, i.e. $\omega_Q\in B^{d_M}_{\mathrm{c}}(M)$, and consequently $\int_M\zeta=0$. We have thereby proved the following lemma.

4.3.1. Lemma. $\int_M d_G(\Omega_{G,\mathrm{c}}(M))=0$.

Therefore, the equivariant integration $(\diamond\diamond)$ induces a morphism of Ω_G-graded modules of degree $[-d_M]$ in cohomology:

$$\int_M:H_{G,\mathrm{c}}(M)\to H_G \qquad (\diamond\diamond\diamond)$$

also called *equivariant integration*.

4.3.2. Equivariant Integration vs. Integration Along Fibers. As we already pointed out in 3.2.7, G-equivariant cohomology is canonically isomorphic to the projective limit of the de Rham cohomologies of the fibered spaces $\pi_n:M_G(n)=\mathbb{E}G(n)\times_G M\twoheadrightarrow\mathbb{B}G(n)$ (3.2.4). Moreover, for each fixed $d\in\mathbb{N}$ the projective system $\{H^d(M_G(n))\}_n$ is stationary and converges to $H^d(M_G)$. Now, each $\pi_{M,n}:M_G(n)\to\mathbb{B}_G(n)$ is a fibration with oriented base space, whose fiber is the oriented manifold M. The operation of integration along M is then well defined $\int_M:H_{\mathrm{c}}(M_G(n))[d_M]\to H_{\mathrm{c}}(\mathbb{B}_G(n))$ (see 1.9.5) and induces a limit map

$$\pi_{M,*}:H_{G,\mathrm{c}}(M)[d_M]\to H(\mathbb{B}_G)=\Omega_G(\{\bullet\})$$

Proposition. *The map $\pi_{M,*}$ coincides with the equivariant integration.*

Proof. Left to the reader. □

4. Equivariant Poincaré Duality

4.4. Equivariant Poincaré Pairing

Equivariant integration is what we need to mimic the nonequivariant Poincaré pairing (1.3) in the equivariant framework.

4.4.1 The composition of the Ω_G-bilinear map $\Omega_G(M)\otimes\Omega_{G,c}(M)\to\Omega_{G,c}(M)$, $\alpha\otimes\beta\mapsto\alpha\wedge\beta$, with equivariant integration $\int_M:\Omega_{G,c}(M)\to\Omega_G$, gives rise to a nondegenerate pairing

$$\mathbb{P}_{M,G}:\Omega_G(M)\otimes\Omega_{G,c}(M)\longrightarrow\Omega_G\,,\quad \alpha\otimes\beta\longmapsto\int_M\alpha\wedge\beta \tag{$\mathbb{P}_G$}$$

inducing the *Poincaré pairing in equivariant cohomology*

$$\mathscr{P}_{G,M}:H_G(M)\otimes H_{G,c}(M)\longrightarrow H_G\,,\quad [\alpha]\otimes[\beta]\longmapsto\int_M[\alpha]\cup[\beta] \tag{$\mathscr{P}_G$}$$

4.4.2 The left adjoint map associated with $\mathbb{P}_G$ (see 1.3) is now the map

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{G,M}:\Omega_G(M)&\longrightarrow Hom^\bullet_{\Omega_G}\left(\Omega_{G,c}(M),\Omega_G\right)\\ \alpha\quad&\longmapsto\mathbb{D}_{G,M}(\alpha):=\left(\beta\mapsto\int_M\alpha\wedge\beta\right)\end{aligned} \tag{$\mathbb{D}_G$}$$

and one has, following lemma 4.3.1, for α homogeneous

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_G\left((-1)^{d_M}\,d_G\alpha\right)(\beta)&=\int_M(-1)^{d_M}\,d_G\alpha\wedge\beta\\ &=\int_M(-1)^{d_M+|\alpha|+1}\alpha\wedge d_G\beta=(-1)^{|\beta|}\mathbb{D}_G(\alpha)(d_G\beta),\end{aligned}$$

Hence, following the conventions in 1.1.7 and 4.1.11, $\mathbb{D}_{G,M}$ is a morphism of Ω_G-graded complexes from $\Omega_G(M)[d_M]$ to $Hom^\bullet_{\Omega_G}(\Omega_{G,c}(M),\Omega_G)$.

4.4.3 The right adjoint map associated with $\mathbb{P}_G$ (see 1.7.1) is the map

$$\begin{aligned}\mathbb{D}'_{G,M}:(\Omega_{G,c}(M),d_G)&\longrightarrow\left(Hom^\bullet_{\Omega_G}\left(\Omega_G(M),\Omega_G\right),-D\right)\\ \beta\qquad&\longmapsto\mathbb{D}'_{G,M}(\beta):=\left(\alpha\mapsto\int_M\alpha\wedge\beta\right)\end{aligned} \tag{$\mathbb{D}'_{G,}$}$$

which is also a morphism of Ω_G-graded complexes.

4.4.4. Exercise. Verify that ($\mathbb{P}_G$) is a nondegenerate pairing and that $\mathbb{D}'_{G,M}$ is a morphism of Ω_G-graded complexes.

4.5. G-Equivariant Poincaré Duality Theorem

4.5.1. Theorem. *Let G be a compact connected Lie group, and M an oriented G-manifold of dimension d_M. Then,*

a) *The Ω_G-graded morphism of complexes*

$$\boxed{\mathbb{D}_{G,M}:\Omega_G(M)[d_M]\longrightarrow Hom^\bullet_{\Omega_G}\left(\Omega_{G,c}(M),\Omega_G\right)}$$

is a quasi-isomorphism.

b) *The morphism $\mathbb{D}_{G,M}$ induces* the "Poincaré morphism in G-equivariant cohomology" *(see 4.2.10-(a))*

$$\boxed{\mathscr{D}_{G,M} : H_G(M)[d_M] \longrightarrow Hom^{\bullet}_{H_G}\left(H_{G,c}(M), H_G\right)}$$

If $Extgr^i_H(H_{G,c}(M)) = 0$ for all $i > 0$, for example if $H_{G,c}(M)$ is a free H_G-module, then $\mathscr{D}_{G,M}$ is an isomorphism.

c) *There are natural spectral sequence converging to $H_G(M)[d_M]$*

$$\begin{cases} \mathbb{E}_2^{p,q}(M) = \left(Ext^p_{H_G}\left(H_{G,c}(M), H_G\right)\right)^q \Rightarrow H_G^{p+q}(M)[d_M] \\ \mathbb{F}_2^{p,q}(M) = H_G^p \otimes_{\mathbb{R}} Hom^{\bullet}_{\mathbb{R}}(H_c^q(M), \mathbb{R}) \Rightarrow H_G^{p+q}(M)[d_M] \end{cases}$$

where, in the first one, q denotes the graded vector space degree.

d) *Moreover, if M is of finite type, the H_G-graded morphism of complexes*

$$\boxed{\mathbb{D}'_{G,M} : \Omega_{G,c}(M)[d_M] \longrightarrow Hom^{\bullet}_{H_G}\left(\Omega_G(M), H_G\right)}$$

is a quasi-isomorphism, and mutatis mutandis for (b) *and* (c).

Proof

a) We recall the filtration of the Cartan complex we already used in the proof of 2.2.6-(b): An equivariant form in $(\Omega_G(M), d_G)$ is said to be *of index m* if it belongs to the subspace

$$\Omega_G(M)_m := \left(S^{\geqslant m}(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M)\right)^G.$$

One easily checks that each $\Omega_G(M)_m$ is stable under the Cartan differential d_G, that $\Omega_G(M) = \Omega_G(M)_m$ for all $m \leqslant 0$ and that one has a decreasing filtration

$$\Omega_G(M) = \Omega_G(M)_0 \supseteq \Omega_G(M)_1 \supseteq \Omega_G(M)_2 \supseteq \cdots \qquad (*)$$

Furthermore, $\Omega^i_G(M) \cap \Omega_G(M)_m = 0$ whenever $m > i$, so that $(*)$ is a *regular filtration* (see [Go] §4 pp. 76-).

In a similar way, $\lambda \in Hom^{\bullet}_{\Omega_G}(\Omega_G(M), \Omega_G)$ is said to be *of index m* whenever

$$\lambda\left(\left(S^a(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_c(M)\right)^G\right) \subseteq \Omega_G^{\geqslant a+m}, \qquad \forall a \in \mathbb{N},$$

and we denote $Hom^{\bullet}_{\Omega_G}(\Omega_{G,c}(M), \Omega_G)_m$ the subspace of such maps. As before, each of these spaces is is a subcomplex of $(Hom^{\bullet}_{\Omega_G}(\Omega_G(M)), D)$ and the decreasing filtration

$$\cdots \supseteq Hom^{\bullet}_{\Omega_G}(\Omega_{G,c}, \Omega_G)_m \supseteq Hom^{\bullet}_{\Omega_G}(\Omega_{G,c}, \Omega_G)_{m+1} \supseteq \cdots \qquad (**)$$

verifies for each λ homogeneous of degree i

$$a + \dim M + i \geqslant \deg\lambda\left(\left(S^a(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_c(M)\right)^G\right) \geqslant a + i, \qquad \forall a \in \mathbb{N},$$

so that $(**)$ is also regular.

An immediate verification shows that $\mathbb{D}_{G,M}$ is a morphism of graded filtered modules, i.e.

$$\mathbb{D}_{G,M}\left(\Omega_G(M)[d_M]_m\right) \subseteq Hom^{\bullet}_{\Omega_G}\left(\Omega_{G,c}(M), \Omega_G\right)_m, \qquad \forall m \in \mathbb{Z},$$

giving rise, therefore, to a morphism between the associated spectral sequences (see [Go], §4 Thm. 4.3.1, p. 80) whose $I\!E_0$ terms are

$$\begin{cases} \big((S(\mathfrak{g})\otimes\Omega(M))^G,1\otimes d\big)[d_M] \\ Hom^\bullet_{\Omega_G}\big((S(\mathfrak{g})\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(M))^G,1\otimes d\big),\Omega_G\big) \end{cases}$$

and which are respectively quasi-isomorphic to

$$\begin{cases} \Omega_G\otimes\big(\Omega(M),d\big)[d_M] \\ Hom^\bullet_{\Omega_G}\big(\Omega_G\otimes\big(\Omega(M),d\big),\Omega_G\big) \end{cases}$$

Indeed, the first one is just 3.1.4-(a), and the second one results from the fact that, since G is compact, there is a canonical isomorphism $S(\mathfrak{g})=\Omega_G\otimes_{\mathbb{R}}\mathcal{H}$, where $\mathcal{H}$ denotes the (graded) subspace of G-harmonic polynomials of $S(\mathfrak{g})$ (see [Dx], thm. **7.3.5** p. 241, §**8** pp. 277-), so that

$$\big(\big(S(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{R}}\Omega_{\mathrm{c}}(M)\big)^G,1\otimes d_M\big)=\Omega_G\otimes_{\mathbb{R}}\big(\big(\mathcal{H}\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(M)\big)^G,1\otimes d_M\big),$$

and the quasi-isomorphisms of 3.1.4-(a)

$$\Omega_G\otimes\big(\Omega_c(M),d\big)\supseteq\Omega_G\otimes\big(\Omega_c(M)^G,d\big)\subseteq\big((S(\mathfrak{g})\otimes\Omega_c(M))^G,1\otimes d\big)$$

are morphisms of complexes of ***free*** Ω_G-graded modules. Consequently, the induced morphisms on the corresponding Ω_G-dual complexes will still be quasi-isomorphisms (*cf.* 4.2.10-(c)).

Putting together these observations, the induced morphism on the $I\!E_1$ terms of the concerned spectral sequences by $I\!D_{G,M}$, is simply

$$\begin{array}{ccc} H_G\otimes H(M)[d_M] & \xrightarrow{\mathbb{1}\otimes\mathscr{D}_M} & H_G\otimes Hom^\bullet_{\mathbb{R}}(H_c(M),\mathbb{R}) \\ & & \| \\ & & \mathrm{Hom}_{H_G}\big((H_G\otimes H_c(M),H_G)\big) \end{array}$$

where one recognizes in $\mathbb{1}\otimes\mathscr{D}_M$ the classical Poincaré duality 1.3.2.

b) This is an application of proposition 4.2.10 and 4.2.11-(c), since, as we noted in the previous paragraphs, $\Omega_G:=\Omega_G(M)$ is a free Ω_G-gm.

c) The first spectral sequence $I\!E(M)$ is just the $''I\!E$ spectral sequence of 4.2.9 converging to the right-hand side of $(\star)$. On the other hand, the spectral sequence, $I\!F_2^{p,q}(M)$, is the one we used in the proof of (a).

d) Left to the reader. □

4.5.2. Torsion-freeness, Freeness and Reflexivity. Proposition 4.5.1-(b,d) shows that the freeness of equivariant cohomology as H_G-gm is a sufficient condition for equivariant Poincaré duality to hold. The question then arises whether some weaker condition could be equivalent to duality. Apart from freeness, two other properties have been thoroughly study in Allday-Franz-Puppe [AFP$_1$].

- Torsion-freeness. An H_G-gm V is said to be *torsion-free* if, for all $v\in V$,
$$\mathrm{Ann}(v):=\{P\in H_G\mid P\cdot v=0\}=0.$$
The torsion-freeness of equivariant cohomology is clearly a necessary condition for duality as the modules $Hom^\bullet_{H_G}(_,H_G)$ are torsion-free. It is also

a sufficient condition for the injectivity of the Poincaré morphism (Prop. 5.9 [AFP$_1$], see ex. 7.1.3), but it is not for duality, as the explicit examples of Franz-Puppe [FP] (2006) show.

- Reflexivity. An H_G-gm V is said to be *reflexive* if the natural map
$$V \to Hom^\bullet_{H_G}(Hom^\bullet_{H_G}(V,H_G),H_G)$$
is an isomorphism.

  For a finite type manifold M, while the reflexivity of $H_G(M)$ and $H_{G,c}(M)$ are clearly necessary conditions to duality, the converse, which is also true, is more subtle. The equivalence between duality and reflexivity has been established in [AFP$_1$] (Prop. 5.10) for G abelian, and in Franz [F$_2$] (Cor. 5.1) for general G.

The following diagram illustrates the relationship between the different kinds of nontorsions in equivariant cohomology and significant properties of the equivariant Poincaré pairing.

$$\begin{array}{ccccc} \{\texttt{free}\} & \subseteq & \{\texttt{reflexive}\} & \subseteq & \{\texttt{torsion-free}\} \\ & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ & & \left\{\begin{array}{c}\text{Perfect}\\ \text{Poincaré pairing}\end{array}\right\} & \subseteq & \left\{\begin{array}{c}\text{Nondegenerate}\\ \text{Poincaré pairing}\end{array}\right\} \end{array}$$

It is worth noting that in [F$_1$] (2015), Franz gives the first known examples of compact manifolds having reflexive but nonfree equivariant cohomology.

4.6. T-Equivariant Poincaré Duality Theorem

When G is a **compact connected torus** $T = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$, we have:

$$\begin{cases} \Omega_T &= S(\mathfrak{t}) \\ \Omega_T(M) &= S(\mathfrak{t}) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega(M)^T \\ \Omega_{T,c}(M) &= S(\mathfrak{t}) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_c(M)^T \end{cases}$$

so that

$$\begin{aligned} Hom_{\Omega_T}(\Omega_{T,c},\Omega_T) &= Hom_{S(\mathfrak{t})}\left(S(\mathfrak{t}) \otimes \Omega_c(M)^T, S(\mathfrak{t})\right) \\ &= Hom_{\mathbb{R}}\left(\Omega_c(M)^T, S(\mathfrak{t})\right) \\ &= S(\mathfrak{t}) \otimes_{\mathbb{R}} Hom_{\mathbb{R}}\left(\Omega_c(M)^T, \mathbb{R}\right) \end{aligned}$$

The left adjoint map $\mathbb{D}_T(M)$ associated with the T-equivariant Poincaré pairing $\mathbb{P}_T$ (see 4.4.2) identifies naturally to $\mathbb{1} \otimes \mathbb{D}_M$,

$$\begin{array}{ccc} S(\mathfrak{t}) \otimes \Omega(M)^T[d_M] & \xrightarrow[\mathbb{1}\otimes\mathbb{D}_M]{\mathbb{D}_T(M)} & S(\mathfrak{t}) \otimes Hom_{\mathbb{R}}\left(\Omega_c(M)^T, \mathbb{R}\right) \\ P \otimes \alpha & \longmapsto & P \otimes \left(\beta \mapsto \displaystyle\int_M \alpha \wedge \beta\right) \end{array}$$

and the right adjoint map (see 4.4.3) to

$$\begin{array}{ccc} S(\mathfrak{t}) \otimes \Omega_c(M)^T[d_M] & \xrightarrow[\mathbb{1}\otimes\mathbb{D}'_M]{\mathbb{D}'_T(M)} & S(\mathfrak{t}) \otimes Hom_{\mathbb{R}}\left(\Omega(M)^T, \mathbb{R}\right) \\ P \otimes \beta & \longmapsto & P \otimes \left(\alpha \mapsto \displaystyle\int_M \alpha \wedge \beta\right) \end{array}$$

4. Equivariant Poincaré Duality

The following theorem is a particular case of 4.5.1.

4.6.1. Theorem. *Let T be a compact connected torus, and M an oriented T-manifold of dimension d_M.*

a) *The H_T-graded morphism of complexes*

$$\boxed{\mathbb{D}_T(M) : \Omega_T(M)[d_M] \longrightarrow Hom_{H_T}\left(\Omega_{T,c}(M), \Omega_T\right)}$$

is a quasi-isomorphism.

b) *The morphism $\mathbb{D}_T(M)$ induces* the "Poincaré morphism in T-equivariant cohomology" *(see 4.2.10-(a))*

$$\boxed{\mathscr{D}_{T,M} : H_T(M)[d_M] \longrightarrow Hom_{H_T}\left(H_{T,c}(M), H_T\right)}$$

If $H_{T,\mathrm{c}}(M)$ is a free H_T-module, $\mathscr{D}_{T,M}$ is an isomorphism.

c) *There are natural spectral sequences converging to $H_T(M)[d_M]$*

$$\begin{cases} \mathbb{E}_2^{p,q}(M) = \left(Ext^p_{H_T}\left(H_{T,\mathrm{c}}(M), H_T\right)\right)^q \Rightarrow H_T^{p+q}(M)[d_M] \\ \mathbb{F}_2^{p,q}(M) = H_T^p \otimes_{\mathbb{R}} Hom_{\mathbb{R}}(H_{\mathrm{c}}^q(M), \mathbb{R}) \Rightarrow H_T^{p+q}(M)[d_M] \end{cases}$$

where, in the first one, q denotes the graded vector space degree.

d) *Moreover, if M is of finite type, the Ω_G-graded morphism of complexes*

$$\boxed{\mathbb{D}'_T(M) : \Omega_{T,\mathrm{c}}(M)[d_M] \longrightarrow Hom_{H_T}\left(\Omega_T(M), H_T\right)}$$

is a quasi-isomorphism, and mutatis mutandis for (b) *and* (c).

Proof (a) Since we have the identification $\mathbb{D}_T(M) = \mathbb{1} \otimes \mathbb{D}_M$, we may conclude using 2.2.6-(d). Statements (b,c,d) are particular cases of 4.5.1. □

4.6.2. Remark. Recall that $H_{T,\mathrm{c}}(M)$ is a free H_T-module whenever M has no odd (or no even) degree cohomology with compact support (2.2.6-(d)-(iv)). Obviously, though not very interesting, this is also the case when T acts trivially on M, since then $c(Y) = \boldsymbol{\theta}(Y) = 0$, $\forall Y \in \mathfrak{t}$, and $H_{T,\mathrm{c}}(M) = H_T \otimes_{\mathbb{R}} H_{\mathrm{c}}(M)$.

5. Equivariant Gysin Morphism

We now follow the steps in section 1.10 for the construction of the Gysin morphisms in the equivariant framework.

5.1. G-Equivariant Gysin Morphism for General Maps

5.1.1. Equivariant Finite de Rham Type Coverings. Recall that after 1.6, if G is a compact Lie Group, a G-manifold M is the union of a countable ascending chain $\mathscr{U} := \{U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots\}$ of G-stable open subsets of finite type.

The following theorem, equivariant analog of 1.7.8, is a simple corollary of the G-equivariant Poincaré duality theorem 4.5.1. The proof is left to the reader.

5.1.2. Theorem. *Let G be a compact connected Lie group, and M an oriented G-manifold of dimension d_M. Then, for every filtrant cover $\mathscr{U}$ of M by G-stable open subsets, the natural morphism $\varinjlim_{U\in\mathscr{U}} \Omega_{G,\mathrm{c}}(U) \to \Omega_{G,\mathrm{c}}(M)$ is an isomorphism, and the analog to 1.7.8-(b) is a well defined morphism of complexes:*

$$\mathbb{D}'_{G,\mathscr{U}} : (\Omega_{G,\mathrm{c}}(M), d_G)[d_M] \longrightarrow \varinjlim_{U\in\mathscr{U}} \big(Hom_{H_G}(\Omega_G(U), H_G), -D\big)$$

If in addition the open sets in $\mathscr{U}$ are of finite type, $\mathbb{D}'_{G,\mathscr{U}}$ is a quasi-isomorphism.

5.1.3 We now closely follow the instructions of section 1.10.2 for the construction of Gysin morphisms.

Let $f : M \to N$ be a G-equivariant map between oriented G-manifolds. To $\beta \in \Omega_{G,\mathrm{c}}(M)$ we assign the linear form on $\Omega_G(N)$ defined by $\mathbb{D}'_{G,f}(\beta) : \alpha \mapsto \int_M f^*\alpha \wedge \beta$. In this way we obtain the diagram

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{G,\mathrm{c}}(M)[d_M] & \xrightarrow{\quad f_* \quad} & \Omega_{G,\mathrm{c}}(N)[d_N] \\ & \searrow^{\mathbb{D}'_{G,f}} \quad \oplus & \Big\downarrow \mathbb{D}'_N \ \left(\begin{array}{c}\text{quasi-iso if } N \text{ is of}\\ \text{finite type}\end{array}\right) \\ & & Hom_{H_G}(\Omega_G(N), H_G) \end{array}$$

which may be closed in cohomology whenever N is of **finite type**, since $\mathbb{D}'_{G,N}$ is then a quasi-isomorphism (4.5.1-(d)).

When N is not of finite type, one fixes any equivariant cover $\mathscr{U}$ of N made up of open finite type subsets (5.1.1), and replaces $\mathbb{D}'_{G,N}$ by the morphism $\mathbb{D}'_{G,\mathscr{U}}$ of theorem 5.1.2. The diagram

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{G,\mathrm{c}}(M)[d_M] & \xrightarrow{\quad f_* \quad} & \Omega_{G,\mathrm{c}}(N)[d_N] \\ & \searrow^{\mathbb{D}'_{G,f,\mathscr{U}}} \quad \oplus & \Big\downarrow \mathbb{D}'_{G,\mathscr{U}} \ \text{(quasi-iso)} \\ & & \varinjlim_{U\in\mathscr{U}} Hom_{H_G}(\Omega_G(U), H_G) \end{array}$$

where $\mathbb{D}'_{G,f,\mathscr{U}}$ is defined as in 1.10.2, may be closed in cohomology since $\mathbb{D}'_{G,\mathscr{U}}$ is a quasi-isomorphism. The closing arrow

$$\boxed{f_* : H_{G,\mathrm{c}}(M)[d_M] \to H_{G,\mathrm{c}}(N)[d_N]}$$

the equivariant Gysin morphism associated with f, is therefore defined as

$$f_* := (\mathscr{D}'_{G,\mathscr{U}})^{-1} \circ h(\mathbb{D}'_{G,f,\mathscr{U}}).$$

5.1.4. Theorem and definitions. *With the above notations,*

a) *The equality*

$$\int_M f^*[\alpha] \cup [\beta] = \int_N [\alpha] \cup f_*[\beta] \qquad (\diamond\diamond)$$

holds for all $[\alpha] \in H_G(N)$ *and* $[\beta] \in H_{G,c}(M)$.

b) *Furthermore,* f_* *is a morphism of* $H_G(N)$*-modules, i.e. the equality, called the* equivariant projection formula,

$$f_*\big(f^*[\alpha] \cup [\beta]\big) = [\alpha] \cup f_*([\beta]) \qquad (\diamond\diamond\diamond)$$

holds for all $[\alpha] \in H_G(N)$ *and* $[\beta] \in H_{G,c}(M)$.

c) *The correspondence*

$$(_)_* : G\text{-Man}^{\mathrm{or}} \rightsquigarrow \mathrm{GM}(H_G) \quad \text{with} \quad \begin{cases} M \rightsquigarrow M_* := H_{G,c}(M)[d_M] \\ f \rightsquigarrow f_* \end{cases}$$

is a covariant functor. We will refer to it as the equivariant Gysin functor for general maps.

d) *Suppose that* M *and* N *are manifolds of finite type. If the pullback morphism* $f^* : H_G(N) \to H_G(M)$ *is an isomorphism, then the Gysin morphism* $f_* : H_{G,c}(M)[d_M] \to H_{G,c}(N)[d_N]$ *is also.*

Proof. (a) Immediate from de definition of the Gysin morphism.

(b) Unlike the proof of the nonequivariant statement 1.7.4-(b), this claim is no longer a formal consequence of (a) because equivariant cohomology may have torsion elements, something that doesn't affect equivariant integration. Instead, when N is of finite type and since then $\mathbb{D}'_N$ is a quasi-isomorphism, we can check that the following equality holds at the *cochain* level,

$$\mathbb{D}'_{G,f}(f^*(\alpha) \cup \beta) = \text{“}\mathbb{D}'_N(\alpha \cup f_*(\beta))\text{”} = \mathbb{D}'_{G,f}(\beta) \circ \mu_r(\alpha), \qquad (\dagger)$$

where the central term is there for purely heuristic reasons and where we denote $\mu_r(\alpha) : \Omega_G(N) \to \Omega_G(N)$ the right multiplication by α, i.e. $\mu_r(\alpha)(_) = (_) \cup \alpha$. The identification of the left and right terms in $(\dagger)$ is then a straightforward verification from the definition of $\mathbb{D}'_{G,f}$. When N is not of finite type, we follow the same arguments with $\mathbb{D}'_{G,f,\mathscr{U}}$ instead of $\mathbb{D}'_{G,f}$.

(c) is clear. (d) as $f^* : \Omega_G(N) \to \Omega_G(M)$ is a quasi-isomorphism, the induced map $Hom^\bullet_{H_G}(\Omega_G(N), H_G) \to Hom^\bullet_{H_G}(\Omega_G(M), H_G)$ is also, following 4.2.10-(c), and one concludes, since $\mathbb{D}'_{G,M}$ and $\mathbb{D}'_{G,N}$ are quasi-isomorphisms. □

5.1.5. Exercise. Prove the following enhancement of the statement 5.1.4-(d). If $\pi : V \to B$ is a vector bundle over an oriented manifold B, the map π is of finite type (1.4.1), and $\pi^* : H_G(B) \to H_G(V)$ and $\pi_* : H_{G,c}(V)[d_V] \to H_{G,c}(B)[d_B]$ and both isomorphisms (*cf.* 1.4.2-(c)).

5.2. G-Equivariant Gysin Morphism for Proper Maps

5.2.1 Following 1.10.1, let $f : M \to N$ be a **proper** G-equivariant map between oriented G-manifolds. To $\alpha \in \Omega_G(M)$ we assign the H_G-linear form on $\Omega_{G,c}(N)$ defined by $\mathbb{D}'_{G,f}(\alpha) : \beta \mapsto \int_M f^*\beta \wedge \alpha$. In this way we obtain the diagram

$$\begin{array}{ccc} \Omega_G(M)[d_M] & \xrightarrow{\quad f_! \quad} & \Omega_G(N)[d_N] \\ & \searrow^{\mathbb{D}'_{G,f}} \quad \oplus & \downarrow \mathbb{D}'_{G,N} \text{ (quasi-iso)} \\ & & \Omega_{G,c}(N)^\vee \end{array}$$

which may be closed in cohomology because $\mathbb{D}'_{G,N}$ is a quasi-isomorphism, as shown in 4.5.1-(a). The closing arrow:

$$\boxed{f_! : H_G(M)[d_M] \to H_G(N)[d_N]},$$

the equivariant Gysin morphism associated with a proper map f, is therefore defined as

$$f_! := (\mathscr{D}'_{G,\mathscr{U}})^{-1} \circ h(\mathbb{D}'_{G,f}).$$

5.2.2. Theorem and definitions. *With the above notations,*

a) *The equality*

$$\int_M f^*[\beta] \cup [\alpha] = \int_N [\beta] \cup f_![\alpha] \qquad (\star\star)$$

holds for all $[\alpha] \in H_G(M)$ *and* $[\beta] \in H_{G,c}(N)$.

b) *Furthermore,* $f_!$ *is a morphism of* $H_{G,c}(N)$*-modules, the equality, called the* equivariant projection formula for proper maps,

$$f_!\big(f^*[\beta] \cup [\alpha]\big) = [\beta] \cup f_![\alpha] \qquad (\star\star\star)$$

holds for all $[\beta] \in H_{G,c}(N)$ *and* $[\alpha] \in H_G(M)$.

c) *The correspondence*

$$f_! : G\text{-Man}^{\text{or}}_{\text{pr}} \rightsquigarrow \text{GM}(H_G) \qquad \textit{with} \qquad \begin{cases} M \rightsquigarrow M_! := H_G(M)[d_M] \\ f \rightsquigarrow f_! \end{cases}$$

is a covariant functor. We will refer to it as the equivariant Gysin functor for proper maps.

d) *If the pullback morphism* $f^* : H_{G,c}(N) \to H_{G,c}(M)$ *is an isomorphism, the Gysin morphism* $f_! : H_G(M)[d_M] \to H_G(N)[d_N]$ *is also an isomorphism.*

e) *The natural map* $\phi(_) : H_{G,c}(_)[d_] \to H_G(_)[d_]$ (1.2.3) *is a homomorphism between the two equivariant Gysin functors* $(_)_* \to (_)_!$ *over the category* $G\text{-Man}^{\text{or}}_{\text{pr}}$, *i.e. the diagrams*

$$\begin{array}{ccc} H_{G,c}(M) & \xrightarrow{\phi(M)} & H_G(M) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_!} \\ H_{G,c}(N) & \xrightarrow{\phi(N)} & H_G(N) \end{array}$$

are naturally commutative.

Proof. Same as the proof of 5.1.4, left to the reader. □

5.3. Comparison Theorems

The next theorem establishes a close connexion between the nonequivariant and the equivariant Gysin morphisms. It is a basic tool for the generalization of known properties of classical Gysin morphisms into the equivariant framework.

5.3.1. Theorem. *Let G be a compact connected Lie group and $f : M \to N$ a G-equivariant map between oriented G-manifolds. There exists a natural morphism of the spectral sequences $\mathbb{F}$ of theorem 4.5.1-(c) converging to the Gysin morphism $f_* : H_{G,c}(M)[d_M] \to H_{G,c}(N)[d_N]$,*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_{c,2}(M) = H_G \otimes H_c(M)[d_M] & \Rightarrow & H_{G,c}(M)[d_M] \\ {\scriptstyle 1\otimes f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \mathbb{F}_{c,2}(N) = H_G \otimes H_c(N)[d_N] & \Rightarrow & H_{G,c}(M)[d_N] \end{array}$$

and in the proper case to $f_! : H_G(M)[d_M] \to H_G(N)[d_N]$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2(M) = H_G \otimes H(M)[d_M] & \Rightarrow & H_G(M)[d_M] \\ {\scriptstyle 1\otimes f_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_!} \\ \mathbb{F}_2(N) = H_G \otimes H(N)[d_N] & \Rightarrow & H_G(M)[d_N] \end{array}$$

Proof. Clear from the proof of 4.5.1 and the definition of Gysin morphisms. □

5.4. Universal Property of the equivariant Gysin Morphism

Proposition *Let $f : M \to N$ be a G-equivariant map between oriented G-manifolds.*

a) *A morphism of complexes $\varphi_* : \Omega_{G,c}(M)[d_M] \to \Omega_{G,c}(N)[d_N]$ induces the equivariant Gysin morphism*

$$f_* : H_{G,c}(M)[d_M] \to H_{G,c}(N)[d_N],$$

if and only if

$$\int_M f^*\alpha \wedge \beta = \int_N \alpha \wedge \varphi_*\beta, \quad \forall \alpha \in \Omega_G(N),\ \forall \beta \in \Omega_{G,c}(M).$$

b) *If f is a proper, a morphism of complexes $\varphi_! : \Omega_G(M)[d_M] \to \Omega_G(N)[d_N]$ induces the equivariant Gysin morphism*

$$f_! : H_G(M)[d_M] \to H_G(N)[d_N],$$

if and only if

$$\int_M f^*\beta \wedge \alpha = \int_N \beta \wedge \varphi_!\alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega_G(M),\ \forall \beta \in \Omega_{G,c}(N).$$

5.4.1. Remark. The last proposition is a simple consequence of the definition of the Gysin morphism. But one must beware that, unlike the nonequivariant case (1.9.1), it is generally not true that the equivariant Gysin morphism is characterized by the equality of **cohomology classes**:

$$\int_M f^*[\alpha] \cup [\beta] = \int_N [\alpha] \cup f_*[\beta], \quad \forall [\alpha] \in H_G(N),\ \forall [\beta] \in H_{G,c}(M). \qquad (\diamond\diamond)$$

(or $(\star\star)$ for $f_!$ in the proper case). For example, the uniqueness of f_* satisfying the relation $(\diamond\diamond)$, results only from the injectivity of the map:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{G,N} : H_{G,c}(N) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{H_G}\left(H_G(N), H_G\right) \\ [\beta] &\longrightarrow \left([\alpha] \to \int_N [\alpha] \wedge [\beta]\right) \end{aligned}$$

a property that is not always satisfied. Indeed, let T be a torus and N a compact oriented T-manifold without fixed points. We know from the localization theorem, that $H_T(N)$ is a torsion H_T-module and consequently that $Hom_{H_T}(H(N), H_T) = 0$, so that $\mathbb{D}_{G,N}$ is null, although $H_T(N) \neq 0$.

Exercise. Let $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ act on $N = \mathbb{S}^1$ by $(t,u)(v) = uv$.

a) $H_T = \mathbb{R}[X,Y]$, $H_T(N) = \mathbb{R}[Y]$, $End_{H_T}(H_T(N)) = \mathbb{R}[Y]$.

b) For any map $f : N \to N$ and any $\lambda \in End_{H_G}(H_G(N))$ one has

$$\int_N f^*[\alpha] \cup [\beta] = \int_N [\alpha] \cup \lambda[\beta], \quad \forall [\alpha], [\beta] \in H_T(N).$$

c) Let N be any oriented G-manifold such that $H_{G,c}(N)$ is an H_G-free module. Show that condition $(\diamond\diamond)$ (resp. $(\star\star)$ for proper maps) of theorem 5.1.4 (resp. 5.2.2) completely characterizes Gysin morphisms for maps $f : M \to N$.

5.5. Group Restriction

Let G be a compact *connected* Lie group. For any closed subgroup $H \subseteq G$, *connected or not*, and for any G-manifold M, the canonical projection of Borel constructions $\mathbb{E}G \times_H M \twoheadrightarrow \mathbb{E}G \times_G M$ which is a locally trivial fibration with fiber G/H, induces by inverse image the *restriction homomorphism* of equivariant cohomology rings

$$\mathrm{Res}^G_H : H_G(M) \to H_H(M).$$

At this point, one could react against the possible lack of connectedness of H in so far as this property has been everywhere required in these notes. However, a careful examination shows that connectedness is only needed to ensure that the action of G on M is homotopically trivial, a property that is clearly inherited by any subgroup H of a connected group G, whether the subgroup is connected or not (*cf.* 3.1.5). In that case if $H_\circ$ denotes the connected component of 1 in H and $W_H = H/H_\circ$, we have

$$H_H = S(\mathfrak{h})^H \quad \text{and} \quad H_H(M) = H_{H_\circ}(M)^{W_H}.$$

5.5.1. Theorem. *For any closed subgroup $H \subseteq G$ and any equivariant map $f : M \to N$ between oriented G-manifolds, the following diagrams of Gysin morphisms are commutative:*

$$\begin{array}{ccc} H_G(M) & \xrightarrow{f_*} & H_G(N) \\ {\scriptstyle \mathrm{Res}^G_H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}^G_H} \\ H_H(M) & \xrightarrow{f_*} & H_H(N) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_{G,c}(M) & \xrightarrow{f_!} & H_{G,c}(N) \\ {\scriptstyle \mathrm{Res}^G_H}\downarrow & (f \text{ is proper}) & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}^G_H} \\ H_{H,c}(M) & \xrightarrow{f_!} & H_{H,c}(N) \end{array}$$

Proof. For a general map $f : M \to N$ the diagram of induced maps between Borel constructions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}G \times_H M & \xrightarrow{f} & \mathbb{E}G \times_H N \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \mathbb{E}G \times_G M & \xrightarrow{f} & \mathbb{E}G \times_G M \end{array}$$

is *cartesian* and if we endow G/H with an orientation, the integration along the fibers of π enters in the *commutative* diagram of complexes:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{H,\mathrm{c}}(N) & \xrightarrow{f^*} & \Omega_{H,\mathrm{c}}(M) \\ \int_{G/H}\downarrow & \oplus & \downarrow\int_{G/H} \\ \Omega_{G,\mathrm{c}}(N) & \xrightarrow{f^*} & \Omega_{G,\mathrm{c}}(M) \end{array}$$

We may then conclude thanks to 5.4-(a) and that $\int_{G/H}$ is adjoint to Res^G_H.

The case where $f : M \to N$ is proper follows in the same way. □

5.6. Explicit Constructions of Equivariant Gysin Morphisms

Although we gave a universal definition for the equivariant Gysin morphism in the last section, it is worth recalling alternative constructions for some particular maps where there exist explicit morphisms of Cartan complexes inducing the Gysin morphism, just as in the nonequivariant case (1.9).

5.6.1. Constant Map. Let M be an oriented G-manifold. The constant map $c_M : M \to \{\bullet\}$ is G-equivariant, $H_G(\{\bullet\}) = H_T$ is free and $\mathbb{D}_{G,\{\bullet\}}$ is bijective. Therefore, the cohomological adjunction 5.4.1-($\diamond\diamond$) uniquely determines the Gysin morphism and we have, for all $\beta \in \Omega_{T,\mathrm{c}}(M)$:

$$c_{M*}(\beta) = \Big(\int_{\{\bullet\}} 1 \cup c_{M*}[\beta]\Big) = \int_M \beta.$$

5.6.2. Equivariant Open Embedding. Let M be an oriented G-manifold. If U is a G-invariant open set in M, denote by $\iota : U \subseteq M$ the injection and endow U with the induced orientation. One has a natural inclusion of Cartan complexes $\iota_G : \Omega_{G,\mathrm{c}}(U) \to \Omega_{G,\mathrm{c}}(M)$, and the elementary equality

$$\int_U \iota_G^*(\alpha) \wedge \beta = \int_M \alpha \wedge \iota_{G,*}(\beta), \quad \forall \alpha \in \Omega_G(M),\ \forall \beta \in \Omega_{G,\mathrm{c}}(U),$$

shows immediately that the following induced map is the equivariant gysin map:

$$H(\iota_{G*}) : H_{G,\mathrm{c}}(U)[d_U] \longrightarrow H_{G,\mathrm{c}}(M)[d_M].$$

5.6.3. Equivariant Projection. Given two oriented G-manifolds M,N, denote by $\mathrm{pr} : M \times N \twoheadrightarrow N$, the projection $(x,y) \mapsto y$.

The map

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{\mathrm{c}}(M) \otimes \Omega_{\mathrm{c}}(N) & \xrightarrow{\varphi_*} & \Omega_{\mathrm{c}}(N) \\ \nu \otimes \mu & \xmapsto{\varphi_*} & \big(\int_M \nu\big)\mu \end{array}$$

is a morphism of H_G-gm's commuting with G-derivations (G is connected), and with G-contractions since

$$\begin{aligned}\varphi_*\big(c(X)(\nu\otimes\mu)\big) &= \varphi_*\big(c(X)(\nu)\otimes\mu\big) + (-1)^{\deg\nu}\varphi_*\big(\nu\otimes c(X)(\mu)\big)\\ &= (-1)^{d_M}\varphi_*\big(\nu\otimes c(X)(\mu)\big) = (-1)^{d_M}c(X)\big(\varphi_*(\nu\otimes\mu)\big),\end{aligned}$$

as $\int_M \iota(X)\nu = 0$. The morphism φ_* may then be naturally extended to a morphism of Cartan complexes $\varphi_{G*} : \big(S(\mathfrak{g})\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(M)\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(N)\big)^G \to \big(S(\mathfrak{g})\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(N)\big)^G$ satisfying

$$\int_{M\times N}\mathrm{pr}^*(\alpha)\wedge\beta = \int_N \alpha\wedge\varphi_{G*}(\beta),\quad \forall\beta\in\Omega_{G,\mathrm{c}}(M)\times_{H_G}\Omega_{G,\mathrm{c}}(N),\ \forall\alpha\in\Omega_G(N).$$

On the other hand, since the natural map $\Omega_{\mathrm{c}}(M)\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(N)\to\Omega_{\mathrm{c}}(M\times N)$ is a quasi-isomorphism (Künneth [BT] p. 50), the induced map

$$(S(\mathfrak{g})\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(M)\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(N))^G \to (S(\mathfrak{g})\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(M\times N))^G = \Omega_{G,\mathrm{c}}(M\times N)$$

is also a quasi-isomorphism and one may conclude that

$$\mathrm{pr}_{G,*} : H^*_{G,c}(M\times N)[d_M] \longrightarrow H^*_{G,c}(N)$$

induced by $\varphi_{G,*}$ is the equivariant Gysin map associated with pr.

5.6.4. Equivariant Fiber Bundle. Let (π,V,B) be an oriented G-equivariant fiber bundle with fiber F. Integration along fibers (see [BT] **I**§6 pp. 61-63) gives a morphism of complexes $\int_F : \Omega_c(V)\to\Omega_{\mathrm{c}}(B)$ such that if $\psi : V\to V$ is an isomorphism exchanging fibres, then $\int_F\circ\psi^* = \psi^*\circ\int_F$, consequently $\int_F$ is G-equivariant. On the other hand, $\int_F$ commutes with the contractions $c(X)$. Indeed, since these are local operators, it suffices (modulo unit partitions if necessary) to verify the claim over a trivializing open subset of V, i.e. over $\pi^{-1}(U)$ for U s.t. $\pi^{-1}U\sim F\times U$, where we are in the case of a projection already discussed in 5.6.3.

Now, the map $\int_F : S(\mathfrak{g})\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(V)\to S(\mathfrak{g})\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(B)$, given by $\int_F P\otimes\omega := P\otimes\int_F\omega$ restricts naturally to $\int_F : \Omega_{G,\mathrm{c}}(V)[d_F]\to\Omega_{G,\mathrm{c}}(B)$ as a morphism of Cartan complexes satisfying $\int_V\pi_*\alpha\wedge\beta = \int_B\big(\alpha\wedge\int_F\beta\big)$ since it is so in the nonequivariant case 1.9.5-(∗).

5.6.5. Zero Section of an Equivariant Vector Bundle

The Equivariant Thom Class. Let (π,V,B) be a G-equivariant oriented vector bundle. In 5.1.5, we pointed out that the Gysin morphism for compact supports $\pi_* : H_{\mathrm{c}}(V)[d_F]\to H_{\mathrm{c}}(B)$ is an **isomorphism**, so that, in particular:

$$H^i_{\mathrm{c}}(V) = 0,\qquad \text{for all } i<d_F. \tag{$\diamond$}$$

5.6.6. Proposition and definition. *Assume G is compact and connected.*

a) *There exist homogeneous G-equivariant cocycles of total degree d_F*

$$\Phi_G = \Phi^{[d_F]} + \Phi^{[d_F-2]} + \Phi^{[d_F-4]} + \cdots$$

with $\Phi^{[i]} \in \big(S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_{\mathrm{c}}^i(V)\big)^G$ *where* $\Phi^{[d_F]} \in \Omega_{\mathrm{c}}^{d_F}(V)^G$ *represents the Thom class of* (B,V) (see 1.9.7). *Two such cocycles are cohomologous. The map*

$$\begin{array}{ccc} (S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_{\mathrm{c}}(B))^G & \xrightarrow{\varphi_{G,*}} & (S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_{\mathrm{c}}(V))^G[d_F] \\ \nu & \longmapsto & \pi^*\nu \wedge \tilde{\Phi} \end{array}$$

is a morphism of Cartan complexes, and the same with 'Ω*' instead of '*Ω_{c}*'.*

b) *The zero section* $\sigma : B \hookrightarrow V$ *of the vector bundle* $\pi : V \to B$ *is a proper* G*-equivariant map. The* equivariant Gysin morphisms

$$\begin{cases} \sigma_* : H_{G,\mathrm{c}}(B))[d_B] \to H_{G,\mathrm{c}}(V)[d_V] \\ \sigma_! : H_G(B))[d_B] \to H_G(V)[d_V] \end{cases}$$

are both induced by the morphism of complexes $\varphi_{G,*}$ *of* (a).

Proof. (a) Let $n = d_F$. Since G is connected and compact, there exists $\Phi^{[n]} \in \Omega_{\mathrm{c}}^n(V)^G$ representing the Thom class of V. We have

$$d_G(\Phi^{[n]}) = d(\Phi^{[n]}) + c(X)\Phi^{[n]} = c(X)\Phi^{[n]},$$

where $c(X)\Phi^{[n]} \in (S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_{\mathrm{c}}^{n-1}(V))^G$ and $d\big(c(X)\Phi^{[n]}\big) = L(X)\Phi^{[n]} = 0$. But then $c(X)\Phi^{[n]}$ is a coboundary of compact support following $(\diamond)$ and, again thanks to the connectedness of G, there exists $\Phi^{[n-2]} \in (S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_{\mathrm{c}}^{n-2}(V))^G$ s.t. $c(X)\Phi^{[n]} = d\Phi^{[n-2]}$. The iteration of this procedure, possible because of the vanishing condition $(\diamond)$, leads to the G-equivariant cocycle Φ_G. The cohomological uniqueness is proved in a similar way. The fact that $\varphi_{G,*}$ is compatible with differentials is obvious as Φ_G is a cocycle.

(b) By the universal property of the equivariant Gysin morphisms 5.4, it suffices to verify the equality

$$\int_B \sigma^*\alpha \wedge \beta = \int_V \alpha \wedge \varphi_{G,*}(\beta), \qquad \forall \alpha \in \Omega_G(V),\ \forall \beta \in \Omega_{G,\mathrm{c}}(B).$$

Since $\pi^* : H(B) \to H(V)$ is an isomorphism, the same is true in equivariant cohomology following 3.1.4-(d), so that there exists $\alpha' \in \Omega_G(B)$ s.t. $\alpha \sim \pi^*\alpha'$. We are thus lead to verify that

$$\int_B \alpha' \wedge \beta = \int_V \pi^*(\alpha' \wedge \beta) \wedge \Phi_G, \qquad \forall \alpha' \in \Omega_G(B),\ \forall \beta \in \Omega_{G,\mathrm{c}}(B),$$

and this follows from the universal property of the nonequivariant Thom class (1.9.7) that states that one has: $\int_B \omega|_B = \int_V \omega \wedge \Phi, \quad \forall \omega \in H(V)$. □

5.7. Exercises

1) Restate and solve exercise 1.11 in the equivariant framework. In particular:
   - If $i : B \hookrightarrow M$ is a *closed equivariant embedding* of oriented G-manifolds, denote by $j : U := M \backslash B \hookrightarrow M$ the complementary open embedding, and justify the existence of the following triangles where the left arrows are Gysin morphisms and the right ones are restriction morphisms.

     i) The equivariant compact support cohomology triangle

     $$H_{G,\mathrm{c}}(U)[d_U] \xrightarrow{j_*} H_{G,\mathrm{c}}(M)[d_M] \xrightarrow{i^*} H_{G,\mathrm{c}}(B)[d_B] \xrightarrow[[+1]]{} . \quad (\diamond)$$

ii) The equivariant Gysin triangle

$$H_G(B)[d_B] \xrightarrow{i!} H_G(M)[d_M] \xrightarrow{j^*} H_G(U)[d_U] \xrightarrow[[+1]]{} \qquad (\diamond\diamond)$$

- In the equivariant version of the Lefschetz fixed point exercise (1.11.2) you will define the *G-equivariant Lefschetz class of f* by

$$L_G(f) := \mathrm{Gr}(f)^*(\delta_!(1)) \in H_G^{d_M}(M),$$

and its *equivariant Lefschetz number* $\Lambda_{G,f} := \int_M L_G(f)$. Prove that

$$\begin{cases} \mathrm{Res}_1^G L_G(f) = L(f) \in H^{d_M}(M) \\ \Lambda_{G,f} = \Lambda_f \end{cases}$$

and conclude that the *equivariant Lefschetz number* coincides with the nonequivariant one. In particular, if $H_G(M)$ is a torsion module (7.2.1), the Euler characteristic of M is zero.

2) Show that if $f : B \to M$ is G-equivariant between oriented G-manifolds, the projective limit (see 3.2.5) of nonequivariant Gysin morphisms

$$\varprojlim_n \big(f(n)_* : H_c(B_G(n))[d_B] \to H_c(M_G(n))[d_M]\big)$$

is well defined and coincides with the equivariant Gysin morphism

$$f_* : H_{G,c}(B)[d_B] \to H_{G,c}(M)[d_M].$$

And *mutatis mutandis* for the proper case.

3) i) Show that in 5.6.5, the restriction of the equivariant Thom class to the complement of the zero section, is an equivariant coboundary. (*Hint: remark that* $[\Phi_G] = \sigma_!(1)$ *and use* (1)-($\diamond\diamond$)).

ii) (**) Show that the multiplication by $[\Phi_G]$ defines a map from $H_G(B)$ to the equivariant cohomology of V with supports in B:

$$(_) \wedge [\Phi_G] : H_G(B) \to H_{G,B}(V).$$

Show next that this map is an isomorphism. (*Hint: use the spectral sequence of exercise* 3.2.8-(c) *to reduce to the nonequivariant case*).

iii) (**) Extend (ii) to the case of a closed embedding $B \hookrightarrow M$ of oriented manifolds. (*Hint: show that B may be seen as the zero section of a tubular G-stable neighborhood B_ϵ and use (and justify) the fact that the restriction map $H_{G,B}(M) = H_{G,B}(B_\epsilon)$ is an isomorphism*).

6. Equivariant Euler Classes

The reference for this section is Atiyah-Bott's paper [AB], notably §2 and §3.

6.1. The Nonequivariant Euler Class

Given a pair of oriented manifolds (N,M) with $N \subseteq M$, we denote by N_ϵ a tubular neighborhood of N in M. As the inclusion $N \subseteq N_\epsilon$ has the same nature as the inclusion of the zero section of a vector bundle $\sigma : B \subseteq V$ (1.9.7), we may define the *Thom class* $[\Phi(N,M)]$ *of the pair* (N,M) following the same principle, that is, by means of the Gysin morphism associated with the closed embedding $i : N \subseteq M$. We thus set :

$$\boxed{[\Phi(N,M)] := i_!(1) \in H^{d_M - d_N}(M)}$$

6.1.1. Definition. The *Euler class* $\mathrm{Eu}\big(N,M\big)$ *of the pair* (N,M) is the restriction of the Thom class to $H(N)$ ([21]), i.e. :

$$\mathrm{Eu}\big(N,M\big) := i^* i_!(1) = [\Phi(N,M)]|_N \in H^{d_M - d_N}(N). \qquad (\diamond)$$

6.2. G-Equivariant Euler Class

The generalization of the concept of Euler class to the equivariant framework is straightforward thanks to the equivariant Gysin morphism formalism: Given a pair of oriented G-manifolds (N,M) with $N \subseteq M$, we denote by $i_G : N \subseteq M$ the inclusion map and define the *G-equivariant Euler class* $\mathrm{Eu}_G\big(N,M\big)$ *of the pair* (N,M) by the same formula $(\diamond)$:

$$\boxed{\mathrm{Eu}_G\big(N,M\big) := i_G^* i_{G!}(1) = [\Phi_G(N,M)]|_N \in H_G^{d_M - d_N}(N)}.$$

where $i_{G!} : H_G(N)[d_N] \to H_G(M)[d_M]$ is now the equivariant Gysin morphism.

6.2.1. Exercise. Given oriented G-manifolds $L \subseteq N \subseteq M$, prove the folowing formula for nested equivariant Euler classes

$$\boxed{\mathrm{Eu}_G\big(L,M\big) = \mathrm{Eu}_G\big(L,N\big) \cup \mathrm{Eu}_G\big(N,M\big)|_L}$$

Hint: Use the projection formula for Gysin morphisms.

6.2.2. G-Equivariant Euler Class of Discrete Fixed Point Sets

In the sequel, we denote by M^G the subspace of G-fixed points of M.

When N is a discrete subspace of M^G, one has

$$\mathrm{Eu}_G\big(N,M\big) \in H_G^{d_M}(N) = \prod\nolimits_{b \in N} S^{d_M}(\mathfrak{g})^G,$$

and $\mathrm{Eu}_G\big(N,M\big)$ is simply the family of invariant polynomials

$$\mathrm{Eu}_G\big(N,M\big) = \big\{\mathrm{Eu}_G\big(b,M\big) \in S^{d_M}(\mathfrak{g})^G\big\}_{b \in N}.$$

[21] *Cf.* formula (2.19), p. 5, in *loc.cit.*

6. Equivariant Euler Classes

6.2.3. Proposition. *If N is a finite subset of M^G, one has*

$$\sum\nolimits_{b\in N} \mathrm{Eu}_G\,(b,M) = \int_M \Phi_G(N,M)\cup\Phi_G(N,M) \quad \textit{and} \quad |N| = \int_M \Phi_G(N,M).$$

Proof. The constant function $\mathbb{1}_N$ and, *a fortiori*, the Thom class $\Phi_G(N,M)$, are both of compact supports. The equalities then immediately follow from the adjoint property of the Gysin morphism $i_* : H_{G,\mathrm{c}}(N) \to H_{G,\mathrm{c}}(M)$ which gives:

$$\sum\nolimits_{b\in N} \alpha|_b = \int_M i_*(\mathbb{1}_N)\cup\alpha, \quad \forall\alpha\in H_G(M). \qquad \square$$

6.3. T-Equivariant Euler Classes of a Fixed Point

Let T be the maximal torus of the compact connected Lie group G and denote by $T' := N_G(T)$ the *normalizer* of T in G. We have $T\subseteq T'\subseteq G$ and if we choose $\mathbb{E}G$ as *universal fiber bundle* for any of these groups, we can easily compare the corresponding Borel constructions for a given G-manifold M. In this way we obtain a natural commutative diagram of locally trivial fibrations:

$$\begin{array}{ccccc} M_T := \mathbb{E}G\times_T M & \xrightarrow{p} & M_{T'} := \mathbb{E}G\times_{T'} M & \xrightarrow{q} & M_G := \mathbb{E}G\times_G M \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{B}T & \xrightarrow{\quad p \quad} & \mathbb{B}T' & \xrightarrow{\quad q \quad} & \mathbb{B}G \end{array} \qquad (\diamond)$$

– The *Weyl group of* (G,T), i.e. the finite group $W := N_G(T)/T$, acts on the *right* of M_T and p is the orbit map for this action. In particular, the map $p^* : H_{T'}(M) \to H_T(M)^W$ is an isomorphism.

– The fibers of q are isomorphic to G/T' which is *acyclic in rational cohomology*. Indeed, this space is the orbit space of G/T for the right action of W and we know from an old result of Leray ([22]) that, under this action, $H(G/T)$ is the regular representation of W. In particular $H(G/T') = H(G/T)^W = \Bbbk$, which implies that

$$q^* : H_G(M) \to H_{T'}(M)$$

is an isomorphism.

This is a consequence of the general fact that if $q : X \to Y$ is a locally trivial fibration with acyclic fiber F between manifolds, then $q^* : H(Y) \to H(X)$ is an isomorphism. Indeed, if $\mathscr{U} = \{U\}$ is an good cover of Y (*cf.* ([3])) such that $q : f^{-1}(U) \to U$ is a trivial fibration for all $U\in\mathscr{U}$, then $f^{-1}(U) = U\times F$ and the cover $f^{-1}(\mathscr{U}) := \{f^{-1}(U)\}$ will be also good for X. In that case, q^* establishes an *isomorphism* of Čech cohomologies $q^* : \check{H}(\mathscr{U};Y) \to \check{H}(f^{-1}\mathscr{U};X)$ which are known to be canonically isomorphic to de Rham cohomologies. By this result, the maps $q^* : H(\mathbb{E}G(m)\times_G M) \to H(\mathbb{E}G(m)\times_{T'} M)$ are bijective for all finite dimensional approximation $\mathbb{E}G(m)$ of $\mathbb{E}G$, which suffices to our

[22] The statement appears as the Lemma 27.1 in the Ph.D. thesis of A. Borel, defended at La Sorbonne (with Leray as president) in 1952, ([B$_3$], lemme 27.1, p. 193). Borel attributes the result to J. Leray ([L]).

purposes as equivariant cohomology is the projective limit of the cohomologies of these approximations (3.2.5). ([23])

– Summing up, we have the following two canonical isomorphisms

$$\boxed{H_G(M) \xrightarrow{q^*} H_{T'}(M) \xrightarrow{p^*} H_T(M)^W} \qquad (\ddagger)$$

– When $M = \{\bullet\}$, we obtain a commutative diagram of Chern-Weil homomorphisms

$$\begin{array}{ccccc} S(\mathfrak{g})^G & -\mathrm{Chv}\to & S(\mathfrak{t})^W & \longrightarrow & S(\mathfrak{t}) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ H_G & \xrightarrow[\simeq]{q^*} & H_{T'} & \xrightarrow{p^*} & H_T \end{array} \qquad (\ddagger\ddagger)$$

where $\mathrm{Chv} : S(\mathfrak{g})^G \to S(\mathfrak{t})^W$ is the map that associates a symmetric polynomial function on $\mathfrak{g}$ with its restriction to the subspace $\mathfrak{t}$. The diagram already shows that Chv is an isomorphism, a claim known as the *Chevalley isomorphism* following the celebrated, much more general, *Chevalley's restriction theorem*.

At this point it is worth noting that for each $b \in M^G$ the group G acts naturally on the tangent space $T_b(M)$ through a *linear representation*. Now, if we endow M with a G-invariant riemannian metric, the exponential map $\exp : T_b(M) \to M$ is a G-equivariant diffeomorphism between $T_b(M)$ and an open neighborhood of b in M, so that the computation of equivariant Euler classes on fixed points may be greatly simplified by linearizing the data. The following proposition deals with the linear case.

6.3.1. Proposition. *Let V be a linear representation of a compact connected Lie group G with maximal torus T.*

a) *The equivariant Euler class $\mathrm{Eu}_T(0,V)$ belongs to $S(\mathfrak{t})^W$ and the Chevalley isomorphism $\mathrm{Chv} : S(\mathfrak{g})^G \to S(\mathfrak{t})^W$ exchanges $\mathrm{Eu}_G(0,V)$ and $\mathrm{Eu}_T(0,V)$.*

b) *If $V := V_1 \oplus V_2$ as G-module, then $\mathrm{Eu}_G(0,V) = \mathrm{Eu}_G(0,V_1)\mathrm{Eu}_G(0,V_2)$.*

c) *Denote by $\mathbb{C}(\alpha)$ the complex vector space $\mathbb{C}$ endowed with the representation of T corresponding to the (nonzero) weight $\alpha \in \mathfrak{t}^\vee$, i.e. $\exp(tx)(z) = e^{it\alpha(x)}z$, for all $t \in \mathbb{R}$ and $z \in \mathbb{C}$. If the decomposition of V in irreducible representations of T is $V = \mathbb{R}^{\mu_0} \oplus \bigoplus_\alpha \mathbb{C}(\alpha)^{\mu(\alpha)}$, then*

$$\mathrm{Eu}_T(0,V) = 0^{\mu_0} \prod\nolimits_\alpha \alpha^{\mu(\alpha)}.$$

d) *$\mathrm{Eu}_G(0,V) \neq 0$ if and only if $V^T = \{0\}$.*

[23] In [AB], p. 4, the interested reader will find partial indications to a different justification, that seems to rely on [Gt].

Proof. (a) After the natural isomorphism of functors $H_G(_) \simeq H_{T'}(_)$ of (‡), it suffices to justify the commutativity of the following diagram:

$$\begin{array}{ccccc} H_{T'}(0) & \xrightarrow{i_!} & H_{T'}(V) & \xrightarrow{i^*} & H_{T'}(0) \\ \downarrow{\scriptstyle p^*} & \text{(I)} & \downarrow{\scriptstyle p^*} & \text{(II)} & \downarrow{\scriptstyle p^*} \\ H_T(0) & \xrightarrow[i_!]{} & H_T(V) & \xrightarrow[i^*]{} & H_T(0) \end{array}$$

The commutativity of the subdiagram (II) is obvious. For (I) we check its dual, the diagram

$$\begin{array}{ccc} H_{T,\mathrm{c}}(V) & \xrightarrow{i^*} & H_T(0) \\ \downarrow{\scriptstyle p_!} & (\mathrm{I}^\vee) & \downarrow{\scriptstyle p_!} \\ H_{T',\mathrm{c}}(V) & \xrightarrow[i^*]{} & H_{T'}(0) \end{array}$$

where $p_! = \int_W$, which is also clearly commutative.

(b,c,d) left to the reader. *Hint for* (c). Following (b), it suffices to show that $\mathrm{Eu}_T\big(0,\mathbb{C}(\alpha)\big) = \alpha$. Taking polar coordinates $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi]$ in $\mathbb{C}$, the nonequivariant Thom class $\Phi(0,\mathbb{C})$ is of the form

$$\Phi^{[2]} = \lambda(\rho)\ \rho d\rho \wedge d\theta,$$

where $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a nonnegative differential function with compact support equal to 1 in a neighborhood of 0 and such that $\int_0^\infty \lambda(\rho)\ \rho d\rho = 1/2\pi$. As it is clear that $\Phi^{[2]}$ is invariant under the action of the unit circle action, it is T-invariant. We can thus use this differential 2-form to construct an equivariant Thom class following the procedure described in the proof of 5.6.6-(a). We have

$$(d_{\mathfrak{t}}\,\Phi^{[2]})(X) = c(X)\ \lambda(\rho)\ \rho d\rho \wedge d\theta = -2\pi\alpha(X)\ \lambda(\rho)\ \rho d\rho,$$

and $\Phi^{[0]}(X)$ is necessarily equal to

$$\Phi^{[0]}(\rho,\theta)(X) = -2\pi\alpha(X)\Big(\int_0^\rho \lambda(\rho)\ \rho d\rho - \int_0^{+\infty} \lambda(\rho)\ \rho d\rho\Big),$$

since it must be of compact support. In this way we obtain

$$\mathrm{Eu}_T\big(0,\mathbb{C}(\alpha)\big) = \Phi_T(0,\mathbb{C}(\alpha))|_0 = \Phi^{[0]}(0)(X) = \alpha(X). \qquad \square$$

6.3.2. Exercise. If G is the *special orthogonal group* $\mathrm{SO}(3)$ of the euclidean space $\mathbb{R}^3$, show that $\mathrm{Eu}_G\big(0,\mathbb{R}^3\big) = 0$. Conclude that isolated G-fixed points may have a null equivariant Euler class when G is nonabelian, contrary to the abelian case.

7. Localizations

7.1. The Localization Functor

Denote by Q_G the field of fractions of $\Omega_G = H_G$. The *localization functor* is the base change functor ([24])

$$Q_G \otimes_{\Omega_G} (_) : \mathrm{GM}(\Omega_G) \rightsquigarrow \mathrm{Vec}(Q_G).$$

General results of commutative algebra state for any Ω_G-module N, the H_G-module $Q_G \otimes_{H_G} N$ is flat and injective (as in appendix §9). The localization functor is exact and when applied to Cartan complexes, we obtain the *localized Cartan complexes*

$$\begin{cases} Q\Omega_G(M) := \big(Q_G \otimes_{\Omega_G} \Omega_G(M), \mathrm{id} \otimes d_G\big) \\ Q\Omega_{G,\mathrm{c}}(M) := \big(Q_G \otimes_{\Omega_G} \Omega_{G,\mathrm{c}}(M), \mathrm{id} \otimes d_G\big) \end{cases}$$

whose cohomologies, the *localized equivariant cohomologies*, respectively denoted $QH_G(M)$ and $QH_{G,\mathrm{c}}(M)$, satisfy :

$$QH_G(M) = Q_G \otimes_{H_G} H_G(M) \quad \text{and} \quad QH_{G,\mathrm{c}}(M) = Q_G \otimes_{H_G} H_{G,\mathrm{c}}(M).$$

7.1.1. Localized Equivariant Poincaré Duality. The localized equivariant cohomology is very close to the non equivariant cohomology in that the Poincaré duality pairings are perfect. The following, analog of 4.5.1, simply results from the fact that Q_G is a flat and injective Ω_G-module (details are left to the reader).

7.1.2. Theorem. *Let G be a compact connected Lie group, and M an oriented G-manifold of dimension d_M.*

a) *The morphism of (nongraded) complexes*

$$\mathbb{D}_{G,M} : Q\Omega_G(M)[d_M] \to Hom^{\bullet}_{Q_G}\big(Q\Omega_{G,\mathrm{c}}(M), Q_G\big)$$

induces an isomorphism

$$\boxed{\mathscr{D}_{G,M} : QH_G(M)[d_M] \to Hom^{\bullet}_{Q_G}\big(QH_{G,\mathrm{c}}(M), Q_G\big)}$$

b) *Moreover, if M is of finite type, the morphism of complexes*

$$\mathbb{D}'_{G,M} : Q\Omega_{G,\mathrm{c}}(M)[d_M] \to Hom^{\bullet}_{Q_G}\big(Q\Omega_G(M), Q_G\big)$$

induces an isomorphism

$$\boxed{\mathscr{D}'_{G,M} : QH_{G,\mathrm{c}}(M)[d_M] \to Hom^{\bullet}_{Q_G}\big(QH_G(M), Q_G\big)}$$

7.1.3. Exercise. Let M be of finite type. Prove that the torsion-freeness (4.5.2) of $H_G(M)$ (resp. $H_{G,\mathrm{c}}(M)$) is a necessary and sufficient condition for

$$\mathscr{D}_{G,M} : H_G(M)[d_M] \to Hom^{\bullet}_{H_G}\big(H_{G,\mathrm{c}}(M), H_G\big)$$

[24] Note that we loose grading in considering this kind of localization. From this point of view, it would have been more clever to tensor by the ring $L_G := S^{-1}H_G$, where S denotes the multiplicative system of nonzero homogeneous elements of H_G. As appendix 9 explains, if N is an H_G-gm, the H_G-module $L_G \otimes_{H_G} (_)$ is graded, flat and injective, which is what we really need about localization.

(resp. $\mathscr{D}'_{G,M}$) to be injective. Discuss the case where M is not of finite type.

Hint: Let M be H_G-gm. Show that the canonical map $M \to Q_G \otimes_{H_G} M$ is injective if and only if M is torsion-free. Show that if M is also of finite type the natural map $Hom^\bullet_{H_G}(M,H_G) \to Hom^\bullet_{H_G}(M,Q_G)$ induces an isomorphism $Q_G \otimes_{H_G} Hom^\bullet_{H_G}(M,H_G) \simeq Hom^\bullet_{Q_G}(Q_G \otimes_{H_G} M,Q_G)$. Apply 7.1.2.

7.1.4. Localized Equivariant Gysin Morphisms. As a consequence of theorem 7.1.2, if $f : M \to N$ is a map between oriented G-manifolds, the localized Gysin morphisms

$$\begin{cases} f_* : QH_{G,c}(M) \to QH_{G,c}(N) \\ f_! : QH_G(M) \to QH_G(N), \quad \text{if } f \text{ is proper,} \end{cases}$$

are *catacterized*, as in the nonequivariant framework, by the adjoint equalities,

$$\begin{cases} \int_M f^*[\beta] \cup [\alpha] = \int_N [\beta] \cup f_*[\alpha] \\ \int_M f^*[\beta] \cup [\alpha] = \int_N [\beta] \cup f_![\alpha], \quad \text{if } f \text{ is proper.} \end{cases}$$

7.2. Torsions in Equivariant Cohomology Modules

7.2.1. Torsions. The *annihilator of an element* v of an H_G-gm V, is the ideal

$$\mathrm{Ann}(v) := \{P \in H_G \mid P \cdot v = 0\}.$$

One says that v is a *torsion element* if $\mathrm{Ann}(v) \neq 0$, otherwise v is a *torsion-free element*. The H_G-gm V is called a *torsion module* if all its elements are torsion elements, it is called a *torsion-free module* if zero is its the only torsion element, otherwise, it is called a *nontorsion module*.

7.2.2. Exercise. Given an H_G-gm V, let $\tau(V)$ be the subset of its torsion elements. Show that

1) $\tau(V)$ is a torsion module and the quotient $\varphi(V) := V/\tau(V)$ is torsion-free. The natural map: $Q_G \otimes_{H_G} V \to Q_G \otimes_{H_G} \varphi(V)$ is an isomorphism.
2) $Q_G \otimes_{H_G} V = 0$ if and only if V is torsion.
3) $Homgr_{H_G}(V,Q_G) = 0$ if and only if V is torsion.
4) An inductive limit of torsion modules is a torsion module.
5) A projective limit of torsion modules may be a nontorsion module.

7.2.3. Exercise. The *annihilator of an H_G-module* is the ideal

$$\mathrm{Ann}(V) := \{P \in H_G \mid P \cdot V = 0\} = \bigcap\nolimits_{v \in V} \mathrm{Ann}(v).$$

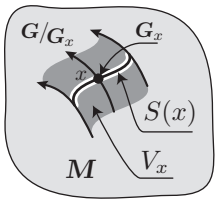
1) Show that if $\mathrm{Ann}(V) \neq 0$, then V is torsion, but the converse may fail. ([25])
2) Show that if V is an H_T-algebra with unit element, then $\mathrm{Ann}(V) = \mathrm{Ann}(1)$.
3) Let $\{U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots U_n \cdots\}$ be an increasing family of G-stable open subsets of a G-manifold M such that $M = \bigcup_n U_n$. Suppose that $H_G(U_n)$ and

[25] *Hint: For $P \in H_G$, let $W(P) := H_G/(H_G \cdot P)$ and take $V := \bigoplus_{P \in H_G} W(P)$.*

$H_{G,c}(U_n)$ are torsion for all $n \in \mathbb{N}$. Show that $H_{G,c}(M)$ is torsion, whereas $H_G(M)$ may fail to be torsion.

4) In (3) show that $\{\mathrm{Ann}(H_G(U_n))\}_n$ is a decreasing sequence of ideals and that
$$\mathrm{Ann}(H_G(M)) = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ann}(H_{G,c}(U_n)).$$
In particular, if the set $\{\mathrm{Ann}(H_G(U_n))\}$ is finite, then $H_G(M)$ is torsion.

7.2.4. The slice theorem. Given a G-manifold M, the *slice theorem* ([26]) claims that, through every point $x \in M$ a submanifold $S(x)$ passes, *a slice through* x, such that the map G/G_x
$$G \times_{G_x} S(x) \to M, \quad [(g,x)] \mapsto g \cdot x,$$
where G_x denotes the *isotropie group of* x, is a diffeomorphism onto a G-stable neighborhood V_x of x. Then
$$H_G(V_x) = H(\mathbb{E}G \times_G G \times_{G_x} S(x)) = H_{G_x}(S(x)),$$
as well as $H_{G,c}(V_x) = H_{G_x,c}(V_x)$ (exercise). As a consequence, the H_G-module structures of $H_G(V_x)$ and $H_{G,c}(V_x)$ factorise through the natural ring homomorphism $\rho_x : H_G \to H_{G_x}$.



7.2.5. Proposition. *Let T be a torus. For every point x in a T-manifold M, the following equivalences hold.*

a) *$\rho_x : H_T \to H_{T_x}$ is injective if and only if $x \in M^T$. The H_T-modules $H_G(V_x)$ and $H_{G,c}(V_x)$ are torsion if and only if $x \notin M^T$*

b) *If $x \in M^T$, then $\mathrm{Eu}_T(x,M) \neq 0$ if and only if x is an isolated point of M^T.*

Proof. (a) If $T_x \neq T$, there exist closed subtorus $H \subseteq T$ such that $T = H \times T_x$ and $\dim(H) > 0$, in which case $\ker(\rho_x) = H_H^+ \otimes H_{T_x} \neq 0$. (b) is 6.3.1-(d). □

7.2.6. Remark. The interesting point of this proposition is that it faithfully translates topological properties of a point in a T-manifold into algebraic properties of H_T-modules, opening the way to the algebraic study of the topology of T-spaces. When G is no longer abelian, both claims may fail. For (a), if T is a maximal torus for G and $M = G/T$, the isotropie group of $x = g[T] \in M$ is the maximal torus $G_x = gTg^{-1}$, and ρ_x is the inclusion $H_G = (H_T)^W \subseteq H_{G_x}$. Thus, ρ_x is injective although x is not a G-fixed point. Exercise 6.3.2 gives a counterexample for (b).

7.2.7. Orbit Type of T-Manifolds. The torsions of the H_T-modules $H_{T,c}(M)$ and $H_T(M)$ play a central role in the *fixed point theorem*.

When $M^T = \emptyset$, the slice theorem and 7.2.5-(a) show that M may be covered by a family of T-stable open subspaces V_x where $H_T(V_x)$ is killed by the elements of the nontrivial kernel $\rho_x : H_T \to H_{T_x}$. But then any finite union of those subspaces will also have torsion equivariant cohomology thanks to Mayer-Vietoris sequences, and, if M is compact, we can already say that $H_T(M)$ is torsion. When M is not compact we may not be able to conclude the same (*cf.* 7.2.3-(3)) unless we have some kind of finiteness condition on the kernels of

[26] See Hsiang [H] §I.3, p. 11.

ρ_x. As shown in exercise 7.2.3-(4), such condition may be the finiteness of the set those kernels, or, what amounts to the same, the set of the isotropy groups $\mathcal{O}_T(M) := \{T_x \mid x \in X\}$ which is called the *orbit type of the T-space M* ([27]).

Definition. A T-manifold M is said *of finite orbit type* if $\mathcal{O}_T(M)$ is finite.

7.2.8. Exercise. Show that a T-manifold M is always locally of finite orbit type. In particular, if M is compact, it is of finite orbit type.

Hint. Use the slice theorem. If $x \notin M^T$, show that the slice $S(x)$ is a strict submanifold of M stable under G_x and that $\mathcal{O}_G(G \cdot S(x)) = \mathcal{O}_{G_x}(S(x))$, then conclude by induction on $\dim(M)$. Otherwise, if $x \in M^T$, linearize the action as in 6.3.1 and conclude showing that there is a one-to-one correspondence between isotropy groups in the T-space T_xM and subsets of the set of nonzero weights of the linear representation of T on T_xM.

7.2.9. Proposition. *If $M^T = \emptyset$ and M is of finite orbit type, then*

$$H_{T,c}(M) \otimes_{H_T} Q_T = H_T(M) \otimes_{H_T} Q_T = 0.$$

Proof. – *Torsion of $H_{T,c}(M)$.* Let $(\mathscr{U},\subseteq)$ be the set of G-stable open subspaces $U \subseteq M$, such that $H_{T,c}(U)$ is torsion, partially ordered by set inclusion. The set $\mathscr{U}$ is non empty as it contains every slice neighborhood V_x (7.2.4) and it is an inductive poset by exercise 7.2.3-(3), so that Zorn lemma can be applied. Let U be a maximal element in $\mathscr{U}$. For any $y \in M$, let V_y be a slice neighborhood of y. By the exactness of the Mayer-Vietoris sequence for compact supports:

$$\cdots \to H^0_{G,c}(U \cap V_y) \to H^0_{G,c}(U) \oplus H^0_{G,c}(V_y) \to H^0_{G,c}(U \cup V_y) \to H^0_{G,c}(U \cap V_y)[1] \to,$$

we easily conclude that $H^0_{G,c}(U \cup V_y)$ is torsion. Then $U \supseteq V_y$, by the maximality of U, hence $U = M$.

– *Torsion of $H_T(M)$.* We cannot use the same argument as in the compact support case because a projective limit of torsion modules is not necessarily torsion. The finiteness assumption on the set of orbit types will now be crucial.

Let I be the intersection of all the ideals $\ker(\rho_x : H_T \to H_{T_x})$ for $x \in M$. The finiteness of the orbit type of M ensures that $I \neq 0$. Let $(\mathscr{U},\subseteq)$ be the set of G-stable open subspaces $U \subseteq M$, such that $I \subseteq \mathrm{Ann}(H_T(U))$, partially ordered by set inclusion. The set $\mathscr{U}$ is non empty as it contains every slice neighborhood V_x (7.2.4) and it is an inductive poset by exercise 7.2.3-(4), so that Zorn lemma can be applied. Let U be a maximal element in $\mathscr{U}$. For any $y \in M$, let V_y be a slice neighborhood of y. Thanks to the exactness of the first terms of the Mayer-Vietoris sequence: $0 \to H^0_G(U \cup V_y) \to H^0_G(U) \oplus H^0_G(V_y) \to H^0_G(U \cap V_y) \to$, we easily see that $1 \in H^0_G(U \cup V_y)$ is killed by I. Then $I \subseteq \mathrm{Ann}(H_G(U \cup V_y))$ by 7.2.3-(2) and $U \supseteq V_y$, by the maximality of U, hence $U = M$. □

7.3. Localization Theorems

Given a T-manifold M and a *closed* subgroup $H \subseteq T$, the fixed point set $M^H := \{x \in M \mid h \cdot x = x \ \forall h \in H\}$ is a submanifold whose connected com-

[27] See [H] chap IV §2, p. 54, for the general definition nottably for non abelian groups.

ponents (not necessarily of equal dimensions) are stable under the action of T, and, in addition, orientable if M is so ([28]).

Terminology. An homomorphism of H_T-modules $\alpha : L \to L'$ will be called an *isomorphism modulo torsion* if its kernel and cokernel are both torsion H_T-modules, i.e. if the induced homomorphism of Q_T-modules

$$\alpha \otimes_{H_T} \mathrm{id} : L \otimes_{H_T} Q_T \to L' \otimes_{H_T} Q_T$$

is an isomorphism.

7.3.1. Proposition. *Let M be an oriented T-manifold of finite orbit type. For any H closed subgroup of T, denote by $\iota_H : M^H \hookrightarrow M$ the set inclusion. The following morphisms of H_T-gm ([29]) are isomorphisms modulo torsion.*

$$\textit{Gysin morphisms} \begin{cases} \iota_{H!} : H_T(M^H)[d_{M^H}] \to H_T(M)[d_M] \\ \iota_{H*} : H_{T,\mathrm{c}}(M^H)[d_{M^H}] \to H_{T,\mathrm{c}}(M)[d_M] \end{cases}$$

$$\textit{Restriction morphisms} \begin{cases} \iota_H^* : H_{T,\mathrm{c}}(M) \to H_{T,\mathrm{c}}(M^H) \\ \iota_H^* : H_T(M) \to H_T(M^H) \end{cases}$$

Proof. The kernel and cokernel of the restriction $\iota_H^* : H_{T,\mathrm{c}}(M) \to H_{T,\mathrm{c}}(M^H)$ lay within $H_{T,\mathrm{c}}(U)$, where $U := M \backslash M^H$. Now, as the isotropy groups of the points of U are *strict* subgroups of T, there are no T-fixed points, i.e. $U^T = \emptyset$, and we can conclude that $H_{T,\mathrm{c}}(U)$ is an H_T-torsion module by 7.2.9. In particular, any submodule of $H_{T,\mathrm{c}}(U)$, viz. the kernel and the cokernel of ι_H^*, is a torsion H_T-module. By duality the same is true for $\iota_{H,!} : H_T(M^H) \to H_T(M)$.

The other restriction $\iota_H^* : H_T(M) \to H_T(M^H)$ is a little more tricky as its kernel and cokernel lay within $H_{T,U}(X)$ which we have not yet proved is an H_T-torsion module. For that, recall that since one has short exact sequences of local section functors over open subspaces

$$0 \to \Gamma_{U_1 \cap U_1}(_) \longrightarrow \Gamma_{U_1}(_) \oplus \Gamma_{U_2}(_) \longrightarrow \Gamma_{U_1 \cup U_2}(_) \to 0$$

where $\Gamma_U(_)$ denotes the kernel of the restriction $\Gamma(M, _) \to \Gamma(M \backslash U, _)$, one may follow a Mayer-Vietoris procedure to approach $H_{T,U}(X)$ by successively adding slice open sets $V_x \subseteq U$ (7.2.4). In this way, to show that $H_{T,U}(M)$ is a torsion module, it suffices to show that each $H_{T,V_x}(M)$ is so. Now, this H_T-module occurs in the exact triangle

$$H_{T,V_x}(M) \longrightarrow H(M) \to H_T(M \backslash V_x) \to$$

where $M \backslash V_x$ is T-equivariantly homotopic to $M \backslash T{\cdot}x$ since the slice $S(x)$ is a submanifold of M, therefore $H_{T,V_x}(M) \simeq H_{T,T\cdot x}(M) \simeq H_T(T{\cdot}x) = H_{T_x}$, which proves that $H_{T,V_x}(M)$ is a torsion H_T-module. □

[28] We recall the reason: under the action of H, the tangent spaces $T_x(M)$ for $x \in M^H$ split as the direct sum of $T_x(M^H)$ and a sum of H-irreducible two dimensional representations $\mathbb{C}(\alpha)$ (*cf.* 6.3.1-(c)), canonically oriented by their character. Therefore, the orientation of $T_x(M^H)$ determines that of $T_x(M)$ and vice versa.

[29] As the submanifold M^H need not be connected nor equidimensional the shift indication in a notation as $H_T(M^H)[d_{M^H}]$ must be understood component-wise.

7. Localizations

7.3.2. Theorem. *Let M be a T-oriented manifold of finite orbit type such that M^T is a discrete subspace of M. Then*

a) *For all $\mu \in H_{T,\mathrm{c}}(M)$ the following* "localization formula" *is satisfied:*

$$\int_M \mu = \sum_{x \in M^T} \frac{\mu|_x}{\mathrm{Eu}_T\left(x, M\right)}.$$

b) *If M is compact of positive dimension*

$$0 = \sum_{x \in M^T} \frac{1}{\mathrm{Eu}_T\left(x, M\right)}.$$

Proof. (a) From 7.3.1, the morphism $i_{T,*} : H_{T,\mathrm{c}}(M^T) \to H_{T,\mathrm{c}}(M)$ is an isomorphism modulo torsion, so that it suffices to prove the localization formula for the equivariant Thom classes $\Phi_T(x, M)$ for all $x \in M^T$. But we have already shown that $\int_M \Phi_T(x, M) = 1$ (6.2.3) and that $\Phi_T(x, M)|_x = \mathrm{Eu}_T\left(x, M\right)$ by definition. (b) Apply the localization formula to $1 \in H^0_T(M)$. □

8. Changing the coefficients field

As we have already mentioned, the constructions and results described in these notes are available with coefficients on any field $\Bbbk$ of arbitrary characteristic ([30]). In this section, we give a quick outline, following the principles of the Grothendieck-Verdier duality, of a way to prove equivariant Poincaré duality with coefficients on a general field $\Bbbk$. We then end by introducing the corresponding Gysin morphisms.

Besides the general reference books by Kashiwara-Schapira [KS$_1$, KS$_2$], on sheaf theory, derived categories and Grothendieck-Verdier duality, we recommend the recent articles of Allday-Franz-Puppe [AFP$_1$, AFP$_2$].

8.1. Preliminaries

By *space* we mean a Hausdorff, second-countable and locally contractible topological space.

As we recalled in 3.2, the Borel construction is a functor from the category of G-spaces to the category of spaces based on the classifying space $I\!B := I\!BG$,

$$\left(X \xrightarrow[G\text{-equiv.}]{f} Y \right) \rightsquigarrow \left(X_G \xrightarrow{f_G} Y_G \right)$$

The usual ordinary and the compactly supported cohomologies over a field $\Bbbk$ of the Borel construction X_G associated with a G-space X are, by definition, the equivariant cohomologies over $\Bbbk$ of X, i.e. : ([31])

$$H_G(X;\Bbbk) := H(X_G;\Bbbk) \quad \text{and} \quad H_{G,c}(X;\Bbbk) := H_{cv}(X_G;\Bbbk).$$

with the natural structure of $H_G := H(I\!B;\Bbbk)$-modules induced by the projections π (*cf.* p. 22). In the language of sheaf cohomology, this amounts to set:

$$H_G(X;\Bbbk) := I\!R\Gamma(I\!B, I\!R\pi_* \underline{\underline{\Bbbk}}_{X_G}) \quad \text{and} \quad H_{G,c}(X;\Bbbk) := I\!R\Gamma(I\!B, I\!R\pi_! \underline{\underline{\Bbbk}}_{X_G})$$

These rewriting provide the clue to what needs to be replaced in order to transpose our work in the framework of sheaf cohomology over $\Bbbk$.

P-1) The complexes $\Omega_G(X)$ and $\Omega_{G,c}(X)$ in $\mathcal{D}^+(\mathrm{DGM}(\Omega_G))$ should respectively be replaced by the complexes $I\!R\pi_* \underline{\underline{\Bbbk}}_{X_G}$ and $I\!R\pi_! \underline{\underline{\Bbbk}}_{X_G}$ of the derived category of the category of sheaves of $\Bbbk$-vector spaces over $I\!B$, which we denote by $\mathcal{D}^+(I\!B;\Bbbk)$.

The graded algebra $\Omega_G := S(\mathfrak{g}^\vee)^G$ then corresponds to some *ad hoc* resolution of the constant sheaf $\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}$.

P-2) To fix ideas, for a topological space Z, we choose the complex of sheaves *of Alexander-Spanier cochains of* Z as resolution of its constant sheaf $\underline{\underline{\Bbbk}}_Z$ ([32]),

$$\mathbf{0} \to \underline{\underline{\Bbbk}}_Z \xrightarrow{\epsilon} \underline{\underline{\Omega}}^0(Z;\Bbbk) \xrightarrow{d_0} \underline{\underline{\Omega}}^1(Z;\Bbbk) \xrightarrow{d_1} \cdots$$

[30] In fact, on any ring, but the increase of technicalities that would impose is not warranted by the advantages of the resulting generality, so we prefer to limit ourselves to fields.

[31] The notation $H_{cv}(_)$, borrowed from [BT] p. 61, means *compact vertical cohomology*.

[32] [Go], §2.5, example 2.5.2, p. 134, and §3.7, example 3.7.1, p. 157.

There are several advantages to this choice.

i) The complex $\underline{\underline{\Omega}}(Z;\Bbbk) := (\underline{\underline{\Omega}}^\bullet(Z;\Bbbk), d_*)$ has a natural structure of sheaf of differential graded (anticommutative) algebras (*loc.cit.*).

ii) The correspondence $Z \rightsquigarrow \underline{\underline{\Omega}}(Z;\Bbbk)$ is functorial and contravariant on the category Top of topological spaces and continuous maps.

Indeed, given a continuous map $f : Z \to Z'$, the morphisms of sheaves

$$f_i^\# : \underline{\underline{\Omega}}^i(Z';\Bbbk) \to f_*\underline{\underline{\Omega}}^i(Z;\Bbbk), \quad \zeta \mapsto \zeta \circ f,$$

where ζ denotes a local section of $\underline{\underline{\Omega}}^i(Z';\Bbbk)$.

The resulting graded morphism $f^\# : \underline{\underline{\Omega}}(Z';\Bbbk) \to f_*\underline{\underline{\Omega}}(Z;\Bbbk)$ is a morphism of complexes which induces the usual pull-back map in ordinary cohomology $f^* : H(Z';\Bbbk) \to H(Z;\Bbbk)$ ([33]).

iii) In the specific case of a G-space X, the map

$$\pi^\# : \underline{\underline{\Omega}}(\mathit{B};\Bbbk) \to \pi_*\underline{\underline{\Omega}}(X_G;\Bbbk)$$

is compatible with the underlying differential graded algebras structures, and $\pi_*\underline{\underline{\Omega}}(X_G;\Bbbk)$ appears as an $\underline{\underline{\Omega}}(\mathit{B};\Bbbk)$-dgm.

Similarly, the subcomplex $\pi_!\underline{\underline{\Omega}}(X_G,\Bbbk) \subseteq \pi_*\underline{\underline{\Omega}}(X_G,\Bbbk)$ is also stabilized by the action of $\pi^\#$ and is therefore an $\underline{\underline{\Omega}}(\mathit{B},\Bbbk)$-sub-dgm of $\pi_*\underline{\underline{\Omega}}(X_G,\Bbbk)$.

At this point, the reader will have noticed the parallel with the preliminaries of chapter 4 for the category $\mathrm{DGM}(\Omega_G)$ (*cf.* 4.1.3). To emphasize the similarities further, we introduce the notations:

$$\underline{\underline{\Omega}}_G := \underline{\underline{\Omega}}(\mathit{B},\Bbbk), \quad \underline{\underline{\Omega}}_G(X) := \pi_*\underline{\underline{\Omega}}(X_G,\Bbbk), \quad \underline{\underline{\Omega}}_{G,\mathrm{c}}(X) := \pi_!\underline{\underline{\Omega}}(X_G,\Bbbk),$$

and denote by $\mathrm{DGM}(\underline{\underline{\Omega}}_G)$ the category of sheaves of differential graded modules over the sheaf of differential graded algebras $\underline{\underline{\Omega}}_G$.

This allows us to rephrase things in a more convenient language. (See 8.3.1 (†) and (†′) for more details.)

▸ The correspondence $X \rightsquigarrow \underline{\underline{\Omega}}_G(X)$ is a contravariant functor from the category G-Top of G-spaces and equivariant maps to the category $\mathrm{DGM}(\underline{\underline{\Omega}}_G)$

$$\left(X \xrightarrow[G\text{-equiv.}]{f} Y \swarrow \{\bullet\} \searrow \right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\underline{\underline{\Omega}}_G(Y) \xrightarrow{\pi_*(f_G^\#)} \underline{\underline{\Omega}}_G(X) \nwarrow \underline{\underline{\Omega}}_G \nearrow \right)$$

▸ The correspondence $X \rightsquigarrow \big(\underline{\underline{\Omega}}_{G,\mathrm{c}}(X) \subseteq \underline{\underline{\Omega}}_G(X)\big)$ is a contravariant functorial inclusion from the category $G\text{-Top}_{\mathrm{pr}}$ of G-spaces and equivariant *proper* maps to the category $\mathrm{DGM}(\underline{\underline{\Omega}}_G)$

$$\left(X \xrightarrow[G\text{-equiv.}]{\text{proper } f} Y \swarrow \{\bullet\} \searrow \right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc} \underline{\underline{\Omega}}_{G,\mathrm{c}}(Y) & \xrightarrow{\pi_!(f_G^\#)} & \underline{\underline{\Omega}}_{G,\mathrm{c}}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\underline{\Omega}}_G(Y) & \xrightarrow{\pi_*(f_G^\#)} & \underline{\underline{\Omega}}_G(X) \end{array} \quad \nwarrow \underline{\underline{\Omega}}_G \nearrow \right)$$

iv)

[33] And in compact support cohomology $f^* : H_{\mathrm{c}}(Z';\Bbbk) \to H_{\mathrm{c}}(Z;\Bbbk)$, if f is a proper map.

One important feature about $\underline{\underline{\Omega}}_G$-modules is that they are automatically Γ_Φ-acyclic, for every paracompactifying family of supports Φ (*loc.cit.*, example 3.7.1, p. 157). In particular, the sheaves $\underline{\underline{\Omega}}^i_{G,\mathrm{c}}(X)$ and $\underline{\underline{\Omega}}^i_G(X)$ are acyclic for the functors $\Gamma(X,_)$, $\Gamma_\mathrm{c}(X;_)$ and $\Gamma_Z(X,_)$, in which case

$$\begin{cases} H^i(X;\Bbbk) &= h^i(\Gamma(X;\underline{\underline{\Omega}}^\bullet_G(X))) \\ H^i_\mathrm{c}(X;\Bbbk) &= h^i(\Gamma_\mathrm{c}(X;\underline{\underline{\Omega}}^\bullet_G(X))) \\ H^i_Z(X;\Bbbk) &= h^i(\Gamma_Z(X;\underline{\underline{\Omega}}^\bullet_G(X))) \end{cases}$$

P-3) The obvious candidate to replace the basic duality functor $I\!R Hom^\bullet_{\Omega_G}(_,\Omega_G)$ should be the functor $(_) \rightsquigarrow I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet_{\underline{\underline{\Omega}}_G}(_,\underline{\underline{\Omega}}_G)$ but since we are considering $\mathrm{DGM}(\underline{\underline{\Omega}}_G)$ within $\mathcal{D}^+(I\!B;\Bbbk)$, we can achieve the same thing by taking

$$(_) \rightsquigarrow I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet(_,\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}).$$

Indeed, general algebraic arguments show that, for $\mathcal{M},\mathcal{N} \in \mathrm{DGM}(\underline{\underline{\Omega}}_G)$, the usual morphism of complexes of sheaves

$$I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet(\mathcal{M},\mathcal{N}) \to I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet_{\underline{\underline{\Omega}}_G}(\underline{\underline{\Omega}}_G \otimes \mathcal{M},\mathcal{N})$$

is an isomorphism in $\mathcal{D}^+(I\!B;\Bbbk)$. The claim then follows since the morphism $\underline{\underline{\Omega}}_G \otimes_{\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}} \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $\omega \otimes m \mapsto \omega m$ is a quasi-isomorphism, by germ analysis.

8.1.1. Translations To summarize, we have replaced:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^+(\mathrm{DGM}(\Omega_G)) &\leftrightarrow \mathcal{D}^+(I\!B;\Bbbk) \\ \Omega_G := S(\mathfrak{g}^\vee)^G &\leftrightarrow \underline{\underline{\Omega}}_G \simeq \underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B} \\ \Omega_G(X) &\leftrightarrow \underline{\underline{\Omega}}_G(X) := \pi_*\underline{\underline{\Omega}}(X_G) \simeq I\!R\pi_*\underline{\underline{\Bbbk}}_{X_G} \\ \Omega_{G,\mathrm{c}}(X) &\leftrightarrow \underline{\underline{\Omega}}_{G,\mathrm{c}}(X) := \pi_!\underline{\underline{\Omega}}(X_G) \simeq I\!R\pi_!\underline{\underline{\Bbbk}}_{X_G} \\ I\!R Hom^\bullet_{\Omega_G}(_,\Omega_G) &\leftrightarrow I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet(_,\underline{\underline{\Omega}}_G) \end{aligned}$$

Under these substitutions, the sheafification of the Poincaré adjunctions:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad I\!D_{G,M} : \Omega_G(M)[d_M] \to I\!R Hom^\bullet_{\Omega_G}\big(\Omega_{G,\mathrm{c}}(M),\Omega_G\big) \quad (\textit{cf.}\ 4.4.2) \\ &\text{(ii)} \quad I\!D'_{G,M} : \Omega_{G,\mathrm{c}}(M)[d_M] \to I\!R Hom^\bullet_{\Omega_G}\big(\Omega_G(M),\Omega_G\big), \quad (\textit{cf.}\ 4.4.3) \end{aligned}$$

should be morphisms in $\mathcal{D}^+(I\!B;\Bbbk)$

$$\begin{aligned} &\text{(I)} \quad \underline{\underline{I\!D}}_{G,M} : \underline{\underline{\Omega}}_G(M)[d_M] \to I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet\big(\underline{\underline{\Omega}}_{G,\mathrm{c}}(M),\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}\big) \\ &\text{(II)} \quad \underline{\underline{I\!D}}'_{G,M} : \underline{\underline{\Omega}}_{G,\mathrm{c}}(M)[d_M] \to I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet\big(\underline{\underline{\Omega}}_G(M),\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}\big). \end{aligned}$$

Now, thanks to Grothendieck-Verdier duality, the right-hand side in (I) verifies

$$I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet(I\!R\pi_!\underline{\underline{\Bbbk}}_{X_G},\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}) = I\!Rp_*\, I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet(\underline{\underline{\Bbbk}}_X,\pi^!\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}) = I\!Rp_*(\pi^!\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}),$$

and (I) is a morphism in $\mathcal{D}^+(I\!B;\Bbbk)$:

$$(\underline{\mathrm{I}}) \quad \underline{\underline{I\!D}}_{G,M} : I\!R\pi_*(\pi^{-1}\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B})[d_M] \to I\!R\pi_*(\pi^!\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}), \qquad (\diamond)$$

On the other hand, (II) is the basic dual of (I) composed with the natural morphism

$$(\underline{\mathrm{II}}) \quad \underline{\underline{\Omega}}_{G,\mathrm{c}}(M) \to I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet\big(I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet(\underline{\underline{\Omega}}_{G,\mathrm{c}}(M),\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}),\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}\big) \qquad (\diamond\diamond)$$

so that proving that (I) and (II) are isomorphisms in $\mathcal{D}^+(X;\Bbbk)$ is equivalent to proving that (I) and (II) are so.
The next proposition proves that this indeed the case, even in a slightly more general situation.

8.1.2. Proposition. *Let $\pi : E \to I\!B$ be any locally trivial fibration with fiber an equidimensional oriented manifold M of dimension d_M* ([34]).

a) *The Poincaré adjunction principle defines a morphism*

$$\pi^{-1}\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}[d_M] \to \pi^!\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}\,, \tag{$\diamond$}$$

which is an isomorphism in $\mathcal{D}^+(E;\Bbbk)$.

b) *If $\dim_\Bbbk H_c(M;\Bbbk) < +\infty$, the natural morphism*

$$I\!R\pi_!\underline{\underline{\Bbbk}}_E \to I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet\big(I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet(I\!R\pi_!\underline{\underline{\Bbbk}}_E,\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}),\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}\big)$$

is an isomorphism in $\mathcal{D}^+(E;\Bbbk)$.

Proof. (a) We must first construct the morphism. By Grothendieck-Verdier duality, we have the equivalence

$$I\!R\pi_*\,I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet\big((\pi^{-1}\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B})[d_M],\pi^!\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}\big) = I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet\big(I\!R\pi_!(\pi^{-1}\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B})[d_M],\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}\big)\,. \tag{$\dagger$}$$

The sheaf $\pi^{-1}\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}$ is the constant sheaf $\underline{\underline{\Bbbk}}_E$, and since $\pi : E \to I\!B$ is locally trivial, the complex of sheaves $I\!R\pi_!(\underline{\underline{\Bbbk}}_E)$ admits a simple description over a trivializing open subset $U \subseteq I\!B$. Indeed, in that case the open subset $\tilde{U} := \pi^{-1}(U)$ is simply $U \times M$ and since we have $\underline{\underline{\Bbbk}}_{\tilde{U}} = \underline{\underline{\Bbbk}}_U \boxtimes \underline{\underline{\Bbbk}}_M$ ([35]), we get a canonical identification:

$$I\!R\pi_!(\underline{\underline{\Bbbk}}_{\tilde{U}}) = (\mathrm{id} \boxtimes I\!Rc_{M!})(\underline{\underline{\Bbbk}}_U \boxtimes \underline{\underline{\Bbbk}}_M) = \underline{\underline{\Bbbk}}_U \otimes I\!Rc_{M!}(\underline{\underline{\Bbbk}}_M)$$

where $c_M : M \to \{\bullet\}$ is the constant map. As a consequence, the restriction of complex of sheaves, at the right-hand side of (†), to U verifies

$$\begin{aligned} I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet\big(I\!R\pi_!(\pi^{-1}\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B})[d_M],\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}\big)|_U &= I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet\big(\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B} \boxtimes I\!Rc_{M!}(\Bbbk_M)[d_M],\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}\big) \\ &= \underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B} \otimes Hom^\bullet_\Bbbk\big(I\!Rc_{M!}(\underline{\underline{\Bbbk}}_M)[d_M];\Bbbk\big)\,, \end{aligned} \tag{$\ddagger$}$$

where the reader will have noticed the that instead of $I\!RHom^\bullet$, we wrote $Hom^\bullet$ in the second line, the reason being that the functor $Hom^\bullet_\Bbbk(_;\Bbbk)$ is already exact in the category $\mathrm{Vec}(\Bbbk)$ of $\Bbbk$-vector spaces.

Now, if $\mathbf{0} \to \underline{\underline{\Bbbk}}_E \to \underline{\underline{\Omega}}^*(E,\Bbbk)$ is the resolution by Alexander-Spanier cochains (see 8.1-(P-2)), the complex of $\Bbbk$-vector spaces

$$I\!Rc_{M!}(\underline{\underline{\Bbbk}}_E) = \Gamma_c(M,\underline{\underline{\Omega}}^*_E),$$

[34] More generally, it is easily seen that the total space E of a locally trivial fibration $\pi : E \to I\!B$ with non-connected fiber manifold M, is a disjoint union of open subspaces E_i on which the restrictions $\pi_i := \pi|_{E_i}$ are locally trivial fibrations with equidimensional fibers. The hypothesis on equidimensionality in the proposition is therefore not really restrictive.

The other hypothesis concerning the orientability of fibers is more subtle. Since de word 'fiber' is generic, it means that we choose an atlas of E made of trivializations $U \times M$, where U is open in $I\!B$, and such that the transition homeomorphisms induce *oriented* isomorphisms on M. Notice that if $I\!B$ is *simply connected*, and this is the case when $I\!B := I\!BG$ since G is connected, such *fiber-oriented atlases* always exist.

[35] Recall that if $p_i : Z_1 \times Z_2 \to Z_i$ is the canonical projection, and $\mathscr{F}_i$ is a sheaf in Z_i, the sheaf $\mathscr{F}_1 \boxtimes \mathscr{F}_2$ is, by definition, $\mathscr{F}_1 \boxtimes \mathscr{F}_2 := p_1^{-1}\mathscr{F}_1 \otimes p_2^{-1}\mathscr{F}_2$.

computes the compact support cohomology $H_c(M;\Bbbk)$. On the other hand, an orientation of M is a choice of a generator $\zeta_i \in H_c^{d_M}(M_i)$ on each connected component M_i of M, and, as such, it determines a unique linear form taking the value 1 on each ζ_i, which is the familiar integration operator over M,

$$\textstyle\int_M : H_c(M;\Bbbk)[d_M] \to \Bbbk. \qquad (\textstyle\int)$$

At this point, recall that since the category $\mathcal{D}^+(\mathrm{Vec}(\Bbbk))$ is *split*, i.e. a complex is isomorphic to its cohomology, we have

$$Hom^\bullet_\Bbbk(I\!R c_{M!}(\underline{\underline{\Bbbk}}_M)[d_M];\Bbbk) = Hom^\bullet_\Bbbk(H_c(M)[d_M];\Bbbk) \qquad (\ddagger\ddagger)$$

in $\mathcal{D}^+(\mathrm{Vec}(\Bbbk))$. Therefore, $(\int)$ determines a 0-cycle of the left-hand side term in $(\ddagger\ddagger)$, hence in $(\ddagger)$ and in $(\dagger)$, and, taking global sections over $I\!B$ and 0-cohomology we get a well defined element in

$$H^0\Gamma\big(I\!B;I\!R\pi_*\,I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet\big(\pi^{-1}\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}[d_M],\pi^!\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}\big)\big) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}^+(I\!B;\Bbbk)}\big(\pi^{-1}\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}[d_M],\pi^!\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}\big),$$

which is the morphism $\pi^{-1}\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}[d_M] \to \pi^!\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}$ $(\diamond)$ announced. ([36])

To show that $(\diamond)$ is an isomorphism in the derived category $\mathcal{D}^+(E;\Bbbk)$, we need only show that the induced morphism at the germs of those complexes at each $x \in E$ are quasi-isomorphisms, and, for convenience, to restrict to the open subsets $\tilde{U}$, as they cover E. In that case, if $x \in \tilde{U} := U \times M$, we can write $x = (b,m) \in U \times M$, and

$$\Big(\big(\pi^{-1}\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}[d_M] \to \pi^!\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}\big)_x\Big) \;\simeq\; \Big((\underline{\underline{\Bbbk}}_M)_m[d_M] \to (c_M^!\Bbbk)_m = \underline{\underline{\mathcal{D}}}^\bullet_M(\Bbbk)_m\Big) \qquad (*)$$

where $\underline{\underline{\mathcal{D}}}^\bullet_M(\Bbbk)$ is the well known *dualizing complex* on M, i.e. the complex of sheaves defined by the complex of presheaf

$$\underline{\mathcal{D}}^\bullet_M : V \mapsto Hom^\bullet_\Bbbk(I\!R c_{V!}\underline{\underline{\Bbbk}}_V;\Bbbk) = Hom^\bullet_\Bbbk(H_c(V);\Bbbk).$$

Likewise, the morphism at the right-hand side of $(*)$ is induced by the morphisms of presheaves $\underline{\underline{\Bbbk}}_M \to \underline{\underline{\mathcal{D}}}^\bullet_M(\Bbbk)[-d_M]$:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(V;\underline{\underline{\Bbbk}}) & \longrightarrow & \Gamma(V;\underline{\underline{\mathcal{D}}}^\bullet_M(\Bbbk))[-d_M] \\ \| & & \| \\ \Bbbk & \longrightarrow & Hom^\bullet_\Bbbk(H_c(V;\Bbbk);\Bbbk)[-d_M] \end{array} \qquad (**)$$

which assigns to 1 the integration $\int_V$ relative to the orientation of V, induced by the orientation of M.

Now, as M is a manifold, a point $m \in M$ has a basis of open neighborhoods V homeomorphic to $\mathbb{R}^{d_M}$, in which case $H_c(V;\Bbbk)$ is concentrated in degree d_M, with $H_c^{d_M}(V;\Bbbk) = \Bbbk$. As a consequence, the second line in $(**)$ is an isomorphism for such V's, which implies that the morphisms in $(*)$ are quasi-isomorphisms for all $x \in E$, ending the proof of (a).

(b) A complex of sheaves of $\Bbbk$ vector spaces $\mathscr{F}^* := (\mathscr{F}^*,d_*)$ on a topological space $I\!B$ is said to be *cohomologically bounded* if its cohomology sheaves $\mathcal{H}^i(\mathscr{F}_*,d_*) = 0$ vanish for $|i|$ big. It is said to be *perfect* if its cohomology

[36] It is worth noting that, following this procedure, we have sheafified le left Poincaré adjunction on the fibers, which was made possible by having a coherent choice of orientations for the fibers of π. In the whole, this is the underlying sense of what we called in (a) the Poincaré adjunction principle.

8. Changing the coefficients field

sheaves $\mathcal{H}^i(\mathscr{F}_*,d_*)$ are locally trivial sheaves of finite rank, i.e. if for all $i\in\mathbb{Z}$, the space $I\!B$ can be covered by open subsets V such that $\mathcal{H}^i(\mathscr{F}_*,d_*)|_V\sim\underline{\underline{\Bbbk}}_V^{n(V)}$, for some $n(V)\in\mathbb{N}$.

Lemma. If $\mathscr{F}^*$ is cohomologically bounded and perfect, the natural morphism

$$\iota:\mathscr{F}^*\to I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet\left(I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet(\mathscr{F}^*,\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}),\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}\right)$$

is an isomorphism in $\mathcal{D}^+(I\!B;\Bbbk)$.

First, notice that since $\underline{\underline{Hom}}(\Bbbk_V^n,\underline{\underline{\Bbbk}}_V)\sim\underline{\underline{Hom}}(\Bbbk_V,\underline{\underline{\Bbbk}}_V)^n\sim\underline{\underline{\Bbbk}}_V^n$, we immediately see that if $\mathcal{L}$ is a locally trivial sheaf of finite local ranks, the functor $\underline{\underline{Hom}}(\mathcal{L},_)$ is exact in the category of sheaves. As a consequence, we have

$$I\!R\underline{\underline{Hom}}(\mathcal{L},\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B})=\underline{\underline{Hom}}(\mathcal{L},\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B}),$$

and again a locally trivial sheaf of finite ranks, so that

$$\iota:\mathcal{L}\to I\!R\underline{\underline{Hom}}(I\!R\underline{\underline{Hom}}(\mathcal{L},\Bbbk_{I\!B}),\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B})=\underline{\underline{Hom}}(\underline{\underline{Hom}}(\mathcal{L},\Bbbk_{I\!B}),\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B})\qquad(*)$$

is an isomorphism in $\mathcal{D}^+(I\!B;\Bbbk)$.

Next, if $0\to\mathscr{F}^0\to\mathscr{F}^1\to\cdots\to\mathscr{F}^\ell\to 0$ is a perfect complex of sheaves, the truncated complex $\tau_{<\ell}(\mathscr{F}^*)$ ([37]) is still perfect and one has an small exact sequence of perfect complexes of sheaves

$$0\to\tau_{<\ell}(\mathscr{F}^*)\to\mathscr{F}^*\to\mathcal{H}^\ell(\mathscr{F})\to 0,$$

giving rise in $\mathcal{D}^+(I\!B,\Bbbk)$ to the morphism of exact triangles

$$\begin{array}{ccccccc}\tau_{<\ell}(\mathscr{F}^*)&\longrightarrow&\mathscr{F}^*&\longrightarrow&\mathcal{H}^\ell(\mathscr{F}^*)&\longrightarrow\\ \downarrow\iota&&\downarrow\iota&&\downarrow\iota&\\ (\tau_{<\ell}(\mathscr{F}^*))^{\vee\vee}&\longrightarrow&(\mathscr{F}^*)^{\vee\vee}&\longrightarrow&(\mathcal{H}^\ell(\mathscr{F}^*))^{\vee\vee}&\longrightarrow\end{array}\qquad(**)$$

where $(_)^{\vee\vee}:=I\!R\underline{\underline{Hom}}(I\!R\underline{\underline{Hom}}(_,\Bbbk_{I\!B}),\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!B})$.

In $(**)$ the right-hand vertical arrow is an isomorphism after $(*)$, hence we can conclude that the central arrow is an isomorphism if and only if the left-hand arrow is so. But since the truncated complex $\tau_{<\ell}(\mathscr{F}^*)$ has less than ℓ terms, we can assume by induction on this number, that this is in fact the case. Therefore, the central arrow in $(**)$ is also an isomorphism in $\mathcal{D}^+(I\!B;\Bbbk)$.

To finish the proof of the lemma, we need only recall that in $\mathcal{D}^+(I\!B;\Bbbk)$, a cohomologically bounded complex is always isomorphic, after a shift of indices, to a bounded complex as in the previous case. ⊟

The proof of (b) is now reduced to proving that the complex $I\!R\pi_!\underline{\underline{\Bbbk}}_E$ is cohomologically bounded and perfect.

This is already the case over a trivializing open subset $U\subseteq I\!B$. Indeed, we already explained in the poof of (*a*) that one has in $\mathcal{D}^+(U;\Bbbk)$

$$I\!R\pi_!\underline{\underline{\Bbbk}}_E|_U\simeq\underline{\underline{\Bbbk}}_U\otimes H_c(M;\Bbbk),$$

and immediately we have the perfection property as this is a local property. It also shows that the sheaves $\mathcal{H}^i(I\!R\pi_!\underline{\underline{\Bbbk}}_E)$ vanish for $i\notin[\![0,d_M]\!]$, which also

[37] This is the subcomplex $\mathscr{G}^*\subseteq\mathscr{F}^*$, such that $\mathscr{G}^i=\mathscr{F}^i$ for $i<\ell$ and $\mathscr{G}^\ell:=\mathrm{im}(d_{\ell-1})$. Notice that, by construction, $\mathcal{H}^i(\mathscr{G}^*)=\mathcal{H}^i(\mathscr{F}^*)$ if $i<\ell$ and $\mathcal{H}^i(\mathscr{G}^*)=0$ otherwise.

results from a local analysis. But, it is because bounds in $[\![0,d_M]\!]$ are independent of the trivializing open subset U, that at the end explains that $I\!R\pi_!\underline{\underline{\Bbbk}}_E$ is *globally* cohomologically bounded and that we can apply the lemma and finish the proposition's proof. □

Now we have all the ingredients necessary to extend the validity of the equivariant Poincaré duality to any field of coefficients $\Bbbk$.

8.2. Equivariant Poincaré Duality on arbitrary fields

We can now state and prove the exact analog of theorem 4.5.1. Let,

$$H_G := H(I\!BG;\Bbbk).$$

8.2.1. Theorem. *Let G be a compact connected Lie group, and let M be an oriented G-manifold of dimension d_M. Then,*

a) *The sheafification of the left Poincaré adjunction (see 8.1.1)*

$$\underline{\underline{I\!D}}_{G,M} : \underline{\underline{\Omega}}_G(M)[d_M] \longrightarrow I\!R\underline{\underline{Hom}}^{\bullet}_{\underline{\underline{\Omega}}_G}\left(\underline{\underline{\Omega}}_{G,c}(M),\underline{\underline{\Omega}}_G\right)$$

is an isomorphism in $\mathcal{D}^+(I\!BG;\Bbbk)$.

b) *The morphism $\underline{\underline{I\!D}}_{G,M}$ induces* the Poincaré morphism in G-equivariant cohomology with coefficients in $\Bbbk$*:*

$$\mathscr{D}_{G,M,\Bbbk} : H_G(M,\Bbbk)[d_M] \longrightarrow Hom^{\bullet}_{H_G}\left(H_{G,c}(M,\Bbbk),H_G\right).$$

If $Extgr^i_{H_G}(H_{G,c}(M;\Bbbk)) = 0$, for all $i > 0$, for example if $H_{G,c}(M;\Bbbk)$ is a free H_G-module, then $\mathscr{D}_{G,M,\Bbbk}$ is an isomorphism.

c) *Moreover, if M is of finite type, the sheafification of the right Poincaré adjunction (see 8.1.1)*

$$\underline{\underline{I\!D}}'_{G,M} : \underline{\underline{\Omega}}_{G,c}(M)[d_M] \to I\!R\underline{\underline{Hom}}^{\bullet}_{\underline{\underline{\Omega}}_G}\left(\underline{\underline{\Omega}}_G(M),\underline{\underline{\Omega}}_G\right)$$

is a isomorphism in $\mathcal{D}^+(I\!BG;\Bbbk)$ and the analog to (b) *is also verified.*

Proof. Statement (a) and the first part of (c) are immediate applications of proposition 8.1.2 to the map $\pi : M_G \to I\!BG$ after 8.1-(P-3) and the comments at the end of section 8.1.1. The first part of (b) concerning $\mathscr{D}_{G,M,\Bbbk}$, and its analog in (c) for $\mathscr{D}'_{G,M,\Bbbk}$, are then obvious.

Second part of (b). Since $I\!BG$ is simply connected, the sheaves in the complex $\underline{\underline{\Omega}}_G(M) := \pi_!\underline{\underline{\Omega}}(M_G;\Bbbk)$, that we have shown to be local systems (*cf.* proof of prop. 8.1.2), are isomorphic, as $\underline{\underline{\Omega}}_G$-gm, to $\underline{\underline{\Omega}}_G \otimes \Omega_c(M;\Bbbk)$. We therefore have:

$$I\!R\Gamma\left(I\!BG;I\!R\underline{\underline{Hom}}_{\underline{\underline{\Omega}}_G}\left(\underline{\underline{\Omega}}_{G,c}(M),_\right)\right) = I\!R\mathrm{Hom}_{\Omega(I\!BG;\Bbbk)}\left(\Omega(M_G;\Bbbk),I\!R\Gamma(I\!BG,_)\right),$$

in $\mathcal{D}^+(I\!BG;\Bbbk)$, and taking derived global sections $I\!R\Gamma(I\!BG;_)$ on the isomorphism $\underline{\underline{I\!D}}_{G,M}$ (after (a)), we get the quasi-morphism of complexes

$$I\!R\Gamma(I\!BG;\underline{\underline{I\!D}}_{G,M}) : \Omega(M_G;\Bbbk) \to I\!R\mathrm{Hom}_{\Omega(I\!BG;\Bbbk)}\left(\Omega_{cv}(M_G;\Bbbk),\Omega(I\!BG,\Bbbk)\right), \quad (\ddagger)$$

which is another version of the Poincaré left adjunction.

8. Changing the coefficients field

Here, $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\Omega(\mathbb{B}G;\Bbbk)}(_,\Omega(\mathbb{B}G;\Bbbk))$ is the derived functor defined in 4.2.7, and because $\Omega_{cv}(M_G;\Bbbk)\sim\Omega(\mathbb{B}G;\Bbbk)\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(M;\Bbbk)$ as $\Omega(\mathbb{B}G;\Bbbk)$-gm, we are lead to a point where we can apply the same argument of the proof of 4.5.1-(b). □

8.2.2. Remarks

a) As already recalled in 4.5.2, Allday-Franz-Puppe improved the second part of the statement (b), showing in [AFP$_1$] that for M of finite type, the morphism $\mathscr{D}_{G,M,\Bbbk}$ is an isomorphism if and only if both $H_G(M;\Bbbk)$ and $H_{G,\mathrm{c}}(M;\Bbbk)$ are reflexive H_G-modules.

b) The Poincaré adjunction in the proof of 8.2.1-(b):

$$\Omega(M_G;\Bbbk)\to\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\Omega(\mathbb{B}G;\Bbbk)}\big(\Omega_{cv}(M_G;\Bbbk),\Omega(\mathbb{B}G,\Bbbk)\big)\qquad(\ddagger)$$

is better understood if we replace

$$\begin{cases}\Omega(M_G;\Bbbk)\leftrightarrow\Omega(\mathbb{B}G;\Bbbk)\otimes\Omega(M;\Bbbk)\\ \Omega_{cv}(M_G;\Bbbk)\leftrightarrow\Omega(\mathbb{B}G;\Bbbk)\otimes\Omega_{\mathrm{c}}(M;\Bbbk)\end{cases}$$

as it becomes simply:

$$\mathrm{id}\otimes\mathbb{D}_M:\Omega(\mathbb{B}G;\Bbbk)\otimes\Omega(M;\Bbbk)\to\Omega(\mathbb{B}G;\Bbbk)\otimes\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Omega_{\mathrm{c}}(M;\Bbbk),\Bbbk),$$

where $\mathbb{D}_M$ is the usual nonequivariant left Poincaré adjunction for M (1.3).

8.3. Equivariant Gysin morphisms on arbitrary fields

Now that we have proved Poincaré duality over any field $\Bbbk$, we can mimic the method in de Rham (equivariant or not) cohomology to introduce Gysin morphisms and introduce these functors over any field $\Bbbk$.

8.3.1 In 8.1-(P-2iii), we explained how an equivariant map $f:X\to Y$ between G-spaces defines a morphism in $\mathcal{D}^+(Y_G;\Bbbk)$

$$f^{\#}:\underline{\underline{\Omega}}(Y_G;\Bbbk)\to f_*\underline{\underline{\Omega}}(X_G;\Bbbk)\qquad(\diamond)$$

inducing the usual pull-back $f^*:H_G(Y,\Bbbk)\to H_G(X;\Bbbk)$. Now, if we apply the functor $\pi_{Y,*}$ to $(\diamond)$, we get a morphism in $\mathcal{D}^+(\mathbb{B}G;\Bbbk)$

$$\pi_{Y,*}(f^{\#}):\pi_{Y,*}\underline{\underline{\Omega}}(Y_G;\Bbbk)\to\pi_{Y,*}f_*\underline{\underline{\Omega}}(X_G;\Bbbk)=\pi_{X,*}\underline{\underline{\Omega}}(X_G;\Bbbk)$$

where one recognizes the complexes $\underline{\underline{\Omega}}_G(X)$ and $\underline{\underline{\Omega}}_G(Y)$, and we can better write:

$$\pi_{Y,*}(f^{\#}):\underline{\underline{\Omega}}_G(Y)\to\underline{\underline{\Omega}}_G(X)\qquad(\dagger)$$

If f is, in addition, a proper map, we have $f_*=f_!$ and the same ideas applying $\pi_{Y,!}$ lead to morphism in $\mathcal{D}^+(Y_G;\Bbbk)$

$$\pi_{Y,!}(f^{\#}):\underline{\underline{\Omega}}_{G,\mathrm{c}}(Y)\to\underline{\underline{\Omega}}_{G,\mathrm{c}}(X)\qquad(\dagger')$$

inducing the usual pull-back $f^*:H_{G,\mathrm{c}}(Y,\Bbbk)\to H_{G,\mathrm{c}}(X;\Bbbk)$.

In the sequel, we assume that X and Y are manifolds respectively denoted by M and N, of dimensions d_M and d_N.

8.3.2. Gysin Morphism for General Maps. We apply the basic duality functor $(_)^\vee := I\!R\underline{\underline{Hom}}^\bullet(_,\underline{\underline{\Bbbk}}_{I\!BG})$ to (†), and consider the diagram in $\mathcal{D}^+(I\!BG;\Bbbk)$

$$\begin{array}{ccc} \underline{\underline{\Omega}}_G(M)^\vee & \xrightarrow{(\pi_{Y,*}(f^\#))^\vee} & \underline{\underline{\Omega}}_G(N)^\vee \\ {\scriptstyle \underline{\underline{I\!D}}'_{G,M}}\uparrow & & \simeq\uparrow{\scriptstyle \underline{\underline{I\!D}}'_{G,N}} \\ \underline{\underline{\Omega}}_{G,c}(M)[d_M] & \xrightarrow{f_*} & \underline{\underline{\Omega}}_{G,c}(N)[d_N] \end{array}$$

where the right-hand vertical arrow is an isomorphism when N is of finite type, after 8.2.1-(c). Following the same principle as in 1.10.2 and 5.1.3, we can proceed to defining *the Gysin morphism for a general map in* $\mathcal{D}^+(I\!BG;\Bbbk)$ as the only morphism f_* closing the diagram. The cohomology of global sections then gives *the Gysin morphism for a general map in equivariant cohomology over* $\Bbbk$:

$$f_* : H_{G,c}(M,\Bbbk)[d_M] \to H_{G,c}(N,\Bbbk)[d_N].$$

The case where N is not of finite type is handled as in *loc.cit.* by taking limits over filtrant covers of finite type open subsets of N.

8.3.3. Gysin Morphism for Proper Maps. The underlying idea is the same as in the previous case, but we now apply the basic duality functor $(_)^\vee$ to $(\dagger')$. We then obtain the diagram

$$\begin{array}{ccc} \underline{\underline{\Omega}}_{G,c}(M)^\vee & \xrightarrow{(\pi_{Y,!}(f^\#))^\vee} & \underline{\underline{\Omega}}_{G,c}(N)^\vee \\ {\scriptstyle \underline{\underline{I\!D}}_{G,M}}\uparrow\simeq & & \simeq\uparrow{\scriptstyle \underline{\underline{I\!D}}_{G,N}} \\ \underline{\underline{\Omega}}_G(M)[d_M] & \xrightarrow{f_!} & \underline{\underline{\Omega}}_G(N)[d_N] \end{array}$$

where both vertical arrows are isomorphisms in $\mathcal{D}^+(I\!BG;\Bbbk)$, after 8.2.1-(a). *The Gysin morphism for proper maps in* $\mathcal{D}^+(I\!BG;\Bbbk)$ is then defined, as in 1.10.2 and 5.1.3, as the only morphism $f_!$ that closes the diagram. The cohomology of global sections then gives *the Gysin morphism for proper maps in equivariant cohomology over* $\Bbbk$:

$$f_! : H_G(M,\Bbbk)[d_M] \to H_G(N,\Bbbk)[d_N].$$

9. Appendix

We explain the following fact mentioned in footnote ([24]).

Proposition. Let $A := A^0 \oplus A^1 \oplus \cdots$ be a graded ring. Denote by S the multiplicative system generated by the nonzero graded elements of A. The ring $L := S^{-1}A$ is a graded A-module such that, for any A-graded module N, the tensor product $L \otimes_A N$ is flat and injective in the category of graded A-modules.

Proof.

• **$L \otimes N$ is flat.** For any graded ideal I of A, one has the long exact sequence:

$$\mathbf{0} \to Tor_1^A(L, A/I) \longrightarrow L \otimes I \longrightarrow L \longrightarrow L \otimes (A/I) \to \mathbf{0} \qquad (*)$$

where A/I is a torsion graded A-module. The annihilators of the elements of A/I are graded ideals, generated, as such, by invertible elements of L. Therefore

$$Tor_1^A(L, A/I) = \mathbf{0}, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

and we have from $(*)$ the equality $L \otimes I = L$ from which, we deduce

$$L \otimes I \otimes N = L \otimes N$$

for any A-graded module N. The *ideal criterion of flatness* applies, and the A-graded module $L \otimes N$ is flat.

• **$L \otimes N$ is injective.** Let $\alpha : M_1 \subseteq M_2$ be a graded inclusion of graded A-modules. We must show that any morphism $\lambda : M_1 \to L \otimes N$ of graded A-modules can be extended to M_2.

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow[\subseteq]{\alpha} & M_2 \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & \swarrow_{\lambda'} & \\ L \otimes N & & \end{array}$$

In the contrary, Zorn's lemma will led us to assume that $M_2 \supsetneqq M_1$ and that λ may not be further extended. In particular, $A \cdot m \cap M_1 \neq \mathbf{0}$ for any homogeneous $m \in M_2 \setminus M_1$, hence the quotient M_2/M_1 is a torsion module. One then has

$$L \otimes M_1 = L \otimes M_2\,,$$

and a contradiction arises as a consequence of the diagram

$$\begin{array}{ccc} Homgr_A(M_2, L \otimes N) & \longrightarrow & Homgr_A(M_1, L \otimes N) \\ {\scriptstyle\cong}\downarrow & & {\scriptstyle\cong}\downarrow \\ Homgr_L(L \otimes M_2, L \otimes N) & \xrightarrow[(=)]{} & Homgr_L(L \otimes M_1, L \otimes N) \end{array}$$

where the horizontal arrows are induced by the inclusion $M_1 \subseteq M_2$ and the vertical arrows are the well-known canonical natural isomorphisms. □

88

Bibliographie

[AP] C. Allday, V. Puppe. *"Cohomological methods in transformation groups"*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 32. Cambridge University Press, Cambridge, (1993).

[AFP$_1$] C. Allday, M. Franz, V. Puppe. Equivariant cohomology, syzygies and orbit structure. Trans. Amer. Math. Soc. 366, no. 12, 6567–6589 (2014).

[AFP$_2$] C. Allday, M. Franz, V. Puppe. Equivariant Poincaré-Alexander-Lefschetz duality and the Cohen-Macaulay property. Algebr. Geom. Topol. 14, no. 3, 1339–1375 (2014).

[A] M. André. Cohomologie des algèbres différentielles où opère une algèbre de Lie. Ph.D. Thesis 1962, advisor Claude C. Chevalley. Tôhoku Math. J. (2) 14 (1962), no. 3, 263–311.
http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.tmj/1178244116.

[AB] M.F. Atiyah, R. Bott. The moment map and equivariant cohomology. Topology 23, no. 1, 1–28 (1984).

[AS] M.F. Atiyah, G.B. Segal. The index of elliptic operators II. Ann. of Math. (2) 87, 531–545 (1968).

[BGV] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne. Heat kernels and Dirac operators. Corrected reprint of the 1992 original. Grundlehren Text Editions. Springer-Verlag, (2004).

[BV$_1$] N. Berline, M. Vergne. Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 295, no. 9, 539–541 (1982).
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62356694/f77.

[BV$_2$] N. Berline, M. Vergne. Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes. Duke Math. J. 50, no. 2, 539–549, (1983).

[BV$_3$] N. Berline, M. Vergne. Fourier transforms of orbits of the coadjoint representation. Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982), 53–67, Progr. Math., 40, Birkhäuser, (1983).

[B$_1$] A. Borel. Nouvelle démonstration d'un théorème de P. A. Smith. Comment. Math. Helv. 29, 27–39 (1955).

[B$_2$] A. Borel. *"Seminar on transformation groups"*. With contributions by G. Bredon, E. E. Floyd, D. Montgomery, R. Palais. Annals of Mathematics Studies, No. 46. Princeton University Press, Princeton, N.J. (1960).

[B$_3$] A. Borel. Sur La Cohomologie des Espaces Fibres Principaux et des Espaces Homogenes de Groupes de Lie Compacts Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 57, No. 1, pp. 115-207 (1953).

[Bo] R. Bott. Vector fields and characteristic numbers. Michigan Math. J. 14 231–244 (1967).

[BT] R. Bott, L.W. Tu. *"Differential forms in algebraic topology"*. Graduate Texts in Mathematics, 82. Springer-Verlag, New York-Berlin (1982).

[Bk] N. Bourbaki. *"Algebra I. Chapters 1–3"*. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Br] J.-L. Brylinski. Equivariant intersection cohomology. Kazhdan-Lusztig theory and related topics (Chicago, IL, 1989), 5–32, Contemp. Math., 139, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[Ca$_1$] H. Cartan. Notions d'algèbre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie. Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles 1950, pp. 15–27 (1951)

[Ca_2] H. Cartan. La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal. Colloque de topologie, Bruxelles 1950, pp. 15–27 (1951)

[Co] P.E. Conner. On the action of the circle group. Michigan Math. J. 4 1957 241–247

[Dx] J. Dixmier. *"Enveloping algebras"*. Revised reprint of the 1977 translation. Graduate Studies in Mathematics, 11. AMS, 1996.

[DH] J.J. Duistermaat, G.J. Heckman. On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space. Invent. Math. 69, no. 2, 259–268, (1982). Addendum to: "On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space". Invent. Math. 72, no. 1, 153–158, (1983).

[FP] M. Franz, V. Puppe. Freeness of equivariant cohomology and mutants of compactified representations. pp. 87-98 in: Megumi Harada et al. (eds.), Toric Topology (Osaka, 2006), Contemp. Math. 460, AMS, Providence (2008)

[F_1] M. Franz. Big polygon spaces. Int. Math. Res. Not. 2015, 13379-13405 (2015).

[F_2] M. Franz. Syzygies in equivariant cohomology for non-abelian Lie groups. pp. 325-360 in: F. Callegaro et al. (eds.), Configuration spaces (Cortona, 2014), Springer INdAM Ser. 14, Springer, Cham (2016)

[FF] R. Fossum, H.-B. Foxby. The category of graded modules. Math. Scand. 35, 288–300 (1974).

[Go] R. Godement. *"Topologie algébrique et théorie des faisceaux"*. Troisième édition revue et corrigée. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

[GKM] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson. Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem. Invent. Math. 131 (1998), no. 1, 25–83.

[Gt] D.H. Gottlieb. Fibre bundles and the Euler characteristic. J. Differential Geometry 10, 39–48, (1975).

[Gr] A. Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku Math. J. (2) 9 1957 119–221.

[GS] V.W. Guillemin, S. Sternberg. *"Supersymmetry and equivariant de Rham theory"*. With an appendix containing two reprints by Henri Cartan. Mathematics Past and Present. Springer-Verlag, Berlin, (1999).

[H] W. Hsiang. *"Cohomology theory of topological transformation groups"*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 85 (1975)

[J] N. Jacobson. *"Basic algebra. II"*. Second edition. W. H. Freeman and Company, New York, 1989

[Jo] R. Joshua. Vanishing of odd-dimensional intersection cohomology. Math. Z. 195 (1987), no. 2, 239–253 (1987).

[KS_1] M. Kashiwara, P. Schapira. *"Sheaves on manifolds"*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 292. Springer-Verlag, Berlin, (1994).

[KS_2] M. Kashiwara, P. Schapira. *"Categories and sheaves"*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 332. Springer-Verlag, Berlin, (2006).

[L] J. Leray. Sur l'homologie des groupes de Lie, des espaces homogènes et des espaces fibrés principaux. (French) Colloque de topologie (espace fibrés), Bruxelles, 101–115 (1950).

[Q] D. Quillen. The spectrum of an equivariant cohomology ring. I, II. Ann. of Math. (2) 94 (1971), 549–572; ibid. (2) 94 (1971), 573–602.

[S] G. Segal. Equivariant K-theory. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 34, 129–151 (1968).

[W] E. Witten Supersymmetry and Morse theory. J. Differential Geom. 17 (1982), no. 4, 661–692 (1983).

Index

adjoint
  left equivariant map, 52
  maps, 1
  pair, 5, 15
  right equivariant map, 52
Alxander-Spanier cochains, 77
annihilator
  of an element, 72
  of module, 72
antiderivation, 33
ascending chain property, 6
augmentation, 45

bidual embedding, 3, 5, 9
bilinear map, 1
Borel construction, 23, 37, 68
bounded below (above), 43
bounded cohomologically, 81

Cartan
  complex, 30
  differential, 30
cartesian diagram, 16, 17, 39
category
  of (oriented) manifolds (with proper maps), 3
  of differential graded $\mathfrak{g}$-complexes, 28
  of differential graded modules over Ω_G, 43
  of differential graded vector spaces, 1
  of G-manifolds, 4
  of $\mathfrak{g}$-modules, 27
  of graded vector spaces, 1
  of H-graded modules, 41
Chern-Weil homomorphism, 69
Chevalley
  restriction theorem, 69
  Theorem, 43
classifying space, 37
closed embedding, ii, 16, 18, 39, 64, 75
coboundary, 1
cohomologically bounded, 81
column $\star$-filtration, 46
completely reducible module, 27
complex
  double, 45
  simple, 45
cone of a morphism of dgm's, 50
constant map, 15
contraction, 27, 33

de Rham
  cohomology, 3
    with compact support, 3
  complex, 3
    with compact supports, 3
derivation, 27, 33
derived
  category, 18
  duality functor, 47
  functor (left and right), 44
diagonal action, 37
diagonal embedding, 20
differential, 1, 43
  graded $\mathfrak{g}$-complex, 27
  graded module, 43
  graded vector space, 1
double (cochain) complex, 45
  of the first quadrant, 46
  of the third quadrant, 47
dual
  of a complex, 3
  vector space, 1
duality functor, 3, 47

embedding
  bidual, 3, 5, 9
  closed, ii, 16, 18, 39, 64, 75
  diagonal, 20
  open, 15, 64
equivariant
  Cartan complex, 30
  cogolomogy, 33
  cohomology of a $\mathfrak{g}$-complex, 30
  cohomology with support, 39
  differential form, 33
  Gysin functor, 58
  Gysin functor for proper maps, 59
  Gysin morphism, 58
  Gysin morphism of a proper map, 59
  integration, 51
  left adjoint map, 52
  map, 4
  projection formula
    for proper maps, 59
  right adjoint map, 52
Euler
  class of the pair (N,M), 67
extension by zero, 16
$Ext^{i,\bullet}_{\Omega_G}(_,_)$, 47

fibration, 16
filtrant cover, 12

filtration
column, 46
line, 46
regular, 31, 46, 53
finite
(de Rham) type, 6
de Rham type, 53, 56, 71, 83
length resolution, 48
orbit type, 74
type map, 58
first quadrant double complex, 46
fixed point
theorem, 73
forgetful functor, 44
free Ω_G-graded module, 41, 48
free Ω_G-graded module, 50
functor
duality-, 47
forgetfull, 44
i'th extension, 47

$\mathfrak{g}$-complex, 27
morphism, 28
G-contraction, 33
G-derivation, 33
$\mathfrak{g}$-invariant, 27
G-manifold, G-map, 4
$\mathfrak{g}$-module, 26
$\mathfrak{g}$-module morphism, 27
G-split complex, 32
$\mathfrak{g}$-split complex, 28
$\mathfrak{g}$-tivial representation, 26
good cover, 6, 36, 68
graded
homomorphism, 41
algebra, 41
homomorphism, 1
space, homomorphism, 1
graph map, 20
Gysin
exact long sequence, 19
functor, 10, 11
for proper maps, 15
morphism, 5, 10, 18
for proper maps, 6

h, cohomology as graded space, 3
Ω_G-basic duality, 44
Ω_G-dgm, 43
Ω_G-graded module, Ω_G-gm, 41
Hilbert's Syzygy Theorem, 43

index of an equivariant form, 53
injective
Ω_G-graded module, 41
resolution of finite length, 48
integration, 15
integration along fibers, 16
isomorphism modulo torsion, 75
isotropie group, 73
i'th extension functor, 47

Lefschetz
equivariant class, number of an equivariant map, 65
class, number of a map, 20
fixed point formula, 20
left adjoint, 5
Leray cover, 6
Lie
algebra, 26
group, 6
line $\natural$-filtration, 46
localization
functor, 71
localized
Cartan complex, 71
equivariant cohomology, 71
locally trivial fibration, 16

manifold, 3
map
equivariant, 4
of manifolds, 3
morphism
augmentation, 45
Gysin, 10, 18
of complexes, 1
of differential graded modules, 43
of $\mathfrak{g}$-complexes, 28
of graded vector spaces, 1
of H-graded modules, 41

nondegenerate pairing, 1, 4, 52, 55
nontorsion module, 72

open embedding, 15, 64
orbit type, 74

pairing, 1
perfect complex, 81
perfect pairing, 1, 4, 55, 71
perfect pariring, 6
Poincaré
morphism, 4
in G-equivariant cohomology, 53
in G-equivariant cohomology over $\Bbbk$, 83
in T-equivariant cohomology, 56

Poincaré pairing
in cohomology, 4, 6
in equivariant cohomology, 52
projection formula, 11, 58
for proper maps, 15
projective
Ω_G-graded module, 41, 48
Ω_G-graded module, 50
proper map, 6
pullback, 11, 12, 14
pushforward, 10, 13, 16, 19, 34

quadrant (first,third), 46, 47
quasi
-injection, 1, 9
-isomorphism, 1
-surjection, 1

reducible module, 27
reflexive module, 55
regular filtration, 31, 46, 53
right adjoint, 5
map, 9

semisimple module, 27
Serre spectral sequence, 38
shift functor, 2
simple
complex, 45
module, 27
slice theorem, 73
spectral sequence, 38
Syzygy, 43

Theorem
Chevalley, 43
Hilbert, 43
Thom
class of a pair (N,M), 67
class of a vector bundle, 16
isomorphism, 17
$Tor^{\bullet}_{\Omega_G}(_,_)$, 47
torsion element, module, 72
torsion-free module, 54, 72
trivial representation, 26
tubular neighborhood, 65, 67

universal fiber bundle, 37, 68

weight, 69
Weyl group, 68

zero section, 16, 64

Sur le Topos infinitésimal p-adique d'un schéma lisse II

Alberto Arabia & Zoghman Mebkhout*

Résumé. Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif noethérien et $\boldsymbol{I}$ un idéal de $\boldsymbol{R}$. Nous avons construit dans l'article précédent le site infinitésimal †-adique d'un schéma lisse sur $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$ dans le but de définir sa cohomologie de de Rham †-adique. Les objets du site sont les schémas †-adiques définis par Meredith. Dans cet article nous démontrons le critère d'affinité : un schéma †-adique est affine si et seulement si sa réduction est un schéma affine. Le critère d'affinité produit beaucoup d'objets et de morphismes du site infinitésimal et lui donne beaucoup de souplesse. Nous utilisons le critère d'affinité pour démontrer l'existence du produit fibré dans la catégorie des schémas †-adiques. Chemin faisant nous avons été conduits à revoir les fondements de la théorie des schéma †-adiques pour les débarrasser des restrictions sur le couple $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ imposées dans l'article de Meredith.

Sommaire

§ **0. Introduction** **2**
§ **1. Préliminaires** **5**
1.1. Notations 5
1.2. Complétion †-adique 6
1.3. Rappels sur les algèbres faiblement complètes 7
1.4. Localisation †-adique dans le cas f.c.t.f. 8
1.5. Algèbres f.c.t.f. et complétion d'algèbres de t.f. 9
§ **2. Recouvrements et recollements †-adiques** **10**
2.1. Préliminaire technique 10
2.2. Exactitude des suites courtes de Mayer-Vietoris 11
2.3. Cas particulier de l'algèbre des polynômes 16
2.4. Un théorème pour le recollement des algèbres f.c.t.f. 18
2.5. Un théorème pour le recollement de modules sur une algèbre f.c.t.f. 22
§ **3. Schémas †-adiques** **25**
3.1. Cohomologie de Čech 25
3.2. Le foncteur $(_)^{\sim}:\mathbf{Mod}(\boldsymbol{A}^{\dagger})\rightsquigarrow\mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}})$ 28
3.3. Schémas †-adiques affines 31
3.4. Catégorie des schémas †-adiques 34
§ **4. Modules cohérents sur un schéma †-adique** **35**
4.1. Modules cohérents sur un espace annelé 35
4.2. Modules cohérents sur un schéma †-adique affine 36
§ **5. Critère d'affinité des schémas †-adiques** **38**
§ **6. Produits fibrés dans la catégorie des schémas †-adiques** **41**
6.1. Généralités sur le produit fibré 41
6.2. Produits fibrés de schémas †-adiques 44
§ **7. Schémas †-adiques plats, schémas †-adiques lisses** **47**
7.1. Algèbres †-adiques lisses 47
7.2. Schémas †-adiques plats, schémas †-adiques lisses 48
§ **8. Faisceau d'automorphisme †-adiques** **49**
8.1. Faisceau de morphismes †-adiques 49
§ **9. Références bibliographiques** **50**

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 9^{e} étage, bureau 9D11, 75013 Paris.
Adresses électroniques : arabia@math.jussieu.fr, mebkhout@math.jussieu.fr

§0. Introduction

Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif noethérien et $\boldsymbol{I}$ un idéal dans $\boldsymbol{R}$. Si $\boldsymbol{X}$ est un schéma lisse sur $\boldsymbol{R}_1 := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$ nous avons construit dans l'article précédent ([A-M]) le site infinitésimal †-adique $\boldsymbol{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ afin de définir la cohomologie de de Rham †-adique de $\boldsymbol{X}$. Les objets du site sont des schémas †-adiques définis par Meredith ([Mr]). Dans cet article nous démontrons le «*critère d'affinité*»: *Un schéma †-adique est affine si et seulement si sa réduction est un schéma affine.* Le critère d'affinité produit beaucoup d'objets et de morphismes du site infinitésimal et lui donne beaucoup de souplesse. Nous utilisons le critère d'affinité pour démontrer l'existence du produit fibré dans la catégorie des schémas †-adiques: *La catégorie* $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\text{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *des schéma †-adiques possède des produits fibrés.* L'existence du produit fibré est nécessaire pour étudier les opérations cohomologiques pour la cohomologie de de Rham †-adique.

Chemin faisant pour démontrer ces théorèmes nous avons été conduits à revoir les fondements de la théorie des schémas †-adiques pour les débarasser des restrictions sur le couple $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ imposées dans [Mr].

Nous décrivons maintenant plus en détail le contenu de cet article.

Le schémas †-adiques affines. La «*complétion* $\boldsymbol{I}$*-adique faible*» a été introduite par Monsky-Washnitzer ([MW]) comme substitut de la «*complétion* $\boldsymbol{I}$*-adique formelle*» dans le but de corriger les défauts des nombres de Betti de la cohomologie de de Rham des schémas formels. Étant donnée une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$, sa complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ est une sous-algèbre de sa complétion $\boldsymbol{I}$-adique formelle $\widehat{\boldsymbol{A}}$ avec laquelle elle partage la propriété d'être de Zariski et d'être un relèvement de $\boldsymbol{A}_1 := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}$, *i.e.* $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_1 = \widehat{\boldsymbol{A}}_1$. Une algèbre de la forme $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ est dite «*faiblement complète de type fini*» (f.c.t.f. en bref). La nature fonctorielle de la correspondance $(_)^{\dagger}: \mathbf{Alg}_{\text{tf}}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\boldsymbol{R})$ permet de mimer les constructions usuelles de la théorie des schémas.

Pour $\boldsymbol{A}^{\dagger} \in \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ notons $\boldsymbol{X} := \text{Spec}(\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_1)$ et soit $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ le schéma algébrique affine associé à $\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_1$. Pour $f \in \boldsymbol{A}^{\dagger}$, l'algèbre $\boldsymbol{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\} := (\boldsymbol{A}^{\dagger}[\frac{1}{f}])^{\dagger}$ dépend uniquement de la classe modulo $\boldsymbol{I}$ de f et lorsque $D(\overline{f}) \subseteq D(\overline{g}) \subseteq \boldsymbol{X}$, il existe un morphisme canonique ${\nu_g}^{\dagger}: \boldsymbol{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\} \to \boldsymbol{A}^{\dagger}\{\frac{1}{g}\}$. On a ainsi une correspondance fonctorielle

$$\begin{array}{ccc} D(\overline{f}) \rightsquigarrow \boldsymbol{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\} & \xrightarrow{\pi_{\overline{f}}} & \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_1[\frac{1}{\overline{f}}] = \Gamma\big(D(\overline{f});\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}\big) \\ \subseteq\downarrow \qquad \downarrow{\nu_g}^{\dagger} & \oplus & \qquad\downarrow \nu_{\overline{g}} \\ D(\overline{g}) \rightsquigarrow \boldsymbol{A}^{\dagger}\{\frac{1}{g}\} & \xrightarrow{\pi_{\overline{g}}} & \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_1[\frac{1}{\overline{g}}] = \Gamma\big(D(\overline{g});\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}\big) \end{array}$$

dont les termes $\boldsymbol{A}^{\dagger}\{\frac{1}{*}\}$ définissent un faisceau de $\boldsymbol{R}$-algèbres sur $\boldsymbol{X}$ noté $\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}}$, et dont flèches π_* définissent une surjection de faisceaux de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\pi: \mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ L'espace annelé $(\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\sim} := (\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}})$, noté aussi $\mathscr{X}^{\dagger} = (\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}})$, est «*le schéma †-adique affine associé à* $\boldsymbol{A}^{\dagger}$». Le morphisme π réalise un plongement fermé canonique $\boldsymbol{X} \hookrightarrow \mathscr{X}^{\dagger}$.

Le procédé de localisation suivi de complétion faible, «*la localisation †-adique*», permet aussi d'associer, comme dans le cas algébrique, à un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres

$\alpha : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ un morphisme d'espaces annelés $(\alpha)^\sim : (\boldsymbol{B}^\dagger)^\sim \to (\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim$. La correspondance $\boldsymbol{A}^\dagger \rightsquigarrow (\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim$, $\alpha \rightsquigarrow (\alpha)^\sim$ est alors fonctorielle et le plongement $\boldsymbol{X} \hookrightarrow \mathscr{X}^\dagger$ est naturel relativement à la catégorie $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

Lorsque $\boldsymbol{I}$ opère de manière nilpotente sur $\boldsymbol{A}^\dagger$, l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ est de type fini sur $\boldsymbol{R}$ et l'on a $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} = \boldsymbol{A}^\dagger[\frac{1}{f}]$ pour tout $f \in \boldsymbol{A}^\dagger$. Dans ce cas, le schéma †-adique $\mathscr{X}^\dagger$ est un schéma algébrique affine et la théorie †-adique n'apporte rien de nouveau. C'est plutôt dans le cas où $\boldsymbol{A}^\dagger$ est *plate* sur $\boldsymbol{R}$ que la théorie trouve tout son intérêt. Plus précisément, étant donné un schéma affine $\boldsymbol{X}$ lisse sur $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$, son algèbre de fonctions régulières $R(\boldsymbol{X})$ admet des relèvements $\rho : \boldsymbol{A}^\dagger \twoheadrightarrow R(\boldsymbol{X})$ plats sur $\boldsymbol{R}$. La classe d'isomorphisme de $\boldsymbol{A}^\dagger$ dans $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ est alors indépendante du relèvement ρ mais le plongement fermé $\boldsymbol{X} \hookrightarrow \mathscr{X}^\dagger$ par contre n'est déterminé qu'à homotopie près ([MW,Ar]). De même, tout morphisme $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ entre schémas lisses sur $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$ admet des prolongements $f^\dagger : \mathscr{X}^\dagger \to \mathscr{Y}^\dagger$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} & \hookrightarrow & \mathscr{X}^\dagger \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^\dagger} \\ \boldsymbol{Y} & \hookrightarrow & \mathscr{Y}^\dagger \end{array}$$

mais $f^\dagger$ est au mieux déterminé à homotopie près. Ces idées qui constituent le point de départ de Monsky-Washnitzer pour définir le foncteur de cohomologie de de Rham p-adique sur la catégorie des schémas lisses sur un corps de caractéristique fini, se heurtent à de sérieuses obstructions liées à la non fonctorialité du plongement $\boldsymbol{X} \hookrightarrow \mathscr{X}^\dagger$ lors du passage du cas affine au cas général. Dans l'article « *Sur le Topos infinitésimal p-adique d'un schéma lisse I* » ([A-M]) nous donnons une définition intrinsèque de la cohomologie de de Rham p-adique qui contourne cette difficulté.

Le but du présent article est l'étude des propriétés générales des schémas †-adiques. La plupart des propositions sont motivées par leurs analogues dans la théorie des schémas formels ou algébriques. Il est assez rassurant de constater qu'au-delà de quelques difficultés techniques, schémas formels, schémas †-adiques et schémas algébriques partagent bon nombre de propriétés de base.

Les deux propositions suivantes précisent la nature du foncteur de localisation †-adique dans les constructions des schémas †-adiques affines.

Proposition (3.3.4). *Soient* $\boldsymbol{A}^\dagger, \boldsymbol{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.
a) *L'espace annelé* $(\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim := \big(\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}^\dagger{}_1);\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big)$ *est* localement annelé.
b) *Pour tout morphisme de* $\boldsymbol{R}$*-algèbres* $\eta : \boldsymbol{B}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger$, *le morphisme* $(\eta)^\sim : (\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim \to (\boldsymbol{B}^\dagger)^\sim$ *est un morphisme d'espaces localement annelés. Le foncteur* $(_)^\sim$ *est donc à valeurs dans catégorie* $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{/(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim}$ *des espaces localement annelés au-dessus de* $(\boldsymbol{R})^\sim$.

Notons $\mathbf{Aff}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ l'image essentielle du foncteur $(_)^\sim : \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Loc\text{-}ann}_{/(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim}$.

Théorème (3.3.8)
a) *Le foncteur* $(_)^\sim : \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Aff}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *est une équivalence de catégories.*

b) *La catégorie* $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *possède des produits fibrés.*

Localisation des modules. Pour $\boldsymbol{A}^{\dagger} \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$, le foncteur de «*localisation* †*-adique*»

$$(_)^{\tilde{}} : \mathbf{Mod}(\boldsymbol{A}^{\dagger}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}})$$

fait correspondre au module $\boldsymbol{M}$ le faisceau $(\boldsymbol{M})^{\tilde{}}$ sur $\boldsymbol{X}$ associé au préfaisceau $\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}} \otimes_{\boldsymbol{A}^{\dagger}} \boldsymbol{M}$.

Le théorème suivant rassemble plusieurs résultats déjà démontrés dans [M] mais sous des hypothèses restrictives sur le couple $(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

Théorème (3.2.5). *Soit* $\boldsymbol{A}^{\dagger} \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. *Alors :*
a) *Le foncteur* $(_)^{\tilde{}} : \mathbf{Mod}(\boldsymbol{A}^{\dagger}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}})$ *est exact.*
b) *Pour tout* $\boldsymbol{A}^{\dagger}$*-module* $\boldsymbol{M}$ *et tout ouvert principal* $D(\overline{f}) \subseteq \boldsymbol{X}$ *:*
  i) *Le morphisme canonique* $\boldsymbol{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\} \otimes_{\boldsymbol{A}^{\dagger}} \boldsymbol{M} \to \Gamma\big(D(\overline{f});\boldsymbol{M}^{\tilde{}}\big)$ *est bijectif.*
  ii) *Pour tout recouvrement principal* $\mathscr{U} = \{U_i\}$ *de* $D(\overline{f})$, *on a*

$$\check{H}^i\big(\mathscr{U};\boldsymbol{M}^{\tilde{}}\big) = 0\,,\ \textit{pour tout}\ i > 0\,.$$

  iii) $H^i\big(D(\overline{f});\boldsymbol{M}^{\tilde{}}\big) = 0$, *pour tout* $i > 0$.
c) *Le foncteur* $(_)^{\tilde{}} : \mathbf{Mod}(\boldsymbol{A}^{\dagger}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}})$ *est pleinement fidèle.*

La proposition suivante est le pendant du théorème d'acyclicité des modules quasi-cohérents en théorie des schémas. Il est démontré dans [M] en supposant que $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ est un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal $\boldsymbol{I}$.

Théorème (4.2.3). *Soit* $(\boldsymbol{X},\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}})$ *le schéma* †*-adique affine associé à* $\boldsymbol{A}^{\dagger} \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.
a) *Si* $\mathscr{M} \in \mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}})$, *on a* $H^i(\boldsymbol{X};\mathscr{M}) = 0$ *pour tout* $i > 0$.
b) *Le foncteur* $(_)^{\tilde{}} : \mathbf{Mod}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{A}^{\dagger}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}})$ *est une équivalence de catégories.*

Les schémas †-adiques. On appelle ainsi un espace localement annelé $\mathscr{X}^{\dagger} = (\boldsymbol{X},\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}})$ au-dessus $(\boldsymbol{R})^{\tilde{}}$ localement isomorphe à un schéma †-adique affine. On note $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{/(\boldsymbol{R}^{\dagger})^{\tilde{}}}$ dont les objets sont les schémas †-adiques.

Soit $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}} := \mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}}/\boldsymbol{I}\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}}$. L'espace annelé $\boldsymbol{X} := (\boldsymbol{X},\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ que nous appelons «*la réduction de* $\mathscr{X}^{\dagger}$ », est un schéma algébrique localement de type fini sur $\boldsymbol{R}$, et nous avons, comme dans le cas affine, un plongement fermé $\boldsymbol{X} \hookrightarrow \mathscr{X}^{\dagger}$. Lorsque $\mathscr{X}^{\dagger}$ est †-adique affine sa réduction $\boldsymbol{X}$ est affine. La réciproque de cette propriété : «*le critère d'affinité*», est aussi vérifiée.

Théorème (5.1.1). *Un schéma* †*-adique est affine si et seulement si sa réduction est un schéma affine.*

Ce critère joue un rôle fondamental dans la théorie où il produit beaucoup d'objets et de morphsimes du site infinitésimal et lui donne beaucoup de souplesse (*cf.* [A-M]). Le critère d'affinité est aussi utilisé pour démontrer l'existence du produit fibré dans la catégorie des schémas †-adiques :

Théorème (6.2.3). *La catégorie* $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *possède des produits fibrés.*

Plan de l'article. La section **1** rappelle des définitions et des résultats de base des articles de Monsky-Washnitzer ([MW]) et Meredith ([M]).

Dans la section **2** nous prouvons trois théorèmes concernant les localisations †-adiques. Ces théorèmes sont des cas particuliers des principaux théorèmes de l'article, ils concentrent dans leurs preuves toutes les difficultés techniques spécifiques au contexte †-adique. On se place dans la situation où l'on se donne $f_1, f_2 \in \boldsymbol{A}^{\dagger} \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ avec $f_1 + f_2 = 1$, on note alors $(\boldsymbol{X},\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ le schéma affine associé à ${\boldsymbol{A}^{\dagger}}_1$ et $\boldsymbol{U}_i := D(\overline{f}_i)$.

- Le théorème 2.2 qui montre l'annulation de la cohomologie de Čech du préfaisceau $\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}}$ relative au recouvrement $\mathscr{U} = \{\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2\}$. On en déduit dans la section **3** les théorèmes d'acyclicité des faisceaux associés aux schémas †-adiques affines (th. 3.2.5). Ce résultat était déjà démontré dans [M] par une autre méthode et sous des hypothèses restrictives sur le couple $(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.
- Le théorème 2.5.1 qui montre qu'un $\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}}$-module dont les restrictions aux ouverts $\boldsymbol{U}_i$ sont engendrées par leur sections globales, est lui-même engendré par ses sections globales. On en déduit dans la section **4** qu'un module cohérent sur un schéma †-adique affine est engendré par ses sections globales (th. 4.2.3). Notre démarche généralise et simplifie celle de [M] qui démontre cette propriété en supposant l'anneau $\boldsymbol{R}$ de valuation discrète d'idéal maximal $\boldsymbol{I}$.
- Le théorème 2.4.1 qui montre que un schéma †-adique $\mathscr{Y}^{\dagger}$ obtenu en recollant deux schémas †-adiques affines ${\boldsymbol{Y}_i}^{\dagger}$ de réductions les schémas algébriques $\boldsymbol{U}_i$ respectivement, est lui-même un schéma †-adique affine. On en déduit dans la section **5** qu'un schéma †-adique de réduction affine est un schéma †-adique affine (th. 5.1.1). Ce résultat est, à son tour, nécessaire pour prouver dans la section **6** l'existence de produits fibrés dans la catégorie des schémas †-adiques (th. 6.2.3).

Les sections **7** et **8** donnent quelques résultats utiles concernant la lissité et la platitude des schémas schémas †-adiques.

§1. Préliminaires

1.1 Notations

- Le couple $(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ désignera tout au long de cet article la donnée d'un anneau unitaire commutatif et nœthérien $\boldsymbol{R}$ et d'un idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$. Le mot « *algèbre* » sera synonyme de $\boldsymbol{R}$-algèbre sauf mention explicite du contraire. Les algèbres seront notées $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\ldots$
- Pour $s = 1,2,\ldots$, on pose $\boldsymbol{R}_s := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}^s$ et, plus généralement pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre ($\boldsymbol{R}$-module…) $\boldsymbol{A}$ on note $\boldsymbol{A}_s := \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{R}_s$ la « *réduction modulo* $\boldsymbol{I}^s$ *de* $\boldsymbol{A}$ ». Le cas $s = 1$ est de spéciale importance, $\boldsymbol{A}_1$ sera aussi appelé « *la réduction de* $\boldsymbol{A}$ ». Pour tous $s_2 \geqslant s_1$, l'application $\boldsymbol{A}_{s_2} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}_{s_1}$, $(x \bmod \boldsymbol{I}^{s_2}\boldsymbol{A}) \mapsto (x \bmod \boldsymbol{I}^{s_1}\boldsymbol{A})$, est « *la surjection canonique* » ; l'image d'un élément x par une telle surjection sera notée $\overline{x}$.

- Étant donnée une $\boldsymbol{R}_1$-algèbre $\boldsymbol{A}_1$, on appelle «*relèvement de* $\boldsymbol{A}_1$» la donnée, d'une part d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, et d'autre part d'un morphisme $\rho : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_1$ dont la réduction, à savoir l'application induite $\rho_1 : \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{R}_1 \to \boldsymbol{A}_1$, est **bijective**. Lorsque $\boldsymbol{A}_1$ est plate, lisse, … sur $\boldsymbol{R}_1$, le relèvement $\rho : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_1$ sera dit respectivement «*plat, lisse,* …» si la algèbre $\boldsymbol{A}$ est respectivement plate, lisse, … sur $\boldsymbol{R}$.
- Les espaces topologiques sous-jacents à nos espaces annelés seront des espaces sous-jacents à des schémas sur $\boldsymbol{R}_1$, ils seront notés $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \ldots$ Pour tout anneau $\boldsymbol{S}$ la notation $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}})$ désignera un espace annelé par des $\boldsymbol{S}$-algèbres. La notation $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ sera synonyme de $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{R}_1})$.
- On note $\widehat{\boldsymbol{A}}$ le complété séparé $\boldsymbol{I}$-adique de $\boldsymbol{A}$, *i.e.* $\widehat{\boldsymbol{A}} = \varprojlim_s \{\boldsymbol{A}_{s+1} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}_s\}$.

1.2 Complétion †-adique

Suite à Monsky et Washnitzer ([MW]) «*la complétion* $\boldsymbol{I}$*-adique faible*», que nous appellerons «*complétion* †*-adique*», d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est la sous-algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger \subseteq \widehat{\boldsymbol{A}}$ des éléments z tels qu'il existe $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$, des éléments $a_1, \ldots, a_n \in \boldsymbol{A}$ et une famille de polynômes $\{p_j \in \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n]\}_{j \in \mathbb{N}}$, le tout dépendant de z, tels que :

$$z = \textstyle\sum_{j \geqslant 0} p_j(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bullet\ p_j \in \boldsymbol{I}^j \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n], \forall\, j \in \mathbb{N}\,; \\ \bullet\ \text{l'ensemble } \{\frac{\deg p_j}{j+1}\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ est borné.} \end{cases} \tag{†}$$

1.2.1. La complétion †-adique vérifie les propriétés suivantes (*loc.cit.*) :

a) *L'application canonique de* $\boldsymbol{A}$ *vers* $\widehat{\boldsymbol{A}}$ *se factorise à travers* $\boldsymbol{A}^\dagger$ *en un morphisme naturel que nous notons* $\iota(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\dagger$.

b) *Pour tout morphisme d'algèbres* $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, *il existe un et un seul morphisme d'algèbres* $\alpha^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ *tel que* $\alpha^\dagger \circ \iota(\boldsymbol{A}) = \iota(\boldsymbol{B}) \circ \alpha$.

c) *La correspondance* $\boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{A}^\dagger$, $\alpha \rightsquigarrow \alpha^\dagger$ *est fonctorielle et* $\iota(_) : (_) \to (_)^\dagger$ *est un morphisme de foncteurs.*

d) *Si* $\boldsymbol{I}$ *est nilpotent dans* $\boldsymbol{A}$, *on a* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\dagger = \widehat{\boldsymbol{A}}$.

e) *Pour* $s = 1, 2, \ldots$ *les morphismes canoniques* $\boldsymbol{A}_s \to \boldsymbol{A}^\dagger{}_s \to \widehat{\boldsymbol{A}}_s$ *sont bijectifs.*

f) *Si* $\boldsymbol{A}$ *est une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre de type fini de générateurs algébriques* $(\xi_1, \ldots, \xi_\ell)$, *on peut prendre* $(a_1, \ldots, a_m) = (\xi_1, \ldots, \xi_\ell)$ *dans la définition* (†), *quel que soit* $z \in \boldsymbol{A}^\dagger$.

Définition ([MW])**.** Une algèbre $\boldsymbol{A}$ est dite «*faiblement complète*» (f.c. en bref) lorsque l'application $\iota(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A} \to (\boldsymbol{A})^\dagger$ est bijective. Une algèbre faiblement complète $\boldsymbol{B}$ est dite de «*type fini*» (f.c.t.f. en bref) lorsqu'elle est quotient de $\boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_\ell]^\dagger$ pour un certain $\ell \in \mathbb{N}$, dans ce cas l'ensemble des images des X_i est «*un système de générateurs* †*-adiques*» de $\boldsymbol{B}$.

Notations. On notera $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (resp. $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$) la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$ des $\boldsymbol{R}$-algèbres dont les objets sont les algèbres faiblement complètes (resp. de type fini). Un objet dont la notation comporte le symbole '†' appartient à $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$, mais il y aura un certain abus : la notation $\boldsymbol{A}^\dagger$ désignera tantôt une algèbre faiblement complète, tantôt la complétion †-adique d'une algèbre $\boldsymbol{A}$, cette dernière pourra aussi être notée $(\boldsymbol{A})^\dagger$ dans les passages où la nuance sera importante.

1.3 Rappels sur les algèbres faiblement complètes

1.3.1. Dans cet article nous allons utiliser, souvent sans référence, certaines propriétés de base établies par Monsky-Washnitzer ([MW]) et Meredith ([M]). Voici une liste de ces propriétés valables lorsque l'anneau $\boldsymbol{R}$ est nœthérien (*loc.cit.*).

a) *Pour toute $\boldsymbol{A}\in\mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$ l'application $\iota(\boldsymbol{A}^\dagger):\boldsymbol{A}^\dagger\to(\boldsymbol{A}^\dagger)^\dagger$ est bijective, autrement dit $\boldsymbol{A}^\dagger\in\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. De plus, si $\boldsymbol{A}$ est de type fini, $\boldsymbol{A}^\dagger$ est f.c.t.f.*

b) *Si $\boldsymbol{A}^\dagger$ est f.c. l'idéal $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$ est contenu dans le radical de Jacobson de $\boldsymbol{A}^\dagger$.*

c) *Soit $\boldsymbol{A}$ une algèbre. Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}^\dagger$ sont nœthériennes, $\boldsymbol{A}^\dagger$ est plate sur $\boldsymbol{A}$* ([M]).

d) *Une algèbre est f.c.t.f. si et seulement si c'est un quotient de $\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m]^\dagger$ pour $m\gg 0$.*

e) *Une algèbre f.c.t.f. est nœthérienne.*

f) *Si $\boldsymbol{A}^\dagger$ est f.c.t.f. $(\boldsymbol{A}^\dagger,\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger)$ est un anneau de Zariski. En particulier, $f\in\boldsymbol{A}^\dagger$ est inversible si et seulement si sa réduction $\overline{f}\in{\boldsymbol{A}^\dagger}_1$ l'est.*

g) *Un module de type fini sur une algèbre f.c.t.f. est $\boldsymbol{I}$-adiquement séparé.*

h) *Soit $\alpha:\boldsymbol{A}^\dagger\to\boldsymbol{B}^\dagger$ un morphisme d'algèbres f.c.t.f., notons $\overline{\alpha}$ sa réduction modulo $\boldsymbol{I}$.*
   1) *Si $\overline{\alpha}$ est surjective, α est surjective.*
   2) *Si $\overline{\alpha}$ est bijective et $\boldsymbol{B}^\dagger$ est plate sur $\boldsymbol{R}$, α est bijective.*

La proposition suivante est une reformulation de plusieurs résultats de [MW].

1.3.2. Proposition

a) *Le foncteur $(_)^\dagger:\mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})\to\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion de $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ dans $\mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$. Autrement dit, le morphisme fonctoriel :*

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Homom}_{\boldsymbol{R}^\dagger}(\boldsymbol{A}^\dagger,\boldsymbol{B}^\dagger) & \longrightarrow & \mathbf{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{B}^\dagger)\\ \alpha & \longmapsto & \alpha\circ\iota(\boldsymbol{A})\end{array}$$

   est bijectif pour tous $\boldsymbol{A}\in\mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$ et $\boldsymbol{B}^\dagger\in\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

b) *Soit $\mathcal{C}$ l'une des catégories $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ où $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. Pour tous $\boldsymbol{A}^\dagger,\boldsymbol{B}^\dagger,\boldsymbol{S}^\dagger\in\mathcal{C}$ et pour tous morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha:\boldsymbol{S}^\dagger\to\boldsymbol{A}^\dagger$ et $\beta:\boldsymbol{S}^\dagger\to\boldsymbol{B}^\dagger$, munissons $\boldsymbol{A}^\dagger$ et $\boldsymbol{B}^\dagger$ des structures de $\boldsymbol{S}^\dagger$-algèbres définies respectivement par α et β. Alors, le foncteur*

$$\mathbf{Homom}_{\boldsymbol{S}^\dagger}(\boldsymbol{A}^\dagger,_)\times\mathbf{Homom}_{\boldsymbol{S}^\dagger}(\boldsymbol{B}^\dagger,_):\mathcal{C}\rightsquigarrow\mathbf{Ens}$$

   est représentable par $(\boldsymbol{A}^\dagger\otimes_{\boldsymbol{S}^\dagger}\boldsymbol{B}^\dagger)^\dagger$ et les morphismes

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{A}^\dagger & \longrightarrow & (\boldsymbol{A}^\dagger\otimes_{\boldsymbol{S}^\dagger}\boldsymbol{B}^\dagger)^\dagger\\ a & \longmapsto & a\otimes 1\end{array}\quad\text{et}\quad\begin{array}{ccc}\boldsymbol{B}^\dagger & \longrightarrow & (\boldsymbol{A}^\dagger\otimes_{\boldsymbol{S}^\dagger}\boldsymbol{B}^\dagger)^\dagger\\ b & \longmapsto & 1\otimes b\end{array}$$

   Autrement dit, les catégories $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ possèdent des coproduits.

1.3.3. Localisation †-adique. Étant donnés $f \in \boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$, il existe une algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et un morphisme $\nu_f{}^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$, uniques à isomorphisme canonique près, tels que tout morphisme d'algèbres $\mu : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ tel que $\mu(f)$ est inversible se factorise de manière unique à travers $\nu_f{}^\dagger$. L'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$, qu'on appellera «*la localisation* †*-adique de* $\boldsymbol{A}^\dagger$ *en* f», est la complétion faible de la localisation algébrique $\boldsymbol{A}^\dagger[\frac{1}{f}]$, *i.e.* $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} = (\boldsymbol{A}^\dagger[\frac{1}{f}])^\dagger$, en particulier, si $\boldsymbol{A}^\dagger$ est f.c.t.f., il en est de même de $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$.

1.3.4. Lorsque aucune confusion ne sera à craindre on notera de la même manière un élément $a \in \boldsymbol{A}^\dagger$ et son image $\nu_f{}^\dagger(a) \in \boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$.

1.3.5. Voici quelques propriétés utiles de la localisation †-adique (*cf.* [MW,M]).

a) *Si* $f \in \boldsymbol{A} \in \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$, *le morphisme canonique* $\boldsymbol{A}[\frac{1}{f}]^\dagger \to (\boldsymbol{A})^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ *est bijectif.*

Soient $f, g \in \boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

b) *Le morphisme canonique* $\boldsymbol{A}^\dagger{}_s[\frac{1}{f}] \to \boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}_s$, *est bijectif pour tout* $s = 1, 2, \ldots$

c) *Si* $\overline{f}$ *est inversible dans* $\boldsymbol{A}^\dagger{}_1[\frac{1}{g}]$, *le morphisme canonique* $\boldsymbol{A}^\dagger{}_1[\frac{1}{f}] \to \boldsymbol{A}^\dagger{}_1[\frac{1}{g}]$ *est la réduction d'un et d'un unique morphisme de* $\boldsymbol{A}^\dagger$*-algèbres* $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} \to \boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{g}\}$.

d) *Si* $\boldsymbol{A}^\dagger$ *est f.c.t.f., l'algèbre* $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ *est de Zariski* (1.3.1-f) *et plate sur* $\boldsymbol{A}^\dagger$ ([M]).

1.3.6. Commentaire. Il est assez clair à partir des définitions que pour $\boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et $f \in \boldsymbol{A}^\dagger$, on a $\varinjlim_{\boldsymbol{B}^\dagger \in \mathscr{B}_f} \boldsymbol{B}^\dagger = \boldsymbol{A}^\dagger$ où $\mathscr{B}_f$ désigne la famille des sous-algèbres f.c.t.f. de $\boldsymbol{A}^\dagger$ qui contiennent f. On a donc un morphisme canonique $\Xi : \varinjlim_{\boldsymbol{B}^\dagger \in \mathscr{B}_f} \boldsymbol{B}^\dagger\{\frac{1}{f}\} \to \boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ qui est surjectif mais qui n'est pas nécessairement injectif. En effet, $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ est l'espace séparé $\boldsymbol{I}$-adique associé à l'espace $\varinjlim_{\boldsymbol{B}^\dagger \in \mathscr{B}_f} \boldsymbol{B}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ mais ce dernier n'a à priori aucune raison d'être séparé. L'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ n'est donc pas nécessairement la limite inductive des localisations des sous-algèbres f.c.t.f. de $\boldsymbol{A}^\dagger$ contenant f.

1.4 Localisation †-adique dans le cas f.c.t.f.

1.4.1. Localisation †-adique de modules. Étant donnés $f \in \boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et un $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$ la «*localisation* †*-adique de* $\boldsymbol{M}$ *en* f» se définit de manière analogue au cas algébrique. On pose

$$\boldsymbol{M}\{\tfrac{1}{f}\} := \boldsymbol{A}^\dagger\{\tfrac{1}{f}\} \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$$

et on note $\nu_f{}^\dagger(\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}\{\frac{1}{f}\}$ l'application canonique $m \mapsto 1 \otimes m$.

1.4.2. Lorsque aucune confusion ne sera à craindre on notera de la même manière un élément $m \in \boldsymbol{M}$ et son image $\nu_f{}^\dagger(\boldsymbol{M})(a) \in \boldsymbol{M}\{\frac{1}{f}\}$.

1.4.3. Proposition. *Pour $f \in \boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ l'ensemble $S_f := \{f^n + \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un système multiplicatif de $\boldsymbol{A}^\dagger$ et pour tout $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$, le morphisme canonique*

$$S_f^{-1}\boldsymbol{A}^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{M}\{\tfrac{1}{f}\}$$

*est **injectif**. Le noyau du morphisme canonique $\nu_f{}^\dagger(\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}\{\frac{1}{f}\}$ est l'ensemble des $m \in \boldsymbol{M}$ tels $(f^N + w)\cdot m = 0$ pour certains $w \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$ et $N \in \mathbb{N}$ (dépendants de m). En particulier, si $m \in \ker(\nu_f{}^\dagger(\boldsymbol{M}))$, on a $f^N m \in (\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger)\cdot m$ pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand.*

Preuve. Supposons le module $\boldsymbol{M}$ de type fini sur $\boldsymbol{A}^\dagger$. Le $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$-module $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$ est alors de type fini donc $\boldsymbol{I}$-adiquement séparé (1.3.1-g) et le noyau du morphisme

$$\boldsymbol{M}\big[\tfrac{1}{f}\big] := \boldsymbol{A}^\dagger\big[\tfrac{1}{f}\big] \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M} \xrightarrow[\iota(\boldsymbol{A}^\dagger[1/f])\otimes\mathrm{id}]{\mu} \boldsymbol{A}^\dagger\{\tfrac{1}{f}\} \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M} =: \boldsymbol{M}\{\tfrac{1}{f}\}$$

contient l'adhérence $\boldsymbol{I}$-adique $\overline{0}$ de 0 dans $\boldsymbol{M}\big[\frac{1}{f}\big]$. Réciproquement, on a aussi $\ker(\mu) \subseteq \overline{0}$ puisque les réductions modulo $\boldsymbol{I}^s$ de μ sont des isomorphismes (1.3.5-b). Par conséquent $\ker(\mu) = \overline{0}$. Or, comme $\boldsymbol{A}^\dagger\big[\frac{1}{f}\big]$ est nœthérien et que $\boldsymbol{M}\big[\frac{1}{f}\big]$ est un $\boldsymbol{A}^\dagger\big[\frac{1}{f}\big]$-module de type fini, on a $\boldsymbol{I}\overline{0} = \overline{0}$ et donc $(1+w)\cdot\ker(\mu) = 0$, pour un certain $w \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger\big[\frac{1}{f}\big]$; autrement dit $(f^N + w)\cdot\ker(\mu) = 0$, pour certains $N \in \mathbb{N}$ et $w \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$. La réciproque étant claire, on a $\ker(\mu) = \mathrm{Annul}_{\boldsymbol{M}[1/f]}(f^N + w)$. Cela étant, $\nu_f{}^\dagger(\boldsymbol{M})$ se factorise à travers le morphisme canonique $\nu_f(\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}\big[\frac{1}{f}\big]$, *i.e.* $\nu_f{}^\dagger(\boldsymbol{M}) = \mu \circ \nu_f(\boldsymbol{M})$, de sorte que $\nu_f{}^\dagger(\boldsymbol{M})(m) = 0$ si et seulement si $\nu_f(\boldsymbol{M})\big((f^N + w)m\big) = 0$, ou encore $f^M(f^N + w)\cdot m = 0$ pour $M \in \mathbb{N}$ assez grand et indépendant de m puisque $\ker(\nu_f{}^\dagger(\boldsymbol{M}))$ de t.f. On a ainsi prouvé que pour tout $\boldsymbol{A}^\dagger$-module de type fini $\boldsymbol{M}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ et $w \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$ tels que

$$\ker\big(\nu_f{}^\dagger(\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{A}^\dagger\{\tfrac{1}{f}\} \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}\big) = \mathrm{Annul}_{\boldsymbol{M}}\big(f^N + w\big).$$

Dans le cas où $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{A}^\dagger$-module arbitraire on note $\langle m\rangle$ le sous-$\boldsymbol{A}^\dagger$-module de $\boldsymbol{M}$ engendré par un élément $m \in \boldsymbol{M}$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \langle m\rangle & \xhookrightarrow{\subseteq} & \boldsymbol{M} \\ {\scriptstyle \nu_f{}^\dagger(\langle m\rangle)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu_f{}^\dagger(\boldsymbol{M})} \\ \boldsymbol{A}^\dagger\{\tfrac{1}{f}\} \otimes \langle m\rangle & \xhookrightarrow{\mathrm{id}\otimes\subseteq} & \boldsymbol{A}^\dagger\{\tfrac{1}{f}\} \otimes \boldsymbol{M} \end{array}$$

où $(\mathrm{id}\otimes\subseteq)$ est injectif puisque l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ est plate sur $\boldsymbol{A}^\dagger$ (1.3.5-d). Il s'ensuit que m appartient au noyau de $\nu_f{}^\dagger(\boldsymbol{M})$, si et seulement si, il appartient au noyau de $\nu_{f,\langle m\rangle}{}^\dagger$ déjà étudié dans le paragraphe précédent. ∎

1.5 Algèbres f.c.t.f. et complétion d'algèbres de t.f.

On prendra garde du fait que le foncteur $(_)^\dagger : \mathbf{Alg}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ **n'est pas** essentiellement surjectif. La proposition suivante nous permettra souvent de contourner cette difficulté.

1.5.1. Proposition. *Étant donnés une algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ f.c.t.f. et des éléments $a_1,\dots,a_m \in \boldsymbol{A}^\dagger$, il existe une algèbre de type fini $\boldsymbol{B}$, des éléments $b_1,\dots,b_m \in \boldsymbol{B}$ et un morphisme d'algèbres $\mu : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}^\dagger$ avec $\alpha(b_i) = a_i$, tels que les morphismes induits*

$$\mu_{i_1,\dots,i_t} : \boldsymbol{B}\big[\tfrac{1}{b_{i_1}\cdots b_{i_t}}\big]^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}^\dagger} \boldsymbol{A}^\dagger \longrightarrow \boldsymbol{A}^\dagger\big\{\tfrac{1}{a_{i_1}\cdots a_{i_t}}\big\} \qquad (\diamond)$$

sont des isomorphismes quel que soit l'ensemble $\{i_1,\dots,i_t\} \subseteq \{1,\dots,m\}$.

Si de plus $(a_1,\dots,a_m) = \boldsymbol{A}^\dagger$, l'algèbre $\boldsymbol{B}$ et les éléments $b_1,\dots,b_m$ peuvent être choisis tels que $(b_1,\dots,b_m) = \boldsymbol{B}$.

Preuve. Fixons un morphisme surjectif $\mu : \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]^\dagger \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}^\dagger$ (1.3.1-d) et soit $\boldsymbol{B}$ la sous-algèbre de $\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]^\dagger$ engendrée par $\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]$ et des éléments $b_1,\dots,b_m$ vérifiant $\mu(b_i) = a_i$. Les applications $\boldsymbol{B}\big[\frac{1}{b_{i_1}\cdots b_{i_t}}\big]^\dagger \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}^\dagger\big\{\frac{1}{a_{i_1}\cdots a_{i_t}}\big\}$ induites par μ sont alors clairement des surjections, de même donc que les $\mu_{i_1,\dots,i_t}$. D'autre part la réduction modulo $\boldsymbol{I}^s$ de $\mu_{i_1,\dots,i_t}$ s'identifie à l'isomorphisme de localisation algébrique (1.2.1-e, 1.3.5-b) :

$$(\mu_{i_1,\dots,i_t})_s : \boldsymbol{B}_s\big[\tfrac{1}{\bar{b}_{i_1}\cdots\bar{b}_{i_t}}\big] \otimes_{\boldsymbol{B}_s} \boldsymbol{A}^\dagger{}_s \longrightarrow \boldsymbol{A}^\dagger{}_s\big[\tfrac{1}{\bar{a}_{i_1}\cdots\bar{a}_{i_t}}\big], \qquad (\diamond_s)$$

et $\ker(\mu_{i_1,\dots,i_t})$ est contenu dans l'adhérence $\boldsymbol{I}$-adique de (0), or $\boldsymbol{B}\big[\frac{1}{b_{i_1}\cdots b_{i_t}}\big]^\dagger \otimes \boldsymbol{A}^\dagger$ est $\boldsymbol{I}$-adiquement séparé (1.3.1-g).

L'argument qui précède reste vrai pour peu que l'on ait une algèbre de type fini $\boldsymbol{B}$ et un morphisme $\mu : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}^\dagger$ dont l'image contienne les a_i et tel que $\mu^\dagger : \boldsymbol{B}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger$ soit surjectif. Il s'ensuit que si l'on a $1 = \sum_i a_i a'_i$ on peut remplacer $\boldsymbol{B}$ par la localisation $\boldsymbol{B}(b'_1,\dots,b'_m)\big[\frac{1}{\Sigma_i b_i b'_i}\big]$ où $\mu(b_i) = a_i$ et où $\boldsymbol{B}(b'_1,\dots,b'_m)$ désigne la $\boldsymbol{B}$-sous-algèbre de $\boldsymbol{B}^\dagger$ engendrée par des éléments $b'_i \in \boldsymbol{B}^\dagger$ vérifiant $\mu^\dagger(b'_i) = a'_i$. ∎

§ 2. Recouvrements et recollements †-adiques

Dans cette section nous prouvons trois théorèmes techniques concernant les localisations †-adiques dont on déduira par des raisonnements plus ou moins formels les principaux résultats de l'article.

2.1 Préliminaire technique

2.1.1. Proposition. *On se donne un élément P et un idéal $\boldsymbol{K}$ de $\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}] := \boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_\ell]$. Pour tous $d,s \in \mathbb{N}$, notons $\boldsymbol{I}^s[\overrightarrow{X}]_d$ le sous-$\boldsymbol{R}$-module des polynômes de $\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]$ à coefficients dans $\boldsymbol{I}^s$ et de degré total majoré par d.*
a) *Il existe des entiers positifs $N(P,\boldsymbol{K})$ et $D(P,\boldsymbol{K})$, tels que les ensembles :*

$$\mathrm{C1}(P,\boldsymbol{K},s) = \Big\{Q \in \boldsymbol{I}^s[\overrightarrow{X}] \;\Big|\; P^N Q \in \big(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{s+1}[\overrightarrow{X}]\big),\ \textit{pour } N \textit{ assez grand}\Big\}$$

$$\mathrm{C2}(P,\boldsymbol{K},s) = \Big\{Q \in \boldsymbol{I}^s[\overrightarrow{X}] \;\Big|\; P^{N(P,\boldsymbol{K})} Q \in \big(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{s+1}[\overrightarrow{X}]_{d+D(P,\boldsymbol{K})}\big) \textit{ si } Q \in \boldsymbol{I}^s[\overrightarrow{X}]_d\Big\}$$

sont égaux quel que soit $s \in \mathbb{N}$.

b) *Plus généralement, si* $Q \in \boldsymbol{I}^s[\overrightarrow{X}]_d$ *et si* $P^N Q \in \big(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{s+r}[\overrightarrow{X}]\big)$, *pour* N *assez grand et pour un certain* $r \in \mathbb{N}$, *alors* $P^{rN(P,\boldsymbol{K})} Q \in \big(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{s+r}[\overrightarrow{X}]_{d+rD(P,\boldsymbol{K})}\big)$.

c) *Pour tous* $d, s \in \mathbb{N}$, *on a* $\big(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^s[\overrightarrow{X}]\big) \cap \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_d \subseteq \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^s[\overrightarrow{X}]_{d+sD(1,\boldsymbol{K})}$.

Preuve. Pour chaque $d, s \in \mathbb{N}$, notons $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{s,d}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]) := \boldsymbol{I}^s[\overrightarrow{X}]_d\, U^s T^d$, où U et T désignent des variables formelles. On munit $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{s,d}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}])$ de la structure de $\boldsymbol{R}$-module de $\boldsymbol{I}^s[\overrightarrow{X}]_d$ et l'on considère $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{*,*}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]) := \bigoplus_{s,d\in\mathbb{N}} \boldsymbol{I}^s[\overrightarrow{X}]_d\, U^s T^d$ muni de la structure d'algèbre positivement graduée donnée par les égalités :

$$Q_1 U^{s_1} T^{d_1} \cdot Q_2 U^{s_2} T^{d_2} := Q_1 Q_2 U^{s_1+s_2} T^{d_1+d_2},$$

pour tous $s_i, d_i \in \mathbb{N}$ et $Q_i \in \boldsymbol{I}^{s_i}[\overrightarrow{X}]_{d_i}$. La $\boldsymbol{R}$-sous-algèbre

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{0,*}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]) = \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_1 T \oplus \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_2 T^2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_d T^d \oplus \cdots$$

est engendrée par $\boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_1 T$, et $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{*,*}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}])$, vue comme $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{0,*}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}])$-algèbre, est engendrée par $\boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{I}U$. Il s'ensuit que $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{*,*}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}])$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini et c'est donc un anneau **nœthérien**.

Existence de $N(P, \boldsymbol{K})$. L'inclusion $\mathrm{C2}(P, \boldsymbol{K}, s) \subseteq \mathrm{C1}(P, \boldsymbol{K}, s)$ est claire. L'ensemble des sommes finies $\sum_{s,d} Q_{s,d} U^s T^d$ où $Q_{s,d} \in \mathrm{C1}(P, \boldsymbol{K}, s)$ est un idéal noté $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ de l'anneau nœthérien $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{*,*}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}])$, il est donc de type fini, l'existence de $N(P, \boldsymbol{K})$ s'ensuit de même que l'inclusion inverse $\mathrm{C2}(P, \boldsymbol{K}, s) \supseteq \mathrm{C1}(P, \boldsymbol{K}, s)$

Existence de $D(P, \boldsymbol{K})$. Pour $D \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{C}}(D)$ des éléments $\sum_{s,d} Q_{s,d} U^s T^d$ de $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ tels que $P^{N(P,\boldsymbol{K})} Q_{s,d} \in \big(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{s+1}[\overrightarrow{X}]_{d+D}\big)$, est un idéal de $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{*,*}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}])$, et comme $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ est la réunion de la suite croissante d'idéaux $\boldsymbol{\mathcal{C}}(0) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{C}}(1) \subseteq \cdots \boldsymbol{\mathcal{C}}(D) \subseteq \cdots$, on a $\boldsymbol{\mathcal{C}} = \boldsymbol{\mathcal{C}}(D)$ pour D assez grand. On peut donc prendre pour $D(P, \boldsymbol{K})$ la borne inférieure de tels D.

L'assertion (b) résulte par itération de (a), et (c) est cas particulier de (b) avec $P = 1$. ∎

2.2 Exactitude des suites courtes de Mayer-Vietoris

2.2.1. Notations. Pour $f_1, f_2 \in \boldsymbol{A} \in \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$ on notera

$$\nu_i : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}\big[\tfrac{1}{f_i}\big], \quad \nu_{12}^i : \boldsymbol{A}\big[\tfrac{1}{f_i}\big] \to \boldsymbol{A}\big[\tfrac{1}{f_1 f_2}\big]$$

les morphismes canoniques de localisation algébrique.

De manière analogue, si $f_1, f_2 \in \boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{I})$ on notera

$$\nu_i{}^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger\big\{\tfrac{1}{f_i}\big\}, \quad \nu_{12}^i{}^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger\big\{\tfrac{1}{f_i}\big\} \to \boldsymbol{A}^\dagger\big\{\tfrac{1}{f_1 f_2}\big\}$$

les morphismes canoniques de localisation †-adique.

Lorsque aucune confusion ne sera à craindre on notera de la même manière l'élément d'une algèbre et son image dans un localisé.

2.2.2. Le cas algébrique. Lorsque $(f_1, f_2) = \boldsymbol{A}$, la suite de Mayer-Vietoris du faisceau structural $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{R}}$ du schéma affine associé à $\boldsymbol{A}$ relatif au recouvrement principal $\boldsymbol{X} = D(f_1) \cup D(f_2)$ est la suite exacte bien connue en géométrie algébrique

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A} \xrightarrow{\epsilon} \boldsymbol{A}\big[\tfrac{1}{f_1}\big] \oplus \boldsymbol{A}\big[\tfrac{1}{f_2}\big] \xrightarrow{\delta_0} \boldsymbol{A}\big[\tfrac{1}{f_1 f_2}\big] \to \mathbf{0} \tag{MV}$$

où $\epsilon(x) = (x, x)$ et $\delta_0(x, y) = x - y$. Le théorème 2.2.4, qui concerne la version †-adique de cette propriété, sera démontré suivant une démarche très proche de celle du cas algébrique que nous rappelons brièvement maintenant et qui repose pour l'essentiel sur les deux propriétés élémentaires suivantes :

MV-a) Le noyau de $\nu_i : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f_i}\big]$ est l'idéal des $a \in \boldsymbol{A}$ tels $f_i^N a = 0$ pour $N \gg 0$.

MV-b) Lorsque $1 = \zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2$, le développement de $\big(\zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2\big)^{2N}$ donne des éléments $\xi_{i,N}$ (qui dépendent polynomialement de $\{\zeta_i, f_i\}$), tels que $\xi_{1,N} f_1^N + \xi_{2,N} f_2^N = 1$.

Voici comment elles sont utilisées.

Injectivité de $\boldsymbol{\epsilon}$. Si $\epsilon(x) = 0$, il existe $N \gg 0$ tel que $f_i^N x = 0$ (MV-a), et alors (MV-b)

$$x = \xi_{1,N} f_1^N x + \xi_{2,N} f_2^N x = 0$$

Exactitude du terme central de (MV). Soient $x_i = a_i / f_i^N \in \boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f_i}\big]$ avec $a_i \in \boldsymbol{A}$. La condition $x_1 = x_2$ dans $\boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f_1 f_2}\big]$, équivaut à l'égalité sur $\boldsymbol{A}$ (MV-a) :

$$(f_1 f_2)^M \big(f_2^N a_1 - f_1^N a_2\big) = 0, \text{ pour } M \gg 0. \tag{$\star$}$$

et grâce à l'égalité $1 = \xi_{1,M+N} f_1^{M+N} + \xi_{2,M+N} f_2^{M+N}$ (MV-b), l'élément

$$a := \xi_{1,M+N} f_1^M a_1 + \xi_{2,M+N} f_2^M a_2 \in \boldsymbol{A} \tag{$\star\star$}$$

vérifie bien $a = x_i$ dans $\boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f_i}\big]$ pour $i = 1, 2$. En effet, dans $\boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f_1}\big]$ l'égalité '$a = x_1$' équivaut à l'égalité '$f_1^N a = a_1$', or :

$$\begin{aligned} f_1^N a &= \xi_{1,M+N} f_1^{M+N} a_1 + \xi_{2,M+N} f_2^M f_1^N a_2 \\ &= \xi_{1,M+N} f_1^{M+N} a_1 + \xi_{2,M+N} f_2^{M+N} a_1, \text{ (d'après } (\star)) \\ &= a_1 \end{aligned}$$

Exactitude à droite de (MV). Dans $\boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f_1 f_2}\big]$ on a les décompositions (MV-b) :

$$\big(\tfrac{1}{f_1 f_2}\big)^N = \tfrac{\xi_{1,N} f_1^N + \xi_{2,N} f_2^N}{f_1^N f_2^N} = \tfrac{\xi_{1,N}}{f_2^N} + \tfrac{\xi_{2,N}}{f_1^N}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$. En particulier, un élément $z \in \boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f_1 f_2}\big]$ est toujours de la forme

$$z = \tfrac{a}{(f_1 f_2)^N} = \tfrac{\xi_{1,N}}{f_2^N} a + \tfrac{\xi_{2,N}}{f_1^N} a$$

avec $a \in \boldsymbol{A}$. On y voit bien que z appartient à l'image de δ_0.

2.2.3. Le cas †-adique. Dans ce cas nous serons amenés à monter l'exactitude de la complétion †-adique de (MV), c'est-à-dire de la suite

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A}^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger} \boldsymbol{A}\big[\tfrac{1}{f_1}\big]^\dagger \oplus \boldsymbol{A}\big[\tfrac{1}{f_2}\big]^\dagger \xrightarrow{{\delta_0}^\dagger} \boldsymbol{A}\big[\tfrac{1}{f_1 f_2}\big]^\dagger \to \mathbf{0}\,. \tag{MV†}$$

Nous utiliserons, comme nous venons de le rappeler, la description du noyau du morphisme canonique $\boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger\big\{\frac{1}{f}\big\}$ (prop. 1.4.3), des expressions polynomiales de $\xi_{i,N}$ en termes de ζ_i, f_i, et plus important encore des estimations (2.1.1) des degrés M et N dans $(\star)$ et $(\star\star)$ nécessaires pour l'étude de la convergence †-adique. Abordons maintenant la preuve du théorème annoncé dans 2.2.2.

2.2.4. Théorème. *Soient $f_1, f_2 \in \boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ tels que $(f_1, f_2) = \boldsymbol{A}^\dagger$, la suite*

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A}^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger} \boldsymbol{A}^\dagger\big\{\tfrac{1}{f_1}\big\} \oplus \boldsymbol{A}^\dagger\big\{\tfrac{1}{f_2}\big\} \xrightarrow{{\delta_0}^\dagger} \boldsymbol{A}^\dagger\big\{\tfrac{1}{f_1 f_2}\big\} \to \mathbf{0} \tag{\{MV\}}$$

avec ${\epsilon^\dagger}(x) = (x,x)$ et ${\delta_0}^\dagger(x,y) = x - y$ est exacte.

Preuve. La proposition résultera de montrer l'exactitude de la complétion †-adique (MV†) des suites (MV). En effet, si $\boldsymbol{A}^\dagger$ est f.c.t.f., il existe d'après 1.5.1, une algèbre de type fini $\boldsymbol{B}$, des éléments $b_1, b_2 \in \boldsymbol{B}$ vérifiant $(b_1, b_2) = \boldsymbol{B}$ et un morphisme $\mu : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}^\dagger$ avec $\mu(b_i) = a_i$ tels que

$$\boldsymbol{A}^\dagger\big\{\tfrac{1}{f_i}\big\} = \boldsymbol{A}^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}^\dagger} \boldsymbol{B}\big[\tfrac{1}{b_i}\big]^\dagger \quad \text{et} \quad \boldsymbol{A}^\dagger\big\{\tfrac{1}{f_1 f_2}\big\} = \boldsymbol{A}^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}^\dagger} \boldsymbol{B}\big[\tfrac{1}{b_1 b_2}\big]^\dagger.$$

La suite (MV†) résulte alors d'appliquer le foncteur $(_) \otimes_{\boldsymbol{B}^\dagger} \boldsymbol{A}^\dagger$ à la suite

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{B}^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger} \boldsymbol{B}\big[\tfrac{1}{b_1}\big]^\dagger \oplus \boldsymbol{B}\big[\tfrac{1}{b_2}\big]^\dagger \xrightarrow{{\delta_0}^\dagger} \boldsymbol{B}\big[\tfrac{1}{b_1 b_2}\big]^\dagger \to \mathbf{0} \tag{1}$$

Or, si nous supposons la proposition démontrée pour les suites (MV†), la suite (1) sera une résolution $\boldsymbol{B}^\dagger$-plate du $\boldsymbol{B}^\dagger$-module $\boldsymbol{B}\big[\frac{1}{b_1 b_2}\big]^\dagger$ qui est lui-même $\boldsymbol{B}^\dagger$-plat (1.3.5-d) et la suite ({MV}) sera, par conséquent, elle aussi exacte.

Supposons maintenant donnée une algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$ avec $f_1, f_2 \in \boldsymbol{A}$ vérifiant $(f_1, f_2) = \boldsymbol{A}$. Notons $\boldsymbol{A}^\dagger := (\boldsymbol{A})^\dagger$. Un élément de $\boldsymbol{A}$ et son image dans $\boldsymbol{A}^\dagger$ par le morphisme canonique $\iota(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\dagger$ seront notés de la même manière. On a $\boldsymbol{A}^\dagger\big\{\frac{1}{f}\big\} = \boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f}\big]^\dagger$ quel que soit $f \in \boldsymbol{A}$.

Injectivité de $\epsilon^\dagger$. Pour $x \in \ker(\epsilon^\dagger)$, on a ${\nu_i}^\dagger(x) = 0$ pour $i = 1, 2$. Par 1.4.3, il existe des entiers N_i est des éléments $w_i \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$ tels que $(f_i^{N_i} + w_i)x = 0$. Comme $\boldsymbol{A}f_1 + \boldsymbol{A}f_2 = \boldsymbol{A}$, il existe $\xi_i \in \boldsymbol{A}$ tel que $\sum_i \xi_i f_i^{N_i} = 1$ et $\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(x)$ contient un élément de la forme $(1 + w)$ avec $w \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$ et donc $\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(x) = \boldsymbol{A}^\dagger$ (1.3.1-f).

Exactitude du terme central de (MV†). Fixons une famille $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_\ell)$ de générateurs algébriques de $\boldsymbol{A}$ en tant que $\boldsymbol{R}$-algèbre. Fixons une relation $\zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2 = 1$

dans $\boldsymbol{A}$. Notons $\vec{f} := (f_1, f_2)$ et $\vec{\zeta} := (\zeta_1, \zeta_2)$. Notons $\{\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}\}$ la famille de variables $\{A_1, \ldots, A_\ell, F_1, F_2, Z_1, Z_2\}$ et considérons la surjection de $\boldsymbol{R}$-algèbres :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}] & \xrightarrow{\alpha} & \boldsymbol{A} \\ A_k & \longmapsto & a_k \\ F_i & \longmapsto & f_i \\ Z_i & \longmapsto & \zeta_i \end{array} \qquad 1 \leqslant k \leqslant \ell \quad \text{et} \quad i = 1, 2.$$

dont on notera $\boldsymbol{K} := \ker(\alpha)$. On a donc $\alpha^{-1}(\boldsymbol{I}^m \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^m[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Un élément $\vec{z}_i \in \boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f_i}\big]^\dagger$ s'exprime toujours comme somme d'une série (1.2.1-f)

$$z_i = \sum_{j \geqslant 0} p_{i,j}(\vec{a}, 1/f_i) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_{i,j} \in \boldsymbol{I}^j\big[\vec{A}, T_i\big], \quad \text{et} \\ \deg_{\vec{A}, T_i}(p_{i,j}) \leqslant (j+1)C_i\,, \end{cases}$$

et donc aussi comme somme d'une série

$$z_i = \sum_{j \geqslant 0} \frac{q_{i,j}(\vec{a}, f_i)}{f_i^{(j+1)C_i}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_{i,j} \in \boldsymbol{I}^j\big[\vec{A}, F_i\big], \quad \text{et} \\ \deg_{\vec{A}, F_i}(q_{i,j}) \leqslant 2(j+1)C_i\,, \end{cases}$$

Lorsque $\vec{z} \in \boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f_1}\big]^\dagger \oplus \boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f_2}\big]^\dagger$, on pose $C = \sup\{C_1, C_2\}$ et alors

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \\ z_2 \end{pmatrix} = \sum_{j \geqslant 0} \begin{pmatrix} \frac{q_{1,j}(\vec{a}, f_1)}{f_1^{(j+1)C}} \\ \\ \frac{q_{2,j}(\vec{a}, f_2)}{f_2^{(j+1)C}} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_{i,j} \in \boldsymbol{I}^j\big[\vec{A}, \vec{F}\big], \quad \text{et} \\ \deg_{\vec{A}, \vec{F}}(q_{i,j}) \leqslant 2(j+1)C\,, \end{cases}$$

Pour $s \in \mathbb{N}$ on définit le polynôme $S_{i,s} \in \boldsymbol{R}[\vec{A}, \vec{F}]$ par l'égalité :

$$\sum_{j=0}^{s} \frac{q_{i,j}(\vec{A}, \vec{F})}{F_i^{(j+1)C}} = \frac{\sum_{j=0}^{s} F_i^{(s-j)C} q_{i,j}(\vec{A}, \vec{F})}{F_i^{(s+1)C}} =: \frac{S_{i,s}(\vec{A}, \vec{F})}{F_i^{(s+1)C}}\,,$$

de sorte que

$$\deg_{\vec{A}, \vec{F}}(S_{i,s}) \leqslant 2(s+1)C\,.$$

Supposons maintenant que l'on ait $\boldsymbol{\delta_0(z_1, z_2) = 0}$ dans $\boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f_1, f_2}\big]^\dagger$.

Pour chaque $s \in \mathbb{N}$, on a par réduction modulo $\boldsymbol{I}^{s+1}$:

$$f_2^{(s+1)C} S_{1,s}(\vec{a}, \vec{f}) - f_1^{(s+1)C} S_{2,s}(\vec{a}, \vec{f}) = 0 \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{A}_{s+1}\big[\tfrac{1}{f_1 f_2}\big]\,,$$

autrement dit, il existe $N \gg 0$ tel que

$$(f_1 f_2)^N \Big(f_2^{(s+1)C} S_{1,s}(\vec{a}, \vec{f}) - f_1^{(s+1)C} S_{2,s}(\vec{a}, \vec{f}) \Big) \in \boldsymbol{I}^{s+1} \boldsymbol{A}\,,$$

ou encore, grâce à la surjectivité de α,

$$(F_1 F_2)^N \Big[F_2^{(s+1)C} S_{1,s}(\vec{A}, \vec{F}) - F_1^{(s+1)C} S_{2,s}(\vec{A}, \vec{F}) \Big] \in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{s+1}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]\,, \qquad (2)$$

pour chaque $s \in \mathbb{N}$ et pour $N \gg 0$ assez grand.

On remarquera que le terme entre crochets dans la relation (2) est, à priori, seulement dans $\boldsymbol{I}^0[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}]$, de sorte que (2) exprime son appartenance à l'ensemble $\mathrm{C1}(F_1F_2,\boldsymbol{K},0)$ de la proposition technique 2.1.1. L'égalité $\mathrm{C1}(F_1F_2,\boldsymbol{K},0)=\mathrm{C2}(F_1F_2,\boldsymbol{K},0)$ (*loc.cit.*), et l'assertion 2.1.1-(b) pour $s=0$ et $r=(s+1)$, nous donnent $\boldsymbol{\mathcal{N}}\in\mathbb{N}$ tel que :

$$(F_1F_2)^{(s+1)\boldsymbol{\mathcal{N}}}\Big(F_2^{(s+1)C}S_{1,s}(\vec{A},\vec{F})-F_1^{(s+1)C}S_{2,s}(\vec{A},\vec{F})\Big)\in\boldsymbol{K}+\boldsymbol{I}^{s+1}[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}]\,,\qquad(3)$$

mais cette fois **quel que soit $\boldsymbol{s\in\mathbb{N}}$.**

La relation (3) étant l'analogue de l'égalité $(\star)$ dans 2.2.2, nous procédons au recollement des $S_{i,s}(\vec{a},f_i)/f_i^{(s+1)C}$ suivant la méthode expliquée dans 2.2.2.

En développant pour chaque $L\in\mathbb{N}$ l'expression $(Z_1F_1+Z_2F_2)^{2L}$, on obtient des polynômes $\Xi_{i,L}\in\boldsymbol{R}[\vec{F},\vec{Z}]$ vérifiant :

$$\begin{cases}(Z_1F_1+Z_2F_2)^{2L}=\Xi_{1,L}(\vec{F},\vec{Z})\,F_1^L+\Xi_{2,L}(\vec{F},\vec{Z})\,F_2^L\,,\\ \text{et }\deg_{\vec{F},\vec{Z}}\big(\Xi_{i,L}\big)=3L\end{cases}\qquad(4)$$

On pose alors comme pour $(\star\star)$ dans 2.2.2 :

$$R_s(\vec{A},\vec{F},\vec{Z}):=\sum\nolimits_{i=1,2}\Xi_{i,(s+1)(\boldsymbol{\mathcal{N}}+C)}(\vec{F},\vec{Z})\,F_i^{(s+1)\boldsymbol{\mathcal{N}}}S_{i,s}(\vec{A},\vec{F})\,,$$

où l'on remarquera que $\deg_{\vec{A},\vec{F},\vec{Z}}(R_s)\leqslant(s+1)4(\boldsymbol{\mathcal{N}}+C)$.

Par construction, l'élément $R_s(\vec{a},\vec{f},\vec{\zeta})\in\boldsymbol{A}$ est ***le*** recollement de z_1,z_2 **modulo $\boldsymbol{I}^{s+1}$**. Ainsi, et après évaluations de degrés, on voit que pour chaque $s\geqslant 1$ on a :

$$R_s(\vec{A},\vec{F},\vec{Z})-R_{s-1}(\vec{A},\vec{F},\vec{Z})\in\big(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{I}^s[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}]\big)\cap\boldsymbol{R}[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}]_{(s+1)4(\boldsymbol{\mathcal{N}}+C)}\,,$$

ou encore, grâce à 2.1.1-(c),

$$R_s(\vec{A},\vec{F},\vec{Z})-R_{s-1}(\vec{A},\vec{F},\vec{Z})\in\boldsymbol{K}+\boldsymbol{I}^s[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}]_{(s+1)\widetilde{C}}\,,$$

où $\widetilde{C}:=4(\boldsymbol{\mathcal{N}}+C)+D(1,\boldsymbol{K})$.

Il existe donc $P_s\in\boldsymbol{I}^s[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}]$ de degré polynôme majoré par $(s+1)\widetilde{C}$ tel que $P_s=R_s-R_{s-1}\bmod\boldsymbol{K}$. La série infinie $\alpha(R_0)+\sum_{1\leqslant j}\alpha(P_j)$ représente ainsi un élément $z\in\boldsymbol{A}^\dagger$ tel que $z=\alpha(R_s)\bmod\boldsymbol{I}^{s+1}$ pour tout $s\in\mathbb{N}$, mais alors

$$\nu_i{}^\dagger(z)=z_i\bmod\boldsymbol{I}^{s+1},\text{ pour tout }s\in\mathbb{N}\,,$$

autrement dit $\nu_i{}^\dagger(z)=z_i$, cqfd.

Exactitude à droite de ($MV^\dagger$). Nous reprenons les notations des paragraphes précédents. La famille $\{\vec{a}, 1/(f_1 f_2)\}$ est un système de générateurs algébriques de la $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f_1 f_2}\big]$ et un élément $z \in \boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f_1 f_2}\big]^\dagger$ s'exprime alors comme somme d'une série (1.2.1-f)

$$z = \sum\nolimits_{j>0} p_j\big(\vec{a}, 1/(f_1 f_2)\big) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_j \in \boldsymbol{I}^j[\vec{A}, T]; \\ \deg_{\vec{X},T}(p_j) < C(j+1). \end{cases}$$

Or, pour $L \in \mathbb{N}$ on a (*cf.* (6))

$$\tfrac{1}{(f_1 f_2)^L} = \tfrac{\Xi_{1,L}(\vec{f},\vec{\zeta}) f_1^L + \Xi_{2,L}(\vec{f},\vec{\zeta}) f_2^L}{f_1^L f_2^L} = \tfrac{\Xi_{1,L}(\vec{f},\vec{\zeta})}{f_2^L} + \tfrac{\Xi_{2,L}(\vec{f},\vec{\zeta})}{f_1^L}$$

de sorte qu'en substituant les monômes T^L qui interviennent dans $p_j[\vec{A}, \vec{T}]$ par

$$T^L = \Xi_{1,L}(\vec{F},\vec{Z}) T_2^L + \Xi_{2,L}(\vec{F},\vec{Z}) T_1^L \tag{5}$$

dont le degré en $\{\vec{F}; \vec{Z}, \vec{T}\}$ est $4L$, on obtient les décompositions

$$\begin{cases} \text{(i) } p_j(\vec{A}, T) = R_{2,j}(\vec{A},\vec{F},\vec{Z},T_2) + R_{1,j}(\vec{A},\vec{F},\vec{Z},T_1) \\ \text{(ii) } R_{1,j}, R_{2,j} \in \boldsymbol{I}^j[\vec{A},\vec{F},\vec{Z},\vec{T}] \\ \text{(iii) } \deg_{\vec{A},\vec{F},\vec{Z},T_i}(R_{i,j}) < 4C(j+1) \end{cases}$$

de sorte que la série formelle

$$z_i := \sum\nolimits_{j\geqslant 0} R_{i,j}\big(\vec{a}, \vec{f}, \vec{\zeta}, 1/f_i\big),$$

appartient bien à $\boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f_i}\big]^\dagger$. Ceci termine la démonstration puisque, par construction, on aura $z = z_1 + z_2$ dans $\boldsymbol{A}\big[\frac{1}{f_1 f_2}\big]^\dagger$. ∎

2.3 Cas particulier de l'algèbre des polynômes

Dans cette partie nous revoyons la surjection ${\delta_0}^\dagger$ du théorème 2.2.4 dans le cas particulier de l'algèbre $\boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_\ell, F]$ et des polynômes $f_1 = F$ et $f_2 = 1 - F$, soit donc l'application ${\delta_0}^\dagger(x, y) = x - y$,

$$\boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\tfrac{1}{F}\big]^\dagger \oplus \boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\tfrac{1}{1-F}\big]^\dagger \xrightarrow{{\delta_0}^\dagger} \boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\tfrac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger \tag{6}$$

2.3.1. Une section linéaire de $\boldsymbol{{\delta_0}^\dagger}$. L'algèbre $\boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\frac{1}{F(1-F)}\big]$ est un $\boldsymbol{R}[\vec{X}]$-module libre de base l'ensemble $\big\{F^m, \big(\frac{1}{1-F}\big)^n \;\big|\; m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}\big\}$. On a la décomposition directe en $\boldsymbol{R}[\vec{X}]$-modules libres

$$\boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\tfrac{1}{F(1-F)}\big] = \boldsymbol{R}[\vec{X}, F] \;\oplus\; \bigoplus\nolimits_{1\leqslant n} \boldsymbol{R}[\vec{X}]\big(\tfrac{1}{F}\big)^n \;\oplus\; \bigoplus\nolimits_{1\leqslant n} \boldsymbol{R}[\vec{X}]\big(\tfrac{1}{1-F}\big)^n, \tag{7}$$

et donc

$$\boldsymbol{I}^k\boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\tfrac{1}{F(1-F)}\big] = \boldsymbol{I}^k\boldsymbol{R}[\vec{X}, F] \;\oplus\; \bigoplus\nolimits_{1\leqslant n} \boldsymbol{I}^k\boldsymbol{R}[\vec{X}]\big(\tfrac{1}{F}\big)^n \;\oplus\; \bigoplus\nolimits_{1\leqslant n} \boldsymbol{I}^k\boldsymbol{R}[\vec{X}]\big(\tfrac{1}{1-F}\big)^n, \tag{8}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La décomposition (7) permet d'exprimer les éléments $z \in \boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\frac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger$ comme sommes de séries la forme

$$z = \sum\nolimits_{0\leqslant j} P_j\big(\vec{X}, F\big) + Q_j\big(\vec{X}, \tfrac{1}{F}\big) - R_j\big(\vec{X}, \tfrac{1}{1-F}\big) \tag{9}$$

avec, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour un certain $C \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} P_j, Q_j, R_j \in \boldsymbol{I}^j \boldsymbol{R}[\vec{X}, T]\,, \\ Q_j(\vec{X}, 0) = R_j(\vec{X}, 0) = 0\,, \\ \sup\{\deg P_j, \deg Q_j, \deg R_j\} \leqslant C(j+1)\,. \end{cases}$$

Remarquons que lorsque $z = 0$, on a pour chaque $r \in \mathbb{N}$:

$$\textstyle\sum_{j=0}^{r} P_j(\vec{X}, F) + Q_j(\vec{X}, \frac{1}{F}) - R_j(\vec{X}, \frac{1}{1-F}) \in \boldsymbol{I}^{r+1}\boldsymbol{R}[\vec{X}, F, \frac{1}{F(1-F)}]$$

auquel cas on a d'après (8) et pour chaque $r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{r} P_j(\vec{X}, F) + Q_j(\vec{X}, \frac{1}{F}) \in \boldsymbol{I}^{r+1}\boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\,, \\ \sum_{j=0}^{r} R_j(\vec{X}, \frac{1}{1-F}) \in \boldsymbol{I}^{r+1}\boldsymbol{R}[\vec{X}, \frac{1}{1-F}]\,. \end{cases}$$

La conséquence de cette remarque est que pour tout $z \in \boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\frac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger$, les séries

$$\sigma_F(z) := \sum\nolimits_{0\leqslant j} P_j\big(\vec{X}, F\big) + Q_j\big(\vec{X}, \tfrac{1}{F}\big) \quad \text{et} \quad \sigma_{1-F}(z) := \sum\nolimits_{0\leqslant j} R_j\big(\vec{X}, \tfrac{1}{1-F}\big) \tag{10}$$

dépendent seulement de z et non pas de la série de la forme (7) qui le réalise. Nous avons ainsi deux applications clairement $\boldsymbol{R}[\vec{X}]^\dagger$-linéaires

$$\sigma_F : \boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\tfrac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger \to \boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\tfrac{1}{F}\big]^\dagger \quad \text{et} \quad \sigma_{1-F} : \boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\tfrac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger \to \boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\tfrac{1}{1-F}\big]^\dagger,$$

et $z \mapsto \sigma(z) : \big(\sigma_F(z), -\sigma_{1-F}(z)\big)$ est, par construction, une section $\boldsymbol{R}[\vec{X}]^\dagger$-linéaire de δ_0,

$$\boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\tfrac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger \xrightarrow{\sigma} \boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\tfrac{1}{F}\big]^\dagger \oplus \boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\tfrac{1}{1-F}\big]^\dagger \xrightarrow{\delta_0} \boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\tfrac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger \tag{11}$$

$$\boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\tfrac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger \xrightarrow{\mathrm{id}} \boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\tfrac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger$$

2.3.2. Modules $\mathscr{R}_{F_1,\dots,F_r}(C)$. Pour $F_1, \dots, F_r \in \boldsymbol{R}[\vec{X}, F]$ et $C \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{R}_{F_1,\dots,F_r}(C)$ le sous-$\boldsymbol{R}$-module de $\boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\frac{1}{F_1}, \cdots, \frac{1}{F_r}\big]^\dagger$ $\big(= \boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\frac{1}{F_1 \cdots F_r}\big]^\dagger\big)$ des éléments de la forme $z = \sum_{0\leqslant j} Z_j\big(\vec{X}, F, \frac{1}{F_1}, \cdots, \frac{1}{F_r}\big)$ où la série $\sum_{0\leqslant j} Z_j(\vec{X}, F, \vec{T})$ est telle que :

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \bullet\ Z_j \in \boldsymbol{I}^j \boldsymbol{R}[\vec{X}, F, T_1, \dots, T_r]\,, \\ \bullet\ \deg_{\vec{X}, F, \vec{T}} Z_j \leqslant C(j+1)\,; \end{cases}$$

on dira alors que la série $\sum_{0\leqslant j} Z_j$ « *est de type* $\mathscr{R}(C)$ ».

2.3.3. Lemme
a) *On a* $\boldsymbol{R}[\vec{X}, F]\big[\frac{1}{F_1}, \cdots, \frac{1}{F_r}\big]^\dagger = \bigcup\nolimits^{\uparrow}_{C\in\mathbb{N}} \mathscr{R}_{F_1,\dots,F_r}(C)$.

b) *Pour chaque* $C\in\mathbb{N}$, *on a*

$$\delta_0{}^{\dagger}\big(\mathscr{R}_F(C)\oplus\mathscr{R}_{1-F}(C)\big)=\mathscr{R}_{F,1-F}(C)\quad et\quad \sigma(\mathscr{R}_{F,1-F}(C))\subseteq\mathscr{R}_F(C)\oplus\mathscr{R}_{1-F}(C)$$

Preuve. (a) résulte des décompositions (7) et (8). Pour (b) on remarque que comme σ est une section de δ_0 l'assertion résultera des inclusions '$\subseteq$'. Celle concernant δ_0 est claire. Pour l'autre, des égalités pour tous $a,b\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$

$$F^a\big(\tfrac{1}{F-1}\big)^b=\textstyle\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}(F-1)^{k-b}\quad\text{et}\quad\big(\tfrac{1}{F}\big)^a\big(\tfrac{1}{1-F}\big)^b=S_{a,b}\big(\tfrac{1}{F}\big)+S_{b,a}\big(\tfrac{1}{1-F}\big)$$

où $S_{d,d'}(Y)\in\mathbb{Z}[Y]$ est de degré d, vont nous permettre des réécritures de la forme (9) :

$$Z\big(\vec{X},F,\tfrac{1}{F},\tfrac{1}{1-F}\big)=P\big(\vec{X},F\big)+Q\big(\vec{X},\tfrac{1}{F}\big)-R\big(\vec{X},\tfrac{1}{1-F}\big)$$

où, si $Z(\vec{X},F,T_1,T_2)\in\boldsymbol{I}^j\boldsymbol{R}[\vec{X},F,\vec{T}]$ de degré total majoré d, il en sera de même pour les polynômes P,Q,R ; l'inclusion concernant σ en découle aussitôt. ∎

2.4 Un théorème pour le recollement des algèbres f.c.t.f.

Le théorème suivant jouera un rôle clef dans la question du recollement des schémas †-adiques affines de réduction affine de la section 5.

2.4.1. Théorème. *On se donne* $\overline{f}\in\overline{\boldsymbol{A}}\in\mathbf{Alg}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R}_1)$ *et des relèvements f.c.t.f.*

$$\beta:\boldsymbol{B}^{\dagger}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}\big[\tfrac{1}{\overline{f}}\big]\,,\quad et\quad\gamma:\boldsymbol{C}^{\dagger}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}\big[\tfrac{1}{1-\overline{f}}\big]\,.$$

On choisi $f\in\boldsymbol{B}^{\dagger}$ *et* $f\in\boldsymbol{C}^{\dagger}$ *relevant* $\overline{f}$ *et on suppose qu'il existe un isomorphisme de* $\boldsymbol{R}$*-algèbres* $\varphi:\boldsymbol{C}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\}\to\boldsymbol{B}^{\dagger}\{\frac{1}{1-f}\}$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{C}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \boldsymbol{B}^{\dagger}\{\frac{1}{1-f}\}\\ {\scriptstyle\gamma\{1/f\}}\big\downarrow & \bigoplus & \big\downarrow{\scriptstyle\beta\{1/(1-f)\}}\\ \overline{\boldsymbol{A}}[\frac{1}{f(1-f)}] & = & \overline{\boldsymbol{A}}[\frac{1}{f(1-f)}]\end{array}$$

Alors, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}\boldsymbol{B}^{\dagger} & \oplus & \boldsymbol{C}^{\dagger} & \xrightarrow{\ \delta_{\varphi}{}^{\dagger}\ } & \boldsymbol{B}^{\dagger}\{\frac{1}{1-f}\}\,,\\ {\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta\{1/(1-f)\}}\\ \overline{\boldsymbol{A}}[\frac{1}{\overline{f}}] & \oplus & \overline{\boldsymbol{A}}[\frac{1}{1-\overline{f}}] & \xrightarrow{\ \delta_0\ } & \overline{\boldsymbol{A}}[\frac{1}{\overline{f}(1-\overline{f})}]\end{array}$$

avec $\delta_0(x,y)=x-y$ *et* $\delta_{\varphi}{}^{\dagger}(x,y)=x-\varphi(y)$, *l'application* $\delta_{\varphi}{}^{\dagger}$ *est* ***surjective***.

Preuve. Fixons une famille $\{\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_\ell\}$ de générateurs $\boldsymbol{R}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}$. Notons $\vec{X}=\{X_1,\dots,X_\ell\}$ et soit $\overline{\pi}:\boldsymbol{R}[\vec{X},F]^{\dagger}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}$ l'épimorphisme d'algèbres défini par $\overline{\pi}(X_i)=\overline{a}_i$

et $\overline{\pi}(F)=\overline{f}$. Pour chaque $P\in \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]$, le morphisme $\overline{\pi}$ induit une surjection de $\boldsymbol{R}$-algèbres de $\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{P}\big]^\dagger$ sur $\overline{\boldsymbol{A}}\big[\frac{1}{\overline{\pi}(P)}\big]$, nous la noterons :

$$\overline{\pi}_P : \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\tfrac{1}{P}\big]^\dagger \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}\big[\tfrac{1}{\pi(P)}\big]$$

Par la propriété universelle de l'algèbre des polynômes et de la localisation, il existe des relèvements $\pi_F : \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{F}\big]^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ et $\pi_{1-F} : \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{1-F}\big]^\dagger \to \boldsymbol{C}^\dagger$ de $\overline{\pi}_F$ et de $\overline{\pi}_{1-F}$ respectivement.

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{F}\big]^\dagger & \xrightarrow{\pi_F} & \boldsymbol{B}^\dagger & \xrightarrow{\beta} & \overline{\boldsymbol{A}}\big[\frac{1}{\overline{f}}\big] \\ & \searrow^{\overline{\pi}_F} & & \nearrow & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{1-F}\big]^\dagger & \xrightarrow{\pi_F} & \boldsymbol{C}^\dagger & \xrightarrow{\beta} & \overline{\boldsymbol{A}}\big[\frac{1}{1-\overline{f}}\big] \\ & \searrow^{\overline{\pi}_{1-F}} & & \nearrow & \end{array}$$

Les morphismes π_F et π_{1-F} sont surjectifs d'après 1.3.1-h. Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F] & \overset{\Phi}{\dashrightarrow} & \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger \\ {\scriptstyle \pi_{1-F}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F\{1/(1-F)\}} \\ \boldsymbol{C}^\dagger\big\{\frac{1}{\overline{f}}\big\} & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & \boldsymbol{B}^\dagger\big\{\frac{1}{1-\overline{f}}\big\} \end{array}$$

l'existence du morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres Φ rendant le diagramme commutatif résulte de la propriété universelle des algèbres de polynômes. Comme $\varphi=\mathrm{id} \mod \boldsymbol{I}$, on peut même définir Φ de sorte que $\Phi(P)=P \mod \boldsymbol{I}$, pour tout $P\in\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]$, auquel cas $\Phi(F(1-F))$ est inversible (1.3.1-b) et Φ induit un endomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbre $\phi : \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger & \xrightarrow{\phi} & \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger \\ {\scriptstyle \pi_{1-F}\{1/F\}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F\{1/(1-F)\}} \\ \boldsymbol{C}^\dagger\big\{\frac{1}{\overline{f}}\big\} & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & \boldsymbol{B}^\dagger\big\{\frac{1}{1-\overline{f}}\big\} \end{array}$$

Or, comme $\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{F(1-F)}\big]$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f. plate et $\phi=\mathrm{id} \mod \boldsymbol{I}$ par construction, le morphisme ϕ est un **isomorphisme** (1.3.1-h).

Nous avons ainsi tous les ingrédients du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{F}\big]^\dagger & \oplus & \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{1-F}\big]^\dagger & \xrightarrow{\delta_{\phi}{}^\dagger} & \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger \\ {\scriptstyle \pi_F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{1-F}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F\{1/(1-F)\}} \\ \boldsymbol{B}^\dagger & \oplus & \boldsymbol{C}^\dagger & \xrightarrow{\delta_{\varphi}{}^\dagger} & \boldsymbol{B}^\dagger\big\{\frac{1}{1-\overline{f}}\big\} \end{array}$$

et la surjectivité de $\delta_{\varphi}{}^\dagger$ résultera de celle de $\delta_{\phi}{}^\dagger$.

Développement de Taylor de ϕ. Comme $\phi : \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{F(1-F)}\big]$ est un morphisme d'algèbres égal à l'identité modulo $\boldsymbol{I}$, on a pour $P\in\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]$:

$$\begin{aligned} \phi(P(X_1,\dots,X_\ell,F)) &= P\big(\phi(X_1),\dots,\phi(X_\ell),\phi(F)\big) \\ &= P\big(X_1+h_1,\dots,X_\ell+h_\ell,F+h_{\ell+1}\big) \end{aligned}$$

où $h_i \in \boldsymbol{IR}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{F(1-F)}\big]^{\dagger}$. On aura donc un développement en série de Taylor :

$$\phi = \sum\nolimits_{0\leqslant m_1,\ldots,m_{\ell+1}} h_1^{m_1}\cdots h_{\ell+1}^{m_{\ell+1}}\,\Delta_1^{m_1}\cdots\Delta_{\ell+1}^{m_{\ell+1}}, \tag{12}$$

où $\Delta_i^m = \frac{1}{m!}\frac{\partial}{\partial X_i}$ et $\Delta_{\ell+1}^m = \frac{1}{m!}\frac{\partial}{\partial F}$. Chaque h_i s'écrit d'autre part comme série de la forme

$$h_i = \sum\nolimits_{1\leqslant j} H_{i,j}\big(\overrightarrow{X},F,\tfrac{1}{F},\tfrac{1}{1-F}\big),$$

avec $H_{i,j} \in \boldsymbol{I}^j\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F,\overrightarrow{T}]$ vérifiant, pour un certain $\mathfrak{M}\in\mathbb{N}$ (indépendant de i) :

$$\deg(H_{i,j}) \leqslant \mathfrak{M}(j+1), \quad \forall j\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}, \quad i=1,\ldots,\ell.$$

Les produits $h_1^{m_1}\cdots h_{\ell+1}^{m_{\ell+1}}$ ont alors des développements en séries de la forme :

$$h_1^{m_1}\cdots h_{\ell+1}^{m_{\ell+1}} = \sum\nolimits_{|\overrightarrow{m}|\leqslant j} H_{\overrightarrow{m},j}\big(\overrightarrow{X},F,\tfrac{1}{F},\tfrac{1}{1-F}\big),$$

où $\overrightarrow{m} := (m_1,\ldots,m_{\ell+1})$, $|\overrightarrow{m}| := m_1+\cdots+m_{\ell+1}$, $H_{\overrightarrow{m},j}\in\boldsymbol{I}^j\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F,\overrightarrow{T}]$ et

$$\deg\big(H_{\overrightarrow{m},j}\big) \leqslant \mathfrak{M}\big(j+|\overrightarrow{m}|\big), \quad \forall j\in\mathbb{N}. \tag{13}$$

On obtient ainsi un développement de (12) comme somme dénombrable de la forme

$$\phi = \sum\nolimits_{\overrightarrow{m}\leqslant j} H_{\overrightarrow{m},j}\big(\overrightarrow{X},F,\tfrac{1}{F},\tfrac{1}{1-F}\big)\,\Delta_1^{m_1}\cdots\Delta_{\ell+1}^{m_{\ell+1}} \tag{14}$$

avec

$$H_{\overrightarrow{m},j}\in\boldsymbol{I}^j\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F,\overrightarrow{T}] \quad\text{et}\quad \mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}\big(H_{\overrightarrow{m},j}\big)\geqslant j\geqslant|\overrightarrow{m}| \tag{15}$$

et donc aussi grâce à (13) :

$$\deg\big(H_{\overrightarrow{m},j}\big)\leqslant\mathfrak{M}\big(j+|\overrightarrow{m}|\big)\leqslant 2\mathfrak{M}\,\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}\big(H_{\overrightarrow{m},j}\big). \tag{16}$$

Pour $I=(i_1,\ldots,i_\ell)\in\mathbb{N}^\ell$, on notera $\overrightarrow{X}^I := X_1^{i_1}\cdots X_\ell^{i_\ell}$, puis $|I|=i_1+\cdots+i_\ell$ et donc $\deg(\overrightarrow{X}^I)=|I|$. De même, pour $\overrightarrow{m}\in\mathbb{N}^{\ell+1}$, on notera $\Delta^{\overrightarrow{m}} = \Delta_1^{m_1}\cdots\Delta_{\ell+1}^{m_{\ell+1}}$.

Soit $z\in\mathscr{R}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{C})$ et $z=\sum_{k\geqslant 0}\boldsymbol{Z_k}(\overrightarrow{\boldsymbol{X}},\boldsymbol{F},\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{F}})$ une série de type $\mathscr{R}(\boldsymbol{C})$ (*cf.* 2.3.2)**.**

Pour chaque $k\in\mathbb{N}$ fixe, $Z_k(\overrightarrow{X},F,\frac{1}{F})$ est somme de termes de la forme $\overrightarrow{X}^I F^a\big(\frac{1}{F}\big)^b$ avec $|I|+a+b\leqslant\deg_{\overrightarrow{X},F,T}(Z_k)$. On a alors

$$\Delta\big(\overrightarrow{X}^I F^a\big(\tfrac{1}{F}\big)^b\big) = \Delta\big(\overrightarrow{X}^I\big)F^a\big(\tfrac{1}{F}\big)^b + a\overrightarrow{X}^I F^{a-1}\big(\tfrac{1}{F}\big)^b\Delta(F) - b\overrightarrow{X}^I F^a\big(\tfrac{1}{F}\big)^{b+1}\Delta(F),$$

où $\Delta(F)\in\{0,1\}$. Il s'ensuit que $\Delta\big(\overrightarrow{X}^I F^a\big(\frac{1}{F}\big)^b\big) = Q(\overrightarrow{X},F,\frac{1}{F})$ où $Q\in\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F,T]$ vérifie

$$\deg Q\leqslant|I|+a+b+|\overrightarrow{m}|\leqslant\deg_{\overrightarrow{X},F,T}(Z_k)+|\overrightarrow{m}|.$$

Par conséquent, on aura pour chaque $\overrightarrow{m}$

$$\Delta^{\overrightarrow{m}}(z) = \sum\nolimits_{0\leqslant k}\Delta^{\overrightarrow{m}}Z_k(\overrightarrow{X},F,\tfrac{1}{F}) = \sum\nolimits_{0\leqslant k} Z'_{\overrightarrow{m},k}\big(\overrightarrow{X},F,\tfrac{1}{F}\big),$$

avec pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{l} Z'_{\vec{m},k}(\vec{X},F,T)\in \boldsymbol{I}^k\boldsymbol{R}[\vec{X},F,T]\,,\ \text{et}\\ \deg\big(Z'_{\vec{m},k}\big)\leqslant \deg\big(Z_k\big)+|\vec{m}|\leqslant C(k+1)+|\vec{m}|\leqslant\\ \qquad\qquad\leqslant C(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(Z_k)+1)+|\vec{m}|\leqslant C(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(Z'_{\vec{m},k})+1)+|\vec{m}|\,. \end{array}\right. \tag{17}$$

où il convient de retenir les inégalités

$$k\leqslant \mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}\big(Z_k(\vec{X},F,T)\big)\leqslant \mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}\big(Z'_{\vec{m},k}(\vec{X},F,T)\big) \tag{18}$$

En rassemblant toutes ces remarques on obtient une somme formelle dénombrable

$$\phi(z)=\sum\nolimits_{\vec{m}\leqslant j,k} H_{\vec{m},j}\big(\vec{X},F,\tfrac{1}{F},\tfrac{1}{1-F}\big)\,Z'_{\vec{m},k}\big(\vec{X},F,\tfrac{1}{F}\big) \tag{19}$$

où l'on a d'après (15), (16) et (17) et pour $H_{\vec{m},j}$ et $Z'_{\vec{m},k}$ considérés dans $\boldsymbol{R}[\vec{X},F,\vec{T}]$,

$$\deg_{\vec{X},F,\vec{T}}(H_{\vec{m},j}\,Z'_{\vec{m},k})\leqslant(2\boldsymbol{\mathcal{M}}+1)\,\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(H_{\vec{m},j})+C\big(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(Z'_{\vec{m},k})+1\big)$$

et donc, si $C>2\boldsymbol{\mathcal{M}}+1$:

$$\deg(H_{\vec{m},j}\,Z'_{\vec{m},k})\leqslant C\big(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(H_{\vec{m},j}\,Z'_{\vec{m},k})+1\big)\,. \tag{20}$$

Cela étant, pour chaque $v\in\mathbb{N}$, l'inégalité $\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(H_{\vec{m},j}\,Z'_{\vec{m},k})\leqslant v$ implique $k\leqslant v$ (18) et $|\vec{m}|\leqslant j\leqslant v$ (15) de sorte que seul un nombre **fini** de termes de la série (19) sont de valuation inférieure à un entier donné. Aussi, si nous notons J_j la somme (finie) des termes de la série (19) de valuation $\boldsymbol{I}$-adique égale à j, la série $\sum_j J_j(\vec{X},\frac{1}{F},\frac{1}{1-F})$ converge vers $\phi(z)$ mais, plus important encore, on a $\phi(z)\in\boldsymbol{\mathcal{R}}_{F,1-F}(C)$ d'après (20).

Ces mêmes raisonnements s'appliquent pour $z\in\boldsymbol{\mathcal{R}}_{1-F}(C)$ ce qui prouve :

Lemme 1. Si $C\geqslant 2\boldsymbol{\mathcal{M}}+1$, on a : $\phi\big(\boldsymbol{\mathcal{R}}_F(C)\big)\subseteq\boldsymbol{\mathcal{R}}_{F,1-F}(C)$ et $\phi\big(\boldsymbol{\mathcal{R}}_{1-F}(C)\big)\subseteq\boldsymbol{\mathcal{R}}_{F,1-F}(C)$.

Nous somme maintenant en mesure de prouver la surjectivité de $\delta_\phi{}^\dagger$ ce pourquoi il suffira, d'après (2.3.3-a), de monter que ses restrictions

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_F(C)\oplus\boldsymbol{\mathcal{R}}_{1-F}(C)\xrightarrow{\delta_\phi{}^\dagger}\boldsymbol{\mathcal{R}}_{F,1-F}(C)\,,$$

(bien définies lorsque $C\geqslant 2\boldsymbol{\mathcal{M}}+1$) le sont.

Nous avons déjà montré que $\delta_0:\boldsymbol{\mathcal{R}}_F(C)\oplus\boldsymbol{\mathcal{R}}_{1-F}(C)\twoheadrightarrow\boldsymbol{\mathcal{R}}_{F,1-F}(C)$ est bien définie, surjective (2.3.3) et de section $\boldsymbol{R}$-linéaire $\sigma=\big(\sigma_F(_),\sigma_{1-F}(_)\big)$ (*cf.* 2.3.1-(11)).

Lemme 2. Soit $C\geqslant 2\boldsymbol{\mathcal{M}}+1$. Si $z\in\boldsymbol{\mathcal{R}}_{F,1-F}(C)$, on a l'égalité dans $\boldsymbol{R}[\vec{X},F]\big[\frac{1}{F(1-F)}\big]\widehat{\ }$

$$z=\sum\nolimits_{0\leqslant j}\sigma_F\big[(\phi-1)\sigma_{1-F}\big]^j(z)-\phi\Big(\sum\nolimits_{0\leqslant j}\sigma_{1-F}\big[(\phi-1)\sigma_{1-F}\big]^j(z)\Big) \tag{21}$$

où, les séries du membre de droite convergent vers des éléments de $\boldsymbol{\mathcal{R}}_F(C)$ et $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{1-F}(C)$ respectivement.

Preuve. Pour $r\in\mathbb{N}$, soit $w=\sum_{r\leqslant k}Z_k(\vec{X},F,\frac{1}{F},\frac{1}{1-F})$ où $\sum_{r\leqslant k}Z_k$ est de type $\mathscr{R}(C)$ (2.3.2). On a bien évidemment $w\in \boldsymbol{I}^r\boldsymbol{R}[\vec{X},F]\big[\frac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger$ mais aussi grâce au lemme 2.3.3 et au lemme 1 :

$$\begin{cases}\sigma_F(w)=\sum_{r\leqslant k}Z'_k(\vec{X},F,\frac{1}{F}) \text{ et } \sigma_{1-F}(w)=\sum_{r\leqslant k}Z''_k(\vec{X},F,\frac{1}{1-F}),\\ (\phi-1)(w)=\sum_{r+1\leqslant k}Z'''_k(\vec{X},F,\frac{1}{F},\frac{1}{1-F}),\end{cases}$$

où les séries $\sum_{r\leqslant k}Z'_k$ $\sum_{r\leqslant k}Z''_k$ et $\sum_{r+1\leqslant k}Z'''_k$ son de type $\mathscr{R}(C)$. On aura donc

$$\big[(\phi-1)\sigma_{1-F}\big]^j(z)=\sum_{r+j\leqslant k}Z_k^{(j)}\big(\vec{X},F,\tfrac{1}{F},\tfrac{1}{1-F}\big)$$

pour une certaine série $\sum_{r+j\leqslant k}Z_k^{(j)}$ de type $\mathscr{R}(C)$ de sorte que dans la somme dénombrable du deuxième membre

$$\sum\nolimits_{0\leqslant j}\big[(\phi-1)\sigma_{1-F}\big]^j(w)=\sum\nolimits_{0\leqslant j}\Big(\sum\nolimits_{r+j\leqslant k}Z_k^{(j)}\big(\vec{X},\tfrac{1}{F},\tfrac{1}{1-F}\big)\Big)$$

il n'y aura qu'un nombre fini de termes d'indice donné et la série obtenue en les additionnant sera encore de type $\mathscr{R}(C)$.

Pour terminer, si nous notons pour simplifier $U:=(\phi-1)\sigma_{1-F}$, on a

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{0\leqslant j}\sigma_F U^j(z)-\phi\Big(\sum\nolimits_{0\leqslant j}\sigma_{1-F}U^j(z)\Big)&=\\ &=\sum\nolimits_{0\leqslant j}\sigma_F U^j z-\sum\nolimits_{0\leqslant j}\sigma_{1-F}U^j z-(\phi-1)\Big(\sum\nolimits_{0\leqslant j}\sigma_{1-F}U^j(z)\Big)\\ &=\Big(\sum\nolimits_{0\leqslant j}U^j(z)\Big)-\Big(\sum\nolimits_{1\leqslant j}U^j z\Big)=z\,.\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du lemme et donc celle du théorème. □■

2.5 Un théorème pour le recollement de modules sur une algèbre f.c.t.f.

Le théorème suivant joue un rôle clef dans l'étude des faisceau cohérents sur une schéma †-adique affine de la section 4.2.

2.5.1. Théorème. *On se donne $f\in\boldsymbol{A}^\dagger\in\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$, un $\boldsymbol{A}^\dagger{}_1$-module de type fini $\overline{\boldsymbol{L}}$, des relèvements*

$$\begin{cases}\mu:\boldsymbol{M}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{L}}\big[\frac{1}{f}\big], & \boldsymbol{M}\in\mathbf{Mod}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{A}^\dagger\big\{\frac{1}{f}\big\})\\ \nu:\boldsymbol{N}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{L}}\big[\frac{1}{1-f}\big], & \boldsymbol{N}\in\mathbf{Mod}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{A}^\dagger\big\{\frac{1}{1-f}\big\})\end{cases}$$

On suppose qu'il existe un isomorphisme de $\boldsymbol{A}^\dagger\big\{\frac{1}{f(1-f)}\big\}$-modules $\varphi:\boldsymbol{N}\big\{\frac{1}{f}\big\}\to\boldsymbol{M}\big\{\frac{1}{1-f}\big\}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{N}\big\{\frac{1}{f}\big\} & \xrightarrow{\varphi} & \boldsymbol{M}\big\{\frac{1}{1-f}\big\}\\ {\scriptstyle\nu\{1/f\}}\big\downarrow & \bigoplus & \big\downarrow{\scriptstyle\mu\{1/1-f\}}\\ \overline{\boldsymbol{L}}\big[\frac{1}{(1-f)f}\big] & = & \overline{\boldsymbol{L}}\big[\frac{1}{f(1-f)}\big]\end{array}$$

Alors, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{M} & \oplus & \boldsymbol{N} & \xrightarrow{\delta_\varphi{}^\dagger} & \boldsymbol{M}\{\frac{1}{1-f}\} \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & {\scriptstyle\nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu\{1/1-f\}} \\ \overline{\boldsymbol{L}}[\frac{1}{\overline{f}}] & \oplus & \overline{\boldsymbol{L}}[\frac{1}{1-\overline{f}}] & \xrightarrow{\delta_0} & \overline{\boldsymbol{L}}[\frac{1}{\overline{f}(1-\overline{f})}] \end{array}$$

avec $\delta_0(x,y)=x-y$ *et* $\delta_\varphi{}^\dagger(x,y)=x-\varphi(y)$, *le morphisme* $\delta_\varphi{}^\dagger$ *est* ***surjectif****.*

Preuve. Soit $\overline{\pi}:(\boldsymbol{A}^\dagger)^\ell \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{L}}$ une surjection de $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules et notons de la même manière les surjections induites après localisation †-adique $\overline{\pi}:(\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{\star}\})^\ell \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{L}}[\frac{1}{\overline{\star}}]$ où $\star\in\{f,1-f,f(1-f)\}$. Notons π des relèvements de $\overline{\pi}$

$$(\boldsymbol{A}^\dagger\{\tfrac{1}{f}\})^\ell \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{M} \xrightarrow{\mu} \overline{\boldsymbol{L}}[\tfrac{1}{\overline{f}}] \qquad (\boldsymbol{A}^\dagger\{\tfrac{1}{1-f}\})^\ell \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{N} \xrightarrow{\nu} \overline{\boldsymbol{L}}[\tfrac{1}{1-\overline{f}}]$$

Les applications π sont surjectives puisque de réduction surjective et que $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont de type fini sur des anneaux de Zariski.

On notera $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_\ell\}$ la base canonique de $(\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f(1-f)}\})^\ell$. Soit $\psi:(\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f(1-f)}\})^\ell$ un endomorphisme de $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules tel que $\psi(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{e}_i \bmod \boldsymbol{I}$ et tel que $\pi\circ\psi=\varphi\circ\pi$.

$$\begin{array}{ccc} (\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f(1-f)}\})^\ell & \xrightarrow{\psi} & (\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f(1-f)}\})^\ell \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \bigoplus & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \boldsymbol{N}\{\frac{1}{f}\} & \xrightarrow[\simeq]{\varphi} & \boldsymbol{M}\{\frac{1}{1-f}\} \end{array}$$

Le morphisme ψ est bijectif. En effet, surjectif puisque son conoyau est à priori séparé (1.3.1-g) et de réduction modulo $\boldsymbol{I}$ nulle, puis injectif puisque son noyau est alors facteur direct de $(\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f(1-f)}\})^\ell$ et de réduction nulle.

On a ainsi les ingrédients d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\})^\ell & \oplus & (\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{1-f}\})^\ell & \xrightarrow{\delta_\psi{}^\dagger} & (\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f(1-f)}\})^\ell \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & {\scriptstyle\pi}\downarrow & & {\scriptstyle\pi}\downarrow \\ \boldsymbol{M} & \oplus & \boldsymbol{N} & \xrightarrow{\delta_\varphi{}^\dagger} & \boldsymbol{M}\{\frac{1}{1-f}\} \end{array}$$

où $\delta_\psi(x,y)=x-\psi(y)$. La surjectivité de $\delta_\varphi{}^\dagger$ résultera de celle de $\delta_\psi{}^\dagger$.

Si nous fixons maintenant une surjection d'algèbres $\alpha:\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]^\dagger \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}^\dagger$ avec $\alpha(F)=f$, ces idées permettent aussi de construire un isomorphisme $\phi:(\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F][\frac{1}{F(1-F)}]^\dagger)^\ell$ égal à l'identité modulo $\boldsymbol{I}$ et tel que $\pi\circ\phi=\psi\circ\pi$. La surjection de $\delta_\psi{}^\dagger$ résulte alors de celle de

$$(\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F][\tfrac{1}{F}]^\dagger)^\ell \oplus (\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F][\tfrac{1}{1-F}]^\dagger)^\ell \xrightarrow{\delta_\phi{}^\dagger} (\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F][\tfrac{1}{F(1-F)}]^\dagger)^\ell \qquad (\diamond)$$

avec $\delta_\phi{}^\dagger(x,y)=x-\phi(y)$.

La démarche pour prouver la surjectivité de ${\delta_\phi}^\dagger$ est la même que dans la preuve du théorème 2.4.1, elle est basée sur les propriétés suivantes.

i) La surjectivité du morphisme

$$\big(\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\tfrac{1}{F}\big]^\dagger\big)^\ell \oplus \big(\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\tfrac{1}{1-F}\big]^\dagger\big)^\ell \xrightarrow{{\delta_0}^\dagger} \big(\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\tfrac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger\big)^\ell$$

où ${\delta_0}^\dagger(\vec{x},\vec{y}) = (x_i - y_i)_{i=1,\dots,\ell}$, évidente car somme directe de surjections (2.2.4).

ii) L'existence d'une section linéaire σ de ${\delta_0}^\dagger$. On pose $\sigma(\vec{x}) = (\sigma(x_i))_{i=1,\dots,\ell}$ (2.3.1).

iii) Les sous-modules $\mathscr{R}_*(C)^\ell \subseteq \big(\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{*}\big]\big)^\ell$ (*cf.* 2.3.2) vérifient

a) $\big(\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{*}\big]^\dagger\big)^\ell = \bigcup\uparrow_{C\in\mathbb{N}} \mathscr{R}_*(C)^\ell$.

b) Pour chaque $C\in\mathbb{N}$,
$${\delta_0}^\dagger\big(\mathscr{R}_F(C)^\ell \oplus \mathscr{R}_{1-F}(C)^\ell\big) = \mathscr{R}_{F,1-F}(C)^\ell,\ \sigma\big(\mathscr{R}_{F,1-F}(C)^\ell\big) \subseteq \mathscr{R}_F(C)^\ell \oplus \mathscr{R}_{1-F}(C)^\ell$$
puisqu'il en est ainsi coordonnée par coordonnée d'après 2.3.3.

iv) L'isomorphisme ϕ conserve $\mathscr{R}_{F,1-F}(C)^\ell$ pour $C \gg 0$.

Soient $\epsilon = \phi - \mathrm{id}$ et $z_{i,j} := \epsilon(\boldsymbol{e}_i)_j$, pour $i,j = 1,\dots,\ell$. On a $z_{i,j} := \boldsymbol{I}\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},F]\big[\frac{1}{F(1-F)}\big]^\dagger$ et des séries $\sum_{1\leqslant k} Z_{i,j,k}(\overrightarrow{X},F,T_1,T_2)$ vérifiant $\deg Z_{i,j,k} \leqslant \mathfrak{M}k$ pour un certain $\mathfrak{M}\in\mathbb{N}$ telles que $z_{i,j} = \sum_{1\leqslant k} Z_{i,j,k}\big(\overrightarrow{X},F,\frac{1}{F},\frac{1}{1-F}\big)$. Pour $\vec{x}\in\mathscr{R}_{F,1-F}(C)^\ell$, choisissons des séries $\sum_{0\leqslant n} P_{i,n}$ de type $\mathscr{R}_{F,1-F}(C)$ telles que $x_i = \sum_{0\leqslant n} P_{i,n}(\overrightarrow{X},F,\frac{1}{F},\frac{1}{1-F})$. Alors, dans les sommes formelles

$$\epsilon(\vec{x})_j = \sum\nolimits_{i=1,\dots,\ell} x_i\,\epsilon(\boldsymbol{e}_i)_j = \sum\nolimits_{i=1,\dots,\ell} \Big(\sum\nolimits_{0\leqslant n} P_{i,n}\Big)\Big(\sum\nolimits_{1\leqslant k} Z_{i,j,k}\Big) \qquad (*)$$

on a $\deg P_{i,n}\,Z_{i,j,k} \leqslant C(n+1) + \mathfrak{M}k$ et, par conséquent, si $C \geqslant \mathfrak{M}$

$$\deg P_{i,n}\,Z_{i,j,k} \leqslant C\big(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(P_{i,n}\,Z_{i,j,k}) + 1\big).$$

Ainsi, en regroupant les termes de $(*)$ par valuation $\boldsymbol{I}$-adique on a $\epsilon(\vec{x})\in\mathscr{R}_{F,1-F}(C)^\ell$ et donc aussi $\phi\big(\mathscr{R}_{F,1-F}(C)^\ell\big) = \mathscr{R}_{F,1-F}(C)^\ell$.

Ces propriétés sont tout ce qu'il faut pour démontrer l'analogue du lemme 2 de la preuve du théorème 2.4.1 qui s'énonce maintenant en disant que pour tout $C\geqslant\mathfrak{M}$ et pour tout $\vec{z}\in\mathscr{R}_{F,1-F}(C)^\ell$ les séries dans membre de droite de l'égalité formelle

$$\vec{z} = \sum\nolimits_{0\leqslant j} \sigma_F\big[(\phi-1)\sigma_{1-F}\big]^j(\vec{z}) - \phi\Big(\sum\nolimits_{0\leqslant j} \sigma_{1-F}\big[(\phi-1)\sigma_{1-F}\big]^j(\vec{z})\Big)$$

convergent bien vers des éléments de $\mathscr{R}_{F,1-F}(C)^\ell$, autrement dit, les applications

$${\delta_\phi}^\dagger : \mathscr{R}_F(C)^\ell \oplus \mathscr{R}_{1-F}(C)^\ell \longrightarrow \mathscr{R}_{F,1-F}(C)^\ell$$

sont bien définies et surjectives dès que $C\geqslant\mathfrak{M}$.

La surjectivité de ${\delta_\phi}^\dagger$ dans $(\diamond)$ est alors conséquence de la propriété iii-(a). ∎

§3. Schémas †-adiques

Dans cette section nous rappellerons la définition de Meredith ([M]) des «*schémas formels faibles (affines)*», que nous appelons «*schémas †-adiques (affines)*», et redémontrerons ses théorèmes d'acyclicité en les débarrassant des hypothèses superflues sur le couple $(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ dont nous ne supposerons que la nœthérianité de $\boldsymbol{R}$. Mais auparavant nous commençons pas quelques remarques sur la cohomologie de Čech.

3.1 Cohomologie de Čech

Dans cette partie on note $\boldsymbol{Y}$ un espace topologique et $\mathscr{B}$ une famille d'ouverts vérifiant les propriétés suivantes

$\mathscr{B}$-i) $\mathscr{B}$ est une base de la topologie de $\boldsymbol{Y}$, *i.e.* tout ouvert de $\boldsymbol{Y}$ peut être recouvert par des ouverts de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ est stable par intersection finie.

$\mathscr{B}$-ii) De tout recouvrement d'un ouvert de $\mathscr{B}$ par des ouverts de $\mathscr{B}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini.

$\mathscr{B}$-iii) Pour tous $U_1,\dots,U_\ell \in \mathscr{B}$ de réunion $U \in \mathscr{B}$, il existe $V \in \mathscr{B}$ tel que

$$U = U_1 \cup V \quad \text{et} \quad V \subseteq U_2 \cup \cdots \cup U_\ell\,.$$

Exemples

- $\boldsymbol{Y}$ est l'espace topologique sous-jacent au schéma affine associé à un anneau $\boldsymbol{A}$ et $\mathscr{B}$ est l'ensemble des ouverts principaux.

  Vérifions ($\mathscr{B}$-iii). L'inclusion $D(f) \subseteq D(f_1) \cup D(f_2) \cup \cdots \cup D(f_\ell)$ équivaut à l'existence d'une égalité de la forme $f^N = \zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2 + \cdots + \zeta_\ell f_\ell$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $\zeta_i \in \boldsymbol{A}$. Il s'ensuit que si nous notons $g = \sum_{i=2}^{\ell} \zeta_i f_i$, on a aussi $D(f) = D(f_1) \cup D(g)$ et bien évidemment $D(g) \subseteq D(f_i)$.
- $\boldsymbol{Y}$ l'espace topologique sous-jacent à un schéma séparé et $\mathscr{B}$ l'ensemble de ses ouverts affines. Conséquence de la propriété précédente.

3.1.1. Lemme. *Soit $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{B}$ vérifiant*

$\mathscr{F}$-i) Tout ouvert dans $\mathscr{B}$ admet un recouvrement par des ouverts de $\mathscr{F}$.

$\mathscr{F}$-ii) Tout ouvert de $\mathscr{B}$ contenu dans un ouvert de $\mathscr{F}$ appartient à $\mathscr{F}$.

$\mathscr{F}$-iii) Un ouvert de $\mathscr{B}$ réunion de deux ouverts de $\mathscr{F}$ appartient à $\mathscr{F}$.

Alors $\mathscr{F} = \mathscr{B}$.

Preuve. Pour $U \in \mathscr{B}$, notons $\ell(U)$ le plus petit des cardinaux des recouvrements de U par des ouverts de $\mathscr{F}$. Supposons le lemme prouvé pour tout $W \in \mathscr{B}$ tel que $\ell(W) < \ell$ et soit $U \in \mathscr{B}$ avec $\ell(U) = \ell$, On a $U = U_1 \cup \cdots \cup U_\ell$ avec $U_i \in \mathscr{F}$. Par ($\mathscr{B}$-iii) il existe $V \in \mathscr{B}$ avec $U = U_1 \cup V$ et $V \subseteq U_2 \cup \cdots \cup U_\ell$. Mais alors $V \in \mathscr{F}$ car $V = \bigcup_{i=2,\dots,\ell}(V \cap U_i)$ et chaque $(V \cap U_i) \in \mathscr{F}$ d'après ($\mathscr{B}$-ii) et on conclut par ($\mathscr{B}$-iii). ∎

3.1.2. Cohomologie de Čhech de préfaisceaux. A partir de maintenant, l'espace $\boldsymbol{Y}$ et l'ensemble $\mathscr{B}$ sont fixés. L'ensemble $\mathscr{B}$ muni des inclusions entre ses ouverts est une sous-catégorie de la catégories des ouverts de $\boldsymbol{Y}$. Soit $\mathscr{P}$ un préfaisceau de groupes abéliens sur la catégorie $\mathscr{B}$. Étant donnés un ensemble totalement ordonné $(\mathfrak{A},\leqslant)$, une famille $\mathscr{U}=\{U_i \mid i\in\mathfrak{A}\}$ d'éléments de $\mathscr{B}$ de réunion un élément $U\in\mathscr{B}$ et un entier $n\in\mathbb{N}$, « *le groupe des n-cochaînes de Čech à valeurs dans $\mathscr{P}$ relatives à $\mathscr{U}$* » est le groupe :

$$\check{C}^n(\mathscr{U};\mathscr{P}) := \prod_{i_0<i_1<\cdots<i_n}\mathscr{P}(U_{i_0\ldots i_\ell})$$

où $U_{i_0\ldots i_\ell} := U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_n}$. Le « *$n$-cobord* » est l'application :

$$\begin{array}{rcl}\delta_n : \check{C}^n(\mathscr{U};\mathscr{P}) & \longrightarrow & \check{C}^{n+1}(\mathscr{U};\mathscr{P}) \\ \omega & \longmapsto & \delta_n(\omega)_{i_0,\ldots,i_{n+1}} = \sum_{k=0,\ldots,n+1}(-1)^k\omega_{i_0,\ldots,\widehat{i_k},\ldots,i_{n+1}}\end{array}$$

On a $\delta_{n+1}\circ\delta_n=0$, d'où « *le complexe de Čech à valeurs dans $\mathscr{P}$ et relatif à $\mathscr{U}$* » :

$$(\check{C}^*(\mathscr{U};\mathscr{P}),\delta_*) := \Big(\mathbf{0}\to\check{C}^0(\mathscr{U};\mathscr{P})\xrightarrow{\delta_0}\check{C}^1(\mathscr{U};\mathscr{P})\xrightarrow{\delta_1}\cdots\cdots\xrightarrow{\delta_{k-1}}\check{C}^k(\mathscr{U};\mathscr{P})\xrightarrow{\delta_k}\cdots\Big)$$

dont l'homologie, notée $\check{H}^*(\mathscr{U};\mathscr{P})$, est la « *cohomologie de Čech de $\mathscr{P}$ relative à $\mathscr{U}$* ».

L'« *augmentation* » $\epsilon(U):\mathscr{P}(U)\to\check{C}^0(\mathscr{U};\mathscr{P})=\prod_{i\in\mathfrak{A}}\mathscr{P}(U_i\cap U)$, produit des morphismes de restriction $\mathscr{P}(U)\to\mathscr{P}(U_i\cap U)$, est à valeurs dans $\check{H}^0(\mathscr{U};\mathscr{P})$.

3.1.3. Proposition. *Supposons que pour tous $U,U_1,U_2\in\mathscr{B}$ tels que $U=U_1\cup U_2$, le complexe de Čech augmenté :*

$$\mathbf{0}\to\mathscr{P}(U)\xrightarrow{\epsilon(U)}\mathscr{P}(U_1)\oplus\mathscr{P}(U_2)\xrightarrow{\delta_0}\mathscr{P}(U_{12})\to\mathbf{0} \tag{22}$$

est ***exact****. Alors*

a) *Pour toute famille $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in\mathfrak{A}}$ d'ouverts de $\mathscr{B}$ de réunion un ouvert $U\in\mathscr{B}$, le complexe de Čech augmenté :*

$$\mathbf{0}\to\mathscr{P}(U)\xrightarrow{\epsilon(U)}\check{C}^0(\mathscr{U};\mathscr{P})\xrightarrow{\delta_0}\check{C}^1(\mathscr{U};\mathscr{P})\xrightarrow{\delta_1}\cdots\xrightarrow{\delta_{i-1}}\check{C}^i(\mathscr{U};\mathscr{P})\xrightarrow{\delta_i}\cdots$$

est ***exact****.*

b) *Soit $\widetilde{\mathscr{P}}$ le faisceau sur $\boldsymbol{Y}$ associé à $\mathscr{P}$, alors pour tout ouvert $U\in\mathscr{B}$:*

i) *Le morphisme canonique $\mathscr{P}(U)\to\Gamma(U;\widetilde{\mathscr{P}})$ est bijectif.*

ii) *$H^i(U;\widetilde{\mathscr{P}})=0$, pour tout $i>0$.*

Preuve

a) Par récurrence sur le plus petit cardinal $\ell(\mathscr{U})$ des sous-familles finies de $\mathscr{U}$ qui recouvrent U ($\mathscr{B}$-ii). Lorsque $\ell(\mathscr{U})=1$ on a $U_i=U$ pour un certain $i\in\mathfrak{A}$ et le complexe de Čech augmenté est homotope à zéro ([1]). Supposons maintenant $\ell(\mathscr{U})>1$ et l'assertion (a) démontrée pour tout recouvrement $\mathscr{V}$ d'un ouvert de $\mathscr{B}$ vérifiant $\ell(\mathscr{V})<\ell(\mathscr{U})$.

[1] *Cf.* [Go] p. 222, dernier paragraphe de §5.7.

Notons $\ell := \ell(\mathscr{U})$, soit $U_1,\dots,U_\ell$ une sous-famille minimale de $\mathscr{U}$ de réunion U et soit $V \in \mathscr{B}$ vérifiant ($\mathscr{B}$-iii), *i.e.*

$$U = U_1 \cup V \quad \text{et} \quad V = \bigcup\nolimits_{k=2,\dots,\ell} (V \cap U_k)\,.$$

On considère alors le bicomplexe

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathscr{P}(U) & \xrightarrow{\epsilon(U)} & \check{C}^*(\mathscr{U};\mathscr{P}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{0} & \to & \mathscr{P}(U_1)\oplus\mathscr{P}(V) & \xrightarrow{\epsilon(U_1)\oplus\epsilon(V)} & \check{C}^*(U_1\cap\mathscr{U};\mathscr{P})\oplus\check{C}^*(V\cap\mathscr{U};\mathscr{P}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathscr{P}(U_1\cap V) & \xrightarrow{\epsilon(U_1\cap V)} & \check{C}^*(U_1\cap V\cap\mathscr{U};\mathscr{P}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
\end{array} \tag{23}$$

où les colonnes sont définies à l'aide des suites

$$\mathbf{0} \to \mathscr{P}(U_{i_1\dots i_n}) \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{P}(U_1\cap U_{i_1\dots i_n})\oplus\mathscr{P}(V\cap U_{i_1\dots i_n}) \xrightarrow{\delta_0} \mathscr{P}(U_1\cap V\cap U_{i_1\dots i_n}) \to \mathbf{0}\,,$$

qui sont **exactes** par l'hypothèse de la proposition, quels que soient $n\in\mathbb{N}$ et $i_j \in \mathfrak{A}$. Le complexe de Čech augmenté $\mathbf{0}\to\mathscr{P}(U)\to\check{C}^*(\mathscr{U};\mathscr{P})$ est donc quasi-isomorphe au complexe simple associé au sous-bicomplexe des lignes inférieures de (23). Or, ces lignes sont exactes par hypothèse de récurrence puisque $\ell(U_1\cap\mathscr{U})=1$, $\ell(V\cap\mathscr{U})\leqslant\ell-1$ et $\ell(U_1\cap V\cap\mathscr{U})\leqslant\ell-1$ par construction. Ceci termine la preuve de (a).

b) Résulte de considérations générales sur la cohomologie de Čech que nous rappelons brièvement (*cf.* [Go] §5.8). Pour tout ouvert $W\subseteq\boldsymbol{Y}$ et chaque recouvrement $\mathscr{U}$ de W par des ouverts de $\mathscr{B}$ on dispose du complexe de Čech $\check{C}^*(\mathscr{U};\mathscr{P})$. Les propriétés 3.1-($\mathscr{B}$-$*$) assurent l'existence de raffinements pour deux tels recouvrements et on peux définir une cohomologie de Čech relative à $\mathscr{B}$, notée $\check{H}^*_{\mathscr{B}}(W;\mathscr{P})$, comme limite inductive des $\check{H}^*(\mathscr{U};\mathscr{P})$ suivant une famille cofinale convenable de recouvrements (*loc.cit.*). La correspondance $W\rightsquigarrow\check{H}^*_{\mathscr{B}}(W;\mathscr{P})$ définit alors naturellement un préfaisceau **sur** $\boldsymbol{Y}$ que nous notons $\check{\mathscr{H}}^*_{\mathscr{B}}(\mathscr{P})$. D'après (a) on a

$$\Gamma\big(U;\check{\mathscr{H}}^0_{\mathscr{B}}(\mathscr{P})\big) = \mathscr{P}(U)\,,\ \text{pour tout } U\in\mathscr{B},$$

et les mêmes raisonnements s'appliquent au préfaisceau $\check{\mathscr{H}}^0_{\mathscr{B}}(\mathscr{P})$ sur $\boldsymbol{Y}$, l'application canonique $\Gamma\big(U;\check{\mathscr{H}}^0_{\mathscr{B}}(\mathscr{P})\big)\to\Gamma\big(U;\check{\mathscr{H}}^0(\check{\mathscr{H}}^0_{\mathscr{B}}(\mathscr{P}))\big)$ est donc bijective pour tout $U\in\mathscr{B}$. Or, $\check{\mathscr{H}}^0(\check{\mathscr{H}}^0_{\mathscr{B}}(\mathscr{P}))$ est le faisceau $\widetilde{\mathscr{P}}$ sur $\boldsymbol{Y}$ associé à $\mathscr{P}$ et (b-i) est prouvée. Il s'ensuit que le morphisme canonique

$$\check{H}^i_{\mathscr{B}}(W;\mathscr{P}) \longrightarrow \check{H}^i(W;\widetilde{\mathscr{P}})$$

est bijectif pour tout ouvert $W\subseteq\boldsymbol{Y}$. En particulier, $\check{H}^i(U;\widetilde{\mathscr{P}})=0$ pour $i>0$ et $U\in\mathscr{B}$

et le théorème 5.9.2 dans [Go] qui relie la cohomologie de Čech à la cohomologie de faisceaux s'applique ; le morphisme canonique

$$\check{H}^i(W;\widetilde{\mathscr{P}}) \longrightarrow H^i(W;\widetilde{\mathscr{P}})$$

est bijectif pour tout ouvert $W \subseteq \boldsymbol{Y}$. On conclut que $H^i(U;\widetilde{\mathscr{P}}) \simeq \check{H}^i_{\mathscr{B}}(U;\mathscr{P}) = 0$ pour $i > 0$ et $U \in \mathscr{B}$ d'après (a). ∎

3.1.4. Remarque. Si dans l'énoncé de 3.1.3 les suites (22) sont uniquement supposées exactes à gauche, la même démonstration prouve que les complexes de Čech augmentés dans (b) sont exacts à gauche et l'assertion (b-i) en découle.

3.2 Le foncteur $(_)^{\tilde{}} : \mathbf{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$

3.2.1. Soit $\boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et notons $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ le schéma affine associé à l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger{}_1$, réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\boldsymbol{A}^\dagger$. Soient $f, g \in \boldsymbol{A}^\dagger$. Lorsque $f = g \bmod \boldsymbol{I}$, l'élément g est inversible dans $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ (1.3.1-f) et donc $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} = \boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{g}\}$. La correspondance qui associe à l'ouvert principal $D(\overline{f}) \subseteq \boldsymbol{X}$ l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ est ainsi bien définie. De même, $D(\overline{g}) \subseteq D(\overline{f})$, si et seulement si $g \in \sqrt{f}$, auquel cas f est inversible dans $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{g}\}$ et il existe morphisme canonique (1.3.3) « *de restriction* » de $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ vers $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{g}\}$. La correspondance $\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$

$$\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger} : D(\overline{f}) \rightsquigarrow \boldsymbol{A}^\dagger\{\tfrac{1}{f}\}, \qquad \mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger} : \big(D(f) \supseteq D(g)\big) \rightsquigarrow \big(\boldsymbol{A}^\dagger\{\tfrac{1}{f}\} \to \boldsymbol{A}^\dagger\{\tfrac{1}{g}\}\big)$$

est un préfaisceau sur la catégorie $\mathscr{B}$ des ouverts principaux de $\boldsymbol{X}$ dont on notera $\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$ le faisceau d'algèbres sur $\boldsymbol{X}$ qui lui est associé.

3.2.2. Plus généralement on considérera le foncteur

$$(_)^{\tilde{}} : \mathbf{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$$

de la catégorie des $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules (à gauche) vers la catégorie des $\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$-modules (à gauche) qui fait correspondre au $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$ le faisceau $\boldsymbol{M}^{\tilde{}}$ associé au préfaisceau sur $\mathscr{B}$:

$$\mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}(_) := \mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(_) \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M} : D(\overline{f}) \rightsquigarrow \boldsymbol{A}^\dagger\{\tfrac{1}{f}\} \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}\{\tfrac{1}{f}\},$$

et qui fait correspondre au morphisme de $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules $\alpha : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ le morphisme de faisceaux $\alpha^{\tilde{}} = \boldsymbol{M}^{\tilde{}} \to \boldsymbol{N}^{\tilde{}}$ associé au morphisme de préfaisceaux $\mathrm{id}_{\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}} \otimes \alpha : \mathscr{P}_{\boldsymbol{M}} \to \mathscr{P}_{\boldsymbol{N}}$.

3.2.3. Morphisme d'adjonction. La composée d'un morphisme de $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules $\alpha : \boldsymbol{M} \to \mathscr{N}(\boldsymbol{X})$ avec les morphismes de restriction $\mathscr{N}(\boldsymbol{X}) \to \mathscr{N}(D(\overline{f}))$ se factorise d'une

unique manière en une application $\alpha\{\frac{1}{f}\} : \boldsymbol{M}\{\frac{1}{f}\} \to \mathscr{N}(D(\overline{f}))$ et la famille des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{M} & \xrightarrow{\alpha} & \mathscr{N}(\boldsymbol{X}) \\ {\scriptstyle \nu_f{}^\dagger(\boldsymbol{M})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{rest.}} \\ \boldsymbol{M}\{\frac{1}{f}\} & \xrightarrow{\alpha\{1/f\}} & \mathscr{N}(D(\overline{f})) \end{array}$$

est un morphisme de préfaisceaux sur la catégorie $\mathscr{B}$ des ouverts affines de $\boldsymbol{X}$ dont on notera $\Xi(\boldsymbol{M};\mathscr{N})(\alpha) : \boldsymbol{M}^{\tilde{}} \to \mathscr{N}$ le morphisme de faisceaux sur $\boldsymbol{X}$ associé. L'application ainsi définie

$$\Xi(\boldsymbol{M};\mathscr{N}) : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\boldsymbol{M},\mathscr{N}(\boldsymbol{X})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}}(\boldsymbol{M}^{\tilde{}},\mathscr{N}),$$

est clairement fonctorielle par rapport à $\boldsymbol{M}$ et $\mathscr{N}$.

Terminologie. Pour tout $\mathscr{N} \in \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$, le morphisme $\Xi(\mathscr{N}(\boldsymbol{X}),\mathscr{N}) : \mathscr{N}(\boldsymbol{X})^{\tilde{}} \to \mathscr{N}$ sera appelé «*le morphisme canonique*».

3.2.4. Proposition. *Soit $\boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et notons $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ le schéma affine associé à ${\boldsymbol{A}^\dagger}_1$. Le foncteur $(_)^{\tilde{}} : \mathbf{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$ est l'adjoint à gauche du foncteur des sections globales $\Gamma(\boldsymbol{X};_) : \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger)$. Plus précisément, l'application*

$$\Xi(\boldsymbol{M};\mathscr{N}) : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\boldsymbol{M},\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{N})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}}(\boldsymbol{M}^{\tilde{}},\mathscr{N}),$$

est ***bijective***.

Indication. On a d'une part $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}}(\boldsymbol{M}^{\tilde{}};\mathscr{N}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}}(\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger} \otimes \boldsymbol{M};\mathscr{N})$ par l'adjonction du foncteur «*faisceaux associé*» et d'autre part $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\boldsymbol{M};\mathscr{N}(\boldsymbol{Y})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}}(\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger} \otimes \boldsymbol{M};\mathscr{N})$. ∎

Le théorème suivant rassemble plusieurs résultats démontrés dans [M] sous des hypothèses restrictives sur le couple $(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

3.2.5. Théorème. *Soit $\boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. Alors :*

a) *Le foncteur $(_)^{\tilde{}} : \mathbf{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$ est exact.*

b) *Pour tout $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$ et tout ouvert principal $D(\overline{f}) \subseteq \boldsymbol{X}$:*

i) *Le morphisme canonique $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M} \to \Gamma\big(D(\overline{f});\boldsymbol{M}^{\tilde{}}\big)$ est bijectif.*

ii) *Pour tout recouvrement principal $\mathscr{U} = \{U_i\}$ de $D(\overline{f})$, on a*

$$\check{H}^i\big(\mathscr{U};\boldsymbol{M}^{\tilde{}}\big) = 0, \text{ pour tout } i > 0.$$

iii) $H^i\big(D(\overline{f});\boldsymbol{M}^{\tilde{}}\big) = 0$, *pour tout* $i > 0$.

c) *Étant donnés deux $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$, l'application naturelle induite par le foncteur $(_)^{\tilde{}}$*

$$\Xi(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}) : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}}(\boldsymbol{M}^{\tilde{}},\boldsymbol{N}^{\tilde{}})$$

est bijective, i.e. *le foncteur $(_)^{\tilde{}}$ est pleinement fidèle.*

Preuve. Nous nous plaçons dans le contexte d'application de la proposition 3.1.3. L'espace topologique est $\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}^\dagger{}_1)$, l'ensemble d'ouverts $\mathscr{B}$ est l'ensemble des ouverts principaux de $\boldsymbol{X}$ et le préfaisceau sur $\mathscr{B}$ est défini pour chaque $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$ par la correspondance $\mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}$ (*cf.* 3.2.2) :

$$D(\overline{f}) \rightsquigarrow \mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}\big(D(\overline{f})\big) := \boldsymbol{A}^\dagger\big\{\tfrac{1}{f}\big\} \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$$

Le foncteur $\boldsymbol{M} \rightsquigarrow \mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}$ est alors exact puisque chaque $\boldsymbol{A}^\dagger\big\{\frac{1}{f}\big\}$ est un $\boldsymbol{A}^\dagger$-module plat (1.3.5-d). L'assertion (a) en découle car le foncteur "faisceau associé" est lui aussi exact.

De l'égalité de préfaisceaux $\mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}(_) = \mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(_) \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$ on déduit aussitôt l'identification des complexes de Čech

$$(\check{C}^*(\mathscr{U}; \mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}), \delta_*) = (\check{C}^*(\mathscr{U}; \mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}), \delta_*) \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$$

pour toute famille ***finie*** $\mathscr{U}$ d'ouverts principaux de $\boldsymbol{X}$ et de même pour les complexes de Čech augmentés lorsque $\mathscr{U}$ est un recouvrement d'un ouvert $U \in \mathscr{B}$. En particulier, si $U, U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ vérifient $U = U_1 \cup U_2$, le complexe de Čech augmenté :

$$\boldsymbol{0} \to \mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}(U) \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}(U_1) \oplus \mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}(U_2) \xrightarrow{\delta_0} \mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}(U_{12}) \to \boldsymbol{0} \tag{24}$$

s'identifie à

$$\Big(\boldsymbol{0} \to \mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(U) \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(U_1) \oplus \mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(U_2) \xrightarrow{\delta_0} \mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(U_{12}) \to \boldsymbol{0}\Big) \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$$

et l'exactitude de (24) résulte puisque $\boldsymbol{0} \to \mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\overline{U}) \to \check{C}^*(\{\overline{U}_1, \overline{U}_2\}; \mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$ est exact (2.2.4) et que ses termes sont des $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules plats (1.3.5-d).

L'hypothèse de la proposition 3.1.3 est donc vérifiée par $\mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}$ quel que soit le $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$ et (b) en découle.

L'assertion (c) peut être justifiée comme corollaire de la proposition 3.2.3 et de l'assertion (b-i) mais admet aussi la démonstration directe suivante.

Suite à (b-i) le foncteur $\Gamma(\boldsymbol{X}, _) : \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger)$ est inverse à gauche de $(_)^\sim : \mathbf{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$ et l'application $\Xi(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ est injective pour tous $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \mathbf{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger)$. Soit maintenant $\varphi : \boldsymbol{M}^\sim \to \boldsymbol{N}^\sim$ un morphisme de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$-modules. Pour chaque ouvert principal $U = D(\overline{f}) \subseteq \boldsymbol{X}$ on a un diagramme commutatif de $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{M} & \xrightarrow{\varphi(\boldsymbol{X})} & \boldsymbol{N} \\ {\scriptstyle \nu_f{}^\dagger(\boldsymbol{M})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu_f{}^\dagger(\boldsymbol{N})} \\ \boldsymbol{M}\big\{\frac{1}{f}\big\} = \Gamma(U; \boldsymbol{M}^\sim) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \Gamma(U; \boldsymbol{N}^\sim) = \boldsymbol{N}\big\{\frac{1}{f}\big\} \end{array}$$

et $\varphi(U) = \boldsymbol{1} \otimes \varphi(\boldsymbol{X})$ puisque ces deux morphismes coïncident sur le sous-$\boldsymbol{A}^\dagger\big\{\frac{1}{f}\big\}$-module engendré par $\boldsymbol{M}$, *i.e.* sur $\boldsymbol{M}\big\{\frac{1}{f}\big\}$ tout entier. On a donc $\varphi = (\varphi(\boldsymbol{X}))^\sim$ et $\Xi(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ est bien surjective. ∎

3.2.6. Remarque. Comme conséquence de 3.2.5-b-i, la bijection naturelle dans la proposition 3.2.3 pour tout $\boldsymbol{M} \in \mathbf{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger)$ et tout $\mathscr{N} \in \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$:

$$\gamma(\boldsymbol{M},\mathscr{N}) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}}(\boldsymbol{M}^\sim,\mathscr{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\boldsymbol{M},\mathscr{N}(\boldsymbol{X}))$$

est celle induite par le foncteur des sections globales $\Gamma(\boldsymbol{X};_)$.

3.3 Schémas †-adiques affines

3.3.1. Espaces localement annelés. ([EGA$_1$]) Un espace topologique annelé est un couple $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ formé d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ et d'un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ sur $\boldsymbol{X}$. Un morphisme de $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ vers $(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}})$ est un couple $(\alpha,\alpha^\#)$ où $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est une application continue et $\alpha^\# : \mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux. Ces données constituent la « *catégorie d'espaces annelés* », notée **Esp-ann**.

Étant donné un espace annelé $\boldsymbol{S}$, on note $\mathbf{Esp\text{-}ann}_{/\boldsymbol{S}}$ la « *catégorie des espaces annelés au-dessus de* $\boldsymbol{S}$ » dont les objets sont les morphismes d'espaces annelés $\pi_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ et les morphismes $\alpha : \pi_{\boldsymbol{X}} \to \pi_{\boldsymbol{Y}}$ sont les morphismes d'espaces annelés $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ tels que $\pi_{\boldsymbol{Y}} \circ \alpha = \pi_{\boldsymbol{X}}$.

Un espace annelé $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ est dit « *localement annelé* » lorsque les fibres $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X},x}$ de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ sont des anneaux locaux. La catégorie **Loc-ann** des espaces localement annelés est la sous-catégorie de **Esp-ann** dont les objets sont les espaces localement annelés et les morphismes sont les morphismes d'espaces annelés $(\alpha,\alpha^\#) : (\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \to (\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}})$ tels que les applications induites $\alpha^\#_x : \mathscr{O}_{\boldsymbol{Y},\alpha(x)} \to \mathscr{O}_{\boldsymbol{X},x}$ sont des homomorphismes locaux d'anneaux locaux (on appelle ainsi tout homomorphisme entre deux anneaux locaux $\eta : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ tel que l'image inverse par η de l'idéal maximal de $\boldsymbol{B}$ est l'idéal maximal de $\boldsymbol{A}$).

La catégorie $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{/\boldsymbol{S}}$ se définit de manière analogue à $\mathbf{Esp\text{-}ann}_{/\boldsymbol{S}}$.

3.3.2. Le foncteur $(_)^\sim : \mathbf{Alg_{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Esp\text{-}ann}_{/(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim}$. Les constructions 3.2 font correspondre à $\boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R})$ l'espace topologique annelé $(\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim := (\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}^\dagger{}_1);\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$.

Si l'on se donne maintenant un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres f.c.t.f. $\eta : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$, il existe pour chaque $f \in \boldsymbol{A}^\dagger$ un et un seul morphisme $\eta\{\frac{1}{f}\} : \boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} \to \boldsymbol{B}^\dagger\{\frac{1}{\eta(f)}\}$ (*cf.* 1.3.3), « *la localisation* †*-adique de* η *en* f », rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}^\dagger & \xrightarrow{\eta} & \boldsymbol{B}^\dagger \\ {\scriptstyle \nu_f{}^\dagger}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{\eta(f)}{}^\dagger} \\ \boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\} & \xrightarrow{\eta\{1/f\}} & \boldsymbol{B}^\dagger\{\frac{1}{\eta(f)}\} \end{array}$$

et l'on déduit, comme dans la théorie des schémas classique, un morphisme canonique d'espaces annelés $\alpha^\sim : (\boldsymbol{B}^\dagger)^\sim \to (\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim$. En particulier, le morphisme structural $s : \boldsymbol{R}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger$ donne lieu à un morphisme d'espaces annelés $s^\sim : (\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim \to (\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim$ et toutes ces constructions associent donc à $\boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ un espace annelé au-dessus de $(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim$.

La correspondance $\boldsymbol{A}^\dagger \rightsquigarrow (\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim$, $\eta \rightsquigarrow \eta^\sim$, est fonctorielle et contravariante de la catégorie $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ vers la catégorie $\mathbf{Esp\text{-}ann}/_{(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim}$, on la note :

$$(_)^\sim : \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Esp\text{-}ann}/_{\boldsymbol{R}^\dagger}$$

Le lemme suivant est élémentaire

3.3.3. Lemme. *Soit* $\boldsymbol{A} \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.
a) *Le morphisme canonique* $\boldsymbol{A}^\dagger{}_1\big[\frac{1}{f}\big] \to \boldsymbol{A}^\dagger\big\{\frac{1}{f}\big\}_1$ *est bijectif pour tout* $f \in \boldsymbol{A}$.
b) *Soit* $\{\varphi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} : \boldsymbol{A}^\dagger_{\mathfrak{a}} \to \boldsymbol{A}^\dagger_{\mathfrak{b}} \mid \mathfrak{a} \preccurlyeq \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}\}$ *un système inductif dans* $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *où* $(\mathfrak{A},\preccurlyeq)$ *est partiellement ordonné filtrant supérieurement. Notons* $\boldsymbol{A}^\dagger_\infty := \varinjlim_{\mathfrak{a}} \boldsymbol{A}^\dagger_{\mathfrak{a}}$. *Alors, l'idéal* $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger_\infty$ *est contenu dans le radical de* $\boldsymbol{A}^\dagger_\infty$.
c) *Si* $\boldsymbol{I}$ *est nilpotent dans* $\boldsymbol{A}^\dagger$, *l'espace annelé* $(\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim$ *est le schéma affine associé à* $\boldsymbol{A}^\dagger$.
d) *Soit* $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}^\dagger{}_1)$. *La réduction modulo* $\boldsymbol{I}$ *de l'algèbre* $\big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big)_{\mathfrak{P}}$, *fibre de* $\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$ *en* $\mathfrak{P}$, *est l'anneau local* $\big(\boldsymbol{A}^\dagger{}_1\big)_{\mathfrak{P}}$. *Le morphisme naturel* $\pi_{\mathfrak{P}} : \big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big)_{\mathfrak{P}} \to \big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}_1}\big)_{\mathfrak{P}}$ *est surjectif et c'est un isomorphisme modulo* $\boldsymbol{I}$, i.e. *c'est un relèvement.*

Indication. Dans l'assertion (b) un élément $x \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}_\infty$ s'exprime comme somme **finie** $x = \sum_i \xi_i a_i$ avec $\xi_i \in \boldsymbol{I}$ et $a_i \in \varinjlim_{\mathfrak{a}} \boldsymbol{A}_{\mathfrak{a}}$. Comme la limite est filtrante, il existe $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ assez grand tel que les a_i sont les images d'éléments $a_{\mathfrak{a},i}$ d'un même $\boldsymbol{A}^\dagger_{\mathfrak{a}}$; mais $1 + \sum \xi_i a_{\mathfrak{a},i}$ est inversible dans $\boldsymbol{A}^\dagger_{\mathfrak{a}}$ (1.3.1-b) et alors $1+x$ est inversible dans $\boldsymbol{A}^\dagger_\infty$. ∎

3.3.4. Proposition. *Soient* $\boldsymbol{A}^\dagger, \boldsymbol{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.
a) *L'espace annelé* $(\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim = \big(\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}^\dagger{}_1);\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big)$ *est* localement annelé.
b) *Pour tout morphisme de* $\boldsymbol{R}$*-algèbres* $\eta : \boldsymbol{B}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger$, *le morphisme* $(\eta)^\sim : (\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim \to (\boldsymbol{B}^\dagger)^\sim$ *est un morphisme d'espaces localement annelés. Le foncteur* $(_)^\sim$ (cf. 3.3.2) *est donc à valeurs dans catégorie* $\mathbf{Loc\text{-}ann}/_{(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim}$, *soit*

$$(_)^\sim : \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Loc\text{-}ann}/_{(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim}.$$

Preuve
a) Soit $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}^\dagger{}_1)$. On a $(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger})_{\mathfrak{P}} = \varinjlim_{\overline{f}} \boldsymbol{A}^\dagger\big\{\frac{1}{f}\big\}$, où $\overline{f} \in \boldsymbol{A}^\dagger{}_1 \smallsetminus \mathfrak{P}$. Pour chaque $\overline{f} \notin \mathfrak{P}$, l'idéal engendré par $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}^\dagger\big\{\frac{1}{f}\big\}$ est contenu dans le radical de $\boldsymbol{A}^\dagger\big\{\frac{1}{f}\big\}$ (1.3.1-b) et comme cette propriété est préservée par passage à la limite inductive (3.3.3-b), l'algèbre $(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger})_{\mathfrak{P}}$ la vérifie aussi. L'anneau $(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger})_{\mathfrak{P}}$ est alors local si et seulement si sa réduction modulo $\boldsymbol{I}$ l'est, ce qui est bien le cas (3.3.3-d).
b) Pour $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}^\dagger{}_1)$ on a le diagramme d'anneaux locaux :

$$\begin{array}{ccc} \big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{B}^\dagger}\big)_{\eta^{-1}\mathfrak{P}} & \xrightarrow{\eta^\#_{\mathfrak{P}}} & \big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big)_{\mathfrak{P}} \\ {\scriptstyle \pi_{\eta^{-1}\mathfrak{P}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathfrak{P}}} \\ \big(\boldsymbol{B}^\dagger{}_1\big)_{\eta^{-1}\mathfrak{P}} & \xrightarrow{\overline{\eta}^\#_{\mathfrak{P}}} & \big(\boldsymbol{A}^\dagger{}_1\big)_{\mathfrak{P}} \end{array}$$

où les morphismes verticaux, ceux du lemme 3.3.3-d, sont *locaux*, de même aussi, mais pour des raisons évidentes, que $\overline{\eta}^\#_{\mathfrak{P}}$. Il s'ensuit que $\eta^\#_{\mathfrak{P}}$ est lui aussi local. ∎

3.3.5. Réduction du faisceau structural. Pour tout espace annelé $(\boldsymbol{X};\mathscr{O})$ au-dessus de $(\boldsymbol{R})^{\sim}$ et pour tout $s\in\mathbb{N}$ on notera $(\mathscr{O})_s$ le faisceau d'algèbres engendré par le préfaisceau $\boldsymbol{U}\rightsquigarrow\Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}_s$ et $\pi_s:\mathscr{O}\twoheadrightarrow(\mathscr{O})_s$ la surjection canonique.

Pour $\boldsymbol{A}^{\dagger}\in\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$, soit $(\alpha,\alpha^{\#}):(\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_s)^{\sim}\to(\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\sim}$ le morphisme d'espaces annelés associé à la surjection canonique $\boldsymbol{A}^{\dagger}\twoheadrightarrow\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_s$. On a $\alpha=\mathrm{id}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_1)}$ et $\alpha^{\#}:\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}}\to\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_s}$ se factorise à travers $\pi_s:\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}}\twoheadrightarrow(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}})_s$ en un isomorphisme de $\big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}}\big)_s$ sur $\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_s}$.

3.3.6. Schémas †-adiques affines. On appelle « *schéma †-adique affine* » tout espace annelé isomorphe à un espace de la forme $(\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\sim}$ avec $\boldsymbol{A}^{\dagger}\in\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. La sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{/(\boldsymbol{R}^{\dagger})^{\sim}}$ dont les objets sont des schémas †-adiques affines est la « *catégorie des schémas †-adiques affines* » ; elle sera notée $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

3.3.7. Proposition. *Soient $f\in\boldsymbol{A}^{\dagger}\in\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et notons $(\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\sim}=(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}})$. L'espace annelé induit par $(\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\sim}$ au-dessus de l'ouvert principal $D(\overline{f})\subseteq\boldsymbol{X}$ est canoniquement isomorphe au schéma †-adique affine associé à $\boldsymbol{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\}$*, i.e.

$$\big(\boldsymbol{A}^{\dagger}\big)^{\sim}\big|_{D(\overline{f})}=\big(\boldsymbol{A}^{\dagger}\{\tfrac{1}{f}\}\big)^{\sim}$$

Preuve. Conséquence immédiate de 3.2.5-b-i ∎

Voici maintenant le principal résultat de cette section.

3.3.8. Théorème

a) *Le foncteur $(_)^{\sim}:\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})\rightsquigarrow\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ est une équivalence de catégories.*

b) *La catégorie $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ possède des produits fibrés.*

Preuve

a) Notons $\Gamma:\mathbf{Esp\text{-}ann}_{/(\boldsymbol{R}^{\dagger})^{\sim}}\rightsquigarrow\mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$ le foncteur qui fait correspondre à un espace annelé $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ l'algèbre $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ et a un morphisme $(\alpha,\alpha^{\#}):(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})\to(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}})$ le morphisme $\Gamma(\boldsymbol{Y},\alpha^{\#}):\Gamma(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}})\to\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$. Le morphisme naturel de foncteurs $(_)\to\Gamma\circ(_)^{\sim}$ est alors l'identité sur $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (3.2.5-b-i, [M]) ce qui prouve la *fidélité* du foncteur $(_)^{\sim}$.

Soient $(\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\sim}=(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}})$, $(\boldsymbol{B}^{\dagger})^{\sim}=(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{B}^{\dagger}})$ et $(\alpha,\alpha^{\#}):(\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\sim}\to(\boldsymbol{B}^{\dagger})^{\sim}$ un morphisme d'espaces *localement* annelés au-dessus de $(\boldsymbol{R}^{\dagger})^{\sim}$. Le morphisme $\alpha^{\#}:\mathscr{O}_{\boldsymbol{B}^{\dagger}}\to\alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}}$ est un morphismes de faisceaux de $\boldsymbol{R}$-algèbres.

R-i) Pour chaque $\mathfrak{P}\in\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_1)$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}\big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{B}^{\dagger}}\big)_{\alpha(\mathfrak{P})} & \xrightarrow{\alpha^{\#}_{\mathfrak{P}}} & \big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}}\big)_{\mathfrak{P}}\\ {\scriptstyle\pi(\alpha(\mathfrak{P}))}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi(\mathfrak{P})}\\ \big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{B}^{\dagger}{}_1}\big)_{\alpha(\mathfrak{P})} & \xrightarrow{\overline{\alpha}^{\#}_{\mathfrak{P}}} & \big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_1}\big)_{\mathfrak{P}}\end{array}$$

où $\pi(*)$ est local et surjectif (3.3.3-d) et $\alpha^{\#}_{\mathfrak{P}}$ est local par hypothèse. On en déduit que $\overline{\alpha}^{\#}_{\mathfrak{P}}$ est local.

R-ii) Le morphisme $\alpha^{\#}$ induit un morphisme de faisceaux $\overline{\alpha}^{\#}:\big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big)_1\to\alpha_*\big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{B}^\dagger}\big)_1$ (3.3.5) et donc un morphisme d'espaces annelés $(\alpha,\overline{\alpha}^{\#}):(\boldsymbol{A}^\dagger{}_1)^{\tilde{}}\to(\boldsymbol{B}^\dagger{}_1)^{\tilde{}}$ qui est, d'après (R-i), un morphisme d'espaces localement annelés entre deux schémas affines (3.3.3-c). On a donc $(\alpha,\overline{\alpha}^{\#})=(\overline{\eta})^{\tilde{}}$ où $\overline{\eta}:=\Gamma(\boldsymbol{Y};\overline{\alpha}^{\#}):\boldsymbol{B}^\dagger{}_1\to\boldsymbol{A}^\dagger{}_1$ n'est autre que la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de l'homomorphisme $\eta:=\Gamma(\boldsymbol{Y};\alpha^{\#}):\boldsymbol{B}^\dagger\to\boldsymbol{A}^\dagger$. On en déduit que :

$$\alpha=\eta^{-1},\quad\text{et alors}\quad\alpha^{-1}\big(D(f)\big)=D\big(\eta(f)\big),\ \text{pour tout}\ f\in\boldsymbol{B}^\dagger.\qquad(\diamond)$$

Cela étant, le morphisme $\alpha^{\#}:\mathscr{O}_{\boldsymbol{B}^\dagger}\to\alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$ donne, pour chaque $f\in\boldsymbol{B}^\dagger$, le diagramme commutatif suivant où les flèches verticales sont les applications canoniques.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \overset{\eta=\Gamma(D(1);\alpha^{\#})}{\longrightarrow} & & & \\
\boldsymbol{B}^\dagger & \underset{\mathrm{M}}{=}\Gamma\big(D(1);\mathscr{O}_{\boldsymbol{B}^\dagger}\big) & \xrightarrow{\Gamma(D(1);\alpha^{\#})} & \Gamma\big(D(1);\alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big) & \underset{\diamond}{=}\Gamma\big(D(\eta(1));\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big) & \underset{\mathrm{M}}{=} & \boldsymbol{A}^\dagger \\
\downarrow{\scriptstyle \nu_f{}^\dagger} & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{\eta(f)}{}^\dagger} \\
\boldsymbol{B}^\dagger\big\{\tfrac{1}{f}\big\} & \underset{\mathrm{M}}{=}\Gamma\big(D(f);\mathscr{O}_{\boldsymbol{B}^\dagger}\big) & \xrightarrow{\Gamma(D(f);\alpha^{\#})} & \Gamma\big(D(f);\alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big) & \underset{\diamond}{=}\Gamma\big(D(\eta(f));\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big) & \underset{\mathrm{M}}{=} & \boldsymbol{A}^\dagger\big\{\tfrac{1}{\eta(f)}\big\}
\end{array}\qquad(\mathscr{D})$$

les égalités $(=_{\mathrm{M}})$ résultent d'appliquer 3.2.5-b-i et $(=_\diamond)$ de $(\diamond)$. Or, la localisation †-adique de η en f, *i.e.* l'application $\eta\big\{\frac{1}{f}\big\}:\boldsymbol{B}^\dagger\big\{\frac{1}{f}\big\}\to\boldsymbol{A}^\dagger\big\{\frac{1}{\eta(f)}\big\}$ (*cf.* 3.3.2) est bien **l'unique** morphisme rendant $(\mathscr{D})$ commutatif, par conséquent $\Gamma(D(f);\alpha^{\#})=\eta\big\{\frac{1}{f}\big\}$ et on a bien :

$$(\alpha,\alpha^{\#})=\Gamma(\boldsymbol{Y};\alpha^{\#})^{\tilde{}}.$$

Nous avons ainsi prouvé que le foncteur $(_)^{\tilde{}}:\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})\rightsquigarrow\mathbf{Loc\text{-}ann}_{/(\boldsymbol{R}^\dagger)^{\tilde{}}}$ est pleinement fidèle, c'est donc une équivalence sur son image essentielle, *i.e.* sur $\mathbf{Aff}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

b) Conséquence immédiate de (a) et de 1.3.2-(b). ∎

3.4 Catégorie des schémas †-adiques

3.4.1. Schémas †-adiques. La «*catégorie des schémas †-adiques*», notée $\mathbf{Sch}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$, est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{/(\boldsymbol{R})^{\tilde{}}}$ des espaces annelés tels que chaque point admet un voisinage ouvert isomorphe à un objet de $\mathbf{Aff}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

3.4.2. Notation. On note $\mathscr{X}^\dagger:=(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$ un schéma †-adique. L'espace annelé induit par $\mathscr{X}^\dagger$ au-dessus d'un ouvert $\boldsymbol{U}\subseteq\boldsymbol{X}$ est noté $\mathscr{U}^\dagger:=(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\mathscr{U}^\dagger})$ avec donc $\mathscr{O}_{\mathscr{U}^\dagger}:=\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}|_U$.

3.4.3. Proposition. *Le sous-espace annelé $\mathscr{U}^\dagger$ induit par un schéma †-adique $\mathscr{X}^\dagger$ au-dessus d'un ouvert $\boldsymbol{U}\subseteq\boldsymbol{X}$ est un schéma †-adique.*

Preuve. Soit $x\in\boldsymbol{U}$. Par définition de schéma †-adique il existe un ouvert $\boldsymbol{V}\subseteq\boldsymbol{X}$ avec $x\in\boldsymbol{V}$ et tel que $\mathscr{V}^\dagger=(\boldsymbol{V};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}|_{\boldsymbol{V}})$ est un schéma †-adique affine. Notons $\boldsymbol{W}$ un voisinage de x **principal** dans $\boldsymbol{V}$ et tel que $\boldsymbol{W}\subseteq\boldsymbol{U}$. Alors $\mathscr{W}^\dagger=(\boldsymbol{W};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}|_{\boldsymbol{W}})$ est aussi l'espace induit par le schéma affine $(\boldsymbol{V};\mathscr{O}_{\mathscr{V}^\dagger})$ au-dessus de son ouvert principal $\boldsymbol{W}$, c'est donc un schéma †-adique affine (3.3.7). L'espace annelé $\mathscr{U}^\dagger$ est donc un schéma †-adique affine. ∎

3.4.4. Proposition. *Soit* $\mathscr{X}^\dagger \in \mathbf{Sch}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.
a) *L'algèbre* $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$ *est séparée.*
b) *Si* $\boldsymbol{X}$ *est quasi-compact, l'algèbre* $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$ *est aussi faiblement complète.*

Preuve
a) Soit $\mathscr{R} := \{\boldsymbol{U}_i\}_{i\in\mathfrak{A}}$ un recouvrement de $\boldsymbol{X}$ avec $\mathscr{U}^\dagger_i \in \mathbf{Aff}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. On a la suite exacte :
$$\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}) \xrightarrow{\epsilon(\mathscr{R})} \textstyle\prod_{i\in\mathfrak{A}} \Gamma(\boldsymbol{U}_i;\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}) \xrightarrow{\delta_0(\mathscr{R})} \prod_{i,j\in\mathfrak{A}} \Gamma(\boldsymbol{U}_{i,j};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}) \qquad (\diamond)$$
avec $\Gamma(\boldsymbol{U}_i;\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}) \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. L'algèbre $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$ se réalise ici comme sous-algèbre d'un produit d'algèbres séparées ; elle est donc séparée.
b) Lorsque $\boldsymbol{X}$ est quasi-compact, le recouvrement $\mathscr{R}$ dans $(\diamond)$ peut être choisi *fini* auquel cas l'application $\delta_0(\mathscr{R})$ est continue entre un espace faiblement complet, car somme finie d'espaces f.c., et un espace séparé (d'après (a)), son noyau est alors faiblement complet. ∎

3.4.5. Réduction d'un schéma †-adique. Pour tout schéma †-adique $\mathscr{X}^\dagger$, l'espace annelé $\big(\boldsymbol{X};(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})_s\big)$ (*cf.* 3.3.5) est un schéma localement de type fini (3.3.3-c) au-dessus de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R}_1)$, il sera appelé « *la réduction modulo* $\boldsymbol{I}^s$ *de* $\mathscr{X}^\dagger$ »

Terminologie. Un schéma †-adique $\mathscr{X}^\dagger$ sera dit « *de réduction affine, séparée, …* » s'il en est ainsi du schéma algébrique $(\boldsymbol{X};(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})_1)$.

§4. Modules cohérents sur un schéma †-adique

4.1 Modules cohérents sur un espace annelé

Soit $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ un espace annelé. On rappelle qu'un $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$-module $\mathscr{M}$ (à droite) est « *quasi-cohérent* » lorsque pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$ il existe voisinage ouvert V_x et une suite exacte à droite de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}|_{V_x}$-modules
$$\textstyle\bigoplus_{\mathfrak{A}_x} \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}|_{V_x} \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{B}_x} \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}|_{V_x} \longrightarrow \mathscr{M}|_{V_x} \to \mathbf{0}, \qquad (25)$$
où $\mathfrak{A}_x$ et $\mathfrak{B}_x$ sont des ensembles d'indices arbitraires. On note $\mathbf{Mod}_{\text{q-coh}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ dont les objets sont les $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules quasi-cohérents.

Un $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$-module $\mathscr{M}$ est dit « *de type fini* » lorsque pour tout $x \in \boldsymbol{X}$ il existe un voisinage ouvert V_x et une surjection $p_x : \bigoplus_{\mathfrak{B}_x} \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}|_{V_x} \twoheadrightarrow \mathscr{M}|_{V_x}$ avec $\mathfrak{B}_x$ **fini**.

Le $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$-module $\mathscr{M}$ est dit « *cohérent* » lorsqu'il est de type fini et que pour toute surjection locale $p_x : \bigoplus_{\mathfrak{B}_x} \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}|_{V_x} \twoheadrightarrow \mathscr{M}|_{V_x}$ avec $\mathfrak{B}_x$ fini, le faisceau $\ker(p_x)$ est de type fini. On note $\mathbf{Mod}_{\text{coh}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}_{\text{q-coh}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ dont les objets sont les $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules cohérents.

4.1.1. Réductions de modules cohérents. De même que nous l'avons fait pour les faisceaux d'algèbres (*cf.* 3.3.5), si $\mathscr{M} \in \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$, on note $(\mathscr{M})_s$ le faisceau engendré par le préfaisceau $\mathscr{M} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{R}_s$. Le faisceau $(\mathscr{M})_s$ est la « *réduction modulo* $\boldsymbol{I}^s$ *de* $\mathscr{M}$ ».

4.2 Modules cohérents sur un schéma †-adique affine

Les assertions suivantes résultent aussitôt du théorème 3.2.5.

4.2.1. Proposition

a) *Soit* $\boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

i) *Pour tout* $\boldsymbol{A}^\dagger$*-module* $\boldsymbol{M}$*, le faisceau* $\boldsymbol{M}^\sim$ *est un* $\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$*-module quasi-cohérent.*

ii) *Pour tout* $\boldsymbol{A}^\dagger$*-module de type fini* $\boldsymbol{M}$*, le faisceau* $\boldsymbol{M}^\sim$ *est un* $\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$*-module cohérent.*

iii) *Le foncteur* $(_)^\sim : \mathbf{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}_{\text{q-coh}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$ *est pleinement fidèle.*

b) *Soit* $\mathscr{X}^\dagger$ *un schéma* †*-adique.*

i) *Les catégories* $\mathbf{Mod}_{\text{q-coh}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$ *et* $\mathbf{Mod}_{\text{coh}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$ *sont abéliennes.*

ii) *Si* $\mathscr{M}$ *est* $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}$*-cohérent, on a* $\mathscr{M}|_{\boldsymbol{U}} = \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{M})^\sim$*, et donc* $H^j(\boldsymbol{U};\mathscr{M}) = 0$ *pour* $j > 0$*, pour tout ouvert* $\boldsymbol{U}$ *(affine) assez petit.*

iii) *Si* $\mathscr{M} \in \mathbf{Mod}_{\text{q-coh}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$*, sa réduction modulo* $\boldsymbol{I}^s$*, le faisceau* $(\mathscr{M})_s$*, est un* $(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})_s$*-module (algébriquement) quasi-cohérent. Lorsque* $(\boldsymbol{X};(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})_1)$ *est un schéma (algébrique) affine, le faisceau* $(\mathscr{M})_s$ *est engendré par ses sections globales,* i.e. *il est isomorphe à* $\Gamma(\boldsymbol{X};(\mathscr{M})_s)^\sim$.

4.2.2. Acyclicité. La proposition suivante, pendant du théorème d'acyclicité des modules quasi-cohérents en théorie des schémas, jouera un rôle important dans la suite. Il est démontré dans [M] en supposant que $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ est un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal $\boldsymbol{I}$, nous allons le prouver dans le cas plus général où $\boldsymbol{R}$ est seulement supposé nœthérien.

4.2.3. Théorème. *Soit* $(\boldsymbol{X},\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$ *le schéma* †*-adique affine associé à* $\boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

a) *Si* $\mathscr{M} \in \mathbf{Mod}_{\text{coh}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$*, on a* $H^i(\boldsymbol{X};\mathscr{M}) = 0$ *pour tout* $i > 0$.

b) *Le foncteur*

$$(_)^\sim : \mathbf{Mod}_{\text{tf}}(\boldsymbol{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}_{\text{coh}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$$

est une équivalence de catégories.

Preuve. D'après 3.2.5 il suffira de prouver que $(_)^\sim$ est essentiellement surjectif. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$-module cohérent. Nous allons appliquer le lemme 3.1.1. Soient $\mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ l'ensemble des ouverts principaux de $\boldsymbol{X}$ et $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\boldsymbol{X})$ l'ensemble de $V \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ tels que $\mathscr{M}(V)$ est un $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}(V)$-module de type fini et le morphisme canonique $\mathscr{M}(V)^\sim \to \mathscr{M}|_V$ (*cf.* 3.2.3) est bijectif. Les propriétés 3.1.1-$\mathscr{B}$-i et 3.1.1-$\mathscr{B}$-ii sont immédiates d'après 4.2.1 et la proposition résultera de vérifier la propriété 3.1.1-$\mathscr{B}$-iii qui dit que si l'on a $D(f) = D(f_1) \cup D(f_2)$ avec $D(f_i) \in \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\boldsymbol{X})$, on doit avoir aussi $D(f) \in \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\boldsymbol{X})$.

Étant donnée une décomposition

$$D(\overline{f}) = D(\overline{f}_1) \cup D(\overline{f}_2), \quad \text{avec} \quad D(\overline{f}_i) \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X}), \tag{26}$$

il existe $g_i \in \boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ avec $1 = f_1 g_1 + f_2 g_2$ et quitte à nous restreindre au sous-schéma †-adique ouvert $(\boldsymbol{V};\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}) = (\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\})^\sim$ et à remplacer $D(\overline{f}_i) \in \mathscr{B}(\boldsymbol{V})$ par $D(\overline{f}_i\overline{g}_i) \in \mathscr{B}(\boldsymbol{V})$ nous pouvons supposer que l'on a $1 = f_1 + f_2$ dans (26).

Notations et remarques.
R-1) $V_i := D(\overline{f}_i)$ et $V_{12} := D(\overline{f}_{12}) = D(\overline{f}_1\overline{f}_2)$,
R-2) $\mathbf{Mod}_{V_1,V_2}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}})$: sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}})$ des $\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}$-modules $\mathscr{N}$ tels que $\mathscr{N}|_{V_i} = \mathscr{N}(V_i)^{\sim}$; c'est une sous-catégorie abélienne de $\mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}})$.
R-3) Si $\mathscr{N} \in \mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}})$ on note $\overline{\mathscr{N}} := (\mathscr{N})_1$, la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\mathscr{N}$ (4.1.1). Le faisceau $\overline{\mathscr{N}}$ est un faisceau cohérent sur le schéma algébrique affine $(\boldsymbol{V};(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}})_1)$ (associé à ${\boldsymbol{A}^{\dagger}}_1[1/\overline{f}]$) il est donc de la forme $(\overline{\boldsymbol{N}})^{\sim}$ pour un certain ${\boldsymbol{A}^{\dagger}}_1[1/\overline{f}]$-module de type fini $\overline{\boldsymbol{N}}$. On a aussi $H^i(\boldsymbol{V};\overline{\mathscr{N}}) = 0$ pour tout $i > 0$.

Lemme 1. Pour tout $\mathscr{N} \in \mathbf{Mod}_{V_1,V_2}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}})$, on a $H^i(\boldsymbol{V};\mathscr{N}) = 0$, pour $i > 0$. En particulier, le foncteur $\Gamma(\boldsymbol{V};_)$ est exact sur $\mathbf{Mod}_{V_1,V_2}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}})$.

Preuve du lemme. La suite exacte de Mayer-Vietoris pour la cohomologie des faisceaux et pour le recouvrement $\boldsymbol{V} = V_1 \cup V_2$ est

$$\cdots \longrightarrow H^i(\boldsymbol{V};\mathscr{N}) \longrightarrow H^i(V_1;\mathscr{N}) \oplus H^i(V_2;\mathscr{N}) \longrightarrow H^i(V_{12};\mathscr{N}) \longrightarrow \cdots$$

ce qui donne aussitôt

$$H^i(\boldsymbol{V};\mathscr{N}) = 0\,, \text{ pour } i \geqslant 2,$$

puisque $V_* \in \mathscr{F}(\boldsymbol{V})$ (3.2.5). Il nous reste la suite exacte :

$$\mathbf{0} \to \mathscr{N}(\boldsymbol{V}) \to \mathscr{N}(V_1) \oplus \mathscr{N}(V_2) \xrightarrow{\delta^{\dagger}} \mathscr{N}(V_{12}) \to H^1(\boldsymbol{V};\mathscr{N}) \to \mathbf{0} \tag{27}$$

et l'annulation de $H^1(\boldsymbol{V};\mathscr{N})$ résultera de la surjectivité de $\delta^{\dagger}$.

Nous avons ainsi un morphisme de suites exactes (*cf.* R-3)

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} \to & \mathscr{N}(\boldsymbol{V}) & \to \mathscr{N}(V_1) \oplus \mathscr{N}(V_2) & \xrightarrow{\delta^{\dagger}} & \mathscr{N}(V_{12}) & \to H^1(\boldsymbol{V};\mathscr{N}) & \to \mathbf{0} \\
& \pi\downarrow & \pi_1\downarrow \quad \downarrow\pi_2 & & \pi_{12}\downarrow & \downarrow & \\
\mathbf{0} \to & \overline{\mathscr{N}}(\boldsymbol{V}) & \to \overline{\mathscr{N}}(V_1) \oplus \overline{\mathscr{N}}(V_2) & \xrightarrow{\overline{\delta}} & \overline{\mathscr{N}}(V_{12}) \to & \mathbf{0} & \to \mathbf{0} \\
& || & || \quad || & & || & || & \\
\mathbf{0} \to & \overline{\boldsymbol{N}} & \to \overline{\boldsymbol{N}}\left[\tfrac{1}{\overline{f}_1}\right] \oplus \overline{\boldsymbol{N}}\left[\tfrac{1}{\overline{f}_2}\right] & \xrightarrow{\overline{\delta}_0} & \overline{\boldsymbol{N}}\left[\tfrac{1}{\overline{f}_{12}}\right] \to & \mathbf{0} & \to \mathbf{0}
\end{array}$$

où la morphismes $\pi_\bullet$ sont des relèvements (3.2.5-(b-i) appliqué à $V_\bullet$). Les conditions d'application du théorème 2.5.1 sont présentes et le morphisme $\delta^{\dagger}$ est surjectif. Mais alors $H^1(\boldsymbol{V};\mathscr{N}) = 0$ dans la suite exacte (27) et ceci termine la preuve du lemme. □

Soient $\mathscr{N} \in \mathbf{Mod}_{V_1,V_2}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}})$ et $\pi : \mathscr{N} \twoheadrightarrow \overline{\mathscr{N}}$ la surjection canonique, le morphisme $\pi(\boldsymbol{V}) : \mathscr{N}(\boldsymbol{V}) \to \overline{\mathscr{N}}(\boldsymbol{V})$ est surjectif d'après le lemme 1. On prendra garde du fait que nous ne savons pas encore que $\mathscr{N}(\boldsymbol{V})$ est un $\boldsymbol{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\}$-module **de type fini**. Or, $\overline{\mathscr{N}}(\boldsymbol{V})$ est de type fini, puisque $\overline{\mathscr{N}}$ est un $(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}})_1$-module cohérent sur un schéma (algébrique) affine, il existe donc un sous-$\boldsymbol{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\}$-module $\boldsymbol{M} \subseteq \mathscr{N}(\boldsymbol{V})$ de type fini tel que $\pi(\boldsymbol{V})(\boldsymbol{M}) = \overline{\mathscr{N}}(\boldsymbol{V})$. Le morphisme d'inclusion $\boldsymbol{M} \subseteq \mathscr{N}(\boldsymbol{V})$ induit (3.2.3) un morphisme de faisceaux $\phi : \boldsymbol{M}^{\sim} \to \mathscr{N}$ dont les restrictions $\phi|_{V_i}$ correspondent aux morphismes $\boldsymbol{M}\{\frac{1}{f_i}\} \to \mathscr{N}(V_i)$ qui, étant surjectifs modulo $\boldsymbol{I}$, sont surjectif puisque $\mathscr{N}(V_i) \to \overline{\mathscr{N}}(V_i)$ est un relèvement de type fini. Le morphisme de faisceaux $\phi : \boldsymbol{M}^{\sim} \to \mathscr{N}$ est donc surjectif car localement surjectif, et

sa section globale $\phi(\boldsymbol{V}) : \boldsymbol{M} = \Gamma(\boldsymbol{V};\boldsymbol{M}^{\sim}) \twoheadrightarrow \mathscr{N}(\boldsymbol{V})$ est surjective d'après le lemme 1. Le $\boldsymbol{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\}$-module $\mathscr{N}(\boldsymbol{V})$ est donc bien de type fini. Posons $\boldsymbol{M} := \mathscr{N}(\boldsymbol{V})$ pour la suite.

Nous venons de démontrer que pour **tout** $\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}$-module $\mathscr{N} \in \mathbf{Mod}_{V_1,V_2}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}})$ le $\boldsymbol{A}^{\dagger}\{\frac{1}{f}\}$-module $\mathscr{N}(\boldsymbol{V})$ est de type fini est que $\mathscr{N}$ est quotient de $\mathscr{N}(\boldsymbol{V})^{\sim}$. Or le noyau $\mathscr{K}$ du morphisme $\phi : \mathscr{N}(\boldsymbol{V})^{\sim} \to \mathscr{N}$ induit à partir de $\mathrm{id} : \mathscr{N}(\boldsymbol{V}) \to \mathscr{N}(\boldsymbol{V})$ (3.2.3) est un $\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}$-module de la catégorie $\mathbf{Mod}_{V_1,V_2}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}})$ avec $\mathscr{K}(\boldsymbol{V}) = 0$. Par conséquent $\mathscr{K} = 0$ et $\mathscr{N}(\boldsymbol{V})^{\sim} \sim \mathscr{N}$.

La propriété 3.1.1-$\mathscr{B}$-iii pour $\mathscr{M}$ est ainsi vérifiée et ceci achève la démonstration du théorème. ∎

4.2.4. Remarque. La question de savoir si le foncteur $(_)^{\sim} : \mathbf{Mod}(\boldsymbol{A}^{\dagger}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}_{\text{q-coh}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}})$, dont on sait qu'il est pleinement fidèle, est une équivalence de catégorie est équivalente à l'annulation de la cohomologie de faisceau en degrés positifs pour tout module quasi-cohérent. Dans le cas algébrique ceci résulte du fait qu'un module quasi-cohérent est limite inductive de modules cohérents. L'analogue †-adique de cette dernière propriété n'est pas examiné dans cet article.

§5. Critère d'affinité des schémas †-adiques

5.1 On rappelle (*cf.* 3.4.5) qu'un schéma †-adique $\mathscr{X}^{\dagger}$ est dit de réduction affine lorsque l'espace annelé $(\boldsymbol{X};(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}})_1)$ est un schéma algébrique affine (de type fini).

5.1.1. Théorème (Critère d'affinité). *Un schéma †-adique $\mathscr{X}^{\dagger} = (\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}})$ est affine si et seulement si sa réduction $(\boldsymbol{X};(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}})_1)$ est un schéma algébrique affine.*

Preuve. Nous détaillons seulement la suffisance de la condition. Supposons que le schéma algébrique $(\boldsymbol{X};(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}})_1)$ est affine associé à une $\boldsymbol{R}_1$-algèbre notée $\overline{\boldsymbol{A}}$ qui sera nécessairement de type fini puisque localement de type fini. Notons $\pi : \mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}} \to (\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}})_1$ la surjection canonique de faisceaux.

La démonstration suit la même démarche que la preuve du théorème 4.2.3, à savoir : utiliser le lemme 3.1.1. Notons $\mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ l'ensemble des ouverts principaux de $\boldsymbol{X}$ et $\mathscr{F}(\boldsymbol{X})$ l'ensemble des $V \in \mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ tels que $(V;\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}}|_V)$ est un schéma †-adique affine. Les propriétés 3.1.1-$\mathscr{B}$-i et 3.1.1-$\mathscr{B}$-ii sont immédiates d'après 4.2.1 et la proposition résultera de vérifier la propriété 3.1.1-$\mathscr{B}$-iii qui dit que si l'on a $D(f) = D(f_1) \cup D(f_2)$ avec $D(f_i) \in \mathscr{F}(\boldsymbol{X})$, on doit avoir aussi $D(f) \in \mathscr{F}(\boldsymbol{X})$. Nous supposerons, comme dans la preuve de 4.2.3, que $f_1 + f_2 = 1$.

Notons pour simplifier $\boldsymbol{V} := D(f)$, $\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}} := \mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}}|_V$, $V_i := D(f_i)$, $f_{12} = f_1 f_2$ et $V_{12} = V_1 \cap V_2 = D(f_{12})$. Puis $\pi_{\bullet} := \pi(V_{\bullet})$.

On a pour $i \in \{1,2,12\}$ (3.2.5)

R-i) Le morphisme $\pi_i : \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(V_i) \to (\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}})_1(V_i) = \overline{\boldsymbol{A}}[1/\overline{f}_i]$ est une relèvement.

R-ii) $H^j(V_i;\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}) = 0$ pour tout $j > 0$.

On a alors le morphisme de complexes de Mayer-Vietoris relatifs au recouvrement $\boldsymbol{V} = V_1 \cup V_2$ induit par le morphisme de faisceaux $\pi : \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}} \to (\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}})_1$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} \to \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V}) & \longrightarrow & \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(V_1) \oplus \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(V_2) & \xrightarrow{\delta^\dagger} & \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(V_{12}) & \to H^1(\boldsymbol{V};\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}) \to \mathbf{0} \\
\pi\downarrow & & \pi_1\downarrow \quad \downarrow\pi_2 & & \pi_{12}\downarrow & \downarrow & \\
\mathbf{0} \to \overline{\boldsymbol{A}} & \longrightarrow & \overline{\boldsymbol{A}}\big[\tfrac{1}{\overline{f}}\big] \oplus \overline{\boldsymbol{A}}\big[\tfrac{1}{1-\overline{f}}\big] & \xrightarrow{\delta_0} & \overline{\boldsymbol{A}}\big[\tfrac{1}{\overline{f}(1-\overline{f})}\big] \to & \mathbf{0} & \to \mathbf{0}
\end{array}$$

Les conditions d'application du théorème 2.4.1 étant vérifiées, l'application $\delta^\dagger$ est surjective. Par conséquent

$$H^j(\boldsymbol{V};\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}) = 0\,, \text{ pour tout } j > 0.$$

et nous avons le diagramme commutatif de lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \boldsymbol{I}\otimes\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V}) & \longrightarrow & \boldsymbol{I}\otimes\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(V_1) \oplus \boldsymbol{I}\otimes\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(V_2) & \longrightarrow & \boldsymbol{I}\otimes\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(V_{12}) & \to \mathbf{0} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\mathbf{0} \to & \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V}) & \longrightarrow & \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(V_1) \oplus \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(V_2) & \xrightarrow{\delta^\dagger} & \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(V_{12}) & \to \mathbf{0} \\
 & \pi\downarrow & & \pi_1\downarrow \quad \downarrow\pi_2 & & \pi_{12}\downarrow & \\
\mathbf{0} \to & \overline{\boldsymbol{A}} & \longrightarrow & \overline{\boldsymbol{A}}\big[\tfrac{1}{\overline{f}}\big] \oplus \overline{\boldsymbol{A}}\big[\tfrac{1}{1-\overline{f}}\big] & \xrightarrow{\delta_0} & \overline{\boldsymbol{A}}\big[\tfrac{1}{\overline{f}(1-\overline{f})}\big] & \to \mathbf{0} \\
 & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} &
\end{array}$$

où les trois colonnes de droite sont exactes. Une chasse au diagramme élémentaire montre alors que $\pi : \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V}) \to \overline{\boldsymbol{A}}$ est **surjective** (mais pas nécessairement un relèvement).

L'algèbre $\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V})$ est faiblement complète (mais pas nécessairement f.c.t.f.) puisque $\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(V_1) \oplus \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(V_2)$ est f.c.t.f. et que $\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(V_{12})$ est séparé (*cf.* 3.4.4).

Notons $\boldsymbol{B}^\dagger$ une sous-algèbre f.c.t.f. de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V})$ telle que $\pi(\boldsymbol{B}^\dagger) = \overline{\boldsymbol{A}}$, et soit $b_1 \in \boldsymbol{B}^\dagger$ tel que $\pi(b_1) = \overline{f}_1$ et $b_2 = 1 - b_1$. Soit $\beta : \boldsymbol{B}^\dagger \hookrightarrow \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V})$ l'inclusion et $\overline{\beta} : \boldsymbol{B}^\dagger{}_1 \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ la surjection induite.

Notons $(\boldsymbol{B}^\dagger)^\sim = (\boldsymbol{W};\mathscr{O}_{\boldsymbol{B}^\dagger})$ et soit $W_i = D(\bar{b}_i)$. Le schéma algébrique $\boldsymbol{V}$ est alors un fermé (affine) de $\boldsymbol{W}$ et le plongement $\iota : \boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{W}$ correspond à la surjection $\overline{\beta} : \boldsymbol{B}^\dagger{}_1 \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$. On a $\iota^{-1}(W_i) = V_i$.

Notons $\mathscr{B}_{W_1,W_2}(\boldsymbol{W})$ la catégorie des ouverts affines de $\boldsymbol{W}$ contenus dans l'un des W_i et de même pour $\mathscr{B}_{V_1,V_2}(\boldsymbol{V})$. Si $D(\bar{b}) \in \mathscr{B}_{W_1,W_2}(\boldsymbol{W})$, on a $\iota^{-1}(D(\bar{b})) = D(\overline{\beta}(\bar{b})) \in \mathscr{B}_{V_1,V_2}(\boldsymbol{V})$, et b agit comme un opérateur inversible sur $\iota_*\big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}\big)(D(\bar{b}))$ (1.3.1-f), il existe par conséquent un et un unique morphisme de $\boldsymbol{B}^\dagger$-module $\beta\{1/b\}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{B}^\dagger & \xrightarrow[\subseteq]{\beta} & \iota_*\big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}\big)(\boldsymbol{W}) \\
{\scriptstyle \nu_b{}^\dagger}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{rest.}} \\
\boldsymbol{B}^\dagger\big\{\tfrac{1}{b}\big\} & \xrightarrow{\beta\{1/b\}} & \iota_*\big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}\big)(D(\bar{b}))
\end{array}$$

La famille de ces diagrammes défini alors un morphisme de préfaisceaux sur la catégorie $\mathscr{B}_{W_1,W_2}(\boldsymbol{W})$ qui étant une base pour la topologie de $\boldsymbol{W}$ donne lieu à un morphisme de faisceaux de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\rho : \mathscr{O}_{\boldsymbol{B}^\dagger} \to \iota_*\big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}\big)$ dont la restriction à W_i est l'unique morphisme $\rho(W_i) : \boldsymbol{B}^\dagger\big\{\tfrac{1}{b}\big\}_i \to \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(V_i)$ induit par $\beta : \boldsymbol{B}^\dagger \hookrightarrow \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V})$. Le morphisme $\rho(W_i)$ est

surjectif puisque de réduction la surjection $\boldsymbol{B}^\dagger{}_1\big[\frac{1}{b_i}\big] \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}\big[\frac{1}{\overline{f}_i}\big]$ et puisque $\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(V_i)$ est f.c.t.f. (1.3.1-h). On conclut que $\iota_*\big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}\big)$ un $\mathscr{O}_{\boldsymbol{B}^\dagger}$-module cohérent quotient de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{B}^\dagger}$. Par le théorème 4.2.3 le module $\Gamma\big(\boldsymbol{W};\iota_*\big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}\big)\big) = \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V})$ est un quotient de $\boldsymbol{B}^\dagger$ et c'est donc une algèbre f.c.t.f. (1.3.1-d). Nous pouvons donc prendre $\boldsymbol{B}^\dagger = \mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V})$ dans tout ce qui précède auquel cas on conclut que $(\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V}))^\sim \sim (\boldsymbol{V};\mathscr{O}_{\boldsymbol{V}})$ et ceci prouve la propriété 3.1.1-$\mathscr{B}$-iii ce qui achève la démonstration du théorème. ∎

5.1.2. Le corollaire suivant du critère d'affinité 5.1.1 élargit la portée de l'assertion 3.2.5-b-i dès ouverts principaux jusqu'aux ouverts affines d'un schéma †-adique affine.

5.1.3. Corollaire. *Soit $\boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ de schéma †-adique affine associé $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$, et soit $\boldsymbol{V}$ un ouvert affine de $\boldsymbol{X}$.*

a) *Pour tout $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$, le morphisme canonique*

$$\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\boldsymbol{V}) \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{M}^\sim(\boldsymbol{V}), \quad P \otimes m \mapsto Pm,$$

est ***bijectif****.*

b) *Pour tout recouvrement $\boldsymbol{V} = V_1 \cup \cdots \cup V_\ell$ où V_i est un ouvert affine de $\boldsymbol{X}$, la suite*

$$0 \to \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{V}) \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M} \longrightarrow \prod_{i=1,\ldots,\ell} \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}(V_i) \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M} \longrightarrow \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \ell} \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}(V_i \cap V_j) \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$$

est exacte.

Preuve. Soit $\boldsymbol{V} = W_1, \cup \cdots \cup W_\ell$ un recouvrement de $\boldsymbol{V}$ par des ouverts principaux $W_i = D(\overline{f}_i)$ de $\boldsymbol{X}$ avec $f_i \in \boldsymbol{A}^\dagger$. Par 3.2.5-b-i et la propriété de faisceau on a une suite exacte à gauche :

$$0 \to \boldsymbol{M}^\sim(\boldsymbol{V}) \longrightarrow \prod_i \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}(W_i) \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M} \xrightarrow{\delta_0(\boldsymbol{M})} \prod_{i<j} \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}(W_i) \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$$

D'autre part suite au critère d'affinité 5.1.1 on a $\boldsymbol{B}^\dagger := \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{V}) \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et l'espace annelé $(\boldsymbol{V};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}|_{\boldsymbol{V}})$ s'identifie à $(\boldsymbol{B}^\dagger)^\sim$. On a donc un isomorphisme de suites exactes à gauche

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} \to & \boldsymbol{B}^\dagger & \longrightarrow \prod_i \boldsymbol{B}^\dagger\big\{\frac{1}{f_i}\big\} & \xrightarrow{\delta_0(\boldsymbol{B}^\dagger)} & \prod_{i<j} \boldsymbol{B}^\dagger\big\{\frac{1}{f_i f_j}\big\} \\
& {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & {\scriptstyle \sim}\downarrow & & {\scriptstyle \sim}\downarrow \\
\mathbf{0} \to & \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{V}) \longrightarrow & \prod_i \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}(W_i) & \xrightarrow{\delta_0} & \prod_{i<j} \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}(W_{ij})
\end{array}$$

qui induit un isomorphisme canonique de $\boldsymbol{K} := \ker\big(\delta_0(\boldsymbol{B}^\dagger) \otimes \mathrm{id}_{\boldsymbol{M}}\big)$ sur $\boldsymbol{M}^\sim(\boldsymbol{V})$. Or, par l'isomorphisme de foncteurs sur $\mathbf{Mod}(\boldsymbol{B}^\dagger)$:

$$(_) \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M} \simeq (_) \otimes_{\boldsymbol{B}^\dagger} (\boldsymbol{B}^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M})$$

et l'affinité de $(\boldsymbol{V};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}|_{\boldsymbol{V}})$, on a $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$, CQFD. ∎

§6. Produits fibrés dans la catégorie des schémas †-adiques

6.1 Généralités sur le produit fibré

On rappelle dans cette section les définitions et résultats nécessaires à la compréhension de la proposition 6.1.15 qui reformule le critère de représentabilité de foncteurs sur la catégorie des espaces annelés de [EGA$_1$] (prop. §4.5.4).

On désigne par $\mathcal{C}$ une catégorie. Le mot "foncteur" sans qualificatif est synonyme de "foncteur contravariant". En parlant de foncteurs, le mot "morphisme" est synonyme de "transformation naturelle".

6.1.1. Catégorie $\mathcal{C}/_{\boldsymbol{S}}$.

Pour tout objet $\boldsymbol{S}$ de $\mathcal{C}$, on note $\mathcal{C}/_{\boldsymbol{S}}$ la catégorie dont les objets sont les morphismes de $\mathcal{C}$ de but $\boldsymbol{S}$. Si $\pi_1 : \boldsymbol{X}_1 \to \boldsymbol{S}$ et $\pi_2 : \boldsymbol{X}_2 \to \boldsymbol{S}$ sont des objets de $\mathcal{C}/_{\boldsymbol{S}}$, l'ensemble $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}/_{\boldsymbol{S}}}(\pi_1, \pi_2)$ est le sous-ensemble de $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)$ des morphismes $\phi : \boldsymbol{X}_1 \to \boldsymbol{X}_2$ tels que $\pi_1 = \pi_2 \circ \phi$.

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}_1 & \xrightarrow{\phi} & \boldsymbol{X}_2 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & \bigoplus & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ \boldsymbol{S} & \xrightarrow[\mathrm{id}_{\boldsymbol{S}}]{} & \boldsymbol{S} \end{array}$$

6.1.2. Foncteur représentable. Un foncteur contravariant $\boldsymbol{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ est dit « *représentable* » s'il existe $\boldsymbol{X} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et un isomorphisme de foncteurs $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_, \boldsymbol{X}) \simeq \boldsymbol{F}(_)$.

6.1.3. Lemme d'Yoneda. *La correspondance qui associe à un morphisme de foncteurs $\Phi(_) : \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_, \boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}(_)$ l'élément $\Phi(\boldsymbol{X})(\mathrm{id}_{\boldsymbol{X}}) \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ est une bijection sur l'ensemble $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$. La correspondance réciproque associe à $x \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ et $\boldsymbol{Y} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ l'application $\Phi(\boldsymbol{Y}) : \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})$, $f \mapsto \boldsymbol{F}(f)(x)$.*

Lorsque $\boldsymbol{F}$ est représentable, les couples $(\boldsymbol{X}, x \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}))$ donnés par le lemme d'Yoneda sont dits « *représenter* $\boldsymbol{F}$ ».

6.1.4. Lemme. *Les couples représentant un même foncteur sont deux à deux* ***canoniquement*** *isomorphes.*

6.1.5. Produits. Étant donnés deux objets $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ de $\mathcal{C}$, on dit que « $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *admettent un produit dans* $\mathcal{C}$ » lorsque le foncteur $\boldsymbol{F}(_) := \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_, \boldsymbol{X}) \times \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_, \boldsymbol{Y}) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ est représentable. Dans ce cas, on note $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ et $p_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ et $p_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ respectivement l'objet et l'élément de $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y})$ qui caractérisent $\boldsymbol{F}$.

On dira que « *les produits existent dans* $\mathcal{C}$ » ou bien que « $\mathcal{C}$ *admet des produits* » lorsque chaque paire d'objets de $\mathcal{C}$ admet un produit dans $\mathcal{C}$.

6.1.6. Produits fibrés d'ensembles. Étant données deux applications d'ensembles $\pi_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{S}$ on définit l'ensemble $\boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y}$ et l'application $\pi_{\boldsymbol{X}\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{S}$ par :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y} =: \{(x,y) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \mid \pi_{\boldsymbol{X}}(x) = \pi_{\boldsymbol{Y}}(y)\} & \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{X}\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Y}}} & \boldsymbol{S} \\ (x,y) & \longmapsto & \pi_{\boldsymbol{X}}(x) \end{array}$$

On note $p_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ et $p_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ les restrictions des projections canoniques de $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$. On a le diagramme « *cartésien* »

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y} & \xrightarrow{p_{\boldsymbol{Y}}} & \boldsymbol{Y} \\ {\scriptstyle p_{\boldsymbol{X}}}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\boldsymbol{Y}}} \\ \boldsymbol{X} & \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{X}}} & \boldsymbol{S} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (x,y) & \xrightarrow{p_{\boldsymbol{Y}}} & y \\ {\scriptstyle p_{\boldsymbol{X}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\boldsymbol{Y}}} \\ x & \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{X}}} & \pi_{\boldsymbol{X}}(x) = \pi_{\boldsymbol{Y}}(y) \end{array}$$

Le couple $(\boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y}, (p_{\boldsymbol{X}}, p_{\boldsymbol{Y}}))$ représente le foncteur

$$\mathbf{Mor}_{\mathbf{Ens}/\boldsymbol{S}}(_, \pi_{\boldsymbol{X}}) \times \mathbf{Mor}_{\mathbf{Ens}/\boldsymbol{S}}(_, \pi_{\boldsymbol{Y}}),$$

c'est le « *produit fibré de* $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *au-dessus de* $\boldsymbol{S}$ (*relativement à* $\pi_{\boldsymbol{X}}$ *et* $\pi_{\boldsymbol{Y}}$) ».

6.1.7. Lemme. *Étant donnés deux diagrammes commutatifs d'applications d'ensembles :*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{X}}} & \boldsymbol{X}_2 \\ {\scriptstyle \pi_{\boldsymbol{X}_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\boldsymbol{X}_2}} \\ \boldsymbol{S}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{S}}} & \boldsymbol{S}_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{Y}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{Y}}} & \boldsymbol{Y}_2 \\ {\scriptstyle \pi_{\boldsymbol{Y}_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\boldsymbol{Y}_2}} \\ \boldsymbol{S}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{S}}} & \boldsymbol{S}_2 \end{array}$$

il existe une et une unique application $f_{\boldsymbol{X}} \times_{f_{\boldsymbol{S}}} f_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{X}_1 \times_{\boldsymbol{S}_1} \boldsymbol{Y}_1 \to \boldsymbol{X}_2 \times_{\boldsymbol{S}_2} \boldsymbol{Y}_2$ *rendant commutatifs les diagrammes :*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}_1 \times_{\boldsymbol{S}_1} \boldsymbol{Y}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{X}} \times_{f_{\boldsymbol{S}}} f_{\boldsymbol{Y}}} & \boldsymbol{X}_2 \times_{\boldsymbol{S}_2} \boldsymbol{Y}_2 \\ {\scriptstyle p_{\boldsymbol{X}_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\boldsymbol{X}_2}} \\ \boldsymbol{X}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{X}}} & \boldsymbol{X}_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}_1 \times_{\boldsymbol{S}_1} \boldsymbol{Y}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{X}} \times_{f_{\boldsymbol{S}}} f_{\boldsymbol{Y}}} & \boldsymbol{X}_2 \times_{\boldsymbol{S}_2} \boldsymbol{Y}_2 \\ {\scriptstyle p_{\boldsymbol{Y}_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\boldsymbol{Y}_2}} \\ \boldsymbol{Y}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{Y}}} & \boldsymbol{Y}_2 \end{array}$$

6.1.8. Produits fibrés de foncteurs d'ensembles. Étant donnés trois foncteurs contravariants $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ et deux morphismes de foncteurs $\pi_{\boldsymbol{F}} : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{H}$ et $\pi_{\boldsymbol{G}} : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$ la correspondance :

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni \boldsymbol{X} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \times_{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X})} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{p_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})} & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) \\ {\scriptstyle p_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})} \\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X})} & \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \ni f \rightsquigarrow \big(\boldsymbol{F}(f) \times_{\boldsymbol{H}(f)} \boldsymbol{G}(f), \boldsymbol{F}(f), \boldsymbol{G}(f), \boldsymbol{H}(f)\big)$$

où $\boldsymbol{F}(f) \times_{\boldsymbol{H}(f)} \boldsymbol{G}(f)$ désigne le morphisme donné par le lemme 6.1.7, est une correspondance fonctorielle.

Le foncteur $(_) \rightsquigarrow \boldsymbol{F}(_) \times_{\boldsymbol{H}(_)} \boldsymbol{G}(_)$ est le « *produit fibré de* $\boldsymbol{F}$ *et* $\boldsymbol{G}$ *au-dessus de* $\boldsymbol{H}$ (*relativement à* $\pi_{\boldsymbol{F}}$ *et* $\pi_{\boldsymbol{G}}$) ».

6.1.9. Lemme. *Étant donnés trois foncteurs d'ensembles $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}$ représentés par des objets $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{S}$ respectivement. Étant donnés deux morphismes $\pi_{\boldsymbol{F}}:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{H}$ et $\pi_{\boldsymbol{G}}:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{H}$ représentés par des morphismes $\pi_{\boldsymbol{X}}:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{S}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}}:\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{S}$. Le produit fibré de foncteurs $\boldsymbol{F}\times_{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{G}$ relatif à $\pi_{\boldsymbol{F}}$ et $\pi_{\boldsymbol{G}}$ est représentable si et seulement si le produit fibré $\boldsymbol{X}\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Y}$ relatif à $\pi_{\boldsymbol{X}}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}}$ existe.*

6.1.10. Produits fibrés dans une catégorie générale

Définition. On dit que «*les produits fibrés existent dans la catégorie* $\mathcal{C}$» lorsque les produits existent dans les catégories $\mathcal{C}/_{\boldsymbol{S}}$ pour tout objet $\boldsymbol{S}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Étant donnés deux morphismes $\pi_{\boldsymbol{X}}:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{S}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}}:\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{S}$ dans $\mathcal{C}$, on a les applications naturelles

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{X}}(_)} & \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{S}) \\ f & \longmapsto & \pi_{\boldsymbol{X}}\circ f\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc}\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{Y}) & \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{Y}}(_)} & \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{S}) \\ f & \longmapsto & \pi_{\boldsymbol{Y}}\circ f\end{array}$$

Posons $\boldsymbol{F}(_):=\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{G}(_):=\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{Y})$ et $\boldsymbol{H}(_):=\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{S})$. L'existence des produits fibrés dans $\mathcal{C}$ équivaut alors à la représentabilité du foncteur $\boldsymbol{F}\times_{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{G}$, quels que soient $\pi_{\boldsymbol{X}}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}}$ (*cf.* 6.1.5).

6.1.11. Produits fibrés dans la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}^{op},\mathcal{C}')$. On note ainsi la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. Lorsque la catégorie $\mathcal{C}'$ admet des produits fibrés on peut, de manière analogue à 6.1.6, définir pour des foncteurs $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{B}:\mathcal{C}\rightsquigarrow\mathcal{C}'$ et deux morphismes $\pi_{\boldsymbol{F}}:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{B}$ et $\pi_{\boldsymbol{G}}:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{B}$, «*le produit fibré de $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ au-dessus de $\boldsymbol{B}$ (relativement à $\pi_{\boldsymbol{F}}$ et $\pi_{\boldsymbol{G}}$)*». On dit ([EGA$_1$] **0** §1.7.2, p. 45) que les produits fibrés existent dans la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}^{op},\mathcal{C}')$.

6.1.12. Morphisme représentable de foncteurs d'ensembles. Soient $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}:\mathcal{C}\rightsquigarrow\mathbf{Ens}$ deux foncteurs contravariants. Un morphisme $f:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{G}$ est dit «*représentable*» si pour tout $\boldsymbol{X}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et tout morphisme $u:\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{X})\to\boldsymbol{G}$, le foncteur $\boldsymbol{F}\times_{\boldsymbol{G}}\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{X})$ est représentable.

Dans ce cas, si on fixe un isomorphismes $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{Y})\simeq\boldsymbol{F}\times_{\boldsymbol{G}}\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{X})$, le morphisme canonique de foncteurs $\boldsymbol{F}\times_{\boldsymbol{G}}\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{X})\to\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{X})$ est déterminé par un unique morphisme $\phi_{\boldsymbol{X}}\in\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$.

Soit $\mathscr{P}$ une classe de morphismes de $\mathcal{C}$ qui soit :
- stable par composition à droite ou à gauche par des isomorphismes ;
- stable par changement de base dans $\mathcal{C}$.

Définition. Un morphisme de foncteurs d'ensembles est dit «*représentable par un morphisme de $\mathscr{P}$*» si dans la correspondance $\boldsymbol{X}\rightsquigarrow\phi_{\boldsymbol{X}}$, les morphismes $\phi_{\boldsymbol{X}}$ appartiennent tous à $\mathscr{P}$.

6.1.13. Proposition. ([EGA$_1$] prop. **0**.1.7.5) *Soient $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}$ des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ vers* **Ens**.
a) *Tout isomorphisme de foncteurs est représentable.*

b) *Si* $f : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ *et* $g : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$ *sont représentables, il en est de même de* $g \circ f$.

c) *Si* $f : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ *est représentable, il en est de même de tout morphisme* $f_{(\boldsymbol{H})}$ *déduit de* f *par changement de base* $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{G}$.

6.1.14. Critère de représentabilité dans les catégories d'espaces annelés. Le critère de représentabilité de foncteurs sur la catégorie des espaces annelés $\mathbf{Esp\text{-}ann}_{/\boldsymbol{S}}$ de [EGA_1] (prop. **0**.4.5.4, p. 103) est plus généralement valable sur n'importe quelle sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ de $\mathbf{Esp\text{-}ann}_{/\boldsymbol{S}}$ vérifiant les deux propriétés de stabilité suivantes :

- Recollement : Tout $\boldsymbol{S}$-espace localement isomorphe à un objet $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$.
- Restriction ouverte : Le $\boldsymbol{S}$-espace induit sur un ouvert d'un objet de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$.

Voici l'énoncé du critère en question.

6.1.15. Proposition. *Soient* $\mathcal{C}$ *une sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Esp\text{-}ann}_{/\boldsymbol{S}}$ *stable par recollements et restrictions ouvertes,* $\boldsymbol{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ *un foncteur contravariant,* $\{\boldsymbol{F}_i\}_{i\in I}$ *une famille de sous-foncteurs de* $\boldsymbol{F}$. *On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :*

a) *Chacun des morphismes fonctoriels canoniques* $u_i : \boldsymbol{F}_i \to \boldsymbol{F}$ *est représentable par une immersion ouverte.*

b) *Pour tout* $\boldsymbol{X} \in \mathcal{C}$, *l'application* $\boldsymbol{U} \mapsto \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})$, *où* $\boldsymbol{U}$ *parcours l'ensemble des* $\boldsymbol{S}$*-espaces annelés induits sur les ouverts de* $\boldsymbol{X}$, *est un faisceau d'ensembles.*

c) *Pour tout* $\boldsymbol{Z} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *et tout morphisme* $\mathbf{Mor}(_, \boldsymbol{Z}) \to \boldsymbol{F}$, *si* $\boldsymbol{Z}_i$ *représente* $\boldsymbol{F}_i \times_{\boldsymbol{F}} \mathbf{Mor}(_, \boldsymbol{Z})$ *et si* $\boldsymbol{U}_i$ *est l'image de* $\boldsymbol{Z}_i$ *dans* $\boldsymbol{Z}$, *alors les* $\boldsymbol{U}_i$ *forment un recouvrement de* $\boldsymbol{Z}$.

d) *Chaque* $\boldsymbol{F}_i$ *est représentable par un objet* $\boldsymbol{X}_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

Dans ces conditions, $\boldsymbol{F}$ *est représentable par un objet* $\boldsymbol{X}$ *de* $\mathcal{C}$, *les morphismes* $\boldsymbol{X}_i \to \boldsymbol{X}$ *sont des immersions ouvertes et les images des espaces sous-jacents aux* $\boldsymbol{X}_i$ *forment un recouvrement ouvert de* $\boldsymbol{X}$.

6.2 Produits fibrés de schémas †-adiques

Le principal résultat de cette section est le théorème 6.2.3 qui établit l'existence des produits fibrés dans la catégorie des schémas †-adiques. Dans la preuve, le critère de représentabilité de foncteurs 6.1.15 ([2]) nous amène à monter que les produits fibrés de la catégorie $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{I})$ sont aussi des produits fibrés de $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{I})$. Ceci est établi dans 6.2.2-b comme corollaire du théorème d'affinité 5.1.1.

[2] [EGA_1], chap 0, prop. §4.5.4.

6.2.1. Faisceaux sur $\mathbf{Sch}_{\mathbf{tf}}{}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. Un foncteur $\boldsymbol{F}:\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})\rightsquigarrow\mathbf{Ens}$ est dit «*faisceau (d'ensembles)*» s'il est contravariant et si pour tout $\mathscr{X}^{\dagger}\in\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et pour tout recouvrement ouvert $\{\iota_{\alpha}:\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha}\subseteq\mathscr{X}^{\dagger}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de $\mathscr{X}^{\dagger}$, la suite

$$\boldsymbol{F}(\mathscr{X}^{\dagger})\xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{F})}\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{F}(\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha})\underset{\delta_2(\boldsymbol{F})}{\overset{\delta_1(\boldsymbol{F})}{\rightrightarrows}}\prod_{\alpha,\beta\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{F}(\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha,\beta})$$

avec

$$\begin{cases}\epsilon(\boldsymbol{F})(z)(\alpha)=\boldsymbol{F}(\iota_{\alpha})(z)\\ \delta_1(\boldsymbol{F})(\omega)(\alpha,\beta)=\boldsymbol{F}(\iota^{\alpha}_{\alpha,\beta})(\omega(\alpha))\\ \delta_2(\boldsymbol{F})(\omega)(\alpha,\beta)=\boldsymbol{F}(\iota^{\beta}_{\alpha,\beta})(\omega(\beta))\end{cases}$$

où $\iota^{\alpha}_{\alpha,\beta}$ désigne l'inclusion $\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha,\beta}\subseteq\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha}$, est «*exacte*», *i.e.* $\epsilon(\boldsymbol{F})$ est une bijection entre $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ et l'ensemble $\{\delta_1(\boldsymbol{F})=\delta_2(\boldsymbol{F})\}\subseteq\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{F}(\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha})$.

Proposition. *Un morphisme $\mu:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{G}$ de faisceaux d'ensembles sur $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ est un isomorphisme si et seulement si sa restriction à la sous-catégorie $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ est un isomorphisme.*

Preuve. Soit $\mathscr{X}^{\dagger}\in\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et soit $\{\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de $\mathscr{X}^{\dagger}$ avec $\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha}\in\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. On a le morphisme des suites exactes :

$$\begin{array}{ccccc}\boldsymbol{F}(\mathscr{X}^{\dagger}) & \xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{F})} & \prod_{\alpha}\boldsymbol{F}(\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha}) & \underset{\delta_2(\boldsymbol{F})}{\overset{\delta_1(\boldsymbol{F})}{\rightrightarrows}} & \prod_{\alpha,\beta}\boldsymbol{F}(\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha,\beta})\\ \downarrow{\scriptstyle\mu(\mathscr{X}^{\dagger})} & & \downarrow{\scriptstyle\mu(\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha})} & & \downarrow{\scriptstyle\mu(\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha,\beta})}\\ \boldsymbol{G}(\mathscr{X}^{\dagger}) & \xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{G})} & \prod_{\alpha}\boldsymbol{G}(\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha}) & \underset{\delta_2(\boldsymbol{G})}{\overset{\delta_1(\boldsymbol{G})}{\rightrightarrows}} & \prod_{\alpha,\beta}\boldsymbol{G}(\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha,\beta})\end{array}$$

et le lemme résultera de montrer que les applications $\mu(\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha,\beta})$ sont bijectives. C'est le cas lorsque $\mathscr{X}^{\dagger}$ est de réduction séparée puisqu'alors $\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha,\beta}$ est un ouvert de réduction *affine* du schéma †-adique affine $\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha}$ et donc $\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha,\beta}\in\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ d'après 5.1.1. Et ce sera alors aussi le cas dans la situation générale car la réduction de $\mathscr{U}^{\dagger}_{\alpha,\beta}$ est toujours séparée étant sous-schéma (ouvert) d'un schéma affine (donc séparé). ∎

6.2.2. Théorème

a) *Pour tous $\mathscr{X}^{\dagger}\in\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et $\mathscr{Y}^{\dagger}\in\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ l'application naturelle*

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Mor}(\mathscr{X}^{\dagger},\mathscr{Y}^{\dagger}) & \xrightarrow{\gamma(\mathscr{X}^{\dagger},\mathscr{Y}^{\dagger})} & \mathbf{Homom}_{\boldsymbol{R}}\big(\Gamma(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\mathscr{Y}^{\dagger}}),\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}})\big)\\ (f,f^{\#}) & \longmapsto & \Gamma(\boldsymbol{Y};f^{\#}:\mathscr{O}_{\mathscr{Y}^{\dagger}}\to f_{*}\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}})\end{array}$$

est un isomorphisme.

b) *Les produits fibrés de $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ sont des produits fibrés de $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.*

Preuve

a) Pour $\mathscr{Y}^\dagger = (\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim$ fixé, le foncteur $(_) \rightsquigarrow \mathbf{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^\dagger, \Gamma(_))$ est un faisceau d'ensembles sur $\mathbf{Sch}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. En effet, soit $\mathscr{X}^\dagger = \cup_\alpha \mathscr{U}^\dagger_\alpha$ un recouvrement ouvert de $\mathscr{X}^\dagger \in \mathbf{Sch}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. On a la suite exacte de d'ensembles

$$\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}) \xrightarrow{\epsilon(\Gamma)} \prod_\alpha \Gamma(\boldsymbol{U}_\alpha;\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}) \underset{\delta_2(\Gamma)}{\overset{\delta_1(\Gamma)}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha,\beta} \Gamma(\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$$

L'application $\mathbf{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^\dagger;\epsilon(\Gamma))$ est injective puisque $\boldsymbol{U}_\alpha$ recouvre $\boldsymbol{X}$. Ensuite,

$$\mathbf{Homom}_{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{A}^\dagger;\textstyle\prod_\alpha \Gamma(\boldsymbol{U}_\alpha;\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})\right) = \prod_\alpha \mathbf{Homom}_{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{A}^\dagger;\Gamma(\boldsymbol{U}_\alpha;\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})\right)$$

et la donnée de $\vec{\eta} \in \mathbf{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^\dagger;\prod_\alpha \Gamma(\boldsymbol{U}_\alpha,\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}))$ vérifiant $\delta_1(\Gamma)\circ\vec{\eta} = \delta_2(\Gamma)\circ\vec{\eta}$ équivaut à la donnée d'une famille de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\eta_\alpha : \boldsymbol{A}^\dagger \to \Gamma(\boldsymbol{U}_\alpha;\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$ telle que, pour chaque $a \in \boldsymbol{A}^\dagger$ on ait :

$$\eta_\alpha(a)|_{\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta}} = \eta_\beta(a)|_{\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta}}\,.$$

Il existe alors une et une seule section globale $\eta(a) \in \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$ recollant les $\eta_\alpha(a)$. L'application $a \mapsto \eta(a)$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres vérifiant $\epsilon(\Gamma)\circ\eta = \vec{\eta}$ ce qui termine la preuve du fait que $\mathbf{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^\dagger,\Gamma(_))$ est un faisceau sur $\mathbf{Sch}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

L'application $\gamma(_,\mathscr{Y}^\dagger) : \mathbf{Mor}(_,\mathscr{Y}^\dagger) \to \mathbf{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^\dagger,\Gamma(_))$ est par conséquent un morphisme de *faisceaux d'ensembles* sur $\mathbf{Sch}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$; on peut alors invoquer 6.2.1 et affirmer que c'est un isomorphisme de foncteurs puisqu'il en est ainsi de sa restriction à la sous-catégorie $\mathbf{Aff}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (3.3.8-(a)).

b) Étant donnés $\mathscr{X}^\dagger_i, \mathscr{S}^\dagger \in \mathbf{Aff}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et $\pi_i \in \mathbf{Mor}(\mathscr{X}^\dagger_i,\mathscr{S}^\dagger)$ on a les morphismes de foncteurs $\mathbf{Mor}(_,\pi_i) : \mathbf{Mor}(_,\mathscr{X}^\dagger_i) \to \mathbf{Mor}(_,\mathscr{S}^\dagger)$ et le foncteur sur $\mathbf{Sch}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$:

$$(_) \rightsquigarrow \mathbf{Mor}(_,\mathscr{X}^\dagger_1) \times_{\mathbf{Mor}(_,\mathscr{S}^\dagger)} \mathbf{Mor}(_,\mathscr{X}^\dagger_2)$$

dont il faut prouver la représentabilité.

Or, grâce au produit fibré dans $\mathbf{Aff}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (3.3.8)

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{X}^\dagger_1 \times_{\mathscr{S}^\dagger} \mathscr{X}^\dagger_2 & \xrightarrow{p_1} & \mathscr{X}^\dagger_1 \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ \mathscr{X}^\dagger_2 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathscr{S}^\dagger \end{array}$$

on définit pour chaque $\mathscr{Z}^\dagger \in \mathbf{Sch}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ l'application

$$\mathbf{Mor}(\mathscr{Z}^\dagger, \mathscr{X}^\dagger_1 \times_{\mathscr{S}^\dagger} \mathscr{X}^\dagger_2) \xrightarrow{\Xi(\mathscr{Z}^\dagger)} \mathbf{Mor}(\mathscr{Z}^\dagger,\mathscr{X}^\dagger_1) \times_{\mathbf{Mor}(\mathscr{Z}^\dagger,\mathscr{S}^\dagger)} \mathbf{Mor}(\mathscr{Z}^\dagger,\mathscr{X}^\dagger_2)$$

qui associe à $\alpha \in \mathbf{Mor}(\mathscr{Z}^\dagger, \mathscr{X}^\dagger_1 \times_{\mathscr{S}^\dagger} \mathscr{X}^\dagger_2)$ le couple $(p_1\circ\alpha, p_2\circ\alpha)$. La correspondance $\Xi(_)$ est naturelle entre deux *faisceaux d'ensembles* sur $\mathbf{Sch}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$; on peut alors invoquer 6.2.1 et affirmer que c'est un isomorphisme de foncteurs puisqu'il en est ainsi de sa restriction à la sous-catégorie $\mathbf{Aff}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (3.3.8-(b)) ∎

6.2.3. Théorème. *La catégorie* $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *possède des produits fibrés.*

Preuve. Soient $\pi_{\mathscr{X}^\dagger}:\mathscr{X}^\dagger\to\mathscr{S}^\dagger$ et $\pi_{\mathscr{Y}^\dagger}:\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{S}^\dagger$ des objets de $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})/_{\mathscr{S}^\dagger}$. Notons $\{\mathscr{S}^\dagger_\alpha\}_\alpha$ un recouvrement ouvert de $\mathscr{S}^\dagger$ avec $\mathscr{S}^\dagger_\alpha\in\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ pour tout α. Soit $\{\mathscr{X}^\dagger_{\alpha,\beta}\}_\beta$ un recouvrement ouvert de $\pi^{-1}_{\mathscr{X}^\dagger}(\mathscr{S}^\dagger_\alpha)$ par des objets de $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et de même pour $\mathscr{Y}^\dagger$.

Le produit fibré $\mathscr{X}^\dagger_{\alpha,\beta}\times_{\mathscr{S}^\dagger_\alpha}\mathscr{Y}^\dagger_{\alpha,\beta'}$ existe dans $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})/_{\mathscr{S}^\dagger_\alpha}$ (6.2.2-b) et représente aussi le foncteur $\mathbf{More}(_,\mathscr{X}^\dagger_{\alpha,\beta})\times_{\mathbf{More}(_,\mathscr{S}^\dagger)}\mathbf{More}(_,\mathscr{Y}^\dagger_{\alpha,\beta'})$ (car $\mathscr{S}^\dagger_\alpha\to\mathscr{S}^\dagger$ est un plongement ouvert). Le produit fibré $\mathscr{X}^\dagger_{\alpha,\beta}\times_{\mathscr{S}^\dagger}\mathscr{Y}^\dagger_{\alpha,\beta'}$ existe donc bien dans $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})/_{\mathscr{S}^\dagger}$.

On conclut en appliquant le critère de représentabilité 6.1.15 avec

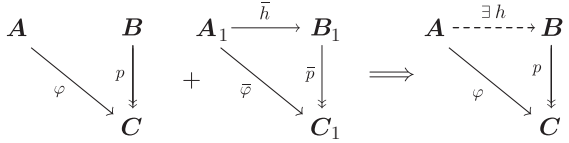
- $\mathcal{C}=\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})/_{\mathscr{S}^\dagger}$,
- $\boldsymbol{F}:=\mathbf{More}(_,\mathscr{X}^\dagger)\times_{\mathbf{More}(_,\mathscr{S}^\dagger)}\mathbf{More}(_,\mathscr{Y}^\dagger)$,
- $\boldsymbol{F}_{\alpha,\beta,\beta'}:\mathbf{More}(_,\mathscr{X}^\dagger_{\alpha,\beta})\times_{\mathbf{More}(_,\mathscr{S}^\dagger)}\mathbf{More}(_,\mathscr{Y}^\dagger_{\alpha,\beta'})$. ∎

§7. Schémas †-adiques plats, schémas †-adiques lisses

7.1 Algèbres †-adiques lisses

Une algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger\in\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ est dite «†-*adique lisse*» ([3]), lorsque :

- L'algèbre $\boldsymbol{A}_1$ est lisse sur $\boldsymbol{R}_1$.
- Pour toute paire de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{B}^\dagger\xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow\boldsymbol{C}\xleftarrow{\varphi}\boldsymbol{A}^\dagger$, où $\boldsymbol{B}$ est f.c., $\boldsymbol{C}$ est séparée et p est surjectif (de noyau arbitraire), et pour chaque morphisme d'algèbres $\overline{h}:\boldsymbol{A}_1\to\boldsymbol{B}_1$ vérifiant $\overline{\varphi}=\overline{p}\circ\overline{h}$, il existe un relèvement $h:\boldsymbol{A}^\dagger\to\boldsymbol{B}^\dagger$ de $\overline{h}$, tel que $\varphi=p\circ h$.



Étant donnée $\overline{\boldsymbol{A}}\in\mathbf{Alg}(\boldsymbol{R}_1)$ lisse sur $\boldsymbol{R}_1$, on appelle «*relèvement* †-*adique lisse de* $\overline{\boldsymbol{A}}$» la donnée d'une algèbre †-adique lisse $\boldsymbol{A}^\dagger$ et d'une surjection d'algèbres $\boldsymbol{A}^\dagger\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est bijective.

7.1.1. Théorème ([Ar]). *Soit* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *une algèbre* $\boldsymbol{R}_1$*-lisse.*
a) $\overline{\boldsymbol{A}}$ *admet des relèvements lisses sur* $\boldsymbol{R}$.
b) *Pour tout relèvement* $p:\boldsymbol{A}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}$ *lisse sur* $\boldsymbol{R}$, *le morphisme* $p^\dagger:(\boldsymbol{A})^\dagger\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}$ *est un relèvement* †*-adique lisse. Deux relèvements* †*-adiques lisses de* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *sont isomorphes.*

Remarque. Ce même énoncé en remplaçant «*lisse*» par «*plat*» n'est plus vrai.

7.1.2. Corollaire
a) *Une algèbre* †*-adique lisse est la complétion faible d'une algèbre lisse sur* $\boldsymbol{R}$.
b) *Il y a équivalence pour* $\boldsymbol{A}^\dagger\in\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *entre : être* †*-adique lisse, et être plate sur* $\boldsymbol{R}$ *et de réduction lisse sur* $\boldsymbol{R}_1$.

[3] «*Very smooth*» dans [MW]

c) *Si* $\boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *est plate sur* $\boldsymbol{R}$ *(resp. †-adique lisse), l'algèbre* $\boldsymbol{A}^\dagger\{\frac{1}{f}\}$ *est plate sur* $\boldsymbol{R}$ *(resp. †-adique lisse) quel que soit* $f \in \boldsymbol{A}^\dagger$.

Indication. Pour $\boldsymbol{A}^\dagger$ †-adique lisse notons $\pi : \boldsymbol{A}^\dagger \twoheadrightarrow (\boldsymbol{A}^\dagger)_1$ la surjection canonique. Fixons un relèvement $\boldsymbol{R}$-lisse $\beta : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow (\boldsymbol{A}^\dagger)_1$ (7.1.1). Le morphisme induit $\beta^\dagger : \boldsymbol{B}^\dagger \twoheadrightarrow (\boldsymbol{A}^\dagger)_1$ est un relèvement †-adique lisse (*loc.cit.*). Il existe donc un morphisme d'algèbres $h^\dagger : \boldsymbol{B}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger$ vérifiant $\pi \circ h^\dagger = \beta^\dagger$ donc de réduction bijective. Or, une algèbre †-adique lisse est plate sur $\boldsymbol{R}$ ([MW] th. 2.6) et on peut appliquer 1.3.1-h pour conclure que h est bijective. ∎

7.1.3. Remarque. Contrairement à la situation générale (*cf.* 1.5.1), une algèbre †-adique lisse est toujours la complétion faible d'une algèbre de type fini.

7.2 Schémas †-adiques plats, schémas †-adiques lisses

7.2.1. Définition. On appelle «*schéma †-adique plat (resp. †-adique lisse)*» tout espace annelé localement isomorphe à un schéma †-adique affine associé à une algèbre f.c.t.f. plate sur $\boldsymbol{R}$ (resp. †-adique lisse).

7.2.2. Proposition. *Un schéma †-adique est lisse si et seulement si il est plat sur* $\boldsymbol{R}$ *et sa réduction est lisse sur* $\boldsymbol{R}_1$.

Preuve. La propriété d'être †-adique lisse est locale, et sur un schéma †-adique affine l'équivalence résulte de 7.1.2-b. ∎

7.2.3. Proposition. *Soit* $\mathscr{X}^\dagger = (\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$ *est un schéma †-adique plat (resp. lisse).*
a) *Le schéma algébrique* $(\boldsymbol{X};(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})_1)$ *est plat (resp. lisse) sur* $\boldsymbol{R}_1$.
b) *Pour tout ouvert affine* $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{X}$, *l'algèbre* $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(\boldsymbol{V})$ *est une algèbre f.c.t.f. plate sur* $\boldsymbol{R}$ *(resp. †-adique lisse).*

Preuve. L'assertion (a) est claire. Pour (b), on sait d'après le critère d'affinité (5.1.1) que $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(\boldsymbol{V})$ est un relèvement f.c.t.f. de $(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})_1(\boldsymbol{V})$ qui est une algèbre lisse sur $\boldsymbol{R}_1$ lorsque $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(\boldsymbol{V})$ est †-adique lisse. Soit maintenant $\boldsymbol{V} = V_1 \cup \cdots \cup V_\ell$ un recouvrement par des ouverts affines tels que $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(V_i)$ est plate sur $\boldsymbol{R}$ (7.1.2-c). Pour tout $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$, la suite

$$\mathbf{0} \to \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(\boldsymbol{V}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M} \longrightarrow \textstyle\prod_i \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(V_i) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M} \longrightarrow \prod_{i<j} \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}(V_i \cap V_j) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M}$$

est exacte d'après 5.1.3-(b) pour le foncteur $(_) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(\boldsymbol{V})} \big(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(\boldsymbol{V}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M}\big)$. Ainsi, lorsque $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{N}$ est une inclusion de $\boldsymbol{R}$-modules, on aura $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(V_i) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M} \subseteq \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(V_i) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{N}$ par platitude de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(V_i)$ et l'injectivité du morphisme $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(\boldsymbol{V}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M} \to \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(\boldsymbol{V}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{N}$ découle aussitôt du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0} \to \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(\boldsymbol{V}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M} & \xrightarrow[\subseteq]{} & \prod_i \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(V_i) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M} \\ \downarrow & & \downarrow \subseteq \\ \mathbf{0} \to \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(\boldsymbol{V}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{N} & \xrightarrow[\subseteq]{} & \prod_i \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(V_i) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{N} \end{array}$$

Ces remarques prouvent que $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(\boldsymbol{V})$ est une algèbre plate sur $\boldsymbol{R}$. Lorsque, de plus, $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$ est un schéma †-adique lisse, l'algèbre $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger}(\boldsymbol{V})$ est †-adique lisse d'après 7.1.2-b. ∎

7.2.4. Proposition. *Soit $\mathscr{Y}^\dagger$ un schéma †-adique plat sur $\boldsymbol{R}$. Un morphisme de schémas †-adiques $(f, f^\#) : \mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger$ est un isomorphisme si et seulement si $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ est un isomorphisme de schémas algébriques.*

Preuve. Si $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ est un isomorphisme, la restriction de $(f, f^\#)$ à un ouvert affine de $\boldsymbol{Y}$ correspond par l'équivalence de catégories 3.3.8-a et le critère d'affinité 5.1.1 à un morphisme d'algèbres f.c.t.f. de but plat et de réduction bijective, donc à un isomorphisme d'après 1.3.1-h. ∎

§ 8. Faisceau d'automorphisme †-adiques

8.1 Faisceau de morphismes †-adiques

8.1.1. Morphismes †-adiques au-dessus d'un morphisme de schémas. Soient deux schémas †-adiques $\mathscr{Y}^\dagger = (\boldsymbol{Y}; \mathscr{O}_{\mathscr{Y}^\dagger})$ et $\mathscr{X}^\dagger = (\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$. Pour tout ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{Y}$ notons $\mathscr{Y}^\dagger|_{\boldsymbol{U}}$ le sous-espace annelé induit par $\mathscr{Y}^\dagger$ sur $\boldsymbol{U}$. Étant donné un morphisme de schémas $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$, qu'un morphisme de schémas †-adiques $\varphi = (\phi, \phi^\#) : \mathscr{Y}^\dagger|_{\boldsymbol{U}} \to \mathscr{X}^\dagger$ sera dit « *au-dessus de* f » lorsque $\phi = f|_{\boldsymbol{U}}$.

La correspondance $\mathscr{G}_{f:\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}$ qui associe à un ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{Y}$ l'ensemble des morphismes de schémas †-adiques $\varphi : \mathscr{Y}^\dagger|_{\boldsymbol{U}} \to \mathscr{X}^\dagger$ au-dessus de f, et qui associe à l'inclusion $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{U}$ la restriction $\varphi \rightsquigarrow \varphi|_{\boldsymbol{V}} : \mathscr{Y}^\dagger|_{\boldsymbol{V}} \to \mathscr{X}^\dagger$, est un faisceau d'ensembles sur $\boldsymbol{Y}$.

8.1.2. Proposition. *Dans ce qui précède, soit $\mathscr{X}^\dagger = (\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim$ avec $\boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{I})$.*

a) *Pour tout ouvert affine $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{Y}$, on a*

$$\mathscr{G}_{f:\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}(\boldsymbol{V}) = \left\{ \phi^\# \in \mathbf{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^\dagger; \mathscr{O}_{\mathscr{Y}^\dagger}(\boldsymbol{V})) \;\middle|\; \phi^\# \pmod{\boldsymbol{I}} = \left(f|_{\boldsymbol{V}}\right)^\# \right\}$$

où $\left(f|_{\boldsymbol{V}}\right)^\# : \boldsymbol{A}^\dagger{}_1 \to (\mathscr{O}_{\mathscr{Y}^\dagger})_1(\boldsymbol{V})$ est le morphisme de $\boldsymbol{R}_1$-algèbres associé à $f|_{\boldsymbol{V}} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{X}$.

b) *Si $\mathscr{Y}^\dagger$ est un schéma †-adique* ***plat sur*** $\boldsymbol{R}$ *le faisceau $\mathscr{G}_{\mathrm{id}_{\boldsymbol{Y}}:\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{Y}^\dagger}$ est un faisceau de groupes. Plus précisément, pour tout ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{Y}$, l'ensemble $\mathscr{G}_{\mathrm{id}_{\boldsymbol{Y}}:\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{Y}^\dagger}(\boldsymbol{U})$ est le groupe des isomorphismes de schéma †-adique de $\mathscr{Y}^\dagger|_{\boldsymbol{U}}$ au-dessus de $\mathrm{id}_{\boldsymbol{U}}$. En particulier, si $\boldsymbol{V}$ est un ouvert affine de $\boldsymbol{Y}$, on a*

$$\mathscr{G}_{\mathrm{id}_{\boldsymbol{Y}}:\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{Y}^\dagger}(\boldsymbol{V}) = \left\{ \phi^\# \in \mathbf{Endom}_{\boldsymbol{R}}(\mathscr{O}_{\mathscr{Y}^\dagger}(\boldsymbol{V})) \;\middle|\; \phi^\# \pmod{\boldsymbol{I}} = \mathrm{id} \right\}.$$

c) *Si $\mathscr{Y}^\dagger$ est un schéma †-adique* ***plat sur*** $\boldsymbol{R}$ *et si $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ est un plongement ouvert, le groupe $\mathscr{G}_{\mathrm{id}_{\boldsymbol{Y}}:\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{Y}^\dagger}(\boldsymbol{U})$ opère à droite sur $\mathscr{G}_{f:\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}(\boldsymbol{U})$ de manière simplement transitive quel que soit l'ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{Y}$.*

Preuve

a) Par définition de $\mathscr{G}_f(\boldsymbol{V})$, le critère d'affinité 5.1.1 et l'équivalence de catégories 3.3.8-a.

b) Tout morphisme de schéma †-adique au-dessus de l'identité $\varphi : \mathscr{Y}^\dagger|_{\boldsymbol{U}} \to \mathscr{Y}^\dagger$ se factorise de manière unique comme composée de l'endomorphisme $\varphi|_{\boldsymbol{U}} : \mathscr{Y}^\dagger|_{\boldsymbol{U}} \to \mathscr{Y}^\dagger|_{\boldsymbol{U}}$ et de l'inclusion $\mathscr{Y}^\dagger|_{\boldsymbol{U}} \subseteq \mathscr{Y}^\dagger$. Le morphisme $\varphi|_{\boldsymbol{U}}$ est un isomorphisme d'après 7.2.4. L'assertion résulte alors du critère d'affinité 5.1.1 et de l'équivalence de catégories 3.3.8-a.

c) Comme pour (b), tout morphisme $\mathscr{Y}^\dagger|_{\boldsymbol{U}} \to \mathscr{X}^\dagger$ au-dessus de f se factorise comme la composée d'un (unique) isomorphisme de $\mathscr{Y}^\dagger|_{\boldsymbol{U}}$ sur $\mathscr{X}^\dagger|_{f(\boldsymbol{U})}$ suivi de l'inclusion $\mathscr{X}^\dagger|_{f(\boldsymbol{U})} \subseteq \mathscr{X}^\dagger$. ∎

8.1.3. Notations

- Le faisceau $\mathscr{G}_{f:\mathscr{Y}^\dagger\dashrightarrow\mathscr{X}^\dagger}$ « *des morphismes* †*-adiques de* $\mathscr{Y}^\dagger$ *vers* $\mathscr{X}^\dagger$ *au-dessus de* f » sera noté plus simplement $\mathscr{G}_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger}$ lorsque $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ est sous-entendue.
- Le faisceau $\mathscr{G}_{\mathrm{id}_{\boldsymbol{Y}}:\mathscr{Y}^\dagger\dashrightarrow\mathscr{Y}^\dagger}$ « *des automorphismes* †*-adiques de* $\mathscr{Y}^\dagger$ » (8.1.2-b) sera noté plus simplement $\mathscr{G}_{\mathscr{Y}^\dagger}$.

§ 9. Références bibliographiques

[Ar] A. Arabia. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes ; Commentarii Mathematici Helvetici 76 (2001) 607–639. (avril 2000).

[A-M] A. Arabia-Z. Mebkhout. Sur le Topos infinitésimal p-adique d'une variété algébrique non singulière I ; à paraître.

[EGA$_1$] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné. "*Éléments de géométrie algébrique-I*" ; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 166. Springer-Verlag (1971).

[Go] R. Godement. "*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*" ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

[M] D. Meredith. Weak formal schemes ; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).

[MW] P. Monsky, G. Washnitzer. Formal cohomology : I ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217 (1968).

———————×———————

Affinité des schémas †-adiques de réduction affine

Alberto Arabia*

Résumé. On se donne un anneau commutatif nœthérien $\boldsymbol{R}$ et un idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$. On note $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$. Pour tout schéma affine lisse $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\overline{X}})$ au-dessus de $\overline{\boldsymbol{R}}$, et toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ lisse sur $\boldsymbol{R}$, relèvement de $\overline{\boldsymbol{A}} := \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{X}})$ et de complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible notée $\boldsymbol{A}^\dagger$, Meredith associe un espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}^\dagger)$ au-dessus du même espace topologique $\overline{\boldsymbol{X}}$ qu'il appelle *schéma faiblement formel affine* (*cf.* [M]) et que nous appelons *schéma †-adique affine-lisse*. Un *schéma †-adique lisse* est, par définition, tout espace annelé localement isomorphe à un *schéma †-adique affine-lisse*.

Étant donné un schéma †-adique lisse $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$, notons $\overline{\mathscr{O}^\dagger}$ le faisceau sur $\overline{\boldsymbol{X}}$ associé au préfaisceau qui fait correspondre à l'ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, l'algèbre $\Gamma(U;\mathscr{O}^\dagger) \otimes_{\boldsymbol{R}} \overline{\boldsymbol{R}}$. L'espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\overline{\mathscr{O}^\dagger})$ est un schéma que nous appellerons *réduction (modulo $\boldsymbol{I}$) de* $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$. Il est aisé de voir que la réduction d'un schéma †-adique affine-lisse est un schéma affine lisse. Le but de ce papier est de démontrer la réciproque de cette assertion ; question posée par Meredith dans son article (*loc.cit.*). Plus précisément, nous prouvons :

Théorème 2.1.8

a) *Pour tout ouvert affine $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ d'un schéma †-adique lisse $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$, le sous-espace annelé $(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{U}})$ est un schéma †-adique affine-lisse.*

b) *Pour tout ouvert affine $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ d'un schéma †-adique lisse $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$, le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha(\overline{U}) : \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger) \to \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}_{\overline{X}})$ est un relèvement f.c.t.f. très lisse.*

c) *Un schéma †-adique lisse et de réduction affine est affine-lisse.*

Table des matières

§1. **A propos de recollements de schémas affines** 1
1.1. Schéma non affine au-dessus du spectre d'un schéma affine 1
1.1.1. **Exemple de recollement non affine** 2
1.1.2. Le cas des schémas formels 3
§2. **Schémas †-adiques à réduction affine** 5
2.1. Rappels 5
2.1.1. Schémas †-adiques affines 6
2.1.2. Schémas †-adiques 6
2.1.3. Schémas †-adiques lisses 7
2.1.4. Schémas †-adiques lisses de réduction séparée 7
2.1.5. Schémas †-adiques de réduction affine 8

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 9e étage, bureau 9D11, 75013 Paris.
Adresse électronique : arabia@math.jussieu.fr

2.1.6. Schémas †-adiques lisses de réduction affine **10**
2.1.8. Affinité des schémas †-adiques de réduction affine **15**
2.1.12. Un théorème de relèvement de morphismes **22**
§**3. Références bibliographiques** **23**

§1. A propos de recollements de schémas affines

1.1 Schéma non affine au-dessus du spectre d'un schéma affine

Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau et notons $(\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}); \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ le schéma affine associé. Pour $f, g \in \boldsymbol{A}$ tels que $1 \in (f, g)$, l'espace $\boldsymbol{X}$ est réunion des ouverts principaux $\boldsymbol{U}_f := D(f)$ et $\boldsymbol{U}_g := D(g)$. Ces ouverts sont les espaces topologiques sous-jacents aux schémas affines $(\boldsymbol{U}_f; \mathscr{O}_f)$ et $(\boldsymbol{U}_g, \mathscr{O}_g)$ associés respectivement à $\boldsymbol{A}_f$ et à $\boldsymbol{A}_g$. Un recollement de ces deux espaces annelés est donné par un isomorphisme de sous-schémas affines au-dessus de l'ouvert principal $\boldsymbol{U}_{fg} := D(fg)$, autrement dit par un automorphisme φ de $\boldsymbol{A}_{fg}$, on notera alors $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_\varphi)$ l'espace annelé obtenu par le recollement défini par φ.

1.1.1. Exemple de recollement non affine. Soient $\boldsymbol{A} := k[X]$, $f = X$ et $g = 1 - X$ et notons $\varphi : k[X] \to k[X]$ le morphisme de k-algèbres défini par $\varphi(X) = 1 - X$. Le morphisme φ est un automorphisme de $k[X]$ vérifiant aussi $\varphi(1 - X) = X$ de sorte qu'il induit :

- un isomorphisme de $\boldsymbol{A}_f$ sur $\boldsymbol{A}_g$,
- un isomorphisme de $\boldsymbol{A}_g$ sur $\boldsymbol{A}_f$,
- un automorphisme de $\boldsymbol{A}_{fg}$.

Notons $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_\varphi)$ le schéma obtenu en recollant $(\boldsymbol{U}_f; \mathscr{O}_f)$ et $(\boldsymbol{U}_g; \mathscr{O}_g)$ à l'aide de φ. On a la suite exacte à gauche

$$\boldsymbol{0} \to \mathscr{O}_\varphi(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{(\epsilon_f, \epsilon_g)} \boldsymbol{A}_f \oplus \boldsymbol{A}_g \xrightarrow{\delta_\varphi} \boldsymbol{A}_{fg} \qquad (\diamond)$$

avec $\delta_\varphi(a, b) = a - \varphi(b)$. Le schéma $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_\varphi)$ **n'est pas affine**.

Nous en donnons trois raisons.

i) On constate que le morphisme de restriction $\epsilon_f : \mathscr{O}_\varphi(\boldsymbol{X}) \to \mathscr{O}_\varphi(\boldsymbol{U}_f)$ est bijectif ce qui entraîne que $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_\varphi)$ **n'est pas** un schéma affine car autrement on aurait $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}_f$ ce qui est contraire à la définition.

ii) On constate aussi que dans la suite $(\diamond)$ l'application δ_0 n'est pas surjective comme elle aurait dû être si $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_\varphi)$ avait été affine.

iii) Enfin, on dispose aussi des suites exactes longues de cohomologie de faisceaux

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^i_{\boldsymbol{X}\smallsetminus \boldsymbol{U}_f}(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_\varphi) & \longrightarrow & H^i(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_\varphi) & \longrightarrow & H^i(\boldsymbol{U}_f;\mathscr{O}_\varphi) & \longrightarrow \\ & || & & & & & \\ \longrightarrow & H^i_{\boldsymbol{U}_g\smallsetminus \boldsymbol{U}_{fg}}(\boldsymbol{U}_g;\mathscr{O}_{\boldsymbol{U}_g}) & \longrightarrow & H^i(\boldsymbol{U}_g;\mathscr{O}_{\boldsymbol{U}_g}) & \longrightarrow & H^i(\boldsymbol{U}_{fg};\mathscr{O}_{\boldsymbol{U}_{fg}}) & \longrightarrow \end{array} \qquad (\mathscr{D})$$

Par l'acyclicité des faisceaux quasi-cohérents sur un schéma affine on a l'annulation de $H^i_{\boldsymbol{U}_g\smallsetminus \boldsymbol{U}_{fg}}(\boldsymbol{U}_g;\mathscr{O}_{\boldsymbol{U}_g})$ pour tout $i>1$ (deuxième ligne de $(\mathscr{D})$) et donc l'annulation de $H^i(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_\varphi)$ pour tout $i>1$ (première ligne de $(\mathscr{D})$). Le cas $i=0$ est clair, et nous sommes réduits à la suite exacte

$$\mathbf{0}\longrightarrow H^0(\boldsymbol{X},\mathscr{O}_\varphi)\xrightarrow[\simeq]{\epsilon_f}\boldsymbol{A}_f\longrightarrow H^1_{\boldsymbol{U}_g\smallsetminus \boldsymbol{U}_{fg}}(\boldsymbol{U}_g;\mathscr{O}_{\boldsymbol{U}_g})\longrightarrow H^1(\boldsymbol{X},\mathscr{O}_\varphi)\longrightarrow\mathbf{0}$$

où la bijectivité de ϵ_f a déjà été établie. On a donc

$$H^1(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_\varphi)=H^1_{\boldsymbol{U}_g\smallsetminus \boldsymbol{U}_{fg}}(\boldsymbol{U}_g;\mathscr{O}_{\boldsymbol{U}_g})=\frac{\boldsymbol{A}_{fg}}{\boldsymbol{A}_g}=\frac{\boldsymbol{A}_f}{\boldsymbol{A}}\neq 0$$

et $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_\varphi)$ n'est pas un schéma affine.

1.1.2. Le cas des schémas formels. Comme dans 1.1.1 nous considérons un recollement de deux schémas formels au-dessus de la droite affine $\big(\overline{\boldsymbol{X}}:=\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p[X]);\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}\big)$. Les schémas affines faiblement complets $\big(D(X);\mathscr{O}^\dagger_{[X]}\big)$ et $\big(D(1-X);\mathscr{O}^\dagger_{[1-X]}\big)$ associés respectivement aux algèbres $\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[X]}$ et $\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[1-X]}$ sont recollés le long de l'ouvert $\boldsymbol{U}_{fg}:=\boldsymbol{U}_f\cap\boldsymbol{U}_g$ à l'aide de l'automorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[X(1-X)]} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[X(1-X)]} \\ X & \xrightarrow{\ \varphi\ } & X+\dfrac{p}{X(1-X)} \end{array}$$

Notons $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_\varphi)$ le schéma ainsi obtenu. On a la suite exacte à gauche

$$\mathbf{0}\to\mathscr{O}^\dagger_\varphi(\boldsymbol{X})\xrightarrow{\ \epsilon\ }\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_X\oplus\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{1-X}\xrightarrow{\ \delta_\varphi\ }\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{X(1-X)} \qquad (\diamond\diamond)$$

avec $\delta_\varphi(a,b)=\varphi(a)-b$.

Nous allons monter que $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_\varphi)$ est isomorphe au schéma affine faiblement complet associé à $\mathbb{Z}_p[X]^\dagger$.

Comme l'automorphisme φ induit l'identité modulo p, on à un morphisme naturel de complexes de $\mathbb{Z}_p$-modules

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0}\to\mathscr{O}^\dagger_\varphi(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\ \epsilon\ } & \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_X\oplus\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{1-X} & \xrightarrow{\ \delta_\varphi\ } & \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{X(1-X)} & & \\ \alpha\downarrow & & q\downarrow \quad\oplus\quad q\downarrow & & q\downarrow & & \\ \mathbf{0}\to\mathbb{F}_p[X] & \xrightarrow{\ \epsilon\ } & \mathbb{F}_p[X]^\dagger_X\oplus\mathbb{F}_p[X]^\dagger_{1-X} & \xrightarrow{\ \delta\ } & \mathbb{F}_p[X]^\dagger_{X(1-X)} & \to & \mathbf{0} \end{array}$$

où la deuxième ligne est exacte et où q désigne le morphisme canonique.

1.1.3. Proposition. *Le morphisme α est une **surjection** de **R**-algèbres*

Preuve. Comme α est clairement un morphisme de $\mathbb{Z}_p$-algèbres, il suffira de vérifier que X est dans l'image de α. Autrement dit, il suffira de montrer qu'il existe $P \in p\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[X]}$ et $Q \in p\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[1-X]}$ tels que

$$\boxed{\varphi(X+P) = X+Q} \qquad (*)$$

La surjectivité du morphisme

$$\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_X \oplus \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{1-X} \xrightarrow{\delta_{\mathbf{id}}} \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{X(1-X)}$$

étant connue, fixons deux applications $\mathbb{Z}_p$-linéaires

$$\begin{cases} \sigma_X : \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{X(1-X)} \longrightarrow \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_X \\ \sigma_{1-X} : \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{X(1-X)} \longrightarrow \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{1-X} \end{cases}$$

vérifiant

$$\sigma_X(S) + \sigma_{1-X}(S) = S\,, \quad \forall S \in \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{X(1-X)}$$

Lemme. Les séries

$$P = \textstyle\sum_{k\geqslant 1} \big(\sigma_X(1-\varphi)\big)^k(X) \quad \textit{et} \quad Q = -\sigma_{1-X}(1-\varphi)(X+P)$$

sont des solutions formelles de $(*)$.

Preuve du lemme. En effet, on a par construction :

$$\sigma_X(1-\varphi)(X+P) = P$$

et alors :

$$\begin{aligned} (1-\varphi)(X+P) &= P + \sigma_{1-X}(1-\varphi)(X+P) \\ X - \varphi(X+P) &= \sigma_{1-X}(1-\varphi)(X+P) \\ \varphi(X+P) &= X - \sigma_{1-X}(1-\varphi)(X+P) \end{aligned}$$

□

Nous allons monter maintenant que la série définissant P converge bien vers un élément de $\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[X]}$. Il s'ensuivra que $Q \in \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[1-X]}$ d'où la surjectivité de α.

Pour cela on utilisera le développement de φ en série de Taylor :

$$(1-\varphi) = -\sum_{1\leqslant m} \left(\frac{p}{X(1-X)}\right)^m \Delta^m$$

et l'égalité pour tous $a, b \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$:

$$\frac{1}{X^a(1-X)^b} = \left(\sum_{\ell=0}^{a-1}\binom{b+\ell-1}{\ell}\frac{1}{X^{a-\ell}}\right) + \left(\sum_{\ell=0}^{b-1}\binom{a+\ell-1}{\ell}\frac{1}{(1-X)^{b-\ell}}\right) \qquad (E)$$

dont on tire l'expression

$$\sigma_X(1-\varphi) = -\sum_{0\leqslant\ell<m}\binom{m+\ell-1}{\ell}\frac{p^m}{X^{m-\ell}}\,\Delta^m \qquad (\ddagger)$$

On remarque alors les égalités

$$\begin{aligned}\sigma_X(1-\varphi)(X) &= -\frac{p}{X}\\ \big(\sigma_X(1-\varphi)\big)^2(X) &= \sum_{0\leqslant\ell<m}\binom{m+\ell-1}{\ell}\frac{p^m}{X^{m-\ell}}\,\Delta^m\Big(\frac{p}{X}\Big)\\ &= \sum_{0\leqslant\ell<m}\binom{m+\ell-1}{\ell}\frac{p^m}{X^{m-\ell}}\,p\,\frac{(-1)^m}{X^{m+1}}\end{aligned}$$

qui nous amènent à vérifier que $\sigma_X(1-\varphi)$ laisse stable l'ensemble des séries de la forme

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n\left(\frac{1}{X}\right)^n \quad \text{avec} \quad 2v_p(a_n)\geqslant n$$

Ceci résulte de l'égalité :

$$\begin{aligned}\sigma_X(1-\varphi)\Big(\frac{a_n}{X^n}\Big) &= -\sum_{0\leqslant\ell<m}\binom{m+\ell-1}{\ell}\frac{p^m}{X^{m-\ell}}\,a_n\,\Delta^m\Big(\frac{1}{X^n}\Big)\\ &= -\sum_{0\leqslant\ell<m}\binom{m+\ell-1}{\ell}\frac{p^m}{X^{m-\ell}}\,a_n\binom{n+m-1}{m}\frac{(-1)^m}{X^{m+n}}\end{aligned} \qquad (\ddagger\ddagger)$$

où le coefficient du terme $1/X^{2m+n-\ell}$ est de valuation au moins égale à $m+v_p(a_n)$.

Ces remarques jointes au fait que $(\sigma_X(1-\varphi))^m(X)\in p^m\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[X]}$ suffisent pour montrer que P est bien un élément de $p\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[X]}$.

Montrons pour terminer l'égalité (E). Le développement en série de Taylor :

$$\frac{1}{(1-X)^b} = \sum_{0\leqslant\ell}\binom{b+\ell-1}{\ell}X^\ell$$

fournit la décomposition

$$\frac{1}{X^a}\frac{1}{(1-X)^b} = \sum_{\ell=0}^{a-1}\binom{b+\ell-1}{\ell}\frac{1}{X^{a-\ell}} + \sum_{0\leqslant n} c_n X^n$$

avec $c_n\in\mathbb{N}$ et la série $\sum_n c_n X^n$ de rayon de convergence égal à 1. Comme d'autre part un raisonnement inductif immédiat montre que l'on a une égalité de la forme

$$\frac{1}{X^a}\frac{1}{(1-X)^b} = \frac{u_0}{X^a} + \cdots + \frac{u_{a-1}}{X} + \frac{v_{b-1}}{1-X} + \cdots + \frac{v_0}{(1-X)^b}$$

avec $u_\ell, v_\ell \in \mathbb{Z}$, on conclut aussitôt que $u_\ell = \binom{b+\ell-1}{\ell}$. Un raisonnement symétrique donne les coefficients v_n. ∎

1.1.4. Remarque. Les valeurs explicites des coefficients dans les l'égalité $(E,\ddagger,\ddagger\ddagger)$ n'interviennent pas dans la démonstration de la proposition.

§2. Schémas †-adiques à réduction affine

2.1 Rappels

Dans les paragraphes suivants nous rappelons brièvement les constructions de Meredith ([M]) et nous fixons quelques terminologies et notations nouvelles. Le couple $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ est constitué d'un anneau commutatif et nœthérien et d'un idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ quelconque. Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, l'algèbre $\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{I})$ est « *sa réduction (modulo $\boldsymbol{I}$)* » et la surjection canonique $q : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ « *le morphisme de réduction (modulo $\boldsymbol{I}$)* ». On dira que $f \in \boldsymbol{A}$ « *est un relèvement de* » ou « *relève* » $\overline{f} \in \overline{\boldsymbol{A}}$ lorsque $q(f) = \overline{f}$. Pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres (modules) $\eta : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$, le morphisme induit $\overline{\eta} : \overline{\boldsymbol{A}}_1 \to \overline{\boldsymbol{A}}_2$ est « *sa réduction (modulo $\boldsymbol{I}$)* ». Un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\eta : \boldsymbol{B} \to \overline{\boldsymbol{A}}$ est appelé « *un relèvement de $\overline{\boldsymbol{A}}$* » lorsque sa réduction $\overline{\eta} : \overline{\boldsymbol{B}} \to \overline{\boldsymbol{A}}$ est bijective ; le relèvement est dit, f.c.t.f., plat, lisse, très lisse…, lorsqu'il en est ainsi de l'algèbre $\boldsymbol{B}$.

2.1.1. Schémas †-adiques affines. Étant donnée une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f. $\boldsymbol{A}^\dagger$ nous notons $\overline{\boldsymbol{A}} := \overline{\boldsymbol{A}^\dagger}$, puis $\overline{\boldsymbol{X}} := \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$ et $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ le schéma affine associé à $\overline{\boldsymbol{A}}$.

Pour tout $\overline{f} \in \overline{\boldsymbol{A}}$ l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger_{[f]} := (\boldsymbol{A}^\dagger_f)^\dagger$ est indépendante du relèvement f de $\overline{f}$. On note $\nu_{\overline{f}} : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger_{[f]}$ le morphisme canonique. Pour toute inclusion d'ouverts principaux $D(\overline{f}) \subseteq D(\overline{g})$ il existe un unique morphisme $\nu^{\overline{g}}_{\overline{f}} : \boldsymbol{A}^\dagger_{[g]} \to \boldsymbol{A}^\dagger_{[f]}$ vérifiant $\nu_{\overline{f}} = \nu^{\overline{g}}_{\overline{f}} \circ \nu_{\overline{g}}$. La correspondance qui associe à un ouvert principal $D(\overline{f})$ l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger_{[f]}$ et à l'inclusion $D(\overline{f}) \subseteq D(\overline{g})$ le morphisme $\nu^{\overline{g}}_{\overline{f}}$ est un préfaisceau de $\boldsymbol{R}$-algèbres sur la catégorie des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ noté $\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$. On note $\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}$ le faisceau **sur** $\overline{\boldsymbol{X}}$ engendré à $\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$.

L'espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger})$ est « *le schéma †-adique affine associé à $\boldsymbol{A}^\dagger$* ».

Rappels et remarques

a) Le morphisme canonique $\boldsymbol{A}^\dagger_{[f]} = \Gamma(D(\overline{f});\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}) \to \Gamma\big(D(\overline{f});\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big)$ est bijectif ([M]) et le morphisme de restriction $\Gamma\big(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big) \to \Gamma\big(D(\overline{f});\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big)$ s'identifie alors à $\nu_{\overline{f}} : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger_{[f]}$.

b) Pour tout ouvert **principal** $\overline{U} = D(\overline{f}) \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ le sous-espace annlelé $(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}|_{\overline{U}})$ est isomorphe au schéma †-adique affine associé à $\boldsymbol{A}^\dagger_{[\overline{f}]}$.

c) La famille des morphismes de réduction $q : \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f]} \to \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}}$ où $\overline{f}$ parcours $\overline{\boldsymbol{A}}$, définit un morphisme de préfaisceaux sur la catégorie des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ induisant un morphisme canonique de faisceau d'algèbres que nous notons $\alpha : \mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}} \to \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}$. L'identification de (a) identifie $\alpha(D(\overline{f}))$ au morphisme $q : \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f]} \to \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}}$. Le morphisme α est une surjection de faisceaux d'algèbres sur $\overline{\boldsymbol{X}}$.

2.1.2. Schémas †-adiques. On appelle ainsi un espace annelé obtenu par recollement de schémas †-adiques affines. Plus précisément, il s'agit d'un espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger})$ dans lequel pour chaque $x \in \overline{\boldsymbol{X}}$ il existe un ouvert $\overline{U}_x \ni x$ et une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f. $\boldsymbol{A}^{\dagger}_x$ tels que le sous-espace annelé $(\overline{U}_x;\mathscr{O}^{\dagger}|_{\overline{U}_x})$ est isomorphe au schéma †-adique affine associé à $\boldsymbol{A}^{\dagger}_x$.

Rappels et remarques

a) Soit $\boldsymbol{I}\mathscr{O}^{\dagger}$ le sous-faisceau de $\mathscr{O}^{\dagger}$ engendré par le sous-préfaisceau qui fait correspondre à un ouvert $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ l'idéal $\boldsymbol{I} \cdot \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}^{\dagger})$, notons $\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}} := \mathscr{O}^{\dagger}/\boldsymbol{I}\mathscr{O}^{\dagger}$. L'espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est alors un schéma algébrique.

Le schéma $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est « *la réduction (modulo $\boldsymbol{I}$) du schéma †-adique* $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger})$ » Le morphisme canonique de faisceaux de $\mathscr{O}^{\dagger}$ vers $\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}$ est noté $\alpha : \mathscr{O}^{\dagger} \to \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}$, il coïncide dans le cas des schémas affines avec le morphisme de 2.1.1-(c).

b) La réduction d'un schéma †-adique affine est un schéma algébrique affine.

c) La notation '$\overline{\boldsymbol{X}}$' désignera, par abus, le schéma algébrique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$. Toute allusion à une propriété de '$\overline{\boldsymbol{X}}$' fait donc référence à ladite propriété de l'espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$.

2.1.3. Schémas †-adiques lisses. On appellera « *schéma †-adique affine-lisse (sur $\boldsymbol{R}$)* » tout schéma †-adique affine $(\overline{\boldsymbol{X}},\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}})$ associé à une algèbre f.c.t.f. $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ **très lisse (sur $\boldsymbol{R}$)**. On appellera « *schéma †-adique lisse (sur $\boldsymbol{R}$)* » tout espace annelé localement isomorphe à un schéma †-adique affine-lisse (sur $\boldsymbol{R}$).

Rappel. L'hypothèse de lissité permet de généraliser le résultat de Meredith rappelé dans 2.1.1-(b). En effet, le sous-espace annelé $(\overline{U};\mathscr{O}^{\dagger}|_{\overline{U}})$ d'un schéma †-adique affine-lisse $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger})$ est aussi affine-lisse pour peu que $\overline{U}$ soit un ouvert affine (prop. 3.2.16). Nous irons même plus loin dans le théorème 2.1.8 qui affirme que cette dernière affirmation est vraie en supposant le schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger})$ lisse (mais pas nécessairement affine).

Remarque. Si $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger})$ est un schéma †-adique lisse sur $\boldsymbol{R}$, sa réduction $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est un schéma lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$. En particulier, si $\overline{\boldsymbol{X}}$ est affine l'algèbre $\overline{\boldsymbol{A}} := \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ et admet par conséquent des relèvements f.c.t.f. très lisses $q : \boldsymbol{A}^{\dagger} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$.

Mise en garde. Nous n'avons pas encore prouvé qu'un schéma †-adique lisse et affine est affine-lisse. Ce sera une conséquence immédiate du théorème 2.1.8 qui affirme qu'un schéma †-adique lisse de réduction affine est affine-lisse.

2.1.4. Schémas †-adiques lisses de réduction séparée. Étant donné un schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ de réduction $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ il existe, par définition,

- un recouvrement ouvert **affine** $\overline{\boldsymbol{X}}=\bigcup_{i\in\mathfrak{A}}\overline{U}_i$,
- une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f. $\boldsymbol{A}_i^\dagger$ et un relèvement $q_i:\boldsymbol{A}_i^\dagger\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}_i:=\Gamma\big(\overline{U}_i;\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}\big)$ pour chaque $i\in\mathfrak{A}$,
- un isomorphisme d'espaces annelés $\Phi_i:\big(\overline{U}_i;\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{U}_i}\big)\simeq\big(\overline{U}_i;\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_i^\dagger}\big)$ dont on rappelle que s'agissant de schémas †-adiques affines, il équivaut à la donnée de l'isomorphisme induit sur les algèbres des sections au-dessus de $\overline{U}_i$ des faisceaux structuraux, ce que nous notons
$$\Gamma(\overline{U}_i;\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{U}_i})\xrightarrow[\simeq]{\varphi_i}\boldsymbol{A}^\dagger{}_i \qquad (\varphi_*)$$

Pour chaque couple d'indices (i,j) notons $\overline{U}_{ij}:=\overline{U}_i\cap\overline{U}_j$. Lorsque le schéma $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est **séparé** l'ouvert $\overline{U}_{ij}$ est affine et le sous-espace annelé $(\overline{U}_{ij};\mathscr{O}^\dagger)$ est affine-lisse puisque $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est **lisse**, (prop. 3.2.16). Dans ce cas, l'isomorphisme «*de transition*» défini par la composée $\Phi_j\circ\Phi_i^{-1}$ entre les sous-espaces annelés $(\overline{U}_{ij};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_i^\dagger}|_{\overline{U}_{ij}})$ et $(\overline{U}_{ij};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_j^\dagger}|_{\overline{U}_{ij}})$ (des schémas †-adiques affines) est entièrement déterminé par l'isomorphisme induit sur les sections au-dessus de $\overline{U}_{ij}$:
$$\varphi_{j,i}=\Phi_j(\overline{U}_{ij})\circ\Phi_i^{-1}(\overline{U}_{ij}):\Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_i^\dagger})\longrightarrow\Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_j^\dagger}).$$

Un **schéma †-adique lisse de réduction séparée** équivaut donc à la donnée de :

i) Un $\overline{\boldsymbol{R}}$-schéma algébrique séparé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$.
ii) Un recouvrement par des ouverts affines $\overline{\boldsymbol{X}}=\bigcup_{i\in\mathfrak{A}}\overline{U}_i$.
iii) Un relèvement f.c.t.f. très lisse $q_i:\boldsymbol{A}_i^\dagger\twoheadrightarrow\Gamma(\overline{U}_i,\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ pour chaque $i\in\mathfrak{A}$.
iv) Une famille d'isomorphismes $\{\varphi_{j,i}\,|\,i,j\in\mathfrak{A}\}$ telle que les diagrammes
$$\begin{array}{ccc}\Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_i^\dagger}) & \xrightarrow[\simeq]{\varphi_{j,i}} & \Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_j^\dagger})\\ {\scriptstyle q_i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q_j}\\ \Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) & \xrightarrow{\mathbf{id}} & \Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})\end{array}$$
sont commutatifs et vérifient les relations
$$\varphi_{i,i}=\mathbf{id},\qquad \varphi_{j,i}=\varphi_{i,j}^{-1},\qquad \varphi_{k,j}\circ\varphi_{j,i}=\varphi_{k,j}, \qquad (\varphi_{*,*})$$
sur les ouverts (affines) *ad hoc*.

2.1.5. Schémas †-adiques de réduction affine. Un cas particulier de ce qui précède est celui où $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est affine. Dans ce cas les ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ remplacent avantageusement les ouverts affines en ce sens que si $\overline{V}_1$ et $\overline{V}_2$ sont des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ tels que $\big(\overline{V}_i;\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{V}_i}\big)$ sont des schémas †-adiques affines alors $\big(\overline{V}_1\cap\overline{V}_2;\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{V}_1\cap\overline{V}_2}\big)$ l'est également (2.1.1-(b)) et ceci **sans** hypothèse de lissité (*cf.* 2.1.3-*Rappel*). Nous avons donc une description analogue à celle de 2.1.4 pour un schéma †-adique seulement supposé de réduction affine.

Un **schéma †-adique de réduction affine** équivaut à la donnée de :

i) Un $\overline{\boldsymbol{R}}$-schéma algébrique affine $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$, associé donc à l'algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}=\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$.

ii) Un recouvrement fini princpal $\overline{\boldsymbol{X}}=\bigcup_{i\in\mathfrak{A}}\overline{U}_i$ avec $\mathfrak{A}=\{1,\dots,r\}$. On peut supposer sans perte de généralité que $\overline{U}_i=D(\overline{f}_i)$ avec $\overline{f}_1+\cdots+\overline{f}_r=1$. On note $\overline{U}_{ij}:=D(\overline{f}_i\overline{f}_j)$.

iii) Un relèvement f.c.t.f. $q:\boldsymbol{A}_i^\dagger=\Gamma(\overline{U}_i;\mathscr{O}^\dagger)\twoheadrightarrow\Gamma(\overline{U}_i,\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ pour chaque $i\in\mathfrak{A}$.

iv) Une famille d'isomorphismes $\{\varphi_{j,i}\mid i,j\in\mathfrak{A}\}$ telle que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{A}^\dagger{}_{i[f_j]}=\Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_i^\dagger})&\xrightarrow[\simeq]{\varphi_{j,i}}&\Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_j^\dagger})=\boldsymbol{A}^\dagger{}_{j[f_i]}\\ {\scriptstyle q}\big\downarrow&&\big\downarrow{\scriptstyle q}\\ \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i\overline{f}_j}=\Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})&\xrightarrow{\mathbf{id}}&\Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})=\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i\overline{f}_j}\end{array}$$

sont commutatifs et vérifient les relations $(\varphi_{*,*})$ sur les ouverts (principaux) *ad hoc*.

La condition de faisceau sur $\mathscr{O}^\dagger$ relative au recouvrement $\{\overline{U}_i\}_{i\in\mathfrak{A}}$ identifie $\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ au noyau de l'application $\boldsymbol{R}$-linéaire :

$$\begin{array}{ccc}\prod_{\ell=1}^r\boldsymbol{A}_\ell^\dagger&\xrightarrow{\delta_\varphi}&\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\boldsymbol{A}^\dagger{}_{j[f_i]}\\ (a_1,\dots,a_r)&\longmapsto&(\dots,b_{i,j},\dots)\end{array}\quad\text{avec}\quad b_{i,j}=\varphi_{j,i}(a_i)-a_j\,.$$

On a donc la suite exacte à gauche :

$$\mathbf{0}\to\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)\xrightarrow{\epsilon_\varphi}\prod_{\ell=1}^r\boldsymbol{A}_\ell^\dagger\xrightarrow{\delta_\varphi}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\boldsymbol{A}^\dagger{}_{j[f_i]}\,,$$

où $\epsilon_\varphi=(\epsilon_{\varphi_1},\dots,\epsilon_{\varphi_r})$ et $\epsilon_{\varphi,\ell}:\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)\to\boldsymbol{A}_\ell^\dagger$ est la composée du morphisme de restriction $\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)\to\Gamma\big(D(\overline{f}_\ell);\mathscr{O}^\dagger\big)$ suivi par l'isomorphisme $\varphi_\ell:\Gamma(D(\overline{f}_\ell);\mathscr{O}^\dagger)\to\boldsymbol{A}_\ell^\dagger$.

Cela étant, la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de δ_φ s'identifie au morphisme $\delta_{\overline{\mathbf{id}}}$ du complexe de Čech associé au recouvrement $\{\overline{U}_\ell\}$ de $\overline{\boldsymbol{X}}$ à valeurs dans le faisceau $\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}\prod_{\ell=1}^r\boldsymbol{A}_\ell^\dagger&\xrightarrow{\delta_\varphi}&\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\boldsymbol{A}^\dagger_{j[f_i]}\\ {\scriptstyle q}\big\downarrow&\bigoplus&\big\downarrow{\scriptstyle q}\\ \prod_{\ell=1}^r\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_\ell}&\xrightarrow[\delta_{\overline{\mathbf{id}}}]{}&\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i\overline{f}_j}\end{array}\qquad(\mathscr{D}_r)$$

et le morphisme canonique de suites exactes à gauche :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0}\to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & \prod_{\ell=1}^r \boldsymbol{A}^\dagger_\ell & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\boldsymbol{A}^\dagger_{j[f_i]} \\ \alpha\downarrow & & q\downarrow & (\mathscr{D}_r) & q\downarrow \\ \mathbf{0}\to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})=\overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow{\epsilon_{\overline{\mathbf{id}}}} & \prod_{\ell=1}^r \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_\ell} & \xrightarrow{\delta_{\overline{\mathbf{id}}}} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i\overline{f}_j} \end{array} \qquad (\Delta_r)$$

où α, induite par la commutativité de $(\mathscr{D}_r)$, est le morphisme $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ de 2.1.2-(a).

Le cas $r=2$. Le cas le plus simple de recollement non trivial est celui où le recouvrement $\overline{\boldsymbol{X}}=\bigcup_i \overline{U}_i$ comporte seulement deux ouverts $\overline{U}_1=D(\overline{f}_1)$ et $\overline{U}_2=D(\overline{f}_2)$ avec $\overline{f}_1+\overline{f}_2=1$. Le schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est alors entièrement déterminé par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}^\dagger_{1[f_2]} & \xrightarrow[\simeq]{\varphi_{21}} & \boldsymbol{A}^\dagger_{2[f_1]} \\ q\downarrow & \bigoplus & \downarrow q \\ \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1\overline{f}_2} & \xrightarrow{\mathbf{id}} & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1\overline{f}_2} \end{array}$$

On a alors :

$$\delta_\varphi : \boldsymbol{A}^\dagger_1\oplus\boldsymbol{A}^\dagger_2 \longrightarrow \boldsymbol{A}^\dagger_{2[f_1]}, \quad \delta_\varphi(a_1,a_2):=\varphi_{21}(a_1)-a_2$$

et le diagramme commutatif Δ_2 est

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0}\to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & \boldsymbol{A}^\dagger_1\oplus\boldsymbol{A}^\dagger_2 & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \boldsymbol{A}^\dagger_{2[f_1]} \\ \alpha(\overline{\boldsymbol{X}})\downarrow & & q\downarrow & (\mathscr{D}_2) & q\downarrow \\ \mathbf{0}\to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})=\overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow{\epsilon_{\overline{\mathbf{id}}}} & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1}\oplus\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_2} & \xrightarrow{\delta_{\overline{\mathbf{id}}}} & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1\overline{f}_2}\to\mathbf{0} \end{array} \qquad (\Delta_2)$$

où la deuxième ligne est exacte puisque $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est affine.

2.1.6. Schémas †-adiques lisses de réduction affine. Lorsque $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est **lisse** de réduction $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ affine la description de la section précédente peut encore être simplifiée. En effet, le schéma affine $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ étant lisse la $\boldsymbol{R}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}:=\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est lisse et nous pouvons fixer un relèvement $q:\boldsymbol{A}^\dagger\to\overline{\boldsymbol{A}}$ avec $\boldsymbol{A}^\dagger$ f.c.t.f. **très lisse**. Soit $\overline{\boldsymbol{X}}=\bigcup_{i\in\mathfrak{A}}\overline{U}_i$ la décomposition avec $\overline{U}_i:=D(\overline{f}_i)\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}$ et $1=\overline{f}_1+\cdots+\overline{f}_r$ de 2.1.5, et fixons un relèvement $f_i\in\boldsymbol{A}^\dagger$ pour chaque $\overline{f}_i$. L'élément $c=f_1+\cdots+f_r$ est inversible dans $\boldsymbol{A}^\dagger$ puisque $c=1 \bmod \boldsymbol{I}$. Nous pouvons donc remplacer f_i par cf_i et supposer que $1=f_1+\cdots+f_r$.

L'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger_i=\Gamma(\overline{U}_i;\mathscr{O}^\dagger)$ est f.c.t.f. très lisse et $\alpha(\overline{U}_i):\boldsymbol{A}^\dagger_i\to\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i}$ est un relèvement de $\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i}$. Il s'ensuit que $\boldsymbol{A}^\dagger_i$ est isomorphe à $\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_i]}$, on peut donc remplacer $\boldsymbol{A}^\dagger_i$ par $\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_i]}$ dans la description de $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ de 2.1.5 ce qui nous conduit à la réécriture suivante :

Un **schéma †-adique lisse de réduction affine** équivaut à la donnée de :

i) Une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f. **très lisse** $\boldsymbol{A}^\dagger$.
ii) Une famille finie $\{f_1,\ldots,f_r\}\subseteq\boldsymbol{A}^\dagger$ vérifiant $1=f_1+\cdots+f_r$.

iii) Une famille $\varphi = \{\varphi_{i,j} : \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_if_j]} \to \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_if_j]}\}$ d'automorphismes vérifiant les relations $(\varphi_{*,*})$ et tels que $\varphi_{i,j} \bmod \boldsymbol{I} = \mathbf{id}$.

La condition de faisceau sur $\mathscr{O}^\dagger$ relative au recouvrement proncipal $\{\overline{U}_\ell\}_{\ell\in\mathfrak{A}}$ identifie l'algèbre $\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ au noyau de l'application $\boldsymbol{R}$-linéaire :

$$\begin{array}{ccc}\prod_{\ell=1}^r \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_\ell]} & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_if_j]} \\ (a_1,\dots,a_r) & \longmapsto & (\dots,b_{i,j},\dots)\end{array} \quad \text{avec} \quad b_{i,j} = \varphi_{j,i}(a_i) - a_j\,.$$

On a donc la suite exacte à gauche :

$$\mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \xrightarrow{\epsilon_\varphi} \prod_{\ell=1}^r \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_\ell]} \xrightarrow{\delta_\varphi} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_if_j]},$$

où $\epsilon_\varphi = (\epsilon_{\varphi_1},\dots,\epsilon_{\varphi_r})$ et $\epsilon_{\varphi,\ell} : \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \to \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_\ell]}$ est la composée du morphisme de restriction $\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \to \Gamma\big(\overline{U}_\ell;\mathscr{O}^\dagger\big)$ suivi par l'isomorphisme $\varphi_\ell : \Gamma(\overline{U}_\ell;\mathscr{O}^\dagger) \to \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_\ell]}$.

Cela étant, la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de δ_φ s'identifie au morphisme $\delta_{\overline{\mathbf{id}}}$ du complexe de Čech associé au recouvrement $\{\overline{U}_\ell\}$ de $\overline{\boldsymbol{X}}$ à valeurs dans le faisceau $\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}\prod_{\ell=1}^r \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_\ell]} & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_if_j]} \\ {\scriptstyle q}\big\downarrow & \bigoplus & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ \prod_{\ell=1}^r \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_\ell} & \xrightarrow[\delta_{\overline{\mathbf{id}}}]{} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i\overline{f}_j}\end{array} \qquad (\mathscr{D}_r)$$

et le morphisme canonique de suites exactes à gauche :

$$\begin{array}{ccccccc}\mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & \prod_{\ell=1}^r \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_\ell]} & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}^r \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_if_j]} \\ {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle q}\big\downarrow & (\mathscr{D}_r) & {\scriptstyle q}\big\downarrow \\ \mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) = \overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow{\epsilon_{\overline{\mathbf{id}}}} & \prod_{\ell=1}^r \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_\ell} & \xrightarrow{\delta_{\overline{\mathbf{id}}}} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}^r \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i\overline{f}_j}\end{array} \qquad (\Delta_r)$$

où α, induite par la commutativité de $(\mathscr{D}_r)$, est le morphisme $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ de 2.1.2-(a).

Le cas $r = 2$. Le schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est entièrement déterminé par la donnée de l'automorphisme $\varphi_{21} \in \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]})$. On a :

$$\delta_\varphi : \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1]} \oplus \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_2]} \longrightarrow \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]}, \quad \delta_\varphi(a_1,a_2) := \varphi_{21}(a_1) - a_2 \qquad (\delta_\varphi)$$

et le diagramme Δ_2 est

$$\begin{array}{ccccccc}\mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1]} \oplus \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_2]} & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]} \\ {\scriptstyle\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})}\big\downarrow & & {\scriptstyle q}\big\downarrow & (\mathscr{D}_2) & {\scriptstyle q}\big\downarrow \\ \mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) = \overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow{\epsilon_{\overline{\mathbf{id}}}} & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1} \oplus \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_2} & \xrightarrow{\delta_{\overline{\mathbf{id}}}} & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1\overline{f}_2} \to \mathbf{0}\end{array} \qquad (\Delta_2)$$

où la deuxième ligne est exacte puisque $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est affine.

La proposition suivante joue un rôle fondamental dans la démonstration du théorème

2.1.8 qui concerne les schémas †-adiques lisses, elle est pourtant vraie sans hypothèse de lissité. Le corollaire 2.1.10 de 2.1.8 généralisera 2.1.7 au cas d'un schéma †-adique de réduction affine **quelconque**.

2.1.7. Proposition. *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ un schéma †-adique de réduction $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ affine. On suppose qu'il existe $\overline{f}_1,\overline{f}_2\in\overline{\boldsymbol{A}}:=\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ vérifiant $\overline{\boldsymbol{X}}=D(\overline{f}_1)\cup D(\overline{f}_2)$ et tels que chaque sous-espace annelé $(D(\overline{f}_i);\mathscr{O}^\dagger|_{D(\overline{f}_i)})$ est un schéma †-adique affine. Alors, le morphisme $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}):\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)\to\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est **surjectif**.*

Démonstration

I. *Cas où $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est lisse et $\overline{\boldsymbol{X}}$ est un ouvert principal d'un espace affine.* On note $\overrightarrow{X}$ la liste de variables $\{X_1,\dots,X_t\}$, on se donne $\bar{c},\overline{f}_1,\overline{f}_2\in\overline{\boldsymbol{R}}[\overrightarrow{X}]$ vérifiant $\bar{c}=\overline{f}_1+\overline{f}_2$, on note $\overline{\boldsymbol{A}}:=\overline{\boldsymbol{R}}[\overrightarrow{X}]_{\bar{c}}$ l'algèbre des fonctions régulières sur de l'ouvert principal $D(\bar{c})\subseteq\mathbb{A}^t_{\overline{\boldsymbol{R}}}$. Le schéma $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est le schéma affine associé à $\overline{\boldsymbol{A}}$. On a $\overline{\boldsymbol{X}}=D(\overline{f}_1)\cup D(\overline{f}_2)$.

Soient $c,f_1,f_2\in\boldsymbol{R}[\overline{\boldsymbol{X}}]$ des relèvements respectifs de $\bar{c},\overline{f}_1,\overline{f}_2$, notons $\boldsymbol{A}^\dagger:=(\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_c)^\dagger$ et reprenons les notations du cas $r=2$ de 2.1.6. La proposition résulte alors de montrer que pour chaque $z\in\boldsymbol{A}^\dagger$ donné il existe $P_z\in\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1]}$ et $Q_z\in\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_2]}$ tels que

$$\boxed{\varphi(z+P_z)=z+Q_z}$$

Le morphisme $\delta_{\mathbf{id}}:\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1]}\oplus\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_2]}\to\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]}$ étant surjectif (3.2.7), soient

$$\begin{cases}\sigma_{f_1}:\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]}\longrightarrow\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1]}\\ \sigma_{f_2}:\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]}\longrightarrow\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_2]}\end{cases}$$

des applications $\boldsymbol{R}$-linéaires vérifiant

$$\sigma_{f_1}(S)+\sigma_{f_2}(S)=S\,,\quad\forall S\in\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]}$$

Lemme. Pour tout $z\in\boldsymbol{A}^\dagger$ les séries

$$P_z=\textstyle\sum_{k\geqslant1}\big(\sigma_{f_1}(1-\varphi)\big)^k(z)\quad\textit{et}\quad Q_z=-\sigma_{f_2}(1-\varphi)(z+P_z)\qquad(\diamond)$$

sont des solutions formelles de l'équation $\varphi(z+P_z)=z+Q_z$.

Preuve du lemme. On a par construction :

$$\sigma_{f_1}(1-\varphi)(z+P)=P$$

et alors :

$$\begin{aligned}(1-\varphi)(z+P)&=P+\sigma_{f_2}(1-\varphi)(z+P)\\ X-\varphi(z+P)&=\sigma_{f_2}(1-\varphi)(z+P)\\ \varphi(z+P)&=X-\sigma_{f_2}(1-\varphi)(z+P)\end{aligned}$$

□

Nous allons vérifier maintenant que la série $(\diamond)$ définissant P_z converge vers un élément de $\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_1]}$. Il s'ensuivra que $Q_z \in \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_2]}$ et la surjectivité de $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ sera alors établie.

Pour cela on utilisera le développement de φ en série de Taylor :

$$(\varphi-1) = \sum_{0\leqslant m_i} h_1^{m_1}\cdots h_t^{m_t}\,\Delta_1^{m_1}\cdots\Delta_t^{m_t} \qquad (\ddagger)$$

où $h_i = (\varphi-1)(X_i) \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_1f_2]}$ puisque $\varphi = \mathbf{id} \bmod \boldsymbol{I}$. Chaque h_i s'écrit d'autre part comme somme d'une série de la forme

$$h_i = \sum_{n\geqslant 0} H_{i,n}\big(\overrightarrow{X}, \tfrac{1}{c}, \tfrac{1}{f_1f_2}\big)\,, \qquad i=1,\dots,t,$$

avec $H_{i,n} \in \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X},T,U]$ vérifiant, pour un certain $M\in\mathbb{N}$:

$$\deg(H_{i,n}) \leqslant M(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(H_{i,n})+1)\,, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad i=1,\dots,t.$$

Les produits $h_1^{m_1}\cdots h_r^{m_r}$ ont alors des développements en séries de la forme :

$$h_1^{m_1}\cdots h_t^{m_t} = \sum_{n\geqslant 0} H_{\overrightarrow{m},n}(\overrightarrow{X}, \tfrac{1}{c}, \tfrac{1}{f_1f_2})$$

telles que :

$$\deg(H_{\overrightarrow{m},n}) \leqslant M\big(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(H_{\overrightarrow{m},n}) + |\overrightarrow{m}|\big)\,, \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

où on a noté $\overrightarrow{m} := m_1,\dots,m_t$ et $|\overrightarrow{m}| := m_1+\cdots+m_t$.

On obtient ainsi un développement de $(\ddagger)$ comme somme dénombrable de la forme

$$(\varphi-1) = \textstyle\sum_{\overrightarrow{m},n} H_{\overrightarrow{m},n}\big(\overrightarrow{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1f_2}\big)\,\Delta_1^{m_1}\cdots\Delta_t^{m_t} \qquad (\ddagger\ddagger)$$

avec

$$\begin{cases} \mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}\big(H_{\overrightarrow{m},n}\big) \geqslant |\overrightarrow{m}| \\ \deg\big(H_{\overrightarrow{m},n}\big) < M\big(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(H_{\overrightarrow{m},n}) + |\overrightarrow{m}|\big) \end{cases}$$

Soit maintenant $z \in \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_1]}$ donné par une série

$$\begin{cases} z = \sum_{\ell\geqslant 0} Z_\ell\big(\overrightarrow{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1}\big)\,, \text{ avec} \\ \deg(Z_\ell) < L(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(Z_\ell)+1)\,, \text{ pour tout } \ell\in\mathbb{N} \text{ et un certain } L\in\mathbb{N}. \end{cases} \qquad (\star_L)$$

Notons $I=(i_1,\dots,i_t)$, puis $|I| = i_1+\cdots+i_t$ et $\overrightarrow{X}^I := X_1^{i_1}\cdots X_t^{i_t}$. On a $\deg(\overrightarrow{X}^I) = |I|$. Chaque polynôme Z_ℓ est somme de termes de la forme $\overrightarrow{X}^I\big(\frac{1}{c}\big)^a\big(\frac{1}{f_1}\big)^b$ avec $|I|+a+b \leqslant \deg(Z_\ell)$. On a

$$\Delta\Big(\overrightarrow{X}^I\big(\tfrac{1}{c}\big)^a\big(\tfrac{1}{f_1}\big)^b\Big) = \Delta\big(\overrightarrow{X}^I\big)\big(\tfrac{1}{c}\big)^a\big(\tfrac{1}{f_1}\big)^b - a\overrightarrow{X}^I\big(\tfrac{1}{c}\big)^{a+1}\Delta(c)\big(\tfrac{1}{f_1}\big)^b - b\overrightarrow{X}^I\big(\tfrac{1}{c}\big)^a\big(\tfrac{1}{f_1}\big)^{b+1}\Delta(f_1)$$

et

$$\deg\Delta_1^{m_1}\cdots\Delta_t^{m_t}\Big(\overrightarrow{X}^I\big(\tfrac{1}{c}\big)^a\big(\tfrac{1}{f_1}\big)^b\Big) \leqslant |I|+a+b+|\overrightarrow{m}|\sup\big(\deg(c),\deg(f_1)\big)$$

de sorte que si on pose $S := \sup(\deg(c), \deg(f_1))$, on a pour chaque $\overrightarrow{m} := (m_1, \ldots, m_t)$:

$$\begin{cases} \Delta_1^{m_1} \cdots \Delta_t^{m_t}(z) = \sum_{\ell \geqslant 0} T_{\overrightarrow{m},\ell}\big(\overrightarrow{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1}\big), \text{ avec} \\ \deg(T_{\overrightarrow{m},\ell}) < L\big(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(T_{\overrightarrow{m},\ell}) + 1\big) + |\overrightarrow{m}|S, \text{ pour tout } \ell \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad (\star\star_L)$$

En rassemblant $(\ddagger\ddagger)$ et $(\star\star_L)$ on obtient

$$\sigma_f(\varphi - 1)(z) = \sum_{\overrightarrow{m},n,\ell} \sigma_f\Big(H_{\overrightarrow{m},n}\big(\overrightarrow{X}, \tfrac{1}{c}, \tfrac{1}{f_1 f_2}\big) \cdot T_{\overrightarrow{m},\ell}\big(\overrightarrow{X}, \tfrac{1}{c}, \tfrac{1}{f_1}\big)\Big)$$

où les polynômes $H_{\overrightarrow{m},n}\big(\overrightarrow{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1 f_2}\big) \cdot T_{\overrightarrow{m},\ell}\big(\overrightarrow{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1}\big)$ sont des sommes finies de termes :

$$q\big(\overrightarrow{X}, \tfrac{1}{c}\big)\big(\tfrac{1}{f_1 f_2}\big)^a \big(\tfrac{1}{f_1}\big)^b \qquad (\triangle)$$

avec $a \leqslant \deg H_{\overrightarrow{m},n}$ et $b \leqslant \deg T_{\overrightarrow{m},\ell}$.

Lemme. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ on a dans $\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1 f_2]}$

$$\Big(\frac{1}{f_1}\Big)^\alpha \Big(\frac{1}{f_2}\Big)^\beta = \left(\sum_{k=0}^{\alpha-1} m_{f,k} \Big(\frac{1}{f_1}\Big)^{\alpha-k} \Big(\frac{1}{c}\Big)^{\beta+k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\beta-1} m_{g,k} \Big(\frac{1}{c}\Big)^{\alpha+k} \Big(\frac{1}{f_2}\Big)^{\beta-k}\right)$$

avec $m_{f,k}$ et $m_{g,k}$ des entiers naturels.

Preuve. L'égalité $c = f_2 + f_1$ donne aussitôt $\dfrac{1}{f_1 f_2} = \dfrac{1}{f_1 c} + \dfrac{1}{c f_2}$ et le lemme en résulte par une induction élémentaire. □

L'application de ce lemme aux termes $(\triangle)$ permet d'obtenir des majorations

$$\begin{aligned} \deg \sigma_f\Big(H_{\overrightarrow{m},n}\big(\overrightarrow{X}, \tfrac{1}{c}, \tfrac{1}{f_1 f_2}\big) \cdot T_{\overrightarrow{m},\ell}\big(\overrightarrow{X}, \tfrac{1}{c}, \tfrac{1}{f_1}\big)\Big) &\leqslant 2\deg H_{\overrightarrow{m},n} + \deg T_{\overrightarrow{m},\ell} \\ &< 2M(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}} H_{\overrightarrow{m},n}) + (2M+S)|\overrightarrow{m}| + L\big(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(T_{\overrightarrow{m},\ell}) + 1\big) \\ &< (4M+S)\big(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}} H_{\overrightarrow{m},n}\big) + L\big(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(T_{\overrightarrow{m},\ell}) + 1\big) \end{aligned}$$

en particulier, si $L > 4M + S$ l'opérateur $\sigma_f(\varphi - 1)$ préserve la classe des éléments $z \in \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1]}$ donnés par les séries de la forme $(\star_L)$. Comme d'autre part, la valuation augmente strictement à chaque application de $\sigma_{f_1}(\varphi - 1)$ la série $(\diamond)$ apparaît comme somme d'une famille dénombrable telle que pour chaque $N \in \mathbb{N}$ seul un nombre fini de ses termes est de valuation inférieure à N. En regroupant les termes de même valuation on obtient une nouvelle expression de P_z comme série de la forme $(\star_L)$. L'élément P_z appartient donc bien à $\boldsymbol{A}^\dagger_{f_1}$ quel que soit $z \in \boldsymbol{A}^\dagger_{f_1}$, donc quel que soit $z \in \boldsymbol{A}^\dagger$.

II. *Cas général.* On reprend les notations du cas $r = 2$ de 2.1.5. Fixons une surjection de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\pi : \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_t] \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}} := \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}}; \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$, choisissons des éléments $F_i \in \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]$ tels que $\pi(F_i) = f_i$, notons $\boldsymbol{B}^\dagger := \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]^\dagger_{[F_1 + F_2]}$ et $\overline{\boldsymbol{B}} := \overline{\boldsymbol{B}^\dagger}$. Le morphisme π induitles surjections $\overline{\pi} : \overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{F}_i} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i}$ et $\overline{\pi} \circ q : \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_i]} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i}$ et comme d'autre part $\alpha(\overline{U}_i) : \boldsymbol{A}^\dagger_i \to \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i}$ est un relèvement avec $\boldsymbol{A}^\dagger_i$ f.c.t.f. et que $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_i]}$ est très lisse, il existe des morphismes

$\pi_i^\dagger : \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_i]} \to \boldsymbol{A}_i^\dagger$ (surjectifs car de réduction surjective th. 3.2 [MW]) rendant commutatif les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_i]} & \xrightarrow{\pi_i^\dagger} & \boldsymbol{A}_i^\dagger \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow{\scriptstyle \alpha(\overline{U}_i)} \\ \overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{F}_i} & \xrightarrow{\overline{\pi}} & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i} \end{array}$$

On a, par réduction :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]} & \overset{\psi}{\underset{\simeq}{\dashrightarrow}} & \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]} \\ {\scriptstyle \pi_1^\dagger}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_2^\dagger}\downarrow \\ \boldsymbol{A}^\dagger_{1,[\pi_1^\dagger(F_2)]} & \xrightarrow[\simeq]{\varphi} & \boldsymbol{A}^\dagger_{2,[\pi_2^\dagger(F_1)]} \end{array} \right\} \overset{\text{réduction}}{\underset{\text{modulo } \boldsymbol{I}}{\longmapsto}} \left\{ \begin{array}{ccc} \overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{F}_1\overline{F}_2} & \xrightarrow{\text{id}} & \overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{F}_1\overline{F}_2} \\ {\scriptstyle \overline{\pi}}\downarrow & & {\scriptstyle \overline{\pi}}\downarrow \\ \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1\overline{f}_2} & \xrightarrow{\text{id}} & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1\overline{f}_2} \end{array} \right\}$$

où le diagramme de droite est trivialement commutatif. Il existe alors un isomorphisme $\psi : \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]} \to \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]}$ congruent à l'identité modulo $\boldsymbol{I}$ fermant commutativement le diagramme de gauche car $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]}$ est f.c.t.f. très lisse. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1]} \oplus \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_2]} & \xrightarrow{\delta_\psi} & \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]} \\ {\scriptstyle \pi_1^\dagger \,\oplus\, \pi_2^\dagger}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2^\dagger} \\ \boldsymbol{A}^\dagger_1 \oplus \boldsymbol{A}^\dagger_2 & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \boldsymbol{A}^\dagger_{2,[\pi_2^\dagger(F_1)]} \end{array} \qquad (\mathscr{D})$$

et le morphisme induit $\pi : \ker(\delta_\psi) \dashrightarrow \ker(\delta_\varphi)$; autrement dit, on a le morphisme de suites exactes à gauche :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{B}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\psi} & \Gamma(\overline{V}_1;\mathscr{B}^\dagger) \oplus \Gamma(\overline{V}_2;\mathscr{B}^\dagger) & \xrightarrow{\delta_\psi} & \Gamma(\overline{V}_{12};\mathscr{B}^\dagger) \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & {\scriptstyle \pi^\dagger}\downarrow & (\mathscr{D}) & {\scriptstyle \pi^\dagger}\downarrow & & (\mathscr{D}') \\ \mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & \Gamma(\overline{U}_1;\mathscr{O}^\dagger) \oplus \Gamma(\overline{U}_2;\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \Gamma(\overline{U}_{12};\mathscr{O}^\dagger) \end{array}$$

avec :

- $(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{Y}}})$ schéma affine associé à $\overline{\boldsymbol{B}}$ (ouvert principal $D(\overline{F}_1+\overline{F}_2)$ dans $\mathbb{A}^t_{\overline{\boldsymbol{R}}}$) ;
- $\overline{V}_i = D(F_i)$, ouvert principal de $\overline{\boldsymbol{Y}}$;
- $(\overline{V}_i;\mathscr{B}_i^\dagger)$ le schéma †-adique affine associé à $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_i]}$,
- $(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{B}^\dagger)$ le recollement d'espaces annelés des $(\overline{V}_i;\mathscr{B}_i^\dagger)$ via l'isomorphisme ψ.

Le diagramme commutatif suivant relie le morphisme π à sa réduction :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{B}^\dagger) & \xrightarrow{\pi} & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \\ {\scriptstyle \alpha(\overline{\boldsymbol{Y}})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha(\overline{\boldsymbol{X}})} \\ \Gamma(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{Y}}}) & \xrightarrow{\overline{\pi}} & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) \end{array}$$

où $\overline{\pi}$ est la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ du morphisme $\pi : \boldsymbol{B}^\dagger \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}^\dagger$ car $\overline{\boldsymbol{X}}$ est affine.

La surjectivité de $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ résulte maintenant de celle de $\alpha(\overline{\boldsymbol{Y}})$ déjà établie, CQFD. ∎

2.1.8. Affinité des schémas †-adiques de réduction affine. Le but de cette section est de démontrer l'équivalence pour un schéma †-adique entre « *être affine-lisse* » et « *être lisse de réduction affine* » (cor. 2.1.9).

Théorème

a) *Pour tout ouvert affine $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ d'un schéma †-adique lisse $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$, le sous-espace annelé $(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{U}})$ est un schéma †-adique affine-lisse.*

b) *Pour tout ouvert affine $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ d'un schéma †-adique lisse $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$, le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha(\overline{U}) : \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger) \to \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est un relèvement f.c.t.f. très lisse.*

c) *Un schéma †-adique lisse et de réduction affine est affine-lisse.*

Preuve. Commençons par vérifier que les trois assertions sont équivalentes.

(a)⇒(b). Immédiat (presque par définition).

(b)⇒(c). Les conditions pour appliquer (b) sont vérifiées. L'algèbre $\Gamma(D(\overline{f});\mathscr{O}^\dagger)$ est f.c.t.f. très lisse et $\alpha(D(\overline{f})) : \Gamma(D(\overline{f});\mathscr{O}^\dagger) \to \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}}$ est un relèvement quel que soit $\overline{f} \in \overline{\boldsymbol{A}} := \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$. Par conséquent, le morphisme de restriction $\boldsymbol{A}^\dagger = \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \to \Gamma(D(\overline{f});\mathscr{O}^\dagger)$ induit un **isomorphisme canonique** $\boldsymbol{A}^\dagger_{[f]} \to \Gamma(D(\overline{f});\mathscr{O}^\dagger)$ d'où un isomorphisme de faisceaux de $\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}$ vers $\mathscr{O}^\dagger$ sur la catégorie des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ induisant l'isomorphisme d'espaces annelés annoncé.

(c)⇒(a). Immédiat.

Rappelons avant de continuer que l'assertion (a) a déjà été établie sous hypothèses plus faibles.

- Lorsque $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est un schéma †-adique affine-lisse et que $\overline{U}$ est **principal**. Résultat de Meredith ([M]) rappelé dans 2.1.1-(b). Signalé dans la suite par le sigle (AL-P).
- Lorsque $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est un schéma †-adique affine-lisse et que $\overline{U}$ est **affine** (3.2.16). Signalé dans la suite par le sigle (AL-A).

On démontre (c) pour le schéma †-adique lisse $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ de réduction $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$.

Comme le schéma $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ et est affine par hypothèse, l'algèbre $\overline{\boldsymbol{A}} := \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$ et nous pouvons fixer un relèvement f.c.t.f. très lisse $q : \boldsymbol{A}^\dagger \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$, $q : a \mapsto \overline{a}$. D'autre part, par définition de schéma †-adique, il existe une famille finie $\{f_1,\dots,f_r\} \subseteq \boldsymbol{A}^\dagger$ telle que $1 = f_1 + \cdots + f_r$ et telle que l'espace annelé $\big(\overline{U}_i;\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{U}_i}\big)$, avec $\overline{U}_i := D(\overline{f}_i)$, est isomorphe au schéma †-adique affine associé à $\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_i]}$. L'espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ apparaît ainsi comme le recollement de r schémas †-adiques affines-lisses tous sous-schémas ouverts (principaux) d'un **même** schéma †-adique affine-lisse d'après la discussion 2.1.6. Dans la suite on notera par $r(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ le plus petit des cardinaux de telles descriptions de $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$.

Notons $g := 1 - f_1$. On a $g = f_2 + \cdots + f_r$ et un recouvrement ouvert principal :

$$D(\overline{g}) = D(\overline{g}\overline{f}_2) \cup \cdots \cup D(\overline{g}\overline{f}_r)$$

où $(D(\overline{g}\overline{f}_i);\mathscr{O}^\dagger|_{D(\overline{g}\overline{f}_i)})$ est †-adique affine-lisse (AL-P). L'espace annelé $(D(\overline{g});\mathscr{O}^\dagger|_{D(\overline{g})})$ est donc le recollement ouvert de $r-1$ schémas †-adiques affines-lisses tous sous-schémas ouverts (principaux) d'un même schéma †-adique affine-lisse. En raisonnant par récurrence sur le nombre r nous pouvons conclure que $(D(\overline{g});\mathscr{O}|_{D(\overline{g})})$ est †-adique affine-lisse et que l'espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est le recollement des deux schémas †-adiques affines-lisses

$$\left(D(\overline{f}_1);\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger_{[f]}}\right) \quad \text{et} \quad \left(D(\overline{g});\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger_{[g]}}\right)$$

au-dessus du schéma algébrique affine $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ avec $\boldsymbol{X} = D(\overline{f}_1) \cup D(\overline{g})$. Le théorème résultera maintenant de vérifier l'assertion (c) dans le cas où $r = 2$ ou encore l'assertion (b) aussi pour $r = 2$.

Lorsque $r(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) = 2$ l'assertion (b) résulte de l'existence pour chaque ouvert affine $\overline{V} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ d'un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\gamma(\overline{V}) : \boldsymbol{B}(\overline{V})^\dagger \to \Gamma(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger)$rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{B}(\overline{V})^\dagger & \xrightarrow{\gamma(\overline{V})} & \Gamma(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger) \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \alpha(\overline{V})} \\ \boldsymbol{B}(\overline{V})^\dagger & \xrightarrow{q} & \Gamma(\overline{V};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) \end{array} \qquad (*)$$

où $q : \boldsymbol{B}(\overline{V})^\dagger \to \Gamma(\overline{V};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ désigne un relèvement f.c.t.f. très lisse. En effet,

• *Sous les hypothèses en cours, tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\gamma(\overline{V}) : \boldsymbol{B}(\overline{V})^\dagger \to \Gamma(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger)$ vérifiant $\alpha(\overline{V}) \circ \gamma(\overline{V}) = q$ est nécessairement **bijectif**. En particulier, l'existence de $\gamma(\overline{V})$ implique que $\Gamma(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger)$ est f.c.t.f. très lisse et que $\alpha(\overline{V})$ est un relèvement.*

Preuve. Posons pour simplifier $\gamma := \gamma(\overline{V})$, $\boldsymbol{B}^\dagger := \boldsymbol{B}(\overline{V})^\dagger$, $\overline{\boldsymbol{B}} := \Gamma(\overline{V};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$. Notons $b_i \in \boldsymbol{B}^\dagger$ un relèvement de $\bar{b}_i := \overline{f}_i \cdot \mathbf{1}_{\overline{\boldsymbol{B}}}$. Le schéma †-adique $(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{V}})$ est clairement recollement des deux schémas †-adiques affines-lisses $(\overline{V}_1;\mathscr{O}^\dagger)$ et $(\overline{V}_2;\mathscr{O}^\dagger)$ (AL-A) via la restriction de l'isomorphisme $\varphi \in \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger_{f_1 f_2})$ à $\boldsymbol{B}^\dagger_{b_1 b_2}$ (3.4.5) que nous continueront de noter 'φ'.

Nous avons ainsi le diagramme commutatif qui complète le diagramme Δ_2 :

$$\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{B}^\dagger & \xrightarrow{\gamma} & \Gamma(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & \boldsymbol{B}^\dagger_{[b_1]} \oplus \boldsymbol{B}^\dagger_{[b_2]} & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \boldsymbol{B}^\dagger_{[b_1 b_2]} \\ \| & & \alpha(\overline{V})\downarrow & & \alpha(\overline{V}_1)\downarrow \quad \downarrow\alpha(\overline{V}_2) & & \downarrow\alpha_{(\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2)} \\ \boldsymbol{B}^\dagger & \xrightarrow{q} & \overline{\boldsymbol{B}} = \Gamma(\overline{V};\mathscr{O}_{\overline{V}}) & \xrightarrow{\epsilon_{\overline{\mathrm{id}}}} & \overline{\boldsymbol{B}}_{\bar{b}_1} \oplus \overline{\boldsymbol{B}}_{\bar{b}_2} & \xrightarrow{\delta_{\overline{\mathrm{id}}}} & \overline{\boldsymbol{B}}_{\bar{b}_1 \bar{b}_2} \to \mathbf{0} \end{array}$$

L'algèbre $\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_i]}$ possède alors deux structures de $\boldsymbol{B}^\dagger$-algèbres, celle canonique en tant que localisation de $\boldsymbol{B}^\dagger$ que nous allons noter $\{\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_i]}\}$ et celle induite par la composée $\epsilon_{\varphi,i} \circ \gamma$ que nous notons $[\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_i]}]$. La réduction modulo $\boldsymbol{I}$ des morphismes structuraux de

ces algèbres n'est autre que le morphisme associé à l'inclusion $V_i \subseteq \overline{V}$ de sorte que ces morphismes appartiennent à l'ensemble $\mathrm{Homom}'_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B}^\dagger, \boldsymbol{B}^\dagger_{[b_i]})$ sur lequel le groupe $\boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_i]})$ opère à gauche de façon simplement transitive (3.4-a). Il existe donc un et un unique isomorphisme de $\boldsymbol{B}^\dagger$-algèbres ${h^\dagger}_i : \{\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_i]}\} \to [\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_i]}]$ congruent à $\mathbf{id}$ modulo $\boldsymbol{I}$ et tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \{\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_i]}\} & \xrightarrow{h_i^\dagger} & [\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_i]}] \\ {\scriptstyle \alpha(\overline{V}_i)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha(\overline{V}_i)} \\ \overline{\boldsymbol{B}}_{\bar{b}_i} & \xrightarrow{\mathbf{id}} & \overline{\boldsymbol{B}}_{\bar{b}_i} \end{array}$$

est commutatif. On obtient ainsi un morphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & \boldsymbol{B}^\dagger & \xrightarrow{\epsilon_{\mathbf{id}}} & \{\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_1]}\} \oplus \{\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_2]}\} & \xrightarrow{\delta_{\mathbf{id}}} & \{\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_1b_2]}\} & \to & \mathbf{0} \\ & & {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow & & \bigoplus \quad {h^\dagger}_1\big\downarrow\simeq \quad {h^\dagger}_2\big\downarrow\simeq & & {h^\dagger}_{12}\big\downarrow & & \\ \mathbf{0} & \to & \Gamma(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & [\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_1]}] \oplus [\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_2]}] & \xrightarrow{\delta_\varphi} & [\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_1b_2]}] & & \end{array} \qquad (\nabla_2)$$

où ${h^\dagger}_{12}$ est le morphisme induit sur $\mathrm{coker}(\epsilon_{\mathbf{id}}) = \{\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_1b_2]}\}$ vers $\mathrm{coker}(\epsilon_\varphi) \subseteq [\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_1b_2]}]$.

On constate alors que les structures de $\boldsymbol{B}^\dagger$-algèbres sur $[\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_1b_2]}]$ provenant des morphismes $\varphi \circ {h^\dagger}_1$ et ${h^\dagger}_2$ coïncident et alors, le même raisonnement qui nous a conduit à l'existence et unicité des morphismes ${h^\dagger}_i$ prouve que l'application ${h^\dagger}_{12}$ n'est autre que l'unique **iso**morphisme de $\boldsymbol{B}^\dagger$-algèbre de $\{\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_1b_2]}\}$ sur $[\boldsymbol{B}^\dagger_{[b_1b_2]}]$ congruent à $\mathbf{id}$ module $\boldsymbol{I}$. On en déduit la surjectivité de δ_φ et donc la bijectivité de γ. □

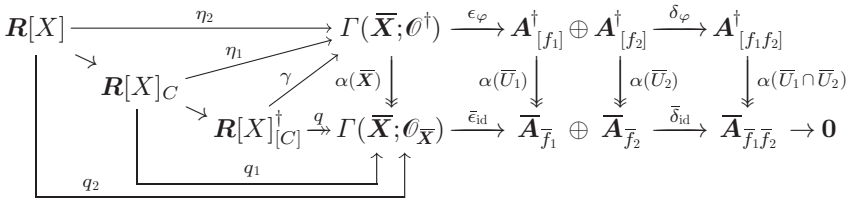
Il ne nous reste plus maintenant qu'à justifier l'existence de $\gamma(\overline{V}) : \boldsymbol{B}^\dagger(\overline{V}) \to \Gamma(\overline{V},\mathscr{O}^\dagger)$ vérifiant l'égalité $\alpha(\overline{V}) \circ \gamma(\overline{V}) = q$ pour tout ouvert affine $\overline{V} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ et lorsque $r(\overline{\boldsymbol{X}},\mathscr{O}^\dagger) = 2$. Or, $r(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{V}}) \leqslant r(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ (AL-A) de sorte qu'il revient au même de justifier "seulement" l'existence de $\gamma : \boldsymbol{A}^\dagger \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ vérifiant $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}) \circ \gamma = q$ pour **tout** schéma †-adique lisse $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ de réduction affine et tel que $r(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) = 2$ ([1]). On reprend dans la suite les notations du début et montrons l'existence de γ en deux étapes.

I. *Cas où* $\overline{\boldsymbol{A}} = \overline{\boldsymbol{R}}[\overrightarrow{X}]_{\overline{C}}$

- Soit $C \in \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]$ un relèvement de $\overline{C} \in \overline{\boldsymbol{R}}[\overrightarrow{X}]$.
- Soient $q_2 : \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}] \to \overline{\boldsymbol{A}}$ et $q_1 : \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_C \to \overline{\boldsymbol{A}}$ les morphismes induits par la surjection canonique $q : \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]^\dagger_{[C]} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{R}}[\overrightarrow{X}]_{\overline{C}} = \overline{\boldsymbol{A}}$.
- Soit $\eta_2 : \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}] \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres vérifiant $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}) \circ \eta_2 = q_2$, son existence résulte de la surjectivité de $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ (2.1.7).

[1] Il convient de remarquer que si dans ce cas l'application $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}) : \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}} : \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est surjective (2.1.7), on ne sait toujours pas (encore) si c'est un relèvement, faute de quoi l'existence de γ résulterait simplement de ce que $\boldsymbol{B}^\dagger$ est très lisse.

On a le diagramme commutatif



L'élément $u := \eta_2(C)$ est inversible dans $\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$. En effet, $\epsilon_{\varphi,i}(u) \in \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_i]}$ est inversible puisque sa réduction modulo $\boldsymbol{I}$ l'est et que $\big(\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_i]}, \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_i]}\big)$ est de Zariski ; l'égalité $\varphi(\epsilon_{\varphi,1}(u)) = \epsilon_{\varphi,2}(u)$ implique alors la condition de recollement $\varphi(\epsilon_{\varphi,1}(u)^{-1}) = \epsilon_{\varphi,2}(u)^{-1}$ pour l'élément $z \in \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ vérifiant $\epsilon_\varphi(z) = (\epsilon_{\varphi,1}(u)^{-1}, \epsilon_{\varphi,2}(u)^{-1})$ et on a $zu = 1$ par injectivité de ϵ_φ. Le morphisme η_2 induit donc un morphisme $\eta_1 : \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_C \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ vérifiant l'égalité $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}) \circ \eta_1 = q_1$. Cela étant, chaque morphisme $\tau_i := \epsilon_{\varphi,i} \circ \eta_1 : \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_C \to \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_i]}$ se prolonge en un morphisme $\tilde{\tau}_i : \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]^\dagger_{[C]} \to \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_i]}$ et l'égalité $\delta_\varphi\big(\tilde{\tau}_1(w), \tilde{\tau}_2(w)\big) = 0$ pour tout $w \in \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]^\dagger$, résulte de la séparation $\boldsymbol{I}$-adique de $\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]}$. Le morphisme $\gamma : \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]^\dagger \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ défini par $\gamma(w) = \big(\tilde{\tau}_1(w), \tilde{\tau}_2(w)\big)$ vérifie par construction l'égalité $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}) \circ \gamma = q$.

II. *Cas général.* Fixons une surjection de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\pi : \boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_t]^\dagger \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}^\dagger$ et choisissons des éléments $F_i \in \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]$ tels que $\pi(F_i) = f_i$, on a $\pi(F_1 + F_2) = 1$. Notons $\boldsymbol{B}^\dagger := \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]^\dagger_{[F_1+F_2]}$, Le morphisme π induit par restriction, une surjection de $\boldsymbol{B}^\dagger$ sur $\boldsymbol{A}^\dagger$ et plus généralement une surjection de $\boldsymbol{B}^\dagger_{[G]}$ sur $\boldsymbol{A}^\dagger_{[\pi(G)]}$ quel que soit $G \in \boldsymbol{B}^\dagger$; on désignera tous ces morphismes par la même lettre π. D'autre part, comme la $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]}$ est f.c.t.f. très lisse, il existe un isomorphisme $\psi : \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]} \to \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]}$ congruent à l'identité modulo $\boldsymbol{I}$ et rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]} & \overset{\psi}{\underset{\simeq}{\dashrightarrow}} & \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]} \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]} & \underset{\simeq}{\xrightarrow{\varphi}} & \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]} \end{array}$$

commutatif. Il en résulte la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1]} \oplus \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_2]} & \xrightarrow{\delta_\psi} & \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]} \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1]} \oplus \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_2]} & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]} \end{array} \qquad (\mathscr{D})$$

et un morphisme induit $\pi : \ker(\delta_\psi) \dashrightarrow \ker(\delta_\varphi)$. Autrement dit, on a un morphisme de suites exactes **à gauche** :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \to & \Gamma(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{B}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\psi} & \Gamma(\overline{V}_1;\mathscr{B}^\dagger)\oplus\Gamma(\overline{V}_2;\mathscr{B}^\dagger) & \xrightarrow{\delta_\psi} & \Gamma(\overline{V}_1\cap\overline{V}_2;\mathscr{B}^\dagger) & \to & 0 \\
 & & \pi\downarrow & & \pi\downarrow & (\mathscr{D}) & \pi\downarrow & & \\
\mathbf{0} & \to & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & \Gamma(\overline{U}_1;\mathscr{O}^\dagger)\oplus\Gamma(\overline{U}_2;\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \Gamma(\overline{U}_1\cap\overline{U}_2;\mathscr{O}^\dagger) & \to & \mathbf{0}
\end{array} \qquad (\mathscr{D}')$$

Où :

- $(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{Y}}})$ schéma affine associé à $\overline{\boldsymbol{B}} := \boldsymbol{B}^\dagger/\boldsymbol{I}\boldsymbol{B}^\dagger$, c'est l'ouvert principal $D(\overline{F}_1+\overline{F}_2)$ de l'espace affine $\mathbb{A}^t_{\overline{\boldsymbol{R}}}$;
- $\overline{V}_i = D(F_i)$, ouvert principal de $\overline{\boldsymbol{Y}}$;
- $(\overline{V}_i;\mathscr{B}_i^\dagger)$ le schéma †-adique affine associé à $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_i]}$,
- $(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{B}^\dagger)$ le recollement d'espaces annelés des $(\overline{V}_i;\mathscr{B}_i^\dagger)$ via l'isomorphisme ψ.

D'après $(\boldsymbol{I})$, le schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{B}^\dagger)$ est **affine** et la première ligne de $(\mathscr{D}')$ est exacte, de même alors que sa deuxième ligne de par la surjectivité de la troisième colonne. Le conoyau de ϵ_φ est donc le $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]}$ tout entier dont on sait qu'il est **plat**. La réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de la deuxième ligne de $(\mathscr{D}')$ reste donc exacte et coïncide avec la suite exacte courte

$$\mathbf{0} \to \overline{\boldsymbol{A}} \xrightarrow{\epsilon_{\overline{\mathbf{id}}}} \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1}\oplus\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_2} \xrightarrow{\delta_{\overline{\mathbf{id}}}} \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1\overline{f}_2} \to \mathbf{0}$$

Autrement dit, la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ du morphisme $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}) : \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \to \overline{\boldsymbol{A}}$ est **bijective**, *i.e.* $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ est un relèvement de $\overline{\boldsymbol{A}}$.

Cela étant la complétion faible du morphisme ϵ_φ donne la suite

$$\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger_\varphi} \Gamma(\overline{U}_1;\mathscr{O}^\dagger)\oplus\Gamma(\overline{U}_2;\mathscr{O}^\dagger) \xrightarrow{\delta_\varphi} \Gamma(\overline{U}_1\cap\overline{U}_2;\mathscr{O}^\dagger) \to \mathbf{0}$$

dont l'exactitude au terme central résulte de mêmes arguments que ceux de la fin de $(\boldsymbol{I})$. On en déduit la factorisation $\mathbf{id} = \epsilon^\dagger_\varphi \circ \iota$:

$$\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \xrightarrow{\iota} \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger_\varphi} \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger), \qquad \mathbf{id}$$

où ι désigne le morphisme canonique d'une algèbre vers sa complétion faible, et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\boldsymbol{A}^\dagger & & \xrightarrow{\quad\gamma^\dagger\quad} & & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)^\dagger & \xrightarrow{\quad\epsilon^\dagger_\varphi\quad} & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \\
q\downarrow & & & & q\downarrow & & \alpha(\overline{\boldsymbol{X}})\downarrow \\
\overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow[\simeq]{\overline{\alpha}(\overline{\boldsymbol{X}})^{-1}} & \overline{\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & \overline{\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)^\dagger} & \xrightarrow{\bar{\epsilon}^\dagger_\varphi} & \overline{\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)} \xrightarrow[\simeq]{\overline{\alpha}(\overline{\boldsymbol{X}})} \overline{\boldsymbol{A}}
\end{array} \qquad \mathbf{id}$$

où l'existence de $\gamma^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)^\dagger$ résulte de la lissité de $\boldsymbol{A}^\dagger$. Le morphisme recherché est donc $\gamma = \epsilon^\dagger_\varphi \circ \gamma^\dagger$, CQFD. ∎

2.1.9. Corollaire. *Il y a équivalence pour un schéma †-adique entre être affine-lisse et être lisse et de réduction affine.*

Preuve. Clair d'après (c) de 2.1.8. ∎

Remarque. La terminologie « *affine-lisse* » est désormais obsolète et sera remplacée par l'expression « *lisse et affine* ».

2.1.10. Corollaire. *Pour tout schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ de réduction $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$* ***affine*** *le morphisme $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}):\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)\to\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est* ***surjectif****.*

Preuve. Le corollaire est conséquence évidente de l'assertion suivante

• *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ un schéma †-adique de réduction affine $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$. Notons $\overline{\boldsymbol{A}}:=\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ et supposons qu'il existe $\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_r\in\overline{\boldsymbol{A}}$ vérifiant $1=\overline{f}_1+\cdots+\overline{f}_r$ et tels que les sous-espaces annelés $\big(D(\overline{f}_i);\mathscr{O}^\dagger|_{D(\overline{f}_i)}\big)$ sont des schéma †-adiques affines. Soit $\pi:\boldsymbol{B}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}$ une surjection de $\boldsymbol{R}$-algèbres où $\boldsymbol{B}$ est lisse. Soit $F_i\in\boldsymbol{B}$ vérifiant $\pi(F_i)=\overline{f}_i$ et $F_1+\cdots+F_r=1$. Il existe alors un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\pi^\dagger:\boldsymbol{B}^\dagger\to\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ rendant commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{B}^\dagger & \xrightarrow{\pi^\dagger} & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)\\ {\scriptstyle q}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha(\overline{\boldsymbol{X}})}\\ \overline{\boldsymbol{B}} & \xrightarrow{\overline{\pi}} & \overline{\boldsymbol{A}}=\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})\end{array}\qquad(\ddagger)$$

Lorsque le schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est lisse le morphisme $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ est un relèvement f.c.t.f. d'près 2.1.8, et l'existence de $\pi^\dagger$ résulte alors de ce que $\boldsymbol{B}^\dagger$ est très lisse.

Lorsque $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ n'est pas lisse on raisonne par récurrence sur le nombre r en remarquant que la partie $(\boldsymbol{II})$ de la démonstration de 2.1.7 règle déjà le cas où $r\leqslant 2$. Dans le cas général, on a le recouvrement principal $\boldsymbol{X}=\overline{V}_1\cup\overline{V}_2$ avec $\overline{V}_1=D(\overline{f}_1)$ et $\overline{V}_2=D(1-\overline{f}_1)$ et des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1]} & \xrightarrow{\pi_1^\dagger} & \Gamma(\overline{V}_1;\mathscr{O}^\dagger)\\ {\scriptstyle q}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha(\overline{V}_1)}\\ \overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{F}_1} & \xrightarrow{\overline{\pi}} & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1}\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{ccc}\boldsymbol{B}^\dagger_{[1-F_1]} & \xrightarrow{\pi_2^\dagger} & \Gamma(\overline{V}_2;\mathscr{O}^\dagger)\\ {\scriptstyle q}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha(\overline{V}_2)}\\ \overline{\boldsymbol{B}}_{1-\overline{F}_1} & \xrightarrow{\overline{\pi}} & \overline{\boldsymbol{A}}_{1-\overline{f}_1}\end{array}$$

Celui de gauche parce que $(\overline{V}_1;\mathscr{O}^\dagger)$ est †-adique affine ce qui entraîne que $\Gamma(\overline{V}_1;\mathscr{O}^\dagger)$ est f.c.t.f. et que $\alpha(\overline{V}_1)$ est un relèvement. L'existence de $\pi_1^\dagger$ résulte de ce que $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1]}$ est très lisse, c'est même un morphisme surjectif car de réduction surjective ([MW] th. 3.2).

Celui de droite par hypothèse de récurrence puisque $D(\overline{V}_2)$ est recouvert par les $(r-1)$ ouverts principaux $D\big(\overline{f}_i(1-\overline{f}_1)^{-1}\big)$, $i=2,\dots,r$, au-dessus desquels $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est affine. Contrairement à $\pi_1^\dagger$, le morphisme $\pi_2^\dagger$ n'est pas *a priori* surjectif.

La composition des morphismes $\pi_i^\dagger$ avec les restrictions $\Gamma(\overline{V}_i;\mathscr{O}^\dagger)\to\Gamma(\overline{V}_{12};\mathscr{O}^\dagger)$ induit des morphismes de $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1(1-F_1)]}$ qu'on note pareillement. On a, par réduction :

$$\left\{\begin{array}{ccc}\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1(1-F_1)]} & \overset{\psi}{\underset{\simeq}{\dashrightarrow}} & \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1(1-F_1)]}\\ {\scriptstyle\pi_2^\dagger}\big\downarrow & & {\scriptstyle\pi_1^\dagger}\big\downarrow\\ \Gamma(\overline{V}_{12};\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow[=]{\mathbf{id}} & \Gamma(\overline{V}_{12};\mathscr{O}^\dagger)\end{array}\right\}\overset{\text{réduction}}{\underset{\text{modulo }\boldsymbol{I}}{\longmapsto}}\left\{\begin{array}{ccc}\overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{F}_1(1-\overline{F}_1)} & \xrightarrow{\mathbf{id}} & \overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{F}_1(1-\overline{F}_1)}\\ {\scriptstyle\overline{\pi}}\big\downarrow & \bigoplus & {\scriptstyle\overline{\pi}}\big\downarrow\\ \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1(1-\overline{f}_1)} & \xrightarrow{\mathbf{id}} & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1(1-\overline{f}_1)}\end{array}\right\}$$

D'où l'existence d'un isomorphisme $\psi:\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1(1-F_1)]}\to\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1(1-F_1)]}$ trivial modulo $\boldsymbol{I}$, qui ferme commutativement le diagramme de gauche puisque $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1(1-F_1)]}$ est très lisse.

La suite est maintenant connue : on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}\boldsymbol{B}^\dagger_{[1-F_1]} & \oplus & \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1]} & \xrightarrow{\delta_\psi} & \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1(1-F_1)]}\\ {\scriptstyle\pi_2^\dagger}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi_1^\dagger} & & {\scriptstyle\pi_1^\dagger}\big\downarrow\\ \Gamma(\overline{V}_2;\mathscr{O}^\dagger) & \oplus & \Gamma(\overline{V}_1;\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow{\delta} & \Gamma(\overline{V}_{12};\mathscr{O}^\dagger)\end{array}\qquad(\mathscr{D})$$

induisant un morphisme d'algèbres $\pi^\dagger:\ker(\delta_\psi)\to\ker(\delta)$. Or, $\ker(\delta_\psi)=\boldsymbol{B}^\dagger$ d'après 2.1.8 et $\ker(\delta)=\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$. Nous avons donc bien $\pi^\dagger:\boldsymbol{B}^\dagger\to\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ rendant commutatif le diagramme (‡) CQFD. ∎

2.1.11. Remarque. Le corollaire précédent suggère très fortement l'acyclicité cohomologique des faisceaux structuraux des schémas †-adiques à réduction affine. Cela est clair dans le cas lisse maintenant qu'on a 2.1.8 car c'est ainsi des schémas †-adiques affines d'après Meredith. On observera aussi que le diagramme $(\mathscr{D})$ à la fin de la démonstration montre aussi que δ est surjectif, car c'est ainsi de δ_ψ. Autrement dit, la cohomologie de Čech de $\mathscr{O}^\dagger$ relative à tout recouvrement principal à deux ouverts $\{\overline{V}_1,\overline{V}_2\}$ tel que $(\overline{V}_1;\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{V}_1})$ est †-adique affine, est triviale.

Comme les ouverts principaux "affinissants" constituent une base pour la topologie de $\overline{\boldsymbol{X}}$, cela semble suffire, compte tenu de la proposition 3.2.10, pour prouver le :

Théorème. Pour tout schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$, on a :

$$H^j(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger)=0\,,\ \textit{pour tout } j>0.$$

quel que soit l'ouvert affine $\overline{U}\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}$.

Cette remarque est à vérifier, bien entendu !

2.1.12. Un théorème de relèvement de morphismes. Cette section est destinée à prouver un corollaire du théorème de relèvement de morphismes à source lisse ([Ar]-**2.1.3**) qu'on a utilisé dans une première démonstration du théorème 2.1.8. Ce corollaire étant plus fort que nécessaire nous l'avons remplacé dans la dernière version de la démonstra-

tion. Nous pensons que ce corollaire est néanmoins intéressant même s'l n'est pas utilisé dans ces notes.

2.1.13. Rappel du théorème [Ar]-2.1.3. *Étant donnés un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\overline{h}:\overline{\boldsymbol{A}}\to\overline{\boldsymbol{B}}$, et des relèvements $p_{\boldsymbol{A}}:\boldsymbol{A}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}$ et $p_{\boldsymbol{B}}:\boldsymbol{B}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{B}}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, il existe une $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_\epsilon:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}_\varepsilon$ qui relève $\overline{h}$. En d'autres termes, on a un diagramme :*

$$\begin{array}{ccccc}\boldsymbol{A} & \overset{h_\varepsilon}{\dashrightarrow} & \boldsymbol{B}_\varepsilon & \overset{\varepsilon}{\longleftarrow} & \boldsymbol{B}\\ {\scriptstyle p_{\boldsymbol{A}}}\downarrow & & & \searrow^{p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}} & \downarrow{\scriptstyle p_{\boldsymbol{B}}}\\ \overline{\boldsymbol{A}} & & \xrightarrow{\quad\overline{h}\quad} & & \overline{\boldsymbol{B}}\end{array}\qquad(\mathscr{R})$$

où $\varepsilon:\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}_\varepsilon$ désigne l'homomorphisme structural et où $p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}$ est l'homomorphisme induit par ε à partir de $p_{\boldsymbol{B}}$.

Dans la proposition qui suit on se donne une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{E}$ et une $\boldsymbol{E}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, dans un tel contexte la notation $\boldsymbol{A}^\dagger$ désigne la complétion faible de $\boldsymbol{A}$ relative au couple $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ pour la structure de $\boldsymbol{R}$-module sur $\boldsymbol{A}$ induite par $\boldsymbol{E}$.

2.1.14. Proposition. *Soit $\boldsymbol{E}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini. On se donne des $\boldsymbol{E}$-algèbres de type fini $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ où $\boldsymbol{A}$ est $\boldsymbol{E}$-lisse. Pour tout morphisme de $\boldsymbol{E}$-algèbres $\overline{h}:\overline{\boldsymbol{A}}\to\overline{\boldsymbol{B}}$ il existe un morphisme de $\boldsymbol{E}^\dagger$-algèbres $h^\dagger:\boldsymbol{A}^\dagger\to\boldsymbol{B}^\dagger$ rendant commutatif le diagramme suivant.*

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{A}^\dagger & \xrightarrow{h^\dagger} & \boldsymbol{B}^\dagger\\ {\scriptstyle p_{\boldsymbol{A}^\dagger}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\boldsymbol{B}^\dagger}}\\ \overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow{\overline{h}} & \overline{\boldsymbol{B}}\end{array}$$

Preuve. En appliquant le théorème 2.1.13 on a :

i) la $\boldsymbol{E}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ et le morphisme étale de $\boldsymbol{E}$-algèbres $\varepsilon:\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}_\varepsilon$, voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$. Par complétion faible (relative à $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$) on a un **isomorphisme** de $\boldsymbol{E}^\dagger$-algèbres $\varepsilon^\dagger:\boldsymbol{B}^\dagger\to\boldsymbol{B}^\dagger_\varepsilon$ (*cf.* [Ar] prop. **3.2.5**).

ii) le morphisme de $\boldsymbol{E}$-algèbres $h:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}_\varepsilon$ de complétion faible : le morphisme de $\boldsymbol{E}^\dagger$-algèbres $h^\dagger{}_\varepsilon:\boldsymbol{A}^\dagger\to\boldsymbol{B}^\dagger_\varepsilon$.

La commutativité du diagramme $(\mathscr{R})$ étant préservée par complétion faible, la proposition résulte alors de prendre $h^\dagger=(\varepsilon^\dagger)^{-1}\circ h^\dagger_\varepsilon$. ∎

2.1.15. Remarque. Bien que le théorème 2.1.13 soit valable sous des hypothèses très faibles : l'anneau $\boldsymbol{R}$ commutatif avec identité multiplicative et l'idéal $\boldsymbol{I}$ quelconque, la proposition 2.1.14 est démontrée à l'aide de la proposition **3.2.5** de [Ar] où $\boldsymbol{R}$ est nœthérien et $\boldsymbol{B}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini.

§3. Références bibliographiques

[Ar] A. Arabia. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes ; Prépublication (avril 2000).

[A] M. Artin. On the solutions of analytique equations ; Invent. Math. **5** pp. 277–291 (1968).

[B] S. Bosch. A rigid analytic version of M. Artin's theorem on analytic equations ; Math. Ann. **255**, n^{ro} 3, pp. 395–404 (1981).

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. "*Néron Models*" ; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **3**. Folge–Band **21** (1980).

[E] R. Elkik. Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien ; Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, quatrième série, tome 6, pp. 553–604 (1973).

[EGA$_{4,1}$] A. Grothendieck. "*Éléments de géométrie algébrique-IV*" ; Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. Première partie. Publications mathématiques de l'I.H.E.S. **20** (1964).

[SGA$_2$] A. Grothendieck. "*Cohomologie locale des faisceaux cohérents et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*" ; Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie 1962. Advanced studies in pure mathematics. Vol. 2. North-Holland – Masson (1968).

[Go] R. Godement. "*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*" ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

[Gro] A. Grothendieck. Géométrie formelle et géométrie algébrique ; Séminaire Bourbaki, exposé **182** (Mai 1959).

[McL] S. Mac Lane. "*Categories for the working mathematician*" ; Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag (1998).

[M] D. Meredith. Weak formal schemes ; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).

[MW] P. Monsky, G. Washnitzer. Formal cohomology : I ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217 (1968).

[vdP] M. van der Put. The cohomology of Monsky and Washnitzer ; Société Mathématique de France. Deuxième série, Mémoire n^{ro} 23, pp. 33–60 (1986).

[Ser] J.-P. Serre. Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique zéro ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **47**, pp. 108–109 (1961).

[SGA1] "*Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*" ; Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61. Lecture Notes in Mathematics **224**. Springer-Verlag (1971).

———————×———————

Produits fibrés dans la catégorie des schémas †-adiques

Alberto Arabia*

Résumé. On démontre les deux assertions suivantes

- *La catégorie des schémas †-adiques localement de type fini possède des produits fibrés.*
- *Pour un schéma †-adique localement de type fini, il y a équivalence entre : « être de réduction affine » et « être †-adique affine de type fini. »*

Table des matières

§**0. Résumé** **2**
§**1. Généralités sur le produit fibré** **2**
1.1. Catégorie $\mathcal{C}/_S$ 2
1.2. Foncteur représentable 2
1.3. Produits 3
1.4. Produits fibrés d'ensembles 3
1.5. Produits fibrés de foncteurs d'ensembles 3
1.6. Produits fibrés dans une catégorie générale 4
1.7. Produits fibrés dans la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{C}')$ 4
1.8. Morphisme représentable de foncteurs d'ensembles 4
1.9. Critère de représentabilité dans les catégories d'espaces annelés 5
§**2. Produits fibrés de schémas †-adiques affines** **6**
2.1. Le foncteur de complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible 6
2.2. Catégories $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ 6
2.3. Quelques propriétés des algèbres faiblement complètes 7
2.4. Schémas †-adiques affines 7
2.4.1. Le foncteur $(_)^{\sim}$ 7
2.4.4. Espaces localement annelés 8
2.4.7. Schémas †-adiques affines 9
2.4.8. Le cas nœthérien 9
2.5. Catégorie des schémas †-adiques 11
2.5.1. Schémas †-adiques 11
2.5.2. Réduction d'un schéma †-adique 11
2.5.3. Terminologie 11
§**3. Produits fibrés de schémas †-adiques** **11**
3.1. Un complément sur l'affinité des schémas †-adiques de réduction affine 11
3.1.3. Un critère d'affinité 12
3.2. Isomorphismes de faisceaux sur $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ 14
3.2.1. Faisceaux sur $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ 14
§**4. Affinité des schémas †-adiques de réduction affine** **16**
§**5. Références bibliographiques** **19**

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 9e étage, bureau 9D11, 75013 Paris.
Adresse électronique : arabia@math.jussieu.fr

§0. Résumé

On complète l'étude des schémas †-adiques de réduction affine de type fini ([Ar$_3$]) avec :

Théorème 4.1. *Pour un schéma †-adique localement de type fini il y a équivalence entre :*
a) *Être de réduction affine (de type fini).*
b) *Être †-adique affine de type fini.*

Ce résultat, ou plutôt sa version affaiblie 3.1.3, constitue le point clé dans la preuve des théorèmes suivants clairement inspirés de leurs analogues en théorie des schémas.

Théorème 3.2.3-(a). *Pour tout schéma †-adique localement de type fini $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ et tout schéma †-adique affine de type fini $(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}})$ l'application $(f,f^{\#})\mapsto\Gamma(\boldsymbol{Y};f^{\#})$ est un isomorphisme naturel de* $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ *sur* $\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\Gamma(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}}),\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}))$.

Théorème 3.2.4. *La catégorie des schémas †-adiques localement de type fini possède des produits fibrés.*

§1. Généralités sur le produit fibré

Cette section peut être ignorée en première lecture. On y trouve les définitions et des résultats élémentaires sans démonstration nécessaires à la compréhension de la proposition 1.9.1 (p. 5) qui reformule le critère de représentabilité de foncteurs sur la catégorie des espaces annelés de [EGA$_1$] (prop. §4.5.4).

On désigne par $\mathfrak{C}$ une catégorie. Le mot "foncteur" sans qualificatif est synonyme de "foncteur contravariant". En parlant de foncteurs, le mot "morphisme" est synonyme de "transformation naturelle".

1.1 Catégorie $\mathfrak{C}/_{\boldsymbol{S}}$

Pour tout objet $\boldsymbol{S}$ de $\mathfrak{C}$, on note $\mathfrak{C}/_{\boldsymbol{S}}$ la catégorie dont les objets sont les morphismes de $\mathfrak{C}$ de but $\boldsymbol{S}$. Si $\pi_1:\boldsymbol{X}_1\to\boldsymbol{S}$ et $\pi_2:\boldsymbol{X}_2\to\boldsymbol{S}$ sont des objets de $\mathfrak{C}/_{\boldsymbol{S}}$, l'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}/_{\boldsymbol{S}}}(\pi_1,\pi_2)$ est le sous-ensemble de $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)$ des morphismes $\phi:\boldsymbol{X}_1\to\boldsymbol{X}_2$ tels que $\pi_1=\pi_2\circ\phi$.

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{X}_1 & \xrightarrow{\phi} & \boldsymbol{X}_2\\ {\scriptstyle\pi_1}\downarrow & \oplus & \downarrow{\scriptstyle\pi_2}\\ \boldsymbol{S} & \xrightarrow[\mathrm{id}_{\boldsymbol{S}}]{} & \boldsymbol{S}\end{array}$$

1.2 Foncteur représentable

Un foncteur contravariant $\boldsymbol{F}:\mathfrak{C}\rightsquigarrow\mathbf{Ens}$ est dit « *représentable* » s'il existe $\boldsymbol{X}\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ et un isomorphisme de foncteurs $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(_,\boldsymbol{X})\simeq\boldsymbol{F}(_)$.

1.2.1. Lemme d'Yoneda. *La correspondance qui associe à un morphisme de foncteurs $\Phi(_):\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(_,\boldsymbol{X})\to\boldsymbol{F}(_)$ l'élément $\Phi(\boldsymbol{X})(\mathrm{id}_{\boldsymbol{X}})\in\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ est une bijection sur l'ensemble $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$. La correspondance réciproque associe à $x\in\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ et $\boldsymbol{Y}\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ l'application $\Phi(\boldsymbol{Y}):\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\to\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})$, $f\mapsto\boldsymbol{F}(f)(x)$.*

Lorsque $\boldsymbol{F}$ est représentable, les couples $(\boldsymbol{X},x\in\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}))$ donnés par le lemme d'Yoneda sont dits « *représenter* $\boldsymbol{F}$ ».

1.2.2. Lemme. *Les couples représentant un même foncteur sont deux à deux* ***canoniquement*** *isomorphes.*

1.3 Produits

Étant donnés deux objets $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ de $\mathcal{C}$, on dit que « $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *admettent un produit dans* $\mathcal{C}$ » lorsque le foncteur $\boldsymbol{F}(_) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(_, \boldsymbol{X}) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(_, \boldsymbol{Y}) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ est représentable. Dans ce cas, on note $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ et $p_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ et $p_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ respectivement l'objet et l'élément de $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y})$ qui caractérisent $\boldsymbol{F}$.

On dira que « *les produits existent dans* $\mathcal{C}$ » ou bien que « $\mathcal{C}$ *admet des produits* » lorsque chaque paire d'objets de $\mathcal{C}$ admet un produit dans $\mathcal{C}$.

1.4 Produits fibrés d'ensembles

Étant données deux applications d'ensembles $\pi_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{S}$ on définit l'ensemble $\boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y}$ et l'application $\pi_{\boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{S}$ par :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y} =: \{(x,y) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \mid \pi_{\boldsymbol{X}}(x) = \pi_{\boldsymbol{Y}}(y)\} & \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y}}} & \boldsymbol{S} \\ (x,y) & \longmapsto & \pi_{\boldsymbol{X}}(x) \end{array}$$

On note $p_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ et $p_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ les restrictions des projections canoniques de $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$. On a le diagramme « *cartésien* »

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y} & \xrightarrow{p_{\boldsymbol{Y}}} & \boldsymbol{Y} \\ {\scriptstyle p_{\boldsymbol{X}}}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\boldsymbol{Y}}} \\ \boldsymbol{X} & \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{X}}} & \boldsymbol{S} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (x,y) & \xrightarrow{p_{\boldsymbol{Y}}} & y \\ {\scriptstyle p_{\boldsymbol{X}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\boldsymbol{Y}}} \\ x & \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{X}}} & \pi_{\boldsymbol{X}}(x) = \pi_{\boldsymbol{Y}}(y) \end{array}$$

Le couple $(\boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y}, (p_{\boldsymbol{X}}, p_{\boldsymbol{Y}}))$ représente le foncteur $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Ens}/\boldsymbol{S}}(_, \pi_{\boldsymbol{X}}) \times \mathrm{Mor}_{\mathbf{Ens}/\boldsymbol{S}}(_, \pi_{\boldsymbol{Y}})$, c'est le « *produit fibré de* $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *au-dessus de* $\boldsymbol{S}$ (*relativement à* $\pi_{\boldsymbol{X}}$ *et* $\pi_{\boldsymbol{Y}}$) ».

1.4.1. Lemme. *Étant donnés deux diagrammes commutatifs d'applications d'ensembles :*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{X}}} & \boldsymbol{X}_2 \\ {\scriptstyle \pi_{\boldsymbol{X}_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\boldsymbol{X}_2}} \\ \boldsymbol{S}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{S}}} & \boldsymbol{S}_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{Y}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{Y}}} & \boldsymbol{Y}_2 \\ {\scriptstyle \pi_{\boldsymbol{Y}_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\boldsymbol{Y}_2}} \\ \boldsymbol{S}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{S}}} & \boldsymbol{S}_2 \end{array}$$

il existe une et une unique application $f_{\boldsymbol{X}} \times_{f_{\boldsymbol{S}}} f_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{X}_1 \times_{\boldsymbol{S}_1} \boldsymbol{Y}_1 \to \boldsymbol{X}_2 \times_{\boldsymbol{S}_2} \boldsymbol{Y}_2$ *rendant commutatifs les diagrammes :*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}_1 \times_{\boldsymbol{S}_1} \boldsymbol{Y}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{X}} \times_{f_{\boldsymbol{S}}} f_{\boldsymbol{Y}}} & \boldsymbol{X}_2 \times_{\boldsymbol{S}_2} \boldsymbol{Y}_2 \\ {\scriptstyle p_{\boldsymbol{X}_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\boldsymbol{X}_2}} \\ \boldsymbol{X}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{X}}} & \boldsymbol{X}_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}_1 \times_{\boldsymbol{S}_1} \boldsymbol{Y}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{X}} \times_{f_{\boldsymbol{S}}} f_{\boldsymbol{Y}}} & \boldsymbol{X}_2 \times_{\boldsymbol{S}_2} \boldsymbol{Y}_2 \\ {\scriptstyle p_{\boldsymbol{Y}_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\boldsymbol{Y}_2}} \\ \boldsymbol{Y}_1 & \xrightarrow{f_{\boldsymbol{Y}}} & \boldsymbol{Y}_2 \end{array}$$

1.5 Produits fibrés de foncteurs d'ensembles

Étant donnés trois foncteurs contravariants $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ et deux morphismes de

foncteurs $\pi_{\boldsymbol{F}} : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{H}$ et $\pi_{\boldsymbol{G}} : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$ la correspondance :

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni \boldsymbol{X} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \times_{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X})} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{p_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})} & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) \\ {\scriptstyle p_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})} \\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X})} & \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \ni f \rightsquigarrow \big(\boldsymbol{F}(f) \times_{\boldsymbol{H}(f)} \boldsymbol{G}(f), \boldsymbol{F}(f), \boldsymbol{G}(f), \boldsymbol{H}(f)\big)$$

où $\boldsymbol{F}(f) \times_{\boldsymbol{H}(f)} \boldsymbol{G}(f)$ désigne le morphisme donné par le lemme 1.4.1, est une correspondance fonctorielle.

Le foncteur $(_) \rightsquigarrow \boldsymbol{F}(_) \times_{\boldsymbol{H}(_)} \boldsymbol{G}(_)$ est le « *produit fibré de* $\boldsymbol{F}$ *et* $\boldsymbol{G}$ *au-dessus de* $\boldsymbol{H}$ (*relativement à* $\pi_{\boldsymbol{F}}$ *et* $\pi_{\boldsymbol{G}}$) ».

1.5.1. Lemme. *Étant donnés trois foncteurs d'ensembles* $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ *représentés par des objets* $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{S}$ *respectivement. Étant donnés deux morphismes* $\pi_{\boldsymbol{F}} : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{H}$ *et* $\pi_{\boldsymbol{G}} : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$ *représentés par des morphismes* $\pi_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ *et* $\pi_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{S}$. *Le produit fibré de foncteurs* $\boldsymbol{F} \times_{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{G}$ *relatif à* $\pi_{\boldsymbol{F}}$ *et* $\pi_{\boldsymbol{G}}$ *est représentable si et seulement si le produit fibré* $\boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y}$ *relatif à* $\pi_{\boldsymbol{X}}$ *et* $\pi_{\boldsymbol{Y}}$ *existe.*

1.6 Produits fibrés dans une catégorie générale

Définition. On dit que « *les produits fibrés existent dans la catégorie* $\mathcal{C}$ » lorsque les produits existent dans les catégories $\mathcal{C}_{/\boldsymbol{S}}$ pour tout objet $\boldsymbol{S} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Étant donnés deux morphismes $\pi_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{S}$ dans $\mathcal{C}$, on a les applications naturelles

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{X}}(_)} & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{S}) \\ f & \longmapsto & \pi_{\boldsymbol{X}} \circ f \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{Y}) & \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{Y}}(_)} & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{S}) \\ f & \longmapsto & \pi_{\boldsymbol{Y}} \circ f \end{array}$$

Posons $\boldsymbol{F}(_) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{G}(_) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{Y})$ et $\boldsymbol{H}(_) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{S})$. L'existence des produits fibrés dans $\mathcal{C}$ équivaut alors à la représentabilité du foncteur $\boldsymbol{F} \times_{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{G}$, quels que soient $\pi_{\boldsymbol{X}}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}}$ (*cf.* 1.3).

1.7 Produits fibrés dans la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{C}')$

On note ainsi la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. Lorsque la catégorie $\mathcal{C}'$ admet des produits fibrés on peut, de manière analogue à 1.4, définir pour des foncteurs $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{B} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}'$ et deux morphismes $\pi_{\boldsymbol{F}} : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{B}$ et $\pi_{\boldsymbol{G}} : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{B}$, « *le produit fibré de* $\boldsymbol{F}$ *et* $\boldsymbol{G}$ *au-dessus de* $\boldsymbol{B}$ (*relativement à* $\pi_{\boldsymbol{F}}$ *et* $\pi_{\boldsymbol{G}}$) ». On dit ([EGA$_1$] **0** §1.7.2, p. 45) que les produits fibrés existent dans la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{C}')$.

1.8 Morphisme représentable de foncteurs d'ensembles

Soient $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ deux foncteurs contravariants. Un morphisme $f : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ est dit « *représentable* » si pour tout $\boldsymbol{X} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et tout morphisme $u : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{G}$, le foncteur $\boldsymbol{F} \times_{\boldsymbol{G}} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(_,\boldsymbol{X})$ est représentable.

Dans ce cas, si on fixe un isomorphismes $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(_, \boldsymbol{Y}) \simeq \boldsymbol{F} \times_{\boldsymbol{G}} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(_, \boldsymbol{X})$, le morphisme canonique de foncteurs $\boldsymbol{F} \times_{\boldsymbol{G}} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(_, \boldsymbol{X}) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(_, \boldsymbol{X})$ est déterminé par un unique morphisme $\phi_{\boldsymbol{X}} \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$.

Soit $\mathscr{P}$ une classe de morphismes de $\mathcal{C}$ qui soit :
- stable par composition à droite ou à gauche par des isomorphismes ;
- stable par changement de base dans $\mathcal{C}$.

Définition. Un morphisme de foncteurs d'ensembles est dit « *représentable par un morphisme de* $\mathscr{P}$ » si dans la correspondance $\boldsymbol{X} \rightsquigarrow \phi_{\boldsymbol{X}}$, les morphismes $\phi_{\boldsymbol{X}}$ appartiennent tous à $\mathscr{P}$.

1.8.1. Proposition. ([EGA$_1$] prop. **0**.1.7.5) *Soient $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ vers* **Ens**.
a) *Tout isomorphisme de foncteurs est représentable.*
b) *Si $f : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ et $g : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$ sont représentables, il en est de même de $g \circ f$.*
c) *Si $f : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ est représentable, il en est de même de tout morphisme $f_{(\boldsymbol{H})}$ déduit de f par changement de base $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{G}$.*

1.9 Critère de représentabilité dans les catégories d'espaces annelés

Le critère de représentabilité de foncteurs sur la catégorie des espaces annelés $\mathbf{Esp\text{-}ann}_{/\boldsymbol{S}}$ de [EGA$_1$] (prop. **0**.4.5.4, p. 103) est plus généralement valable sur n'importe quelle sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ de $\mathbf{Esp\text{-}ann}_{/\boldsymbol{S}}$ vérifiant les deux propriétés de stabilité suivantes :
- Recollement : Tout $\boldsymbol{S}$-espace localement isomorphe à un objet $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$.
- Restriction ouverte : Le $\boldsymbol{S}$-espace induit sur un ouvert d'un objet de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$.

Voici l'énoncé du critère en question.

1.9.1. Proposition. *Soient $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Esp\text{-}ann}_{/\boldsymbol{S}}$ stable par recollements et restrictions ouvertes, $\boldsymbol{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur contravariant, $\{\boldsymbol{F}_i\}_{i \in I}$ une famille de sous-foncteurs de $\boldsymbol{F}$. On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :*
a) *Chacun des morphismes fonctoriels canoniques $u_i : \boldsymbol{F}_i \to \boldsymbol{F}$ est représentable par une immersion ouverte.*
b) *Pour tout $\boldsymbol{X} \in \mathcal{C}$, l'application $\boldsymbol{U} \mapsto \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})$, où $\boldsymbol{U}$ parcours l'ensemble des $\boldsymbol{S}$-espaces annelés induits sur les ouverts de $\boldsymbol{X}$, est un faisceau d'ensembles.*
c) *Pour tout $\boldsymbol{Z} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et tout morphisme $\mathrm{Mor}(_, \boldsymbol{Z}) \to \boldsymbol{F}$, si $\boldsymbol{Z}_i$ représente $\boldsymbol{F}_i \times_{\boldsymbol{F}} \mathrm{Mor}(_, \boldsymbol{Z})$ et si $\boldsymbol{U}_i$ est l'image de $\boldsymbol{Z}_i$ dans $\boldsymbol{Z}$, alors les $\boldsymbol{U}_i$ forment un recouvrement de $\boldsymbol{Z}$.*
d) *Chaque $\boldsymbol{F}_i$ est représentable par un objet $\boldsymbol{X}_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$*

Dans ces conditions, $\boldsymbol{F}$ est représentable par un objet $\boldsymbol{X}$ de $\mathcal{C}$, les morphismes $\boldsymbol{X}_i \to \boldsymbol{X}$ sont des immersions ouvertes et les images des espaces sous-jacents aux $\boldsymbol{X}_i$ forment un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$.

§ 2. Produits fibrés de schémas †-adiques affines

Les principaux résultats de cette section sont les propositions 2.4.5 et 2.4.10. On y montre d'une part que les schémas †-adiques introduits dans [M] sont des espaces *localement* annelés et d'autre part que le foncteur qui associe à une algèbre faiblement complète de type fini son schéma †-adique affine est un foncteur *pleinement fidèle* dans la catégorie des espaces localement annelés. Deux résultats inspirés par leurs analogues en théorie des schémas.

2.1 Le foncteur de complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible

On note $(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ la donnée d'un anneau commutatif $\boldsymbol{R}$ (non nécessairement nœthérien) et d'un idéal $\boldsymbol{I}\subseteq\boldsymbol{R}$. Dans [MW], Monsky et Washnitzer associent à une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ une certaine sous-algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ du complété séparé $\boldsymbol{I}$-adique $\widehat{\boldsymbol{A}}$ qu'ils appellent la « *complétion faible de* $\boldsymbol{A}$ ». Plus précisément $\boldsymbol{A}^\dagger$ est l'ensemble des éléments z de $\widehat{\boldsymbol{A}}$ tels qu'il existe un ensemble fini $\{a_1,\dots,a_r\}\subseteq\boldsymbol{A}$ et une famille de polynômes $p_n\in\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_r]$ vérifiant $\deg(p_n)=O(n)$ et tels que $z=\sum_{n\geqslant 0}p_n(a_1,\dots,a_r)$. Le morphisme canonique de $\boldsymbol{A}$ vers $\widehat{\boldsymbol{A}}$ se factorise à travers $\boldsymbol{A}^\dagger$ en un morphisme noté $\iota(\boldsymbol{A}):\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}^\dagger$. Les propriétés suivantes sont élémentaires :

- *Si $\boldsymbol{I}$ est nilpotent dans $\boldsymbol{A}$, on a $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^\dagger$.*
- *Pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha:\boldsymbol{A}_1\to\boldsymbol{A}_2$, il existe un et un seul morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha^\dagger:\boldsymbol{A}_1^\dagger\to\boldsymbol{A}_2^\dagger$ tel que $\alpha^\dagger\circ\iota(\boldsymbol{A}_1)=\iota(\boldsymbol{A}_2)\circ\alpha$.*

La correspondance ainsi définie $\boldsymbol{A}\rightsquigarrow\boldsymbol{A}^\dagger$, $\alpha\rightsquigarrow\alpha^\dagger$ est fonctorielle et $\iota(_):(_)\to(_)^\dagger$ est un morphisme de foncteurs. Une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est dite « *faiblement complète (pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique)* », f.c. en bref, lorsque $\iota(\boldsymbol{A})$ est bijectif, on écrit alors $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^\dagger$. On a $\boldsymbol{A}^\dagger=\boldsymbol{A}^{\dagger\dagger}$, pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ ([MW]).

Une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c. est dite « *faiblement complète de type fini* », f.c.t.f. en bref, si elle est l'image homomorphique de $\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m]^\dagger$ pour un certain $m\in\mathbb{N}$.

Notation. Dans la suite une notation de la forme $(_)^\dagger$ rappellera que l'objet ainsi noté est faiblement complet pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique.

2.2 Catégories $\mathbf{Alg_{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et $\mathbf{Alg_{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$

On notera $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (resp. $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$ dont les objets sont les algèbres f.c. (resp. f.c.t.f.). La proposition suivante est une reformulation de plusieurs résultats de [MW].

2.2.1. Proposition

a) *Le foncteur $(_)^\dagger:\mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})\to\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion de $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ dans $\mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$. Autrement dit, le morphisme fonctoriel :*

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}^\dagger}(\boldsymbol{A}^\dagger,\boldsymbol{B}^\dagger) & \longrightarrow & \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{B}^\dagger)\\ \alpha & \longmapsto & \alpha\circ\iota(\boldsymbol{A})\end{array}$$

est bijectif pour tous $\boldsymbol{A}\in\mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$ et $\boldsymbol{B}^\dagger\in\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

b) *Soit* $\mathcal{C}$ *l'une des catégories* $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *où* $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. *Pour tous* $\boldsymbol{B}^\dagger, \boldsymbol{A}_1^\dagger, \boldsymbol{A}_2^\dagger \in \mathcal{C}$ *et pour tous morphismes de* $\boldsymbol{R}$*-algèbres* $\alpha_i : \boldsymbol{B}^\dagger \to \boldsymbol{A}_i^\dagger$, *munissons les algèbres* $\boldsymbol{A}_i^\dagger$ *des structures de* $\boldsymbol{B}^\dagger$*-algèbres définies par les* α_i. *Alors, le foncteur covariant*

$$\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{B}^\dagger}(\boldsymbol{A}_1^\dagger, _) \times \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{B}^\dagger}(\boldsymbol{A}_2^\dagger, _) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$$

est représentable par $(\boldsymbol{A}_1^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}^\dagger} \boldsymbol{A}_2^\dagger)^\dagger$ *et par les morphismes* $\eta_i : \boldsymbol{A}_i^\dagger \to (\boldsymbol{A}_1^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}^\dagger} \boldsymbol{A}_2^\dagger)^\dagger$, *déterminés par les égalités* $\eta_1(a_1) = a_1 \otimes 1$ *et* $\eta_2(a_2) = 1 \otimes a_2$.

2.3 Quelques propriétés des algèbres faiblement complètes

2.3.1. Proposition ([MW]). *L'idéal* $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$ *est contenu dans le radical de* $\boldsymbol{A}^\dagger$.

Preuve. En effet, un élément $z \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$ admet une écriture de la forme $z = h_1a_1 + \cdots + h_\ell a_\ell$ avec $h_i \in \boldsymbol{I}$ et $a_i \in \boldsymbol{A}^\dagger$ et la série $\sum_{m\geqslant 0} z^m = \sum_{m\geqslant 0}(h_1a_1 + \cdots + h_\ell a_\ell)^m$ définit bien un élément $\boldsymbol{A}^\dagger$. Par conséquent, $1 - z$ est inversible dans $\boldsymbol{A}^\dagger$. L'idéal $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$ est bien contenu dans tout idéal maximal de $\boldsymbol{A}^\dagger$ donc dans son radical. ∎

2.3.2. Lemme. *Soit* $(\mathfrak{A}, \preccurlyeq)$ *un ensemble muni d'un ordre partiel filtrant supérieurement. Soit* $\{\varphi_\beta^\alpha : \boldsymbol{A}_\alpha^\dagger \to \boldsymbol{A}_\beta^\dagger \mid \alpha \preccurlyeq \beta \in \mathfrak{A}\}$ *un système inductif dans* $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *de limite* $\boldsymbol{A}_\infty := \varinjlim_{\mathfrak{A}} \boldsymbol{A}_\alpha^\dagger$. *Alors, l'idéal* $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}_\infty$ *est contenu dans le radical de* $\boldsymbol{A}_\infty$.

Preuve. Un élément $x \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}_\infty$ s'exprime comme somme **finie** $x = \sum_i h_i a_i$ avec $h_i \in \boldsymbol{I}$ et $a_i \in \varinjlim_\alpha \boldsymbol{A}_\alpha$. Comme la limite est filtrante, il existe α assez grand tel que les a_i proviennent tous des $a_{\alpha,i} \in \boldsymbol{A}_\alpha^\dagger$; mais $1 + \sum h_i a_{\alpha,i}$ est inversible dans $\boldsymbol{A}_\alpha^\dagger$ (2.3.1) et alors $1 + x$ est inversible dans $\boldsymbol{A}_\infty$. ∎

2.4 Schémas †-adiques affines

Notation. Pour $\boldsymbol{A} \in \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$ on notera $\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}$ et $\nu : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ la surjection canonique. Pour $\boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ on notera aussi $\overline{\boldsymbol{A}} := \overline{\boldsymbol{A}^\dagger}$ et donc $\nu : \boldsymbol{A}^\dagger \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ la surjection canonique.

2.4.1. Le foncteur $(_)^\sim$. Étant donnés $f, g \in \boldsymbol{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ tels que $f = g \bmod \boldsymbol{I}$, l'élément f est inversible dans $\boldsymbol{B}^\dagger$ si et seulement si g l'est. De cette observation élémentaire il suit que si $f, g \in \boldsymbol{A}^\dagger$ sont tels que $\nu(f) = \nu(g)$ alors $((\boldsymbol{A}^\dagger)_f)^\dagger = ((\boldsymbol{A}^\dagger)_g)^\dagger$, l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]} := ((\boldsymbol{A}^\dagger)_f)^\dagger$ ne dépend donc que de $\nu(f) \in \overline{\boldsymbol{A}^\dagger}$. On notera $\gamma_{[f]} : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$ la composée du morphisme de localisation $\boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{A}_f^\dagger$ suivi de $\iota(\boldsymbol{A}_f^\dagger) : \boldsymbol{A}_f^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$. La correspondance

$$D(\overline{f}) \rightsquigarrow \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}, \qquad \big(D(g) \supseteq D(fg)\big) \rightsquigarrow \big(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[g]} \xrightarrow{\gamma_{[f]}} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[fg]}\big)$$

définit un préfaisceau sur la catégorie des ouverts principaux de $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$. Le faisceau $\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}^\dagger$ est, par définition, le faisceau sur $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$ associé à ce préfaisceau. Le couple $(\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim := \big(\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}^\dagger}); \mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}^\dagger\big)$ est un espace topologique annelé.

Soient $\boldsymbol{A}^\dagger, \boldsymbol{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et $\alpha : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres. Pour chaque $f \in \boldsymbol{A}^\dagger$ il existe un et un seul morphisme $\alpha_{[f]} : \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]} \to \boldsymbol{B}^\dagger{}_{[\alpha(f)]}$, « *la localisation †-adique*

de α *en* f », rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}^\dagger & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \boldsymbol{B}^\dagger \\ {\scriptstyle\gamma_{[f]}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_{[\alpha(f)]}} \\ \boldsymbol{A}^\dagger_{[f]} & \xrightarrow{\ \alpha_{[f]}\ } & \boldsymbol{B}^\dagger_{[\alpha(f)]} \end{array}$$

On en déduit, comme dans la théorie des schémas classique, un morphisme canonique d'espaces annelés $(\alpha)^\sim : (\boldsymbol{B}^\dagger)^\sim \to (\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim$.

La correspondance $(_)^\sim : \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Esp\text{-}ann}\,/_{(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim}$, $\boldsymbol{A}^\dagger \rightsquigarrow (\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim$, $\alpha \rightsquigarrow (\alpha)^\sim$, est fonctorielle et contravariante de $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ vers la catégorie $\mathbf{Esp\text{-}ann}\,/_{(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim}$ des espaces annelés au-dessus de $(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim$.

2.4.2. Lorsque $\boldsymbol{I}$ est un idéal de type fini de générateurs $\{x_1,\dots,x_\ell\}$, un polynôme $p \in \boldsymbol{I}^m[X_1,\dots,X_m]$ avec $m>0$, s'écrit aussi $p=\sum_{i=1}^{\ell} x_i p_i$ avec $p_i \in \boldsymbol{I}^{m-1}[X_1,\dots,X_m]$. Il s'ensuit que si $\boldsymbol{A} \in \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$, l'idéal $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$ est celui des éléments de $\boldsymbol{A}^\dagger$ qui s'expriment sous la forme $\sum_{m>1} p_m(a_1,\dots,a_\ell)$ avec $p_m \in \boldsymbol{I}^m[X_1,\dots,X_\ell]$. Le lemme suivant découle aussitôt de cette remarque.

2.4.3. Lemme. *Supposons l'idéal* $\boldsymbol{I}$ *de type fini et soit* $\boldsymbol{A} \in \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$.
a) *Le morphisme canonique* $\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}} \to \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$ *est bijectif pour tout* $f \in \boldsymbol{A}$.
b) *Si chaque* $x \in \boldsymbol{I}$ *est nilpotent dans* $\boldsymbol{A}$, *l'espace* $(\boldsymbol{A})^\sim$ *est le schéma affine associé à* $\boldsymbol{A}$.
c) *Soit* $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$. *La réduction modulo* $\boldsymbol{I}$ *de l'algèbre* $\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger,\mathfrak{P}}$, *fibre de* $\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}$ *en* $\mathfrak{P}$, *est l'anneau local* $\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathfrak{P}}$. *Le morphisme naturel* $\nu_{\mathfrak{P}} : \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger,\mathfrak{P}} \to \mathscr{O}^\dagger_{\overline{\boldsymbol{A}},\mathfrak{P}}$ *est surjectif et c'est un isomorphisme modulo* $\boldsymbol{I}$, i.e. *c'est relèvement.*

2.4.4. Espaces localement annelés. ([EGA$_1$]) Un espace topologique annelé est un couple $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ formé d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ et d'un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ sur $\boldsymbol{X}$. Un morphisme de $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ vers $(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}})$ est un couple $(\alpha,\alpha^\#)$ où $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est une application continue et $\alpha^\# : \mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux. Ces données constituent la « *catégorie d'espaces annelés* », notée **Esp-ann**.

Un espace annelé $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ est dit « *localement annelé* » lorsque les fibres $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X},x}$ de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ sont des anneaux locaux. La catégorie **Loc-ann** des espaces localement annelés est la sous-catégorie de **Esp-ann** dont les objets sont les espaces localement annelés et les morphismes sont les morphismes d'espaces annelés $(\alpha,\alpha^\#) : (\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \to (\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}})$ tels que les applications induites $\alpha^\#_x : \mathscr{O}_{\boldsymbol{Y},\alpha(x)} \to \mathscr{O}_{\boldsymbol{X},x}$ sont des homomorphismes locaux d'anneaux locaux (on appelle ainsi tout homomorphisme entre deux anneaux locaux $\eta : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ tel que l'image inverse par η de l'idéal maximal de $\boldsymbol{B}$ est l'idéal maximal de $\boldsymbol{A}$).

2.4.5. Proposition. *On suppose* $\boldsymbol{I}$ *de type fini. Soient* $\boldsymbol{A}^\dagger, \boldsymbol{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.
a) *L'espace annelé* $(\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim = \big(\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}});\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big)$ *est* localement annelé.
b) *Pour tout morphisme de* $\boldsymbol{R}$*-algèbres* $\eta : \boldsymbol{B}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger$, *le morphisme* $(\eta)^\sim : (\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim \to (\boldsymbol{B}^\dagger)^\sim$ *est un morphisme d'espaces localement annelés. Autrement dit, le foncteur* $(_)^\sim$ (cf. 2.4.1) *est à valeurs dans catégorie* $\big(\mathbf{Loc\text{-}ann}\,/_{(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim}\big)$, *soit*

$$(_)^\sim : \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Loc\text{-}ann}\,/_{(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim}.$$

Preuve

a) En effet, pour $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$ on a $\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^{\dagger},\mathfrak{P}} = \varinjlim_{\overline{f}} \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f]}$, où $\overline{f}$ appartient au système multiplicatif $\overline{\boldsymbol{A}} \smallsetminus \mathfrak{P}$. Pour chaque $\overline{f} \notin \mathfrak{P}$, l'idéal engendré par $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f]}$ est contenu dans le radical de $\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f]}$ (2.3.1) et comme cette propriété est préservée par passage à la limite inductive (2.3.2), l'algèbre $\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^{\dagger},\mathfrak{P}}$ la vérifie aussi. L'anneau $\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^{\dagger},\mathfrak{P}}$ est alors local si et seulement si sa réduction modulo $\boldsymbol{I}$ l'est, ce qui est bien le cas (2.4.3-c).

b) Pour $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$ considérons le diagramme d'anneaux locaux :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{B}^{\dagger},\eta^{-1}\mathfrak{P}} & \xrightarrow{\eta^{\#}_{\mathfrak{P}}} & \mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^{\dagger},\mathfrak{P}} \\ {\scriptstyle \nu_{\eta^{-1}\mathfrak{P}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{\mathfrak{P}}} \\ \overline{\boldsymbol{B}}_{\eta^{-1}\mathfrak{P}} & \xrightarrow{\overline{\eta}^{\#}_{\mathfrak{P}}} & \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathfrak{P}} \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont ceux du lemme 2.4.3-c ; ils sons donc *locaux*, de même aussi, mais pour des raisons évidentes, que le morphisme $\overline{\eta}^{\#}_{\mathfrak{P}}$. On conclut alors sans difficulté que $\eta^{\#}_{\mathfrak{P}}$ est lui aussi local. ∎

2.4.6. Notation et remarque. Pour tout espace annelé $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ au-dessus de $(\boldsymbol{R})^{\sim}$ on notera $\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}$ le faisceau d'algèbres engendré par le préfaisceau $\boldsymbol{U} \rightsquigarrow \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}})/\boldsymbol{I}\cdot\Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}})$. Notons $\nu : \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}} \twoheadrightarrow \overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}$ la surjection canonique.

Pour $\boldsymbol{A}^{\dagger} \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ de réduction $\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{A}^{\dagger}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{\dagger}$, soit $(\alpha,\alpha^{\#}) : (\overline{\boldsymbol{A}})^{\sim} \to (\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\sim}$ le morphisme d'espaces annelés associé à la surjection canonique $\boldsymbol{A}^{\dagger} \to \overline{\boldsymbol{A}}$. On a $\alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})}$ et $\alpha^{\#} : \mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}} \to \mathscr{O}^{\dagger}_{\overline{\boldsymbol{A}}}$ se factorise à travers $\nu : \mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}} \twoheadrightarrow \overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}}$ en un isomorphisme de $\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}}$ sur $\mathscr{O}^{\dagger}_{\overline{\boldsymbol{A}}}$.

2.4.7. Schémas †-adiques affines. On appelle « *schéma †-adique affine* » tout espace annelé isomorphe à un espace de la forme $(\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\sim}$. La sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{/(\boldsymbol{R}^{\dagger})^{\sim}}$ dont les objets sont des schémas †-adiques affines est la « *catégorie des schémas †-adiques affines* » ; elle sera notée $\mathbf{Aff}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

Lorsque $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ est f.c.t.f. le schéma †-adique affine $(\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\sim}$ est dit « *de type fini* ». La sous-catégorie pleine des objets de type fini de $\mathbf{Aff}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ est la « *catégorie des schémas †-adiques affines de type fini* » ; elle sera notée $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$

2.4.8. Le cas nœthérien. Ce qui précède est vrai pour tout anneau commutatif $\boldsymbol{R}$ et tout idéal $\boldsymbol{I}$ de type fini, mais sans hypothèse de finitude supplémentaire il ne semble pas possible d'aller très loin. L'hypothèse de nœthérianité sur $\boldsymbol{R}$ et de finitude sur les algèbres intervient de manière essentielle dans la démonstration de théorèmes importants, très particulièrement celui de Meredith que nous utiliserons souvent dans la suite :

2.4.9. Théorème [M]. *Soient $\boldsymbol{R}$ nœthérien et $\boldsymbol{A}^{\dagger} \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. Alors, pour tout $f \in \boldsymbol{A}^{\dagger}$ le morphisme naturel $\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f]} \to \Gamma\big(D(f);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}\big)$ est **bijectif**.*

2.4.10. Voici maintenant le principal résultat de cette section :

Théorème. *On suppose $\boldsymbol{R}$ nœthérien.*

a) *Le foncteur $(_)^{\sim} : \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ est une équivalence de catégories.*

b) *La catégorie $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ possède des produits fibrés.*

Preuve

a) Notons $\Gamma : \mathbf{Esp\text{-}ann}_{/(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim} \rightsquigarrow \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$ le foncteur qui fait correspondre à un espace annelé $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ l'algèbre $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ et a un morphisme $(\alpha,\alpha^\#) : (\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \to (\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}})$ le morphisme $\Gamma(\boldsymbol{Y},\alpha^\#) : \Gamma(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}}) \to \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$. Le morphisme naturel de foncteurs $(_) \to \Gamma \circ (_)^\sim$ est alors l'identité sur $\mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (2.4.9, [M]) ce qui prouve la *fidélité* du foncteur $(_)^\sim$.

Soit maintenant $(\alpha,\alpha^\#) : (\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim \to (\boldsymbol{B}^\dagger)^\sim$ un morphisme d'espaces *localement* annelés au-dessus de $(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim$. Le morphisme $\alpha^\# : \mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ est donc un morphismes de faisceaux de $\boldsymbol{R}$-algèbres ce qui nous permet les raisonnements par réduction modulo $\boldsymbol{I}$ suivants :

R-i) Pour chaque $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{B}^\dagger,\alpha(\mathfrak{P})} & \xrightarrow{\alpha^\#_{\mathfrak{P}}} & \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger,\mathfrak{P}} \\ {\scriptstyle \nu(\alpha(\mathfrak{P}))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu(\mathfrak{P})} \\ \mathscr{O}^\dagger_{\overline{\boldsymbol{B}},\alpha(\mathfrak{P})} & \xrightarrow{\overline{\alpha}^\#_{\mathfrak{P}}} & \mathscr{O}^\dagger_{\overline{\boldsymbol{A}},\mathfrak{P}} \end{array}$$

où $\nu(*)$ est local et surjectif (2.4.3-c) et $\alpha^\#_{\mathfrak{P}}$ est local par hypothèse. On en déduit que $\overline{\alpha}^\#_{\mathfrak{P}}$ est local.

R-ii) Le morphisme $\alpha^\#$ induit un morphisme de faisceaux $\overline{\alpha}^\# : \overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{Y}} \to \alpha_*\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}$ (2.4.6) et donc un morphisme d'espaces annelés $(\alpha,\overline{\alpha}^\#) : (\overline{\boldsymbol{A}})^\sim \to (\overline{\boldsymbol{B}})^\sim$ qui est, d'après (R-i), un morphisme d'espaces localement annelés entre deux schémas affines (2.4.3-b). On a donc $(\alpha,\overline{\alpha}^\#) = (\overline{\eta})^\sim$ où $\overline{\eta} := \Gamma(\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}});\overline{\alpha}^\#) : \overline{\boldsymbol{B}} \to \overline{\boldsymbol{A}}$ n'est autre que la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de l'homomorphisme $\eta := \Gamma(\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}});\alpha^\#) : \boldsymbol{B}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger$. On en déduit que :

$$\alpha = \eta^{-1}, \quad \text{et alors} \quad \alpha^{-1}\big(D(f)\big) = D\big(\eta(f)\big), \text{ pour tout } f \in \boldsymbol{B}^\dagger. \qquad (\diamond)$$

Cela étant, le morphisme $\alpha^\# : \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{B}^\dagger} \to \alpha_*\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}$ donne, pour chaque $f \in \boldsymbol{B}^\dagger$, le diagramme commutatif suivant où les flèches verticales sont les applications canoniques.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \overset{\eta=\Gamma(D(1);\alpha^\#)}{\longrightarrow} & & \\ \boldsymbol{B}^\dagger & \underset{\mathrm{M}}{=} \Gamma\big(D(1);\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{B}^\dagger}\big) & \xrightarrow{\Gamma(D(1);\alpha^\#)} & \Gamma\big(D(1);\alpha_*\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big) & \underset{\diamond}{=} \Gamma\big(D(\eta(1));\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big) & \underset{\mathrm{M}}{=} & \boldsymbol{A}^\dagger \\ {\scriptstyle \gamma_{[f]}}\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{[\eta(f)]}} \\ \boldsymbol{B}^\dagger{}_{[f]} & \underset{\mathrm{M}}{=} \Gamma\big(D(f);\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{B}^\dagger}\big) & \xrightarrow{\Gamma(D(f);\alpha^\#)} & \Gamma\big(D(f);\alpha_*\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big) & \underset{\diamond}{=} \Gamma\big(D(\eta(f));\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big) & \underset{\mathrm{M}}{=} & \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[\eta(f)]} \end{array} \qquad (\mathscr{D})$$

les égalités $(=_{\mathrm{M}})$ résultent d'appliquer 2.4.9 et $(=_\diamond)$ de $(\diamond)$. Or, la localisation †-adique de η en f, *i.e.* l'application $\eta_{[f]} : \boldsymbol{B}^\dagger{}_{[f]} \to \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[\eta(f)]}$ (*cf.* 2.4.1) est bien **l'unique** morphisme rendant $(\mathscr{D})$ commutatif, par conséquent $\Gamma(D(f);\alpha^\#) = \eta_{[f]}$ et on a bien :

$$(\alpha,\alpha^\#) = \big(\Gamma(\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}});\alpha^\#)\big)^\sim.$$

Nous avons ainsi prouvé que le foncteur $(_)^\sim : \mathbf{Alg}_{\text{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Loc\text{-}ann}_{/(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim}$ est plei-

nement fidèle, c'est donc une équivalence sur son image essentielle, *i.e.* sur $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.
b) Conséquence immédiate de (a) et de 2.2.1-(b). ∎

Convention. Compte tenu de l'importance des théorèmes de cette section, l'anneau $\boldsymbol{R}$ sera dorénavant supposé **nœthérien**.

2.5 Catégorie des schémas †-adiques

2.5.1. Schémas †-adiques. La « *catégorie des schémas †-adiques (localement de type fini)* », notée $\mathbf{Sch}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (resp. $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$), est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{/(\boldsymbol{R})^{\sim}}$ des espaces annelés tels que chaque point admet un voisinage ouvert isomorphe à un objet de $\mathbf{Aff}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ ($\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$).

2.5.2. Réduction d'un schéma †-adique. Pour tout schéma †-adique localement de type fini $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$, l'espace annelé $(\boldsymbol{X};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})$ est un schéma localement de type fini (2.4.3-b) sur $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{R}})$, il sera appelé « *la réduction (modulo $\boldsymbol{I}$) de* $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ »

2.5.3. Terminologie. Un schéma †-adique $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ sera dit « *de réduction affine (de type fini), séparée, …* » s'il en est ainsi du schéma $(\boldsymbol{X};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})$.

§3. Produits fibrés de schémas †-adiques

On rappelle que l'anneau $\boldsymbol{R}$ est désormais supposé **nœthérien**.

Le principal résultat de cette section est le théorème 3.2.4 qui établit l'existence des produits fibrés dans la catégorie des schémas †-adiques localement de type fini. Dans la preuve, le critère de représentabilité de foncteurs 1.9.1 ([1]) nous mène à monter que les produits fibrés de la catégorie $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ sont aussi des produits fibrés de $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. Ceci est établi dans 3.2.3-b moyennant un nouveau critère d'affinité de schémas †-adiques de réduction affine qui, à la différence des critères précédemment connus, est indépendant des hypothèses de lissité.

3.1 Un complément sur l'affinité des schémas †-adiques de réduction affine

Cette section reprend l'étude commencée dans [Ar_3] à propos de l'affinité des schémas †-adiques de réduction affine.

3.1.1. Proposition. *Soit* $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \in \mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.
a) *L'algèbre* $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ *est séparée.*
b) *Si* $\boldsymbol{X}$ *est quasi-compact, l'algèbre* $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ *est aussi faiblement complète.*

[1] [EGA_1], chap 0, prop. §4.5.4.

Preuve

a) Soit $\mathscr{U} = \{\boldsymbol{U}_i\}_{i\in\mathfrak{A}}$ un recouvrement de $\boldsymbol{X}$ avec $\boldsymbol{U}_i \in \mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. On a la suite exacte :

$$\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow{\epsilon(\mathscr{U})} \prod_{i\in\mathfrak{A}} \Gamma(\boldsymbol{U}_i;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow{\delta_0(\mathscr{U})} \prod_{i,j\in\mathfrak{A}} \Gamma(\boldsymbol{U}_{i,j};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \qquad (\diamond)$$

avec $\Gamma(\boldsymbol{U}_i;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. L'algèbre $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ se réalise ici comme sous-algèbre d'un produit d'algèbres séparées ; elle est donc séparée.

b) Lorsque $\boldsymbol{X}$ est quasi-compact, le recouvrement $\mathscr{U}$ dans $(\diamond)$ peut être choisi *fini* auquel cas l'application $\delta_0(\mathscr{U})$ est continue entre un espace faiblement complet, car somme finie d'espaces f.c., et un espace séparé (d'après (a)), son noyau est alors faiblement complet. ∎

3.1.2. J'ignore si dans (b) l'algèbre $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ est faiblement complète **de type fini**.

3.1.3. Un critère d'affinité. On généralise maintenant la proposition 3.2.16 de [Ar$_2$] en l'affranchissant de toute considération de lissité, cela donne :

Proposition. *Soient $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \in \mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ un ouvert de réduction affine. L'espace annelé induit $(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}|_{\boldsymbol{U}})$ est un schéma †-adique affine de type fini.*

Pour le prouver on utilisera le théorème 2.5.5 de [Ar$_3$], corollaire du principal résultat de ce papier, dont on rappelle l'énoncé sans démonstration :

3.1.4. Théorème [Ar$_3$]. *Pour tout $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \in \mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ de réduction **affine**, le morphisme naturel $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \to \Gamma(\boldsymbol{X};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})$ est **surjectif**.*

Démonstration du critère 3.1.3. Dans la suite, si $\boldsymbol{A}$ est un anneau et si $\boldsymbol{B}$ est une $\boldsymbol{A}$-algèbre, on notera de la même manière un élément $a \in \boldsymbol{A}$ et l'élément $a\cdot\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \in \boldsymbol{B}$.

Posons $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\sim}$.

Soit $\mathscr{U} = \{D(f_1),\dots,D(f_\ell)\}$ un recouvrement de $\boldsymbol{U}$ par des ouverts principaux de $\boldsymbol{X}$ et considérons les premiers termes des complexes de Čech relatifs à $\mathscr{U}$ appliqués au morphisme naturel des faisceaux $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}} \to \overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}$. On a le diagramme commutatif de $\boldsymbol{A}^{\dagger}$-modules :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\epsilon(\mathscr{O})} & \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0(\mathscr{O})} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \ell} \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_if_j]} \\
\downarrow{\scriptstyle \nu(\boldsymbol{U})} & & \downarrow{\scriptstyle \Pi\nu_{f_i}} & & \downarrow{\scriptstyle \Pi\nu_{f_if_j}} \\
\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{U};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\epsilon(\overline{\mathscr{O}})} & \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \overline{\boldsymbol{A}}_{f_i} & \xrightarrow{\delta_0(\overline{\mathscr{O}})} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \ell} \overline{\boldsymbol{A}}_{f_if_j}
\end{array} \qquad (\mathscr{C})$$

où $\overline{\boldsymbol{A}}_{f_i} := \overline{\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_i]}} = \overline{\boldsymbol{A}}^{\dagger}{}_{f_i}$, où les morphismes ν_{f_i} et $\nu_{f_if_j}$ sont bijectifs modulo $\boldsymbol{I}$ et où les lignes sont exactes à gauche.

Grâce à la surjectivité de $\nu(\boldsymbol{U}) : \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \twoheadrightarrow \Gamma(\boldsymbol{U};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})$ (3.1.4) on peux fixer des éléments $a_i \in \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ tels que $\xi := \sum_i a_i f_i$ est inversible dans $\Gamma(\boldsymbol{U};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})$. Montrons que ξ est aussi inversible dans $\Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$. En effet, comme ξ est inversible dans $\Gamma(\boldsymbol{U};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})$, il l'est aussi dans $\overline{\boldsymbol{A}}_{f_i}$ et $\overline{\boldsymbol{A}}_{f_if_j}$, mais alors aussi dans $\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_i]}$ et $\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_{ij}]}$ puisque les morphismes ν_{f_i} et $\nu_{f_if_j}$ sont des relèvements ([M] th. 2.8, p. 5, et [MW] th. 1.6). Notons ξ^{-1}_*

l'inverse de ξ dans $\boldsymbol{A}^\dagger_*$. La famille $\{\xi^{-1}_{[f_i]}\}$ vérifie automatiquement les conditions de recollement et définit par conséquent un élément $\xi^{-1} \in \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$, inverse multiplicatif de ξ dans $\Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$.

La $\boldsymbol{R}$-algèbre $\Gamma(\boldsymbol{U};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})$ est de type fini d'après un résultat classique de géométrie algébrique. Fixons une $\boldsymbol{A}^\dagger$-sous-algèbre $\boldsymbol{C}^\dagger \subseteq \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})^\dagger = \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ (*cf.* 3.1.1) vérifiant :

$$\nu(\boldsymbol{U})(\boldsymbol{C}^\dagger) = \Gamma(\boldsymbol{U};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}), \quad \boldsymbol{C}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I}), \quad \{a_1,\dots,a_\ell,\xi^{-1}\} \subseteq \boldsymbol{C}^\dagger.$$

On a alors $(f_1,\dots,f_\ell) = \boldsymbol{C}^\dagger$ et les premiers termes du complexe de Čech de $(\boldsymbol{C}^\dagger)^\sim$ relatif au recouvrement principal de $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}^\dagger})$ définit par les f_i :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{C}^\dagger \xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{C})} \textstyle\prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \boldsymbol{C}^\dagger{}_{[f_i]} \xrightarrow{\delta_0(\boldsymbol{C})} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \ell} \boldsymbol{C}^\dagger{}_{[f_if_j]} \ ,$$

suite exacte à gauche de $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules ([M] th. 2.8, p. 5).

Soit $g \in \boldsymbol{A}^\dagger$. Notons $\rho_{[g]} : \boldsymbol{C}^\dagger_{[g]} \to \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[g]}$ le morphisme induit par la composée de l'inclusion $\boldsymbol{C}^\dagger \subseteq \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ suivie de la restriction $\Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \to \Gamma(D(g);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[g]}$ Notons $\sigma_{[g]} : \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[g]} \to \boldsymbol{C}^\dagger{}_{[g]}$ le morphisme induit par le morphisme structural $\sigma : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{C}^\dagger$. On a $\rho_{[g]} \circ \sigma_{[g]} = \mathrm{id}$, autrement dit $\sigma_{[g]}$ est une section de $\rho_{[g]}$:

$$\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[g]} \xhookrightarrow{\sigma_{[g]}} \boldsymbol{C}^\dagger{}_{[g]} \xrightarrow{\rho_{[g]}} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[g]}, \qquad \mathrm{id}$$

On obtient ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{U})} & \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0(\boldsymbol{U})} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \ell} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]} \\
\uparrow \subseteq & & \uparrow\!\!\uparrow \Pi\rho_{[f_i]} & & \uparrow\!\!\uparrow \Pi\rho_{[f_if_j]} \\
\mathbf{0} \to \quad \boldsymbol{C}^\dagger & \xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{C})} & \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \boldsymbol{C}^\dagger{}_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0(\boldsymbol{C})} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \ell} \boldsymbol{C}^\dagger{}_{[f_if_j]} \\
 & & \uparrow \Pi\sigma_{[f_i]} & & \uparrow \Pi\sigma_{[f_if_j]} \\
 & & \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0(\boldsymbol{U})} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \ell} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}
\end{array} \qquad (\mathscr{E})$$

dont on déduit l'égalité $\boldsymbol{C}^\dagger = \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ et

$$\boxed{\boldsymbol{\Gamma(U;\mathscr{O}_X)\ \text{est f.c.t.f.}}}$$

Le diagramme $(\mathscr{E})$ donne, par restriction de sa dernière colonne, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{U})} & \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0(\boldsymbol{U})} & \mathrm{im}(\delta_0(\boldsymbol{U})) \to \mathbf{0} \\
|| & & \uparrow\!\!\uparrow \Pi\rho_{[f_i]} & & \uparrow\!\!\uparrow \Pi\rho_{[f_if_j]} \\
\mathbf{0} \to \quad \boldsymbol{C}^\dagger & \xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{C})} & \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \boldsymbol{C}^\dagger{}_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0(\boldsymbol{C})} & \mathrm{im}(\delta_0(\boldsymbol{C})) \to \mathbf{0} \\
 & & \uparrow \Pi\sigma_{[f_i]} & & \uparrow \Pi\sigma_{[f_if_j]} \\
 & & \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0(\boldsymbol{U})} & \mathrm{im}(\delta_0(\boldsymbol{U})) \to \mathbf{0}
\end{array} \qquad (\mathscr{E}')$$

où les deux premières lignes sont exactes.

Appliquons le foncteur $\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},_)$ à $(\mathscr{E}')$. Alors :
- $\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\rho_{[*]})$ est surjective, car $\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\rho_{[*]})\circ\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\sigma_{[*]})=\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\mathrm{id})=\mathrm{id}$.
- $\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\delta_0(\boldsymbol{C}))$ est surjective, car $\overline{\epsilon(\boldsymbol{C})}:\overline{\boldsymbol{C}^\dagger}\to\prod_i\overline{\boldsymbol{C}_{f_i}}$ est injective.
- $\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\delta_0(\boldsymbol{U}))$ est surjective, car $\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\Pi\rho_{f_if_j})\circ\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\delta_0(\boldsymbol{C}))$ l'est.

On en déduit que l'application $\overline{\epsilon(\boldsymbol{U})}:\overline{\Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})}\to\prod_i\overline{\boldsymbol{A}}_{f_i}$ est *injective*, et comme elle se factorise à travers $\epsilon(\overline{\mathscr{O}}):\Gamma(\boldsymbol{U};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})\to\prod_i\overline{\boldsymbol{A}}_i$ (*cf.* $(\mathscr{C})$), l'égalité $\overline{\Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})}=\Gamma(\boldsymbol{U};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})$ résulte ; autrement dit,

$$\boxed{\boldsymbol{\Gamma(U;\mathscr{O}_X)\text{ est un relèvement f.c.t.f. de }\Gamma(U;\overline{\mathscr{O}}_X)}}$$

Il s'ensuit que les morphismes $\sigma_{[*]}$ sont tous **bijectifs** et alors $(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}|_{\boldsymbol{U}})\simeq(\Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}))^\sim$. ∎

3.2 Isomorphismes de faisceaux sur $\mathbf{Sch}^\dagger_{\mathbf{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$

3.2.1. Faisceaux sur $\mathbf{Sch}^\dagger_{\mathbf{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. Un foncteur contravariant de $\mathbf{Sch}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ vers la catégorie **Ens** est dit «*faisceau*» si pour tout schéma †-adique $\boldsymbol{X}$ et tout recouvrement ouvert $\{\iota_\alpha:\boldsymbol{U}_\alpha\subseteq\boldsymbol{X}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, la suite

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})\xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{F})}\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_\alpha)\underset{\delta_2(\boldsymbol{F})}{\overset{\delta_1(\boldsymbol{F})}{\rightrightarrows}}\prod_{\alpha,\beta\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta})$$

avec

$$\begin{cases}\epsilon(\boldsymbol{F})(z)(\alpha)=\boldsymbol{F}(\iota_\alpha)(z)\\ \delta_1(\boldsymbol{F})(\omega)(\alpha,\beta)=\boldsymbol{F}(\iota^\alpha_{\alpha,\beta})(\omega(\alpha))\\ \delta_2(\boldsymbol{F})(\omega)(\alpha,\beta)=\boldsymbol{F}(\iota^\beta_{\alpha,\beta})(\omega(\beta))\end{cases}$$

où $\iota^\alpha_{\alpha,\beta}$ désigne l'inclusion $\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta}\subseteq\boldsymbol{U}_\alpha$, est «*exacte*», *i.e.* $\epsilon(\boldsymbol{F})$ est une bijection entre $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ et l'ensemble $\{\delta_1(\boldsymbol{F})=\delta_2(\boldsymbol{F})\}\subseteq\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_\alpha)$.

3.2.2. Proposition. *Un morphisme $\mu:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{G}$ de faisceaux d'ensembles sur $\mathbf{Sch}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ est un isomorphisme si et seulement si sa restriction à la sous-catégorie $\mathbf{Aff}^\dagger_{\mathrm{tf}}$ est un isomorphisme.*

Preuve. Soit $\boldsymbol{X}\in\mathbf{Sch}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et fixons un recouvrement $\{\boldsymbol{U}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ avec $\boldsymbol{U}_\alpha\in\mathbf{Aff}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. On a le morphisme des suites exactes :

$$\begin{array}{ccccc}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{F})} & \prod_{\alpha\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_\alpha) & \underset{\delta_2(\boldsymbol{F})}{\overset{\delta_1(\boldsymbol{F})}{\rightrightarrows}} & \prod_{\alpha,\beta\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta})\\ \downarrow{\scriptstyle\mu(\boldsymbol{X})} & & \downarrow{\scriptstyle\mu(\boldsymbol{U}_\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle\mu(\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta})}\\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{G})} & \prod_{\alpha\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}_\alpha) & \underset{\delta_2(\boldsymbol{G})}{\overset{\delta_1(\boldsymbol{G})}{\rightrightarrows}} & \prod_{\alpha,\beta\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta})\end{array}$$

et le lemme résultera de montrer que les applications $\mu(\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta})$ sont bijectives. C'est le cas lorsque $(\boldsymbol{X},\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ est de réduction séparée puisqu'alors $\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta}$ est un ouvert de réduction *affine* du schéma †-adique affine $\boldsymbol{U}_\alpha$ et donc $\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta}\in\mathbf{Aff}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ d'après 3.1.3. Et ce sera alors aussi le cas dans la situation générale car la réduction de $\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta}$ est toujours séparée étant sous-schéma (ouvert) d'un schéma affine (donc séparé). ∎

3.2.3. Théorème

a) *Pour tous* $\boldsymbol{X} \in \mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *et* $\boldsymbol{Y} \in \mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *l'application naturelle*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) & \xrightarrow{\gamma(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})} & \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}\big(\Gamma(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}}),\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})\big) \\ (f,f^{\#}) & \longmapsto & \Gamma(\boldsymbol{Y};f^{\#}:\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}}\to f_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \end{array}$$

est un isomorphisme.

b) *Les produits fibrés de* $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *sont des produits fibrés de* $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

Preuve

a) Pour $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\sim}$ fixé, le foncteur $(_) \rightsquigarrow \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^{\dagger},\Gamma(_))$ est un faisceau d'ensembles sur $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. En effet, soit $\boldsymbol{X} = \cup_{\alpha}\boldsymbol{U}_{\alpha}$ un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X} \in \mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. On a la suite exacte de d'ensembles

$$\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow{\epsilon(\Gamma)} \textstyle\prod_{\alpha}\Gamma(\boldsymbol{U}_{\alpha};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \underset{\delta_2(\Gamma)}{\overset{\delta_1(\Gamma)}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha,\beta}\Gamma(\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$$

L'application $\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^{\dagger};\epsilon(\Gamma))$ est injective puisque $\boldsymbol{U}_{\alpha}$ recouvre $\boldsymbol{X}$. Ensuite, on a

$$\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}^{\dagger};\textstyle\prod_{\alpha}\Gamma(\boldsymbol{U}_{\alpha};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})\big) = \prod_{\alpha}\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}^{\dagger};\Gamma(\boldsymbol{U}_{\alpha};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})\big)$$

et la donnée de $\vec{\eta} \in \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^{\dagger};\prod_{\alpha}\Gamma(\boldsymbol{U}_{\alpha},\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}))$ vérifiant $\delta_1(\Gamma)\circ\vec{\eta} = \delta_2(\Gamma)\circ\vec{\eta}$ équivaut à la donnée d'une famille de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\eta_{\alpha} : \boldsymbol{A}^{\dagger} \to \Gamma(\boldsymbol{U}_{\alpha};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ telle que, pour chaque $a \in \boldsymbol{A}^{\dagger}$ on ait :

$$\eta_{\alpha}(a)|_{\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta}} = \eta_{\beta}(a)|_{\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta}}.$$

Il existe alors une et une seule section globale $\eta(a) \in \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ recollant les $\eta_{\alpha}(a)$. L'application $a \mapsto \eta(a)$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres vérifiant $\epsilon(\Gamma)\circ\eta = \overrightarrow{\eta}$ ce qui termine la preuve du fait que $\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^{\dagger},\Gamma(_))$ est un faisceau sur $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

L'application $\gamma(_,\boldsymbol{Y}) : \mathrm{Mor}(_,\boldsymbol{Y}) \to \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^{\dagger},\Gamma(_))$ est par conséquent un morphisme de *faisceaux d'ensembles* sur $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$; on peut alors invoquer 3.2.2 et affirmer que c'est un isomorphisme de foncteurs puisqu'il en est ainsi de sa restriction à la sous-catégorie $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (2.4.10-(a)).

b) Étant donnés $\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{S} \in \mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et $\pi_i \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{S})$ on a les morphismes de foncteurs $\mathrm{Mor}(_,\pi_i) : \mathrm{Mor}(_,\boldsymbol{X}_i) \to \mathrm{Mor}(_,\boldsymbol{A})$ et le foncteur sur $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$:

$$(_) \rightsquigarrow \mathrm{Mor}(_,\boldsymbol{X}_1) \times_{\mathrm{Mor}(_,\boldsymbol{S})} \mathrm{Mor}(_,\boldsymbol{X}_2)$$

dont il faut prouver la représentabilité.

Or, grâce au produit fibré dans $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (2.4.10)

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}_1 \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{X}_2 & \xrightarrow{p_1} & \boldsymbol{X}_1 \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ \boldsymbol{X}_2 & \xrightarrow{\pi_2} & \boldsymbol{S} \end{array}$$

on définit pour chaque $\boldsymbol{Z} \in \mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ l'application

$$\mathrm{Mor}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}_1 \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{X}_2) \xrightarrow{\Xi(\boldsymbol{Z})} \mathrm{Mor}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}_1) \times_{\mathrm{Mor}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{S})} \mathrm{Mor}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}_2)$$

qui associe à $\alpha \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}_1 \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{X}_2)$ le couple $(p_1 \circ \alpha, p_2 \circ \alpha)$. La correspondance $\Xi(_)$ est naturelle entre deux *faisceaux d'ensembles* sur $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$; on peut alors invoquer 3.2.2 et affirmer que c'est un isomorphisme de foncteurs puisqu'il en est ainsi de sa restriction à la sous-catégorie $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (2.4.10-(b)) ∎

3.2.4. Théorème. *La catégorie* $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *possède des produits fibrés.*

Preuve. Soient $\pi_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{S}$ des objets de $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})/_{\boldsymbol{S}}$. Notons $\{\boldsymbol{S}_\alpha\}_\alpha$ un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{S}$ avec $\boldsymbol{S}_\alpha \in \mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ pour tout α. Soient $\{\boldsymbol{X}_{\alpha,\beta}\}_\beta$ un recouvrement ouvert de $\pi_{\boldsymbol{X}}^{-1}(\boldsymbol{S}_\alpha)$ par des objets de $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et de même pour $\boldsymbol{Y}$.

Le produit fibré $\boldsymbol{X}_{\alpha,\beta} \times_{\boldsymbol{S}_\alpha} \boldsymbol{Y}_{\alpha,\beta'}$ existe dans $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})/_{\boldsymbol{S}_\alpha}$ (3.2.3-b) et représente aussi le foncteur $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(_, \boldsymbol{X}_{\alpha,\beta}) \times_{\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(_,\boldsymbol{S})} \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(_, \boldsymbol{Y}_{\alpha,\beta'})$ (car $\boldsymbol{S}_\alpha \to \boldsymbol{S}$ est un plongement ouvert). Le produit fibré $\boldsymbol{X}_{\alpha,\beta} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y}_{\alpha,\beta'}$ existe donc bien dans $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})/_{\boldsymbol{S}}$.

On conclut en appliquant le critère de représentabilité 1.9.1 avec

- $\mathcal{C} = \mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})/_{\boldsymbol{S}}$,
- $\boldsymbol{F} := \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(_, \boldsymbol{X}) \times_{\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(_,\boldsymbol{S})} \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(_, \boldsymbol{X})$,
- $\boldsymbol{F}_{\alpha,\beta,\beta'} : \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(_, \boldsymbol{X}_{\alpha,\beta}) \times_{\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(_,\boldsymbol{S})} \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(_, \boldsymbol{Y}_{\alpha,\beta'})$. ∎

§4. Affinité des schémas †-adiques de réduction affine

Tout comme la section 3.1, les résultats de cette partie complètent l'étude commencée dans [Ar$_3$] concernant l'affinité des schémas †-adiques de réduction affine, tous ces résultats y seront replacés dans une version ultérieure de ce travail.

Le question de l'affinité des schémas †-adiques de réduction affine est apparue à différents occasions depuis [M] et a donné lieu à des réponses variées, par exemple :

Aff-(i) *Si* $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ *est un schéma †-adique affine de type fini et si* $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ *est un ouvert* **principal**, *l'espace* $(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}|_{\boldsymbol{U}})$ *est un schéma †-adique affine de type fini.* ([2])

Aff-(ii) *Si* $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ *est un schéma †-adique affine-lisse* ([3]) *et si* $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ *est un ouvert* **affine**, *l'espace* $(\boldsymbol{U};\mathscr{O}^{\dagger}|_{\boldsymbol{U}})$ *est un schéma †-adique affine-lisse.* ([4])

Aff-(iii) *Si* $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ *est un schéma †-adique affine de type fini et si* $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ *est un ouvert* **affine**, *l'espace* $(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}|_{\boldsymbol{U}})$ *est un schéma †-adique affine de type fini.* ([5])

Aff-(iv) *Un schéma †-adique lisse de réduction affine est affine-lisse.* ([6])

Nous allons maintenant démonter le résultat le plus général concernant cette question :

[2] Théorème 2.8, p. 5, de [M].

[3] On rappelle que dans [Ar$_3$] un schéma †-adique affine est dit « *affine-lisse* » lorsqu'il est associé à une algèbre f.c.t.f. très lisse, et il est dit « *lisse* » s'il est localement affine-lisse. Le principal résultat de *loc.cit.*, assertion aff-(iv) ici, affirme qu'il y a équivalence entre les deux concepts.

[4] Proposition 3.2.16 de [Ar$_2$].

[5] Proposition 3.1.3 dans ce papier.

[6] Théorème 2.5.3 de [Ar$_3$].

4.1. Théorème. *Pour un schéma †-adique localement de type fini les assertions suivantes sont équivalentes :*
a) *Être de réduction affine (de type fini).*
b) *Être †-adique affine de type fini.*

Preuve. Soit $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \in \mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ de réduction $(\boldsymbol{X};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}) = \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$. Soient $\{f_1,\dots,f_r\} \subseteq \overline{\boldsymbol{A}}$ tels que $f_1+\cdots+f_r = 1$ et tels que $\big(D(f_i);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}|_{D(f_i)}\big) \in \mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. On a le morphisme de suites exactes à gauche :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\epsilon(\mathscr{O})} & \prod_i \Gamma(D(f_i);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\delta_0(\mathscr{O})} & \prod_{ij} \Gamma(D(f_if_j);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \\
\downarrow{\scriptstyle \nu} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_i} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{ij}} \\
\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{X};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\epsilon(\overline{\mathscr{O}})} & \prod_i \Gamma(D(f_i);\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\delta_0(\overline{\mathscr{O}})} & \prod_{ij} \Gamma(D(f_if_j);\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}) \\
|| & & || & & || \\
\overline{\boldsymbol{A}} & & \prod_i \overline{\boldsymbol{A}}_{f_i} & & \prod_{ij} \overline{\boldsymbol{A}}_{f_if_j}
\end{array} \qquad (\mathscr{D})$$

où les flèches verticales proviennent de la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ des fibres de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ (*cf.* 2.4.6). Les morphismes ν_i et ν_{ij} sont alors des relèvements ([M] th. 2.8, p. 5) et le morphisme ν est surjectif d'après 3.1.4 ([Ar$_3$] cor. 2.5.5).

D'autre part, l'algèbre $\overline{\boldsymbol{A}} := \Gamma(\boldsymbol{X};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})$ est de type fini sur $\overline{\boldsymbol{R}}$, car elle est localement de type fini, et l'algèbre $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ est faiblement complète d'après 3.1.1 ([7]), il existe donc un sous-algèbre **faiblement complète de type fini** $\boldsymbol{C}^{\dagger} \subseteq \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ telle que $\nu(\boldsymbol{C}^{\dagger}) = \overline{\boldsymbol{A}}$.

Choisissons $F_i \in \boldsymbol{C}^{\dagger}$ tel que $\nu(F_i) = f_i$ et notons $\xi = F_1+\cdots+F_r$. On a $\nu(\xi) = 1 \in \overline{\boldsymbol{A}}$ et donc aussi $\xi = 1 \pmod{\boldsymbol{I}}$ dans chaque $\Gamma(D(f_i);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$. On en déduit que ξ est inversible dans $\Gamma(D(f_i);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$, car de Zariski, d'inverse noté ζ_i. Les sections $(\zeta_1,\dots,\zeta_r)$ vérifient la condition de recollement et se recollent en une section globale $\zeta \in \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ vérifiant l'égalité $\xi\zeta - 1 = 0$ (localement évidente). Ainsi, quitte à rajouter ζ à $\boldsymbol{C}^{\dagger}$, l'image de ξ dans $\overline{\boldsymbol{C}} := \boldsymbol{C}^{\dagger}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{C}^{\dagger}$ est **inversible** et l'espace $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$ est **recouvert** par les ouverts principaux $D(F_i)$. Notons $\boldsymbol{Y} := \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$ et $(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}}) := (\boldsymbol{C}^{\dagger})^{\sim}$.

Soit $(\alpha,\alpha^{\#}) : (\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \to (\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}})$ le morphisme d'espaces localement annelés associé à l'inclusion $\boldsymbol{C}^{\dagger} \subseteq \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ (prop. 3.2.3-a). Le morphisme $\alpha^{\#} : \mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ fait de $\alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ un $\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}}$-module **cohérent**. En effet, d'après l'équivalence de catégories 2.4.10, la restriction de $\alpha^{\#}$ à $D(F_i)$ est le morphisme de faisceaux correspondant au morphisme d'algèbres $\Gamma(D(F_i);\alpha^{\#})$. Or, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(D(F_i);\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}}) & \xrightarrow{\Gamma(D(F_i);\alpha^{\#})} & \Gamma(D(F_i);\alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \\
|| & \bigoplus & || \\
\boldsymbol{C}^{\dagger}_{[F_i]} & \xrightarrow[\epsilon(\mathscr{O})_i]{} & \Gamma(D(f_i);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \nu_i} \\
 & & \overline{\boldsymbol{A}}_{f_i}
\end{array} \qquad (\ddagger)$$

où $\epsilon(\mathscr{O})_i$ est **surjective** car il en est ainsi de $\nu_i \circ \epsilon(\mathscr{O})_i$, par construction de $\boldsymbol{C}^{\dagger}$, et

[7] Mais on ne sait pas encore si elle est f.c.t.f. ni si ν est un relèvement !

puisque $\Gamma(D(f_i);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et que ν_i est un relèvement (th. 3.2 [MW]). Le $\boldsymbol{C}^{\dagger}_{[F_i]}$-module $\Gamma(D(F_i);\alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ est donc cyclique et de présentation finie car $\boldsymbol{C}^{\dagger}_{[F_i]}$ est nœthérien. L'exactitude de $(_)^{\sim}$ sur la catégorie des $\boldsymbol{C}^{\dagger}_{[F_i]}$-modules de type fini ([M] prop. 2.5, p. 4) permet maintenant de conclure que $\big(\alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}\big)|_{D(F_i)}$ est un $\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}}|_{D(F_i)}$-module de présentation finie, ce qui termine la preuve de la cohérence de $\alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}} \in \mathrm{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}})$.

La cohérence de $\alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ plus le fait que le morphisme $\Gamma(\boldsymbol{Y};\alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \to \Gamma(\boldsymbol{Y};\alpha_*\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})$ est **surjectif**, car égal à ν dans $(\mathscr{D})$, suffisent (*cf.* la preuve du th. 3.3 de [M], p. 12) pour affirmer que $\alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ est de la forme $(\boldsymbol{M})^{\sim}$ pour un certain $\boldsymbol{C}^{\dagger}$-module de type fini $\boldsymbol{M}$ et que $\alpha^{\#} = (\gamma)^{\sim}$ où $\gamma : \boldsymbol{C}^{\dagger} \to \boldsymbol{M}$ est un morphisme de $\boldsymbol{C}^{\dagger}$-modules. De plus, on a $\boldsymbol{M} = \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ (th. 2.14 [M], cor. 3.2.12 [Ar$_2$]) et donc $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ est une $\boldsymbol{C}^{\dagger}$-algèbre ***finie*** et

$$\boxed{\boldsymbol{\Gamma(X;\mathscr{O}_X)\ \text{est f.c.t.f.}}}$$

On peut maintenant reprendre toute l'argumentation de la preuve avec $\boldsymbol{C}^{\dagger} := \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ ce qui nous conduit à l'existence d'un isomorphisme $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \simeq \big(\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})\big)^{\sim}$. ∎

4.2. Remarques sur la preuve

a) Dans l'avant dernier paragraphe,

i) la référence à la preuve du théorème 3.3 de [M] et non pas au théorème lui-même s'explique par le fait que nous ne faisons pas l'hypothèse sur $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ d'être un anneau de valuation discrète complet.

ii) le morphisme γ y est déjà **bijectif**. En effet, il est *injectif* car $\boldsymbol{M} = \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ et que γ s'identifie à l'inclusion $\boldsymbol{C}^{\dagger} \subseteq \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$. Il est aussi *surjectif* car en notant $\boldsymbol{Q} := \mathrm{coker}(\gamma)$, on a $\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{C}^{\dagger}} \boldsymbol{C}^{\dagger}_{[F_i]} = 0$ d'après $(\ddagger)$ et alors $0 = \overline{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{C}^{\dagger}} \boldsymbol{C}^{\dagger}_{[F_i]} = (\overline{\boldsymbol{R}} \otimes \boldsymbol{Q}) \otimes_{\overline{\boldsymbol{C}}} \overline{\boldsymbol{C}}_{F_i}$ pour tout i, et donc $\overline{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{Q} = 0$. Mais alors $\boldsymbol{Q} = 0$ puisque $\boldsymbol{Q}$ est un $\boldsymbol{C}^{\dagger}$-module de type fini et que $(\boldsymbol{C}^{\dagger};\boldsymbol{I}\boldsymbol{C}^{\dagger})$ est de Zariski.

b) Le critère d'affinité 3.1.3, cas particulier de 4.1, est nécessaire dans cette démonstration dans la mesure où l'on s'en sert pour établir la proposition 3.2.3-a elle-même appelée par 4.1. En fait, la preuve de 4.1 prouve aussi 3.1.3 dans la mesure où la proposition 3.2.3-a est trivialement vérifiée dans son cas. On peut facilement concevoir un énoncé commun à 3.2.3-a et 4.1 dont la démonstration règle dans un premier temps le cas où $\boldsymbol{X}$ est un ouvert de réduction affine d'un schéma †-adique affine de type fini.

4.3. Commentaire. Le théorème 4.1 prouve la conjecture de 2.5.6 dans [Ar$_3$] :
Théorème. Pour tout schéma †-adique localement de type fini $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ et tout ouvert de réduction affine $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ on a :

$$H^j(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) = 0\,,\ \textit{pour tout}\ j > 0.$$

§ 5. Références bibliographiques

[Ar_2] A. ARABIA. Cohomologie de Monsky-Washnitzer dans la catégorie des schémas lisses et séparés sur $\overline{\boldsymbol{R}}$; Prépublication (2004).

[Ar_3] A. ARABIA. Affinité de schémas †-adiques de réduction affine ; Prépublication (2005).

[EGA_1] A. GROTHENDIECK, J.A. DIEUDONNÉ. "*Éléments de géométrie algébrique-I*" ; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 166. Springer-Verlag (1971).

[M] D. MEREDITH. Weak formal schemes ; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).

[MW] P. MONSKY, G. WASHNITZER. Formal cohomology : I ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217 (1968).

———————×———————

Cohomologie de Monsky-Washnitzer dans la catégorie des schémas lisses et séparés sur $\overline{R}$ Une équivalence de Catégories

Alberto Arabia*

Table des matières

§ **0. Préliminaires algébriques** **2**
0.1. Rappel : complétion †-adique 2
0.2. Rappel : algèbres très lisses 3
2.1. Algébricité des relèvements de morphismes lisses 3
§ **1. Site des relèvements très lisses associé à un schéma lisse sur $\overline{R}$** **5**
1.1. La catégorie $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ des relèvements affines très lisses 5
1.2. Existence de produits fibrés dans $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ 5
1.3. Topologie de Grothendieck sur $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ 6
1.4. Algébricité des recouvrements principaux de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ 8
1.5. Préfaisceaux et faisceaux sur $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ 9
§ **2. Sous-sites de Meredith** **10**
2.1. Rappel de résultats 10
2.2. Rappel sur les schémas formels faibles affines de Meredith 11
2.2.4. Généralisation des résultats de Meredith 11
2.2.9. Rappels sur la cohomologie de Čech 18
2.2.13. Catégorie des $\mathcal{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}$-modules cohérents 22
2.2.15. $\mathcal{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}$ comme faisceau de relèvements (très lisses) 24
2.3. Sous-sites de Meredith de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ et condition de faisceau 25
2.3.1. Sous-sites de Meredith 25
2.4. Faisceau $\mathcal{G}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}$ d'automorphismes †-adiques 26
2.4.1. Le cas où $\boldsymbol{X}$ est affine 26
2.4.3. Le cas où $\boldsymbol{X}$ est général 26
2.5. Foncteurs associés à l'inclusion $\mathscr{M}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ 29
2.5.1. Rétractions de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ sur $\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$ 29
2.5.3. Le foncteurs $i_{\mathcal{U}*}$ et $i_{\mathcal{U}}^{-1}$ 31
2.5.6. Le foncteur $\mathscr{R}_{\mathcal{U}} : \text{Mod}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z})$ 32
2.5.8. Le morphisme $\mathscr{R}_{\phi}$ 32

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
Bâtiment Sophie Germain, bureau 608, Case 7012, 75205. Paris Cedex 13, France.
Adresse électronique : alberto.arabia@imj-prg.fr

§3. **Catégories de faisceaux sur $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$** **33**
3.1. Faisceau $\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{X}}$ d'automorphismes †-adiques sur $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ 33
3.1.1. Restriction d'automorphismes †-adiques dans $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ 33
3.2. Catégorie de faisceaux de $\boldsymbol{Z}$-modules sur $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ 35
3.2.1. Préfaisceaux de $\boldsymbol{Z}$-modules 35
3.3. Catégorie de faisceaux d'algèbres sur $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ 38
3.3.1. Préfaisceaux de $\boldsymbol{Z}$-algèbres 38
3.3.6. Sites annelés $(\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}};\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}})$, $(\mathscr{M}(\mathcal{U});\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})})$, $(\overline{\mathcal{U}};\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{U}})$ 40
3.4. Catégorie de faisceaux de $\mathcal{A}$-modules sur $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ 40
3.4.2. Préfaisceaux de $\mathcal{A}$-modules 40
§4. **Opérateurs différentiels †-adiques** **41**
4.1. Le faisceau $\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(_,_)$ 41
4.2. Faisceau d'opérateurs différentiels †-adiques sur $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ 44
4.2.1. Opérateurs différentiels 44
4.2.2. Morphismes d'algèbres et opérateurs différentiels 44
4.2.3. Opérateurs différentiels †-adiques sur un schéma de Meredith 45
4.2.5. Opérateurs différentiels †-adiques sur $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ 46
4.3. Équivalences de catégories de $\mathcal{D}^{\dagger}$-modules 46
4.3.1. La catégorie $\text{Mod}^{\dagger}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}})$ 46
§5. **Références bibliographiques** **49**

§0. Préliminaires algébriques

On désignera par $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{I}$ respectivement la donnée d'un anneau avec identité multiplicative, commutatif et nœthérien et d'un idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$.

0.1 Rappel : complétion †-adique

Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, Monsky et Washnitzer définissent dans [MW] «*sa complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible $\boldsymbol{A}^{\dagger}$*» que nous appellerons aussi «*complétion †-adique*». Il s'agit de la sous-algèbre du complété séparé $\boldsymbol{I}$-adique $\widehat{\boldsymbol{A}}$ de $\boldsymbol{A}$ des éléments z admettant une représentation comme somme infinie :

$$z = \textstyle\sum_{j\geqslant 0} p_j(x_1,\ldots,x_n) \qquad (*)$$

(l'entier n et les éléments $x_1,\ldots,x_n$ sont fixes et indépendants de j) dans laquelle :

$$\begin{cases} \bullet\ x_1,\ldots,x_n \in \boldsymbol{A}; \\ \bullet\ p_j \in \boldsymbol{I}^j \cdot \boldsymbol{R}[X_1,\ldots,X_n], \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}; \\ \bullet\ \text{l'ensemble } \{\frac{\deg p_j}{j+1}\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ est borné.} \end{cases}$$

Définition([MW]). Une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est dite «*faiblement complète*» (f.c.) lorsque l'application canonique $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\dagger$ est bijective. Une $\boldsymbol{R}$-algèbre faiblement complète $\boldsymbol{A}$ est dite de «*type fini*» (f.c.t.f.) lorsqu'il existe un sous-ensemble fini $S \subseteq \boldsymbol{A}$ tel que $\boldsymbol{A}$ est l'unique sous-algèbre faiblement complète de $\boldsymbol{A}$ qui contient $\boldsymbol{S}$.

Théorème ([MW]). *La complétion †-adique d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre (de type fini) est faiblement complète (de type fini).*

Notation. On notera $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R})$ (resp. $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R})$) la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ dont les objets sont les algèbres faiblement complètes (resp. de type fini).

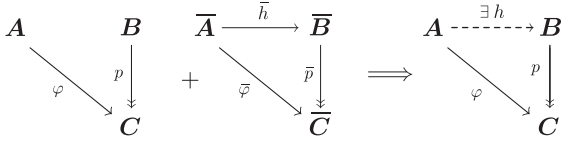
0.2 Rappel : algèbres très lisses

Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, on note $\overline{\boldsymbol{A}}$ la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\boldsymbol{A}$, *i.e.* $\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}$. Pour toute algèbre $\overline{\boldsymbol{B}}$ (lisse) sur $\overline{\boldsymbol{A}}$, on appelle «*relèvement de $\overline{\boldsymbol{B}}$ (lisse) sur $\boldsymbol{A}$*» la donnée d'une algèbre $\boldsymbol{B}$ (lisse) sur $\boldsymbol{A}$, et d'une surjection de $\boldsymbol{A}$-algèbres $p : \boldsymbol{B} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est bijective.

La propriété suivante a été introduite par Monsky et Washnitzer dans [MW].

Définition. Une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est dite «*très lisse*» lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- L'algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}$ est lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$.
- Pour toute paire de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{B} \xrightarrow{p} \boldsymbol{C} \xleftarrow{\varphi} \boldsymbol{A}$, où $\boldsymbol{B}$ est f.c., $\boldsymbol{C}$ est séparée et p est surjectif (de noyau arbitraire), et pour chaque morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ vérifiant $\overline{\varphi} = \overline{p} \circ \overline{h}$, il existe un relèvement $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ de $\overline{h}$, tel que $\varphi = p \circ h$.



Pour toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{B}}$ lisse, on appelle «*relèvement très lisse de $\overline{\boldsymbol{B}}$*» la donnée d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre très lisse $\boldsymbol{B}$ et d'une surjection de $\boldsymbol{R}$-algèbres $p : \boldsymbol{B} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est bijective.

L'énoncé suivant rassemble les principaux résultats de [Ar].

Théorème. *Soit $\overline{\boldsymbol{A}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse.*

a) *$\overline{\boldsymbol{A}}$ admet des relèvements lisses sur $\boldsymbol{R}$.*

b) *Pour tout relèvement $\boldsymbol{A}$ de $\overline{\boldsymbol{A}}$, lisse sur $\boldsymbol{R}$, l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ est un relèvement très lisse de $\overline{\boldsymbol{A}}$ dans $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R})$. Pour tout autre relèvement $\boldsymbol{A}'$ de $\overline{\boldsymbol{A}}$ lisse sur $\boldsymbol{R}$, les algèbres $\boldsymbol{A}^\dagger$ et $\boldsymbol{A}'^\dagger$ sont isomorphes.*

0.2.1. Algébricité des relèvements de morphismes lisses.

Proposition. *Soit $\beta : \boldsymbol{B}_1 \to \boldsymbol{B}_2$ un morphisme entre deux $\boldsymbol{R}$-algèbres f.c.t.f.* très lisses *dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$, $\overline{\beta} : \overline{\boldsymbol{B}}_1 \to \overline{\boldsymbol{B}}_2$, est un morphisme **lisse**. Soit $q_1 : \boldsymbol{A}_1 \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}_1$ un relèvement lisse sur $\boldsymbol{R}$ et munissons $\overline{\boldsymbol{B}}_2$ de la structure de $\boldsymbol{A}_1$-algèbre induite par $\overline{\beta} \circ q_1$. Alors, pour tout relèvement $q_2 : \boldsymbol{A}_2 \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}_2$, **lisse sur $\boldsymbol{A}_1$** (donc sur $\boldsymbol{R}$), il existe des isomorphismes $\varphi_i : \boldsymbol{A}_i^\dagger \to \boldsymbol{B}_i$ relevant l'identité sur $\overline{\boldsymbol{B}}_i$ tels que le diagramme ci-après est commutatif. Dans ce diagramme, σ désigne le morphisme structural, et ι le morphisme naturel canonique d'une algèbre dans sa complétion faible.*

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{B}_1 & \xrightarrow{\beta} & \boldsymbol{B}_2 \\
{\scriptstyle\varphi_1}\uparrow\simeq & & \simeq\uparrow{\scriptstyle\varphi_2} \\
\boldsymbol{A}_1^\dagger & \xrightarrow{\sigma^\dagger} & \boldsymbol{A}_2^\dagger \\
{\scriptstyle\iota_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\iota_2} \\
\boldsymbol{A}_1 & \xrightarrow{\sigma} & \boldsymbol{A}_2 \\
{\scriptstyle q_1}\twoheaddownarrow & & \twoheaddownarrow{\scriptstyle q_2} \\
\overline{\boldsymbol{B}}_1 & \xrightarrow{\overline{\beta}} & \overline{\boldsymbol{B}}_2
\end{array}$$

Le morphisme β est donc isomorphe à la complétion faible d'un morphisme lisse entre des relèvements des $\overline{\boldsymbol{B}}_i$, lisses sur $\boldsymbol{R}$.

De plus, pour tout isomorphisme φ_1 relevant $\mathrm{id}_{\overline{\boldsymbol{B}}_1}$ (resp. φ_2 relevant $\mathrm{id}_{\overline{\boldsymbol{B}}_2}$), il existe un isomorphisme φ_2 relevant $\mathrm{id}_{\overline{\boldsymbol{B}}_2}$ (resp. φ_1 relevant $\mathrm{id}_{\overline{\boldsymbol{B}}_1}$) tels que le couple (φ_1, φ_2) vérifie la proposition.

Démonstration. D'après le théorème d'existence de relèvements lisses (1.3.1 [Ar]) appliqué au couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$, il existe un relèvement lisse $q_1 : \boldsymbol{A}_1 \to \overline{\boldsymbol{B}}_1$, et, appliqué au couple $(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A}_1)$, un relèvement $q_2 : \boldsymbol{A}_2 \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}_2$ lisse *sur* $\boldsymbol{A}_1$. Les $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A}_i^\dagger$ sont f.c.t.f. très lisses (3.3.1 *loc. cit.*) de sorte qu'il existe des morphismes $\varphi_i : \boldsymbol{A}_i^\dagger \to \boldsymbol{B}_i$ relevant l'identité sur $\overline{\boldsymbol{B}}_i$; de tels morphismes sont automatiquement bijectifs (th. 3.2 [MW]).

Pour φ_1 donné, munissons $\boldsymbol{B}_2$ de la structure de $\boldsymbol{A}_1$-algèbre induite par $\beta \circ \varphi_1 \circ \iota_1$, et considérons les données :

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{A}_2 & & \boldsymbol{B}_2 \\
{\scriptstyle q_2}\twoheaddownarrow & & \twoheaddownarrow{\scriptstyle p_2} \\
\overline{\boldsymbol{B}}_2 & \xleftarrow{\mathrm{id}} & \overline{\boldsymbol{B}}_2
\end{array}$$

dans la catégorie des $\boldsymbol{A}_1$-algèbres. Comme $\boldsymbol{A}_2$ est lisse sur $\boldsymbol{A}_1$, il existe un voisinage étale $(\boldsymbol{B}_2)_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}_2$ et un morphisme $\phi_2 : \boldsymbol{A}_2 \to (\boldsymbol{B}_2)_\varepsilon$ tels que :

$$\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{A}_2 & \xrightarrow{\phi_2} & (\boldsymbol{B}_2)_\varepsilon & \xleftarrow{\varepsilon} & \boldsymbol{B}_2 \\
{\scriptstyle q_2}\twoheaddownarrow & & \twoheaddownarrow{\scriptstyle p_{2\varepsilon}} & & \twoheaddownarrow{\scriptstyle p_2} \\
\overline{\boldsymbol{B}}_2 & \xleftarrow{\mathrm{id}} & \overline{\boldsymbol{B}}_2 & \xleftrightarrow{\mathrm{id}} & \overline{\boldsymbol{B}}_2
\end{array}$$

est un diagramme commutatif de $\boldsymbol{A}_1$-algèbres (2.1.3 [Ar]).

Par complétion faible, $\varepsilon^\dagger$ est un isomorphisme (3.2.4 *loc. cit.*) et $\varphi_2 := (\varepsilon^\dagger)^{-1} \circ \phi_2^\dagger$ vérifie, par construction, l'égalité $\beta \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \sigma^\dagger$, ce qui prouve une partie de la proposition.

Inversement, donnons-nous φ_2. On a les morphismes des $\boldsymbol{R}$-algèbres f.c.t.f. très lisses :

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{B}_1 & \xrightarrow{\beta} & \boldsymbol{B}_2 \\
 & & \simeq\uparrow{\scriptstyle\varphi_2} \\
\boldsymbol{A}_1^\dagger & \xrightarrow{\sigma^\dagger} & \boldsymbol{A}_2^\dagger
\end{array}$$

La sous-algèbre $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{B}_2$ engendrée par les images de β et $\varphi_2 \circ \sigma^\dagger$ est f.c.t.f. d'après le corollaire du th. 2.1 de [MW]. Il en est de même de la sous-algèbre $\mathrm{im}(\beta)$ et comme l'inclusion

$\mathrm{im}(\beta) \subseteq \boldsymbol{C}$ est une égalité modulo $\boldsymbol{I}$, on déduit que $\mathrm{im}(\beta) = \boldsymbol{C} = \mathrm{im}(\varphi_2 \circ \sigma^\dagger)$ (th. 3.1 [MW]). L'existence de φ_1 vérifiant $\beta \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \sigma^\dagger$ résulte alors de ce que $\boldsymbol{A}_1^\dagger$ est très lisse. ∎

§1. Site des relèvements très lisses associé à un schéma lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$

1.1 La catégorie $\mathcal{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger$ des relèvements affines très lisses

À un schéma $\left(\overline{\boldsymbol{X}}, \mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}\right)$ séparé et lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$, on associe la catégorie $\mathcal{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger$ suivante :

- Un objet $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger$ est un morphisme surjectif de $\boldsymbol{R}$-algèbres

$$p_{\mathcal{U}} : \boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \Gamma\left(\overline{\mathcal{U}}; \mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}\right)$$

avec :

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{U}} & : \text{ouvert affine de } \overline{\boldsymbol{X}} ; \\ \boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger & : \boldsymbol{R}\text{-algèbre f.c.t.f. très lisse} ; \\ p_{\mathcal{U}} & : \text{relèvement de } \boldsymbol{R}\text{-algèbres.} \end{cases}$$

L'ouvert $\overline{\mathcal{U}}$, l'algèbre très lisse $\boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger$ et le morphisme $p_{\mathcal{U}}$, seront respectivement appelés « *l'ouvert (de $\overline{\boldsymbol{X}}$), l'algèbre et le relèvement très lisses correspondants à $\mathcal{U}$* ».

- Étant donnés deux objets $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger$, tels que $\overline{\mathcal{V}} \subseteq \overline{\mathcal{U}}$, un élément Φ de l'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathcal{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger}\left(\mathcal{V}, \mathcal{U}\right)$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger \to \boldsymbol{A}(\mathcal{V})^\dagger$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger & \xrightarrow{\phi} & \boldsymbol{A}(\mathcal{V})^\dagger \\ {\scriptstyle p_{\mathcal{U}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\mathcal{V}}} \\ \Gamma\left(\overline{\mathcal{U}}; \mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}\right) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & \Gamma\left(\overline{\mathcal{V}}; \mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}\right) \end{array}$$

où $\bar{\rho}$ désigne le morphisme de restriction canonique, est commutatif.

Le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger \to \boldsymbol{A}(\mathcal{V})^\dagger$ est appelé « *le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres associé à Φ* ».

- Lorsque $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ sont tels que $\overline{\mathcal{V}} \not\subseteq \overline{\mathcal{U}}$, on pose : $\mathrm{Mor}_{\mathcal{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger}\left(\mathcal{V}, \mathcal{U}\right) = \varnothing$.

1.1.1. Remarques

a) Avec les notations précédentes, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) \neq \varnothing$, si et seulement si, $\overline{\mathcal{V}} \subseteq \overline{\mathcal{U}}$. La suffisance de cette dernière condition est conséquence de ce que $\boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger$ est très lisse.

b) Pour tout ouvert affine $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$, il existe des relèvements $\boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \Gamma(\overline{U}; \mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ lisses sur $\boldsymbol{R}$ (1.3.1 [Ar]) et le morphisme induit $\boldsymbol{B}^\dagger \twoheadrightarrow \Gamma(\overline{U}; \mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est un relèvement très lisse (3.3.1 *loc. cit.*). Pour tout ouvert affine $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ il existe donc un objet $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger$ dont l'ouvert correspondant est $\overline{U}$; un tel $\mathcal{U}$ sera appelé « *un relèvement (†-adique) de $\overline{U}$* ».

c) Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger$, le semi-groupe $\left(\mathrm{End}_{\mathcal{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}), \circ, \mathbf{1}_{\mathcal{U}}\right)$ est un groupe (th. 3.2 [MW]), il s'identifie à l'opposé du groupe des automorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbre de $\boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est l'identité.

1.2 Existence de produits fibrés dans $\mathcal{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger$

Proposition. *La catégorie $\mathcal{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger$ possède des produits fibrés.*

Démonstration. À un diagramme commutatif dans $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{V}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V}_2^{\dagger} & \longrightarrow & \mathcal{U} \end{array}$$

correspondent les diagrammes commutatifs :

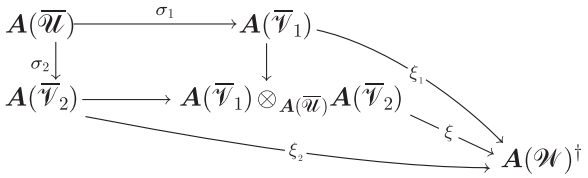
$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}(\mathcal{U})^{\dagger} & \longrightarrow & \boldsymbol{A}(\mathcal{V}_1)^{\dagger} \\ \downarrow & (\mathcal{D}) & \downarrow \\ \boldsymbol{A}(\mathcal{V}_2)^{\dagger} & \longrightarrow & \boldsymbol{A}(\mathcal{W})^{\dagger} \end{array} \quad \xrightarrow{\text{mod } \boldsymbol{I}} \quad \begin{array}{ccc} \Gamma(\overline{\mathcal{U}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_1;\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) \\ \bar{\rho}\downarrow & (\overline{\mathcal{D}}) & \downarrow\bar{\rho} \\ \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_2;\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & \Gamma(\overline{\mathcal{W}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) \end{array}$$

respectivement de $\boldsymbol{R}$-algèbres f.c.t.f. très lisses et de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres, où nous pouvons supposer (prop. 0.2.1) que le diagramme de $\boldsymbol{A}(\mathcal{U})^{\dagger}$-algèbres $(\mathcal{D})$ résulte de compléter faiblement un diagramme de morphismes de $\boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{U}})$-algèbres :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{U}}) & \xrightarrow{\sigma_1} & \boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{V}}_1) \\ {\scriptstyle\sigma_2}\downarrow & (\mathcal{D}') & \downarrow{\scriptstyle\xi_1} \\ \boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{V}}_2) & \xrightarrow[\xi_2]{} & \boldsymbol{A}(\mathcal{W})^{\dagger} \end{array}$$

où $\boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{U}})$ est un relèvement de $\Gamma(\overline{\mathcal{U}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ lisse sur $\boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{V}}_i)$ est un relèvement de $\Gamma(\overline{\mathcal{V}}_i;\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ lisse sur $\boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{U}})$ (σ_i désigne alors morphisme structural) et $(\mathcal{D}')$ est un relèvement de $\overline{\mathcal{D}}$.

Le diagramme $(\mathcal{D}')$ admet une factorisation unique en :



$(\mathcal{D}'')$

où les morphismes de $\boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{V}}_i)$ vers $\boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{V}}_1)\otimes_{\boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{U}})}\boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{V}}_2)$ sont les morphismes canoniques.

Ceci étant, $\boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{V}}_{12}) := \boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{V}}_1)\otimes_{\boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{U}})}\boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{V}}_2)$ est un relèvement lisse sur $\boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{U}})$ (donc sur $\boldsymbol{R}$) de $\Gamma(\overline{\mathcal{V}}_{12};\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{V}}_{12}})$ où $\overline{\mathcal{V}}_{12} := \overline{\mathcal{V}}_1 \times_{\overline{\mathcal{U}}} \overline{\mathcal{V}}_2$ est canoniquement isomorphe à l'ouvert affine $\overline{\mathcal{V}}_1 \cap \overline{\mathcal{V}}_2$ puisque $\overline{\boldsymbol{X}}$ est supposée séparée. La complétion faible $\boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{V}}_{12})^{\dagger}$ de $\boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{V}}_{12})$ est f.c.t.f. très lisse (3.3.1 [Ar]) et le couple $\big(\overline{\mathcal{V}}_{12};\boldsymbol{A}(\overline{\mathcal{V}}_{12})^{\dagger} \twoheadrightarrow \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_{12};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})\big)$ est un objet de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$.

L'existence du produit fibré $\mathcal{V}_1 \times_{\mathcal{U}} \mathcal{V}_2$ dans $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ résulte alors de compléter faiblement le diagramme $(\mathcal{D}'')$. ∎

1.2.1. Remarque. La démonstration précédente montre que l'ouvert affine correspondant au produit fibré $\mathcal{V}_1 \times_{\mathcal{U}} \mathcal{V}_2$ est précisément $\overline{\mathcal{V}}_1 \times_{\overline{\mathcal{U}}} \overline{\mathcal{V}}_2 = \overline{\mathcal{V}}_1 \cap \overline{\mathcal{V}}_2$.

1.3 Topologie de Grothendieck sur $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$

1.3.1. Rappel. Une «*topologie de Grothendieck*» sur une catégorie $\mathcal{C}$ avec produits fibrés

est la donnée de familles de morphismes $\{\Phi_i : \boldsymbol{O}_i \to \boldsymbol{O}\}_{i\in\mathfrak{A}}$, appelées «*recouvrements (de $\mathcal{C}$)*», telles que :

a) Pour tout objet $\boldsymbol{O}$ de $\mathcal{C}$ et tout $\Phi \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{O})$, $\{\Phi : \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{O}\}$ est un recouvrement.
b) Étant donné un recouvrement $\{\Phi_i : \boldsymbol{O}_i \to \boldsymbol{O}\}_{i\in\mathfrak{A}}$ et pour chaque $i \in \mathfrak{A}$, un recouvrement $\{\Phi_{i,i'} : \boldsymbol{O}_{i,i'} \to \boldsymbol{O}_i\}_{i'\in\mathfrak{B}}$, la famille des composés $\{\Phi_i \circ \Phi_{i,i'} : \boldsymbol{O}_{i,i'} \to \boldsymbol{O}\}_{i\in\mathfrak{A},i'\in\mathfrak{B}}$ est un recouvrement.
c) Pour tout recouvrement $\{\Phi_i : \boldsymbol{O}_i \to \boldsymbol{O}\}$ et tout morphisme $\Phi' : \boldsymbol{O}' \to \boldsymbol{O}$, la famille de morphismes $\{\Phi_i \times_{\boldsymbol{O}} \Phi' : \boldsymbol{O}_i \times_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{O}' \to \boldsymbol{O}'\}$ est un recouvrement.

1.3.2. Définition. Un «*recouvrement de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$*» est la donnée d'un objet $\mathcal{U}$ et d'une famille $\mathcal{R} = \{\Phi_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}\}_{i\in\mathfrak{A}}$ de morphismes, tels que la famille $\{\overline{\mathcal{U}}_i\}_{i\in\mathfrak{A}}$ des ouverts de $\overline{\boldsymbol{X}}$ correspondants est un recouvrement de l'ouvert $\overline{\mathcal{U}}$ dans $\overline{\boldsymbol{X}}$. Le recouvrement $\overline{\mathcal{U}} = \bigcup_i \overline{\mathcal{U}}_i$ est «*le recouvrement de $\overline{\mathcal{U}}$ dans $\overline{\boldsymbol{X}}$ correspondant à $\mathcal{R}$*»

1.3.3. Remarque et terminologie. Soit $\mathcal{U}$ un objet de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$. Tout recouvrement affine $\overline{\mathcal{U}} = \bigcup_i \overline{U}_i$ dans $\overline{\boldsymbol{X}}$ correspond à un recouvrement $\{\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}\}$ de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ (*cf.* 1.1.1-0b), un tel recouvrement est «*un relèvement (†-adique) du recouvrement $\overline{\mathcal{U}} = \bigcup \overline{U}_i$*».

1.3.4. Notations et terminologie

- On note $\mathrm{Rec}(\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$ la classe des recouvrements de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$.
- Un recouvrement $\{\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}\}_{i\in\mathfrak{A}}$ est dit «*fini*» lorsque l'ensemble d'indices $\mathfrak{A}$ est de cardinal fini.
- Un recouvrement $\{\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}\}$ est dit «*principal*» lorsque les ouverts $\overline{\mathcal{U}}_i$ sont principaux dans l'ouvert $\overline{\mathcal{U}}$ correspondant à $\mathcal{U}$, *i.e.* des complémentaires d'hypersurfaces de $\overline{\mathcal{U}}$.
- Deux recouvrements $\mathcal{R}_1 = \{\Phi_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}\}_{i\in\mathfrak{A}}$ et $\mathcal{R}_2 = \{\Phi_{i'} : \mathcal{V}_i \to \mathcal{V}\}_{i'\in\mathfrak{B}}$ seront dits «*isomorphes*» lorsqu'il existe une bijection $\beta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ et des isomorphismes $\Psi \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ et $\Psi_i \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}_i,\mathcal{V}_{\beta(i)})$ tels que les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_i & \xrightarrow{\Phi_i} & \mathcal{U} \\ {\scriptstyle\Psi_i}\downarrow{\scriptstyle\simeq} & & {\scriptstyle\simeq}\downarrow{\scriptstyle\Psi} \\ \mathcal{V}_{\beta(i)} & \xrightarrow{\Phi_{i'}} & \mathcal{V} \end{array}$$

sont commutatifs pour tout $i \in \mathfrak{A}$. La famille $\{\Psi_i;\Psi\}$ est alors «*un isomorphisme de recouvrements de $\mathcal{R}_1$ vers $\mathcal{R}_2$*».

1.3.5. Proposition. *La classe de recouvrements* $\mathrm{Rec}(\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$ *munit la catégorie* $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ *d'une topologie de Grothendieck.*

Démonstration. Résulte de la proposition 1.2 et de la remarque 1.2.1. ∎

1.3.6. Définition. La catégorie $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ munie de la classe de recouvrements $\mathrm{Rec}(\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$ est «*le site des relèvements affines très lisses*» associé au schéma lisse et séparé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$.

1.3.7. Notations et terminologie

- Les objets de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ seront appelés «*les ouverts du site* $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$».
- On dira de deux ouverts $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$, que «$\mathcal{V}$ *est contenu dans* $\mathcal{U}$», et l'on notera $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$, lorsqu'il en est ainsi des ouverts de $\overline{\boldsymbol{X}}$ correspondants. On a donc $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$, si et seulement si, $\overline{\mathcal{V}}\subseteq\overline{\mathcal{U}}$.

1.4 Algébricité des recouvrements principaux de $\boldsymbol{\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}$

Soient $\overline{U}$ un ouvert affine de $\overline{\boldsymbol{X}}$ et $\boldsymbol{B}\twoheadrightarrow\Gamma(\overline{U};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un relèvement lisse sur $\boldsymbol{R}$. Notons $(U;\mathcal{O}_U)$ le schéma affine associé à $\boldsymbol{B}$. Tout recouvrement affine $U=\bigcup_i V_i$ induit, par réduction modulo $\boldsymbol{I}$, un recouvrement affine $\overline{U}=\bigcup_i\overline{V}_i$ dans $\overline{\boldsymbol{X}}$. Les complétions faibles des morphismes canoniques de relèvements :

$$\begin{array}{ccc}\Gamma(U;\mathcal{O}_U) & \xrightarrow{\rho_i} & \Gamma(V_i;\mathcal{O}_U)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \Gamma(\overline{U};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) & \xrightarrow{\overline{\rho}_i} & \Gamma(\overline{V}_i;\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})\end{array}$$

donnent des morphismes de relèvements

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{A}(\mathcal{U})^{\dagger} & \xrightarrow{\rho_i^{\dagger}} & \boldsymbol{A}(\mathcal{V}_i)^{\dagger}\\ {\scriptstyle p_{\mathcal{U}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\mathcal{V}_i}}\\ \Gamma(\overline{U};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) & \xrightarrow{\overline{\rho}_i} & \Gamma(\overline{V}_i;\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})\end{array}$$

où l'on a noté $\boldsymbol{A}(\mathcal{U})^{\dagger}:=\Gamma(U;\mathcal{O}_U)^{\dagger}$ et $\boldsymbol{A}(\mathcal{V}_i)^{\dagger}:=\Gamma(V_i;\mathcal{O}_U)^{\dagger}$. Ces algèbres sont f.c.t.f. très lisses et les relèvements $p_{\mathcal{U}}$ et $p_{\mathcal{V}_i}$ sont des ouverts de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$, notés $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}_i$ respectivement. La famille $\{\Phi_i:\mathcal{V}_i\to\mathcal{U}\}$ définie par les morphismes $\rho_i^{\dagger}$ est donc un recouvrement de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$; il sera appelé «*la complétion faible du recouvrement (algébrique)* $\{V_i\}$ *de* U».

1.4.1. Définition. Un recouvrement de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ isomorphe à la complétion faible d'un recouvrement affine d'un relèvement lisse d'un ouvert affine de $\overline{\boldsymbol{X}}$ sera dit «*algébrique*».

1.4.2. Proposition. *Tout recouvrement principal de* $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ *est algébrique.*

Démonstration. Soit $\mathcal{R}=\{\mathcal{U}_i\to\mathcal{U}\}_{i\in\mathfrak{A}}$ un recouvrement principal de $\overline{\boldsymbol{X}}^{\dagger}_{\text{inf}}$ et notons $\{\overline{U}_i\subseteq\overline{U}\}$ le recouvrement induit dans $\overline{\boldsymbol{X}}$. Pour chaque ouvert $\overline{U}_i$, on choisit $f_i\in\Gamma(\overline{U};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ tel que $\overline{U}_i=D(f_i)$. Fixons un relèvement $p:\boldsymbol{B}\twoheadrightarrow\Gamma(\overline{U};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ lisse sur $\boldsymbol{R}$ et, pour chaque $i\in\mathfrak{A}$, un élément $g_i\in\boldsymbol{B}$ tel que $p(g_i)=f_i$. Comme $\overline{U}=\bigcup_i D(f_i)$, l'idéal de $\Gamma(\overline{U};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ engendré par les f_i contient 1 ; il existe, par conséquent, un élément g de l'idéal de $\boldsymbol{B}$ engendré par les g_i vérifiant $p(g)=1$ et le morphisme p induit un relèvement lisse $\boldsymbol{B}_g\twoheadrightarrow\Gamma(\overline{U};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$. La famille $\{D(g_i)\}$ est maintenant un recouvrement (principal) du schéma affine $(U;\mathcal{O}_U)$ associé à $\boldsymbol{B}_g$ qui relève, par construction, le recouvrement $\{D(f_i)\}$ de $\overline{U}$. Notons $\mathcal{R}'=\{\mathcal{V}_i\longrightarrow\mathcal{V}\}$ le recouvrement de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ obtenu par complétion faible de la famille d'inclusions $\{D(g_i)\subseteq U\}$. On a $\mathcal{V}_i\simeq\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{V}\simeq\mathcal{U}$ et la proposition 0.2.1 établit l'existence, pour tout $\Psi\in\text{Iso}_{\overline{\boldsymbol{X}}^{\dagger}_{\text{inf}}}(\mathcal{V},\mathcal{U})$ donné,

d'une famille $\{\Psi_i \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{V}_i,\mathcal{U}_i)\}$ telle que $\{\Psi_i;\Psi\}$ est un isomorphisme de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{R}$. Le recouvrement $\mathcal{R}$ est donc bien algébrique. ∎

1.4.3. Commentaire. La proposition 0.2.1 montre que tout morphisme entre deux ouverts $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ de $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, d'ouverts correspondants $\overline{\mathcal{V}} \subseteq \overline{\mathcal{U}}$, est isomorphe à la complétion faible d'un morphisme lisse $\alpha : V \to U$ entre deux relèvements lisses sur $\boldsymbol{R}$ de $\overline{\mathcal{V}}$ et $\overline{\mathcal{U}}$ respectivement, mais cette proposition n'établit pas l'existence d'un tel α qui soit, en plus, un plongement ouvert. La démonstration précédente prouve que c'est toujours le cas lorsque $\overline{\mathcal{V}}$ est principal dans $\overline{\mathcal{U}}$.

1.5 Préfaisceaux et faisceaux sur $\boldsymbol{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$

Soit $\boldsymbol{Z}$ un anneau arbitraire. Un préfaisceaux de $\boldsymbol{Z}$-modules sur $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ vers la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Z})$ des $\boldsymbol{Z}$-modules (à gauche). Pour tout préfaisceau $\mathcal{P} : \mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{Z})$ et tout morphisme $\Phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{V},\mathcal{U})$, le morphisme de $\boldsymbol{Z}$-modules $\mathcal{P}(\Phi) : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{V})$ est «*le morphisme de restriction associé à Φ par $\mathcal{P}$*».

Un préfaisceau $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est dit «*faisceau sur le site $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$*» lorsque pour tout recouvrement $\mathcal{R} = \{\Phi_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}\}_{i\in\mathfrak{A}}$ du site $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, la suite de $\boldsymbol{Z}$-modules :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \to \mathcal{P}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\Pi_{\mathcal{R}}} & \prod_{i\in\mathfrak{A}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_i) & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{R}}} & \prod_{i,i'\in\mathfrak{A}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_i \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_{i'}) \\ m & \longmapsto & \big(\mathcal{P}(\Phi_i)(m)\big)_i & & \\ & & (m_i)_i & \longmapsto & \big(\mathcal{P}(\xi_i)(m_i) - \mathcal{P}(\xi_{i'})(m_{i'})\big)_{i,i'} \end{array} \qquad (\mathcal{P}(\mathcal{R}))$$

où $\xi_i : \mathcal{U}_i \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_{i'} \to \mathcal{U}_i$ (resp. $\xi_{i'}$) désigne le morphisme de 1.2, est **exacte**.

1.5.1. Proposition. *Un préfaisceau $\mathcal{P}$ est un faisceau, si et seulement si, la suite $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ est exacte pour tout recouvrement **fini et principal** $\mathcal{R}$ de $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{P}$ un préfaisceau vérifiant la condition de la proposition. Nous devons prouver que pour tout recouvrement $\mathcal{R} = \{\Phi_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}\}_{i\in\mathfrak{A}}$, la suite de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{P}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\Pi_{\mathcal{R}}} \prod_{i\in\mathfrak{A}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_i) \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{R}}} \prod_{i,i'\in\mathfrak{A}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_i \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_{i'}) \qquad (*)$$

est exacte.

Remarquons pour commencer que l'exactitude des suites $(*)$ associées aux recouvrements *finis* de $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ implique l'exactitude des suites $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ en toute généralité. En effet, comme l'ouvert $\overline{\mathcal{U}}$ est affine, il existe une partie finie $\mathfrak{A}' = \{i_1,\dots,i_r\} \subseteq \mathfrak{A}$ telle que $\mathcal{R}' = \{\Phi_{i_i} : \mathcal{U}_{i_i} \to \mathcal{U}\}_{i=1,\dots,r}$ est un recouvrement de $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et la suite $(*)$ associée à $\mathcal{R}'$ est exacte. L'injectivité de $\Pi_{\mathcal{R}'}$ entraîne celle de $\Pi_{\mathcal{R}}$ et lorsque $\vec{x} := (x_i)$ $(\ddagger)$ est un élément de $\prod_i \mathcal{P}(\mathcal{U}_i)$ annulé par $\Delta_{\mathcal{R}}$, l'élément $\vec{x}' := (x_{i_i}) \in \prod_{i=1,\dots,r} \mathcal{P}(\mathcal{U}_{i_i})$ est annulé par $\Delta_{\mathcal{R}'}$ et il existe $y_{\mathcal{R}'} \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ (unique) tel que $\phi_{i_i}(y_{\mathcal{R}'}) = x_{i_i}$, pour tout $i = 1,\dots,r$. Ces raisonnements s'appliquent évidemment à tout sous-recouvrement fini $\mathcal{R}''$ de $\mathcal{R}$, en particulier à ceux indexés par les parties $\mathfrak{A}'' \subseteq \mathfrak{A}$ de la forme $\mathfrak{A}'' := \mathfrak{A}' \cup \{i\}$, avec $i \in \mathfrak{A}$. L'élément $y_{\mathcal{R}''} \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, correspondant au même choix $(\ddagger)$ de

$\vec{x}$, est alors nécessairement égal à $y_{\mathcal{R}'}$ puisque $\Pi_{\mathcal{R}'}$ est injective. Il s'ensuit que $\phi_i(y_{\mathcal{R}'}) = x_i$ pour tout $i \in \mathfrak{A}$, et la suite $(*)$ est exacte.

Lorsque $\mathcal{R} = \{\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}\}_{i\in\mathfrak{A}}$ est un recouvrement fini quelconque de recouvrement correspondant $\overline{\mathcal{U}} = \bigcup_i \overline{\mathcal{U}}_i$, on se donne pour chaque $i \in \mathfrak{A}$ un recouvrement fini $\overline{\mathcal{U}}_i = \bigcup_{i'\in\mathfrak{B}} \overline{U}_{i,i'}$ par des ouverts *principaux dans* $\overline{\mathcal{U}}$ et un recouvrement $\mathcal{R}_i = \{\Phi_{i,i'} : \mathcal{U}_{i,i'} \to \mathcal{U}_i\}$ de $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$ le relevant. Le recouvrement $\mathcal{R}_i$ est alors fini et principal de même que le recouvrement composé $\mathcal{R}_* = \{\mathcal{U}_{i,i'} \to \mathcal{U}\}$ et les suites $\mathcal{P}(\mathcal{R}_i)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{R}_*)$ sont exactes par hypothèse. On considère alors le morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} \to \mathcal{P}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\Pi_{\mathcal{R}}} & \prod_{i\in\mathfrak{A}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_i) & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{R}}} & \prod_{i,i'\in\mathfrak{A}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_i \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_{i'}) \\
\| & & \downarrow \prod \phi_{i,i'} & & \downarrow \\
\mathbf{0} \to \mathcal{P}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\Pi_{\mathcal{R}_*}} & \prod_{i\in\mathfrak{A};i'\in\mathfrak{B}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_{i,i'}) & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{R}_*}} & \prod_{i,i'\in\mathfrak{A};i',i''\in\mathfrak{B}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_{i,i'} \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_{i',i''})
\end{array}$$

où les morphismes verticaux sont donnés par les produits des morphismes de restriction. Pour tout $(x_i) \in \ker(\Delta_{\mathcal{R}})$, l'élément $(y_{i,i'}) := \prod \phi_{i,i'}((x_i))$ appartient à $\ker(\Delta(\mathcal{R}_*))$ et il existe un élément de $x \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tel que $\Pi_{\mathcal{R}_*}(x) = (y_{i,i'})$. L'égalité $\Pi_{\mathcal{R}}(x) = (x_i)$ découle alors de l'injectivité de $\prod \phi_{i,i'}$ (pour chaque i donné). ∎

1.5.2. Notation. On notera $\text{Préf}_{\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\boldsymbol{Z})$ et $\text{Mod}_{\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\boldsymbol{Z})$ respectivement la catégorie des préfaisceaux et des faisceaux de $\boldsymbol{Z}$-modules sur le site $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$.

§2. Sous-sites de Meredith

2.1 Rappel de résultats

Dans les sections suivantes nous allons utiliser quelques résultats de base établis dans les articles de Monsky-Washnitzer ([MW]) et de Meredith ([M]) parfois sous des hypothèses générales plus fortes que celles requises pour leur démonstration. Nous donnons maintenant la liste de ces résultats valables uniquement sous l'hypothèse que l'anneau $\boldsymbol{R}$ est nœthérien([1]).

a) Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ le morphisme canonique $\varphi_j : \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^j \cdot \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{I}^j \cdot \boldsymbol{A}^\dagger$ est bijectif, quel que soit $j \in \mathbb{N}$.

b) Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f.
   i) $\boldsymbol{A}$ est quotient de $\boldsymbol{R}[\vec{X}]^\dagger$ où $\vec{X}$ désigne une liste finie de variables.
   ii) $\boldsymbol{A}$ est noethérienne.

c) Si $\boldsymbol{A}$ est f.c.t.f. $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A})$ est un anneau de Zariski.

d) Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre. Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}^\dagger$ sont nœthériennes, $\boldsymbol{A}^\dagger$ est plate sur $\boldsymbol{A}$.

e) Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini ou f.c.t.f.
   i) Pour tout $f \in \boldsymbol{A}$, l'algèbre $(\boldsymbol{A}_f)^\dagger = ((\boldsymbol{A}^\dagger)_f)^\dagger$ est plate sur $\boldsymbol{A}$.

[1] Voir [MW] pour les assertions (a,b,c) et [M] pour les autres.

ii) Soient $f,g\in \boldsymbol{A}$ tels que $\overline{f}$ est inversible dans $\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{g}}$.
L'application naturelle $\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}}\to\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{g}}$ est la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ d'un et d'un unique morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres $(\boldsymbol{A}_f)^\dagger\to(\boldsymbol{A}_g)^\dagger$.

2.1.1. Notation. Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ et tout $f\in\boldsymbol{A}^\dagger$, on notera $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}:=((\boldsymbol{A}^\dagger)_f)^\dagger$.

2.1.2. Convention. Dans la suite une $\boldsymbol{R}$-algèbre sera toujours de type fini ou f.c.t.f. sauf mention expresse du contraire.

2.2 Rappel sur les schémas formels faibles affines de Meredith

2.2.1. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini. Notons $\boldsymbol{X}:=\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et $\overline{\boldsymbol{X}}:=\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$ de schémas affines respectivement notés $(\boldsymbol{X},\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ et $(\overline{\boldsymbol{X}},\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$. Dans [M], Meredith introduit un nouvel espace annelé : «*le schéma formel faible affine associé à* $\boldsymbol{A}$», noté $(\overline{\boldsymbol{X}},\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$, où

$$\begin{cases}\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}:=\text{faisceau associé au préfaisceau défini sur la base des ouverts}\\ \text{principaux de }\overline{\boldsymbol{X}}\text{ par }D(\overline{f})\rightsquigarrow(\boldsymbol{A}_f)^\dagger,\text{ où }f\in\boldsymbol{A}\text{ est un relèvement}\\ \text{arbitrairement choisi de }\overline{f}\in\overline{\boldsymbol{A}}.\end{cases}$$

L'énoncé (0e-0ii) de 2.1 justifie cette définition.

Terminologie. Dans la suie l'expression «*schéma* (*affine*) *de Meredith associé à* $\boldsymbol{A}$» sera synonyme de «*schéma formel faible affine associé à* $\boldsymbol{A}$».

2.2.2. Meredith s'intéresse plus généralement au foncteur de la catégorie des $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules (à gauche) vers la catégorie des $\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$-modules (à gauche), noté $(\widetilde{\ }):\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger)\rightsquigarrow\mathrm{Mod}(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$, qui fait correspondre au module $\boldsymbol{M}$ le faisceau $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ sur $\overline{\boldsymbol{X}}$ associé au préfaisceau défini sur la base des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ par $D(\overline{f})\rightsquigarrow(\boldsymbol{A}_f)^\dagger\otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger}\boldsymbol{M}$.

Le théorème suivant rassemble plusieurs résultats de [M].

2.2.3. Théorème ([M]). *Si* $\boldsymbol{R}$ *est un anneau local nœthérien d'idéal maximal* $\boldsymbol{I}$ *et si* $\boldsymbol{A}$ *est une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre de type fini :*
a) *Le foncteur* $(\widetilde{\ }):\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger)\rightsquigarrow\mathrm{Mod}(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ *est exact.*
Pour tout $\boldsymbol{A}^\dagger$*-module de type fini* $\boldsymbol{M}$ *et tout ouvert principal* $\overline{U}\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}$ *:*
b) *Le morphisme canonique* $\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger}\boldsymbol{M}\to\Gamma(\overline{U};\widetilde{\boldsymbol{M}})=H^0(\overline{U};\widetilde{\boldsymbol{M}})$ *est bijectif.*
c) $H^i(\overline{U};\widetilde{\boldsymbol{M}})=0$, *pour tout* $i>0$.

2.2.4. Généralisation des résultats de Meredith. Nous allons redémontrer le théorème 2.2.3 avec comme seule condition sur $\boldsymbol{R}$ d'être nœthérien et en supprimant l'hypothèse de finitude sur le $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$. Nous suivrons de près une approche classique du théorème d'acyclicité de Serre pour les faisceaux quasi-cohérents sur un schéma affine dont nous rappelons maintenant le point central en guise de motivation pour la suite.

• *Étant donnés une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre de type fini* $\boldsymbol{A}$ *et* $f_1, f_2 \in \boldsymbol{A}$*, le complexe de Mayer-Vietoris*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \to \boldsymbol{A} & \xrightarrow{\epsilon} & \boldsymbol{A}_{f_1} \oplus \boldsymbol{A}_{f_2} & \xrightarrow{\delta_0} & \boldsymbol{A}_{f_1 f_2} \to \mathbf{0} \\ a & \longmapsto & (a,a) & & \\ & & (x_1,x_2) & \longmapsto & (x_1 - x_2) \end{array} \qquad (\diamond)$$

est exact lorsque $(f_1, f_2) = \boldsymbol{A}$.

L'énoncé résulte pour l'essentiel du fait que le noyau du morphisme canonique $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_{f_i}$ est l'idéal des éléments $a \in \boldsymbol{A}$ tels $f_i^N a = 0$ pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand. À l'aide d'une égalité $1 = \xi_1 f_1^N + \xi_2 f_2^N$, obtenue par exemple à partir de $1 = \zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2$ en développant $1 = \big(\zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2\big)^{2N}$, on déduit que $a = \xi_1 f_1^N a + \xi_2 f_2^N a$, d'où l'injectivité de ϵ. Ensuite, lorsque l'on se donne des éléments $x_i = a_i / f_i^N \in \boldsymbol{A}_{f_i}$ avec $a_i \in \boldsymbol{A}$, la condition $x_1 = x_2$ dans $\boldsymbol{A}_{f_1 f_2}$, équivaut à la condition sur $\boldsymbol{A}$:

$$(f_1 f_2)^M \big(f_2^N a_1 - f_1^N a_2\big) = 0, \text{ pour } M \in \mathbb{N} \text{ assez grand.} \qquad (\star)$$

On choisit maintenant une égalité de la forme $1 = \xi_1 f_1^{M+N} + \xi_2 f_2^{M+N}$ et l'élément

$$a := \xi_1 f_1^M a_1 + \xi_2 f_2^M a_2 \in \boldsymbol{A} \qquad (\star\star)$$

vérifie $a = x_i$ dans $\boldsymbol{A}_{f_i}$ pour $i = 1, 2$, d'où l'exactitude à gauche de $(\diamond)$. Enfin, à partir de l'égalité évidente dans $\boldsymbol{A}_{f_1 f_2}$

$$\frac{1}{f_1 f_2} = \frac{\zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2}{f_1 f_2} = \frac{\zeta_1}{f_2} + \frac{\zeta_2}{f_1}$$

on obtient par induction des décompositions

$$\Big(\frac{1}{f_1 f_2}\Big)^m = R_{1,m}\Big(\zeta_1, \zeta_2, \frac{1}{f_1}\Big) + R_{2,m}\Big(\zeta_1, \zeta_2, \frac{1}{f_2}\Big)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ avec $R_{i,m} \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$. En particulier, un élément de $\boldsymbol{A}_{f_1 f_2}$ est toujours de la forme

$$\frac{a}{(f_1 f_2)^N} = R_{1,m}\Big(\zeta_1, \zeta_2, \frac{1}{f_1}\Big)\, a + R_{2,m}\Big(\zeta_1, \zeta_2, \frac{1}{f_2}\Big)\, a$$

avec $a \in \boldsymbol{A}$ et il appartient bien à l'image de δ_0.

Une fois établie l'exactitude des suites $(\diamond)$, des considérations générales sur la cohomologie de Čech que nous rappellerons dans 2.2.9 donnent l'acyclicité des faisceaux des $\mathcal{O}$-modules engendrés par leurs sections globales. C'est par cette démarche que nous allons généraliser le théorème 2.2.3. Nous montrerons donc dans un premier temps que l'analogue †-adique de $(\diamond)$, la suite

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A}^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger} (\boldsymbol{A}_{f_1})^\dagger \oplus (\boldsymbol{A}_{f_2})^\dagger \xrightarrow{\delta_0^\dagger} (\boldsymbol{A}_{f_1 f_2})^\dagger \to \mathbf{0},$$

est exacte ce pourquoi il nous faudra, comme dans le rappel ci-dessus, la description du noyau du morphisme canonique $\boldsymbol{A}^\dagger \to (\boldsymbol{A}_f)^\dagger$ (lemme 2.2.5) et plus important encore des estimations des degrés M et N dans $(\star)$ et $(\star\star)$ nécessaires pour l'étude de la convergence †-adique (lemme technique 2.2.6).

2.2.5. Lemme. *Soit f un élément d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ supposée de type fini (ou f.c.t.f.). Pour tout $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$, le noyau du morphisme canonique $\nu^\dagger_{f,\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{M} \to (\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$ est le sous-module des éléments $m \in \boldsymbol{M}$ tels que $(f^N + w)\cdot m = 0$, pour certain $w \in \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^\dagger$ et pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand.*

En particulier, si $m \in \ker(\nu^\dagger_{f,\boldsymbol{M}})$, on a $f^N m \in (\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^\dagger)\cdot m$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ assez grand.

Démonstration. Supposons dans un premier temps le module $\boldsymbol{M}$ de type fini sur $\boldsymbol{A}^\dagger$. Le $(\boldsymbol{A}_f)^\dagger$-module $(\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$ est alors de type fini, donc séparé, pour le topologie $\boldsymbol{I}$-adique (2.1-0c) et le noyau du morphisme canonique :

$$\boldsymbol{M}_f := (\boldsymbol{A}^\dagger)_f \otimes \boldsymbol{M} \xrightarrow{\ \mu\ } (\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes \boldsymbol{M}$$

contient, par conséquent, l'adhérence $\bar{0}$ de 0 dans $\boldsymbol{M}_f$ pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. D'autre part, les réductions modulo $\boldsymbol{I}^m$ sont des isomorphismes et un élément du noyau de μ appartient à $\bar{0}$. Donc $\ker(\mu) = \bar{0}$. Or, comme $(\boldsymbol{A}^\dagger)_f$ est nœthérien et que $\boldsymbol{M}_f$ est un $(\boldsymbol{A}^\dagger)_f$-module de type fini, on a $\boldsymbol{I}\cdot\bar{0} = \bar{0}$ et $(1+w)\cdot\ker(\mu) = 0$ pour un certain $w \in \boldsymbol{I}\cdot(\boldsymbol{A}^\dagger)_f$; autrement dit, $(f^N + w)\cdot\ker(\mu) = 0$ pour certains $N \in \mathbb{N}$ et $w \in \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^\dagger$. On conclut en remarquant que $\nu^\dagger_{f,\boldsymbol{M}}$ se factorise à travers le morphisme canonique $\nu_{f,\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}_f$, *i.e.* $\nu^\dagger_{f,\boldsymbol{M}} = \mu \circ \nu_{f,\boldsymbol{M}}$, de sorte que $\nu^\dagger_{f,\boldsymbol{M}}(m) = 0$, si et seulement si, $\nu_{f,\boldsymbol{M}}(m) \in \bar{0}$, autrement dit, si et seulement si, $\nu_{f,\boldsymbol{M}}\big((f^N + w)m\big) = 0$, ou encore $f^M\big((f^N + w)m\big) = 0$ pour certains $M, N \in \mathbb{N}$ et $w \in \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^\dagger$.

Dans le cas où $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{A}^\dagger$-module arbitraire, notons (m) le sous-module de $\boldsymbol{M}$ engendré par un élément $m \in \boldsymbol{M}$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (m) & \xhookrightarrow{\ \subseteq\ } & \boldsymbol{M} \\ {\scriptstyle \nu^\dagger_{f,(m)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu^\dagger_{f,\boldsymbol{M}}} \\ (\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes (m) & \xhookrightarrow{\ \mathrm{id}\otimes\subseteq\ } & (\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes \boldsymbol{M} \end{array}$$

où $(\mathrm{id}\otimes\subseteq)$ est injectif puisque l'algèbre $(\boldsymbol{A}_f)^\dagger$ est plate sur $\boldsymbol{A}^\dagger$ (2.1-0e-0i). Il s'ensuit que m appartient au noyau de $\nu^\dagger_{f,\boldsymbol{M}}$, si et seulement si, il appartient au noyau de $\nu^\dagger_{f,(m)}$ déjà étudié dans le paragraphe précédent. ∎

2.2.6. Lemme technique. *On se donne un élément P et un idéal $\boldsymbol{K}$ de l'algèbre de polynômes $\boldsymbol{R}[\vec{X}] := \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_\ell]$. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on note $\boldsymbol{I}^n[\vec{X}]_m$ le sous-$\boldsymbol{R}$-module des polynômes de $\boldsymbol{R}[\vec{X}]$ à coefficients dans $\boldsymbol{I}^n$ et de degré total majoré par m.*

Il existe des entiers positifs $N(P,\boldsymbol{K})$ et $M(P,\boldsymbol{K})$, tels que les ensembles :

$$\mathrm{C1}(P,\boldsymbol{K},n) = \Big\{ Q \in \boldsymbol{I}^n[\vec{X}] \;\Big|\; P^N Q \in \big(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{n+1}[\vec{X}]\big),\ \textit{pour } N \textit{ assez grand} \Big\}$$
$$\mathrm{C2}(P,\boldsymbol{K},n) = \Big\{ Q \in \boldsymbol{I}^n[\vec{X}] \;\Big|\; P^{N(P,\boldsymbol{K})} Q \in \big(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{n+1}[\vec{X}]_{m+M(P,\boldsymbol{K})}\big) \textit{ si } Q \in \boldsymbol{I}^n[\vec{X}]_m \Big\}$$

sont égaux, et ceci quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Plus généralement, si $Q\in\boldsymbol{I}^n[\vec{X}]_m$ *et si* $P^NQ\in\big(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{I}^{n+r}[\vec{X}]\big)$, *pour* N *assez grand et pour un certain* $r\in\mathbb{N}$, *alors :*

$$P^{rN(P,\boldsymbol{K})}Q\in\big(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{I}^{n+r}[\vec{X}]_{m+rM(P,\boldsymbol{K})}\big).$$

Démonstration. Pour chaque $n,m\in\mathbb{N}$, notons $F^{n,m}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\vec{X}]):=\boldsymbol{I}^n[\vec{X}]_mU^nT^m$, où U et T désignent des variables formelles. On munit $F^{n,m}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\vec{X}])$ de la structure de $\boldsymbol{R}$-module de $\boldsymbol{I}^n[\vec{X}]_m$ et l'on considère $F^{*,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\vec{X}]):=\bigoplus_{n,m\in\mathbb{N}}\boldsymbol{I}^n[\vec{X}]_mU^nT^m$ muni de la structure de $\boldsymbol{R}$-algèbre positivement graduée donnée par les égalités :

$$Q_1U^{n_1}T^{m_1}\cdot Q_2U^{n_2}T^{m_2}:=Q_1Q_2U^{n_1+n_2}T^{m_1+m_2},$$

pour tous $n_i,m_i\in\mathbb{N}$ et $Q_i\in\boldsymbol{I}^{n_i}[\vec{X}]_{m_i}$. La $\boldsymbol{R}$-sous-algèbre

$$F^{0,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\vec{X}])=\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}[\vec{X}]_1T\oplus\boldsymbol{R}[\vec{X}]_2T^2\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{R}[\vec{X}]_mT^m\oplus\cdots$$

est engendrée par $\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}[\vec{X}]_1T$, et $F^{*,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\vec{X}])$, vue comme $F^{0,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\vec{X}])$-algèbre, est engendrée par $\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{I}U$. Il s'ensuit que $F^{*,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\vec{X}])$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini et $F^{*,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\vec{X}])$ est un anneau nœthérien.

Ceci étant, l'inclusion $\mathrm{C2}(P,\boldsymbol{K},n)\subseteq\mathrm{C1}(P,\boldsymbol{K},n)$ est claire. Montrons la réciproque. L'ensemble des sommes finies $\sum_{n,m}Q_{n,m}U^nT^m$ où $Q_{n,m}\in\mathrm{C1}(P,\boldsymbol{K},n)$ est un idéal noté $\mathfrak{M}$ de $F^{*,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\vec{X}])$, il est donc de type fini et l'existence de $N(P,\boldsymbol{K})$ s'ensuit.

De même, pour chaque $M\in\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathfrak{M}(M)$ des éléments $\sum_{n,m}Q_{n,m}U^nT^m$ de $\mathfrak{M}$ tels que $P^{N(P,\boldsymbol{K})}Q_{n,m}\in\big(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{I}^{n+1}[\vec{X}]_{m+M}\big)$, est un idéal de $F^{*,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\vec{X}])$, et comme $\mathfrak{M}$ est la réunion de la suite croissante d'idéaux $\mathfrak{M}(0)\subseteq\mathfrak{M}(1)\subseteq\cdots\mathfrak{M}(M)\subseteq\cdots$, on a $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(M)$ pour M assez grand. On peut donc prendre pour $M(P,\boldsymbol{K})$ la borne inférieure de tels M.

La conclusion finale résulte d'un argument inductif évident. ∎

2.2.7. Théorème. *Soient* $\boldsymbol{A}^\dagger$ *une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre f.c.t.f. et* $f_1,f_2\in\boldsymbol{A}^\dagger$ *tels que* $(f_1,f_2)=\boldsymbol{A}^\dagger$. *La suite de Mayer-Vietoris*

$$\mathbf{0}\to\boldsymbol{A}^\dagger\xrightarrow{\epsilon^\dagger}\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_1]}\oplus\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_2]}\xrightarrow{\delta_0^\dagger}\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_1f_2]}\to\mathbf{0}\qquad(\star)$$

est exacte.

Démonstration. L'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ étant f.c.t.f., notons $\boldsymbol{A}$ la sous-$\boldsymbol{R}$-algèbre de $\boldsymbol{A}^\dagger$ engendrée par les éléments d'une famille finie de générateurs (†-adiques) de $\boldsymbol{A}^\dagger$, les éléments f_1,f_2 et des éléments $g_1,g_2\in\boldsymbol{A}^\dagger$ vérifiant $g_1f_1+g_2f_2=1$. La $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est alors de type fini et sa complétion †-adique s'identifie canoniquement à $\boldsymbol{A}^\dagger$. Dans la suite la notation '$\boldsymbol{A}^\dagger$' fera donc référence à la complétion †-adique de $\boldsymbol{A}$. On a :

$$\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[?]}=(\boldsymbol{A}_?)^\dagger\quad\text{et}\quad\boldsymbol{A}\cdot f_1+\boldsymbol{A}\cdot f_2=\boldsymbol{A}\qquad(\diamond)$$

Injectivité de $\epsilon^\dagger$. Pour $x\in\ker(\epsilon^\dagger)$, on a $\nu_i^\dagger(x)=0$ pour $i=1,\dots,r$. Il existe donc des entiers

N_i est des éléments $w_i \in \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^\dagger$ tels que $(f_i^{N_i}+w_i)\cdot x = 0$ (2.2.5). Comme $\boldsymbol{A}\cdot f_1 + \boldsymbol{A}\cdot f_2 = \boldsymbol{A}$, il existe $\xi_i \in \boldsymbol{A}$ tel que $\sum_i \xi_i f_i^{N_i} = 1$ et $\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(x)$ contient un élément de la forme $(1+w)$ avec $w \in \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^\dagger$ et donc $\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(x) = \boldsymbol{A}^\dagger$.

Exactitude du terme central de (⋆). Dans le morphisme canonique de complexes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \to & \boldsymbol{A}^\dagger & \xrightarrow{\epsilon^\dagger} & (\boldsymbol{A}_{f_1})^\dagger \oplus (\boldsymbol{A}_{f_2})^\dagger & \xrightarrow{\delta_0^\dagger} & (\boldsymbol{A}_{f_1f_2})^\dagger & \to & \mathbf{0} \\
 & & \subseteq\downarrow & & \subseteq\downarrow \quad \subseteq\downarrow & & \subseteq\downarrow & & \\
\mathbf{0} & \to & \widehat{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow{\widehat{\epsilon}} & \widehat{\boldsymbol{A}_{f_1}} \oplus \widehat{\boldsymbol{A}_{f_2}} & \xrightarrow{\widehat{\delta}_0} & \widehat{\boldsymbol{A}_{f_1f_2}} & \to & \mathbf{0}
\end{array}$$

les colonnes sont injectives puisque leurs réductions modulo les puissances $\boldsymbol{I}^m$ sont bijectives et que tous les algèbres considérées sont séparées pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. De même, la deuxième ligne est exacte puisqu'il en est ainsi de ses réductions modulo $\boldsymbol{I}^m$. Il s'ensuit que pour tout élément $\vec{z} = (z_1, z_2)$ de $(\boldsymbol{A}_{f_1})^\dagger \oplus (\boldsymbol{A}_{f_2})^\dagger$ annulé par $\delta_0^\dagger$, donc par $\widehat{\delta}_0$, il existe un (unique) élément $z \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ tel que $\widehat{\epsilon}(z) = \vec{z}$. **Nous allons prouver que $\boldsymbol{z \in A^\dagger}$.**

Un élément $\vec{z} \in (\boldsymbol{A}_{f_1})^\dagger \oplus (\boldsymbol{A}_{f_2})^\dagger$ est la donnée de deux familles finies $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$ (que l'on peut toujours supposer du même cardinal ℓ) avec $\overrightarrow{x_i} = \{x_{i,1}, \dots, x_{i,\ell}\} \subseteq \boldsymbol{A}_{f_i}$, et des suites :

$$\big(p_{i,0}(\overrightarrow{X_i}), p_{i,1}(\overrightarrow{X_i}), p_{i,2}(\overrightarrow{X_i}), \dots, p_{i,n}(\overrightarrow{X_i}), \dots\big)_i, \qquad \text{pour } i = 1,2,$$

de polynômes de $\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X_i}] := \boldsymbol{R}[X_{i,1}, \dots, X_{i,\ell}]$ vérifiant, pour $i = 1,2$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} p_{i,n} \in \boldsymbol{I}^n\big[\overrightarrow{X_i}\big], \quad \text{et} \\ \deg_{\overrightarrow{X_i}}(p_{i,n}) \leqslant (n+1)C, \end{cases}$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{N}$ indépendante de i et n. L'élément $\vec{z}$ est alors l'élément de $\widehat{\boldsymbol{A}_{f_1}} \oplus \widehat{\boldsymbol{A}_{f_2}}$ défini par la série :

$$\vec{z} = \sum_{n\geqslant 0} \begin{pmatrix} p_{1,n}(x_{1,1}, \dots, x_{1,\ell}) \\ p_{2,n}(x_{2,1}, \dots, x_{2,\ell}) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Par finitude de l'ensemble $\{x_{i,j}\}$, il existe un entier N, indépendant de (i,j), tel que :

$$x_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{f_i^N}, \quad \text{pour un certain } a_{i,j} \in \boldsymbol{A}.$$

Notons $\vec{a}$ la famille de 2ℓ éléments de $\boldsymbol{A}$:

$$\vec{a} = \{\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_r}\} = \{a_{1,1}, \dots, a_{1,\ell}, a_{2,1}, \dots, a_{2,\ell}\}$$

ainsi déterminée. En remplaçant $X_{i,j}$ par $A_{i,j}/F_i$, où $A_{i,j}$ et F_i désignent de nouvelles variables, on définit les polynômes $q_{i,n} \in \boldsymbol{R}[\overrightarrow{A_i}, F_i]$ par les égalités :

$$p_{i,n}(X_{i,1}, \dots, X_{i,\ell}) = p_{i,n}\Big(\frac{A_{i,1}}{F_i}, \dots, \frac{A_{i,\ell}}{F_i}\Big) = \frac{q_{i,n}(A_{i,1}, \dots, A_{i,\ell}, F_i)}{F_i^{(n+1)C}},$$

avec clairement :

$$\begin{cases} q_{i,n} \in \boldsymbol{I}^n[\overrightarrow{A_i}, F_i], \quad \text{et} \\ \deg_{\overrightarrow{A_i},F_i}(q_{i,n}) = (n+1)C. \end{cases}$$

L'élément $\vec{z}$ s'exprime donc également comme somme de la série :

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{n\geqslant 0} z_{1,n} \\ \sum\limits_{n\geqslant 0} z_{2,n} \end{pmatrix} = \sum_{n\geqslant 0} \begin{pmatrix} \dfrac{q_{1,n}(a_{1,1},\ldots,a_{1,\ell},f_1^N)}{(f_1^N)^{(n+1)C}} \\ \dfrac{q_{2,n}(a_{2,1},\ldots,a_{2,\ell},f_r^N)}{(f_2^N)^{(n+1)C}} \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Dans la suite on notera

$$\begin{cases} \vec{A} := \{\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}\} = \{A_{1,1},\ldots,A_{1,1},A_{2,1},\ldots,A_{2,\ell}\} \\ \vec{F} := \{F_1, F_2\} \quad \text{et} \quad \vec{Z} := \{Z_1, Z_2\} \end{cases}$$

Choisissons des éléments $\zeta_1, \zeta_2 \in \boldsymbol{A}$ tels que $\zeta_1 f_1^N + \zeta_2 f_2^N = 1$, et considérons le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}] & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \boldsymbol{A} \\ A_{i,j} & \longmapsto & a_{i,j} \\ F_i & \longmapsto & f_i^N \\ Z_i & \longmapsto & \zeta_i \end{array} \qquad i = 1,2 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant j \leqslant \ell.$$

Commentaire : Le morphisme α n'est pas nécessairement surjectif, mais comme $\boldsymbol{A}$ a été supposée de type fini sur $\boldsymbol{R}$, nous pouvons rajouter si besoin de nouvelles variables à la liste $\vec{A}$ de manière à rendre α soit surjective ce que nous supposerons désormais. Dans ce cas, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout idéal $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{R}[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}]$ contenant $\ker(\alpha)$, on a

$$\begin{cases} \alpha^{-1}(\boldsymbol{I}^m\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^m[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}], \\ \sum_{i=1}^r Z_i F_i \in 1 + \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}], \end{cases}$$

Dans la suite $\boldsymbol{K} := \ker(\alpha)$.

Pour $m \in \mathbb{N}$ donné, définissons des polynômes $Q_{1,m}, Q_{2,m} \in \boldsymbol{R}[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}]$ par les égalités formelles :

$$\sum_{n=0}^m \frac{q_{i,n}(\overrightarrow{A_i},F_i)}{F_i^{(n+1)C}} = \frac{\sum_{n=0}^m F_i^{(m-n)C} q_{i,n}(\overrightarrow{A_i},F_i)}{F_i^{(m+1)C}} =: \frac{Q_{i,m}(\overrightarrow{A_i},F_i)}{F_i^{(m+1)C}}.$$

On a $\deg_{\vec{A},\vec{F},\vec{Z}}(Q_{i,m}) = (m+1)C$ et grâce à la surjectivité de α et en appliquant 2.2.5 aux égalités "$z_i = z_{i'}$ dans $(\boldsymbol{A}_{f_i f_{i'}})^\dagger \otimes \boldsymbol{M}$", on a (*cf.* ($\star$) p. 12) :

$$(F_1F_2)^M \Big(F_2^{(m+1)C} Q_{1,m} - F_1^{(m+1)C} Q_{2,m} \Big) \in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{m+1}[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}],$$

pour $M \in \mathbb{N}$ assez grand. On en déduit par l'égalité $\mathrm{C1}(F_1F_2,\boldsymbol{K},0) = \mathrm{C2}(F_1F_2,\boldsymbol{K},0)$ de 2.2.6, l'existence de $N(F_1F_2,\boldsymbol{K}) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(F_1F_2)^{(m+1)N(F_1F_2,\boldsymbol{K})} \Big(F_2^{(m+1)C} Q_{1,m} - F_1^{(m+1)C} Q_{2,m} \Big) \in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{m+1}[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}],$$

et ceci **pour tout $m \in \mathbb{N}$.**

On notera dans la suite (*cf.* 2.2.5)

$$\begin{cases} \mathfrak{N} := \{N(F_1,\boldsymbol{K}), N(F_2,\boldsymbol{K}), N(F_1F_2,\boldsymbol{K})\} & \text{et} \\ \mathfrak{M} := \{M(F_1,\boldsymbol{K}), M(F_2,\boldsymbol{K}), M(F_1F_2,\boldsymbol{K})\} & \text{(que nous n'avons pas encore utilisé)} \end{cases}$$

Pour chaque $L \in \mathbb{N}$, on choisit des polynômes $\Xi(L)_i \in \boldsymbol{R}[\vec{F},\vec{Z}]$ vérifiant :

$$\begin{cases} (Z_1F_1 + Z_2F_2)^{2L} = \Xi(L)_1 F_1^L + \Xi(L)_2 F_2^L, & \text{avec} \\ \deg_{\vec{F},\vec{Z}}\big(\Xi(L)_i\big) = 3L \end{cases} \tag{Ξ}$$

en prenant $L := (m+1)C + (m+1)\mathfrak{N}$, on pose de manière analogue à ($\diamond\diamond$) (p. 12) :

$$R_m := \textstyle\sum_{i=1}^2 \Xi\big((m+1)(\mathfrak{N}+C)\big)_i \, F_i^{(m+1)\mathfrak{N}} Q_{i,m} \quad \in \boldsymbol{R}[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}]_{D_m},$$

où $D_m := \deg_{\vec{A},\vec{F},\vec{Z}}(R_m) = 4(m+1)(\mathfrak{N}+C)$.

On a $R_m - R_{m-1} \in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^m[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}]$ par construction, et, toujours d'après 2.2.6 :

$$F_i^{m\mathfrak{N}}(R_m - R_{m-1}) \in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^m[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}]_{D_m + m\mathfrak{M}},$$

pour $i = 1, 2$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} R_m - R_{m-1} &= \textstyle\sum_{i=1}^r \Xi(m\mathfrak{N})_i \, F_i^{m\mathfrak{N}}(R_m - R_{m-1}) \\ &\in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^m[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}]_{D_m + m(\mathfrak{M}+(r-1)\mathfrak{N})} \end{aligned}$$

et il existe $P_m \in \boldsymbol{R}[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}]$ vérifiant $P_m = R_m - R_{m-1} \bmod \boldsymbol{K}$, de degré majoré par

$$D_m + m\big(\mathfrak{M} + (r-1)\mathfrak{N}\big) = 4(m+1)(\mathfrak{N}+C) + m\big(\mathfrak{M} + (r-1)\mathfrak{N}\big) \leqslant (m+1)\widetilde{C}$$

pour un certain $\widetilde{C} \in \mathbb{N}$ **indépendant** de m. La série infinie $\alpha(R_0) + \sum_{1\leqslant n} \alpha(P_n)$ représente donc un élément w de $\boldsymbol{A}^\dagger$ tel que $w = \alpha(R_m)$ modulo $\boldsymbol{I}^{m+1}$. Comme d'autre part $\alpha(R_m)$ est, par construction, un "recollement" des séries z_i modulo $\boldsymbol{I}^{m+1}$, on conclut que $w = z \bmod \boldsymbol{I}^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et donc $w = z$, cqfd.

Exactitude à droite de ($\star$). Étant donné un système de générateurs de $\boldsymbol{A}$ en tant que $\boldsymbol{R}$-algèbre $\{a_1,\dots,a_\ell\}$, l'ensemble $\{a_i, 1/(f_1f_2)\}$ est un système de générateurs de $\boldsymbol{A}_{f_1f_2}$ et un élément $z \in (\boldsymbol{A}_{f_1f_2})^\dagger$ s'exprime comme série

$$z = \textstyle\sum_{n>0} P_n\Big(a_1,\dots,a_l,\dfrac{1}{f_1f_2}\Big) \quad \text{où} \quad \begin{cases} P_n \in \boldsymbol{I}^n[X_1,\dots,X_\ell,T]\,; \\ \deg_{\vec{X},T}(P_n) < C(n+1) \end{cases}$$

Or, l'égalité $1 = g_1f_1 + g_2f_2$ donne aussitôt $\frac{1}{f_1f_2} = \frac{g_2}{f_1} + \frac{g_1}{f_2}$, et par une construction inductive simple

$$\Big(\frac{1}{f_1f_2}\Big)^M = Q_{1,M}\Big(g_1,g_2,\frac{1}{f_1},\widehat{\frac{1}{f_2}}\Big) + Q_{2,M}\Big(g_1,g_2,\widehat{\frac{1}{f_1}},\frac{1}{f_2}\Big), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q_{i,M} \in \boldsymbol{R}[Y_1,Y_2,Y_3,Y_4] \\ \deg_{\vec{Y}}(Q_{i,M}) = 2M \end{cases}$$

pour tout $M \in \mathbb{N}$. En substituant les monômes T^M qui interviennent dans le développement

de P_n par $Q_{1,M}+Q_{2,M}$ on obtient la décomposition de polynômes

$$\begin{cases} \text{(i) } P_n(\vec{X},T)=R_{1,n}(\vec{X},\vec{Y})+R_{2,n}(\vec{X},\vec{Y}) \\ \text{(ii) } R_{1,n},R_{2,n}\in \boldsymbol{I}^n[\vec{X},\vec{Y}] \\ \text{(iii) } \deg_{\vec{X},\vec{Y}}(R_{i,n})<2C(n+1) \end{cases}$$

et on pose

$$z_i:=\textstyle\sum_{n\geqslant 0}R_{i,n}\Big(a_1,\dots,a_\ell,g_1,g_2,\dfrac{1}{f_i}\Big).$$

Les conditions (ii,iii) assurent la convergence de cette série aussi bien dans $(\boldsymbol{A}_{f_1f_2})^\dagger$ que dans $(\boldsymbol{A}_{f_i})^\dagger$ ce qui termine la démonstration du théorème puisque $z=z_1+z_2$. ∎

2.2.8. Commentaire. L'énoncé du théorème 2.2.7 admet la reformulation suivante :

Théorème. *Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini et $f_1,f_2\in\boldsymbol{A}$ tels que $\overline{\boldsymbol{A}}\cdot\overline{f}_1+\overline{\boldsymbol{A}}\cdot\overline{f}_2=\overline{\boldsymbol{A}}$. Le complexe*

$$\mathbf{0}\to\boldsymbol{A}^\dagger\xrightarrow{\epsilon^\dagger}\big(\boldsymbol{A}_{f_1}\big)^\dagger\oplus\big(\boldsymbol{A}_{f_2}\big)^\dagger\xrightarrow{\delta_0^\dagger}\big(\boldsymbol{A}_{f_1f_2}\big)^\dagger\to\mathbf{0}$$

est exact.

Preuve. Si $g_1,g_2\in\boldsymbol{A}$ sont tels que $g_1f_1+g_2f_2\in 1+\omega$ avec $\omega\in\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}$, l'élément $1+\omega$ est inversible dans $\boldsymbol{A}^\dagger$ et $\boldsymbol{A}^\dagger\cdot f_1+\boldsymbol{A}^\dagger\cdot f_2=\boldsymbol{A}^\dagger$. D'autre part, $(\boldsymbol{A}_?)^\dagger=\boldsymbol{A}^\dagger_{[?]}$. ∎

2.2.9. Rappels sur la cohomologie de Čech. Dans cette partie on s'intéresse à un espace topologique $\boldsymbol{Y}$ admettant une famille d'ouverts $\mathcal{B}$ telle que

$\mathcal{B}$-i) Tout ouvert de $\boldsymbol{Y}$ peut être recouvert par des ouverts de $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$-ii) De tout recouvrement d'un ouvert de $\mathcal{B}$ par des ouverts de $\mathcal{B}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini.

$\mathcal{B}$-iii) $\mathcal{B}$ est stable par intersection, *i.e.* si $U_1,U_2\in\mathcal{B}$ alors $U_1\cap U_2\in\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$-iv) Pour tous $U_1,\dots,U_\ell\in\mathcal{B}$ de réunion $U\in\mathcal{B}$, il existe $V\in\mathcal{B}$ tel que

$$U=U_1\cup V\quad\text{et}\quad V\subseteq U_2\cup\cdots\cup U_\ell.$$

Exemples

- $\boldsymbol{Y}=$ Spec(anneau) et $\mathcal{B}$ l'ensemble de ses ouverts principaux.
  Vérifions 0iv : l'inclusion $D(f)\subseteq D(f_0)\cup D(f_1)\cup\cdots\cup D(f_\ell)$ équivaut à l'existence d'éléments $\zeta_0,\zeta_1,\dots,\zeta_\ell\in\boldsymbol{A}_f$ tels que $1=\sum_{i=0}^\ell\zeta_if_i$. En fixant une telle partition de l'unité, la même raison donne $W=D(1-\zeta_0f_0)\subseteq D(f_1)\cup\cdots\cup D(f_\ell)$. On prend alors $V=U\cap W$.
- $\boldsymbol{Y}$ l'espace topologique sous-jacent à un schéma séparé et $\mathcal{B}$ l'ensemble de ses ouverts affines.

A partir de maintenant, l'espace $\boldsymbol{Y}$ et l'ensemble $\mathcal{B}$ sont fixés. L'ensemble $\mathcal{B}$ muni des inclusions entre ses ouverts est une sous-catégorie de la catégories des ouverts de $\boldsymbol{Y}$, on peut donc parler de préfaisceau de groupes abéliens sur $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{P}$ un tel préfaisceau. Étant donnée une famille $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in(\mathfrak{A},\leqslant)}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ de réunion U, on définit pour chaque $n\in\mathbb{N}$ «*le groupe des n-cochaînes de Čech à valeurs dans $\mathcal{P}$ relatives à $\mathcal{U}$*», c'est le groupe :

$$\check{C}^n(\mathcal{U};\mathcal{P}):=\prod_{i_0<i_1<\cdots<i_n}\mathcal{P}(U_{i_0\ldots i_\ell})$$

où $U_{i_0\ldots i_\ell}:=U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_n}$. Le «*$n$-cobord*» est l'application :

$$\begin{array}{rcl}\delta_n:\check{C}^n(\mathcal{U};\mathcal{P}) & \longrightarrow & \check{C}^{n+1}(\mathcal{U};\mathcal{P})\\ \omega & \longmapsto & \delta_n(\omega)_{i_0,\ldots,i_{n+1}}=\sum_{k=0,\ldots,n+1}(-1)^k\omega_{i_0,\ldots,\widehat{i_k},\ldots,i_{n+1}}\end{array}$$

qui vérifie $\delta_{n+1}\circ\delta_n=0$, d'où «*le complexe de Čech de $\mathcal{P}$ relatif à $\mathcal{U}$*» :

$$(\check{C}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}),\delta_*):=\left(\mathbf{0}\to\check{C}^0(\mathcal{U};\mathcal{P})\xrightarrow{\delta_0}\check{C}^1(\mathcal{U};\mathcal{P})\xrightarrow{\delta_1}\cdots\cdots\xrightarrow{\delta_{k-1}}\check{C}^k(\mathcal{U};\mathcal{P})\xrightarrow{\delta_k}\cdots\right)$$

Lorsque $U\in\mathcal{B}$, l'«*augmentation*» $\epsilon(U):\mathcal{P}(U)\to\check{C}^0(\mathcal{U};\mathcal{P})=\prod_{i\in\mathfrak{A}}\mathcal{P}(U_i)$, produit des morphismes de restriction $\mathcal{P}(U)\to\mathcal{P}(U_i)$, est à valeurs dans $\check{H}^0(\mathcal{U};\mathcal{P})$.

La «*cohomologie de Čech de $\mathcal{P}$ relative à $\mathcal{U}$*» est la cohomologie de $(\check{C}^*(\mathcal{U};\mathcal{P});\delta_*)$, elle est notée $\check{H}^*(\mathcal{U};\mathcal{P})$.

2.2.10. Proposition. *Avec les données précédentes, supposons pour tous $U,U_1,U_2\in\mathcal{B}$ tels que $U=U_1\cup U_2$ que le complexe de Čech augmenté :*

$$\mathbf{0}\to\mathcal{P}(U)\xrightarrow{\epsilon(U)}\mathcal{P}(U_1)\oplus\mathcal{P}(U_2)\xrightarrow{\delta_0}\mathcal{P}(U_1\cap U_2)\to\mathbf{0}\qquad(*)$$

est ***exact****. Alors*

a) *Pour toute famille $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in\mathfrak{A}}$ d'ouverts de $\mathcal{B}$ de réunion un ouvert $U\in\mathcal{B}$, le complexe de Čech augmenté :*

$$\mathbf{0}\to\mathcal{P}(U)\xrightarrow{\epsilon(U)}\check{C}^0(\mathcal{U};\mathcal{P})\xrightarrow{\delta_0}\check{C}^1(\mathcal{U};\mathcal{P})\xrightarrow{\delta_1}\cdots\xrightarrow{\delta_{i-1}}\check{C}^i(\mathcal{U};\mathcal{P})\xrightarrow{\delta_i}\cdots$$

est ***exact****.*

b) *Soit $\widetilde{\mathcal{P}}$ le faisceau sur $\boldsymbol{Y}$ engendré par $\mathcal{P}$, alors pour tout ouvert $U\in\mathcal{B}$:*

i) *Le morphisme canonique $\mathcal{P}(U)\to H^0(U;\widetilde{\mathcal{P}})$ est bijectif.*

ii) *$H^i(U;\widetilde{\mathcal{P}})=0$, pour tout $i>0$.*

Démonstration

a) Par récurrence sur le plus petit cardinal $\ell(\mathcal{U})$ des sous-familles finies de $\mathcal{U}$ qui recouvrent U (0ii). Lorsque $\ell(\mathcal{U})=1$ on a $U_i=U$ pour un certain $i\in\mathfrak{A}$ et le complexe de Čech augmenté est homotope à zéro ([2]). Supposons maintenant $\ell(\mathcal{U})>1$ et (a) démontré pour tout

[2] *Cf.* [Go] p. 222, dernier paragraphe de § 5.7.

recouvrement $\mathcal{V}$ d'un ouvert de $\mathcal{B}$ vérifiant $\ell(\mathcal{V}) < \ell(\mathcal{U})$. Notons $\ell := \ell(\mathcal{U})$, soit $U_1, \dots, U_\ell$ une sous-famille minimale de $\mathcal{U}$ de réunion U et soit $V \in \mathcal{B}$ vérifiant 0iv, *i.e.*

$$U = U_1 \cup V \quad \text{et} \quad V = \bigcup\nolimits_{k=2}^{\ell} (V \cap U_k)\,.$$

On considère alors le bicomplexe

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{0} \downarrow & \mathbf{0} \downarrow \\
\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{P}(U) & \xrightarrow{\epsilon(U)} & \check{C}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
\mathbf{0} \to \mathcal{P}(U_1) \oplus \mathcal{P}(V) & \xrightarrow{\epsilon(U_1)\oplus\epsilon(V)} & \check{C}^*(U_1 \cap \mathcal{U};\mathcal{P}) \oplus \check{C}^*(V \cap \mathcal{U};\mathcal{P}) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{P}(U_1 \cap V) & \xrightarrow{\epsilon(U_1\cap V)} & \check{C}^*(U_1 \cap V \cap \mathcal{U};\mathcal{P}) \\
 & \downarrow \mathbf{0} & \downarrow \mathbf{0}
\end{array} \qquad (\diamond)$$

où les colonnes sont définies à l'aide des suites

$$\mathbf{0} \to \mathcal{P}(U_{i_1\dots i_n}) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{P}(U_1 \cap U_{i_1\dots i_n}) \oplus \mathcal{P}(V \cap U_{i_1\dots i_n}) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{P}(U_1 \cap V \cap U_{i_1\dots i_n}) \to \mathbf{0}\,,$$

qui sont **exactes** par l'hypothèse de la proposition, quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $i_j \in \mathfrak{A}$. Le complexe de Čech augmenté $\mathbf{0} \to \mathcal{P}(U) \to \check{C}^*(\mathcal{U};\mathcal{P})$ est donc quasi-isomorphe au complexe simple associé au sous-bicomplexe des lignes inférieures de $(\diamond)$. Or, ces lignes sont exactes par hypothèse de récurrence puisque $\ell(U_1 \cap U) = 1$, $\ell(V \cap \mathcal{U}) \leqslant \ell - 1$ et $\ell(U_1 \cap V \cap \mathcal{U}) \leqslant \ell - 1$ par construction. Ceci termine la preuve de (a).

b) Résulte de considérations générales sur la cohomologie de Čech que nous résumons (*cf.* [Go] § 5.8). Pour tout ouvert $W \subseteq \boldsymbol{Y}$ et chaque recouvrement $\mathcal{U}$ de W par des ouverts de $\mathcal{B}$ on dispose du complexe de Čech $\check{C}^*(\mathcal{U};\mathcal{P})$. Les propriétés 2.2.9-($\mathcal{B}$-$*$) assurent l'existence de raffinements pour deux tels recouvrements et on peux définir une cohomologie de Čech relative à $\mathcal{B}$, notée $\check{H}^*_{\mathcal{B}}(W;\mathcal{P})$, comme limite inductive des $\check{H}^*(\mathcal{U};\mathcal{P})$ suivant une famille cofinale convenable de recouvrements (*loc.cit.*). La correspondance $W \rightsquigarrow \check{H}^*_{\mathcal{B}}(W;\mathcal{P})$ définit alors naturellement un préfaisceau **sur** $\boldsymbol{Y}$ que nous notons $\check{\mathcal{H}}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{P})$. D'après (a) on a

$$\Gamma(U;\check{\mathcal{H}}^0_{\mathcal{B}}(\mathcal{P})) = \mathcal{P}(U)\,, \text{ pour tout } U \in \mathcal{B}.$$

Ces mêmes raisonnements appliqués au préfaisceau $\check{\mathcal{H}}^0_{\mathcal{B}}(\mathcal{P})$ sur $\boldsymbol{Y}$ montrent que l'application canonique $\check{\mathcal{H}}^0_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}) \to \check{\mathcal{H}}^0(\check{\mathcal{H}}^0_{\mathcal{B}}(\mathcal{P})) = \widetilde{\mathcal{P}}$ est bijective ce qui prouve (b-i). Il s'ensuit que le morphisme canonique

$$\check{H}^i_{\mathcal{B}}(W;\mathcal{P}) \to \check{H}^i(W;\widetilde{\mathcal{P}})$$

est bijectif pour tout ouvert $W \subseteq \boldsymbol{Y}$. En particulier, $\check{H}^i(U;\widetilde{\mathcal{P}}) = 0$ pour $i > 0$ et $U \in \mathcal{B}$ et le théorème 5.9.2 dans [Go] qui permet de relier la cohomologie de Čech et la cohomologie de faisceaux s'applique ; le morphisme canonique

$$\check{H}^i(W;\widetilde{\mathcal{P}}) \to H^i(W;\widetilde{\mathcal{P}})$$

est bijectif pour tout ouvert $W \subseteq \boldsymbol{Y}$. En particulier, $H^i(U;\widetilde{\mathcal{P}}) \simeq \check{H}^i_{\mathcal{B}}(U;\mathcal{P}) = 0$ pour $i>0$ et $U \in \mathcal{B}$ d'après (a). ∎

2.2.11. Remarque. Si dans l'énoncé de 2.2.10 les suites $(*)$ sont uniquement supposées exactes à gauche, la même démonstration prouve que les complexes de Čech augmentés dans (b) sont exacts à gauche et l'assertion (b-i) en découle.

2.2.12. Corollaire. *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}},\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ le schéma de Meredith associé à une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$. Alors :*

a) *Le foncteur $(\widetilde{\ _\ }) : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ est exact.*

b) *Pour tout $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$ et tout ouvert principal $D(\overline{f}) \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$:*

i) *Le morphisme canonique $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]} \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M} \to H^0(D(\overline{f});\widetilde{\boldsymbol{M}})$ est bijectif.*

ii) *Pour tout recouvrement principal $\mathcal{U} = \{\overline{U}_1,\dots,\overline{U}_\ell\}$ de $D(\overline{f})$, on a*

$$\check{H}^i(\mathcal{U};\widetilde{\boldsymbol{M}}) = 0\,,\ \textit{pour tout}\ i>0\,.$$

iii) *$H^i\big(D(\overline{f});\widetilde{\boldsymbol{M}}\big) = 0$, pour tout $i>0$.*

c) *Étant donnés deux $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$, si $\boldsymbol{N}$ est de type fini, le morphisme canonique*

$$\Xi(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}) : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}}(\widetilde{\boldsymbol{M}},\widetilde{\boldsymbol{N}})$$

est bijectif. En particulier, la restriction du foncteur $(\widetilde{\ _\ })$ à la sous-catégorie $\mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{A}^\dagger)$ est pleinement fidèle.

Démonstration. Nous nous plaçons dans le contexte d'application de la proposition 2.2.10. L'espace topologique est $\overline{\boldsymbol{X}} := \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$, l'ensemble d'ouverts $\mathcal{B}$ est l'ensemble des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ et le préfaisceau sur $\mathcal{B}$ est défini pour chaque $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$ par la correspondance $\mathcal{P}_{\boldsymbol{M}}$ (*cf.* 2.2.2) :

$$D(\overline{f}) \rightsquigarrow \mathcal{P}_{\boldsymbol{M}}(D(\overline{f})) := \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]} \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$$

On remarque aussitôt que par la platitude de $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$ en tant que $\boldsymbol{A}^\dagger$-module (2.1-0e-0i), la correspondance $\boldsymbol{M} \rightsquigarrow \mathcal{P}_{\boldsymbol{M}}$ est exacte et comme $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ est le faisceau associé à $\mathcal{P}_{\boldsymbol{M}}$ l'assertion (a) résulte.

De l'égalité de préfaisceaux $\mathcal{P}_{\boldsymbol{M}}(_) = \mathcal{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(_) \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$ on déduit aussitôt l'identification des complexes de Čech

$$(\check{C}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}_{\boldsymbol{M}}),\delta_*) = (\check{C}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}),\delta_*) \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$$

pour toute famille ***finie*** $\mathcal{U}$ d'ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ et de même pour les complexes de Čech augmentés lorsque $\mathcal{U}$ est un recouvrement d'un ouvert $\overline{U} \in \mathcal{B}$. En particulier, si $\overline{U},\overline{U}_1,\overline{U}_2 \in \mathcal{B}$ vérifient $\overline{U} = \overline{U}_1 \cup \overline{U}_2$, le complexe de Čech augmenté :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{P}_{\boldsymbol{M}}(\overline{U}) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{P}_{\boldsymbol{M}}(\overline{U}_1) \oplus \mathcal{P}_{\boldsymbol{M}}(\overline{U}_2) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{P}_{\boldsymbol{M}}(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2) \to \mathbf{0} \qquad (*)$$

s'identifie à

$$\Big(\mathbf{0} \to \mathcal{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\overline{U}) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\overline{U}_1) \oplus \mathcal{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\overline{U}_2) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2) \to \mathbf{0}\Big) \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$$

et l'exactitude de $(*)$ résulte puisque $\mathbf{0} \to \mathcal{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\overline{U}) \to \check{C}^*(\{\overline{U}_1, \overline{U}_2\}; \mathcal{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$ est exact (2.2.7) et que ses termes sont des $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules plats (2.1-0e-0i).

L'hypothèse de la proposition 2.2.10 est donc vérifiée par $\mathcal{P}_{\boldsymbol{M}}$ quel que soit le $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$ et (b) en découle.

Ceci étant, (b-i) montre que $\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}}, _) : \mathrm{Mod}(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger)$ est un inverse à gauche de $(\widetilde{\ }) : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ et l'application naturelle $\Xi(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ est injective pour tous $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger)$. Soit maintenant $\alpha : \widetilde{\boldsymbol{M}} \to \widetilde{\boldsymbol{N}}$ un morphisme de $\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$-modules. Pour chaque ouvert principal $\overline{U} = D(\overline{f}) \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ on a un diagramme commutatif de $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{M} & \xrightarrow{\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})} & \boldsymbol{N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]} \otimes \boldsymbol{M} = \Gamma(\overline{U}; \widetilde{\boldsymbol{M}}) & \xrightarrow{\alpha(\overline{U})} & \Gamma(\overline{U}; \widetilde{\boldsymbol{N}}) = \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]} \otimes \boldsymbol{N} \end{array}$$

et $\alpha(\overline{U})$ et $\mathbb{1} \otimes \alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ coïncident modulo $\boldsymbol{I}^m$ quel que soit $m \in \mathbb{N}$. Or, si $\boldsymbol{N}$ est un $\boldsymbol{A}^\dagger$-module de type fini, $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]} \otimes \boldsymbol{N}$ est séparé pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique et donc $\alpha(\overline{U}) = \mathbb{1} \otimes \alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ et $\Xi(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ est bien surjective. ∎

2.2.13. Catégorie des $\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$-modules cohérents. Un $\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$-module $\mathcal{M}$ est dit « *cohérent* » lorsqu'il est localement de présentation finie, autrement dit, lorsque chaque $x \in \overline{\boldsymbol{X}}$ admet un voisinage principal $\overline{U}$ sur lequel il existe une suite exacte à droite de $\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$-modules

$$(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})^m|_{\overline{U}} \longrightarrow (\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})^n|_{\overline{U}} \longrightarrow \mathcal{M}|_{\overline{U}} \to \mathbf{0}. \qquad (\ddagger)$$

On a donc $\mathcal{M}|_{\overline{U}} = \Gamma(\overline{U}; \mathcal{M})\widetilde{\ }$ (2.2.12).

On note $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ dont les objets sont les $\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$-modules cohérents. Pour tout $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$ le faisceau $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ est cohérent et le foncteur $(\widetilde{\ }) : \mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ est pleinement fidèle (2.2.12). Le théorème suivant est démontré dans [M] sous l'hypothèse que $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ est un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal $\boldsymbol{I}$. Bien que ce théorème ne sera pas utilisé dans la suite, nous indiquons brièvement les idées d'une démonstration lorsque $\boldsymbol{R}$ est seulement supposé nœthérien.

2.2.14. Théorème. *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}}, \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ le schéma de Meredith associé à une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$. Le foncteur $(\widetilde{\ }) : \mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ est une équivalence de catégories.*

Indications. Une inspection minutieuse de la preuve de Meredith montre que l'hypothèse sur $\boldsymbol{R}$ d'être de valuation discrète et complet intervient de manière essentielle uniquement dans sa preuve du lemme § 3.1 (*loc.cit.* p. 11) :

Lemme 1. Soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}^\dagger$-module de type fini. Soient $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq \boldsymbol{A}$ et $\mu_1, \ldots, \mu_t \in \boldsymbol{M}$. Soit $\{P_{i,n} \mid 1 \leqslant i \leqslant t;\ n \in \mathbb{N}\}$ une famille de polynômes à r variables $\vec{X} = \{X_1, \ldots, X_r\}$ vérifiant les conditions suivantes

1) $\deg_{\vec{X}}(P_{i,n}) \leqslant C(n+1)$ *pour une certaine constante C ;*

2) $\sum_{i=1}^{t} P_{i,n}(\vec{x})\mu_i \in \boldsymbol{I}^n \cdot \boldsymbol{M}$ *pour tout* n.
Alors $\sum_{n\geqslant 0}\sum_{i=0}^{t} P_{i,n}(\vec{x})\mu_i$ *converge dans* $\boldsymbol{M}$.

Ce lemme peut être démontré lorsque $\boldsymbol{R}$ est seulement supposé nœthérien. En effet, lorsque $t=1$ nous pouvons supposer $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}^\dagger \cdot \mu_1$ (Artin-Rees) et considérons la suite exacte

$$\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}\cdot\mu_1 \to 0\,.$$

Les hypothèses du *lemme 1* dans les notations du lemme technique 2.2.6 sont :

$$\begin{cases} P_{1,n} \in \boldsymbol{I}^0[\vec{X}]_{C(n+1)} \\ P_{1,n} \in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^n[\vec{X}] \end{cases}$$

En appliquant 2.2.6 (avec $P=1$), il existe $M \in \mathbb{N}$ ne dépendant que de $\boldsymbol{K}$ tel que :

$$P_{1,n} \in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^n[\vec{X}]_{C(n+1)+nM}\,.$$

On a donc

$$\sum_{n\geqslant 0} P_{1,n}(\vec{x})\mu_1 = \sum_{n\geqslant 0} Q_n(\vec{x})\mu_1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q_n \in \boldsymbol{I}^n[\vec{X}]_{(C+M)(n+1)}\,, \\ P_{1,n}(\vec{x})\mu_1 = Q_n(\vec{x})\mu_1\,, \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

et la série $\sum_{n\geqslant 0} Q_n(\vec{x})$ converge dans $\boldsymbol{A}^\dagger$.

Dans le cas où t est quelconque, on commence par remarquer que les ensembles

$$C(m) := \left\{ P \in \boldsymbol{R}[\vec{X}] \;\middle|\; P\mu_1 \in \boldsymbol{R}[\vec{X}]_{\deg(P)+m}\cdot\mu_2 + \cdots + \boldsymbol{R}[\vec{X}]_{\deg(P)+m}\cdot\mu_t \right\}$$

sont des idéaux de $\boldsymbol{R}[\vec{X}]$ dont la réunion C est l'annulateur de μ_1 modulo $(\mu_2,\ldots,\mu_t)$. Par nœthérianité il existe $N \in \mathbb{N}$ ne dépendant que de $\{\mu_1,\ldots,\mu_t\}$, tel que $C = C(N)$.

Supposons le lemme démontré pour $t-1$ et considérons un ensemble des données vérifiant les conditions du lemme pour t. D'après le cas $t=1$, il existe $Q_n \in \boldsymbol{I}^n[\vec{X}]_{(C+M)(n+1)}$ vérifiant

$$(P_{1,n} - Q_n)\mu_1 \in (\mu_2,\ldots,\mu_t)\,,$$

et la remarque précédente donne des décompositions

$$P_{1,n}\mu_1 = Q_n\mu_1 + \textstyle\sum_{k=2}^{t} R_{k,n}\mu_k\,,$$

avec $R_{k,n} \in \boldsymbol{R}[\vec{X}]_{(C+M+N)(n+1)}$. On peut donc écrire

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{i=1}^{t} P_{i,n}(\vec{x})\mu_i = \sum_{n\geqslant 0} Q_n\mu_1 + \sum_{n\geqslant 0}\sum_{i=2}^{t}(R_{i,n}+P_{i,n})\mu_i \qquad (*)$$

où

$$\begin{cases} \sum_{n\geqslant 0} Q_n \text{ converge dans } \boldsymbol{A}^\dagger, \\ \deg_{\vec{X}}(R_{i,n}+P_{i,n}) \leqslant (C+N+N)(n+1)\,, \\ \sum_{i=2}^{t}(R_{i,n}+P_{i,n})\mu_i \in \boldsymbol{I}^n\cdot\boldsymbol{M} \quad \text{par construction.} \end{cases}$$

La convergence de la série $(*)$ résulte alors de l'hypothèse inductive. ∎

2.2.15. $\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$ comme faisceau de relèvements (très lisses). La proposition suivante fait le lien entre la catégorie des relèvements affines très lisses $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$ associée à $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ et les sections du faisceau $\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$.

2.2.16. Proposition. *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}},\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ le schéma de Meredith associé à une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f. très lisse $\boldsymbol{A}^\dagger$. Notons $\rho:\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}\to\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}$ le morphisme de faisceaux induit par le relèvement $\rho(\overline{\boldsymbol{X}}):\boldsymbol{A}^\dagger\to\overline{\boldsymbol{A}}$ (2.2.12-(0c)). Alors, pour tout ouvert affine $\overline{U}\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}$:*

a) *Le morphisme $\rho(\overline{U}):\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\to\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}(\overline{U})$ est un relèvement f.c.t.f. très lisse.*

b) *L'espace annelé $(\overline{U};\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}|_{\overline{U}})$ est canoniquement isomorphe au schéma de Meredith associé à l'algèbre $\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$.*

Démonstration

a) Soit

$$\mathbf{0}\to\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\xrightarrow{\epsilon}\prod_{i=1}^r\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]}\xrightarrow{\delta_0}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}$$

la suite exacte à gauche associée à un recouvrement principal fini $\overline{U}=\bigcup_{i=1}^r D(\overline{f}_i)$. Soit $\rho:\boldsymbol{B}^\dagger\twoheadrightarrow\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}(\overline{U})$ un relèvement f.c.t.f. très lisse (0.2) et notons $(\overline{U};\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{B}})$ le schéma de Meredith affine associé. Comme $\boldsymbol{A}^\dagger$ est très lisse il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}^\dagger$-algèbres $\phi:\boldsymbol{A}^\dagger\to\boldsymbol{B}^\dagger$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est le morphisme d'algèbres correspondant à l'inclusion $\overline{U}\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}$. Le morphisme ϕ induit des morphismes

$$\phi_i:\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]}\to\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[\phi(f_i)]},\qquad \phi_{ij}:\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}\to\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[\phi(f_if_j)]},$$

qui sont des isomorphismes puisqu'il en est ainsi modulo $\boldsymbol{I}$ (0.2). On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}\mathbf{0}\to\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\xrightarrow{\epsilon}\prod_{i=1}^r & \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} & \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}\\ & \phi_i\downarrow\simeq & \bigoplus & \simeq\downarrow\phi_{ij}\\ & \prod_{i=1}^r\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[\phi(f_i)]} & \xrightarrow{\delta_0}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} & \boldsymbol{B}^\dagger{}_{[\phi(f_if_j)]}\end{array}\qquad(\diamond)$$

Or, d'après 2.2.12 appliqué à $(\overline{U},\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{B}})$, on a la suite exacte à gauche

$$\mathbf{0}\to\boldsymbol{B}^\dagger\xrightarrow{\epsilon}\prod_{i=1}^r\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[\phi(f_i)]}\xrightarrow{\delta_0}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[\phi(f_if_j)]}$$

et le diagramme $(\diamond)$ induit un isomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres de $\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ sur $\boldsymbol{B}^\dagger$.

b) Dans la preuve de (0a) on a montré que pour tout $f\in\boldsymbol{A}^\dagger$ tel que $D(\overline{f})\subseteq\overline{U}$ le morphisme canonique $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}\to\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})_{[f]}$ est bijectif. La famille de ces isomorphismes est un isomorphisme entre les restrictions à la catégorie des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ contenus dans $\overline{U}$ du faisceau $\mathcal{O}^\dagger_{\overline{\boldsymbol{X}}}$ et du faisceau $\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{B}}$; cet isomorphisme induit l'identification entre $\mathcal{O}^\dagger_{\overline{\boldsymbol{X}}}|_{\overline{U}}$ et $\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{B}}$ annoncée. ∎

2.3 Sous-sites de Meredith de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ et condition de faisceau

2.3.1. Sous-sites de Meredith. Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$. Pour chaque $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ on note $(\overline{\mathcal{U}};\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{U}})$ le schéma de Meredith associé à l'algèbre f.c.t.f. très lisse $\boldsymbol{A}(\mathcal{U})^{\dagger}$. D'après 2.2.16, si $\overline{V}_1 \subseteq \overline{V}_2 \subseteq \overline{\mathcal{U}}$ sont des ouverts affines, l'algèbre $\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{U}}(\overline{V}_i)$ est un relèvement très lisse de $\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}(\overline{V}_i)$ et la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ du morphisme de restriction $\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{U}}(\overline{V}_2) \to \mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{U}}(\overline{V}_1)$ est le morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}(\overline{V}_2) \to \mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}(\overline{V}_1)$ correspondant à l'inclusion $\overline{V}_1 \subseteq \overline{V}_2$. Le faisceau $\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{U}}$ détermine ainsi un sous-site de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$.

Définition. Notons $\mathscr{M}(\mathcal{U})$ la sous-catégorie de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ des relèvements $\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{U}}(\overline{V}) \to \mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}(\overline{V})$ où $\overline{V}$ est un ouvert affine de $\overline{\mathcal{U}}$ et où il y a un unique morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{U}}(\overline{V}_1) & \dashrightarrow & \mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{U}}(\overline{V}_2) \\ \downarrow & \bigoplus & \downarrow \\ \mathcal{O}^{\dagger}_{\overline{\boldsymbol{X}}}(\overline{V}_1) & \xrightarrow[\supseteq]{} & \mathcal{O}^{\dagger}_{\overline{\boldsymbol{X}}}(\overline{V}_2) \end{array}$$

lorsque $\overline{V}_2 \subseteq \overline{V}_1$, à savoir le morphisme de restriction du faisceau $\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{U}}$. La catégorie $\mathscr{M}(U)$ est stable par le produit fibré de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ et, munie des recouvrements de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ *i.e.* des familles de morphismes $\{\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{U}}(\overline{V}) \to \mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{U}}(\overline{V}_i)\}$ où $\overline{V}$ et $\overline{V}_i$ sont des ouverts affines de $\overline{\mathcal{U}}$ vérifiant $\overline{V} = \bigcup_i \overline{V}_i$, c'est un site. Ce site est «*le sous-site de Meredith de* $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ *engendré par* $\mathcal{U}$». On note $\langle\mathscr{M}(\mathcal{U})\rangle$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ dont les objets sont ceux de $\mathscr{M}(\mathcal{U})$. De même que $\mathscr{M}(\mathcal{U})$, la catégorie $\langle\mathscr{M}(\mathcal{U})\rangle$ est un sous-site de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$.

2.3.2. Notations. Notons $\mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ le site des relèvements affines très lisses de $\overline{\mathcal{U}}$. Nous avons les inclusions de sites $\mathscr{M}(\mathcal{U}) \subseteq \langle\mathscr{M}(\mathcal{U})\rangle \subseteq \mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}} \subseteq \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ pour lesquelles nous fixons quelques notations :

$$\mathscr{M}(\mathcal{U}) \xrightarrow[\subseteq]{j_{\mathcal{U}}} \langle\mathscr{M}(\mathcal{U})\rangle \xrightarrow[\subseteq]{i^{\mathcal{Y}}_{\mathcal{U}}} \mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}} \xrightarrow[\subseteq]{i_{\mathcal{Y}}} \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$$
$$\mathscr{M}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\quad i_{\mathcal{U}} \quad} \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$$

La proposition suivante est corollaire immédiat des propositions 2.2.16, 1.4.2 et 1.5.1.

2.3.3. Proposition. *Soit* $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ *un schéma lisse et séparé sur* $\overline{\boldsymbol{R}}$ *de site de relèvements affines très lisses* $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$.

a) *Pour chaque* $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$, *le foncteur qui associe à* $\mathcal{V} \in \mathscr{M}(\mathcal{U})$ *l'ouvert affine* $\overline{\mathcal{V}} \subseteq \overline{\mathcal{U}}$, *et au morphisme entre deux objets de* $\mathscr{M}(\mathcal{U})$ *l'inclusion entre leurs ouverts associés, est une équivalence de catégories entre* $\mathscr{M}(\mathcal{U})$ *et la catégorie des ouverts affines contenus dans* $\overline{\mathcal{U}}$. *Cette équivalence est une équivalence de sites,* i.e. *respecte produit fibré et recouvrements.*

b) *Pour chaque* $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$, *le foncteur* $(\widetilde{\ }) : \mathrm{Mod}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z})$ *qui fait correspondre à un faisceau sur* $\mathscr{M}(\mathcal{U})$ *le faisceaux engendré sur* $\overline{\mathcal{U}}$ *est une équivalence de catégories.*

c) *Un préfaisceau* $\mathcal{P}$ *sur* $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ *est un faisceaux si et seulement si pour chaque* $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ *la restriction* $\mathcal{P}|_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}$ *est un faisceau.*

d) *Si* $\overline{\boldsymbol{X}}$ *est affine et si* $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ *vérifie* $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$, *alors un préfaisceau sur* $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ *est un faisceau si et seulement si sa restriction à* $\mathscr{M}(\mathcal{U})$ *l'est.*

2.4 Faisceau $\mathcal{G}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}$ d'automorphismes †-adiques

Notation. Étant donnée une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}$, on notera $\boldsymbol{G}^{\dagger}(\boldsymbol{B})$ le groupe des automorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbre de $\boldsymbol{B}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est l'identité sur $\overline{\boldsymbol{B}}$.

2.4.1. Le cas où $\boldsymbol{X}$ est affine. Soit $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f. de schéma de Meredith $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}})$. Pour $f,g\in\boldsymbol{A}^{\dagger}$, notons $\iota:\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f]}\to\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[fg]}$ le morphisme canonique et remarquons que pour tout $\theta\in\boldsymbol{G}^{\dagger}(\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f]})$ l'élément $\iota\theta(g)$ est inversible car $\iota\theta(g)\in\iota(g)(1+\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[fg]})$. On a donc une factorisation unique

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f]} & \xrightarrow{\theta} & \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f]}\\ {\scriptstyle\iota}\downarrow & \bigoplus & \downarrow{\scriptstyle\iota}\\ \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[fg]} & \xrightarrow[\theta']{} & \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[fg]}\end{array}\qquad(\diamond)$$

avec $\theta'\in\boldsymbol{G}^{\dagger}(\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[fg]})$, d'où une application de «*restriction*»

$$\begin{array}{rccc}(_)|_{\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[fg]}}: & \boldsymbol{G}^{\dagger}(\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f]}) & \longrightarrow & \boldsymbol{G}^{\dagger}(\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[fg]})\\ & \theta & \longmapsto & \theta'\end{array}\qquad(*)$$

dont on vérifie aisément que c'est un morphisme de groupes. La correspondance

$$D(\overline{f})\rightsquigarrow\boldsymbol{G}^{\dagger}(\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f]})$$

et les restrictions $(*)$ définissent un préfaisceau de groupes sur la catégorie des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ dont on notera $\mathcal{G}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}$ le faisceau sur $\overline{\boldsymbol{X}}$ associé.

2.4.2. Lemme. *Lorsque $\boldsymbol{B}^{\dagger}$ est intègre et que $f\notin\sqrt{\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B}^{\dagger}}$, le morphisme de restriction $\boldsymbol{G}^{\dagger}(\boldsymbol{B}^{\dagger})\to\boldsymbol{G}^{\dagger}(\boldsymbol{B}^{\dagger}_{[f]})$ est injectif.*

Démonstration. Soit $\nu^{\dagger}_{f}:\boldsymbol{B}^{\dagger}\to\boldsymbol{B}^{\dagger}_{[f]}$ le morphisme canonique. Lorsque la restriction de $\theta\in\boldsymbol{G}^{\dagger}(\boldsymbol{B}^{\dagger})$ à $\boldsymbol{B}^{\dagger}_{[f]}$ est l'identité, on a $\theta(x)-x\in\ker(\nu^{\dagger}_{f})$ pour chaque $x\in\boldsymbol{B}^{\dagger}$, autrement dit $(f^{N}+w)(\theta(x)-x)=0$ pour un certain $w\in\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B}^{\dagger}$ et pour $N\gg 0$ (2.2.5). Si on suppose que $\theta\neq\mathrm{id}$, l'intégrité de $\boldsymbol{B}^{\dagger}$ implique aussitôt que $f^{N}\in\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B}^{\dagger}$. ∎

Rappel. On a $f\notin\sqrt{\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B}^{\dagger}}\iff\overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{f}}\neq 0\iff\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{f}})\neq\varnothing$.

2.4.3. Le cas où $\boldsymbol{X}$ est général. Ce qui précède montre plus généralement que si $\overline{V}_1\subseteq\overline{V}_2$ sont des ouverts respectivement **principaux** dans des ouverts **affines** $\overline{U}_i\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}$, il existe un morphisme canonique de restriction de $\boldsymbol{G}^{\dagger}\big(\mathcal{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}(\overline{V}_2)\big)$ vers $\boldsymbol{G}^{\dagger}\big(\mathcal{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}(\overline{V}_1)\big)$. Le faisceaux $\mathcal{G}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}$ peut donc aussi être introduit comme dans le paragraphe précédent lorsque $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ d'un schéma lisse séparé $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ de schéma de Meredith $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}})$. Dans tous les cas on a un morphisme naturel

$$\Phi(\overline{U}):\boldsymbol{G}^{\dagger}(\mathcal{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}))\to\mathcal{G}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$$

pour tout ouvert affine $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ puisque les ouverts principaux des ouverts affines de $\overline{\boldsymbol{X}}$ constituent une base pour la topologie de $\overline{\boldsymbol{X}}$. ([3])

2.4.4. Théorème. *Pour tout schéma de Meredith $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ le morphisme naturel*

$$\Phi(\overline{U}) : \boldsymbol{G}^\dagger(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})) \to \mathcal{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$$

est bijectif pour tout ouvert affine $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$.

Démonstration. Supposons $\overline{\boldsymbol{X}}$ affine et notons $\boldsymbol{A}^\dagger := \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{\boldsymbol{X}})$. Soit $\overline{U}$ un ouvert arbitraire de $\overline{\boldsymbol{X}}$, considérons la suite exacte à gauche

$$\mathbf{0} \to \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}) \xrightarrow{\epsilon} \textstyle\prod_i \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]} \xrightarrow{\delta_0} \prod_{i<j} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]} \qquad (\ddagger)$$

associé au recouvrement fini principal $\overline{U} = \bigcup_i D(\overline{f}_i)$, et notons $x_i \in \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]}$ les restrictions d'un élément $x \in \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$. Pour tout $\theta_i \in \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]})$ on a (2.4.1-($\diamond$))

$$\theta_i(x_i)|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}} = \theta_i|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}}\big(x_i|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}}\big),$$

de sorte que si $\theta_i|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}} = \theta_j|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}}$, les éléments $\theta_i(x_i)$ se recollent en un (unique) $\theta(x) \in \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$. L'application $\theta : \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}) \to \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ ainsi définie appartient clairement à $\boldsymbol{G}^\dagger\big(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\big)$.

Lorsque $\overline{U}$ est affine les morphismes de restriction $\boldsymbol{G}^\dagger\big(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\big) \to \boldsymbol{G}^\dagger\big(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]}\big)$ de 2.4.1 permettent de construire l'analogue de la suite (‡) pour les faisceaux de groupes, à savoir la suite :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \to \boldsymbol{G}^\dagger(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})) & \xrightarrow{\epsilon} & \prod_i \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]}) & \xrightarrow{\Delta_0} & \prod_{i<j} \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}) \\ \theta & \longmapsto & \big(\theta|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]}}\big)_i & & \\ & & \big(\theta_i\big)_i & \longmapsto & \big(\theta_i^{-1}|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}}\theta_j|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}}\big)_{i<j} \end{array} \qquad (*)$$

dont l'exactitude résulte du paragraphe précédent.

En raisonnant comme dans 2.2.10, l'augmentation ϵ donne lieu au morphisme $\Phi(\overline{U}) : \boldsymbol{G}^\dagger(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})) \to \mathcal{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ qui est bijectif puisque l'exactitude de $(*)$ est établie pour **tout** recouvrement principal de $\overline{U}$.

Le cas où $\overline{\boldsymbol{X}}$ n'est pas affine résulte du cas affine par le principe qui affirme que la restriction à un ouvert $\overline{U}$ du faisceau associé à un préfaisceau $\mathcal{P}$ est le faisceau associé à la restriction de $\mathcal{P}$ à $\overline{U}$. ∎

[3] On remarquera que si les groupes $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}))$ et $\mathcal{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ existent quel que soit l'ouvert $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$, il n'y a pas nécessairement de morphisme de restriction de $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}))$ vers $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V}))$ pour $\overline{V} \subseteq \overline{U}$ lorsque $\overline{U}$ n'est pas affine. Il n'y a donc pas de morphisme *a priori* de $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}))$ vers $\mathcal{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ en dehors du cas où $\overline{U}$ est affine (*cf.* remarque 2.4.5).

2.4.5. Remarque. Le début de la démonstration précédente donne une injection canonique $\mathcal{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}) \subseteq \boldsymbol{G}^\dagger(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}))$ pour **tout** ouvert $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ lorsque $\overline{\boldsymbol{X}}$ est affine. On obtient alors comme corollaire de 2.4.4 le fait que pour tout ouvert affine $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ et **tout** ouvert $\overline{V} \subseteq \overline{U}$ il existe un morphisme naturel de restriction de $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}))$ vers $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V}))$ compatible aux restrictions de groupes d'automorphismes précédemment considérés (*cf.* 3.1.1).

2.4.6. Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ le schéma de Meredith affine associé à une algèbre f.c.t.f. $\boldsymbol{A}^\dagger$. Pour tout ouvert $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ notons $\rho^{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\overline{U}} : \boldsymbol{A}^\dagger = \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{\boldsymbol{X}}) \to \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ le morphisme de restriction des sections du faisceau $\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$ et soit $\mathrm{Homom}^\dagger_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}^\dagger, \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\big)$ l'ensemble des morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ correspond à l'inclusion $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$. On a alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{G}^\dagger(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})) & \xrightarrow{\Xi(\overline{U})} & \mathrm{Homom}^\dagger_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}^\dagger, \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\big) \\ \theta & \longmapsto & \theta \circ \rho^{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\overline{U}} \end{array}$$

Théorème. *Soit $\boldsymbol{A}^\dagger$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f. très lisse.*

a) *L'application $\Xi(\overline{U})$ établit une bijection entre $\mathcal{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ et $\mathrm{Homom}^\dagger_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}^\dagger, \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\big)$ quel que soit l'ouvert $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$.*

b) *Si $\overline{U}$ est un ouvert affine, l'action à droite de $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}))$ sur $\mathrm{Homom}^\dagger_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}^\dagger, \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\big)$ est simplement transitive.*

Démonstration. Supposons d'abord $\overline{U} = D(\overline{f})$ auquel cas $\mathcal{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}) = \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]})$ (2.4.4). Soit $\phi : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est le morphisme canonique $\iota : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}}$. L'élément $\phi(f)$ est inversible car $\phi(f) = f \bmod \boldsymbol{I}$, et ϕ se factorise de manière unique en $\theta \circ \rho^{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\overline{U}}$ où $\theta \in \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]})$ puisque c'est un endomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbre de $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$ de réduction modulo $\boldsymbol{I}$ égal à l'identité et que $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$ est f.c.t.f. très lisse car c'est ainsi de $\boldsymbol{A}^\dagger$. Ceci démontre la surjectivité de $\Xi(\overline{U})$. L'injectivité de $\Xi(\overline{U})$ résulte de ce que chaque $\theta \in \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]})$ est entièrement déterminé par son action sur $\boldsymbol{A}^\dagger \cdot \mathbf{1} \subseteq \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$, c'est à dire par la composée $\theta \circ \rho^{\overline{\boldsymbol{X}}}_{D(\overline{f})}$ qui n'est autre que ϕ.

Dans le cas où $\overline{U}$ est un ouvert arbitraire on a, pour tout recouvrement principal $\overline{U} = \bigcup_i D(\overline{f}_i)$ et tout $\phi \in \mathrm{Homom}^\dagger_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}^\dagger, \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\big)$, le diagramme commutatif de deuxième ligne exacte à gauche :

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{A}^\dagger & \xrightarrow{\Pi_i \rho^{\overline{\boldsymbol{X}}}_{D(\overline{f}_i)}} & \prod_i \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0} & \prod_{i<j} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]} \\ \phi \downarrow & \oplus & \theta_i \downarrow & & \\ 0 \to \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}) & \xrightarrow[\Pi \rho^{\overline{U}}_{D(\overline{f}_i)}]{\epsilon} & \prod_i \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0} & \prod_{i<j} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]} \end{array} \qquad (*)$$

où l'élément $\theta_i \in \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]})$ est celui introduit dans le paragraphe précédent vérifiant

$$\rho^{\overline{U}}_{D(\overline{f}_i)} \circ \phi = \theta_i \circ \rho^{\overline{\boldsymbol{X}}}_{D(\overline{f}_i)}.$$

Or, pour tout $i < j$ les restrictions $\theta_i|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]}}$ et $\theta_j|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]}}$ coïncident sur $\boldsymbol{A}^\dagger \cdot \mathbf{1} \subseteq \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]}$ par construction. On en déduit l'égalité

$$\theta_i|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]}} = \theta_j|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]}}$$

et les θ_i se recollent en un certain $\theta \in \mathcal{G}^\dagger(\overline{U})$ vérifiant

$$\rho^{\overline{U}}_{D(\overline{f}_i)} \circ \theta \circ \rho^{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\overline{U}} = \theta_i \circ \rho^{\overline{\boldsymbol{X}}}_{D(\overline{f}_i)} = \rho^{\overline{U}}_{D(\overline{f}_i)} \circ \phi$$

pour tout i. Par conséquent $\theta \circ \rho^{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\overline{U}} = \phi$ et la surjectivité de $\Xi(\overline{U})$ est prouvée.

L'injectivité de $\Xi(\overline{U})$ résulte de ce que si $\theta, \theta' \in \mathcal{G}^\dagger(\overline{U})$ vérifient $\theta \circ \rho^{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\overline{U}} = \theta' \circ \rho^{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\overline{U}}$, on a par restriction de $\overline{U}$ à chaque $D(\overline{f}_i)$:

$$\theta|_{\boldsymbol{A}^\dagger_{[\overline{f}_i]}} \circ \rho^{\overline{\boldsymbol{X}}}_{D(\overline{f}_i)} = \theta'|_{\boldsymbol{A}^\dagger_{[\overline{f}_i]}} \circ \rho^{\overline{\boldsymbol{X}}}_{D(\overline{f}_i)}$$

et alors $\theta|_{\boldsymbol{A}^\dagger_{[\overline{f}_i]}} = \theta'|_{\boldsymbol{A}^\dagger_{[\overline{f}_i]}}$ pour tout i, et donc $\theta = \theta'$.

L'assertion (0b) est maintenant corollaire de (0a) et du théorème 2.4.4. ∎

2.4.7. Corollaire. *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}}; \mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ d'un schéma lisse séparé $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ de schéma de Meredith $(\overline{\boldsymbol{X}}; \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$. Si $\overline{V} \subseteq \overline{U}$ sont deux ouverts* **affines** *de $\overline{\boldsymbol{X}}$, l'action à droite de $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V}))$ sur $\mathrm{Homom}^\dagger_{\boldsymbol{R}}\big(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}), \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V})\big)$ est simplement transitive.*

2.4.8. Corollaire. *Soit $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ le site des relèvements affines très lisses d'un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$.*

a) *Soient $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ dans $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Pour chaque $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{W}, \mathcal{V}) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{W}, \mathcal{U}) \\ \alpha & \longmapsto & \phi \circ \alpha \end{array}$$

est bijective.

b) *Soient $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ et $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ dans $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Étant donnés $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$, $\phi' \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{V}', \mathcal{U}')$ et $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}', \mathcal{U})$, il existe un et un seul $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{V}', \mathcal{V})$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}' & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{U} \\ {\scriptstyle\phi'}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\phi} \\ \mathcal{V}' & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{V} \end{array}$$

Démonstration

a) Par 2.2.16 on peut toujours supposer que $\mathcal{W}, \mathcal{V}$ appartiennent à $\mathscr{M}(\mathcal{U})$. Notons $\Phi^{(_)}_{\mathcal{W}}$ l'élément du singleton $\mathrm{Mor}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}\big(\mathcal{W}, (_)\big)$. Le corollaire résulte alors aussitôt des bijections Ξ de 2.4.6 :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{W}, \mathcal{U}) & \xleftarrow{\simeq} & \mathrm{End}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{W}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{W}, \mathcal{V}) \\ \Phi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} \circ \theta & \longleftarrow & \theta & \longmapsto & \Phi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \circ \theta \end{array}$$

b) Conséquence immédiate de (a) en posant $\mathcal{W} = \mathcal{V}'$ et $\phi \circ \alpha = \beta \circ \phi'$. ∎

2.5 Foncteurs associés à l'inclusion $\mathscr{M}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$

2.5.1. Rétractions de $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sur $\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$. Soit $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ le site des relèvements affines très lisses d'un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$. Fixons un ouvert **affine** $\overline{\boldsymbol{Y}} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ et notons $\mathcal{Y}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ le site des

relèvements affines très lisses de $\overline{\boldsymbol{Y}}$ et $\iota_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}} \subseteq \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ le foncteur d'inclusion. Notons $r_{\mathcal{Y}}$ la correspondance de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ vers $\mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ qui fait correspondre :

$$\begin{cases} \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}} \ni \mathcal{U} \longmapsto r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U}) \in \mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}} \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}',\mathcal{U}) \ni \alpha \longmapsto r_{\mathcal{Y}}(\alpha) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U}'), r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U})) \end{cases}$$

où $r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U})$ est l'unique objet de $\mathscr{M}(\mathcal{U})$ vérifiant $\overline{r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U})} = \overline{\boldsymbol{Y}} \cap \overline{\mathcal{U}}$ (2.3.1) et $r_{\mathcal{Y}}(\alpha)$ est l'unique morphisme rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}' & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \mathcal{U} \\ {\scriptstyle \phi_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U}')}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \phi_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U}')} \\ r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U}') & \xrightarrow{\ r_{\mathcal{Y}}(\alpha)\ } & r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U}) \end{array}$$

où $\phi_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U})$ est l'unique élément de $\mathrm{Mor}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}(r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U}),\mathcal{U})$ (2.4.8-0b).

2.5.2. Proposition. *Avec les données précédentes,*

a) *La correspondance $r_{\mathcal{Y}} : \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}} \rightsquigarrow \mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ est fonctorielle covariante, conserve produits fibrés et recouvrements et c'est un inverse à gauche de l'inclusion $i_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}} \subseteq \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$. Le morphisme d'adjonction :*

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}\big(i_{\mathcal{Y}}(_),_\big) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}\big(_, r_{\mathcal{Y}}(_)\big)\,, \qquad \alpha \longmapsto r_{\mathcal{Y}}(\alpha). \tag{$\diamond$}$$

est un isomorphisme et $(i_{\mathcal{Y}}, r_{\mathcal{Y}})$ est une paire de foncteurs adjoints.

b) *Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ vérifiant $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\boldsymbol{Y}}$, soit $\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ dont les objets sont ceux de $\mathscr{M}(\mathcal{U})$. L'inclusion $i_{\mathcal{U}} : \langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle \subseteq \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ admet une rétraction,* i.e. *un foncteur covariant $r_{\mathcal{U}} : \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}} \rightsquigarrow \langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$ qui conserve produit fibrés et recouvrements et tel que $r_{\mathcal{U}} \circ i_{\mathcal{U}} = \mathrm{id}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}$. Le morphisme d'adjonction :*

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}\big(i_{\mathcal{U}}(_),_\big) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}\big(_, r_{\mathcal{U}}(_)\big)\,, \qquad \alpha \longmapsto r_{\mathcal{U}}(\alpha). \tag{$\diamond\diamond$}$$

est un isomorphisme et $(i_{\mathcal{U}}, r_{\mathcal{U}})$ est une paire de foncteurs adjoints.

Démonstration. L'assertion (a) est conséquence facile des définitions et de 2.4.8-0b. Vérifions l'adjonction. Soient $\mathcal{W} \in \mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ et $\mathcal{V} \in \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ et supposons $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ car autrement les ensembles de morphismes de ($\diamond$) seraient vides. On a donc $\mathcal{W} \subseteq r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$ et 2.4.8-0a prouve que le morphisme d'adjonction est bijectif.

Pour (b) on remarque que la composée $i^{\mathcal{Y}}_{\mathcal{U}} = r_{\mathcal{Y}} \circ i_{\mathcal{U}} : \langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle \rightsquigarrow \mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ n'est autre que l'inclusion qui est clairement une équivalence de catégories, il existe alors une équivalence de catégories $\lambda_{\mathcal{U}} : \mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}} \rightsquigarrow \langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$ adjoint à gauche et inverse à gauche de l'inclusion $i^{\mathcal{Y}}_{\mathcal{U}} : \langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle \subseteq \mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ ([McL] prop. 2, p. 92) d'où les isomorphismes d'adjonction :

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}\big(i_{\mathcal{Y}} \circ i^{\mathcal{Y}}_{\mathcal{U}}(_),_\big) \simeq \mathrm{Mor}_{\mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}\big(i^{\mathcal{Y}}_{\mathcal{U}}(_), r_{\mathcal{Y}}(_)\big) \xrightarrow[\sim]{\lambda_{\mathcal{U}}} \mathrm{Mor}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}\big(_, \lambda_{\mathcal{U}} \circ r_{\mathcal{Y}}(_)\big)\,.$$

Le restant des affirmations résulte de ce que le morphisme naturel de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{Y}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\bullet, \lambda_{\mathcal{U}}(\bullet))$ adjoint de $\mathrm{id}_{\lambda_{\mathcal{U}}(\bullet)} \in \mathrm{Mor}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\lambda_{\mathcal{U}}(\bullet), \lambda_{\mathcal{U}}(\bullet))$ est un isomorphisme. ∎

2.5.3. Le foncteurs $i_{\mathcal{U}*}$ et $i_{\mathcal{U}}^{-1}$. On reprend les notations précédentes : $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ le site des relèvements affines très lisses d'un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$, $\mathcal{U}$ un objet de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ et $\mathcal{Y}_{\text{inf}}^{\dagger}$ le site des relèvements affines très lisses de $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\boldsymbol{Y}} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$. Notons $i_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y}_{\text{inf}}^{\dagger} \subseteq \mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ l'inclusion de rétraction $r_{\mathcal{Y}} : \mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger} \rightsquigarrow \mathcal{Y}_{\text{inf}}^{\dagger}$ et fixons **un** inverse à gauche $\lambda_{\mathcal{U}} : \mathcal{Y}_{\text{inf}}^{\dagger} \rightsquigarrow \langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$ de l'équivalence de catégories $\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle \subseteq \mathcal{Y}_{\text{inf}}^{\dagger}$.

Le foncteur "image inverse". Noté $i_{\mathcal{U}}^{-1} : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\boldsymbol{Z})$, il associe à un faisceau (resp. morphisme de faisceaux) sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ sa restriction à $\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$. C'est un foncteur clairement additif, covariant et exact.

Le foncteur "image directe". Noté $i_{\mathcal{U}*} : \text{Mod}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\boldsymbol{Z})$, il est défini comme suit. Un faisceau $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\boldsymbol{Z})$ est un foncteur contravariant de $\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$ vers la catégorie $\text{Mod}(\boldsymbol{Z})$ vérifiant la condition de faisceaux pour un site. Comme $\lambda_{\mathcal{U}} : \mathcal{Y}_{\text{inf}}^{\dagger} \rightsquigarrow \langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$ est une équivalence de catégories qui conserve produits fibrés et recouvrements (2.5.2-0b), le foncteur $\mathcal{M} \circ \lambda_{\mathcal{U}}$ est automatiquement un faisceau sur $\mathcal{Y}_{\text{inf}}^{\dagger}$. La composée $i_{\mathcal{U}*}(\mathcal{M}) := (\mathcal{M} \circ \lambda_{\mathcal{U}}) \circ r_{\mathcal{Y}}$ est alors un faisceau puisque $r_{\mathcal{Y}}$ respecte recouvrements et produits fibrés (2.5.2-0a). On définit de manière analogue $i_{\mathcal{U}*}(\alpha)$ pour tout morphisme de faisceau de $\boldsymbol{Z}$-modules α. Le foncteur $i_{\mathcal{U}*}$ ainsi défini est clairement covariant et additif.

On prendra garde du fait que si $i_{\mathcal{U}}^{-1}$ est intrinsèque, le foncteur $i_{\mathcal{U}*}$ dépend du choix de la rétraction $\lambda_{\mathcal{U}} : \mathcal{Y}_{\text{inf}}^{\dagger} \rightsquigarrow \langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$.

Morphismes d'adjonction. L'égalité $i_{\mathcal{U}}^{-1} \circ i_{\mathcal{U}*} = \text{id}$, immédiate d'après les définitions, donne le morphisme d'adjonction :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(_, i_{\mathcal{U}*}(_)) & \xrightarrow{\eta(_,_)} & \text{Hom}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}(i_{\mathcal{U}}^{-1}(_), _) \\ \alpha & \longmapsto & i_{\mathcal{U}}^{-1}(\alpha) \end{array} \qquad (*)$$

D'autre part, le morphisme $i_{\mathcal{U}} \circ r_{\mathcal{U}} \to \text{id}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}$, adjoint de $\text{id}_{r_{\mathcal{U}}}$ par l'adjonction 2.5.2-0b, donne un morphisme de faisceau de $\boldsymbol{Z}$-modules $t(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \to i_{\mathcal{U}*} \circ i_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{M})$, naturel par rapport à $\mathcal{M}$, qui intervient dans la définition du deuxième morphisme d'adjonction

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}(i_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{M}), \mathcal{N}) & \xrightarrow{\xi(\mathcal{M},\mathcal{N})} & \text{Hom}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\mathcal{M}, i_{\mathcal{U}*}(\mathcal{N})) \\ \beta & \longmapsto & \left(\mathcal{M} \xrightarrow{t(\mathcal{M})} i_{\mathcal{U}*} i_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{i_{\mathcal{U}*}(\beta)} i_{\mathcal{U}*}(\mathcal{N}) \right) \end{array} \qquad (**)$$

2.5.4. Proposition. *Soit $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ le site des relèvements affines très lisses d'un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$. Pour $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ on a les foncteurs additifs :*

$$\begin{cases} i_{\mathcal{U}}^{-1} : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\boldsymbol{Z}), & \textit{image inverse,} \\ i_{\mathcal{U}*} : \text{Mod}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\boldsymbol{Z}), & \textit{image directe,} \end{cases}$$

et les morphismes d'adjonction :

$$\text{Hom}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(_, i_{\mathcal{U}*}_) \xrightarrow[(*)]{\eta} \text{Hom}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}(i_{\mathcal{U}}^{-1}_, _) \xrightarrow[(**)]{\xi} \text{Hom}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(_, i_{\mathcal{U}*}_)$$

a) *Les morphisme d'adjonction* $(*,**)$ *sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.*

b) *La paire* $(i_{\mathcal{U}}^{-1}, i_{\mathcal{U}*})$ *est une paire de foncteurs adjoints.*

c) $i_{\mathcal{U}}^{-1}$ *est exact et* $i_{\mathcal{U}*}$ *est exact à gauche.*

Démonstration. Pour (a) raisonne comme dans la théorie des faisceaux classique : l'égalité $\eta(\mathcal{M},\mathcal{N})\circ\xi(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \mathrm{id}$, et donc la surjectivité de η, résulté des définitions, ensuite la composée $\xi(\mathcal{M},\mathcal{N})\circ\eta(\mathcal{M},\mathcal{N})$ fournit pour chaque $\beta : \mathcal{M} \to i_{\mathcal{U}*}\mathcal{N}$ une décomposition naturelle

$$\mathcal{M} \xrightarrow{t(\mathcal{M})} i_{\mathcal{U}*}i_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{i_{\mathcal{U}*}i_{\mathcal{U}}^{-1}(\beta)} i_{\mathcal{U}*}(\mathcal{N})$$
$$\mathcal{M} \xrightarrow{\qquad\qquad\beta\qquad\qquad} i_{\mathcal{U}*}(\mathcal{N})$$

où $i_{\mathcal{U}*}i_{\mathcal{U}}^{-1}(\beta) = 0$ lorsque $\eta(\mathcal{M},\mathcal{N})(\beta) = 0$; l'injectivité de η s'ensuit. (b) est une reformulation de (a) et l'exactitude de $i_{\mathcal{U}}^{-1}$ implique alors l'exactitude à gauche de $i_{\mathcal{U}*}$. ∎

2.5.5. Remarque. Le paragraphe 2.5.3 introduit également les foncteurs

$$i_{\mathcal{Y}*} : \mathrm{Mod}_{\mathcal{Y}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \quad \text{et} \quad i_{\mathcal{Y}}^{-1} : \mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\mathcal{Y}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z})$$

associés à l'inclusion $i_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y}^\dagger_{\mathrm{inf}} \subseteq \mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. L'analogue de 2.5.4 pour la paire $(i_{\mathcal{Y}}^{-1}, i_{\mathcal{Y}*})$ est vrai et se démontre de la même manière.

2.5.6. Le foncteur $\mathscr{R}_{\mathcal{U}} : \mathbf{Mod}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z})$. Soit $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ le site des relèvements affines très lisses d'un schéma lisse et séparé sur $\boldsymbol{R}$ et fixons $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Pour chaque faisceau $\mathcal{F}$ de $\boldsymbol{Z}$-modules sur $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, notons $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})$ **le faisceau sur** $\overline{\mathcal{U}}$ associé à $\mathcal{F}|_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}$ (*cf.* 2.3.3-0b). De même, si $\alpha : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ est un morphisme de faisceaux de $\boldsymbol{Z}$-modules sur $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ notons $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\alpha) : \mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}_1) \to \mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}_2)$ le morphisme de faisceaux sur $\overline{\mathcal{U}}$ déterminé par $\alpha|_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}$. La correspondance ainsi définie :

$$\mathscr{R}_{\mathcal{U}} : \mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z})$$

est un foncteur additif et covariant qui résulte de composer les foncteurs (*cf.* 2.3.2) :

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \xrightarrow{i_{\overline{\mathcal{U}}}^{-1}} \mathrm{Mod}_{\langle\mathscr{M}(\mathcal{U})\rangle}(\boldsymbol{Z}) \xrightarrow[\text{restriction}]{j_{\mathcal{U}}^{-1}} \mathrm{Mod}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}(\boldsymbol{Z}) \xrightarrow[\simeq]{\text{faisceau associé}} \mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z})$$
$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \xrightarrow{\qquad\qquad\mathscr{R}_{\mathcal{U}}\qquad\qquad} \mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z})$$

2.5.7. Proposition

a) *Le foncteur* $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}$ *est exact. Il est en plus fidèle lorsque* $\overline{\boldsymbol{X}}$ *est affine et que* $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$.

b) *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau de* $\boldsymbol{Z}$*-modules sur* $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. *Pour tout* $\mathcal{V} \in \mathscr{M}(\mathcal{U})$ *le morphisme canonique* $\mathcal{F}(\mathcal{V}) \to \Gamma\big(\overline{\mathcal{V}}; \mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})\big)$ *est bijectif.*

Démonstration. (a) est claire par construction et (b) résulte de 2.2.10 et 2.2.11. ∎

2.5.8. Le morphisme $\mathscr{R}_{\phi}$. Sous les hypothèses de la section précédente, soit $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}',\mathcal{U})$. D'après 2.4.8-0b, si $\mathcal{W} \in \mathscr{M}(\mathcal{U})$ et $\mathcal{W}' \in \mathscr{M}(\mathcal{U}')$ sont tels que $\overline{\mathcal{W}} = \overline{\mathcal{W}}'$, il existe un et un seul

$\phi_{\overline{\mathcal{W}}} \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{W}',\mathcal{W})$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}' & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{U} \\ {\scriptstyle \Phi^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{W}'}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Phi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}} \\ \mathcal{W}' & \xrightarrow{\phi_{\overline{\mathcal{W}}}} & \mathcal{W} \end{array}$$

où $\{\Phi^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{W}'}\} = \mathrm{Mor}_{\mathscr{M}(\mathcal{U}')}(\mathcal{W}',\mathcal{U}')$ et $\{\Phi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}\} = \mathrm{Mor}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}(\mathcal{W},\mathcal{U})$. Lorsque $\mathcal{F} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z})$, la famille des morphismes $\mathcal{F}(\phi_{\overline{U}})$, où $\overline{U}$ parcourt l'ensemble des ouverts affines de $\overline{\mathcal{U}}'$, définit un morphisme de faisceaux $\mathscr{R}_\phi(\mathcal{F}) : \mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})|_{\overline{\mathcal{U}}'} \to \mathscr{R}_{\mathcal{U}'}(\mathcal{F})$ naturel par rapport à $\mathcal{F}$. Le morphisme de foncteurs ainsi défini est noté : $\mathscr{R}_\phi : \mathscr{R}_{\mathcal{U}}(_)|_{\overline{\mathcal{U}}'} \to \mathscr{R}_{\mathcal{U}'}$.

La proposition suivante est de vérification immédiate.

2.5.9. Proposition. *Soit $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ le site des relèvements affines très lisses d'un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ et soient $\mathcal{U}'' \subseteq \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U} \in \mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Alors,*

a) *Le morphisme de foncteurs*

$$\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(_)|_{\overline{\mathcal{U}}'} \xrightarrow{\mathscr{R}_\phi} \mathscr{R}_{\mathcal{U}'}$$

est un isomorphisme quel que soit $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}',\mathcal{U})$.

b) *Pour tous $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}',\mathcal{U})$ et $\phi' \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}'',\mathcal{U}')$, on a*

$$\mathscr{R}_{\phi\circ\phi'}(_) = \mathscr{R}_{\phi'}(_) \circ \left(\mathscr{R}_\phi(_)|_{\overline{\mathcal{U}}''}\right)$$

§3. Catégories de faisceaux sur $\boldsymbol{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$

3.1 Faisceau $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}$ d'automorphismes †-adiques sur $\boldsymbol{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$

Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Pour $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ notons $(\overline{\mathcal{U}};\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{U}})$ le schéma de Meredith associé à $\boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger$. Dans 2.4 nous avons introduit le faisceau $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}$ sur $\overline{\mathcal{U}}$; il vérifie :

$$\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}(\overline{V}) = \boldsymbol{G}^\dagger(\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{U}}(\overline{V})) = \mathrm{End}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{U}}(\overline{V}))^{\mathrm{op}} = \mathrm{Iso}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{U}}(\overline{V}))^{\mathrm{op}},$$

pour tout ouvert affine $\overline{V} \subseteq \overline{\mathcal{U}}$.

La restriction de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}$ à la sous-catégorie des ouverts affines de $\overline{\boldsymbol{X}}$ est un **faisceau** sur le sous-site $\mathscr{M}(\mathcal{U})$, il est noté $\mathcal{G}^\dagger_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}$.

3.1.1. Restriction d'automorphismes †-adiques dans $\boldsymbol{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$. Soit $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ dans $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Pour chaque $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}',\mathcal{U})$ et tout $\theta \in \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger)$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger & = & \boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger & \xrightarrow{\theta} & \boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger & = & \boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger \\
 & & \| & & \| & & \\
 & & \mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}) & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}) & & \\
\phi\downarrow & & \rho^{\overline{\mathcal{U}}}_{\overline{\mathcal{U}}'}\downarrow & & \downarrow\rho^{\overline{\mathcal{U}}}_{\overline{\mathcal{U}}'} & & \downarrow\phi \\
 & & \mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}') & \xrightarrow{\theta'} & \mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}') & & \\
 & & \xi\downarrow & & \downarrow\xi & & \\
\boldsymbol{A}(\mathcal{U}')^\dagger & \xleftarrow{\zeta} & \boldsymbol{A}(\mathcal{U}')^\dagger & \xrightarrow{\xi\theta'\xi^{-1}} & \boldsymbol{A}(\mathcal{U}')^\dagger & \xrightarrow{\zeta} & \boldsymbol{A}(\mathcal{U}')^\dagger
\end{array}$$

où θ' est la restriction de θ (*cf.* 2.4.5), $\xi \in \mathrm{Homom}^\dagger(\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}'), \boldsymbol{A}(\mathcal{U}')^\dagger)$ est arbitrairement choisi et $\zeta \in \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}(\mathcal{U}')^\dagger)$ est l'isomorphisme vérifiant $\zeta \circ \xi \circ \rho^{\overline{\mathcal{U}}}_{\overline{\mathcal{U}}'} = \phi$ (th. 2.4). La composée

$$\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\phi)(\theta) := \zeta \circ \xi \circ \theta' \circ \xi^{-1} \circ \zeta^{-1}$$

est alors indépendante du choix de ξ et l'application $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\phi) : \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger) \to \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}(\mathcal{U}')^\dagger)$ ainsi définie est un morphisme de groupes.

On a

$$\mathcal{G}_{\mathcal{X}}(\phi_1 \circ \phi_2) = \mathcal{G}_{\mathcal{X}}(\phi_2) \circ \mathcal{G}_{\mathcal{X}}(\phi_1), \qquad (\ddagger)$$

pour tous $\phi_1 \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}', \mathcal{U})$ et $\phi_2 \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}'', \mathcal{U}')$.

3.1.2. Proposition et définition. *La correspondance* $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}} \rightsquigarrow \mathbf{Grps}$ *qui associe*

$$\mathcal{U} \rightsquigarrow \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}) := \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger) \quad \textit{et} \quad \big(\phi : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}\big) \rightsquigarrow \big(\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\phi) : \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}')\big),$$

est un faisceau de groupes ; c'est «le faisceau des automorphismes †-adiques sur $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$».

Indication. La correspondance est un préfaisceau sur $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ d'après l'égalité (‡) ci-dessus et la restriction de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}$ au sous-site $\mathscr{M}(\mathcal{U})$ est un **faisceau**, à savoir $\mathcal{G}^\dagger_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}$ et ceci quel que soit $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. ∎

3.1.3. Note. Soient $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ le site des relèvements affines très lisses d'un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$. Les assertions suivantes, des cas particuliers de 2.4.8 reliés au faisceau $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}$, joueront un rôle important dans la suite.

a) *Pour tout* $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *on a* $\mathrm{End}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}) = \mathrm{Iso}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}) = \big(\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})\big)^{\mathrm{op}}$.

b) *Soient* $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ *deux objets de* $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. *L'action naturelle du groupe* $\big(\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}')\big)^{\mathrm{op}}$ *à droite de* $\mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}', \mathcal{U})$ *est simplement transitive.*

c) *Étant donnés* $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}', \mathcal{U})$ *et* $\theta \in \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$, *il existe un et un seul* $\theta' \in \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}')$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{U} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{U} \\
{\scriptstyle\phi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\phi} \\
\mathcal{U}' & \xrightarrow[\theta']{} & \mathcal{U}'
\end{array}$$

à savoir $\theta' = \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\phi)(\theta)$.

3.2 Catégorie de faisceaux de Z-modules sur $\mathcal{X}^\dagger_{\mathbf{inf}}$

3.2.1. Préfaisceaux de Z-modules. Soient $(\overline{X};\mathcal{O}_{\overline{X}})$ un schéma lisse et séparé sur $\overline{R}$ et Z un anneau. Un préfaisceau $\mathcal{P}$ de Z-modules sur $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$ étant un foncteur contravariant de $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$ dans la catégorie $\text{Mod}(Z)$ des Z-modules, la correspondance

$$\text{End}_{\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\mathcal{U}) \ni \phi \longmapsto \mathcal{P}(\phi) \in \text{End}_{\text{Mod}(Z)}(\mathcal{P}(\mathcal{U}))$$

définit pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$ un morphisme de groupes

$$\mathcal{P}(_) : \big(\text{Iso}_{\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\mathcal{U})\big)^{\text{op}} \to \text{Iso}_{\text{Mod}(Z)}(\mathcal{P}(\mathcal{U}))$$

et donc une structure de $Z\big[\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})\big]$-module sur $\mathcal{P}(\mathcal{U})$. Pour simplifier les notations on notera $\theta \mathbin{\dot{}}_{\mathcal{U}} m$, et même $\theta \cdot m$ lorsque $\mathcal{U}$ sera sous-entendu, le transformé de $m \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ par $\theta \in \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$ sous cette action, autrement dit, on pose :

$$\theta \mathbin{\dot{}}_{\mathcal{U}} m := \mathcal{P}(\theta)(m).$$

La fonctorialité de $\mathcal{P}$ donne la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} (_ \mathbin{\dot{}}_{\mathcal{U}} _) : \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{U}) \\ \quad \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\phi)\big\downarrow \quad \mathcal{P}(\phi)\big\downarrow & \bigoplus & \big\downarrow \mathcal{P}(\phi) \\ (_ \mathbin{\dot{}}_{\mathcal{U}'} _) : \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}') \times \mathcal{P}(\mathcal{U}') & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{U}') \end{array}$$

pour tous $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ et $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\mathcal{U}',\mathcal{U})$ et la famille des $(_ \mathbin{\dot{}}_{\mathcal{U}} _)$ définit une structure de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}$-module sur $\mathcal{P}$ qu'on appellera «*la structure canonique de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}$-module de $\mathcal{P}$*».

3.2.2. Dorénavant pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$, la restriction $j_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{F})$ d'un (pré)faisceau $\mathcal{F}$ sur $\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$ au sous-site $\mathscr{M}(\mathcal{U})$ munie de sa structure canonique de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}$-module sera notée $J_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{F})$. Le même procédé décrit dans 2.5.6 donne maintenant un foncteur

$$\mathscr{R}_{\mathcal{U}} : \text{Mod}_{\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}}(Z) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(Z, \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$$

où $\text{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(Z, \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$ désigne la catégorie des faisceaux de Z-modules sur $\overline{\mathcal{U}}$ munis d'une action de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}$ par isomorphismes de Z-modules. Ce foncteur résulte de composer :

$$\underbrace{\text{Mod}_{\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}}(Z) \xrightarrow{i_{\mathcal{U}}^{-1}} \text{Mod}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}(Z) \xrightarrow{J_{\mathcal{U}}^{-1}} \text{Mod}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}(Z, \mathcal{G}^\dagger_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}) \xrightarrow[\simeq]{\text{faisceau associé}} \text{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(Z, \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})}_{\mathscr{R}_{\mathcal{U}}} \qquad (*)$$

et le foncteur $\mathscr{R}_{\mathcal{U}} : \text{Mod}_{\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}}(Z) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(Z)$ de 2.5.6 s'obtient en composant $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}$ avec le foncteur d'oubli de l'action du groupe de $\text{Mod}_{\mathcal{U}}(Z, \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$ vers $\text{Mod}_{\mathcal{U}}(Z)$.

3.2.3. Théorème. *Soit $(\overline{X};\mathcal{O}_{\overline{X}})$ un schéma* **affine** *lisse sur $\overline{R}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$. Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$ tel que $\overline{\mathcal{U}} = \overline{X}$ les foncteurs $i_{\mathcal{U}}^{-1}$ et $J_{\mathcal{U}}^{-1}$ dans $(*)$ et le*

foncteur

$$\mathscr{R}_{\mathcal{U}} : \mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z}, \mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}})$$

sont des équivalences de catégories.

Démonstration. Notons $\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$ le sous-site plein de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ dont les objets sont ceux de $\mathscr{M}(\mathcal{U})$. Le foncteur

$$i_{\mathcal{U}}^{-1} : \mathrm{Préf}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Préf}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\boldsymbol{Z})$$

qui associe à un préfaisceau de $\boldsymbol{Z}$-modules sur $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ sa restriction à $\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$ est une équivalence de catégories puisque l'inclusion $\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle \subseteq \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ est elle-même une équivalence de catégories.

Les remarques 3.2.1 donnent le foncteur

$$J_{\mathcal{U}}^{-1} : \mathrm{Préf}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Préf}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}\left(\boldsymbol{Z}, \mathcal{G}^{\dagger}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}\right) \tag{$\diamond$}$$

où $\mathrm{Préf}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}\left(\boldsymbol{Z}, \mathcal{G}^{\dagger}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}\right)$ est la catégorie de préfaisceaux de $\boldsymbol{Z}$-modules sur $\mathscr{M}(\mathcal{U})$ munis d'une action à gauche de $\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}$ par des isomorphismes de $\boldsymbol{Z}$-modules.

Montrons que ($\diamond$) est une équivalence de catégories.

Les catégories $\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$ et $\mathscr{M}(\mathcal{U})$ ont les mêmes objets et lorsque $\mathcal{U}', \mathcal{U}'' \in \mathscr{M}(\mathcal{U})$ avec $\mathcal{U}'' \subseteq \mathcal{U}'$, l'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}(\mathcal{U}'', \mathcal{U}')$ est un singleton et l'application suivante est **bijective** (3.1.3-0b) :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mor}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}(\mathcal{U}'', \mathcal{U}') & \times & \mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}'') & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}'', \mathcal{U}') \\ \Phi & & \theta & \longmapsto & \Phi \circ \theta \end{array} \tag{$\ddagger$}$$

Il est donc naturel de prolonger un préfaisceau $\mathcal{P} : \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{Z})$ muni d'une structure de $\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}$-module en une correspondance $\widetilde{\mathcal{P}} : \langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{Z})$ qui coïncide avec $\mathcal{P}$ sur $\mathscr{M}(\mathcal{U})$ et qui à $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}'', \mathcal{U}')$ associe

$$\widetilde{\mathcal{P}}(\phi) \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathcal{P}(\mathcal{U}'), \mathcal{P}(\mathcal{U}'')\big), \quad \widetilde{\mathcal{P}}(\phi)(_) = \theta \cdot \mathcal{P}(\Phi)(_),$$

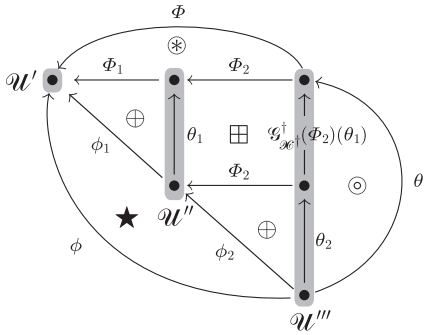
où $\phi = \Phi \circ \theta$ est la décomposition ($\ddagger$) et $(_ \cdot _)$ est l'action de $\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}(\mathcal{U}'')$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{U}'')$.

- ***La correspondance $\widetilde{\mathcal{P}}$ est un préfaisceau sur $\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$.*** ($\ddagger\ddagger$)

En effet, étant donnés des morphismes $\mathcal{U}''' \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{U}'' \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{U}'$ de composée $\phi = \phi_1 \circ \phi_2$ nous devons montrer que $\widetilde{\mathcal{P}}(\phi) = \widetilde{\mathcal{P}}(\phi_2) \circ \widetilde{\mathcal{P}}(\phi_1)$. Soient $\phi_i = \Phi_i \circ \theta_i$ les décompositions de ($\ddagger$), l'égalité :

$$\phi = \Phi_1 \circ \theta_1 \circ \Phi_2 \circ \theta_2 = \big(\Phi_1 \circ \Phi_2\big) \circ \big(\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\Phi_2)(\theta_1) \circ \theta_2\big) = \Phi \circ \theta$$

résulte alors de 3.1.3-0c et nous avons le diagramme commutatif de morphismes de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$



$(\mathcal{D})$

dont les sous-diagrammes suivants restent commutatifs après application de $\widetilde{\mathcal{P}}$:

- Les triangles $\oplus$ et le triangle extérieur (ϕ,Φ,θ) : par la définition même de $\widetilde{\mathcal{P}}$.
- Le triangle $\circledast$: puisque c'est un triangle commutatif de $\mathscr{M}(\mathcal{U})$.
- Le triangle $\odot$: puisque $\widetilde{\mathcal{P}}(_) : \mathrm{Iso}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}''')^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{P}(\mathcal{U}'''))$ est un morphisme de groupes.
- Le carré $\boxplus$: puisque $\mathcal{P}$ est un $\mathcal{G}^\dagger_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}$-module. En effet, dans ce cas le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (_\cdot_) : \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}'') \times \mathcal{P}(\mathcal{U}'') & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{U}'') \\ \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\Phi_2)\big\downarrow \quad \mathcal{P}(\Phi_2)\big\downarrow & \bigoplus & \big\downarrow \mathcal{P}(\Phi_2) \\ (_\cdot_) : \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}''') \times \mathcal{P}(\mathcal{U}''') & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{U}''') \end{array}$$

est commutatif, autrement dit pour tout $m \in \mathcal{P}(\mathcal{U}'')$, on a :

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{P}(\Phi_2)\circ\widetilde{\mathcal{P}}(\theta_1)\big)(m) &= \mathcal{P}(\Phi_2)(\theta_1\cdot m) = \big(\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\Phi_2)(\theta_1)\big)\cdot\big(\mathcal{P}(\Phi_2)(m)\big) \\ &= \big(\widetilde{\mathcal{P}}\big(\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\Phi_2)(\theta_1)\big)\circ\mathcal{P}(\Phi_2)\big)(m) \end{aligned}$$

La commutativité de $\bigstar$ est alors conséquence de toutes ces commutativités et l'assertion $(\ddagger\ddagger)$ est prouvée.

Ceci étant, un morphisme de préfaisceaux de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}$-modules $\alpha : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ est, par construction, automatiquement un morphisme de préfaisceaux $\alpha : \widetilde{\mathcal{P}}_1 \to \widetilde{\mathcal{P}}_2$. Le foncteur $\mathcal{P} \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{P}}$ est donc un inverse à droite et à gauche de $J_{\mathcal{U}}^{-1}$ et $(\diamond)$ est une équivalence de catégories.

Pour terminer, les restrictions de $i_{\mathcal{U}}^{-1}$, $J_{\mathcal{U}}^{-1}$ et $(\widetilde{_})$ aux catégories de faisceaux :

$$\begin{aligned} i_{\mathcal{U}}^{-1} &: \mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\langle\mathscr{M}(\mathcal{U})\rangle}(\boldsymbol{Z}) \\ J_{\mathcal{U}}^{-1} &: \mathrm{Mod}_{\langle\mathscr{M}(\mathcal{U})\rangle}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}(\boldsymbol{Z},\mathcal{G}^\dagger_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}) \\ (\widetilde{_}) &: \mathrm{Mod}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}(\boldsymbol{Z},\mathcal{G}^\dagger_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\langle\mathscr{M}(\mathcal{U})\rangle}(\boldsymbol{Z}) \end{aligned}$$

sont bien définies d'après 2.3.3-0d et sont donc aussi des équivalences de catégories.

Enfin, le foncteur «*faisceau associé*» de $\mathrm{Mod}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}(\boldsymbol{Z};\mathcal{G}^\dagger_{\mathscr{M}(\mathcal{U})})$ vers $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z},\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$ est bien une équivalence de catégories d'après 2.5.7-0b et le théorème est démontré. ∎

3.2.4. Corollaire. *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$. Pour tout $\mathcal{U}\in\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ le foncteur*

$$\mathscr{R}_{\mathcal{U}}:\text{Mod}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}(\boldsymbol{Z})\rightsquigarrow\text{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z},\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}})$$

est exact et admet un inverse à droite qui est aussi adjoint à droite.

Démonstration. On a la décomposition de $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}$

$$\text{Mod}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}(\boldsymbol{Z})\xrightarrow{i^{-1}_{\mathcal{U}}}\text{Mod}_{\langle\mathscr{M}(\mathcal{U})\rangle}(\boldsymbol{Z})\xrightarrow{J^{-1}_{\mathcal{U}}}\text{Mod}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}(\boldsymbol{Z},\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})})\xrightarrow[\simeq]{\substack{\text{faisceau}\\ \text{associé}}}\text{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z},\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}})$$

où $J^{-1}_{\mathcal{U}}$ est une équivalence de catégories d'après la preuve de 3.2.3 et $i^{-1}_{\mathcal{U}}$ admet un adjoint à droite d'après 2.5.4. ∎

3.2.5. Notations. On note

- $\mathscr{I}_{\mathcal{U}}:\text{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z},\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}})\rightsquigarrow\text{Mod}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}(\boldsymbol{Z})$ l'adjoint à droite de $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}$.
- $\epsilon:\text{id}\to\mathscr{I}_{\mathcal{U}}\circ\mathscr{R}_{\mathcal{U}}$ le morphisme adjoint de $\text{id}:\mathscr{R}_{\mathcal{U}}\to\mathscr{R}_{\mathcal{U}}$

Les sections **3.3** et **3.4** suivantes introduisent respectivement les catégories des faisceaux d'algèbres $\mathcal{A}$ et des faisceaux de $\mathcal{A}$-modules sur $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$. Les analogues du théorème 3.2.3 et de son corollaire sont énoncés pour chacune de ces catégories. La démarche est toujours la même ce qui explique une rédaction presque identique et l'omission de preuves.

3.3 Catégorie de faisceaux d'algèbres sur $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$

3.3.1. Préfaisceaux de $\boldsymbol{Z}$-algèbres. Soient $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ et $\boldsymbol{Z}$ un anneau. Un préfaisceau $\mathcal{A}$ de $\boldsymbol{Z}$-algèbres sur $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ dans la catégorie $\text{Alg}(\boldsymbol{Z})$ des $\boldsymbol{Z}$-algèbres, la correspondance

$$\text{End}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}(\mathcal{U})\ni\phi\longmapsto\mathcal{A}(\phi)\in\text{End}_{\text{Alg}(\boldsymbol{Z})}(\mathcal{A}(\mathcal{U}))$$

définit pour chaque $\mathcal{U}\in\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ un morphisme de groupes

$$\mathcal{A}(_):\big(\text{Iso}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}(\mathcal{U})\big)^{\text{op}}\to\text{Iso}_{\text{Alg}(\boldsymbol{Z})}(\mathcal{A}(\mathcal{U}))$$

et la $\boldsymbol{Z}$-algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ est munie d'une action de $\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$ par des automorphismes de $\boldsymbol{Z}$-algèbre, ce qui équivaut à la donnée de l'algèbre produit semi-direct de $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ par $\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$, notée $\mathcal{A}(\mathcal{U})\rtimes\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$, définie par

$$\begin{cases}\mathcal{A}(\mathcal{U})\rtimes\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})=\mathcal{A}(\mathcal{U})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})]=\bigoplus_{\theta\in\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})}\mathcal{A}(\mathcal{U})\otimes\theta\\ (a_1\otimes\theta_1)(a_2\otimes\theta_2)=\big(a_1\theta_1(a_2)\big)\otimes\theta_1\theta_2\end{cases}$$

Notons $(_\dot{}_{\mathcal{U}}_):\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})\times\mathcal{A}(\mathcal{U})\to\mathcal{A}(\mathcal{U})$, et même $(_\cdot_)$ lorsque $\mathcal{U}$ est sous-entendu, l'appli-

cation $\theta \cdot a = \mathcal{A}(\theta)(a)$. La fonctorialité de $\mathcal{A}$ donne alors la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} (-\dot{}_{\mathcal{U}}-) : \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}) \times \mathcal{A}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{A}(\mathcal{U}) \\ \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\phi)\downarrow \quad \mathcal{A}(\phi)\downarrow & \bigoplus & \downarrow \mathcal{A}(\phi) \\ (-\dot{}_{\mathcal{U}'}-) : \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}') \times \mathcal{A}(\mathcal{U}') & \longrightarrow & \mathcal{A}(\mathcal{U}') \end{array}$$

quels que soient $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ et $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{U}', \mathcal{U})$. La famille des $(-\dot{}_{\mathcal{U}}-)$ définit une « *action* » de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{A}$ par automorphismes de $\boldsymbol{Z}$-algèbres qu'on appellera « *l'action canonique de* $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}$ *sur* $\mathcal{A}$ ».

3.3.2. Dorénavant pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, la restriction $j_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{A})$ d'un (pré)faisceau de $\boldsymbol{Z}$-algèbres $\mathcal{A}$ sur $\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle$ au sous-site $\mathscr{M}(\mathcal{U})$ munie de l'action canonique de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}$ par automorphismes de $\boldsymbol{Z}$-algèbres sera notée $J_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{F})$. Le même procédé décrit dans 2.5.6 donne maintenant un foncteur

$$\mathscr{R}_{\mathcal{U}} : \mathrm{Alg}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Alg}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z}, \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$$

où $\mathrm{Alg}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z})$ désigne la catégorie des faisceaux de $\boldsymbol{Z}$-algèbres sur $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z}, \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$ celle des faisceaux de $\boldsymbol{Z}$-algèbres sur $\overline{\mathcal{U}}$ munis d'une action de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}$ par automorphismes de $\boldsymbol{Z}$-algèbres. Ce foncteur résulte de composer :

$$\mathrm{Alg}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \xrightarrow{i_{\mathcal{U}}^{-1}} \mathrm{Alg}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\boldsymbol{Z}) \xrightarrow{J_{\mathcal{U}}^{-1}} \mathrm{Alg}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}(\boldsymbol{Z}, \mathcal{G}^\dagger_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}) \xrightarrow[\simeq]{\text{faisceau associé}} \mathrm{Alg}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z}, \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}) \qquad (*)$$

$$\mathrm{Alg}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \longrightarrow \mathscr{R}_{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathrm{Alg}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z}, \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$$

Le théorème suivant est l'analogue de 3.2.3 et se démontre de la même manière.

3.3.3. Théorème. *Soit* $(\overline{\boldsymbol{X}}; \mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ *un schéma* **affine** *lisse sur* $\overline{\boldsymbol{R}}$ *de site de relèvements affines très lisses* $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. *Pour tout* $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *tel que* $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$ *les foncteurs* $i_{\mathcal{U}}^{-1}$ *et* $J_{\mathcal{U}}^{-1}$ *dans* $(*)$ *et le foncteur*

$$\mathscr{R}_{\mathcal{U}} : \mathrm{Alg}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Alg}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z}, \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$$

sont des équivalences de catégories.

3.3.4. Corollaire. *Soit* $(\overline{\boldsymbol{X}}; \mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ *un schéma lisse et séparé sur* $\overline{\boldsymbol{R}}$ *de site de relèvements affines très lisses* $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. *Pour tout* $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *le foncteur*

$$\mathscr{R}_{\mathcal{U}} : \mathrm{Alg}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Alg}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z}, \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$$

est exact et admet un inverse à droite qui est aussi adjoint à droite.

3.3.5. Notations. On note

- $\mathscr{I}_{\mathcal{U}} : \mathrm{Alg}_{\overline{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{Z}, \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}) \rightsquigarrow \mathrm{Alg}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z})$ l'adjoint à droite de $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}$.
- $\epsilon : \mathrm{id} \to \mathscr{I}_{\mathcal{U}} \circ \mathscr{R}_{\mathcal{U}}$ le morphisme adjoint de $\mathrm{id} : \mathscr{R}_{\mathcal{U}} \to \mathscr{R}_{\mathcal{U}}$

3.3.6. Sites annelés $(\mathcal{X}^\dagger_{\mathbf{inf}};\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathbf{inf}}})$, $(\mathscr{M}(\mathcal{U});\mathcal{O}^\dagger_{\mathscr{M}(\mathcal{U})})$, $(\overline{\mathcal{U}};\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{U}})$. Le foncteur de la catégorie $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$ vers la catégorie des $\boldsymbol{R}$-algèbres f.c.t.f. très lisses, qui fait correspondre à $\mathcal{U}$ son algèbre associée $\boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger$ et à un morphisme $\Phi:\mathcal{V}\to\mathcal{U}$ le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi:\boldsymbol{A}(\mathcal{U})^\dagger\to\boldsymbol{A}(\mathcal{V})^\dagger$ associé, est un préfaisceau sur $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$ qu'on notera $\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}$. Pour tout $\mathcal{U}\in\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$, la restriction de $\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}$ à $\mathscr{M}(\mathcal{U})$, notée $\mathcal{O}^\dagger_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}$, n'est autre que le **faisceau** structural du schéma de Meredith $(\overline{\mathcal{U}},\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{U}})$ restreint à la catégorie des ouverts affines de $\overline{\mathcal{U}}$ (*cf.* 2.3.1). Le préfaisceau $\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}$ est donc un faisceau sur $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$ d'après 2.3.3. Les faisceaux $\mathcal{O}^\dagger_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}$ et $\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}$ sont «*les faisceaux structuraux des sites* $\mathscr{M}(\mathcal{U})$ *et* $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$» respectivement.

3.4 Catégorie de faisceaux de $\mathcal{A}$-modules sur $\mathcal{X}^\dagger_{\mathbf{inf}}$

3.4.1. La section 3.2 était consacrée à l'étude de la catégorie des (pré)faisceaux de $\underline{\boldsymbol{Z}}_{\mathcal{X}}$-modules sur $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$, où $\underline{\boldsymbol{Z}}_{\mathcal{X}}$ est le préfaisceau «*constant*» sur $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$ de fibre l'anneau $\boldsymbol{Z}$. Nous indiquons maintenant comment les constructions et résultats de 3.2 se généralisent au cadre de la catégorie des $\mathcal{A}$-modules sur $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$, où $\mathcal{A}$ est un faisceau d'algèbres sur $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$.

Dans la suite «*module*» sera synonyme de «*module à gauche*». Les mêmes idées s'appliquent pour les «*modules à droite*» moyennant les modifications habituelles.

3.4.2. Préfaisceaux de $\mathcal{A}$-modules. Soit $\mathcal{A}$ un faisceau de $\boldsymbol{Z}$-algèbres sur $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$. Un «$\mathcal{A}$-*module*» est la donnée d'un faisceau de groupes abéliens $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$ et pour chaque $\mathcal{U}\in\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$ d'une structure de $\mathcal{A}(\mathcal{U})$-module sur $\mathcal{M}(\mathcal{U})$. On notera $a\underset{\mathcal{U}}{\star}m$, et même $a\star m$ lorsque $\mathcal{U}$ sera sous-entendu, le transformé de $m\in\mathcal{P}(\mathcal{U})$ par $a\in\mathcal{A}(\mathcal{U})$ sous cette action. Les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}(_\underset{\mathcal{U}}{\star}_):\mathcal{A}(\mathcal{U})\times\mathcal{M}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{M}(\mathcal{U})\\ {\scriptstyle\mathcal{A}(\phi)}\downarrow\quad{\scriptstyle\mathcal{M}(\phi)}\downarrow & \bigoplus & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{M}(\phi)}\\ (_\underset{\mathcal{U}'}{\star}_):\mathcal{A}(\mathcal{U}')\times\mathcal{M}(\mathcal{U}') & \longrightarrow & \mathcal{M}(\mathcal{U}')\end{array}\qquad(*)$$

sont commutatifs quels que soient $\mathcal{U}'\subseteq\mathcal{U}$ et $\phi\in\mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\mathcal{U}',\mathcal{U})$. D'autre part, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{M}$ étant des préfaisceaux sur $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$, ils sont munis d'actions de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}$ respectivement par automorphismes de $\boldsymbol{Z}$-algèbres et par isomorphismes de $\mathbb{Z}$-modules, la compatibilité entre ces actions et la structure de $\mathcal{A}$-module est donnée par l'égalité :

$$\theta\cdot(a\star m)=(\theta\cdot a)\star(\theta\cdot m)$$

qui résulté de la commutativité de $(*)$ pour $\phi=\theta\in\mathrm{End}_{\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\mathcal{U})$, $a\in\mathcal{A}(\mathcal{U})$ et $m\in\mathcal{M}(\mathcal{U})$. Il s'ensuit que le $\mathcal{A}$-module $\mathcal{M}$ vient muni d'une structure de $\mathcal{A}\rtimes\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}$-module canonique.

On notera $\mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\mathcal{A})$, et plus simplement $\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ lorsque la référence à $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$ sera superflue, la catégorie des $\mathcal{A}$-modules sur $\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$.

3.4.3. Dorénavant pour chaque $\mathcal{U}\in\mathcal{X}^\dagger_{\text{inf}}$, la restriction $j_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{M})$ d'un $\mathcal{A}$-module $\mathcal{M}$ sur $\langle\mathscr{M}(\mathcal{U})\rangle$ au sous-site $\mathscr{M}(\mathcal{U})$ munie de sa structure canonique de $\mathcal{A}|_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}\rtimes\mathcal{G}^\dagger_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}$-module sera

notée $J_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{M})$. Le même procédé décrit dans 2.5.6 donne maintenant le foncteur

$$\mathscr{R}_{\mathcal{U}} : \mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}\big(\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{A}) \rtimes \mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}}\big)$$

résultat de composer :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{i_{\mathcal{U}}^{-1}} & \mathrm{Mod}_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U})\rangle}\big(\mathcal{A}|_{\langle \mathscr{M}(\mathcal{U})\rangle}\big) & \xrightarrow{J_{\mathcal{U}}^{-1}} & \mathrm{Mod}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}\big(\mathcal{A}|_{\mathscr{M}(\mathcal{U})} \rtimes \mathcal{G}^{\dagger}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}\big) \\ & & & & \overset{\text{faisceau associé}}{\Big\downarrow \simeq} \\ & & & & \mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}\big(\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{A}) \rtimes \mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}}\big) \end{array} \qquad (*)$$

Le théorème suivant est l'analogue de 3.2.3 et se démontre de la même manière.

3.4.4. Théorème. *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma **affine** lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$. Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ tel que $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$ les foncteurs $i_{\mathcal{U}}^{-1}$ et $J_{\mathcal{U}}^{-1}$ dans $(*)$ et le foncteur*

$$\mathscr{R}_{\mathcal{U}} : \mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}\big(\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{A}) \rtimes \mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}}\big)$$

sont des équivalences de catégories.

3.4.5. Corollaire. *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$. Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ le foncteur*

$$\mathscr{R}_{\mathcal{U}} : \mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}\big(\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{A}) \rtimes \mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}}\big)$$

est exact et admet un inverse à droite qui est aussi adjoint à droite.

3.4.6. Notations. On note

- $\mathscr{I}_{\mathcal{U}} : \mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}\big(\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{A}) \rtimes \mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}}\big) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{A})$ l'adjoint à droite de $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}$.
- $\epsilon : \mathrm{id} \to \mathscr{I}_{\mathcal{U}} \circ \mathscr{R}_{\mathcal{U}}$ le morphisme adjoint de $\mathrm{id} : \mathscr{R}_{\mathcal{U}} \to \mathscr{R}_{\mathcal{U}}$

3.4.7. Corollaire. *Soient $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma **affine** lisse, $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ son site de relèvements affines très lisses et $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ tel que $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$. On a une équivalence de catégories :*

$$\mathscr{R}_{\mathcal{U}} : \mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}\big(\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{X}}\big) \xrightarrow[\simeq]{} \mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}\big(\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}}\big)$$

§4. Opérateurs différentiels †-adiques

4.1 Le faisceau $\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(_,_)$

Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ et soient $\mathcal{E},\mathcal{F} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z})$.

$\mathscr{H}$-i) Pour $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$, on note :

$$\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{E},\mathcal{F})(\mathcal{U}) := \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{E}),\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})\big)$$

où le terme de droite est le module des morphismes de faisceaux de $\boldsymbol{Z}$-modules de $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{E})$ vers $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})$.

$\mathscr{H}$-ii) Pour $\mathcal{U}',\mathcal{U}\in\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ et $\phi\in\text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\mathcal{U}',\mathcal{U})$, on note

$$\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{E},\mathcal{F})(\phi):\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{E},\mathcal{F})(\mathcal{U})\to\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{E},\mathcal{F})(\mathcal{U}')$$

l'application qui associe à $\alpha:\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{E})\to\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})$ le morphisme de faisceaux

$$\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{E},\mathcal{F})(\phi)(\alpha):=\mathscr{R}_{\phi}(\mathcal{F})\circ(\alpha|_{\overline{\mathcal{U}'}})\circ\mathscr{R}_{\phi}(\mathcal{E})^{-1},$$

soit schématiquement :

$$\begin{pmatrix}\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{E})\\ \alpha\downarrow\\ \mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})\end{pmatrix}\xmapsto{\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{E},\mathcal{F})(\phi)}\begin{pmatrix}\mathscr{R}_{\mathcal{U}'}(\mathcal{E})&\xrightarrow[\simeq]{\mathscr{R}_{\phi}(\mathcal{E})^{-1}}&\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{E})|_{\overline{\mathcal{U}'}}\\ &&\downarrow\alpha|_{\overline{\mathcal{U}'}}\\ \mathscr{R}_{\mathcal{U}'}(\mathcal{F})&\xleftarrow[\simeq]{\mathscr{R}_{\phi}(\mathcal{F})}&\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})|_{\overline{\mathcal{U}'}}\end{pmatrix}$$

où les isomorphismes $\mathscr{R}_{\phi}(\mathcal{E})$ et $\mathscr{R}_{\phi}(\mathcal{F})$ sont ceux de la proposition de 2.5.8.

4.1.1. Cas particuliers

i) Pour $\mathcal{V}\in\mathscr{M}(\mathcal{U})$ et $\{\Phi\}=\text{Mor}_{\mathscr{M}(\mathcal{U})}(\mathcal{V},\mathcal{U})$, $\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{E},\mathcal{F})(\Phi)$ est l'application

$$\text{Hom}_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{E}),\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})\big)\xrightarrow{\rho}\text{Hom}_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{E})|_{\overline{\mathcal{V}}},\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})|_{\overline{\mathcal{V}}}\big)=\text{Hom}_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E}),\mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})\big)$$

où $\rho(\alpha)=\alpha|_{\overline{\mathcal{V}}}$.

ii) Pour $\theta\in\text{Iso}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\mathcal{V})$ et $\alpha\in\text{Hom}_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E}),\mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})\big)$, la famille des diagrammes commutatifs pour $\overline{W}'\subseteq\overline{W}\subseteq\overline{V}$ (*cf.* 2.4.5) :

$$\begin{array}{ccccccc}\mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E})(\overline{W})&\xrightarrow{\theta^{-1}|_{\overline{W}}}&\mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E})(\overline{W})&\xrightarrow{\alpha(\overline{W})}&\mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})(\overline{W})&\xrightarrow{\theta|_{\overline{W}}}&\mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})(\overline{W})\\ \downarrow&&\downarrow&&\downarrow&&\downarrow\\ \mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E})(\overline{W}')&\xrightarrow{\theta^{-1}|_{\overline{W}'}}&\mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E})(\overline{W}')&\xrightarrow{\alpha(\overline{W}')}&\mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})(\overline{W}')&\xrightarrow{\theta|_{\overline{W}'}}&\mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})(\overline{W})\end{array}$$

où les carrés de droite et gauche font référence à la structure de $\mathcal{G}_{\mathcal{V}}^{\dagger}$-module de $\mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E})$ et $\mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$, est un morphisme de faisceaux noté $\theta(\alpha):\mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E})\to\mathscr{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$. Le groupe $\text{Iso}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\mathcal{V})^{\text{op}}$ agit de cette manière sur $\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathcal{E},\mathcal{F}\big)(\mathcal{V})$ et $\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{E},\mathcal{F})(\theta)$ est l'application correspondante à θ pour cette action.

iii) Si $\mathcal{V}\in\mathscr{M}(\mathcal{U})$ et si $\phi\in\text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\mathcal{V},\mathcal{U})$ est de décomposition canonique $\Phi\circ\theta$, on a

$$\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{E},\mathcal{F})(\phi):=\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{E},\mathcal{F})(\theta)\circ\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{E},\mathcal{F})(\Phi)$$

4.1.2. Proposition. *Soient* $\mathcal{E},\mathcal{F}\in\text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\boldsymbol{Z})$.

a) *La correspondance* $\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ *définie sur la catégorie* $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ *par* $\mathscr{H}$-(i,ii) *est un* ***faisceau*** *sur* $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$. *Pour tout* $\mathcal{U}\in\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$, *on a un isomorphisme naturel :*

$$\mathscr{R}_{\mathcal{U}}\big(\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{E},\mathcal{F}))\big)\equiv\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{E}),\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})\big)$$

b) *Le faisceau* $\mathscr{E}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{F}):=\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{F},\mathcal{F})$ *est un faisceau de* $\boldsymbol{Z}$*-algèbres sur* $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$.

c) *Pour tout faisceau de* $\boldsymbol{Z}$*-algèbres* $\mathcal{A}$ *sur* $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$, *le faisceau* $\mathscr{E}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{A})$ *est une* $\mathcal{A}$*-algèbre.*

d) *On a des inclusions canoniques de faisceaux* $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}} \subseteq \mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}})$ *et* $\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}} \subseteq \mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}})$.

e) *Lorsque* $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ *est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal* $\boldsymbol{I}$, *le morphisme de faisceaux d'algèbres* $\iota : \mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}} \to \mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}})$ *induit par les inclusions* (0d) *est* ***injectif***. *De plus, le morphisme canonique des sections du préfaisceau vers les sections du faisceau associé :*

$$\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}) \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}) \to \big(\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}\big)(\mathcal{U}),$$

est ***bijectif*** *pour tout* $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *tel que* $\overline{\mathcal{U}}$ *est connexe.*

Démonstration. a,b,c,d) On montre que $\mathscr{H}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ est un préfaisceau sur $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ à l'aide de la propriété 2.5.9-(0b). D'autre part, pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, la restriction de $\mathscr{H}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ à la sous-catégorie $\mathscr{M}(\mathcal{U})$ est le faisceau $\mathscr{H}_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{E}),\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}))$ (*cf.* 4.1.1-(0i)). La correspondance $\mathscr{H}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ est donc bien un faisceau sur $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ (2.3.3) et le reste des affirmations (a,b,c) est de vérification immédiate.

e) Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre commutative avec identité multiplicative intègre $\boldsymbol{B}$ l'ensemble $\boldsymbol{G}$ des automorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbre est $\boldsymbol{B}$-linéairement indépendant dans $\mathrm{End}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B})$. En effet, soient $\theta_1,\dots,\theta_r$ deux à deux distincts dans $\boldsymbol{G}$ et $b_i \in \boldsymbol{B} \smallsetminus \{0\}$ tels que $\sigma = \sum_{i=1}^r b_i \cdot \theta_i$ opère par zéro sur $\boldsymbol{B}$. Alors, pour tout $b \in \boldsymbol{B}$:

$$0 = \sigma b - \theta_r(b)\sigma = \sum_{i=1,\dots,r-1} b_i\big(\theta_i(b) - \theta_r(b)\big) \cdot \theta_i\,.$$

En raisonnant par induction, on peut supposer que $\{\theta_1,\dots,\theta_{r-1}\}$ est $\boldsymbol{B}$-linéairement indépendant et alors $b_i\big(\theta_i(b) - \theta_r(b)\big) = 0$ pour tout $b \in \boldsymbol{B}$ et chaque $i = 1,\dots,r-1$, ce qui est contraire à l'intégrité de $\boldsymbol{B}$.

Lorsque $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ est un anneau de valuation discrète et que $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est tel que $\overline{\mathcal{U}}$ est connexe, l'anneau $\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{V})$ est intègre pour tout $\mathcal{V}$ tel que $\overline{\mathcal{V}}$ est principal non vide dans $\overline{\mathcal{U}}$. L'application

$$\xi(\mathcal{V}) : \mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{V}) \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{V}) \to \mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}})(\mathcal{V}), \qquad a \otimes \theta \mapsto a\theta,$$

est alors injective d'après la remarque précédente. L'injectivité de ι s'ensuit car $\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}$ est le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{U} \rightsquigarrow \mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}) \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$ et que ι est le morphisme de faisceaux induit par ξ.

Pour tout recouvrement fini $\{\mathcal{V}_i\} \subseteq \mathscr{M}(\mathcal{U})$ tel que $\overline{\mathcal{V}}_i$ est principal et non vide dans $\overline{\mathcal{U}}$ la suite

$$\mathbf{0} \to \mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}) \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\epsilon} \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{V}_i) \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{V}_i) \xrightarrow{\delta_0} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \ell} \mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{V}_{ij}) \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{V}_{ij}) \qquad (\diamond)$$

est **exacte**.

En effet, un élément $\sigma \in \mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}) \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$ s'écrit

$$\sigma = \textstyle\sum_k a_k \otimes \theta_k, \text{ avec } \theta_k \neq \theta_{k'} \text{ si } k \neq k',$$

et comme les restrictions $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{V}_i)$ sont injectives (2.4.2), les automorphismes $\theta_{i,k} := \theta_k|_{\mathcal{V}_i}$ sont deux à deux distincts et l'ensemble $T_i = \{\theta_{i,k}\}$ est $\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{V}_i)$-indépendant. Par con-

séquent, lorsque $\epsilon(\sigma)=0$ on a $a_k|_{\mathcal{V}_i}=0$ pour tous i,k et donc $a_k=0$ pour tout k, d'où l'injectivité de ϵ.

Soit maintenant $\sigma_i\in\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{V}_i)\rtimes\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{V}_i)$ pour chaque $i=1,\dots,\ell$:

$$\sigma_i=\textstyle\sum_k a_{i,k}\otimes\theta_{i,k},\ \text{avec}\ \theta_{i,k}\neq\theta_{i,k'}\ \text{si}\ k\neq k',$$

vérifiant

$$\sigma_i|_{\mathcal{V}_{ij}}=\sigma_j|_{\mathcal{V}_{ij}},\ \text{pour tout}\ i<j. \tag{‡}$$

Comme les restrictions $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{V}_i)\to\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{V}_{ij})$ sont injectives puisque les anneaux $\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{V}_i)$ sont intègres et que $\overline{\mathcal{V}}_{ij}\neq\varnothing$ (2.4.2), l'égalité (‡) définit une bijection entre les ensembles $T_i=\{\theta_{i,k}\}$ et $T_j=\{\theta_{j,k}\}$, à savoir : deux automorphismes se correspondent si et seulement si leurs restrictions à $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{V}_{ij})$ coïncident. Rénumérotons les $\theta_{i,*}$ de manière à ce que chaque famille $\Theta_k=\{\theta_{i,k}\}$ se recolle en un élément $\theta_k\in\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$. L'égalité (‡) montre alors aussi que chaque famille $A_k=\{a_{i,k}\}$ se recolle en un élément $a_k\in\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$. La somme $\sigma=\sum_k a_k\otimes\theta_k\in\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})\rtimes\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$ est clairement le recollement des σ_i et ceci termine la vérification de l'exactitude de la suite ($\diamond$).

L'exactitude de ($\diamond$) pour **tout** recouvrement fini principal de $\mathcal{U}$ implique que l'application canonique $\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})\rtimes\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})\to\big(\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}\rtimes\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}\big)(\mathcal{U})$ est bijective (*cf.* 2.2.11) et l'assertion (e) est démontrée. ∎

4.2 Faisceau d'opérateurs différentiels †-adiques sur $\boldsymbol{\mathcal{X}^\dagger_{\mathbf{inf}}}$

4.2.1. Opérateurs différentiels. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre commutative avec identité multiplicative, identifions chaque $a\in\boldsymbol{A}$ avec l'endomorphisme linéaire de $\boldsymbol{A}$ défini par $x\mapsto ax$ et notons $[\lambda,\mu]=\lambda\circ\mu-\mu\circ\lambda$ pour tous $\lambda,\mu\in\mathrm{End}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A})$.

Un « *opérateur différentiel $\boldsymbol{R}$-linéaire de degré m sur $\boldsymbol{A}$* » est un endomorphisme de $\boldsymbol{R}$-module $\lambda\in\mathrm{End}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A})$ vérifiant :

$$[\dots[[\lambda,a_0],a_1],\dots,a_m]=0,$$

pour tous $a_0,\dots,a_m\in\boldsymbol{A}$. L'ensemble de ces opérateurs est noté $\mathcal{D}^m_{\boldsymbol{A}}$. On a $\boldsymbol{A}=\mathcal{D}^0_{\boldsymbol{A}}$, puis $\mathcal{D}^m_{\boldsymbol{A}}\circ\mathcal{D}^n_{\boldsymbol{A}}\subseteq\mathcal{D}^{m+n}_{\boldsymbol{A}}$ et une suite croissante de sous-$\boldsymbol{A}$-bimodules de $\mathrm{End}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A})$:

$$\mathcal{D}^0_{\boldsymbol{A}}\subseteq\mathcal{D}^1_{\boldsymbol{A}}\subseteq\mathcal{D}^2_{\boldsymbol{A}}\subseteq\cdots\subseteq\mathrm{End}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A})$$

de réunion l'algèbre $\mathcal{D}_{\boldsymbol{A}}:=\bigcup_m\mathcal{D}^m_{\boldsymbol{A}}$.

4.2.2. Morphismes d'algèbres et opérateurs différentiels

Lemme. *Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre et $\phi:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}$ un endomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbre.*
a) *Pour toute suite $a_0,a_1,\dots,a_m\in\boldsymbol{A}$ on a :*

$$[\dots[[\phi,a_0],a_1],\dots,a_m]=\Big(\textstyle\prod_{i=0}^m(\phi-\mathrm{id})(a_i)\Big)\,\phi.$$

b) *Si $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}$ est nilpotent de degré de nilpotence m et que $\phi = \mathrm{id} \bmod \boldsymbol{I}$, on a $\phi \in \mathcal{D}^m_{\boldsymbol{A}}$.*

c) *Pour chaque $m\in\mathbb{N}$, l'action de $\theta\in\boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A})$ sur $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^m\cdot\boldsymbol{A}$ est celle d'un opérateur différentiel (inversible) de degré au plus m.*

Démonstration. Pour (a) il suffit de calculer $[\phi,a](b)$ pour tous $a,b\in\boldsymbol{A}$. On a :

$$[\phi,a](b) = \phi(ab) - a\phi(b) = \phi(a)\phi(b) - a\phi(b) = \big(\phi(a)-a\big)\phi(b)\,,$$

puisque ϕ est un endomorphisme d'anneau. Les autres assertions sont claires. ∎

4.2.3. Opérateurs différentiels †-adiques sur un schéma de Meredith. La définition suivante est due à Zoghman Mebkhout.

Définition. Soient $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ un schéma de Meredith et $\overline{V}$ un ouvert de $\overline{\boldsymbol{X}}$. Une section $\varphi\in\Gamma(\overline{V};\mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}))$ est une famille $\Big\{12pt\varphi(\overline{W})\in\mathrm{End}_{\boldsymbol{R}}\big(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W})\big)\Big\}$ indexée par les ouverts $\overline{W}\subseteq\overline{V}$ telle que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W}) & \xrightarrow{\varphi(\overline{W})} & \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W})\\ {\scriptstyle\rho^{\overline{W}}_{\overline{W}'}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho^{\overline{W}}_{\overline{W}'}}\\ \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W}') & \xrightarrow{\varphi(\overline{W}')} & \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W}')\end{array}$$

sont commutatifs pour tous $\overline{W}'\subseteq\overline{W}\subseteq\overline{V}$. La section φ est un «*opérateur différentiel †-adique*» lorsqu'il existe une constante C telle que pour chaque $m\in\mathbb{N}$ la réduction modulo $\boldsymbol{I}^m$ de $\varphi(\overline{W})$:

$$\varphi(\overline{W})_m : \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W})/\boldsymbol{I}^m\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W}) \to \mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W})/\boldsymbol{I}^m\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W})$$

est un opérateur différentiel de degré majoré par $C(m+1)$, *i.e.*

$$\varphi(\overline{W})_m \in \mathcal{D}^{C(m+1)}_{\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W})/\boldsymbol{I}^m\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W})}$$

et ceci, quel que soit l'ouvert $\overline{W}\subseteq\overline{V}$. On note $\mathcal{D}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V})$ l'ensemble de telles sections.

4.2.4. Proposition et définition. *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ un schéma de Meredith.*

a) *Soit $\rho^{\overline{V}}_{\overline{W}} : \Gamma\big(\overline{V};\mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})\big) \to \Gamma\big(\overline{W};\mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})\big)$ le morphisme de restriction du faisceau $\mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$. On a*

$$\rho^{\overline{V}}_{\overline{W}}\big(\mathcal{D}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V})\big) \subseteq \mathcal{D}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W})\,.$$

On note alors $\mathcal{D}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$ le sous-préfaisceau de $\mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ ainsi défini. Le préfaisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$ est un faisceau sur $\overline{\boldsymbol{X}}$.

b) *On a une inclusion naturelle de faisceaux : $\mathcal{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}\subseteq\mathcal{D}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$.*

Indication. (a) est claire d'après la définition de $\mathcal{D}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V})$ et (b) résulte du lemme 4.2. ∎

4.2.5. Opérateurs différentiels †-adiques sur $\boldsymbol{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathbf{inf}}}$. Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$. Pour tout $\mathcal{U}\in\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ on pose

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}) := \Gamma\big(\overline{\mathcal{U}};\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}}\big)\,.$$

La proposition suivante est la généralisation immédiate de 4.2.4 dès sites de Meredith au site des relèvements affines très lisses.

Proposition

a) *Soit* $\rho_{\phi}:\mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}\big(\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{X}}\big)(\mathcal{U})\to\mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}\big(\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{X}}\big)(\mathcal{V})$ *le morphisme que le foncteur* $\mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}\big(\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{X}}\big)$ *fait correspondre à* $\phi\in\mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{V},\mathcal{U})$. *Alors* $\rho_{\phi}\big(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})\big)\subseteq\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{V})$ *et la correspondance* $\mathcal{U}\rightsquigarrow\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$ *munie des morphismes* ρ_{ϕ} *est un sous-***faisceau** *de* $\mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{X}})$.

b) *On a l'inclusion* $\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{X}}\subseteq\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}$ *compatible aux inclusions* $\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}}$ *de* 4.2.4-0b.

4.3 Équivalences de catégories de $\boldsymbol{\mathcal{D}^{\dagger}}$-modules

4.3.1. La catégorie $\mathbf{Mod}^{\dagger}(\boldsymbol{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}})$. Soit $\mathcal{U}\in\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$. Par l'inclusion $\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}}$ on munit un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}}$-module d'une structure de $\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}}$-module et donc aussi de $\big(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}}\rtimes\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}}\big)$-module. La catégorie $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}})$ apparaît ainsi comme sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}}\rtimes\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}})$, ce sera le sens dans la suite de l'inclusion $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}})\subseteq\mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}}\rtimes\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}})$.

Notons $\mathrm{Mod}^{\dagger}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}})$ des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}$-modules $\mathcal{M}$ tels que pour chaque $\mathcal{U}\in\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ l'action de $\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$ sur $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ ($\mathcal{M}$ est un préfaisceau sur $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$) coïncide avec l'action induite par l'action de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$ sur $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ ($\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})\subseteq\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$). Il est clair que le noyau et conoyau d'un morphisme de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}$-modules de $\mathrm{Mod}^{\dagger}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}})$ appartiennent encore à cette catégorie qui est donc une sous-catégorie abélienne de $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}})$.

4.3.2. Remarque. On a $\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{X}}\in\mathrm{Mod}^{\dagger}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}})$ mais $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}\notin\mathrm{Mod}^{\dagger}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}})$.

4.3.3. Théorème. *Soit* $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathcal{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ *un schéma lisse et séparé sur* $\overline{\boldsymbol{R}}$ *de site de relèvements affines très lisses* $\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ *et soit* $\mathcal{U}\in\mathcal{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$.

a) *La restriction* $\mathscr{R}'_{\mathcal{U}}$ *du foncteur* $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}:\mathrm{Mod}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}})\rightsquigarrow\mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}}\rtimes\mathcal{G}^{\dagger}_{\mathcal{U}})$ *à la sous-catégorie* $\mathrm{Mod}^{\dagger}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}})$ *est à valeurs dans* $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}})$ *et le foncteur*

$$\mathscr{R}'_{\mathcal{U}}:\mathrm{Mod}^{\dagger}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}})\rightsquigarrow\mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}}) \qquad (\diamond)$$

est exact et admet un adjoint à droite.

b) *Lorsque* $\overline{\boldsymbol{X}}$ *est affine et* $\overline{\mathcal{U}}=\overline{\boldsymbol{X}}$, *le foncteur* $(\diamond)$ *est une équivalence de catégories.*

c) *La catégorie* $\mathrm{Mod}^{\dagger}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}})$ *est abélienne et possède suffisamment d'objets injectifs.*

Démonstration. Un $(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$-module est muni de deux structures de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}$-module grâce aux morphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}} \\ \theta & \longmapsto & \theta \otimes 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}} \\ \theta & \longmapsto & 1 \otimes \theta \end{array}$$

On note alors $\mathrm{Mod}^\dagger_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$ des modules sur lesquels ces deux structures de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}$-module coïncident et par restriction de $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}$ (3.4.5) on obtient le foncteur

$$\mathscr{R}^\dagger_{\mathcal{U}} : \mathrm{Mod}^\dagger(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^\dagger_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}).$$

D'autre part les morphismes de préfaisceaux d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} \alpha : \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}} \\ \sigma & \longmapsto & \sigma \otimes 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \beta : \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \\ \sigma \otimes \theta & \longrightarrow & \sigma\theta \end{array}$$

donnent respectivement les foncteurs

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} : \mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\mathcal{B}} : \mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^\dagger_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$$

où $\boldsymbol{\mathcal{A}} \circ \boldsymbol{\mathcal{B}}$ est équivalent à l'identité car $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$. Le foncteur $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ établit alors une équivalence de catégories entre l'image essentielle de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, *i.e.* $\mathrm{Mod}^\dagger_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$, et $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}})$. Le foncteur $(\diamond)$ se factorise alors en

$$\mathscr{R}'_{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mathcal{A}} \circ \mathscr{R}^\dagger_{\mathcal{U}},$$

et les affirmations (a) et (b) seront conséquences immédiates des affirmations analogues pour le foncteur $\mathscr{R}^\dagger_{\mathcal{U}}$.

Le foncteur $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}$ et son adjoint à droite $\mathscr{I}_{\mathcal{U}}$ ont été introduits dans les catégories des faisceaux d'algèbres et dans celles des modules sur un faisceau d'algèbres (3.3, 3.4). Nous savons que $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}) = \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}}$ et $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}) = \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}$ et nous disposons des morphismes d'adjonction

$$\begin{cases} \epsilon(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}) : \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}} \to (\mathscr{I}_{\mathcal{U}} \circ \mathscr{R}_{\mathcal{U}}^{-1})(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}) = \mathscr{I}_{\mathcal{U}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}}) \\ \epsilon(\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}) : \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}} \to (\mathscr{I}_{\mathcal{U}} \circ \mathscr{R}_{\mathcal{U}}^{-1})(\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}) = \mathscr{I}_{\mathcal{U}}(\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}) \end{cases} \qquad (*)$$

qui sont des morphismes de faisceaux **d'algèbres** sur $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Pour $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$, les actions de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}$ et de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}$ sur $\mathscr{I}_{\mathcal{U}}(\mathcal{M})$ sont alors celles qui proviennent des morphismes $(*)$. Il s'ensuit que si les actions de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}}$ et de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}$ sur $\mathcal{M}$ sont compatibles il en sera de même des actions de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}$ et de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{X}}$ sur $\mathscr{I}_{\mathcal{U}}(\mathcal{M})$, autrement dit, la restriction $\mathscr{I}^\dagger_{\mathcal{U}}$ de $\mathscr{I}_{\mathcal{U}}$ à la sous-catégorie pleine $\mathrm{Mod}^\dagger_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$ est bien à valeurs dans $\mathrm{Mod}^\dagger(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}})$ et l'assertion (a) est prouvée.

Lorsque $\overline{\boldsymbol{X}}$ est affine et $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$, le foncteur $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}$ est une équivalence d'inverse $\mathscr{I}_{\mathcal{U}}$ (3.4.4) et il en est donc de même pour les restrictions $\mathscr{R}^\dagger_{\mathcal{U}}$ et $\mathscr{I}^\dagger_{\mathcal{U}}$, d'où (b).

Pour (c) fixons une famille d'objets $\{\mathcal{U}_1, \ldots \mathcal{U}_\ell\}$ de $\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ telle que $\{\overline{\mathcal{U}}_i\}$ est un recouvrement de $\overline{\boldsymbol{X}}$. Pour chaque $i = 1, \ldots, \ell$ et tout $\mathcal{M} \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathbb{Z})$ notons $\mathcal{M}_i := \mathscr{R}_{\mathcal{U}_i}(\mathcal{M})$ et

$\epsilon_i(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \to \mathscr{I}_{\mathcal{U}_i}(\mathcal{M}_i)$ le morphisme adjoint de $\mathrm{id}_{\mathcal{M}_i}$. Alors, le morphisme :

$$\epsilon(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \to \bigoplus\nolimits_{i=1,\dots,\ell} \mathscr{I}_{\mathcal{U}_i}\big(\mathcal{M}_i\big)\,,$$

somme des $\epsilon_i(\mathcal{M})$, est **injectif** quel que soit $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathbb{Z})$. En effet, si $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ est le noyau de $\epsilon(\mathcal{M})$, l'exactitude de $\mathscr{R}_{\mathcal{U}_i}$ implique $\mathscr{R}_{\mathcal{U}_i}(\mathcal{K}(\mathcal{M})) = \mathbf{0}$, pour tout $i = 1, \dots, \ell$ et donc $\mathcal{K}(\mathcal{M}) = 0$ puisque $\{\overline{\mathcal{U}}_i\}$ est un recouvrement de $\overline{\boldsymbol{X}}$.

Celà étant, la sous-catégorie pleine $\mathrm{Mod}^\dagger_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$ de $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$ possède suffisamment d'injectifs car équivalente à la catégorie $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}})$ de modules sur un faisceaux d'anneaux. Fixons alors pour $i = 1, \dots, \ell$, une injection de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}_i}$-modules $\nu_i : \mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{I}_i$ où $\mathcal{I}_i$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}_i}$-module injectif. Comme $\mathscr{I}^\dagger_{\mathcal{U}_i}$ est adjoint à droite d'un foncteur exact, il préserve les injectifs et est exact à gauche. Le morphisme

$$\mathscr{I}^\dagger_{\mathcal{U}_i}(\nu_i) : \mathscr{I}^\dagger_{\mathcal{U}_i}(\mathcal{M}_i) \to \mathscr{I}^\dagger_{\mathcal{U}_i}(\mathcal{I}_i)$$

est donc un plongement de $\mathscr{I}^\dagger_{\mathcal{U}_i}(\mathcal{M}_i)$ dans un objet injectif de $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}})$ et la composition

$$\mathcal{M} \xhookrightarrow{\epsilon(\mathcal{M})} \bigoplus_{i=1,\dots,\ell} \mathscr{I}^\dagger_{\mathcal{U}_i}(\mathcal{M}_i) \xhookrightarrow{\oplus_i\, \mathscr{I}^\dagger_{\mathcal{U}_i}(\nu_i)} \bigoplus_{i=1,\dots,\ell} \mathscr{I}^\dagger_{\mathcal{U}_i}(\mathcal{I}_i)$$

est un plongement de $\mathcal{M}$ dans un objet injectif de $\mathrm{Mod}^\dagger(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}})$. ∎

4.3.4. Remarque. (*cf.* 4.3.2) Il faut prendre garde du fait que le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}}$ sur $\overline{\mathcal{U}}$ est naturellement muni de deux structures de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}$-module distinctes. En effet, dans l'égalité $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} = \mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}})$ le faisceau $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}$ agit par automorphismes intérieurs, *i.e.*

$$\theta \cdot P = \theta P \theta^{-1}, \qquad \forall \theta \in \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}, \forall P \in \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}},$$

alors que sur $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \in \mathrm{Mod}^\dagger(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$ le faisceau $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}$ agit par multiplication à gauche, *i.e.*

$$\theta \cdot P = \theta P, \qquad \forall \theta \in \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}, \forall P \in \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}},$$

On a donc $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}) \notin \mathrm{Mod}^\dagger(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$ et $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}} \neq \mathscr{I}_{\mathcal{U}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}})$ même lorsque $\overline{\boldsymbol{X}} = \overline{\mathcal{U}}$.

Ces distinctions disparaissent dans le cas du faisceau structural $\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{U}}$ dans la mesure où l'action de $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}}$ à travers $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}}$ est précisément l'action canonique par automorphismes d'algèbres. On a $\mathscr{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}}) \in \mathrm{Mod}^\dagger(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}} \rtimes \mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{U}})$ et aussi $\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{X}} = \mathscr{I}_{\mathcal{U}}(\mathcal{O}^\dagger_{\mathcal{U}})$ lorsque $\overline{\boldsymbol{X}} = \overline{\mathcal{U}}$.

§ 5. Références bibliographiques

[Ar] A. Arabia. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes ; Commentarii Mathematici Helvetici 76 (2001) 607–639. (avril 2000).

[Go] R. Godement. "*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*" ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

[McL] S. Mac Lane. "*Categories for the working mathematician*" ; Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag (1998).

[M] D. Meredith. Weak formal schemes ; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).

[MW] P. Monsky, G. Washnitzer. Formal cohomology : I ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217 (1968).

———————×———————

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes

Dimanche 16 janvier 2006

Un théorème de Lefschetz p-adique

Alberto Arabia*

Théorème 1. *Soit $\boldsymbol{X}$ un schéma lisse séparé de type fini sur un corps fini $\boldsymbol{k}$. Soit $\theta : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ un automorphisme, d'ordre fini L relativement premier à $q := |\boldsymbol{k}|$, et agissant sans point fixe, i.e. $\theta(x) \neq x$, pour tout un point fermé $x \in \overline{\boldsymbol{X}} := \overline{\boldsymbol{k}} \otimes \boldsymbol{X}$. Alors*

$$0 = \chi(\theta : H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})) := \sum\nolimits_k (-1)^k \operatorname{tr}_{\boldsymbol{K}} \left(\theta : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K}) \to H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})\right).$$

Quelques notations générales

- $\boldsymbol{k} := \mathbb{F}_q$ où q est une puissance d'un nombre premier p.
- $\boldsymbol{V}$: anneau de valuation discrète séparé complet d'inégales caractéristiques, d'idéal maximal (π), de corps résiduel $\boldsymbol{k}$, et de corps de fractions $\boldsymbol{K}$ avec $\operatorname{car}(\boldsymbol{K}) = 0$.
- $\overline{\boldsymbol{k}}$ et $\overline{\boldsymbol{K}}$: les clôtures algébriques de $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{K}$ respectivement.
- $\boldsymbol{X}$ variété algébrique non singulière sur $\boldsymbol{k}$, *i.e.* un schéma lisse, séparé et de type fini sur $\boldsymbol{k}$. La notation "$x \in \boldsymbol{X}$" signifiera que x est un point *fermé* de $\boldsymbol{X}$.
- $\boldsymbol{X}(\!(r)\!) :=$points fermés de $\overline{\boldsymbol{X}} := \overline{\boldsymbol{k}} \otimes \boldsymbol{X}$ rationnels sur $\mathbb{F}_{q^r}$. Le cardinal de $\boldsymbol{X}(\!(r)\!)$ est noté $N(r)$, et même $N(\boldsymbol{X}, r)$ si l'indication de $\boldsymbol{X}$ s'avère nécessaire.
- $\boldsymbol{G} := \langle\theta\rangle$: groupe des automorphismes de $\boldsymbol{X}$ engendré par θ, donc de cardinal L.

Indications pour la preuve du Théorème 1

§1) Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe fini de cardinal L. Pour tout corps $\boldsymbol{L}$ algébriquement clos de caractéristique, ou bien nulle, ou bien positive et première à L, la catégorie des $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{G}]$-modules de type fini est **semi-simple**. Si le groupe $\boldsymbol{G}$ est de plus cyclique de générateur θ, les $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{G}]$-modules irréductibles sont de dimension 1 et sont donnés par les caractères $\theta^i \mapsto u^i \in \boldsymbol{L}$, où u est un racine L-ième de l'unité.

Ces affirmations sont également vraies sur un anneau intègre $\boldsymbol{L}$ où l'entier L est inversible et où le polynôme $X^L - 1$ est complètement réductible. Plus précisément :

Proposition. *Soit L un entier positif. Soit $\boldsymbol{L}$ un anneau intègre contenant les L racines L-ièmes de l'unité et tel que l'entier L y est inversible. Fixons une racine L-ième primitive de l'unité $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}$. Soit $\boldsymbol{G} = \langle\theta\rangle$ un groupe cyclique d'ordre L. Pour tout $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{G}]$-module $\boldsymbol{M}$ (de type fini ou non) et tout $m \in [0, L-1]$, on définit le sous-module des éléments de* «poids m» *par $\boldsymbol{M}_m := \left\{v \in \boldsymbol{M} \;\middle|\; \theta(v) = \boldsymbol{u}^m v\right\}$. On a alors la décomposition en somme directe*

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{M}_{L-1}.$$

Un élément $v \in \boldsymbol{M}$ se exprime donc manière unique sous la forme $v = v_0 + \cdots + v_{L-1}$, avec $v_m \in \boldsymbol{M}_m$. L'élément v_m est la «composante de poids m de v», *elle est donnée*

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
Bâtiment Sophie Germain, bureau 608, Case 7012, 75205. Paris Cedex 13, France.
Adresse électronique : alberto.arabia@imj-prg.fr

par la formule

$$v_m = \frac{1}{L}\left(1 + \left(\frac{\theta}{\boldsymbol{u}^m}\right) + \left(\frac{\theta}{\boldsymbol{u}^m}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\theta}{\boldsymbol{u}^m}\right)^{L-1}\right)(v)\,.$$

Dans la suite, quitte à faire une extension finie de $\boldsymbol{k}$ (ce qui ne change pas la validité du Théorème **1**, nous supposons que $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{V}$ contiennent les racines L-ièmes de l'unité. La proposition précédente s'appliquera alors à $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}$.

§2) **Représentation régulière gauche de $\boldsymbol{G}$**

Soit $\boldsymbol{L}$ un anneau vérifiant les conditions de la Proposition du paragraphe précédent. Pour tout groupe fini $\boldsymbol{G}$, soit $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{G}]$ l'anneau du groupe $\boldsymbol{G}$ à coefficients dans $\boldsymbol{L}$ et notons $\{\delta_h \mid h \in \boldsymbol{G}\}$ sa base canonique. On fait agir $\boldsymbol{G}$ sur $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{G}]$ par translations à gauche, *i.e.* , pour $g \in \boldsymbol{G}$ on pose $g \cdot \delta_h := \delta_{gh}$ pour tout $g \in \boldsymbol{G}$; c'est la «*représentation régulière (gauche) de* $\boldsymbol{G}$».

Lemme A

a) *Pour tout groupe fini* $\boldsymbol{H}$ *et tout* $h \in \boldsymbol{H}$ *tel que* $h \neq \mathbf{id}$, *on a*

$$\mathrm{tr}_{\boldsymbol{K}}(h : \boldsymbol{L}[\boldsymbol{H}] \to \boldsymbol{L}[\boldsymbol{H}]) = 0\,.$$

En particulier, le Théorème **1** *est vérifié lorsque* $\dim_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{X}) = 0$.

b) *Soit* $\boldsymbol{G}$ *cyclique d'ordre* L *et soit* $\boldsymbol{M}$ *un* $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{G}]$*-module de type fini. Alors,* $\boldsymbol{M}$ *est une somme de représentations régulières si, et seulement si,*

$$\dim_{\boldsymbol{L}}\left(\boldsymbol{M}_0\right) = \dim_{\boldsymbol{L}}\left(\boldsymbol{M}_1\right) = \cdots = \dim_{\boldsymbol{L}}\left(\boldsymbol{M}_{L-1}\right),$$

où $\boldsymbol{M}_m$ *est le sous-*$\boldsymbol{G}$*-module de* $\boldsymbol{M}$ *des éléments de poids* m.

Conclusion :

"*Compte tenu de l'assertion (a), nous supposerons dans la suite que* $\boldsymbol{X}$ *est équidimensionnel de dimension* $n \geqslant 1$."

§3) **Réduction au cas affine**

Soit $\mathscr{W} := \{W_1, \ldots, W_\alpha\}$ un recouvrement fini de $\boldsymbol{X}$ par des ouverts affines. Saturons la famille $\mathscr{W}$ par l'action de θ, *i.e.* , posons $W_{i,j} := \theta^j(W_i)$ et soit $\mathscr{U} := \{U_1, \ldots, U_\beta\}$ la famille des ouverts $W_{i,j}$ réindexée suivant un ordre linéaire. L'action de θ sur les membres de $\mathscr{U}$ correspond alors à une action sur l'ensemble des indices $\{1, \ldots, \beta\}$. Pour tout multi-indice $i_1 i_2 \ldots i_k$, avec $i_j \in [1, \ldots, \beta]$, notons $\theta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ la restriction de θ à l'ouvert $U_{i_1 i_2 \ldots i_k} := U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$. On a un isomorphisme

$$\theta_{i_1 i_2 \ldots i_k} : U_{i_1 i_2 \ldots i_k} \xrightarrow[\simeq]{} U_{\theta(i_1)\theta(i_2)\ldots\theta(i_k)}\,. \qquad (*)$$

Notons $\Omega^*_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ le complexe de formes différentielles †-adiques de $(U_{i_1 i_2 \ldots i_k}/\boldsymbol{K})$. Le morphisme $(*)$ induit un isomorphisme de complexes

$$\theta^*_{i_1 i_2 \ldots i_k} : \Omega^*_{\theta(i_1)\theta(i_2)\ldots\theta(i_k)} \longrightarrow \Omega^*_{i_1 i_2 \ldots i_k} \qquad (**)$$

Soit maintenant

$$\mathbf{0} \to \Omega^*(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K}) \to \textstyle\prod_i \Omega^*_i \to \prod_{i_1 i_2} \Omega^*_{i_1 i_2} \to \prod_{i_1 i_2 i_3} \Omega^*_{i_1 i_2 i_3} \to \cdots \qquad (\diamond)$$

Un théorème de Lefschetz p-adique

le bicomplexe de Čech-de Rham associé au recouvrement $\mathscr{U}$. Les morphismes $(**)$ donnent lieu a un morphisme

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \longrightarrow & \Omega^*(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K}) & \longrightarrow & \prod_i \Omega_i^* & \longrightarrow & \prod_{i_1 i_2} \Omega_{i_1 i_2}^* & \longrightarrow & \prod_{i_1 i_2 i_3} \Omega_{i_1 i_2 i_3}^* \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \theta^*} & & \downarrow{\scriptstyle \Pi_i \theta_i^*} & & \downarrow{\scriptstyle \Pi_{i_1 i_2} \theta_{i_1 i_2}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \Pi_{i_1 i_2 i_3} \theta_{i_1 i_2 i_3}^*} \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \Omega^*(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K}) & \longrightarrow & \prod_i \Omega_i^* & \longrightarrow & \prod_{i_1 i_2} \Omega_{i_1 i_2}^* & \longrightarrow & \prod_{i_1 i_2 i_3} \Omega_{i_1 i_2 i_3}^* \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

qui est clairement un morphisme de bicomplexes de Čech-de Rham, et qui définit une action de θ sur les termes successifs $(\mathbb{E}_r, d_r)$ de la suite spectrale de Čech-deRham associé au bicomplexe $(\diamond)$ ([A-M] §6.5). Or, le complexe $(\mathbb{E}_r, d_r)$ est de dimension finie sur $\boldsymbol{K}$ pour tout $r \geqslant 2$, de sorte que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\theta)$ y est bien définie. Les propriétés usuelles de conservation de cette caractéristique font qu'il suffit que $\chi(\theta)$ soit nulle sur le terme $\mathbb{E}_2$ pour qu'elle soit nulle sur $\mathbb{E}_\infty$ et donc sur $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})$. Or, les termes de $\mathbb{E}_2$ sont les produits finis $\prod_{i_1 i_2 \cdots i_k} H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 i_2 \ldots i_k}/\boldsymbol{K})$, et nous devons évaluer la caractéristique d'Euler-Poincaré des morphismes :

$$\Theta_k : \prod_{i_1 i_2 \cdots i_k} H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 i_2 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}) \to \prod_{i_1 i_2 \cdots i_k} H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 i_2 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}),$$

où nous avons noté $\Theta_k := \prod_{i_1 i_2 \cdots i_k} \theta^*_{i_1 i_2 \cdots i_k}$. En considérant les orbites de l'action de θ sur l'ensemble $\mathbb{I}_k$ de multi-indices non ordonnés $\{i_1 \ldots i_k\}$ avec $i_j \in [1, \ldots, \beta]$, on décompose les termes de $\mathbb{E}_2$ suivant l'égalité

$$\prod_{i_1 i_2 \cdots i_k} H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 i_2 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}) = \prod_{I \in \mathbb{I}_k/\boldsymbol{G}} \left(\prod_{\{i_1 \ldots i_k\} \in I} H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}) \right),$$

qui induit la décomposition des morphismes Θ_k :

$$\Theta_k = \textstyle\prod_{I \in \mathbb{I}_k/\boldsymbol{G}} \Theta_I, \quad \text{avec} \quad \Theta_I := \prod_{\{i_1 \ldots i_k\} \in I} \theta_{i_1 \ldots i_k}.$$

Nous sommes ainsi emmenés à considérer pour chaque $I \in \mathbb{I}_k/\boldsymbol{G}$, le morphisme

$$\Theta_I : \prod_{\{i_1 i_2 \cdots i_k\} \in I} H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 i_2 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}) \to \prod_{\{i_1 i_2 \cdots i_k\} \in I} H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 i_2 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}).$$

Lorsque $I \in \mathbb{I}_k/\boldsymbol{G}$ n'est pas une orbite ponctuelle, *i.e.* lorsque $\theta\{i_1 \ldots i_k\} \neq \{i_1 \ldots i_k\}$, la trace de Θ_I agissant en chaque degré cohomologique i :

$$\Theta_I : \sum_{\{i_1 \ldots i_k\} \in I} H^i_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}) \to \sum_{\{i_1 \ldots i_k\} \in I} H^i_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 \ldots i_k}/\boldsymbol{K})$$

est déjà nulle, et la caractéristique d'Euler-Poincaré est donc, *a fortiori*, nulle.

Conclusion :

> "*La nullité de* $\chi(\theta : H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K}))$ *résulte de la nullité de* $\chi(\theta : H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}))$ *lorsque* $\theta\{i_1 \ldots i_k\} = \{i_1 \ldots i_k\}$, *cas où l'ouvert* $U_{i_1 \ldots i_k}$ *est affine et* θ*-stable.*"

On comprend ainsi qu'il suffit de prouver le Théorème **1** pour les variétés affines pour l'avoir en toute généralité.

§4) **Réduction au cas des actions libres**

Alberto Arabia

Dans le Théorème **1**, le morphisme θ agit sans point fixe sur $\boldsymbol{X}$, mais il est possible que certains des itérés $\theta^s \neq \mathbf{id}$ ne vérifient pas cette condition, autrement dit, il se peut que le groupe $\boldsymbol{G} := \langle\theta\rangle$ n'agisse pas librement sur $\boldsymbol{X}$.

Monsky montre dans la preuve du théorème 6.3 de [Mo], l'existence d'une stratification algébrique de $\overline{\boldsymbol{X}}$ telle que θ agit librement sur chaque strate. On a donc une partition finie de $\overline{\boldsymbol{X}}$ en parties localement fermées $\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_N$ de codimensions dans $\overline{\boldsymbol{X}}$ respectivement $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_N$, telles que $\boldsymbol{Y}_i$ est une variété non singulière, définie sur une extension finie $\boldsymbol{k}_i$ de $\boldsymbol{k}$, et stable sous θ dont l'action est *libre*.

Quitte à remplacer $\boldsymbol{k}$ par une extension finie convenable nous pouvons supposer dans ce qui précède que $\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{k}$, cela n'affecte pas la validité du Théorème.

Si nous supposons maintenant le Théorème **1** démontré pour toute les variétés affines non singulières sur $\boldsymbol{k}$ munies d'une action libre, il sera automatiquement vérifié par chaque $\boldsymbol{Y}_i$ grâce à la conclusion du § (3). Le Théorème est donc vérifié par $U_0 := \boldsymbol{Y}_0$, et s'il est vérifié par l'un des ouverts $\boldsymbol{U}_i := \boldsymbol{Y}_0 \cup \cdots \cup \boldsymbol{Y}_i$, on pose $\boldsymbol{U}_{i+1} = \boldsymbol{U}_i \cup \boldsymbol{Y}_{i+1}$ et à l'aide de la suite exacte longue de Gysin ([A-M] §14.2) pour la paire $(\boldsymbol{Y}_{i+1} \subseteq \boldsymbol{U}_{i+1})$:

$$\to H^{\bullet - 2\operatorname{codim}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y}_{i+1}}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{Y}_{i+1}/\boldsymbol{K}) \to H^{\bullet}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}_{i+1}/\boldsymbol{K}) \to H^{\bullet}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}_i/\boldsymbol{K}) \to,$$

on conclut que le théorème est aussi vérifié par $\boldsymbol{U}_{i+1}$, et, par récurrence, par $\boldsymbol{U}_N = \boldsymbol{X}$.

§5) Comme conséquence de § (3) et § (4), le cas critique à considérer est celui où $\boldsymbol{X}$ est un schéma affine lisse sur $\boldsymbol{k}$, muni d'un automorphisme d'ordre fini L, dont l'action est libre. Nous sommes donc emmenés à prouver théorème suivant.

Théorème 1′. *Soit $\boldsymbol{X}$ un schéma affine lisse défini sur un corps fini $\boldsymbol{k}$ de cardinal q. Soit $\theta : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ un automorphisme d'ordre fini $L \neq 1$, relativement premier à q, tel que le groupe $\boldsymbol{G} := \langle\theta\rangle$ agit librement sur $\boldsymbol{X}$. Alors*

$$0 = \chi(\theta : H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})) := \sum\nolimits_k (-1)^k \operatorname{tr}_{\boldsymbol{K}} \left(\theta : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K}) \to H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})\right).$$

§6) **Une première équivalence**

Notons

- $\boldsymbol{A}$ l'algèbre des fonctions régulières de $\boldsymbol{X}$;
- $\theta : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ l'automorphisme d'ordre $L \neq 1$ de l'énoncé du théorème ;
- $\boldsymbol{G} := \langle\theta\rangle$ le groupe d'automorphismes de $\boldsymbol{A}$ engendré par θ.
- $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{k}$ (resp. $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{K}$) racine L-ième primitive de 1, fixée une fois pour toutes ;
- $\boldsymbol{A}_m$ le sous-$\boldsymbol{k}[\boldsymbol{G}]$-module des fonctions de poids m ;
- $\boldsymbol{\mathcal{F}} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$, $x \mapsto x^q$, le morphisme de Frobenius relatif à $\boldsymbol{k}$.

Comme le groupe $\boldsymbol{G}$ opère naturellement sur la cohomologie de de Rham †-adique de $\boldsymbol{A}$, celle-ci se décompose en sous-espaces de poids :

$$H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K}) = H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_0 \oplus \cdots \oplus H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_{L-1}, \qquad \text{(Eq.1)}$$

où $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_m = h^*\big(\Omega^*(\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}/\boldsymbol{K})_m, d\big)$ est de dimension finie car $\boldsymbol{K}$-sous-espace vectoriel de $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})$, lui-même de dimension finie.

Un théorème de Lefschetz p-adique

Notons pour $m = 0, 1 \ldots, L-1$:

$$\chi_m(\boldsymbol{A}) := \sum_k (-1)^k \dim_{\boldsymbol{K}} \left(H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_m \right),$$

et pour tout morphisme de $\boldsymbol{k}$-algèbre $\phi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$:

$$\chi(\phi) := \sum_k (-1)^k \operatorname{tr}_{\boldsymbol{K}} \left(\phi_* : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K}) \to H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K}) \right).$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} \chi(\theta^0) \\ \chi(\theta^1) \\ \chi(\theta^2) \\ \vdots \\ \chi(\theta^{L-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & (\boldsymbol{u}) & (\boldsymbol{u})^2 & \ldots & (\boldsymbol{u})^{L-1} \\ 1 & (\boldsymbol{u}^2) & (\boldsymbol{u}^2)^2 & \ldots & (\boldsymbol{u}^2)^{L-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (\boldsymbol{u}^{L-1}) & (\boldsymbol{u}^{L-1})^2 & \ldots & (\boldsymbol{u}^{L-1})^{L-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_0(\boldsymbol{A}) \\ \chi_1(\boldsymbol{A}) \\ \chi_2(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \chi_{L-1}(\boldsymbol{A}) \end{pmatrix} \tag{Eq.2}$$

Où la matrice de Vandermonde, qui à la forme particulière

$$W(\boldsymbol{u}) := (\boldsymbol{u}^{(i-1)(j-1)})_{1 \leqslant i \leqslant L, 1 \leqslant j \leqslant L}, \tag{Eq.3}$$

est inversible d'inverse la matrice $\frac{1}{L} W(\boldsymbol{v})$ avec $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{u}^{-1}$. Par conséquent,

$$\begin{pmatrix} \chi_0(\boldsymbol{A}) \\ \chi_1(\boldsymbol{A}) \\ \chi_2(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \chi_{L-1}(\boldsymbol{A}) \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & (\boldsymbol{v}) & (\boldsymbol{v})^2 & \ldots & (\boldsymbol{v})^{L-1} \\ 1 & (\boldsymbol{v}^2) & (\boldsymbol{v}^2)^2 & \ldots & (\boldsymbol{v}^2)^{L-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (\boldsymbol{v}^{L-1}) & (\boldsymbol{v}^{L-1})^2 & \ldots & (\boldsymbol{v}^{L-1})^{L-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi(\theta^0) \\ \chi(\theta^1) \\ \chi(\theta^2) \\ \vdots \\ \chi(\theta^{L-1}) \end{pmatrix}.$$

On en déduit aussitôt le lemme suivant.

Lemme B. *Sous les hypothèses en cours, les assertions suivantes sont équivalentes.*

a) $0 = \chi(\theta^1) = \chi(\theta^2) = \cdots = \chi(\theta^{L-1})$;
b) $\chi_0(\boldsymbol{A}) = \chi_1(\boldsymbol{A}) = \chi_2(\boldsymbol{A}) = \cdots = \chi_{L-1}(\boldsymbol{A})$.

auquel cas $\chi_m(\boldsymbol{A}) = \chi(\theta^0)/L$.

Indication. Les sommes $1 + (\boldsymbol{u}^j) + \cdots + (\boldsymbol{u}^j)^{L-1}$ sont nulles lorsque $j \neq 0 \pmod{L}$, car $\left(1 + (\boldsymbol{u}^j) + \cdots + (\boldsymbol{u}^j)^{L-1}\right)(1 - \boldsymbol{u}^j) = 1 - \boldsymbol{u}^{jL} = 0$, alors que $(1 - \boldsymbol{u}^j) \neq 0$. ∎

Le dernier lemme affirme que le **Théorème 1′** équivaut au théorème suivant.

Théorème 2. *Sous les hypothèses du Théorème* **1′**, *soit*

$$H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K}) = H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_0 \oplus \cdots \oplus H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_{L-1}, \tag{Eq.4}$$

la décomposition de la cohomologie de $\boldsymbol{X}$ *en sous-espaces de poids, et notons pour* $m = 0, \ldots, L-1$,

$$\chi(H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_m) := \sum\nolimits_k (-1)^k \dim_{\boldsymbol{K}} \left(H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_m \right).$$

Alors,

$$\begin{cases} \chi\big(H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_0\big) = \chi\big(H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_1\big) = \cdots = \chi\big(H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_{L-1}\big) \\ \chi\big(H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})\big) = L\cdot\chi\big(H_{\mathrm{DR}}((\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G})/\boldsymbol{K})\big)\,. \end{cases}$$

§7) **Commentaire sur le cas $\dim(\boldsymbol{X})=0$**

Lorsque $\dim(\boldsymbol{X})=0$, la cohomologie de de Rham †-adique est concentrée en degré 0 et c'est une somme directe de copies de $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{G}]$, la représentation régulière gauche de $\boldsymbol{G}$. Le théorème **2** est alors une simple reformulation de l'assertion (b) du lemme **A** du paragraphe §(2).

§8) **Une deuxième équivalence**

Notons suivant [Mo]-§6, pour tous $j=0,1\ldots,L-1$ et $r\in\mathbb{N}$ donnés

$$\begin{cases} J(j,r) := \text{ idéal de } \boldsymbol{A} \text{ engendré par les différences } \theta^j(a)-\boldsymbol{\mathcal{F}}^r(a), \text{ où } a\in\boldsymbol{A}, \\ N(j,r) := \dim_{\boldsymbol{k}}\big(\boldsymbol{A}/J(j,r)\big)\,, \\ L(j,r) := \sum_k (-1)^k \operatorname{tr}_{\boldsymbol{K}}\big(\theta^j_*(q^n\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-r}_*) : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K}) \to H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})\big)\,, \end{cases}$$

où $n := \dim \boldsymbol{X}$.

Monsky démontre (*loc.cit.*, §6.1) l'égalité

$$\boxed{N(j,r)=L(j,r)} \qquad \text{(Eq.5)}$$

avec comme seules hypothèses le fait que $\boldsymbol{A}$ est lisse équidimensionnelle de dimension n et que $\boldsymbol{G}$ est fini (de cardinal L quelconque !) opérant librement sur $\boldsymbol{X}$.

Dans le paragraphe §(6) nous avons noté, pour chaque poids $m=0,1\ldots,L-1$ et pour tout $r\in\mathbb{N}$:

$$\chi_m(\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-r}_*) := \sum\nolimits_k (-1)^k \operatorname{tr}_{\boldsymbol{K}}\big(q^n\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-r}_* : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_m \to H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_m\big)\,.$$

L'égalité de Monsky (Eq.5), s'écrit alors :

$$N(j,r)=L(j,r) := \chi_0(\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-r}_*) + (\boldsymbol{u}^j)\chi_1(\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-r}_*) + (\boldsymbol{u}^j)^2\chi_2(\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-r}_*) + \cdots + (\boldsymbol{u}^j)^{(L-1)}\chi_{L-1}(\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-r}_*)\,,$$

soit

$$\begin{pmatrix} N(0,r) \\ N(1,r) \\ N(2,r) \\ \vdots \\ N(L-1,r) \end{pmatrix} = W(\boldsymbol{u}) \begin{pmatrix} \chi_0(\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-r}_*) \\ \chi_1(\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-r}_*) \\ \chi_2(\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-r}_*) \\ \vdots \\ \chi_{L-1}(\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-r}_*) \end{pmatrix} \qquad \text{(Eq.6)}$$

où $W(\boldsymbol{u})$ est a matrice de Vandermonde introduite dans (6)-(Eq.3).

Un théorème de Lefschetz p-adique

On en déduit l'égalité de séries formelles

$$\begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant 1} N(0,r)\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1} N(1,r)\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1} N(2,r)\frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r\geqslant 1} N(L-1,r)\frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = W(\boldsymbol{u}) \begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant 1} \chi_0(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1} \chi_1(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1} \chi_2(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r\geqslant 1} \chi_{L-1}(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = W(\boldsymbol{u}) \begin{pmatrix} \operatorname{Log}\big(\zeta_0(\boldsymbol{X},t)\big) \\ \operatorname{Log}\big(\zeta_1(\boldsymbol{X},t)\big) \\ \operatorname{Log}\big(\zeta_2(\boldsymbol{X},t)\big) \\ \vdots \\ \operatorname{Log}\big(\zeta_{L-1}(\boldsymbol{X},t)\big) \end{pmatrix}$$

où $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$ est *la fraction rationnelle de* $\boldsymbol{K}(t)$ *:*

$$\zeta_m(\boldsymbol{X},t) := \exp\Big(\sum_{r\geqslant 1} \chi_m(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\,\frac{t^r}{r}\Big) = \frac{\prod_{k\text{ impair}} \det\big(1-q^n\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-1}t : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_m\big)}{\prod_{k\text{ pair}} \det\big(1-q^n\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-1}t : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_m\big)}, \tag{Eq.7}$$

qui participe à la factorisation de la fonction Zêta de $\boldsymbol{X}$ suivante :

$$\begin{aligned} \zeta(\boldsymbol{X},t) &= \exp\Big(\sum\nolimits_{r\geqslant 1} \chi(q^n\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\,\frac{t^r}{r}\Big) \\ &= \exp\Big(\sum\nolimits_{r\geqslant 1} \chi_0(q^n\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\,\frac{t^r}{r}\Big) \times \cdots \times \exp\Big(\sum\nolimits_{r\geqslant 1} \chi_{L-1}(q^n\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\,\frac{t^r}{r}\Big) \\ &= \zeta_0(\boldsymbol{X},t)\times\cdots\times\zeta_{L-1}(\boldsymbol{X},t)\,. \end{aligned} \tag{Eq.8}$$

Si nous notons maintenant

$$\eta_j(\boldsymbol{X},t) := \exp\Big(\sum\nolimits_{r\geqslant 1} N(j,r)\,\frac{t^r}{r}\Big), \tag{Eq.9}$$

nous avons pour $m,j = 0,\dots,L-1$:

$$\begin{cases} \eta_j(\boldsymbol{X},t) \;\; = \zeta_0(\boldsymbol{X},t)\;\zeta_1(\boldsymbol{X},t)^{\boldsymbol{u}^j}\;\;\zeta_2(\boldsymbol{X},t)^{\boldsymbol{u}^{2j}}\;\;\cdots\;\zeta_{L-1}(\boldsymbol{X},t)^{\boldsymbol{u}^{(L-1)j}} \\ \zeta_m(\boldsymbol{X},t)^L = \eta_0(\boldsymbol{X},t)\;\eta_1(\boldsymbol{X},t)^{\boldsymbol{v}^m}\;\eta_2(\boldsymbol{X},t)^{\boldsymbol{v}^{2m}}\;\cdots\;\eta_{L-1}(\boldsymbol{X},t)^{\boldsymbol{v}^{(L-1)m}} \end{cases} \tag{Eq.10}$$

où $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{u}^{-1}$.

Les séries formelles qui définissent $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$ et $\eta_j(\boldsymbol{X},t)$ valent 1 pour $t=0$ et convergent uniformément sur un disque $\mathbb{D}(0,\epsilon)\subseteq\mathbb{C}$ de rayon $\epsilon>0$, assez petit. Les fonctions $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$ et $\eta_j(\boldsymbol{X},t)$ sont donc holomorphes sur ce disque, de même que leurs puissances aux exposants complexes $\boldsymbol{u}^\star$ et $\boldsymbol{v}^\star$, quitte à réduire le rayon ϵ si nécessaire. On sait que les fonctions ζ_m se prolongent en des fonctions rationnelles sur $\mathbb{C}$ de sorte que l'on peut écrire d'un manière unique $\zeta_m(\boldsymbol{X},1/z) = \phi_m(z)/z^d$, où $d\in\mathbb{Z}$ et où $\phi_m(z)$ est holomorphe sur un voisinage de 0 et vérifie $\phi_m(0)\neq 0$. En particulier, pour tout nombre complexe $\boldsymbol{w}$, on peut écrire $\zeta_m(\boldsymbol{X},z)^{\boldsymbol{w}} = \phi_m(z)^{\boldsymbol{w}}/z^{d\boldsymbol{w}}$, où, si la fonction $\phi_m(z)^{\boldsymbol{w}}$ n'est pas unique (car elle dépend d'une détermination du Log), le dénominateur $x^{d\boldsymbol{w}}$ l'est.

Notation. Pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, l'exposant « $d\alpha$ » dans l'écriture $\zeta_m(\boldsymbol{X},z)^\alpha = \phi_m(z)^\alpha/z^{d\alpha}$, sera appelé l'« *ordre à l'infini* » de $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)^\alpha$, on le notera $\operatorname{ord}_\infty(\zeta_m(\boldsymbol{X},t)^\alpha)$. Lorsque $\alpha\in\mathbb{Z}$, on a clairement $\operatorname{ord}_\infty(\zeta_m(\boldsymbol{X},t)^\alpha) = -\deg(\zeta_m(\boldsymbol{X},t)^\alpha)$

Quant aux fonctions $\eta_i(\boldsymbol{X},t)$, elles admettent aussi des prolongements analytiques au voisinage de l'infini (pas nécessairement méromorphes) et l'on peut donner un sens

aux nombres $\mathrm{ord}_\infty(\eta_j(\boldsymbol{X},t))$ tout comme pour les fonctions $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$. En procédant ainsi, les formules (Eq.10) donnent

$$\begin{cases} \mathrm{ord}_\infty(\eta_j(\boldsymbol{X},t)) = \sum_{m=0,\dots,L-1} \boldsymbol{u}^{mj}\,\mathrm{ord}_\infty(\zeta_m(\boldsymbol{X},t)) \\ L\cdot\mathrm{ord}_\infty(\zeta_m(\boldsymbol{X},t)) = \sum_{j=0,\dots,L-1} \boldsymbol{v}^{mj}\,\mathrm{ord}_\infty(\eta_j(\boldsymbol{X},t)) \end{cases}$$

et comme d'autre part $\mathrm{ord}_\infty(\zeta_m(\boldsymbol{X},t)) = \chi_m(\boldsymbol{X})$, on obtient le système

$$\begin{cases} \mathrm{ord}_\infty(\eta_j(\boldsymbol{X},t)) = \sum_{m=0,\dots,L-1} \boldsymbol{u}^{mj}\chi_m(\boldsymbol{X}) \\ L\cdot\chi_m(\boldsymbol{X}) = \sum_{j=0,\dots,L-1} \boldsymbol{v}^{mj}\,\mathrm{ord}_\infty(\eta_j(\boldsymbol{X},t)) \end{cases} \tag{Eq.11}$$

dont on déduit aussitôt le lemme suivant.

Lemme C. *Il y a équivalence entre*

a) $\chi_0(\boldsymbol{X}) = \chi_1(\boldsymbol{X}) = \cdots = \chi_{L-1}(\boldsymbol{X})$;

b) $\deg(\zeta_0(\boldsymbol{X},t)) = \deg(\zeta_1(\boldsymbol{X},t)) = \deg(\zeta_2(\boldsymbol{X},t)) = \cdots = \deg(\zeta_{L-1}(\boldsymbol{X},t))$;

c) $0 = \mathrm{ord}_\infty(\eta_1(\boldsymbol{X},t)) = \mathrm{ord}_\infty(\eta_2(\boldsymbol{X},t)) = \cdots = \mathrm{ord}_\infty(\eta_{L-1}(\boldsymbol{X},t))$.

Ce lemme affirme donc que le **Théorème 2** équivaut au théorème suivant.

Théorème 3. *Sous les hypothèses du Théorème* **1′**, *posons pour* $j = 1,\dots,L-1$

$$\eta_j(\boldsymbol{X},t) := \exp\Big(\sum\nolimits_{r\geqslant 1} N(j,r)\,\frac{t^r}{r}\Big),$$

Alors,

$$0 = \mathrm{ord}_\infty(\eta_1(\boldsymbol{X},t)) = \mathrm{ord}_\infty(\eta_2(\boldsymbol{X},t)) = \cdots = \mathrm{ord}_\infty(\eta_{L-1}(\boldsymbol{X},t))$$

§9) **À propos des fonctions $\boldsymbol{\zeta_m(X,t)}$.** Leur définition dans le paragraphe précédent (Eq.7), à savoir,

$$\zeta_m(\boldsymbol{X},t) := \exp\Big(\sum_{r\geqslant 1}\chi_m(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\,\frac{t^r}{r}\Big) = \frac{\prod_{k\,\mathrm{impair}}\det\big(1-q^n\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-1}t : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_m\big)}{\prod_{k\,\mathrm{pair}}\det\big(1-q^n\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-1}t : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_m\big)}, \tag{Eq.12}$$

les fait apparaître d'emblée comme fraction rationnelle de $\boldsymbol{K}(t)$, mais, d'autre part, en inversant l'égalité (Eq.6), on a

$$\begin{pmatrix} \chi_0(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r}) \\ \chi_1(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r}) \\ \chi_2(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r}) \\ \vdots \\ \chi_{L-1}(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r}) \end{pmatrix} = \frac{1}{L}W(\boldsymbol{v}) \begin{pmatrix} N(0,r) \\ N(1,r) \\ N(2,r) \\ \vdots \\ N(L-1,r) \end{pmatrix} \tag{Eq.13}$$

où $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^{-1}$ et $N(j,r) \in \mathbb{N}$ ([1]), et alors

$$\zeta_m(\boldsymbol{X},t) = \exp\Big(\sum_{j=0,\dots,L-1} \boldsymbol{v}^j \Big(\sum_{r\geqslant 1}\frac{N(j,r)}{L}\,\frac{t^r}{r}\Big)\Big), \tag{Eq.14}$$

[1] En fait, $N(j,r) \in L\cdot\mathbb{N}$ puisque $\boldsymbol{G}$ opère librement sur $\boldsymbol{X}$

Un théorème de Lefschetz p-adique

de sorte que $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)\in\mathbb{Q}[\boldsymbol{u}][\![t]\!]$, où $\mathbb{Q}[u]$ désigne le sous-corps de $\mathbb{C}$ de décomposition de X^L-1.

Lemme D. *On a* $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)\in\mathbb{Z}[\boldsymbol{u}](t)$.

Preuve. On applique le critère de rationalité des déterminants de Hankel à la série formelle (Eq.14) dont les coefficients appartiennent clairement à $\mathbb{Q}[u]$. ∎

§10) **La stratégie à suivre**

Nous allons montrer que l'ordre à l'infini des fractions rationnelles $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)/\zeta_0(\boldsymbol{X},t)$ est toujours nul, ce qui équivaut à prouver le Théorème **2** (donc **1′** et **3**).

Pour ce faire, on va s'aider de l'égalité (Eq.13), qui nous donne

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Log}(\zeta_0(\boldsymbol{X},t))\\ \mathrm{Log}(\zeta_1(\boldsymbol{X},t))\\ \mathrm{Log}(\zeta_2(\boldsymbol{X},t))\\ \vdots\\ \mathrm{Log}(\zeta_{L-1}(\boldsymbol{X},t))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{r\geqslant1}\chi_0(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r}\\ \sum_{r\geqslant1}\chi_1(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r}\\ \sum_{r\geqslant1}\chi_2(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r}\\ \vdots\\ \sum_{r\geqslant1}\chi_{L-1}(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r}\end{pmatrix}=\frac{1}{L}W(\boldsymbol{v})\begin{pmatrix}\sum_{r\geqslant1}N(0,r)\frac{t^r}{r}\\ \sum_{r\geqslant1}N(1,r)\frac{t^r}{r}\\ \sum_{r\geqslant1}N(2,r)\frac{t^r}{r}\\ \vdots\\ \sum_{r\geqslant1}N(L-1,r)\frac{t^r}{r}\end{pmatrix},\tag{Eq.15}$$

où $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^{-1}$ et où $N(j,r)$ est le cardinal de l'ensemble

$$\boldsymbol{X}(j,r):=\big\{x\in\overline{\boldsymbol{X}}\;\big|\;\theta^j(x)=\boldsymbol{\mathcal{F}}^r(x)\big\}.$$

Dans le paragraphe §12, nous allons faire un décompte différent des nombres $N(j,r)$ donnant lieu dans le paragraphe (13), à une décomposition canonique des séries $\sum_{r\geqslant1}\chi_m(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r}$ comme somme infinie de séries $-\mathrm{Log}(1-\boldsymbol{u}^\star t^d)$ avec $d\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$, mais où seulement un nombre fini de telles séries intervient pour un d donné (*cf.* paragraphe §14, lemme **G**). Ce même lemme donnera des décompositions eulériennes explicites des fonctions rationnelles $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$, qui permettront ensuite, dans le paragraphe §17, l'étude des quotients $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)/\zeta_0(\boldsymbol{X},t)$.

§11) **Les $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathcal{F}}$-orbites**

Le morphisme de Frobenius $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est bijectif sur l'ensemble des points fermés de $\overline{\boldsymbol{X}}$, ses orbites seront appelées les «$\boldsymbol{\mathcal{F}}$-*orbites*». On note $\boldsymbol{X}(\!(r)\!)$ l'ensemble des points fermés de $\overline{\boldsymbol{X}}$ fixés par $\boldsymbol{\mathcal{F}}^r$, on a $\overline{\boldsymbol{X}}=\bigcup_{r\geqslant1}\boldsymbol{X}(\!(r)\!)$. Les cardinaux des $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-orbites dans $\boldsymbol{X}(\!(r)\!)$ sont donc des diviseurs de r. La $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-orbite contenant $x\in\overline{\boldsymbol{X}}$ sera notée $\langle\boldsymbol{\mathcal{F}}\rangle\cdot x$.

Le groupe $\boldsymbol{G}$ agit *librement* sur l'ensemble des points fermés de $\overline{\boldsymbol{X}}$. Ses orbites, les «$\boldsymbol{G}$-*orbites*», sont de cardinal $L:=|\boldsymbol{G}|$.

Une «$\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathcal{F}}$-*orbite*» est un ensemble de points fermés de $\overline{\boldsymbol{X}}$ non vide, stable sous l'action de $\boldsymbol{G}$ et de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ et minimal pour ces propriétés. La $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathcal{F}}$-orbite contenant $x\in\overline{\boldsymbol{X}}$ sera notée $\langle\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathcal{F}}\rangle\cdot x$. Comme l'action de $\boldsymbol{G}$ commute à celle de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, le groupe $\boldsymbol{G}$ opère sur l'ensemble des $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-orbites et vice-versa. Il est alors clair que la donnée d'une $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathcal{F}}$-orbite est équivalente à la donnée d'une $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-orbite saturée par l'action de $\boldsymbol{G}$, c'est donc l'ensemble des points sous-jacents à la $\boldsymbol{G}$-orbite d'une $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-orbite.

Soit $\boldsymbol{O}$ une $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-orbite. On a $\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{O})=\langle\theta^s\rangle$ pour un unique diviseur s de L, et comme $\langle\theta^s\rangle$ opère librement sur $\boldsymbol{O}$, on a $|\boldsymbol{O}|=\frac{L}{s}d$ pour un unique $d\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$.

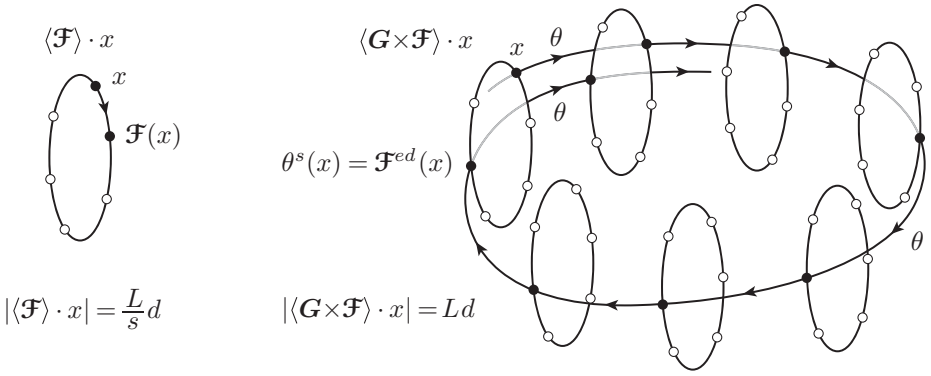
Alberto Arabia

Supposons $s \neq L$. Pour chaque $x \in \boldsymbol{O}$, il existe un unique $\epsilon_x = 0, \ldots, \frac{L}{s}d - 1$, tel que $\theta^s(x) = \mathfrak{F}^{\epsilon_x}(x)$. On a $\epsilon_x \neq 0$ puisque $\theta^s(x) \neq x$, et l'on a aussi $\epsilon_x = \epsilon_{\mathfrak{F}(x)}$, de sorte que le nombre ϵ_x est indépendant de $x \in \boldsymbol{O}$, notons-le ϵ. Alors, $\mathfrak{F}^{\epsilon} = \theta^s$ sur $\boldsymbol{O}$ et $\mathfrak{F}^{\epsilon}$ est d'ordre $\frac{L}{s}$, donc $\epsilon = ed$ pour un unique $e \in \{1, \ldots, \frac{L}{s} - 1\}$ relativement premier à $\frac{L}{s}$. On a ainsi associé à la $\mathfrak{F}$-orbite $\boldsymbol{O}$ le triplet (s, e, d). Enfin, on a

$$\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} \amalg \theta(\boldsymbol{O}) \amalg \cdots \amalg \theta^{s-1}(\boldsymbol{O}),$$

où les $\mathfrak{F}$-orbites $\theta^i(\boldsymbol{O})$ ont toutes le même triplet (s, e, d) associé. L'ensemble $\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{O}$, dont le cardinal est Ld, est une $\boldsymbol{G}\times\mathfrak{F}$-orbite, elle sera dite « *de type* (s, e, d) ».

Lorsque $s = L$, les $\mathfrak{F}$-orbites $\boldsymbol{O}, \theta(\boldsymbol{O}), \ldots, \theta^{L-1}(\boldsymbol{O})$ sont deux à deux disjointes et l'équation $\theta^L(x) = \mathfrak{F}^f(x)$ admet comme solution $f = 0$, on a donc $(s, e, d) = (L, 0, d)$. L'ensemble $\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{O}$, de cardinal Ld, est une $\boldsymbol{G}\times\mathfrak{F}$-orbite « *de type* $(L, 0, d)$ ».



Définitions. *Un triplet d'entiers naturels (s, e, d) où*

$$\begin{cases} s \in \{1, \ldots, L\} \text{ est un diviseur de } L\,; \\ e \in \{0, 1, \ldots, \frac{L}{s}\} \text{ est } \begin{cases} 0, \text{ si } s = L \\ \neq 0 \text{ et relativement premier à } \frac{L}{s}, \text{ si } s \neq L \end{cases} \\ d \text{ est un entier positif}\,; \end{cases}$$

est un « type de $\boldsymbol{G}\times\mathfrak{F}$-orbite ». On notera $\boldsymbol{X}(s, e, d)$ l'ensemble des points de $\overline{\boldsymbol{X}}$ qui appartiennent à des $\boldsymbol{G}\times\mathfrak{F}$-orbites de type (s, e, d), et $N(s, e, d) := |\boldsymbol{X}(s, e, d)|$.

Lemme E

a) *Deux $\boldsymbol{G}\times\mathfrak{F}$-orbites dans $\overline{\boldsymbol{X}}$ sont isomorphes en tant que $\boldsymbol{G}\times\mathfrak{F}$-ensembles si, et seulement si, elles ont le même type. En particulier, $\boldsymbol{X}(s, e, d) \cap \boldsymbol{X}(s', e', d') = \varnothing$ si $(s, e, d) \neq (s', e', d')$.*

b) *L'ensemble $\boldsymbol{X}(s, e, d)$ est une réunion finie de $\boldsymbol{G}\times\mathfrak{F}$-orbites. Ces orbites sont de cardinal égal à Ld. On a $\boldsymbol{X}(s, e, d) \subseteq \boldsymbol{X}(\frac{L}{s}d)$ et $N(s, e, d) \leqslant N(\frac{L}{s}d) < \infty$.*

c) *Pour tous $j = 1, \ldots, L - 1$, et $r \geqslant 1$, l'ensemble $\boldsymbol{X}(j, r)$ est une réunion disjointe d'ensembles $\boldsymbol{X}(s, e, d)$ avec $s \neq L$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

$$\text{(i) } \boldsymbol{X}(s, e, d) \subseteq \boldsymbol{X}(j, r), \quad \text{et} \quad \text{(ii) } s \div j \text{ et } r \in d\big(e\tfrac{j}{s} + \tfrac{L}{s}\,\mathbb{Z}\big)\,.$$

Un théorème de Lefschetz p-adique

d) *On a aussi*

i) $\boldsymbol{X}(s,e,d) \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}\big(as,(ea+\frac{L}{s})d\big)$, *pour tout* (s,e,d) *et tout* $a\in\mathbb{N}$;

ii) $\coprod\limits_{\text{finie}}\Big\{\boldsymbol{X}(s,e,d)\;\Big|\;\frac{L}{s}d\div r\Big\}=\boldsymbol{X}(0,r)=\overline{\boldsymbol{X}}(\!(r)\!)$;

iii) $\coprod\limits_{\text{finie}}\Big\{\boldsymbol{X}(s,e,d)\;\Big|\;s\div j\,,\;r=de\frac{j}{s}\;(\mathrm{mod}\;d\frac{L}{s})\Big\}=\boldsymbol{X}(j,r)$, *pour* $j=1,\dots,L-1$;

iv) $\coprod\Big\{\boldsymbol{X}(s,e,d)\;\Big|\;s\neq L\Big\}=\bigcup\Big\{\boldsymbol{X}(j,r)\;\Big|\;j\neq 0\Big\}$ *et* $\coprod\Big\{\boldsymbol{X}(s,e,d)\Big\}=\overline{\boldsymbol{X}}$.

où "$\coprod_{\text{finie}}$*" indique que la famille d'ensembles concernée est une partition finie.*

Indications

a,b) Clairs.

c) Un point $x\in\boldsymbol{X}(j,r)$ vérifie $\theta^j(x)=\mathfrak{F}^r(r)$, de sorte que la $\mathfrak{F}$-orbite $\langle\mathfrak{F}\rangle\cdot x$ est stabilisée par θ^j qui est $\neq\mathbf{id}$ par hypothèse. Il s'ensuit que $\langle\boldsymbol{G}\!\times\!\mathfrak{F}\rangle\cdot x$ est d'un certain type (s,e,d) avec $s\neq L$ mais aussi avec $s\div j$ puisque $\theta^j\in\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(\langle\mathfrak{F}\rangle\cdot x)=\langle\theta^s\rangle$. Or, de l'égalité $\theta^s(x)=\mathfrak{F}^{(e+\lambda\frac{L}{s})d}$, on déduit

$$\theta^j(x)=\mathfrak{F}^{(e\frac{j}{s}+\lambda\frac{L}{s})d},$$

ce qui justifie l'équivalence $\big(\boldsymbol{X}(s,e,d)\subseteq\boldsymbol{X}(j,r)\big)\;\Leftrightarrow\;\big(s\div j\;\text{et}\;r\in d\big(e\frac{j}{s}+\frac{L}{s}\,\mathbb{Z}\big)\big)$.

d) Résultent d'appliquer (c). ∎

§12) **Recomposition des séries $\sum_{r\geqslant 1}\boldsymbol{N(j,r)t^r/r}$.** Le lemme **E**, notamment par l'assertion (c) et par les partitions (d)-(ii)(iii), donne une nouvelle approche pour des nombres $N(j,r)$. Il permet aussitôt la réécriture suivante

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{r\geqslant 1}N(0,r)\frac{t^r}{r}=\sum_{(s,e,d)}\Big(N(s,e,d)\sum_{\lambda\geqslant 1}\frac{t^{\frac{L}{s}\lambda}}{d\frac{L}{s}\lambda}\Big),\\[2ex]\displaystyle\sum_{r\geqslant 1}N(j,r)\frac{t^r}{r}=\sum_{\substack{(s,e,d)\\ s\div j}}\Big(N(s,e,d)\sum_{\lambda\geqslant 0}\frac{t^{d(e\frac{j}{s}+\frac{L}{s}\lambda)}}{d(e\frac{j}{s}+\frac{L}{s}\lambda)}\Big),\;\forall j\in\big\{s,2s\dots,(\frac{L}{s}-1)s\big\}.\end{cases}\tag{Eq.16}$$

Il est important de souligner que dans les membres de droite de cette égalité, chacun des monômes $t^{d\frac{L}{s}\lambda}$ et $t^{d(e\frac{j}{s}+\frac{L}{s}\lambda)}$ apparaît uniquement dans un nombre **fini** de termes (s,e,d) d'après la finitude des partitions (d)-(ii)(iii), ceci justifie que l'égalité en question a bien un sens dans $\mathbb{Q}[\![t]\!]$.

Lemme F. *Pour tout type de $\boldsymbol{G}\!\times\!\mathfrak{F}$-orbite (s,e,d), notons*

$$\begin{cases}S(s,e,d)_0:=\displaystyle\sum_{\lambda\geqslant 1}\frac{t^{d\frac{L}{s}\lambda}}{d\frac{L}{s}\lambda},\\[2ex]S(s,e,d)_j:=\displaystyle\sum_{\lambda\geqslant 0}\frac{t^{d(e\frac{j}{s}+\frac{L}{s}\lambda)}}{d(e\frac{j}{s}+\frac{L}{s}\lambda)},\;\textit{si}\;j\in\big\{s,2s,\dots,(\frac{L}{s}-1)s\big\}\\[2ex]S(s,e,d)_j:=0,\;\textit{si}\;j\neq 0\;(\mathrm{mod}\;s)\end{cases}$$

Alors, suite à la définition (Eq.9), on a

$$\begin{pmatrix} \eta_0(\boldsymbol{X},t) \\ \eta_1(\boldsymbol{X},t) \\ \eta_2(\boldsymbol{X},t) \\ \vdots \\ \eta_{L-1}(\boldsymbol{X},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant 1} N(0,r)\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1} N(1,r)\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1} N(2,r)\frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r\geqslant 1} N(L-1,r)\frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = \sum_{(s,e,d)} N(s,e,d) \begin{pmatrix} S(s,e,d)_0 \\ S(s,e,d)_1 \\ S(s,e,d)_2 \\ \vdots \\ S(s,e,d)_{L-1} \end{pmatrix}. \quad \text{(Eq.17)}$$

§13) **Étude des termes des séries $\boldsymbol{S(s,e,d)_j}$**

Pour toute racine Ld-ième primitive de 1, notée $\boldsymbol{w}$, l'élément $\boldsymbol{w}^{-sed}$ est une racine $\frac{L}{s}$-ième primitive de 1. On choisit alors $\boldsymbol{w}$ telle que

$$\boxed{\boldsymbol{w}^{-sed} = \boldsymbol{u}^s} \quad \text{(Eq.18)}$$

On a

$$1+(\boldsymbol{w}^{1\cdot s})^{(r-de\frac{j}{s})}+(\boldsymbol{w}^{2\cdot s})^{(r-de\frac{j}{s})}+\cdots+(\boldsymbol{w}^{(d\frac{L}{s}-1)\cdot s})^{(r-de\frac{j}{s})} = \begin{cases} d\frac{L}{s}, \text{ si } r{=}de\frac{j}{s} \pmod{d\frac{L}{s}}, \\ 0, \text{ si non,} \end{cases}$$

de sorte que, quel que soit j, *nul ou non*, nous avons :

$$\begin{aligned} d\frac{L}{s}\ S(s,e,d)_j &= \sum_{r\geqslant 1}\sum\nolimits_{a=0}^{d\frac{L}{s}-1}(\boldsymbol{w}^{as})^{(r-de\frac{j}{s})}\frac{t^r}{r} = \sum_{r\geqslant 1}\sum\nolimits_{a=0}^{d\frac{L}{s}-1}\boldsymbol{w}^{a(-sde)\frac{j}{s}}\ \frac{(\boldsymbol{w}^{as}t)^r}{r} \\ &= \sum\nolimits_{a=0}^{d\frac{L}{s}-1}\left(\boldsymbol{u}^{aj}\sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{as}t)^r}{r}\right), \end{aligned}$$

grâce au choix de $\boldsymbol{w}$. On a donc

$$d\frac{L}{s}\begin{pmatrix} S(s,e,d)_{0\cdot s} \\ S(s,e,d)_{1\cdot s} \\ \vdots \\ S(s,e,d)_{(\frac{L}{s}-1)s} \end{pmatrix} = \underbrace{\Big(W(\boldsymbol{u}^s)\Big|\cdots\cdots\Big|W(\boldsymbol{u}^s)\Big)}_{d \text{ colonnes de blocs } \frac{L}{s}\times\frac{L}{s}} \begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{0\cdot s}t)^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{1\cdot s}t)^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{(d\frac{L}{s}-1)\cdot s}t)^r}{r} \end{pmatrix} \quad \text{(Eq.19)}$$

où $W(\boldsymbol{u}^s)$ désigne la matrice de Vandermonde (Eq.3) de $\frac{L}{s}\times\frac{L}{s}$ lignes et colonnes :

$$W(\boldsymbol{u}^s) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (\boldsymbol{u}^s) & (\boldsymbol{u}^s)^2 & \dots & (\boldsymbol{u}^s)^{\frac{L}{s}-1} \\ 1 & (\boldsymbol{u}^{2s}) & (\boldsymbol{u}^{2s})^2 & \dots & (\boldsymbol{u}^{2s})^{\frac{L}{s}-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (\boldsymbol{u}^{(\frac{L}{s}-1)s}) & (\boldsymbol{u}^{(\frac{L}{s}-1)s})^2 & \dots & (\boldsymbol{u}^{(\frac{L}{s}-1)s})^{\frac{L}{s}-1} \end{pmatrix} \quad \text{(Eq.20)}$$

§14) **Décomposition eulérienne des fonctions $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$**

Il s'agit maintenant d'expliciter l'égalité (Eq.15) au vu de la recomposition (Eq.17) (lemme **F**), ce qui nous emmène à considérer l'égalité

Un théorème de Lefschetz p-adique

$$\begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant 1}\chi_0(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_1(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_2(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_{L-1}(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = \sum_{s\div L}\sum_{(s,e,d)} N(s,e,d)\ \frac{1}{L}\,W(\boldsymbol{v}) \begin{pmatrix} S(s,e,d)_0 \\ S(s,e,d)_1 \\ S(s,e,d)_2 \\ \vdots \\ S(s,e,d)_{L-1} \end{pmatrix} \tag{Eq.21}$$

où l'on voit apparaître les séries $S(s,e,d)$ avec tous les indices $i\in\{0,\dots,L-1\}$, alors que par la définition dans lemme **F**, on a

$$S(s,e,d)_i = 0\,,\ \text{si}\ i\neq 0\ (\text{mod}\ s)\,.$$

En enlevant ces termes parasites, l'égalité (Eq.21) se réécrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant 1}\chi_0(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_1(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_2(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_{L-1}(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = \sum_{s\div L}\sum_{(s,e,d)} N(s,e,d)\ \frac{1}{L} \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{W(\boldsymbol{v}^s)} \\ \hline \vdots \\ \hline \overline{W(\boldsymbol{v}^s)} \end{pmatrix}}_{s\ \text{lignes de blocs}\ \frac{L}{s}\times\frac{L}{s}} \begin{pmatrix} S(s,e,d)_{0\cdot s} \\ S(s,e,d)_{1\cdot s} \\ \vdots \\ S(s,e,d)_{(\frac{L}{s}-1)s} \end{pmatrix} \tag{Eq.22}$$

où $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^{-1}$ et $W(\boldsymbol{v}^s)$ est l'analogue de $W(\boldsymbol{u}^s)$ (Eq.20) et vérifie

$$W(\boldsymbol{v}^s)W(\boldsymbol{u}^s) = \frac{L}{s}\mathbf{id}_{\frac{L}{s}}\,,$$

de sorte que si nous reportons l'égalité (Eq.19) dans (Eq.22), on obtient

$$\begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant 1}\chi_0(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_1(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_2(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_{L-1}(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = \sum_{s\div L}\sum_{(s,e,d)} \frac{N(s,e,d)}{Ld} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} \overline{\mathbf{id}_{\frac{L}{s}}} & \cdots\cdots & \overline{\mathbf{id}_{\frac{L}{s}}} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \overline{\mathbf{id}_{\frac{L}{s}}} & & \overline{\mathbf{id}_{\frac{L}{s}}} \end{array}\right)}_{s\ \text{lignes et d colonnes de blocs}\ \frac{L}{s}\times\frac{L}{s}} \begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{0\cdot s}t)^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{1\cdot s}t)^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{(d\frac{L}{s}-1)\cdot s}t)^r}{r} \end{pmatrix} \tag{Eq.23}$$

où les nombres $N(s,e,d)/Ld$ sont entiers d'après lemme **E**-(b).

Ces calculs donnent le développement eulérien des fonctions $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$, à savoir :

Lemme G. *Pour $m=0,\dots,L-1$, on a*

$$\sum_{r\geqslant 1}\chi_m(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r} = \sum_{(s,e,d)} \mathrm{Log}\left(\left(\frac{1}{1-\boldsymbol{u}^{sfm}t^d}\right)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}\right);$$

et le développement eulérien au voisinage de $t=0$:

$$\boxed{\zeta_m(\boldsymbol{X},t) = \prod_{(s,e,d)}\left(\frac{1}{1-\boldsymbol{u}^{sfm}t^d}\right)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}} \tag{Eq.24}$$

où nous avons posé $f=-e^{-1} \pmod{\frac{L}{s}}$, *et où les indices* (s,e,d) *parcourent l'ensemble de tous les types de* $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathcal{F}}$*-orbites de* $\overline{\boldsymbol{X}}$.

Preuve. En appliquant la formule (Eq.23), on a pour chaque m donné

$$\begin{aligned}\sum_{r\geqslant 1}\chi_m(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} &= \sum_{s\div L}\sum_{(s,e,d)}\frac{N(s,e,d)}{Ld}\sum_{a=0}^{d-1}\sum_{r\geqslant 1}\boldsymbol{w}^{rLa}\frac{(\boldsymbol{w}^{(m \pmod{\frac{L}{s}})s}\,t)^r}{r}\\ &= \sum_{s\div L}\sum_{(s,e,d)}\frac{N(s,e,d)}{Ld}\Big(\sum_{a=0}^{d-1}\boldsymbol{w}^{rLa}\Big)\sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{(m \pmod{\frac{L}{s}})s}\,t)^r}{r}\\ &= \sum_{(s,e,d)}\frac{N(s,e,d)}{Ld}\frac{(\boldsymbol{w}^{ms}\,t)^{dr}}{r} = \sum_{(s,e,d)}\operatorname{Log}\Big(\Big(\frac{1}{1-\boldsymbol{w}^{msd}\,t^d}\Big)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}\Big)\end{aligned}$$

où $\boldsymbol{w}^{msd}=\boldsymbol{w}^{(-sed)(-e^{-1}m)}=\boldsymbol{u}^{sf}$, d'après nos conventions (*cf.* (Eq.18)). ∎

§15) **Rapport eulérien entre $\boldsymbol{\zeta(X,t)}$ et $\boldsymbol{\zeta_0(X,t)}$**

Ce paragraphe n'est pas indispensable pour la preuve des théorèmes, mais il trouve sa place naturelle à cet endroit. Il s'agit de comprendre le rapport entre les fonctions Zêta de $\boldsymbol{X}$ et de $\boldsymbol{X/G}$, dont le lemme **B** nous indiquait déjà que le degré de la première devrait être L-fois celui de la seconde. Notons $\pi:\overline{\boldsymbol{X}}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{X}}/\boldsymbol{G}$ la projection canonique. Il est clair que l'on a $\boldsymbol{X}(\!(r)\!)\subseteq\pi^{-1}(\boldsymbol{X/G}(\!(r)\!))$, mais la réciproque n'a aucune raison, à priori, d'être vérifiée.

Lemme H. *Avec les notations en cours.*

a) *On a* $\displaystyle\pi^{-1}((\boldsymbol{X/G})(\!(r)\!)) = \boldsymbol{X}(\!(r)\!)\coprod\Big(\coprod_{\boldsymbol{d}\div r,\ \frac{L}{s}\nmid\frac{r}{d}}\boldsymbol{X}(s,e,d)\Big),$

et donc $\displaystyle L\cdot N(\boldsymbol{X/G},r)=N(\boldsymbol{X},r)+\sum_{\substack{(s,e,d)\\ d\div r,\ \frac{L}{s}d\nmid r}}N(s,e,d).$

b) *On a le développement eulérien au voisinage de* $t=0$ *:*

$$\boxed{\frac{\zeta(\boldsymbol{X},t)}{\zeta(\boldsymbol{X/G},t)^L}=\prod_{(s,e,d)}\Big(\frac{(1-t^{\frac{L}{s}d})^s}{(1-t^d)^L}\Big)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}}\qquad\text{(Eq.25)}$$

où le produit peut évidemment se limiter aux types (s,e,d) *tels que* $s\neq L$.

Preuve

a) Soit $y\in\boldsymbol{X/G}$, vérifiant $\boldsymbol{\mathcal{F}}^r(y)=y$. L'ensemble $\pi^{-1}(y)$ est alors stable sous l'action de $\boldsymbol{G}$ est de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, c'est donc une réunion de $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathcal{F}}$-orbites. Si maintenant $\langle\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathcal{F}}\rangle\cdot x\subseteq\pi^{-1}(y)$, l'égalité $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{aed+\lambda\frac{L}{s}d}(x)=\theta^{as}(x)$, pour tout $a\in\mathbb{Z}$, donne l'ensemble de toutes les solutions à l'équation $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\alpha}(x)=\theta^{\beta}(x)$. Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour avoir $\boldsymbol{\mathcal{F}}^r(y)=y$ est que r soit de la forme $aed+\lambda\frac{L}{s}d$, donc

$$d\div r,\quad\text{et}\quad\frac{r}{d}=ae \pmod{\frac{L}{s}}\text{ pour un certain }a\in\mathbb{Z},$$

où la deuxième condition est toujours vérifiée. Par conséquent,

$$\pi^{-1}(\boldsymbol{X/G})(\!(r)\!)=\coprod_{d\div r}\boldsymbol{X}(s,e,d)$$

Un théorème de Lefschetz p-adique

Or, $\boldsymbol{X}(s,e,d) \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}(\!(r)\!)$ si, et seulement si, $\frac{L}{s}d \div r$, d'où l'assertion (a).

b) On procède comme dans (12). En appliquant (a), on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}\Big(\frac{\zeta(\boldsymbol{X},t)}{\zeta(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},t)^L}\Big) &= \sum_{r\geqslant 1}\Big(N(\boldsymbol{X},r) - L\cdot N(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},r)\Big)\frac{t^r}{r}\\ &= \sum_{(s,e,d)} N(s,e,d)\Big(\sum_{\lambda\geqslant 1}\frac{t^{d\lambda}}{d\lambda} - \sum_{\lambda\geqslant 1}\frac{t^{\frac{L}{s}d\lambda}}{\frac{L}{s}d\lambda}\Big)\\ &= \mathrm{Log}\Big(\prod_{(s,e,d)}\Big(\frac{(1-t^{\frac{L}{s}d})^s}{(1-t^d)^L}\Big)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}\Big),\end{aligned}$$

CQFD. ∎

§16) **A propos de la convergence des séries et produits.** Toutes les séries formelles en la variable t que nous avons considérées sont nulles en $t=0$ et convergent uniformément sur un disque $\mathbb{D}(0,\epsilon)\subseteq\mathbb{C}$ de rayon $\epsilon>0$ assez petit. Voici, en vrac, quelques justifications.

- Les séries $\sum_{r\geqslant 1}N(\boldsymbol{X},r)\frac{t^r}{r}$ et $\sum_{r\geqslant 1}N(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},r)\frac{t^r}{r}$ donnant les fonctions $\zeta(\boldsymbol{X},t)$ et $\zeta(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},t)$, car dominées par des les séries des fonctions $\zeta(\mathbb{A}^N_{\boldsymbol{k}},t)$ des espaces affines dont le rayon de convergence se calcule sans difficulté.
- Les séries $\sum_{r\geqslant 1}N(\boldsymbol{X},j,r)\frac{t^r}{r}$, car respectivement dominées par $\sum_{r\geqslant 1}N(\boldsymbol{X},Lr)\frac{t^r}{r}$.
- Les séries $\sum_{r\geqslant 1}\chi_m(\boldsymbol{\mathcal{F}}_{-r})$, puisqu'elles sont liées aux séries $\sum_{r\geqslant 1}N(\boldsymbol{X},j,r)\frac{t^r}{r}$ par le système d'équations (Eq.15).
- Les séries $S(s,e,d)_m$ du lemme **F**, pour des raisons évidentes (*cf.* (Eq.19)), on peut même préciser que leur rayon de convergence vaut 1.
- Les séries $\sum_{(s,e,d)}N(s,e,d)S(s;e;d)_j$, car respectivement dominées par les séries $\sum_{r\geqslant 1}N(\boldsymbol{X},j,r)\frac{t^r}{r}$ (*cf.* (Eq.17)).
- Les produits eulériens des lemmes **G** et **H**, car exponentiels de séries convergentes, nulles en $t=0$.

§17) **Comparaison des degrés de $\boldsymbol{\zeta_m(X,t)}$ et $\boldsymbol{\zeta_0(X,t)}$ et $\boldsymbol{\zeta(X,t)}$.**

Lemme I. *On a* $\deg\big(\zeta_0(\boldsymbol{X},t)\big)=\cdots=\deg\big(\zeta_m(\boldsymbol{X},t)\big)=\deg\big(\zeta(\boldsymbol{X},t)\big)/L$. *En particulier, les théorèmes* **1′**, **2**, **3**, *et donc aussi* **1**, *sont vérifiés.*

Preuve. Les décompositions eulériennes (Eq.24), donnent au voisinage de $t=0$:

$$\frac{\zeta_m(\boldsymbol{X},t)}{\zeta_0(\boldsymbol{X},t)} = \prod_{(s,e,d)}\Big(\frac{1-t^d}{1-\boldsymbol{u}^{sfm}t^d}\Big)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}, \qquad (*)$$

où la fraction de gauche appartient à $\mathbb{Z}[\boldsymbol{u}](t)$ (lemme **D**).

Comme $\zeta_m(\boldsymbol{X},0)=\zeta_0(\boldsymbol{X},0)=1$, les deux membres de $(*)$ peuvent se développer en série formelle à coefficients dans $\mathbb{Z}[\boldsymbol{u}][t]$, obtenant la même série formelle. On en déduit que pour montrer que la fraction $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)/\zeta_0(\boldsymbol{X},t)$ est de degré nul, nous pouvons aussi bien la considérer comme fraction rationnelle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (quitte à fixer

un plongement $\mathbb{Z}[\boldsymbol{u}] \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$), et ceci pour n'importe quel nombre premier ℓ. L'égalité $(*)$ continue alors d'avoir une sens dans l'anneau des séries formelles $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\![t]\!]$.

Posons maintenant

$$\frac{\zeta_m(\boldsymbol{X},t)}{\zeta_0(\boldsymbol{X},t)} = \frac{A_m(t)}{B_m(t)}\,, \tag{$*'$}$$

avec $A_m(t), B_m(t) \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[t]$ sans facteur commun et termes constants égaux à 1. On considère alors l'égalité

$$\begin{aligned} A_m(t) &= B_m(t) \prod_{(s,e,d)} \left(\frac{1-t^d}{1-\boldsymbol{u}^{sfm}\, t^d} \right)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}} \\ A_m(t) &= B_m(t) \prod_{(s,e,d)} \left((1-t^d) \sum_{k\geqslant 0} (\boldsymbol{u}^{sfm}\, t^d)^k \right)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}} \end{aligned} \tag{$\diamond_m$}$$

dans l'anneau des séries formelles $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\![t]\!]$.

Il convient de remarquer à ce stade que le produit eulérien dans ces égalités converge bien dans le disque unité ouvert vers une fonction non nulle, et que ceci implique que les zéros de $A_m(t)$ et $B_m(t)$ sont à priori de valuation ℓ-adique négative ou nulle. Or, les zéros de $A_m(t)$ et $B_m(t)$ sont aussi des valeurs propres de l'action du Frobenius sur la cohomologie étale ℓ-adique ($\ell \neq p$) de $\boldsymbol{X}$, et l'on sait d'après Deligne que ces valeurs propres sont de valuation ℓ-adique nulle dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, *i.e.* ce sont des unités ℓ-adiques ([2]). L'égalité $(\diamond_m)$ est donc une égalité dans le sous-anneau de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\![t]\!]$ des séries formelles dont les coefficients sont des *entiers* de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. En comparant l'expression $(\diamond_m)$ avec celle correspondant à 'ℓm' à la place de 'm', on obtient l'égalité :

$$\big(A_m(t)\big)^\ell \cdot B_{\ell m}(t^\ell) = \big(B_m(t)\big)^\ell \cdot A_{\ell m}(t^\ell) \pmod{\ell}\,,$$

et donc

$$\ell \cdot \deg\Big(\frac{A_m(t)}{B_m(t)}\Big) = \deg\Big(\frac{A_{\ell m}(t^\ell)}{B_{\ell m}(t^\ell)}\Big)\,,$$

puisque les coefficients principaux de $A_m(t)$ et $B_m(t)$ sont de valuation ℓ-adique nulle. Par conséquent, par $(*')$, on a

$$\ell \cdot \deg\Big(\frac{\zeta_m(\boldsymbol{X},t)}{\zeta_0(\boldsymbol{X},t)}\Big) = \deg\Big(\frac{\zeta_{\ell m}(\boldsymbol{X},t)}{\zeta_0(\boldsymbol{X},t)}\Big)\,. \tag{$\star\star$}$$

Cette égalité est indépendante de tout contexte adique et est valable pour tout nombre premier $\ell \neq p$, elle s'itère donc de manière évidente pour donner :

$$L \cdot \deg\Big(\frac{\zeta_m(\boldsymbol{X},t)}{\zeta_0(\boldsymbol{X},t)}\Big) = \deg\Big(\frac{\zeta_{Lm}(\boldsymbol{X},t^L)}{\zeta_0(\boldsymbol{X},t^L)}\Big) = \deg(1) = 0\,,$$

pour tout $m = 1, \ldots, L-1$, CQFD.

[2] Voir le corollaire 5.5.3, p. 31, de l'appendice §5 Théorèmes d'intégralité par P. Deligne, de l'article de N. Katz [K].

Enfin, l'égalité $L\cdot\deg\big(\zeta_0(\boldsymbol{X},t)\big)=\deg\big(\zeta(\boldsymbol{X},t)\big)$ est maintenant immédiate grâce à la factorisation de la fonction Zêta (Eq.8) qui va donner

$$\deg\big(\zeta(\boldsymbol{X},t)\big)=\sum_{m=0,\dots,L-1}\deg\big(\zeta_m(\boldsymbol{X},t)\big)=L\cdot\deg\big(\zeta_0(\boldsymbol{X},t)\big)\,,$$

d'après ce qui précède. ∎

§18) À propos du rapport $\boldsymbol{\zeta(X,t)/\zeta(X/G,t)^L}$

Dans la preuve du lemme **I**, le rapport entre les degrés de $\zeta(\boldsymbol{X},t)$ et $\zeta(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},t)$ est conséquence de l'égalité des degrés des fonctions rationnelles $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$, mais une démarche directe est aussi possible grâce au produit eulérien (Eq.25) (lemme **H**) :

$$\frac{\zeta(\boldsymbol{X},t)}{\zeta(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},t)^L}=\prod_{(s,e,d)}\left(\frac{(1-t^{\frac{L}{s}d})^s}{(1-t^d)^L}\right)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}=\prod_{(s,e,d)}\left(\prod\nolimits_{\alpha=0,\dots,\frac{L}{s}-1}\frac{\boldsymbol{u}^{s\alpha}-t^d}{1-t^d}\right)^{s\frac{N(s,e,d)}{Ld}}$$

à partir duquel, la preuve de l'égalité $\deg(\zeta_m(\boldsymbol{X},t))=\deg(\zeta_0(\boldsymbol{X},t))$, s'applique presque inchangée pour montrer que $\deg\big(\zeta(\boldsymbol{X},t)\big)=\deg\big(\zeta(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},t)^L\big)$.

Remarque. Dans cette démarche, on utilise de nouveau le fait que les valeurs propres du Frobenius agissant en cohomologie étale ℓ-adique, sont des unités ℓ-adiques

§19) Une approche p-adique pour la preuve du lemme I

Dans cette approche, nous allons démontrer un résultat bien plus fort que celui du lemme **I**, nous allons montrer que l'on a en fait des *égalités* de fractions rationnelles

$$\zeta_0(\boldsymbol{X},t)=\zeta_m(\boldsymbol{X},t)\,,$$

pour tout $m=1,\dots,L-1$, et pas seulement des égalités de leurs degrés.

L'idée pour parvenir à ce résultat consiste à décomposer $\boldsymbol{X}$ comme réunion disjointe

Quelques commentaires

- L'hypothèse sur l'ordre de θ est importante. Par exemple, sur la droite affine, l'automorphisme $\theta:\mathbb{A}^1(\boldsymbol{k})\to\mathbb{A}^1(\boldsymbol{k})$, $x\mapsto x+1$, est d'ordre p, n'a pas de point fixe, et sa trace en cohomologie vaut 1.
- Il est intéressant de remarquer que les égalités du Théorème **2**

  $$\chi(H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_0)=\chi(H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_1)=\cdots=\chi(H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_L)\,,$$

  ne résultent pas de l'existence d'isomorphismes entre $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_0$ et $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_i$. En effet, l'exemple

  $$\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{k}[X,X^{-1}]\,,\quad \boldsymbol{A}:=\frac{\boldsymbol{k}[X,X^{-1}][T]}{(T^L-X)}\,,\quad \theta(T)=\boldsymbol{u}T\,,$$

  montre par un calcul simple que l'on a

  $$\begin{cases}H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_0=\boldsymbol{K}\\ H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_0=\boldsymbol{K}\end{cases}\quad\text{mais}\quad\begin{cases}H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_1=\boldsymbol{0}\\ H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_1=\boldsymbol{0}\end{cases}$$

§1. Références bibliographiques

[A-M] A. Arabia, Z. Mebkhout. Sur le Topos infinitésimal p-adique dun schéma lisse I ; Ann. Inst. Fourier (Grenoble) Vol. 60 no. 6, p. 1905–2094, (2010).

[K] N. Katz. Le niveau de la cohomologie des intersections completes ; avec un appendice par P. Deligne, exposé XXI, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–69, "Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique" (SGA 7 II). Lecture Notes in Mathematics **340** (1973).

[Mo] P. Monsky. Formal cohomology : III. Fixed point theorems ; Ann. of Math. (2) **93**, p. 315–343 (1971).

———————×———————

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes
2012

Scindage des complexes en catégorie dérivée

Alberto Arabia

14 août 2012

Résumé

• Soient R un anneau commutatif gradué, $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ la catégorie des R-modules différentiels gradués (R-*mdg* en bref), $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ la catégorie obtenue de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ en identifiant les morphismes R-homotopes, et $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ obtenue de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ en inversant ses quasi-isomorphismes. On définit la structure de catégorie triangulée de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et de $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, et l'on étudie le problème du scindage des R-modules différentiels gradués, plus précisément, l'existence d'un isomorphisme dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, entre un R-*mdg* (M, d_M) et sa cohomologie : le R-*mdg* $(\mathrm{H}(M, d_M), 0)$.

• Comme la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ est abélienne, on dispose aussi des catégories triangulées $K^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R))$ et $D^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R))$ de complexes de R-*mdg*'s bornés supérieurement. Si $\boldsymbol{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$ est un foncteur covariant additif compatible au décalage, il induit un foncteur $\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F} : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et son dérivé à gauche $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F} : D^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)) \rightsquigarrow D^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R))$. Nous montrons qu'il existe de même un prolongement

$$\mathbb{D}\,\boldsymbol{F} : \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,.$$

La cohomologie de $\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(_)$ est alors l'aboutissement de la suite spectrale associée à la filtration par degrés de R-*mdg*'s du bicomplexe $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(_)$. Lorsque (M, d_M) est scindé, les R-modules gradués $\boldsymbol{h}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(M, d_M))$ et $\mathbf{tot}\,\mathbb{L}^*\boldsymbol{F}(\boldsymbol{h}(M, d_M))$ sont isomorphes, où $\mathbb{L}^k\boldsymbol{F} : D^-(\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R))$ est le k-ième foncteur dérivé à gauche standard. Comme conséquence de notre étude, on démontre ce qui suit.

Proposition 7.3.1. *Tout R-mdg est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ si, et seulement si, l'anneau R est héréditaire .*

• Pour un groupe de Lie $\boldsymbol{G}$ compact et connexe, les complexes des formes différentielles équivariantes pour une $\boldsymbol{G}$-variété différentielle $\boldsymbol{X}$, sont des objets de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}})$ où $H_{\boldsymbol{G}}$ désigne la cohomologie $\boldsymbol{G}$-équivariante d'un point. Lorsque $\boldsymbol{X}$ vérifie la dualité de Poincaré rationnelle, le morphisme de dualité de Poincaré équivariante

$$\mathbb{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}} : (\Omega_{\boldsymbol{G}}[d_{\boldsymbol{X}}], d_{\boldsymbol{G}}) \to \mathrm{Homgr}^*_{H_{\boldsymbol{G}}}((\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}, d_{\boldsymbol{G}}), H_{\boldsymbol{G}})\,, \qquad (\mathbb{D})$$

est un quasi-isomorphisme.

Lorsque $\boldsymbol{G}$ est le tore $\mathbb{S}$ de dimension 1, l'anneau $H_{\mathbb{S}^1}$ est héréditaire et tout $H_{\mathbb{S}^1}$-mdg est scindé, de sorte que l'on a alors des isomorphismes dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(H_{\mathbb{S}^1})$

$$(\Omega_{\mathbb{S}^1}(\boldsymbol{X}), d_{\mathbb{S}^1}) \cong (H_{\mathbb{S}^1}(\boldsymbol{X}), 0) \text{ et } (\Omega_{\mathbb{S}^1,\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), d_{\mathbb{S}^1}) \cong (H_{\mathbb{S}^1,c}(\boldsymbol{X}), 0)\,. \qquad (\diamond)$$

Le quasi-isomorphisme $(\mathbb{D})$ induit alors un isomorphisme de $H_{\mathbb{S}^1}$-*mg*

$$\mathcal{D}_{\mathbb{S}^1,\boldsymbol{X}} : H_{\mathbb{S}^1}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}}] \xrightarrow[\cong]{} \mathbf{tot}\,\mathrm{Extgr}^{*,\bullet}_{H_{\mathbb{S}^1}}(H_{\mathbb{S}^1,c}(\boldsymbol{X}), H_{\mathbb{S}^1})\,.$$

Il en résulte le critère de dualité de Poincaré équivariante suivant.

Critère. Lorsque $\boldsymbol{X}$ vérifie la dualité de Poincaré, le morphisme de dualité

$$H_{\mathbb{S}^1}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}}] \to \mathrm{Homgr}^*_{H_{\mathbb{S}^1}}(H_{\mathbb{S}^1,c}(\boldsymbol{X}), H_{\mathbb{S}^1})$$

induit par $\mathbb{D}_{\mathbb{S}^1,\boldsymbol{X}}$ est bijectif si, et seulement si, $H_{\mathbb{S}^1}(\boldsymbol{X})$ est un $H_{\mathbb{S}^1}$-module libre.

Table des matières

1 Catégories de R-modules différentiels gradués **3**
1.1 Rappels sur les catégories triangulées . . . 3
1.2 R-modules différentiels gradués . . . 5
1.2.1 La catégorie des R-modules différentiels gradués. . . . 5
1.2.2 Convention sur les notations . . . 6
1.2.3 Le foncteur de translation. . . . 6
1.2.4 Le module différentiel gradué $\mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(_,_)$. . . . 6
1.2.5 Le bifoncteur $\mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(_,_)$. . . . 6
1.2.6 Le groupe $\mathrm{Hotgr}_R(_,_)$. . . . 7
1.2.7 Les R-*mg* $\mathrm{Hotgr}^{*}_R(_,_)$. . . . 7
1.2.8 Le module différentiel gradué $(_\otimes_R_)^{\bullet}$. . . . 7
1.2.9 Le bifoncteur $(_\otimes_R_)^{\bullet}$. . . . 8
1.2.10 Propriétés de $\mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(_,_)$ et $(_\otimes_R_)^{\bullet}$. . . . 8
1.2.12 La catégorie triangulée $\mathbb{K}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. . . . 9
1.2.15 Foncteurs cohomologiques. . . . 13
1.2.18 La catégorie $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. . . . 14

2 R-mdg's projectifs **16**
2.1 R-*mdg* simple associé à un complexe de R-*mdg*'s . . . 16
2.1.1 Foncteur « R-*mdg simple associé* ». . . . 16
2.1.3 Qestions d'acyclicité du R-*mdg* simple associé. . . . 17
2.1.5 Troncatures bêtes. . . . 18
2.1.6 Morphisme de connexion et quasi-isomorphismes . . . 18
2.2 La paire adjointe $(\mathcal{F},\mathrm{Z})$ . . . 19
2.2.1 Le foncteur $\mathcal{F}:\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\rightsquigarrow\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. . . . 19
2.2.2 Le foncteur $\mathrm{Z}:\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\rightsquigarrow\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$. . . . 19
2.3 La paire adjointe $(\mathcal{E},\mathrm{o})$ . . . 19
2.3.1 Foncteur « *oubli* » $\mathrm{o}:\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\rightsquigarrow\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$. . . . 19
2.3.2 Le foncteur $\mathcal{E}:\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\rightsquigarrow\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. . . . 20
2.3.4 Morphismes d'adjonction. . . . 20
2.4 Existence de R-*mdg*'s projectifs . . . 20

3 Présentations projectives de R-*mdg*'s **22**
3.1 Résolutions projectives et présentations projectives . . . 22
3.1.3 Remarques sur l'existence de présentations projectives. . . . 23
3.2 Théorème fondamental des présentations projectives . . . 23
3.3 Le foncteur $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^{*}_R(_,\mathcal{N})$ . . . 27
3.3.4 Le foncteur $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^{*}_R(\mathcal{F}(_),N)$. . . . 29

4 Suites exactes courtes et triangles distingués **30**
4.1 Le cas des suites scindées dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$ . . . 30
4.2 Le cas général . . . 32

5 Relèvements projectifs simultanés de R-mdgr's **33**

5.1 Le cas des complexes d'une catégorie abélienne 33
5.1.1 Les foncteurs B^m, Z^m, H^m. 33
5.1.3 Relèvements projectifs simultanés des suites exactes courtes. . 34
5.1.4 Relèvement projectif simultané d'un complexe quelconque. . . 34
5.1.6 Décomposition des relèvements projectifs simultanés. 36
5.1.10 Résolutions projectives simultanées. 38
5.2 Résolutions projectives simultanés des R-*mdg*'s 39
5.2.1 Les foncteurs B, Z, H. 39
5.2.2 Relèvements projectifs simultanés des R-*mdg*'s. 39
5.2.4 Résolutions projectives simultanées des R-*mdg*'s. 40
5.2.7 À propos de $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{P}, _)$. 41

6 Foncteurs dérivés **42**
6.1 Foncteurs Diff $\boldsymbol{F}$, $\mathbb{K}\boldsymbol{F}$, $\mathbb{D}\boldsymbol{F}$. 42
6.1.2 Exemples. 43
6.2 Filtrations et suites spectrales canoniques 43
6.2.1 Filtration canonique de $\mathrm{H}(\mathbb{D}\boldsymbol{F}(\mathcal{N}))$. 44
6.3 Morphisme de comparaison entre $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}$ et $\mathbb{D}\boldsymbol{F}$ 47

7 Scindage de R-mdgr's **50**
7.1 R-*mdg*'s scindés 50
7.1.2 Définition. 50
7.1.6 $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^*_R(\langle\text{scindé}\rangle, N)$. 52
7.1.9 Suite spectale canonique associée à $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^*_R(_, N)$. 55
7.2 Critère général de scindage 55
7.3 Scindage et anneaux héréditaires 68

8 Cohomologie équivariante **69**
8.1 Formes différentielles équivariantes 69
8.1.1 Les anneaux gradués $R(\mathfrak{g})$ et $S_{\mathfrak{g}}$. 69
8.1.3 Les $S_{\mathfrak{g}}$-***mdg***'s $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ et $\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$. 69
8.1.5 Suite spectrale de Leray-Serre. 70
8.2 Le cas où $\boldsymbol{G} = \mathbb{S}^1$ 71
8.3 Un critère de dualité équivariante lorsque $\boldsymbol{G} = \mathbb{S}^1$ 72

1. Catégories de R-modules différentiels gradués

1.1. Rappels sur les catégories triangulées

Une catégorie « *triangulée* » est une catégorie additive $\mathcal{A}$ munie de :

a) Un automorphisme de catégories $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, appelé « *le foncteur translation* ». On note aussi $X[m] := T^m(X)$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

On appelle alors « *triangle* », tout sextuplet (X, Y, Z, u, v, w) où X, Y, Z sont des objets de $\mathcal{A}$ et où $u : X \to Y$, $v : Y \to Z$ et $w : Z \to T(X)$

sont des morphismes de $\mathcal{A}$. Un triangle se note classiquement des deux manières suivantes

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & {\scriptstyle w}\searrow^{[1]} \quad \swarrow{\scriptstyle v} & \\ & Z & \end{array}$$

Un « *morphisme de triangles* » $(X, Y, Z, u, v, w) \to (X', Y', Z', u', v', w')$, est la donnée de morphismes $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$, $h : Z \to Z'$ de $\mathcal{A}$, tels que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle f[1]}\downarrow \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

est commutatif.

b) Une classe de triangles (X, Y, Z, u, v, w) appelés « *triangles distingués* » vérifiant les conditions suivantes

(TR1) Tout triangle (X, Y, Z, u, v, w) isomorphe à un triangle distingué est distingué. Pour tout morphisme $u : X \to Y$ de $\mathcal{A}$, il existe un triangle distingué de la forme (X, Y, Z, u, v, w). Pour tout objet X de $\mathcal{A}$, le triangle $(X, X, 0, \mathrm{id}_X, 0, 0)$ est distingué.

(TR2) Le triangle (X, Y, Z, u, v, w) est distingué si, et seulement si, le triangle $(Y, Z, X[1], v, w, -u[1])$ l'est.

(TR3) Soient (X, Y, Z, u, v, w) et (X', Y', Z', u', v', w') deux triangles distingués, et $f : X \to X'$ et $g : Y \to Y'$ tels que $u' \circ f = g \circ u$, il existe alors $h : Z \to Z'$ (pas forcément unique) tel que (f, g, h) est un morphisme de triangles.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \oplus & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\vdots & & {\scriptstyle f[1]}\downarrow \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

(TR4) (Axiome de l'octaèdre.) Étant donné le diagramme de triangles distingués

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \| & \oplus & {\scriptstyle g}\downarrow & & & & \| \\ X & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X[1] \\ & & {\scriptstyle g'}\downarrow & & & & \\ & & Y'' & & & & \\ & & {\scriptstyle g''}\downarrow & & & & \\ & & Y[1] & & & & \end{array} \qquad (\diamond)$$

il existe un triangle distingué (Z, Z', Z'', h, h', h'') et un isomorphisme $v'' : Y'' \to Z''$, tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \vdots{\scriptstyle h} & & \| \\
X & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X[1] \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g'} & & \vdots{\scriptstyle h'} & & \\
 & & Y'' & \xrightarrow[\cong]{v''} & Z'' & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g''} & & \vdots{\scriptstyle h''} & & \\
 & & Y[1] & \xrightarrow{v[1]} & Z[1] & &
\end{array} \qquad (\diamond\diamond)$$

est commutatif.

1.1.1. Commentaires sur les axiomes TR

— Les axiomes TR1 et TR3 appliqués au diagramme $(\diamond)$ fournissent aussitôt un diagramme commutatif $(\diamond\diamond)$ mais ne garantissent pas à priori la bijectivité de v''.

— Les axiomes TR1, TR2 et TR3 permettent de montrer que, pour tout triangle distingué $\Delta = (X, Y, Z, u, v, w)$ et tout $M \in \mathcal{A}$, l'application des foncteurs $(_) \rightsquigarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M, _)$ et $(_) \rightsquigarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(_, M)$ à Δ, donne lieu aux suites

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M, X) \xrightarrow{u_*} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M, Y) \xrightarrow{v_*} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M, Z) \xrightarrow{w_*} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M, X[1]) \longrightarrow$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X, M) \xleftarrow{u^*} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(Y, M) \xleftarrow{v^*} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(Z, M) \xleftarrow{w^*} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X[1], M) \longleftarrow$$

qui sont des *suites exactes longues* de groupes abéliens.

1.2. R-modules différentiels gradués

1.2.1. La catégorie des R-modules différentiels gradués. Dans cet article, on désigne par R un anneau commutatif, unitaire, positivement gradué $R := (R^0 \oplus R^1 \oplus \cdots)$ et de composantes de degrés impaires nulles ([1]).

Un « *R-module différentiel gradué* » (un *R-mdg* en bref), est un couple $\mathcal{M} = (M, d_M)$, où $M := (\cdots \oplus M^{-1} \oplus M^0 \oplus M^1 \oplus \cdots)$ est un R-module $\mathbb{Z}$-gradué (un *R-mg* en bref), et où $d_M : M \to M$ est un endomorphisme de R-module gradué, de degré 1 et de carré nul, appelé sa « *différentielle* ».

Un « *morphisme de R-mdg* » $\alpha : (M, d_M) \to (N, d_N)$, est la donnée d'un morphisme R-modules gradués $\alpha : M \to N$, de degré 0, qui commute aux différentielles, *i.e.* tel que $\alpha \circ d_M = d_N \circ \alpha$.

1. La nécessité de cette condition apparaît notamment lors de l'introduction des R-modules différentiels gradués $\mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(_, _)$ et $(_ \otimes_R _)^{\bullet}$ (*cf.* 1.2.4 et 1.2.8).

Les R-*mdg*'s et leurs morphismes constituent la catégorie des R-modules différentiels gradués, notée $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. C'est une catégorie abélienne.

1.2.2. Convention sur les notations On note par des caractères cursifs : $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$ des R-*mdg*'s, et par des caractères romains $A, B, M, N, \ldots$ les R-*mg*'s sous-jacents, ce qui est cohérent avec l'écriture '$\mathcal{M} = (M, d_M)$'.

1.2.3. Le foncteur de translation. On note $T : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ le foncteur qui associe à $\mathcal{M} = (M, d_M)$, le R-*mdg* $T\mathcal{M} := (T(M), d_{T(M)})$, où

$$T(M)^m = M^{m+1} \quad \text{et} \quad d_{T(M)} = -d_M \,,$$

et qui associe à $\alpha : M \to N$, le morphisme

$$T(\alpha) : T(M) \to T(N) \quad \text{avec} \quad T(\alpha)_m := \alpha_{m+1} \,.$$

Pour $i \in \mathbb{Z}$, on notera également $T^i\mathcal{M} := \mathcal{M}[i]$ et $T^i(\alpha) := \alpha[i]$.

1.2.4. Le module différentiel gradué $\mathbf{Homgr}^{\bullet}_{R}(_,_)$. Étant donnés deux R-*mg*'s M et N et un entier $m \in \mathbb{Z}$, on note $\mathrm{Homgr}^m_R(M,N)$ le sous-R-module de $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ des homomorphismes gradués de degré m. On remarquera que $\mathrm{Homgr}^m_R(M,N)$ n'a pas de structure naturelle de R-module, en ce sens que si $x \in R^d$ et $\lambda \in \mathrm{Homgr}^m_R(M,N)$ alors $x\lambda \in \mathrm{Homgr}^{m+d}_R(M,N)$. On considère alors l'ensemble

$$\mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(M,N) := \big(\textstyle\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{Homgr}^m_R(M,N)\big) \subseteq \mathrm{Hom}_R(M,N)\,,$$

dont la structure de R-*mg* est claire. Maintenant si $\mathcal{M} = (M, d_M)$ et $\mathcal{N} = (N, d_N)$ sont des R-*mdg*'s, on pose

$$\mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(\mathcal{M},\mathcal{N}) := \big(\mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(M,N), D_\bullet\big)\,, \tag{Eq.1}$$

où $D_\bullet$ est définie par

$$\begin{cases} \mathrm{Homgr}^m_R(M,N) \xrightarrow{D_m} \mathrm{Homgr}^{m+1}_R(M,N) \\ \lambda \qquad\qquad \longmapsto d_N \circ \lambda - (-1)^m \lambda \circ d_M \,, \end{cases}$$

ce qui fait du couple (Eq.1) un R-*mdg* puisque R est gradué par degrés paires.

1.2.5. Le bifoncteur $\mathbf{Homgr}^{\bullet}_{R}(_,_)$. La donnée des morphismes de R-*mdg*'s $\alpha : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ et $\beta : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ détermine des applications

$$\begin{cases} \mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(\mathcal{M}_2,\mathcal{N}) \longrightarrow \mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(\mathcal{M}_1,\mathcal{N})\,, \quad \lambda \longmapsto \lambda \circ \alpha \\ \mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(\mathcal{M},\mathcal{N}_1) \longrightarrow \mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(\mathcal{M},\mathcal{N}_2)\,, \quad \lambda \longmapsto \beta \circ \lambda \end{cases}$$

dont on vérifie qu'il s'agit de morphismes de R-*mdg*'s. Ces correspondances définissent un bifoncteur biadditif, contravariant sur la première variable et

covariant sur la seconde variable,

$$\big(\mathrm{Homgr}_R^\bullet(_,_), D_\bullet\big) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \times \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \qquad \text{(Eq.2)}$$

1.2.6. Le groupe $\mathbf{Hotgr_R(_,_)}$. Dans le R-*mdg* $\mathrm{Homgr}_R^\bullet(\mathcal{M},\mathcal{N})$, on a $\ker(D_m) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}\big(\mathcal{M},\mathcal{N}[m]\big)$ et $\mathrm{im}(D_{m-1})$ est le groupe des homotopies de R-*mdg*'s de $\mathcal{M}$ à valeurs dans $\mathcal{N}[m]$. Le quotient $\ker(D_m)/\,\mathrm{im}(D_{m-1})$ s'identifie donc au groupe abélien des morphismes de *mdg*'s de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}[m]$ *à homotopie près*, on le note

$$\mathrm{Hotgr}_R\big(\mathcal{M},\mathcal{N}[m]\big) := \mathrm{H}^m\big(\mathrm{Homgr}_R^\bullet(\mathcal{M},\mathcal{N})\big)\,.$$

La loi de composition de morphismes

$$\circ : \mathrm{Mor}_{\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \times \mathrm{Mor}_{\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(\mathcal{L},\mathcal{M}) \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(\mathcal{L},\mathcal{N})$$

induit alors une loi de composition

$$\circ : \mathrm{Hotgr}_R(\mathcal{M},\mathcal{N}) \times \mathrm{Hotgr}_R(\mathcal{L},\mathcal{M}) \to \mathrm{Hotgr}_R(\mathcal{L},\mathcal{N})$$

vérifiant les propriétés habituelles d'associativité, distributivité et existence d'élément neutre.

1.2.7. Les $\boldsymbol{R}$-*mg* $\mathbf{Hotgr_R^*(_,_)}$. Nous noterons également

$$\mathrm{Hotgr}_R^m(\mathcal{M},\mathcal{N}) := \mathrm{Hotgr}_R\big(\mathcal{M},\mathcal{N}[m]\big) = \mathrm{H}^m\big(\mathrm{Homgr}_R^\bullet(\mathcal{M},\mathcal{N})\big)\,.$$

de sorte que

$$\mathrm{Hotgr}_R^*(\mathcal{M},\mathcal{N}) := \bigoplus\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hotgr}_R^m(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \mathrm{H}^*\big(\mathrm{Homgr}_R^\bullet(\mathcal{M},\mathcal{N})\big)$$

est naturellement muni d'une structure de R-*mg*.

1.2.8. Le module différentiel gradué $\mathbf{(_\otimes_R_)^\bullet}$. Étant donnés deux R-*mg*'s M et N et un entier $m\in\mathbb{Z}$, on note $(M\otimes_R N)^m$ le sous-R-module de $M\otimes_R N$ des tenseurs homogènes de degré total m, *i.e.* on pose

$$(M\otimes_R N)^m := \big\{ m\otimes n \in M\otimes_R N \;\big|\; m\in M^a\,,\ n\in N^b\,,\ a+b=m\big\}$$

On a clairement $R^d(M\otimes_R N)^m \subseteq (M\otimes_R N)^{m+d}$ d'où la structure naturelle de R-*mg* sur $M\otimes_R N$. Maintenant, si $\mathcal{M}=(M,d_M)$ et $\mathcal{N}=(N,d_N)$ sont

des R-*mdg*'s, on pose

$$(\mathcal{M}\otimes_R\mathcal{N})^\bullet := \big((M\otimes_R N)^\bullet, \Delta_\bullet\big)\,, \tag{Eq.3}$$

où $\Delta_\bullet$ est définie par

$$\begin{cases} M^a\otimes_R N^b \xrightarrow{\Delta_m} (M\otimes_R N)^{a+b+1} \\ \quad m\otimes n \quad \longmapsto d_M(m)\otimes n + (-1)^a m\otimes d_N(n)\,, \end{cases}$$

ce qui fait du couple (Eq.3) un R-*mdg* puisque R est gradué par degrés paires.

1.2.9. Le bifoncteur $(_\otimes_R_)^\bullet$. La donnée des morphismes de R-*mdg*'s $\alpha:\mathcal{M}_1\to\mathcal{M}_2$ et $\beta:\mathcal{N}_1\to\mathcal{N}_2$ détermine des applications

$$\begin{cases} (\mathcal{M}_1\otimes\mathcal{N})^\bullet \longrightarrow (\mathcal{M}_2\otimes\mathcal{N})^\bullet\,, \quad \mu\otimes\nu\longmapsto\alpha(\mu)\otimes\nu \\ (\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}_1)^\bullet \longrightarrow (\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}_2)^\bullet\,, \quad \mu\otimes\nu\longmapsto\mu\otimes\beta(\nu) \end{cases}$$

dont on vérifie qu'il s'agit de morphismes de R-*mdg*'s. Ces correspondances définissent un bifoncteur biadditif, covariant sur les deux variables,

$$\big((_\otimes_R_)^\bullet,\Delta_\bullet\big) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\times\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\rightsquigarrow\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,. \tag{Eq.4}$$

1.2.10. Propriétés de $\mathbf{Homgr}^\bullet_R(_,_)$ et $(_\otimes_R_)^\bullet$. La proposition suivante rappelle sans démonstration des propriétés basiques de ces deux bifoncteurs.

1.2.11. Proposition

a) *Pour $m\in\mathbb{Z}$, on a des identifications canoniques*

$$\begin{cases} \big(\mathrm{Homgr}^\bullet_R(_,_[m]),D_\bullet\big) = \big(\mathrm{Homgr}^\bullet_R(_,_),D_\bullet\big)[m] \\ \big(\mathrm{Homgr}^\bullet_R(_[m],_),D_\bullet\big) = \big(\mathrm{Homgr}^\bullet_R(_,_)[-m],D_\bullet\big) \\ \big((_[m]\otimes_R_)^\bullet,\Delta_\bullet\big) = \big((_\otimes_R_)^\bullet,\Delta_\bullet\big)[m] \\ \big((\mathcal{M}\otimes_R\mathcal{N})^\bullet,\Delta_\bullet\big)\underset{\cong}{\to}\big((\mathcal{N}\otimes_R\mathcal{M})^\bullet,\Delta_\bullet\big)\,,\ m\otimes n\mapsto(-1)^{|m||n|}n\otimes m \end{cases}$$

b) *Les bifoncteurs* $\mathrm{Homgr}^\bullet_R(_,_)$ *et* $(_\otimes_R_)^\bullet$ *sont compatibles aux homotopies, variable par variable.*

Indication. À titre d'exemple, montrons (b) pour le foncteur $\mathrm{Homgr}^\bullet_R(_,\mathcal{N})$. Soit $\alpha:\mathcal{M}_1\to\mathcal{M}_2$ un morphisme de R-*mdg*'s et soit $h:M_1\to M_2[-1]$ un morphisme de R-*mg*'s tel que $\alpha=hd+dh$. Notons $H:\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\mathcal{M}_2,\mathcal{N})\to\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\mathcal{M}_1,\mathcal{N})[-1]$ le morphisme de R-*mg*'s $H:\lambda\mapsto(-1)^{|\lambda|}\lambda h$. On a alors

$$\begin{aligned} DH(\lambda)+HD(\lambda) &= \big((-1)^{|\lambda|}d\lambda h+\lambda hd\big)+(-1)^{|\lambda|+1}\big(d\lambda-(-1)^{|\lambda|}\lambda d\big)h \\ &= \lambda(hd+dh)=\lambda\alpha\,. \end{aligned}$$

□

1.2.12. La catégorie triangulée $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Les objets de cette catégorie sont ceux de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, et ses morphismes sont donnés par

$$\mathrm{Mor}_{\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(\mathcal{M},\mathcal{N}) := \mathrm{Hotgr}_R(\mathcal{M},\mathcal{N})\,.$$

La catégorie $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ est additive. Rappelons sa structure triangulée.

— *La translation.* Il s'agit du foncteur $T : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ déjà introduit dans 1.2.3.

— *Le cône d'un morphisme de mdg's.* Étant donné un morphisme de R-*mdg* $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, son « *cône* » $\hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) = (\hat{c}(\alpha), \Delta)$, est le R-*mdg* défini par

$$\hat{c}(\alpha) := B \oplus A[1] \quad \text{et} \quad \Delta(b,a) = (d_B b + \alpha(a), -d_A a)\,.$$

On note alors $j : \mathcal{B} \to \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha)$ l'injection $j(b) := (b,0)$, et $p : \hat{\boldsymbol{c}}(u) \to \mathcal{A}[1]$ la projection $p(b,a) := a$. On a ainsi le triangle de R-*mdg*'s

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) \xrightarrow{p} \mathcal{A}[1]\,. \tag{Eq.5}$$

— *Triangle distingué.* On appelle ainsi tout triangle de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$,

$$\mathcal{X} \xrightarrow{u} \mathcal{Y} \xrightarrow{v} \mathcal{Z} \xrightarrow{w} \mathcal{X}[1]\,,$$

isomorphe à un triangle de la forme (Eq.5), *i.e.* tel qu'il existe un triplet (f,g,h) d'isomorphismes de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{X} & \xrightarrow{u} & \mathcal{Y} & \xrightarrow{v} & \mathcal{Z} & \xrightarrow{w} & \mathcal{X}[1] \\
{\scriptstyle f}\downarrow{\scriptstyle\sim} & & {\scriptstyle g}\downarrow{\scriptstyle\sim} & & {\scriptstyle h}\downarrow{\scriptstyle\sim} & & {\scriptstyle f[1]}\downarrow{\scriptstyle\sim} \\
\mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{B} & \xrightarrow{j} & \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) & \xrightarrow{p} & \mathcal{A}[1]
\end{array}$$

pour un certain α.

1.2.13. Proposition. *La catégorie $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, munie de cette classe de triangles distingués, est une catégorie triangulée.*

Démonstration. **(TR1)** résulte de vérifier que $\hat{\boldsymbol{c}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}}) = 0$ dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Ceci équivaut à montrer que $\mathrm{id}_{\hat{\boldsymbol{c}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}})} = 0$ dans $\mathrm{Hotgr}_R(\hat{\boldsymbol{c}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}}))$. Or, si nous notons

$$h : \big(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}[1]\big) \to \big(\mathcal{X}[-1] \oplus \mathcal{X}\big)\,, \quad h(x,x') = (0,x)\,,$$

on a bien

$$\big(h\Delta + \Delta h\big)(x,x') = h(dx + x', -dx') + (x, -dx) = (x,x')$$

(TR2) Soit $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme de R-*mdg*'s et soit

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) \xrightarrow{p} \mathcal{A}[1]$$

le triangle (exact) associé au cône de α. Nous devons montrer que le triangle

$$\mathcal{B} \xrightarrow{\ j\ } \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) \xrightarrow{\ p\ } \mathcal{A}[1] \xrightarrow{-\alpha[1]} \mathcal{B}[1]$$

est aussi exact. Pour cela, nous montrons qu'il est isomorphe au triangle associé au cône de j.

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\ j\ } & \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) & \xrightarrow{\ p\ } & \mathcal{A}[1] & \xrightarrow{-\alpha[1]} & \mathcal{B}[1] \\ \| & & \| & \mathbf{I} & \varphi \uparrow\downarrow \phi & \mathbf{II} & \| \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\ j\ } & \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) & \xrightarrow{\ j'\ } & \hat{\boldsymbol{c}}(j) & \xrightarrow{\ p'\ } & \mathcal{B}[1] \end{array} \tag{Eq.6}$$

où la différentielle de $\hat{\boldsymbol{c}}(j) = \big((B \oplus A[1]) \oplus B[1], \Delta\big)$ est par définition

$$\Delta(b, a', b') = (db + \alpha(a') + b', -da', -db')\,. \tag{Eq.7}$$

et où le morphisme

$$\varphi : A[1] \to \hat{c}(j) = (B \oplus A[1]) \oplus B[1]\,, \quad \varphi = (0 \oplus \mathbf{1}_{A[1]}) \oplus -\alpha[1]$$

est bien un morphisme de R-mdg's de $\mathcal{A}[1]$ vers $\hat{\boldsymbol{c}}(j)$, puisque

$$\Delta(\varphi(a')) = \Delta(0, a', -\alpha(a')) = (\alpha(a') - \alpha(a'), -da', d\alpha(a')) = \varphi(da')$$

d'après (Eq.7).

Avec ces définitions, le diagramme (Eq.6) est commutatif. Cela est évident pour le sous-diagramme **II**. Pour le sous-diagramme **I**, cela résulte de ce que $j' - \varphi \circ p : \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) \to \hat{\boldsymbol{c}}(j)$ est homotope à zéro. En effet, $h : \hat{c}(\alpha) \to \hat{c}(j)[-1]$, définie par $(b, a') \mapsto (0, 0, b)$, donne l'homotopie voulue :

$$\begin{aligned}(\Delta \circ h + h \circ \Delta)(b, a') &= (b, 0, -db) + (0, 0, db + \alpha(a')) = (b, 0, \alpha(a')) \\ &= (j' - \varphi \circ p)(b, a')\,.\end{aligned}$$

L'application

$$\phi : \hat{c}(j) = B \oplus A[1] \oplus B[1] \to A[1]\,, \quad (b, a', b') \mapsto a'\,,$$

est un morphisme de R-mdg's de $\hat{\boldsymbol{c}}(j)$ vers $\mathcal{A}[1]$ d'après (Eq.7), et c'est un inverse homotopique de φ. En effet, l'égalité $\phi \circ \varphi = \mathrm{id}_{A[1]}$ est immédiate, et la composée $\varphi \circ \phi$ vérifie

$$(1 - \varphi \circ \phi)(b, a', b') = (b, a', b') - (0, a', -\alpha(a')) = (b, 0, b' + \alpha(a'))\,.$$

Or, si nous posons

$$h : B \oplus A[1] \oplus B[1] \to B[-1] \oplus A \oplus B\,, \quad (b, a', b') \mapsto (0, 0, b)\,,$$

on a l'homotopie

$$\begin{aligned}(\Delta \circ h + h \circ \Delta)(b, a', b') &= (b, 0, -db) + (0, 0, db + \alpha(a') + b') \\ &= (1 - \varphi \circ \phi)(b, a', b')\end{aligned}$$

qui montre que ϕ est bien inverse homotopique de φ.

On a prouvé que si (u, v, w) est un triangle distingué, $(v, w, -u[1])$ l'est aussi. En itérant, $(w, -u[1], -v[1])$ est exact. Par ailleurs, on montre aisément que si (u, v, w) est exact, $(u, -v, -w)$ et $(-u[-1], v[-1], w[-1])$ le sont aussi. Par conséquent, si $(w, -u[1], -v[1])$ est exact $(-w[-1], u, v)$ l'est aussi.

(TR3) Étant donné un diagramme de morphismes de R-*mdg*'s

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{B} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathcal{A}' & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{B}' \end{array} \qquad (*)$$

commutatif à homotopie près, *i.e.* tel qu'il existe un morphisme de R-modules gradués $h : A \to B'[-1]$ vérifiant

$$g\,\alpha - \alpha'\,f = h\,d_A + d_{B'}\,h\,,$$

on le complète par les cônes de α et α', ce qui donne le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{j} & B \oplus A[1] & \xrightarrow{p} & A[1] \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & \mathbf{I} & {\scriptstyle \varphi}\downarrow & \mathbf{II} & \downarrow{\scriptstyle f[1]} \\ A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{j'} & B' \oplus A'[1] & \xrightarrow{p'} & A'[1] \end{array} \qquad (*)$$

où l'on a posé $\varphi(b, \dot{a}) = (g(b) + h(\dot{a}), f(\dot{a}))$, de sorte que

$$\begin{aligned} \varphi D(b, \dot{a}) &= \varphi\big(d(b) + \alpha(\dot{a}), -d(\dot{a})\big) \\ &= \big(gd(b) + g\alpha(\dot{a}) - hd(\dot{a}), -fd(\dot{a})\big) \\ &= \big(dg(b) + \alpha' f(\dot{a}) + dh(\dot{a}), -df(\dot{a})\big) = D\varphi(b, \dot{a})\,, \end{aligned}$$

et φ est un morphisme de R-*mdg*'s de $\hat{\boldsymbol{c}}(\alpha)$ vers $\hat{\boldsymbol{c}}(\alpha)'$.

Comme les sous-diagrammes **I** et **II** de $(*)$ sont trivialement commutatifs dans la catégorie des R-*mdg*'s, cette construction fournit bien le morphisme de triangles demandé par (TR3).

(TR4) On suit la démarche décrite dans 1.1.1. La construction du paragraphe précédent, appliquée au diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{u} & \mathcal{Y} \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{u'} & \mathcal{Y}' \end{array} \qquad gu - u' = d_{Y'} \circ h + h \circ d_X$$

supposé commutatif modulo l'homotopie $h : X[1] \to Y'$, nous conduit au diagramme commutatif de R-*mg*'s

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j} & Y \oplus X[1] \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \oplus & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ Y' & \xrightarrow{j'} & Y' \oplus X[1]\,, \end{array} \qquad \varphi(y,\dot{x}) = (g(y) + h(\dot{x}), \dot{x})$$

où φ est un morphisme de R-mdg's de $\hat{\boldsymbol{c}}(u)$ vers $\hat{\boldsymbol{c}}(u')$. Ce diagramme induit alors le morphisme de R-mdg's

$$j'' : \hat{\boldsymbol{c}}(g) \to \hat{\boldsymbol{c}}(\varphi)\,, \quad \psi(y', \dot{y}) = (y', 0, \dot{y}, 0)\,.$$

Soit $\psi : \hat{\boldsymbol{c}}(\varphi) \to \hat{\boldsymbol{c}}(g)$ l'application

$$\begin{array}{ccc} \hat{\boldsymbol{c}}(\varphi) = Y' \oplus X[1] \oplus Y[1] \oplus X[2] & \xrightarrow{\psi} & Y' \oplus Y[1] = \hat{\boldsymbol{c}}(g) \\ (y' \ , \quad \dot{x} \quad , \quad \dot{y} \quad , \quad \ddot{x}) & \longmapsto & \big(y' - h(\dot{x}), \dot{y} + u(\dot{x})\big) \end{array}$$

Elle vérifie, d'une part

$$\begin{aligned} &\psi D\big((y', \dot{x}), (\dot{y}, \ddot{x})\big) \\ &\quad = \psi\big(D(y', \dot{x}) + \varphi(\dot{y}, \ddot{x}), -D(\dot{y}, \ddot{x})\big) \\ &\quad = \psi\big(dy' + u'\dot{x} + g\dot{y} + h\ddot{x}, -d\dot{x} + \ddot{x}, -d\dot{y} - u\ddot{x}, d\ddot{x}\big) \\ &\quad = \big((dy' + u'\dot{x} + g\dot{y} + h\ddot{x}) - h(-d\dot{x} + \ddot{x}), (-d\dot{y} - u\ddot{x}) + u(-d\dot{x} + \ddot{x})\big) \\ &\quad = \big(dy' + u'\dot{x} + g\dot{y} + hd\dot{x}, -d\dot{y} - ud\dot{x}\big) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} &D\psi\big((y', \dot{x}), (\dot{y}, \ddot{x})\big) \\ &\quad = D\big((y' - h\dot{x}, \dot{y} + u\dot{x}\big) = \big(dy' - dh\dot{x} + g\dot{y} + gu\dot{x}, -d(\dot{y} + u\dot{x})\big) \end{aligned}$$

de sorte que $\psi \circ D = D \circ \psi$, et ψ est bien un morphisme de R-mdg's.

Le morphisme ψ est l'inverse homotopique de j''. En effet, l'égalité $\psi \circ j'' = \mathrm{id}$ est immédiate, et $j'' \circ \psi$ vérifie

$$(1 - j'' \circ \psi)(y', \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}) = (h\dot{x}, \dot{x}, -u\dot{x}, \ddot{x})\,,$$

mais, si l'on définit

$$H : Y' \oplus X[1] \oplus Y[1] \oplus X[2] \to Y'[-1] \oplus X \oplus Y \oplus X[1]$$

par $H(y', \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}) := (0, 0, 0, \dot{x})$, on a

$$(HD + DH)(y', \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}) = (h\dot{x}, \dot{x}, -u\dot{x}, \ddot{x})$$

de sorte de $j'' \circ \psi = 1$ dans $\mathrm{Hotgr}_R(\hat{\boldsymbol{c}}(\varphi), \hat{\boldsymbol{c}}(\varphi))$, ce qui termine la vérification de (TR4). □

1.2.14. Remarque et proposition. La vérification de l'axiome (TR2) dans la démonstration précédente a montré

a) *Pour tout morphisme de R-mdg's $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{j} & \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) & \xrightarrow{p} & \mathcal{A}[1] & \xrightarrow{-\alpha[1]} & \mathcal{B}[1] \\ \| & & \| & & \varphi\downarrow\uparrow\phi & & \| \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{j} & \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) & \xrightarrow{j'} & \hat{\boldsymbol{c}}(j) & \xrightarrow{p'} & \mathcal{B}[1] \end{array}$$

où $\varphi(a') = (0, a', -\alpha(a'))$ et $\phi(b, a', b') = a'$, est une équivalence de triangles exacts de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

b) *La donnée d'un triangle distingué $\mathcal{A} \xrightarrow{u} \mathcal{B} \xrightarrow{v} \mathcal{C} \xrightarrow{w} \mathcal{A}[1]$ détermine des isomorphismes canoniques dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$:*

$$\mathcal{A}[1] \cong \hat{\boldsymbol{c}}(v)\,, \quad \mathcal{B}[1] \cong \hat{\boldsymbol{c}}(w)\,, \quad \mathcal{C} \cong \hat{\boldsymbol{c}}(u)\,.$$

1.2.15. Foncteurs cohomologiques. On rappelle qu'on appelle ainsi, tout foncteur $\mathcal{F} : Tr \to Ab$ d'une catégorie triangulée vers une catégorie abélienne, tel que pour tout triangle distingué $\mathcal{X} \xrightarrow{u} \mathcal{Y} \xrightarrow{v} \mathcal{Z} \xrightarrow{w} \mathcal{X}[1]$, la suite

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{Z}[-1]) \xrightarrow{\mathcal{F}(w[-1])} \mathcal{F}\mathcal{X} \xrightarrow{\mathcal{F}u} \mathcal{F}\mathcal{Y} \xrightarrow{\mathcal{F}v} \mathcal{F}\,\mathcal{Z} \xrightarrow{\mathcal{F}w} \mathcal{F}(\mathcal{X}[1]) \longrightarrow \cdots$$

est un complexe exact.

1.2.16. Proposition. *Le foncteur $\mathrm{H} : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$ qui fait correspondre à $\mathcal{M} = (M, d_M)$ sa cohomologie $\mathrm{H}(\mathcal{M}) := \ker(d_M)/\operatorname{im}(d_M)$, commute au foncteur de translation et c'est un foncteur cohomologique. En particulier, si $\mathcal{X} \xrightarrow{u} \mathcal{Y} \xrightarrow{v} \mathcal{Z} \xrightarrow{w} \mathcal{X}[1]$ est un triangle distingué, la suite de R-mg's*

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}\,\mathcal{Z}[-1] \xrightarrow{\mathrm{H}\,w[-1]} \mathrm{H}\,\mathcal{X} \xrightarrow{\mathrm{H}\,u} \mathrm{H}\,\mathcal{Y} \xrightarrow{\mathrm{H}\,v} \mathrm{H}\,\mathcal{Z} \xrightarrow{\mathrm{H}\,w} \mathrm{H}\,\mathcal{X}[1] \longrightarrow \cdots$$

est un complexe exact.

Démonstration. Résulte du fait que les triangles exacts dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ correspondent aux cônes de morphismes de R-*mdg*'s. □

1.2.17. Example. Les foncteurs suivants, introduits dans 1.2.7,

$$\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{M}, _), \mathrm{Hotgr}^*_R(_, \mathcal{M}) : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$$

sont des foncteurs cohomologiques.

1.2.18. La catégorie $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Notons $\mathcal{S}$ la classe des morphismes de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ qui induisent un isomorphisme en cohomologie, *i.e.* la classe de ses quasi-isomorphismes. On a

(FR1) Si $f, g \in \mathcal{S}$, et si fg est défini, alors $fg \in \mathcal{S}$. Évident.

(FR2) Étant donné $f : \mathcal{W} \to \mathcal{Y}$ et $s : \mathcal{W} \to \mathcal{X}$, avec $s \in \mathcal{S}$,

le diagramme $\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{s} & \mathcal{X} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ \mathcal{Y} & & \end{array}$ se complète en un diagramme commutatif $\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{s} & \mathcal{X} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow[t]{} & \mathcal{Z} \end{array}$

avec $t \in \mathcal{S}$. Et de même avec les flèches inversées.

En effet, dans le premier cas, il suffit d'appliquer les axiomes (TR-1,2,3) pour justifier le diagramme de triangles exacts

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{\boldsymbol{c}}(s)[-1] & \xrightarrow{w} & \mathcal{W} & \xrightarrow{s} & \mathcal{X} & \longrightarrow & \hat{\boldsymbol{c}}(s) \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \vdots{\scriptstyle g} & & \| \\ \hat{\boldsymbol{c}}(s)[-1] & \xrightarrow{f\circ w} & \mathcal{Y} & \xrightarrow{t} & \mathcal{Z} = \hat{\boldsymbol{c}}(f\circ u) & \longrightarrow & \hat{\boldsymbol{c}}(s) \end{array}$$

où $t \in \mathcal{S}$ puisque $\hat{\boldsymbol{c}}(s)$ est acyclique ([2]). Le cas des flèches inversées se traite de manière entièrement analogue.

(FR3) Pour $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ donné, il y a équivalence entre les assertions suivantes.

i) Il existe $s \in \mathcal{S}$ tel que $fs = 0$, ii) Il existe $t \in \mathcal{S}$ tel que $tf = 0$.

En effet, dans (i), complétons le diagramme de R-*mdg*'s

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{s} & \mathcal{Y} \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ & & \mathcal{Y}' \end{array}$$

2. On prendra garde du fait que la somme amalgamée de R-*mdg*'s
$$\mathcal{Z} = \mathcal{Y} \oplus_{\mathcal{W}} \mathcal{X} := (\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})/\{(f(w), s(w)) \mid w \in \mathcal{W}\}$$
ne donne pas toujours la bonne réponse pour (FR2). En effet, on peut montrer que dans le diagramme de gauche ci-dessous, le morphisme i_1 est un quasi-isomorphisme lorsque s ou f est injectif, mais des contrexemples existent autrement, par exemple, dans le diagramme de droite ci-dessous où A et B sont des R-modules gradués non nuls, on a $(B/A) \oplus_{\mathcal{W}} A = 0$ et i_1 n'est pas un quasi-isomorphisme.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{s} & \mathcal{X} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle i_2}\downarrow \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{Y} \oplus_{\mathcal{W}} \mathcal{X} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{W} := (A \hookrightarrow B) & \xrightarrow[p_{B/A}]{s} & (B/A) \\ {\scriptstyle p_A}\downarrow {\scriptstyle f} & & {\scriptstyle i_2}\downarrow \\ A & \xrightarrow{i_1} & A \oplus_{\mathcal{W}} (B/A) = 0 \end{array}$$

en un diagramme de triangles exacts

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{X} & \xrightarrow{s} & \mathcal{Y} & \xrightarrow{j} & \hat{\boldsymbol{c}}(s) & \longrightarrow & \mathcal{X}[1] \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \vdots{\scriptstyle u} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{Y}' & = & \mathcal{Y}' & \longrightarrow & 0[1] \\
 & & & & \vdots{\scriptstyle t} & & \\
 & & & & \hat{\boldsymbol{c}}(u) & & \\
 & & & & \vdots & & \\
 & & & & \hat{\boldsymbol{c}}(s)[1] & &
\end{array}$$

maintenant, comme s est un quasi-isomorphisme et que le foncteur cohomologie $H : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$ est cohomologique (1.2.16), le R-*mdg* $\hat{\boldsymbol{c}}(s)$ est acyclique ce qui implique, pour la même raison, que t est un quasi-isomorphisme. Or, $tf = tuj = 0$. L'implication (ii)⇒(i) se démontre de manière analogue.

1.2.19. Proposition. *Les propriétés* (FR-1,2,3) *ci-dessus font de* $\mathcal{S}$ *un système multiplicatif de* $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. *Notons* $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)_{\mathcal{S}}$ *la catégorie obtenue de* $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ *en inversant ses quasi-isomorphismes. Notons*

$$\boldsymbol{Q} : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)_{\mathcal{S}}$$

le foncteur canonique de « localisation ». Alors

a) *Il existe une et une seule structure triangulée sur* $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)_{\mathcal{S}}$ *qui fait de* $\boldsymbol{Q}$ *un* δ*-foncteur,* i.e. *transforme triangle distingué en triangle distingué.*

b) $\boldsymbol{Q}(s)$ *est un isomorphisme pour tout* $s \in \mathcal{S}$.

c) *Tout foncteur* G *de* $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ *vers une catégorie* D, *tel que* $G(s)$ *est inversible pour tout* $s \in \mathcal{S}$, *se factorise à travers* $\boldsymbol{Q}$.

Démonstration. C'est la proposition 3.2 de [H] (page 32), elle résulte de montrer que $\mathcal{S}$ est compatible à la triangulation de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, *i.e.* les deux axiomes suivants sont vérifiés

— (FR4) $\mathcal{S}$ est stable par le foncteur de translation.

— (FR5) Si dans un morphisme de triangles exacts, deux morphismes sont dans $\mathcal{S}$, le troisième l'est aussi.

Propriétés clairement satisfaites dans notre cas. □

1.2.20. Définition. La catégorie $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) := \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)_{\mathcal{S}}$ est appelée la « *catégorie dérivé* » de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

2. R-mdg's projectifs

2.1. *R-mdg* simple associé à un complexe de *R-mdg*'s

2.1.1. Foncteur « *R-mdg simple associé* ». Soit

$$(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) := \left(\cdots \longrightarrow \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\epsilon_2} \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{M}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{M}_{-1} \xrightarrow{\epsilon_{-1}} \cdots \right)$$

un complexe de R-*mdg*'s. On pose dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\begin{cases} \Sigma\,\mathcal{M}_\bullet := \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} M_m[m] \\ d_\Sigma\,|_{M_m} := (-1)^m d_m + \epsilon_m \end{cases} \qquad \begin{array}{c} M_m[m][1] \dashrightarrow \bullet \\ {\scriptstyle d_m[m]}\uparrow \qquad\qquad \uparrow \\ M_m[m] \xrightarrow{\epsilon_m} (M_{m-1}[m-1])[1] \end{array}$$

De même, si $\alpha_\bullet : (\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) \to (\mathcal{M}'_\bullet, \epsilon'_\bullet)$ est un morphisme de complexes de R-*mdg*'s, on pose

$$\Sigma\,\alpha_\bullet : \Sigma\,\mathcal{M}_\bullet \to \Sigma\,\mathcal{M}'_\bullet\,,$$

le morphisme de R-*mg*'s $\Sigma\,\alpha_\bullet = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_m$.

Le lemme suivant relève de vérifications élémentaires que nous n'explicitons pas.

2.1.2. Lemme et définitions

a) *Le couple* $\left(\Sigma\,\mathcal{M}_\bullet, d_\Sigma\right)$ *est un* R-*mdg, c'est «* le R-*mdg* simple associé au complexe $(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ *».*

b) *Si* $\alpha_\bullet : (\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) \to (\mathcal{M}'_\bullet, \epsilon'_\bullet)$ *est un morphisme de complexes de* R-mdg*'s,*

$$\Sigma\,\alpha_\bullet : \Sigma(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) \to \Sigma(\mathcal{M}'_\bullet, \epsilon'_\bullet)$$

est un morphisme de R-mdg*'s.*

c) *Dans* (b)*, soit* $\{h_m : \mathcal{M}_m \to \mathcal{M}_{m+1} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ *une famille de morphismes de* R-mdg*'s réalisant une homotopie entre deux morphismes de complexes de* R-mdg*'s* $\alpha_\bullet, \beta_\bullet : (\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) \to (\mathcal{M}'_\bullet, \epsilon'_\bullet)$, i.e. *on a*

$$\alpha_m - \beta_m = \epsilon_{m+1} \circ h_m + h_{m-1} \circ \epsilon_m\,, \quad \forall m \in \mathbb{Z}\,,$$

alors, le morphisme de R-mg*'s*

$$\Sigma\,h_\bullet : \Sigma\,\mathcal{M}_\bullet \to \Sigma\,\mathcal{M}_\bullet[-1]\,, \quad \Sigma\,h_\bullet := \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} h_m\,,$$

est une homotopie entre $\Sigma\,\alpha_\bullet$ *et* $\Sigma\,\beta_\bullet$

d) *Le foncteur «* R-*mdg* simple associé *» est la correspondance*

$$\Sigma : \mathcal{C}^*\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,,$$

de la catégorie $\mathcal{C}^*\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ *des* complexes *de* R-mdg*'s, vers la catégorie de* R-mdg*'s. C'est un foncteur covariant, additif, exact et compatible aux homotopies.*

2.1.3. Qestions d'acyclicité du *R-mdg* simple associé. Nous rappelons dans ce paragraphe et les suivants des constructions et résultats bien connus pour les complexes d'objets d'une catégorie abélienne, en les transposant dans le contexte des *R-mdg*'s.

2.1.4. Proposition

a) *Pour tout complexe* ***exact*** $(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ *de R-mdg's de différentielles nulles,* i.e. *tels que* $d_{\mathcal{M}_k} = 0$, *le R-mdg* $\Sigma(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ *est acyclique.*

b) *Pour tout complexe de R-mdg's borné supérieurement*

$$(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) = \left(\cdots \longrightarrow \mathcal{M}_{\ell+2} \xrightarrow{\epsilon_{\ell+2}} \mathcal{M}_{\ell+1} \xrightarrow{\epsilon_{\ell+1}} \mathcal{M}_\ell \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \cdots \right),$$

où les $\mathcal{M}_k$ *sont* ***acycliques****, le R-mdg* $\Sigma(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ *est acyclique.*

c) *Pour tout complexe* ***exact*** *de R-mdg's borné inférieurement*

$$(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) = \left(\cdots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{M}_\ell \xrightarrow{\epsilon_\ell} \mathcal{M}_{\ell-1} \xrightarrow{\epsilon_{\ell-1}} \mathcal{M}_{\ell-2} \xrightarrow{\epsilon_{\ell-2}} \cdots \right),$$

le R-mdg $\Sigma(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ *est acyclique.*

d) *Pour tout complexe de R-mdg's borné supérieurement et inférieurement*

$$(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) = \left(\cdots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{M}_m \xrightarrow{\epsilon_m} \cdots \xrightarrow{\epsilon_{\ell+1}} \mathcal{M}_\ell \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \cdots \right),$$

qui est ou bien exact, ou bien tel que les $\mathcal{M}_i$ *sont acycliques, le R-mdg* $\Sigma(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ *est acyclique.*

Démonstration. Montrons (b). Un élément $\overline{x} \in \Sigma(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ de degré $m \in \mathbb{Z}$ se décompose de manière unique sous la forme

$$\overline{x} = x_a \oplus x_{a-1} \oplus \cdots \oplus x_\ell\,, \quad \text{avec} \quad x_i \in M_i^{i+m}\,,$$

et, de même,

$$d_\Sigma(\overline{x}) = d'_a x_a \oplus \left(\epsilon_a x_a + d'_{a-1} x_{a-1}\right) \oplus \cdots \oplus \left(\epsilon_1 x_1 + d'_\ell x_\ell\right),$$

où nous avons noté $d'_a = (-1)^a d_{\mathcal{M}_a}$ et où $\left(\epsilon_i x_i + d'_{i-1} x_{i-1}\right) \in M_{i-1}^{i+m}$. Par conséquent, si $\overline{x}$ est un cocycle, l'égalité $d_\Sigma(\overline{x}) = 0$ implique que $d'_a x_a = 0$, et comme $\mathcal{M}_a$ est supposé acyclique, il existe $y_a \in M_a^{a+m-1}$ tel que $d'_a(y_a) = x_a$. On voit donc que le cocycle $\overline{x}$ est cohomologue à $\overline{x} - d_\Sigma(y_a)$ qui s'écrit sous la forme

$$\overline{x} - d_\Sigma(y_a) = w_{a-1} \oplus x_{a-2} \oplus \cdots \oplus x_\ell\,, \quad \text{avec} \quad w_i \in M_i^{i+m}\,.$$

Ainsi, de proche en proche, on montre que tout cocycle de $\Sigma(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ est cohomologue à un cocycle de $\mathcal{M}_{\ell-1} = \mathbf{0}$. □

2.1.5. Troncatures bêtes. Étant donnés des entiers $m \geq \ell$ et un complexe de R-*mdg*'s $(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$, on notera $\mathcal{M}_{m,\ell}$ le complexe

$$\mathcal{M}_{m,\ell} := \big(0 \to \mathcal{M}_m \xrightarrow{\epsilon_m} \mathcal{M}_{m-1} \xrightarrow{\epsilon_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\epsilon_{\ell-1}} \mathcal{M}_\ell \to 0\big)$$

De même, si $\alpha_\bullet : (\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) \to (\mathcal{M}'_\bullet, \epsilon'_\bullet)$ est un morphisme de complexes, on note $\alpha_{m,\ell} = \mathcal{M}_{m,\ell} \to \mathcal{M}_{m,\ell}$ le morphisme de complexes qui vaut α_i sur M_i est s'annule ailleurs, soit

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{M}_{m,\ell} := \big(0 \to & \mathcal{M}_m & \xrightarrow{\epsilon_m} & \mathcal{M}_{m-1} & \xrightarrow{\epsilon_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\epsilon_{\ell-1}} & \mathcal{M}_\ell & \to 0\big) \\
{\scriptstyle \alpha_{m,\ell}}\downarrow & {\scriptstyle \alpha_m}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha_{m-1}}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha_\ell}\downarrow & \\
\mathcal{M}'_{m,\ell} := \big(0 \to & \mathcal{M}'_m & \xrightarrow{\epsilon'_m} & \mathcal{M}'_{m-1} & \xrightarrow{\epsilon'_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\epsilon'_{\ell-1}} & \mathcal{M}'_\ell & \to 0\big)
\end{array}$$

on obtient ainsi le foncteur de « *troncature bête* »

$$(_)_{m,\ell} : \mathcal{C}^* \operatorname{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathcal{C}^* \operatorname{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$$

clairement exact.

On défini de manière analogue les foncteurs $(_)_{+\infty,m}$ et $(_)_{\ell,-\infty}$.

Notation. Pour tout complexe de R-*mdg*'s $(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, on note

$$\mathcal{M}_{\geq m} := \Sigma\, \mathcal{M}_{+\infty,m}\,, \quad \mathcal{M}_{\leq m} := \Sigma\, \mathcal{M}_{m,-\infty}\,,$$

et de même pour les troncatures des morphismes.

2.1.6. Morphisme de connexion et quasi-isomorphismes Pour tout complexe de R-*mdg*'s $(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ et $m \in \mathbb{Z}$ donnés, on a les morphismes suivants entre les troncatures bêtes :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{M}_{m-1,-\infty} & & & & & & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m-1} & \xrightarrow{\epsilon_{m-1}} & \mathcal{M}_{m-2} & \xrightarrow{\epsilon_{m-2}} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \iota_{m-1,-\infty}} & & & & & & \downarrow & & \| & & \| & & \\
\mathcal{M}_\bullet & \cdots \longrightarrow & \mathcal{M}_{m+2} & \xrightarrow{\epsilon_{m+2}} & \mathcal{M}_{m+1} & \xrightarrow{\epsilon_{m+1}} & \mathcal{M}_m & \xrightarrow{\epsilon_m} & \mathcal{M}_{m-1} & \xrightarrow{\epsilon_{m-1}} & \mathcal{M}_{m-2} & \xrightarrow{\epsilon_{m-2}} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_{\infty,m}} & & \| & & \| & & \| & & \downarrow & & & & \\
\mathcal{M}_{\infty,m} & \cdots \longrightarrow & \mathcal{M}_{m+2} & \xrightarrow{\epsilon_{m+2}} & \mathcal{M}_{m+1} & \xrightarrow{\epsilon_{m+1}} & \mathcal{M}_m & \longrightarrow & \mathbf{0} & & & &
\end{array}$$

donnant la suite exacte courte de complexes de R-*mdg*'s

$$\mathbf{0} \to \mathcal{M}_{m-1,-\infty} \xrightarrow{\iota_{m-1,-\infty}} \mathcal{M}_\bullet \xrightarrow{\pi_{\infty,m}} \mathcal{M}_{\infty,m} \to \mathbf{0}$$

clairement scindée dans $\operatorname{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, de même que la suite de R-*mdg*'s

$$\mathbf{0} \to \Sigma\, \mathcal{M}_{m-1,-\infty} \xrightarrow{\iota_{m-1,-\infty}} \Sigma\, \mathcal{M}_\bullet \xrightarrow{\pi_{\infty,m}} \Sigma\, \mathcal{M}_{\infty,m} \to \mathbf{0}\,.$$

On en déduit le triangle distingué de R-*mdg*'s (*cf.* 4.1.1)

$$\Sigma\, \mathcal{M}_{m-1,-\infty} \xrightarrow{\iota_{m-1,-\infty}} \Sigma\, \mathcal{M}_\bullet \xrightarrow{\pi_{\infty,m}} \Sigma\, \mathcal{M}_{\infty,m} \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}_m} \Sigma\, \mathcal{M}_{m-1,-\infty}[1]$$

où $\widetilde{\epsilon}_m$ est le morphisme de « *connexion* » associé au morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m+2} & \xrightarrow{\epsilon_{m+2}} & \mathcal{M}_{m+1} & \xrightarrow{\epsilon_{m+1}} & \mathcal{M}_m & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_m} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m-1} & \xrightarrow{\epsilon_{m-1}} & \mathcal{M}_{m-2} & \xrightarrow{\epsilon_{m-2}} & \mathcal{M}_{m-3} & \xrightarrow{\epsilon_{m-3}} & \cdots
\end{array}$$

La proposition suivante sera souvent utilisée sans référence.

2.1.7. Proposition. *Avec les données en cours, le morphisme de R-mdg's*

$$\mathcal{M}_{\geq m} \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}_m} \mathcal{M}_{\leq m-1}[1]$$

est un quasi-isomorphisme si, et seulement si, $\sum(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ est acyclique.

2.2. La paire adjointe $(\mathcal{F}, \mathrm{Z})$

2.2.1. Le foncteur $\mathcal{F} : \mathbf{Mod^{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbf{Diff^{gr}}(R)$. Si M est un R-module gradué, on note $\mathcal{F}(M) := (M, D_{\mathcal{F}})$ le R-module gradué M muni de la différentielle nulle, *i.e.* $D_{\mathcal{F}} = 0$. Si $\beta : M \to N$ est un morphisme mg's, on note $\mathcal{F}(\beta) : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$, le morphisme $x \mapsto \beta x$. La correspondance ainsi définie

$$\mathcal{F}(_) = (_, 0) : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$$

est clairement fonctorielle et exacte.

2.2.2. Le foncteur $\mathrm{Z} : \mathbf{Diff^{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbf{Mod^{gr}}(R)$. Si $\mathcal{M} = (M, d_M)$ est un R-*mdg*; on note $\mathrm{Z}(\mathcal{M})$ le sous-R-*mg* des cocycles, *i.e.* $\mathrm{Z}(\mathcal{M}) := \ker(d_M)$, et si $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est un morphisme de R-*mdg*'s, on note $\mathrm{Z}(\alpha) := \alpha|_{\mathrm{Z}(\mathcal{M})}$. Il est immédiat de constater, que la donnée d'un morphisme de R-*mdg*'s $\alpha : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{N}$ équivaut à la donnée d'un morphisme de R-*mg*'s $\alpha : M \to \mathrm{Z}(\mathcal{N})$, de sorte que :

Lemme. *La paire de foncteurs $(\mathcal{F}, \mathrm{Z})$ est adjointe.*

Remarque. On voit ainsi que $\mathcal{F}(M)$ à peu de chances d'être un R-*mdg* projectif, même si M est projectif, car $\mathrm{Z}(_)$ n'est pas exact.

2.3. La paire adjointe $(\mathcal{E}, \mathrm{o})$

2.3.1. Foncteur « *oubli* » $\mathrm{o} : \mathbf{Diff^{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbf{Mod^{gr}}(R)$. C'est le foncteur

$$\mathrm{o} : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,, \quad \mathcal{N} = (N, d_N) \rightsquigarrow N\,,$$

qui oublie la différentielle. Il s'agit clairement d'un foncteur exact.

2.3.2. Le foncteur $\mathcal{E} : \mathbf{Mod^{gr}(}R\mathbf{)} \rightsquigarrow \mathbf{Diff^{gr}(}R\mathbf{)}$. Si M est un R-module gradué, on note $\mathcal{E}(M)$ le R-module gradué $\varepsilon(M) := M[-1] \oplus M$ muni de la différentielle $D_{\mathcal{E}} : \varepsilon(M) \to \varepsilon(M)$, $D_\varepsilon(x, y) = (y, 0)$. Si $\beta : M \to N$ est un morphisme *mg*'s, on note $\varepsilon(\beta) : \varepsilon(M) \to \varepsilon(N)$ (resp. $\mathcal{E}(\beta) : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(N)$), le morphisme $(x, y) \mapsto (\beta x, \beta y)$. Les correspondances ainsi définies

$$\varepsilon(_) : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,, \quad \mathcal{E}(_) = (\varepsilon(_), D_\varepsilon) : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$$

sont clairement fonctorielles et exactes. On notera

$$[_] : \mathrm{id}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)}(_) \to \varepsilon(_)$$

l'inclusion naturelle définie par $[M] := \{0\} \oplus M \subseteq M[-1] \oplus M = \varepsilon(M)$.

2.3.3. Lemme. *Les R-mdg's $\mathcal{E}(M)$ sont homotopiquement nuls.*

Démonstration. Soit $h : \varepsilon(M) \to \varepsilon(M)[-1]$, $(x, y) \mapsto (y, 0)$. On a

$$(D_\varepsilon\, h + h\, D_\varepsilon)(x, y) = (0, y) + (x, 0)\,,$$

ce qui montre que $\mathrm{id}_{\mathcal{E}(M)}$ est homotope à 0. □

2.3.4. Morphismes d'adjonction. Un morphisme $\alpha : (\varepsilon(M), D_\varepsilon) \to (N, d_N)$ de R-*mdg*'s est entièrement déterminé par sa restriction à $[M]$, puisque l'on a $\varepsilon(M) = D_\varepsilon([M]) \oplus [M]$ et qu'alors

$$\alpha(x, y) = \alpha(D_\varepsilon(0, x) + (0, y)) = d_N(\alpha(0, x)) + \alpha(0, y).$$

Cette correspondance $\alpha \mapsto \alpha|_{[M]}$, donne ainsi lieu à un isomorphisme naturel

$$\Phi_{M,(N,d_N)} : \mathrm{Mor}_{\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}\big((\varepsilon(M), D_\varepsilon), (N, d_N)\big) \cong \mathrm{Homgr}_R(M, N)$$

et aux morphismes d'adjonction

$$\begin{cases} \mathrm{ad}_{(N,d_N)} : (\varepsilon(N), D_\varepsilon) \twoheadrightarrow (N, d_N)\,, \ \mathrm{ad}_{(N,d_N)} := \Phi^{-1}_{N,(N,d_N)}(\mathrm{id}_N) \\ \mathrm{ad}_M : M \hookrightarrow \varepsilon(M)\,, \ \mathrm{ad}_M := \Phi_{M,(\varepsilon(M),D_\varepsilon)}(\mathrm{id}_{(\varepsilon(M),D_\varepsilon)}) \end{cases}$$

2.4. Existence de *R-mdg*'s projectifs

2.4.1. Théorème

a) *Le couple $(\mathcal{E}, \mathrm{o})$ est une paire de foncteurs adjoints. En particulier, $\mathcal{E}$ respecte la projectivité et* 'o' *respecte l'injectivité. Le morphisme d'adjonction* $\mathrm{ad}_{\mathcal{N}} : \mathcal{E}(\mathrm{o}(\mathcal{N})) \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ *est surjectif.*

b) *Désignons par 'Q' un R-*mg *projectif. Tout R-*mdg *est quotient d'un $\mathcal{E}(Q)$. Tout R-*mdg *projectif est de la forme $\mathcal{E}(Q)$, et est homotopiquement nul. Le foncteur* 'o' *respecte la projectivité.*

c) *La catégorie* $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ *possède suffisamment de projectifs. Plus précisément, tout* R*-mdg* $\mathcal{N}$ *admet une résolution projective, et toutes ses résolutions projectives sont de la forme*

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{E}(Q_m) \xrightarrow{\epsilon_m} \cdots \longrightarrow \mathcal{E}(Q_0) \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{N} \to 0$$

avec Q_i *projectif dans* $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$*, et chaque* $\mathcal{E}(Q_i)$ *homotopiquement nul.*

d) *Si* R *est de dimension globale finie*[3]*, pour tout* R*-mdg* $\mathcal{M}$ *il existe un quasi-isomorphisme surjectif* $\mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$*, avec* $\mathrm{o}(\mathcal{Q})$ *projectif.*

Démonstration

a) Ces propriétés sont claires d'après les préliminaires 2.3.4 et puisque les foncteurs $\mathcal{E}$ et 'o' sont exacts.

b) Si $\mathcal{N} = (N, d_N)$ est un R*-mdg*, et si $\pi : Q \twoheadrightarrow N$ une surjection de R*-mg*'s avec Q projectif dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, la composée des surjections

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}(Q) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\pi)} & \mathcal{E}(N) & \xrightarrow{\mathrm{ad}(\mathcal{N})} & \mathcal{N} \\ & \searrow^{\mathrm{ad}(\mathcal{N})\circ\mathcal{E}(\pi)} & & & \uparrow\!\uparrow \\ & & & & \end{array}$$

réalise $\mathcal{N}$ comme quotient de $\mathcal{E}(Q)$, qui est projectif d'après (a). Supposons maintenant que $\mathcal{N}$ est un R*-mdg* projectif. La surjection $\mathrm{ad}(\mathcal{N}) \circ \mathcal{E}(\pi)$ est alors scindée, et $\mathcal{N}$ est facteur direct de $\mathcal{E}(Q)$ dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.On en déduit aussitôt que

— Le R*-mdg* $\mathcal{N}$ est acyclique.
— Le R*-mg* $\mathrm{im}(d_N)$ est facteur direct de $\mathrm{im}(D_\varepsilon) = Q[-1] \oplus \{0\}$ et est donc projectif. Le R*-mg* N se décompose alors en $N = B \oplus Z$, telle que $\delta : B \to \mathrm{im}(d_N)[1]$, $x \mapsto d_N(x)$, est un isomorphisme (B est donc projectif), et telle que $Z = \ker(d_N)$.
— L'inclusion $B \subseteq N$ induit, via $\Phi_{B,\mathcal{N}}$ (2.3.4), un morphisme canonique $\mathcal{E}(B) \to \mathcal{N}$ qui est un isomorphisme, car $\ker(d_N) = \mathrm{im}(d_N)$.
— $\mathcal{E}(B)$ est homotopiquement trivial d'après 2.3.3.
— $\mathrm{o}(\mathcal{N}) = B[-1] \oplus B$ est bien un R*-mg* projectif.

c) Évident d'après la question précédente.

3. On rappelle que pour tout anneau commutatif $\boldsymbol{A}$ (gradué) et tout $\boldsymbol{A}$-module (gradué) M, on appelle « *dimension projective de* M », notée $\dim_{\mathrm{proj}}(M)$, la longueur minimale des résolutions projectives de M. La « *dimension globale de* $\boldsymbol{A}$ », notée $\dim_{\mathrm{gb}}(\boldsymbol{A})$, est alors le sup des dimensions projectives des $\boldsymbol{A}$-modules (gradués).

d) Par (c), un R-*mdg* $\mathcal{N}$ admet résolutions projectives dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{P}_n \xrightarrow{\epsilon_n} \cdots \longrightarrow \mathcal{P}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{P}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \!\!\!\rightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

et nous savons déjà que $\mathrm{o}(\mathcal{P}_n) \twoheadrightarrow \mathrm{o}(\mathcal{N})$ est une résolution projective dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$. Par conséquent, $\mathrm{o}(\ker(\epsilon_n))$ est projectif si $n \geq \dim_{\mathrm{gb}}(R)$, et alors la suite

$$0 \longrightarrow \ker(\epsilon_n) \longrightarrow \mathcal{P}_n \xrightarrow{\epsilon_n} \cdots \longrightarrow \mathcal{P}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{P}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \!\!\!\rightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathbf{0}$$

est une résolution de longueur finie de $\mathcal{N}$ par des R-*mdg*'s qui sont des R-*mg*'s projectifs. Le morphisme canonique

$$\sum \big(\mathbf{0} \to \ker(\epsilon_n) \to \mathcal{P}_n \to \cdots \to \mathcal{P}_0 \to \mathbf{0}\big) \xrightarrow{\Sigma\,\epsilon} \mathcal{N}\,,$$

où $\sum(B^*_\bullet)$ désigne le R-*mdg* simple associé au bicomplexe $B^*_\bullet$ (2.1), et où $\sum \epsilon|_{\mathcal{P}_0} := \epsilon_0$ et est nul sur les autres termes, satisfait les conditions demandées. □

3. Présentations projectives de *R-mdg*'s

3.1. Résolutions projectives et présentations projectives

Le théorème 2.4.1 montre dans son assertion (c) que tout R-*mdg* $\mathcal{M}$ admet des résolutions $\cdots \mathcal{P}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{P}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \!\!\!\rightarrow \mathcal{M}$, où chaque $\mathcal{P}_m$ est un R-*mdg* projectif. Ces résolutions sont des objets de la catégorie $\mathcal{C}^*(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R))$ des *complexes* de R-*mdg*'s, et nous pouvons envisager de revenir à la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ en appliquant le foncteur « *R-mg's simple associé* » introduit dans 2.1

$$\textstyle\sum : \mathcal{C}^*\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,,$$

ce qui donne le morphisme induit

$$\textstyle\sum \epsilon : \sum \mathcal{P}_\bullet \twoheadrightarrow \mathcal{M}$$

défini par $\sum \epsilon|_{\mathcal{P}_0} := \epsilon_0$ et 0 ailleurs. Cette procédure simple et naturelle n'est pourtant d'aucun intérêt dans la mesure où $\sum \mathcal{P}_\bullet$ est un R-*mdg* acyclique d'après 2.4.1-(b) et 2.1.4-(b) (et homotopiquement nul par 3.2.1-(a)). Nous avons cependant remarqué dans la preuve de 2.4.1-(d) que les complexes simples associés aux troncatures intelligentes du complexe $\mathcal{P}_\bullet$ sont bien quasi-isomorphes à $\mathcal{M}$. Lorsque $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est de dimension projective finie d et que la troncature intelligente se fait au delà de d, cette procédure fournit un représentant de la classe de quasi-isomorphie de $\mathcal{M}$ dont le R-*mg* sous-jacent est projectif. Cette observation justifie la définition suivante.

3.1.1. Définition. On appellera « *présentation projective* » d'un R-*mdg* $\mathcal{N}$, tout quasi-isomorphisme *surjectif* de R-*mdg*'s $\mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$, tel que $\mathrm{o}(\mathcal{Q})$ est un R-*mg* projectif.

3.1.2. Remarque. La terminologie peut être trompeuse dans la mesure où dans une présentation projective $\mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$, le R-*mdg* $\mathcal{Q}$ n'est généralement pas projectif dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. En fait, c'est le cas si, et seulement si, $\mathcal{N}$ est acyclique d'après 2.4.1-(b).

3.1.3. Remarques sur l'existence de présentations projectives. L'assertion (d) du théorème 2.4.1 précédent, montre que des présentations projectives existent lorsque R est de dimension globale finie. Lorsque ce n'est pas le cas, des présentations projectives existent néanmoins toujours pour des R-*mdg*'s $\mathcal{N} = (N, d_N)$ acycliques, puisque dans ce cas, la surjection $\epsilon_0 : \mathcal{E}(Q_0) \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ de 2.4.1-(c) est déjà un quasi-isomorphisme. Un autre cas important est celui où dans le R-*mdg* (N, d_N), on a $d_N = 0$. Dans ce cas, si

$$\cdots \longrightarrow L_n \xrightarrow{\epsilon_n} \cdots \longrightarrow L_2 \xrightarrow{\epsilon_2} L_1 \xrightarrow{\epsilon_1} L_0 \xrightarrow{\epsilon_0} N \to \mathbf{0}$$

est une résolution projective dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, on note $Q := \bigoplus_{m\geq 0} L_m[m]$, et l'on définit $d_Q : Q \to Q[1]$ de la manière suivante

$$\begin{cases} d_Q(L_0) = 0\,, \\ d_Q\,|_{L_m[m]} := \big(\epsilon_m : L_m[m] \to (L_{m-1}[m-1])[1]\big)\,, \text{ si } m > 0. \end{cases}$$

Le couple $\mathcal{Q} = (Q, d_Q)$ n'est autre que le R-*mdg* simple associé au complexe $(\mathcal{L}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ où $\mathcal{L}_m = (L_m, 0)$ (*cf.* 2.1), et le morphisme $\widetilde{\epsilon}_0 : \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$, nul sur L_m pour $m > 0$ et qui vaut ϵ_0 sur L_0 est alors clairement un quasi-isomorphisme de R-*mdg*'s (*cf.* 2.1.4-(csa-acyclique-a)) et c'est donc une présentation projective de $\mathcal{N}$.

3.2. Théorème fondamental des présentations projectives

L'intérêt principal des présentations projectives réside pour l'essentiel dans l'assertion (d) du théorème suivant.

3.2.1. Théorème. *On suppose R de dimension globale finie.*

a) *Les R-mdg $\mathcal{Q}$ acycliques avec $\mathrm{o}(\mathcal{Q})$ projectif, sont les projectifs de la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, ils sont nuls dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

b) *Un quasi-isomorphisme de R-mdg $\alpha : \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_2$, avec $\mathrm{o}(\mathcal{Q}_i)$ projectif, est un isomorphisme dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

c) *Soient $\pi_i : \mathcal{Q}_i \twoheadrightarrow \mathcal{N}_i$, $i = 1, 2$, deux présentations projectives. Pour tout morphisme $\alpha : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$, il existe un morphisme $\tilde{\alpha} : \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_2$ rendant le diagramme suivant commutatif dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Un tel morphisme $\tilde{\alpha}$ est unique dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, il sera appelé « le relèvement de α ».*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}_1 & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{N}_1 \\ {\scriptstyle\tilde{\alpha}}\vdots & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ \mathcal{Q}_2 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{N}_2 \end{array}$$

Étant donné des présentations projectives $\pi_i : \mathcal{Q}_i \twoheadrightarrow \mathcal{N}_i$, $i = 1, 2, 3$, et des morphismes $\mathcal{N}_1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{N}_2 \xrightarrow{\alpha_2} \mathcal{N}_3$, on a $\widetilde{\alpha_2 \circ \alpha_1} = \widetilde{\alpha_2} \circ \widetilde{\alpha_1}$ dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

En particulier, une présentation projective est unique à isomorphisme canonique près dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

d) *Notons $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ dont les objets sont les R-mdg $\mathcal{Q}$ avec $\mathrm{o}(\mathcal{Q})$ projectif. La restriction*

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{proj}} : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$$

du foncteur $\boldsymbol{Q} : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ (1.2.19), est une équivalence de catégories. Pour toute réalisation fonctorielle des présentations projectives $(\widetilde{_}) : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$, on a $\boldsymbol{Q} \cong \boldsymbol{Q}_{\mathrm{proj}} \circ (\widetilde{_})$.

Démonstration

a) Si $\mathcal{Q} = (Q, d_Q)$ est acyclique, on a la suite exacte courte de R-*mg*'s :

$$\mathbf{0} \to \ker(d_Q) \longrightarrow Q \xrightarrow{d_Q} \ker(d_Q)[1] \to 0 \qquad (*)$$

et si Q est projectif, on en déduit l'équivalence

$$\mathrm{Extgr}^i_R\left(\ker(d_Q), _\right) \cong \mathrm{Extgr}^{i+1}_R\left(\ker(d_Q)[1], _\right), \quad \forall i > 0.$$

Par itération, $\mathrm{Extgr}^i_R\left(\ker(d_Q), _\right) \cong \mathrm{Extgr}^{i+m}_R\left(\ker(d_Q)[m], _\right)$, et comme R est supposé de dimension globale finie, on a

$$\mathrm{Extgr}^i_R\left(\ker(d_Q), _\right) = 0, \quad \forall i > 0,$$

et $\ker(d_Q)$ est un R-*mg* projectif. La suite $(*)$ est donc scindée dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$. Soit $\sigma : \ker(d_Q)[1] \to Q$ une section de d_Q et notons $K = \mathrm{im}(\sigma)$. Le R-*mg* K est projectif et l'on a $Q = \ker(d_Q) \oplus K = K[-1] \oplus K$, par conséquent (Q, d_Q) s'identifie canoniquement à $(\varepsilon(K), D_\varepsilon)$ (2.3.2) qui est un projectif de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et est homotopiquement nul (2.4.1-(b)).

b) Le diagramme de triangles exacts de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{P}_1 & = & \mathcal{P}_1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{P}_1[1] \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow & & \| \\
\mathcal{P}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{P}_2 & \longrightarrow & \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) & \longrightarrow & \mathcal{P}_1[1]
\end{array}$$

est commutatif puisque $\hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) = 0$ d'après (a). Le morphisme α (vertical) est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ puisqu'il est encadré par des isomorphismes dans un morphisme de triangles exacts.

c) On part du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{K}_{\mathcal{P}} & \hookrightarrow & \mathcal{P}_r & \xrightarrow{\epsilon_r} & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{P}_1 & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{P}_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & \mathcal{N}_1 \\
 & & & & & & & & & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\
\mathcal{K}_{\mathcal{R}} & \hookrightarrow & \mathcal{R}_r & \xrightarrow{\rho_r} & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\rho_1} & \mathcal{Q}_2 & \xrightarrow[\text{q.i.}]{\pi_2} & \mathcal{N}_2
\end{array}$$

où $(\mathcal{P}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ et $(\mathcal{R}_\bullet, \rho_\bullet)$ sont des résolutions projectives respectivement de $\mathcal{N}_1$ et de $\ker(\pi_2)$ dans la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ (*cf.* 2.4.1-(c)), tronquées en $r = \dim_{\mathrm{gb}}(R)$ pour garantir que $\mathrm{o}(\mathcal{K}_{\mathcal{P}})$ et $\mathrm{o}(\mathcal{K}_{\mathcal{R}})$ sont des R-*mg*'s projectifs. La propriété universelle des résolutions projectives assure que α se relève en un morphisme de complexes de R-*mdg*'s $\alpha_\bullet$, unique à homotopie près. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{K}_{\mathcal{P}} & \hookrightarrow & \mathcal{P}_r & \xrightarrow{\epsilon_r} & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{P}_1 & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{P}_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & \mathcal{N}_1 \\
{\scriptstyle\alpha_{\mathcal{K}}}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_r}\downarrow & & & & {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\
\mathcal{K}_{\mathcal{R}} & \hookrightarrow & \mathcal{R}_r & \xrightarrow{\rho_r} & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\rho_1} & \mathcal{Q}_2 & \xrightarrow[\text{q.i.}]{\pi_2} & \mathcal{N}_2 \\
{\scriptstyle j_{\mathcal{K}}}\uparrow & & {\scriptstyle j_r}\uparrow & & & & {\scriptstyle j_1}\uparrow & & {\scriptstyle j_0=\mathrm{id}}\uparrow & & \|{\scriptstyle\mathrm{id}} \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{Q}_2 & \xrightarrow[\text{q.i.}]{\pi_2} & \mathcal{N}_2
\end{array}$$

Notons
$\sum(\mathcal{P}_\bullet)$: le complexe simple associé à $(0 \to \mathcal{K}_{\mathcal{P}} \to \cdots \to P_0 \to 0)$,
$\sum(\mathcal{R}_\bullet)$: celui associé à $(0 \to \mathcal{K}_{\mathcal{R}} \to \cdots \to \mathcal{R}_1 \to \mathcal{Q}_2 \to 0)$.
Nous obtenons le diagramme commutatif induit

$$\begin{array}{ccccc}
\ulcorner & - - \sum(\mathcal{P}_\bullet) & \xrightarrow[\text{q.i.}]{\epsilon_0} & \mathcal{N}_1 & \\
 & {\scriptstyle\sum(\alpha_\bullet)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & \\
{\scriptstyle(\alpha,\pi_2)_{\mathcal{P}}}\ \vdots & \sum(\mathcal{R}_\bullet) & \xrightarrow[\text{q.i.}]{\pi_2} & \mathcal{N}_2 & \\
 & {\scriptstyle\sum(j_\bullet)}\uparrow{\scriptstyle\text{q.i.}} & & \| & \\
\llcorner & - - \to \mathcal{Q}_2 & \xrightarrow[\text{q.i.}]{\pi_2} & \mathcal{N}_2 &
\end{array}$$

où $\sum(j_\bullet)$ est inversible dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ d'après (b). Le morphisme

$$(\alpha, \pi_2)_{\mathcal{P}} := \big(\textstyle\sum(j_\bullet)^{-1} \circ \sum(\alpha_\bullet)\big) : \sum(\mathcal{P}_\bullet) \longrightarrow \mathcal{Q}_2 \qquad (\diamond)$$

est une relèvement de α dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

Ces constructions, en remplaçant $\alpha : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ par $\mathrm{id}_{\mathcal{N}_1} : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_1$, fournissent de même un relèvement de $\mathrm{id}_{\mathcal{N}_1}$

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{N}_1}, \pi_1)_{\mathcal{P}} : \sum(\mathcal{P}_\bullet) \longrightarrow \mathcal{Q}_1 , \qquad (\diamond\diamond)$$

qui est un quasi-isomorphisme, donc inversible dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ par (b).

Le relèvement de $\alpha : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ cherché est alors donné par la composée

$$\tilde{\alpha} := (\alpha, \pi_2)_{\mathcal{P}} \circ (\mathrm{id}_{N_1}, \pi_1)_{\mathcal{P}}^{-1} : \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_2 .$$

Pour montrer l'unicité du relèvement, on est amené à montrer que, étant donné un diagramme commutatif dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}_1 & \xrightarrow[\text{q.i.}]{\pi_1} & \mathcal{N}_1 \\ {\scriptstyle\tilde{\alpha}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \mathcal{Q}_2 & \xrightarrow[\text{q.i.}]{\pi_2} & \mathcal{N}_2 \end{array}$$

où les lignes sont des présentations projectives, on a $\tilde{\alpha} = 0$ dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

Comme le morphisme $\tilde{\alpha}$ se factorise à travers $\hat{\boldsymbol{c}}(\pi_2)[-1]$ qui est acyclique, il suffit de monter que tout morphisme $\beta : \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ est acyclique, est nul dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Soit $\pi : \mathcal{K} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ une présentation projective, nous avons le relèvement $\tilde{\beta}$ de β

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}_1 & = & \mathcal{Q}_1 \\ {\scriptstyle\tilde{\beta}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \mathcal{K} & \xrightarrow[\text{q.i.}]{\pi} & \mathcal{N} \end{array}$$

et $\beta = \pi \circ \tilde{\beta} = 0$ puisque $\mathcal{K} = 0$ dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ d'après (a).

L'existence et l'unicité des relèvements implique aussitôt leur compatibilité avec la composition de morphismes.

d) L'assertion 2.4.1-(d) montre déjà que $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{proj}}$ est essentiellement surjectif. Soient maintenant $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ deux objets de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$. Un morphisme de $\mathcal{Q}_1$ vers $\mathcal{Q}_2$ dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ se représente sous la forme

$$\mathcal{Q}_1 \xleftarrow[\text{q.i.}]{s} \mathcal{N} \xrightarrow{f} \mathcal{Q}_2 ,$$

pour un certain $\mathcal{N}$. Si $\pi : \mathcal{R} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ est une présentation projective, on a

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{R} & & \\ & {\scriptstyle s\circ\pi}\swarrow & \Downarrow{\scriptstyle\pi} & \searrow{\scriptstyle f\circ\pi} & \\ \mathcal{Q}_1 & \xleftarrow{s} & \mathcal{N} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Q}_2 \end{array}$$

où les flèches doublées sont des quasi-isomorphismes. Mais alors, comme le quasi-morphisme $s \circ \pi$ est inversible dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$ d'après (b). On a l'égalité $f \circ s^{-1} = (f \circ \pi) \circ (s \circ \pi)^{-1}$ dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$, où $(f \circ \pi)$ et $(s \circ \pi)^{-1}$, et donc aussi $(f \circ s^{-1})$, appartiennent à $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$.

Ces remarques montrent que la localisation de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ par ses quasi-isomorphismes, n'a pas d'effet sur la sous-catégorie $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$, car elle y induit la localisation par ses propres isomorphismes. Le foncteur $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{proj}} : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ est donc pleinement fidèle. □

3.2.2. Remarques

a) On prendra garde du fait que dans la définition de la notion de présentation projective 3.1.1, on demande au morphisme $\mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ d'être surjectif, ce qui en fait une notion à l'intérieur de la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Dans l'assertion (c) du dernier théorème, les données de départ sont toutes dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, mais la conclusion, notamment la commutativité des diagrammes, est restreinte à la catégorie $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

b) Pour tout R-*mdg* $\mathcal{Q}$ on a les applications naturelles

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(\mathcal{Q},\mathcal{N}) \twoheadrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(\mathcal{Q},\mathcal{N}) \to \mathrm{Mor}_{\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(\mathcal{Q},\mathcal{N})\,.$$

La première est surjective par construction. La deuxième l'est aussi lorsque $\mathrm{o}(\mathcal{Q})$ est projectif (*cf.* preuve de 3.2.1-(d)), mais même dans ce cas, celle-ci n'est généralement pas injective si $\mathrm{o}(\mathcal{N})$ n'est pas projectif. Par exemple si $\mathcal{N}$ est acyclique non homotope à zéro (*cf.* 3.3.1) et que $\mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ est une présentation projective.

3.3. Le foncteur $\mathbb{D}\,\mathbf{Hotgr}^*_R(_,\mathcal{N})$

On suppose R de dimension globale finie. Soit $\mathcal{N}$ un R-*mdg* quelconque. Le foncteur $\mathrm{Homgr}^\bullet_R(_,\mathcal{N}) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, introduit dans 1.2.4, est additif, contravariant, respecte les homotopies et les cônes des morphismes, il induit donc un foncteur de catégories triangulées

$$\mathrm{Homgr}^\bullet_R(_,\mathcal{N}) : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,.$$

Un morphisme de R-*mdg* $\alpha : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, donne lieu à un triangle distingué

$$\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\hat{\boldsymbol{c}}\alpha,\mathcal{N}) \to \mathrm{Homgr}^\bullet_R(\mathcal{M},\mathcal{N}) \to \mathrm{Homgr}^\bullet_R(\mathcal{L},\mathcal{N}) \to \mathrm{Homgr}^\bullet_R(\hat{\boldsymbol{c}}\alpha,\mathcal{N})[1] \to$$

et, en passant en cohomologie (1.2.6,1.2.7), à une suite exacte longue

$$\longrightarrow \mathrm{Hotgr}^*_R(\hat{\boldsymbol{c}}(\alpha),\mathcal{N}) \longrightarrow \mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{M},\mathcal{N}) \longrightarrow \mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{L},\mathcal{N}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hotgr}^*_R(\hat{\boldsymbol{c}}(\alpha),\mathcal{N})[1] \longrightarrow$$

Par conséquent, pour que le foncteur

$$\mathrm{Hotgr}^*_R(_,\mathcal{N}) : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$$

transforme quasi-isomorphisme en isomorphisme, il faut et il suffit, que pour tout *R-mdg* $\mathcal{A}$ acyclique, on ait $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{A},\mathcal{N}) = \mathbf{0}$. Ceci est vrai lorsque $\mathcal{A}$ est homotope à zéro, par exemple si $\mathrm{o}(\mathcal{A})$ est projectif (*cf.* 3.2.1-(a)), mais ce n'est pas toujours le cas.

3.3.1. Un contrexemple classique. Soient $R = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{N}, \mathcal{A} \in \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(\mathbb{Z})$:

$$\mathcal{N} := \Sigma(\mathbf{0} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \to \mathbf{0}) \quad \text{et} \quad \mathcal{A} := \Sigma(\mathbf{0} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(2) \to \mathbf{0})\,,$$

puis

$$\begin{array}{lcccccc} \mathcal{A} & = \Sigma\big(\mathbf{0} \to & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & \mathbb{Z}/(2) \to \mathbf{0}\big) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow \\ \mathcal{N} & = \Sigma\big(\mathbf{0} \to & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0}\big) \end{array}$$

Alors
- Le $\mathbb{Z}$-*mdg* $\mathcal{N}$ est tel que $\mathrm{o}(\mathcal{N})$ est un $\mathbb{Z}$-*mg* libre.
- $\mathcal{A}$ est acyclique, mais n'est pas homotope à zéro, donc $\mathcal{A} \neq \mathbf{0}$ dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{A} = \mathbf{0}$ dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(\mathbb{Z})$.
- Le morphisme de complexes α n'est pas homotope à zéro.

3.3.2. Définition. Le contrexemple montre que le foncteur $\mathrm{Hotgr}^*_R(_,\mathcal{N})$, qui est bien défini sur $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, ne se factorise pas à travers la localisation $\boldsymbol{Q} : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. On définit alors, pour tout *R-mdg* $\mathcal{N}$, le foncteur

$$\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^*_R(_,\mathcal{N}) : \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \qquad \text{(Eq.8)}$$

par

$$\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{M},\mathcal{N}) := \mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{P},\mathcal{N})\,,$$

où $\mathcal{P} \to \mathcal{M}$ est une présentation projective de $\mathcal{M}$.

3.3.3. Lemme

a) *Le foncteur* $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^*_R(_,\mathcal{N})$ *est un foncteur cohomologique (*cf. *1.2.15).*

b) *Si* $\mathrm{o}(\mathcal{N})$ *est projectif, on a* $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^k_R(_,\mathcal{N}) = \mathrm{Mor}_{\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(_,\mathcal{N}[k])$.

Indication. Pour (a), si nous notons

$$\boldsymbol{G}_{\mathcal{N}}(_) : \mathrm{Homgr}^\bullet_R(_,\mathcal{N}) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,,$$

on a $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^*_R(_,\mathcal{N}) = \mathrm{H}^*\,\mathbb{D}\,\boldsymbol{G}_{\mathcal{N}}(_)$ par construction. □

3.3.4. Le foncteur $\mathbb{D}\operatorname{Hotgr}^*_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{F}(_), \boldsymbol{N})$. Pour tout R-mg N, on note

$$\mathbb{D}\operatorname{Hotgr}^*_R(_, N) : \mathbb{D}\operatorname{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \operatorname{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \qquad \text{(Eq.9)}$$

le foncteur $\mathbb{D}\operatorname{Hotgr}^*_R(\mathcal{M}, N) := \mathbb{D}\operatorname{Hotgr}^*_R(\mathcal{M}, \mathcal{F}N)$.

Soit M un R-mg, et soit $P_\star \xrightarrow{\epsilon} M$ une résolution projective de R-mg. Le morphisme $\sum \mathcal{F}P_\star \xrightarrow{\mathcal{F}\tilde{\epsilon}_0} \mathcal{F}M$, est une présentation projective de $\mathcal{F}M$ (3.1.3), on a donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{D}\operatorname{Hotgr}^k_R(\mathcal{F}M, N) = \mathrm{H}^k \operatorname{Homgr}^\bullet_R(\textstyle\sum P_\star, N)\,.$$

Or, $\operatorname{Homgr}^k_R\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} P_n[n], N\right) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Homgr}^0_R(P_n, N[k-n])$, de sorte que le passage en cohomologie fait apparaître les différents $\operatorname{Extgr}^n_R(M, N[k-n])$. La proposition suivante en découle.

3.3.5. Proposition. *Avec les données en cours, notons*

$$\boldsymbol{G}^*_N(_) := \mathbb{D}\operatorname{Hotgr}^*_R(\mathcal{F}(_), N) : \operatorname{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \operatorname{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,.$$

a) *On a* $\boldsymbol{G}^k_N(_) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Extgr}^n_R(_, N[k-n])$.

b) *Si $\alpha : M_1 \to M_2$ est un morphisme de R-mg's, le morphisme $\boldsymbol{G}^k_N\,\alpha$ est*

$$\boldsymbol{G}^k_N\,\alpha = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \left(\operatorname{Extgr}^n_R(M_2, N[k-n]) \xrightarrow{\alpha^n_k} \operatorname{Extgr}^n_R(M_1, N[k-n])\right),$$

où α^n_k désigne le morphisme naturel entre Extgr.

c) *Si $\mathbf{0} \to M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \to \mathbf{0}$ est une suite exacte courte de R-mg's, on a une suite exacte longue de R-mg's :*

$$\longrightarrow \boldsymbol{G}^k_N\,M_3 \xrightarrow{\boldsymbol{G}^k_N\,\beta} \boldsymbol{G}^k_N\,M_2 \xrightarrow{\boldsymbol{G}^k_N\,\alpha} \boldsymbol{G}^k_N\,M_1 \xrightarrow{c_k} \boldsymbol{G}^{k+1}_N\,M_3 \longrightarrow$$

où le morphisme de connexion $c_k : \boldsymbol{G}^k_N\,M_1 \to \boldsymbol{G}^{k+1}_N\,M_3$ est

$$c_k := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \left(\operatorname{Extgr}^n_R(M_1, N[k-n]) \xrightarrow{c^n_k} \operatorname{Extgr}^{n+1}_R(M_3, N[k-n])\right),$$

où c^n_k désigne le morphisme de connexion naturel entre Extgr.

3.3.6. Remarque. La démarche de cette section 3.3 s'applique aussi au foncteur covariant

$$\boldsymbol{F}_{\mathcal{M}}(_) := \operatorname{Hotgr}^*_R(\mathcal{M}, _) : \mathbb{K}\operatorname{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \to \operatorname{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,,$$

à ceci près que lorsque $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est projectif, $\boldsymbol{F}$ transforme quasi-isomorphismes en isomorphismes (*cf.* 5.2.7) contrairement à 3.3.1, on n'a donc pas besoin, dans ce cas, de dériver $\boldsymbol{F}$ pour lui donner un sens sur $\mathbb{D}\operatorname{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Dans le

cas général, si $\mathcal{P} \to \mathcal{M}$ et $\mathcal{Q} \to \mathcal{N}$ sont des présentations projectives, on a le morphisme canonique

$$\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}) = \mathrm{H}^*\,\mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(\mathcal{M},\mathcal{Q}) \to \mathrm{H}^*\,\mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = \mathrm{H}^*\,\mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(\mathcal{P},\mathcal{N}) = \mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^{*}_R(\mathcal{M},\mathcal{N})$$

qui est bijectif si $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est projectif, mais pas en général.

4. Suites exactes courtes et triangles distingués

4.1. Le cas des suites scindées dans $\mathbf{Mod}^{\mathrm{gr}}(\boldsymbol{R})$

On se donne une suite exacte courte de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\mathbf{0} \to (A, d_A) \xrightarrow{\iota} (B, d_B) \xrightarrow{\pi} (C, d_C) \to \mathbf{0}\,,$$

supposée scindée dans la catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$.

Pour toute section $\sigma : C \to B$ de π dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, le morphisme $\sigma\,\pi$ est un projecteur dans B et $1 - \sigma\,\pi$ est un projecteur d'image $\ker(\pi) = \mathrm{im}(\iota) \cong A$. On en déduit la *rétraction* $\rho := \iota^{-1}\,(1 - \sigma\,\pi) : B \twoheadrightarrow A$. On a ainsi deux suites exactes courtes dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\mathbf{0} \to A \underset{\rho}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} B \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} C \to \mathbf{0}$$

et les égalités

$$\rho\,\iota = \mathbf{1}_A\,, \quad \sigma\,\pi = \mathbf{1}_C\,, \quad \mathbf{1}_B = \iota\,\rho + \sigma\,\pi$$

4.1.1. Lemme. *Fixons une section $\sigma : C \hookrightarrow B$ de $\pi : B \twoheadrightarrow C$ dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

a) *Le morphisme de R-mg's $\gamma : C \to A$ défini par :*

$$\gamma := -\rho[1] \circ d_B \circ \sigma \qquad \begin{pmatrix} & B & \xleftarrow{\sigma} & C \\ & \downarrow{\scriptstyle d_B} & & \\ A[1] & \xleftarrow{\rho[1]} & B[1] & \end{pmatrix}$$

est un morphisme de R-mdg's $\gamma : (C, d_C) \to (A, d_A)[1]$. La classe d'homotopie de γ ne dépend pas du choix de la section σ de π.

b) *La suite $(A, d_A) \xrightarrow{\iota} (B, d_B) \xrightarrow{\pi} (C, d_C) \xrightarrow{\gamma} (A, d_A)[1]$ est un triangle distingué de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Plus précisément, soient*

$$\begin{cases} C \xrightarrow{\varphi} \hat{c}(\iota) = B \oplus A[1]\,, & \varphi(c) := (\sigma(c), \gamma(c)) \\ C \xleftarrow{\phi} \hat{c}(\iota) = B \oplus A[1]\,, & \phi(b, a') := \pi(b) \end{cases}$$

Alors, φ et ϕ sont des morphismes de R-mdg's, inverses l'un de l'autre dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} (A,d_A) & \xrightarrow{\iota} & (B,d_B) & \xrightarrow{\pi} & (C,d_C) & \xrightarrow{\gamma} & (A,d_A)[1] \\ \| & & \| & & \varphi\downarrow\uparrow\phi & & \| \\ (A,d_A) & \xrightarrow{\iota} & (B,d_B) & \xrightarrow{j} & \hat{\boldsymbol{c}}(\iota) & \xrightarrow{p} & (A,d_A)[1] \end{array} \tag{Eq.10}$$

est un isomorphisme (canonique) de triangles de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

Démonstration

a) L'égalité que nous devons prouver, soit $d_{A[1]}\circ\gamma = \gamma\circ d_C$, est équivalente à l'égalité $\iota\circ(-d_A)\circ\gamma = \iota\circ\gamma\circ d_C$, puisque ι est injective. Or, on a

$$\begin{aligned} -\,\iota\, d_A\,(\rho\, d_B\,\sigma) &= -\,d_B\,(\iota\,\rho)\,d_B\,\sigma \;\; = -\,d_B\,(\mathbf{1}-\sigma\,\pi)\,d_B\,\sigma \\ &= \;\; d_B\,\sigma\,(\pi\, d_B)\,\sigma = \;\; d_B\,\sigma\,(d_C\,\pi)\,\sigma = d_B\,\sigma\, d_C\,, \end{aligned}$$

et

$$\iota\,(\rho\, d_B\,\sigma)\, d_C = (\mathbf{1}-\sigma\,\pi)\, d_B\,\sigma\, d_C = d_B\,\sigma\, d_C\,.$$

On laisse aux soins du lecteur de vérifier que la classe d'homotopie de γ est bien indépendante du choix de la section σ de π.

b) Le morphismes φ et ϕ sont des morphismes de R-*mdg*'s car

$$\begin{cases} \Delta\circ\varphi = \Delta(\sigma,\gamma) = (d\sigma - \iota\rho d\sigma, -d\gamma) = (\sigma\, d, \gamma\, d) = \varphi\circ d\,, \\ \phi\circ\Delta(b,a') = \phi(db+\iota(a'), da') = \pi db = d\pi b = d\phi(b,a')\,. \end{cases}$$

On a $\phi\circ\varphi = \mathbf{1}_C$ trivialement. Pour étudier $1-\varphi\circ\phi : \hat{\boldsymbol{c}}(\iota)\to\hat{\boldsymbol{c}}(\iota)$, soit :

$$\begin{aligned} (1-\varphi\circ\phi)(b,a') &= (b-\sigma\pi(b), a'+\rho d\sigma\pi(b)) \\ &= (\iota\rho(b), a'+\rho d(b) - d\rho(b))\,, \end{aligned}$$

on introduit le morphisme de R-*mg*'s

$$h : B\oplus A[1]\to B[-1]\oplus A\,,\quad h(b,a') := (0,\rho(b))\,,$$

qui donne l'homotopie :

$$\begin{aligned} (\Delta\circ h + h\circ\Delta)(b,a') &= (\iota\rho(b), -d\rho(b)) + (0, \rho(db+\iota(a')) \\ &= (\iota\rho(b), -d\rho(b)+\rho db + a') \\ &= (1-\varphi\circ\phi)(b,a') \end{aligned}$$

et permet de conclure que $\phi = \varphi^{-1}$ dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

La dernière égalité réduit la vérification de la commutativité de (Eq.10) à celle φ. L'égalité $p\,\varphi = \gamma$ est immédiate, même dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, tandis que $\varphi\,\pi = j$ demande de contrôler que $j-\varphi\,\pi : B\to\hat{\boldsymbol{c}}(\iota)$ est homotope

à zéro. Or, si $h : B \to \hat{\mathbf{c}}(\iota)[-1] := B[-1] \oplus A$ est défini par $h = 0 \oplus \rho$, on a

$$\begin{aligned} j - \varphi\,\pi &= (1 - \sigma\,\pi, \rho\,d\,\sigma\,\pi) = (\iota\,\rho, \rho\,d\,(1 - \iota\,\rho)) \\ &= (\iota\,\rho, \rho\,d - d\,\rho) = h\,d + \Delta\,h\,. \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme. □

4.2. Le cas général

Reprenons la suite exacte des *R-mdg*'s de la section précédente

$$\mathbf{0} \to (A, d_A) \xrightarrow{\iota} (B, d_B) \xrightarrow{\pi} (C, d_C) \to \mathbf{0}\,,$$

et ne supposons pas que π admette des sections dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, mais seulement que (C, d_C) admet un relèvement projectif $p_C : (\widetilde{C}, d_{\widetilde{C}}) \twoheadrightarrow (C, d_C)$. Notons $(B, d_B) \oplus_{(C,d_C)} (\widetilde{C}, d_{\widetilde{C}})$ le produit fibré des *R-mdg*'s, *i.e.* le noyau dans la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ du morphisme $\pi \oplus p_C$:

$$\mathbf{0} \to (B \oplus_C \widetilde{C}, d) \dashrightarrow (B, d_B) \oplus (\widetilde{C}, d_{\widetilde{C}}) \xrightarrow{\pi \oplus p_C} (C, d_C) \to \mathbf{0}$$

Nous avons alors le morphisme des suites exactes courtes de *R-mdg*'s

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & \to & (A, d_A) & \xrightarrow{\iota_1} & (B, d_B) \underset{(C,d_C)}{\oplus} (\widetilde{C}, d_{\widetilde{C}}) & \xrightarrow{p_2} & (\widetilde{C}, d_{\widetilde{C}}) & \to & \mathbf{0} \\ & & \| & & \downarrow p_1 \quad \boxtimes & & \downarrow p_C & & \\ \mathbf{0} & \to & (A, d_A) & \xrightarrow{\iota} & (B, d_B) & \xrightarrow{\pi} & (C, d_C) & \to & \mathbf{0} \end{array} \qquad \text{(Eq.11)}$$

avec $\iota_1(a) = (\iota(a), 0)$, et où p_1 est un quasi-isomorphisme puisque p_C l'est, et où p_2 admet des sections dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, puisque $\widetilde{C}$ y est projectif.

L'assertion (b) du lemme 4.1.1 admet donc la généralisation suivante.

4.2.1. Proposition. *Étant donnée une suite exacte courte de R-mdg's*

$$\mathbf{0} \to (A, d_A) \xrightarrow{\iota} (B, d_B) \xrightarrow{\pi} (C, d_C) \to \mathbf{0}\,,$$

l'application $\phi : \hat{\mathbf{c}}(\iota) \to (C, d_C)$, $\phi(b, a') = \pi(b)$, est un morphisme de R-mdg's, et c'est aussi un quasi-isomorphisme.

Démonstration. L'application ϕ est bien un morphisme de *R-mdg*'s, car

$$\phi(D(b, \dot{a})) = \phi(db + \iota\dot{a}, -d\dot{a}) = \pi(db + \iota\dot{a}) = \pi(db) = d\phi(b, \dot{a})\,.$$

Ensuite, $\ker D = \{(b, \dot{a}) \mid db = -\iota\dot{a}\,,\ d\dot{a} = 0\}$, et le morphisme induit par ϕ

$$\mathrm{H}(\phi) : \frac{\ker(D)}{\mathrm{im}(D)} \longrightarrow \frac{\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}}{\mathcal{B}_{\mathcal{C}}}$$

est clairement surjectif. D'autre part, le noyau de $\mathrm{H}(\phi)$ est constitué des classes modulo $\mathrm{im}(D)$ des couples $(b, \dot{a})$, tels que $\pi(b) \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}}$, c'est-à-dire, tels

que $b \in dB + \iota(A[1])$. Or, $\mathrm{im}(D) = \{(db + \iota\dot{a}, -d\dot{a}) \mid b \in B\,,\ \dot{a} \in A[1]\}$, et le morphisme $\mathrm{H}(\phi)$ est donc bien bijectif. □

4.2.2. Remarque. Contrairement à la situation où π admet une section dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$ (4.1.1-(b)), le quasi-isomorphisme $\pi : \hat{\boldsymbol{c}}(\iota) \to (C, d_C)$ n'est généralement pas inversible dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, et il faudra passer à la catégorie dérivée $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ pour en faire un isomorphisme.

5. Relèvements projectifs simultanés de R-mdgr's

5.1. Le cas des complexes d'une catégorie abélienne

On désigne par $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne possédant suffisamment d'objets projectifs. On note $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes $\mathcal{M} := (M^*, d_*)$ de $\mathcal{A}$.

5.1.1. Les foncteurs $\mathbf{B}^m$, $\mathbf{Z}^m$, $\mathbf{H}^m$. Pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, on on dispose des foncteurs bien connus

$$\begin{cases} \mathrm{B}^m(_) : \mathcal{C}^*(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}\,, & \mathrm{B}^m\,\mathcal{M} := \mathrm{im}(d_{m-1}) \\ \mathrm{Z}^m(_) : \mathcal{C}^*(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}\,, & \mathrm{Z}^m\,\mathcal{M} := \ker(d_m) \\ \mathrm{H}^m(_) : \mathcal{C}^*(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}\,, & \mathrm{H}^m\,\mathcal{M} := \mathrm{Z}^m\,\mathcal{M} \big/ \mathrm{B}^m\,\mathcal{M} \end{cases}$$

dont on rappelle que lorsque ils sont appliqués à une suite exacte courte de complexes $\mathbf{0} \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to \mathcal{N} \to \mathbf{0}$, on a

— $\mathbf{0} \to \mathrm{Z}^m\,\mathcal{L} \to \mathrm{Z}^m\,\mathcal{M} \to \mathrm{Z}^m\,\mathcal{N} \to \mathbf{0}$ est exacte à gauche.
— $\mathbf{0} \to \mathrm{B}^m\,\mathcal{L} \to \mathrm{B}^m\,\mathcal{M} \to \mathrm{B}^m\,\mathcal{N} \to \mathbf{0}$ est exacte aux extrêmes.
— $\mathbf{0} \to \mathrm{H}^m\,\mathcal{L} \to \mathrm{H}^m\,\mathcal{M} \to \mathrm{H}^m\,\mathcal{N} \to \mathbf{0}$ est exacte aux centre.

5.1.2. Définition. On appellera « *relèvement projectif simultané* » d'un complexe de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{M} := (M^*, d_*) = \big(\cdots \to M^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} M^m \xrightarrow{d_m} M^{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \cdots\big)\,,$$

la donnée d'un morphisme de complexes de $\mathcal{P} := (P^*, d_*)$ vers $\mathcal{M} := (M^*, d_*)$,

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{P} = \big(\cdots & \to & P^{m-1} & \xrightarrow{d_{m-1}} & P^m & \xrightarrow{d_m} & P^{m+1} & \xrightarrow{d_{m+1}} & \cdots\big) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & {\scriptstyle\pi_{m-1}}\downarrow & & {\scriptstyle\pi_m}\downarrow & & {\scriptstyle\pi_{m+1}}\downarrow & & \\ \mathcal{M} = \big(\cdots & \to & M^{m-1} & \xrightarrow{d_{m-1}} & M^m & \xrightarrow{d_m} & M^{m+1} & \xrightarrow{d_{m+1}} & \cdots\big) \end{array}$$

tel que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, les morphismes induits par π

$$\begin{cases} \pi_m :\ P^m \ \twoheadrightarrow M^m\,, & \mathrm{B}^m\,\pi :\ \mathrm{B}^m\,\mathcal{P} \twoheadrightarrow\ \mathrm{B}^m\,\mathcal{M}\,, \\ \mathrm{Z}^m\,\pi :\ \mathrm{Z}^m\,\mathcal{P} \twoheadrightarrow\ \mathrm{Z}^m\,\mathcal{M}\,, & \mathrm{H}^m\,\pi :\ \mathrm{H}^m\,\mathcal{P} \twoheadrightarrow\ \mathrm{H}^m\,\mathcal{M}\,, \end{cases}$$

sont surjectifs de source projective, *i.e.* P^m, $\mathrm{B}^m\,\mathcal{P}$, $\mathrm{Z}^m\,\mathcal{P}$ et $\mathrm{H}^m\,\mathcal{P}$ sont tous projectifs dans $\mathcal{A}$.

5.1.3. Relèvements projectifs simultanés des suites exactes courtes. Étant donnée une suite exacte courte $\mathbf{0} \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to \mathbf{0}$ dans $\mathcal{A}$, et des surjections $p : \widetilde{A} \twoheadrightarrow A$ et $q : \widetilde{C} \twoheadrightarrow C$ avec $\widetilde{A}$ et $\widetilde{C}$ projectifs, on construit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & \to & \widetilde{A} & \xrightarrow{\iota_1} & \widetilde{A}\oplus\widetilde{C} & \xrightarrow{p_2} & \widetilde{C} & \to & \mathbf{0} \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle r} & \swarrow{\scriptstyle q'} & \downarrow{\scriptstyle q} & & \\ \mathbf{0} & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \to & \mathbf{0} \end{array} \tag{Eq.12}$$

avec

$$\iota_1 a := (a,0), \quad p_2(a,c) := c, \quad r(a,c) = \alpha\, p(a) + q'(c)\,,$$

où $q' : \widetilde{C} \to B$ vérifie $q = \beta \circ q'$, ce qui est possible puisque $\widetilde{C}$ est projectif. Le morphisme $r : \widetilde{A} \oplus \widetilde{C} \to B$ est clairement surjectif, et le morphisme de complexes (Eq.12) est un relèvement projectif simultané de la deuxième ligne.

5.1.4. Relèvement projectif simultané d'un complexe quelconque. Soit un complexe d'objets de $\mathcal{A}$

$$\mathcal{M} = \left(\cdots \to M^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} M^m \xrightarrow{d_m} M^{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \cdots\right),$$

notons $Z^m := \mathrm{Z}^m\,\mathcal{M}$, $B^{m+1} := \mathrm{B}^m\,\mathcal{M}$ et $H^m := \mathrm{H}^m\,\mathcal{M}$, et fixons des surjections à source projective

$$p_m : \widetilde{B}^m \twoheadrightarrow B^m \quad \text{et} \quad q_m : \widetilde{H}^m \twoheadrightarrow H^m\,.$$

Le diagramme (Eq.12) s'écrit maintenant :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & \widetilde{B}^m & \xrightarrow{\iota_1} & \widetilde{B}^m\oplus\widetilde{H}^m & \xrightarrow{p_2} & \widetilde{H}^m & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ & & \downarrow{\scriptstyle p_m} & & \downarrow{\scriptstyle r_m} & \swarrow{\scriptstyle q'_m} & \downarrow{\scriptstyle q_m} & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & B^m & \xrightarrow{\iota} & Z^m & \twoheadrightarrow & H^m & \longrightarrow & \mathbf{0} \end{array} \tag{Eq.13}$$

d'où la surjection à source projective $r_m : \widetilde{B}^m \oplus \widetilde{H}^m \twoheadrightarrow Z^m$ qui intervient, à son tour, dans le diagramme analogue :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & \widetilde{B}^m\oplus\widetilde{H}^m & \xrightarrow{\iota_{12}} & \widetilde{B}^m\oplus\widetilde{H}^m\oplus\widetilde{B}^{m+1} & \xrightarrow{p_3} & \widetilde{B}^{m+1} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ & & \downarrow{\scriptstyle r_m} & & \downarrow{\scriptstyle t_m} & \swarrow{\scriptstyle p'_{m+1}} & \downarrow{\scriptstyle p_{m+1}} & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & Z^m & \hookrightarrow & M^m & \twoheadrightarrow & B^{m+1} & \longrightarrow & \mathbf{0} \end{array} \tag{$\mathcal{D}_m$}$$

On recolle ensuite les diagrammes $(\mathcal{D}_{m-1})$ à $(\mathcal{D}_m)$ à l'aide du sous-diagramme commutatif de (Eq.13)

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{B}^m & \xrightarrow{\iota_1} & \widetilde{B}^m \oplus \widetilde{H}^m \\ {\scriptstyle p_m}\downarrow & \oplus & \downarrow{\scriptstyle r_m} \\ B^m & \xrightarrow{\iota} & Z^m \end{array}$$

pour construire le morphisme surjectif de complexes

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow \widetilde{B}^{m-1}\oplus\widetilde{H}^{m-1}\oplus\widetilde{B}^m & \xrightarrow[D_{m-1}]{} & \widetilde{B}^m\oplus\widetilde{H}^m\oplus\widetilde{B}^{m+1} & \xrightarrow[D_m]{} & \widetilde{B}^{m+1}\oplus\widetilde{H}^{m+1}\oplus\widetilde{B}^{m+2} \longrightarrow \\ {\scriptstyle t_{m-1}}\downarrow & & {\scriptstyle t_m}\downarrow & & {\scriptstyle t_{m+1}}\downarrow \\ \longrightarrow M^{m-1} & \xrightarrow{d_{m-1}} & M^m & \xrightarrow{d_m} & M^{m+1} \longrightarrow \end{array} \qquad \text{(Eq.14)}$$

où l'on a noté $D(x,y,z) := (z,0,0)$.

On remarquera que le passage en cohomologie des suites longues de (Eq.14) redonne la famille de surjections $\{q_m : \widetilde{H}^m \twoheadrightarrow H^m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de départ.

Simplifions maintenant les notations dans le diagramme (Eq.14), en posant

$$\begin{cases} \widetilde{M}^m := \widetilde{B}^m \oplus \widetilde{H}^m \oplus \widetilde{B}^{m+1}\,, & \widetilde{\mathcal{M}} := (\widetilde{M}^*, D_*) \\ \epsilon_* : \widetilde{M}^* \twoheadrightarrow M^*\,, & \epsilon_m := t_m \end{cases}$$

On a ainsi construit la suite exacte de complexes

$$\mathbf{0} \to \mathcal{K} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M} \to \mathbf{0} \qquad \text{(Eq.15)}$$

où $\mathcal{K} := \ker(\epsilon)$.

5.1.5. Lemme. *Avec les données en cours,*

a) *Le morphisme de complexes $\epsilon : \widetilde{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ est un relèvement projectif simultané de $\mathcal{M}$. De plus*
   — $\mathrm{B}^m\,\epsilon : \mathrm{B}^m\,\widetilde{\mathcal{M}} \to \mathrm{B}^m\,\mathcal{M}$, *coïncide avec* $p_m : \widetilde{B}^m \to B^m$,
   — $\mathrm{H}^m\,\epsilon : \mathrm{H}^m\,\widetilde{\mathcal{M}} \to \mathrm{H}^m\,\mathcal{M}$, *coïncide avec* $q_m : \widetilde{H}^m \to H^m$,

b) *La suite courte $\mathbf{0} \to \mathcal{F}(\mathcal{K}) \to \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon)} \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathbf{0}$ d'objets de $\mathcal{A}$, où $\mathcal{F}(_)$ désigne l'un quelconque des foncteurs $\mathrm{B}^m(_)$, $\mathrm{Z}^m(_)$, $\mathrm{H}^m(_)$, est exacte.*

Démonstration

a) Par construction.

b) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le foncteur $\mathrm{Z}^i(_)$ est exact à gauche sur une suite exacte courte de complexes. Dans le cas de la suite (Eq.15), il est aussi

exact à droite car ϵ_0 est un relèvement simultané. Cette exactitude, reportée dans le bicomplexe de colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathrm{B}^m\,\mathcal{K} & \longrightarrow & \mathrm{B}^m\,\widetilde{\mathcal{M}} & \longrightarrow & \mathrm{B}^m\,\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow\!\uparrow & & \uparrow\!\uparrow & & \uparrow\!\uparrow & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{K}^{m-1} & \hookrightarrow & \widetilde{\mathcal{M}}^{m-1} & \xrightarrow{\epsilon_{m-1}} & \mathcal{M}^{m-1} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathrm{Z}^{m-1}\,\mathcal{K} & \hookrightarrow & \mathrm{Z}^{m-1}\,\widetilde{\mathcal{M}} & \twoheadrightarrow & \mathrm{Z}^{m-1}\,\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbf{0}
\end{array}$$

implique l'exactitude de sa première ligne.

On considère ensuite le bicomplexe de colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathrm{H}^m\,\mathcal{K} & \longrightarrow & \mathrm{H}^m\,\widetilde{\mathcal{M}} & \longrightarrow & \mathrm{H}^m\,\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow\!\uparrow & & \uparrow\!\uparrow & & \uparrow\!\uparrow & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathrm{Z}^m\,\mathcal{K} & \hookrightarrow & \mathrm{Z}^m\,\widetilde{\mathcal{M}} & \twoheadrightarrow & \mathrm{Z}^m\,\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathrm{B}^m\,\mathcal{K} & \hookrightarrow & \mathrm{B}^m\,\widetilde{\mathcal{M}} & \twoheadrightarrow & \mathrm{B}^m\,\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbf{0}
\end{array}$$

où de nouveau, l'exactitude de la première ligne résulte de celle des deux autres, déjà établie. □

5.1.6. Décomposition des relèvements projectifs simultanés. Soit $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ la catégorie des familles d'objets de $\mathcal{A}$, notées $\boldsymbol{M} := \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, et dont les morphismes $\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ sont les familles $\{\alpha_i : M^i \to N^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de morphismes de $\mathcal{A}$ composés coordonnée par coordonnée. La catégorie $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est abélienne.

Nous nous intéressons aux foncteurs suivants :

— « ***oubli*** » $\mathbf{o} : \boldsymbol{\mathcal{C}^*\mathcal{A}} \rightsquigarrow \boldsymbol{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$
Il fait correspondre à (M^*, d_*), la famille $\boldsymbol{M} := \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ des objets sous-jacents, et de même pour les morphismes de complexes. Foncteur exact.

— $\mathbf{Z} : \boldsymbol{\mathcal{C}^*\mathcal{A}} \rightsquigarrow \boldsymbol{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$
Il fait correspondre à (M^*, d_*), la famille $\mathrm{Z}(M*, d_*) := \{\ker(d_i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$, et à un morphisme $\alpha_* : (M^*, d_*) \to (N^*, d_*)$ la famille des restrictions $\{\alpha_i|_{\ker(d_i)}\}$. Foncteur exact à gauche.

— $\boldsymbol{\mathcal{F}} : \boldsymbol{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}} \rightsquigarrow \boldsymbol{\mathcal{C}^*\mathcal{A}}$
Il fait correspondre à $\boldsymbol{M} = \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, le complexe $\mathcal{F}(\boldsymbol{M}) := (M^*, D_{\mathcal{F}})$, avec $D_{\mathcal{F}} = 0$, et à une famille de morphismes $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i : M^i \to N^i\}$, le morphisme de complexes $\mathcal{F}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathcal{F}(\boldsymbol{M}) \to \mathcal{F}(\boldsymbol{N})$, avec $\mathcal{F}(\boldsymbol{\alpha})_i = \alpha_i$. Foncteur exact.

– $\mathcal{E} : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightsquigarrow \mathcal{C}^*\mathcal{A}$

Il fait correspondre à $\boldsymbol{M} = \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, le complexe

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{M}) = (\mathcal{E}(\boldsymbol{M})^*, D_{\mathcal{E},*}) := \begin{cases} \mathcal{E}\boldsymbol{M}^i := M^{i-1} \oplus M^i \\ \Delta_{\mathcal{E},i}(x,y) \;=\; (y,0)\,. \end{cases}$$

et à une famille de morphismes $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i : M^i \to N^i\}$, le morphisme de complexes $\mathcal{E}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathcal{E}(\boldsymbol{M}) \to \mathcal{E}(\boldsymbol{N})$, avec $\mathcal{E}(\boldsymbol{\alpha})_i = \alpha_{i-1} \oplus \alpha_i$. Foncteur exact.

5.1.7. Remarque. Ces foncteurs sont les analogues des foncteurs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des paragraphes 2.2.1 et 2.3.2, et partagent les même propriétés d'adjonction. La proposition suivante est l'analogue de 2.3.4, 2.2.2 et 2.3.3, et se démontre de la même manière.

5.1.8. Proposition

a) *Les couples* $(\mathcal{E}, \mathrm{o})$ *et* $(\mathcal{F}, \mathrm{Z})$ *sont des paires de foncteurs adjoints.*

b) *Pour tout* $\boldsymbol{M} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$*, le complexe* $\mathcal{E}(\boldsymbol{M})$ *est homotopiquement nul.*

c) *Si* $\boldsymbol{P} = \{P_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *est une famille d'objets projectifs de* $\mathcal{A}$*, le complexe* $\mathcal{E}(\boldsymbol{P})$ *est un objet projectif de la catégorie* $\mathcal{C}^*\mathcal{A}$*.*

5.1.9. Proposition

a) *Pour tout relèvement projectif simultané* $\epsilon : \mathcal{R} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$*, il existe un isomorphisme de complexes*

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{E}(\mathrm{B}\,\mathcal{R})[1] \oplus \mathcal{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{R})$$

avec $\mathrm{B}\,\mathcal{R} := \{\mathrm{B}^i\,\mathcal{R}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *et* $\mathrm{H}\,\mathcal{R} := \{\mathrm{H}^i\,\mathcal{R}\}_{i\in\mathbb{Z}}$*, et* $\epsilon : \mathcal{R} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$ *coïncide avec un relèvement projectif simultané construit par le procédé 5.1.4.*

b) *Un complexe* (M^*, d_*) *borné à droite par* $N \in \mathbb{Z}$*,* i.e. *tel que* $M^i = 0$ *pour* $i > N$*, admet des relèvement projectifs simultanés* $\epsilon : (R^*, D_*) \twoheadrightarrow (M^*, d_*)$ *tels que* $R^i = 0$ *pour* $i > N$*.*

c) *Un complexe* (M^*, d_*) *avec* $d = 0$*, admet des relèvement projectifs simultanés* $\epsilon : (R^*, D_*) \twoheadrightarrow (M^*, d_*)$ *avec* $D = 0$*.*

d) *Un complexe* $\mathcal{M}$ *dont les* $\mathrm{H}^m\,\mathcal{M}$ *sont projectifs pour tout* $m \in \mathbb{Z}$*, admet des relèvement projectifs simultanés* $\epsilon : \mathcal{R} \to \mathcal{M}$ *qui sont des quasi-isomorphismes.*

Démonstration. Pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, la suite exacte courte de $\mathcal{A}$

$$\mathbf{0} \to \mathrm{B}^m\,\mathcal{R} \longrightarrow \mathrm{Z}^m\,\mathcal{R} \twoheadrightarrow \mathrm{H}^m\,\mathcal{R} \to \mathbf{0}$$

est scindée puisque $\mathrm{H}^m\,\mathcal{R}$ est projectif. On en déduit l'existence d'un isomorphisme (non canonique) $\mathrm{Z}^m\,\mathcal{R} \sim \mathrm{B}^m\,\mathcal{R} \oplus \mathrm{H}^m\,\mathcal{R}$ compatible à l'inclusion $\mathrm{B}\,\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Z}\,\mathcal{R}$, *i.e.* tel que

$$\big(\mathrm{B}\,\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Z}\,\mathcal{R}\big) \sim \big((\mathrm{B}\,\mathcal{R} \oplus \mathbf{0}) \subseteq (\mathrm{B}\,\mathcal{R} \oplus \mathrm{H}\,\mathcal{R})\big)\,,$$

d'où la suite courte

$$\mathbf{0} \to \mathrm{B}\,\mathcal{R} \oplus \mathrm{H}\,\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{d} \mathrm{B}\,\mathcal{R}[1] \to \mathbf{0}$$

également scindée (non canoniquement), et qui donne l'isomorphisme

$$\mathcal{R} \sim \mathrm{B}\,\mathcal{R} \oplus \mathrm{H}\,\mathcal{R} \oplus \mathrm{B}\,\mathcal{R}[1]$$

identifiant le cobord $d_* : R^* \to R^*$ au cobord

$$D_{\mathcal{E}} \oplus D_{\mathcal{F}} : \mathcal{E}(\mathrm{B}\,\mathcal{R})[1] \oplus \mathcal{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathrm{B}\,\mathcal{R})[1] \oplus \mathcal{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{R})\,.$$

Ce qui termine la preuve de (a).

Les autres assertions sont évidentes comte tenu de la construction explicite des résolutions projectives simultanées (*cf.* 5.1.4). □

5.1.10. Résolutions projectives simultanées. On appelle « *résolution projective simultanée de* $\mathcal{M} \in \mathcal{C}^*\mathcal{A}$ » toute suite exacte de $\mathcal{C}^*\mathcal{A}$

$$\cdots \xrightarrow{\epsilon_{n+1}} \mathcal{R}_n \xrightarrow{\epsilon_n} \cdots \xrightarrow{\epsilon_2} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{R}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{M} \to 0 \qquad \text{(Eq.16)}$$

telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, le morphisme $\epsilon_i : \mathcal{R}_i \to \mathrm{im}(\epsilon_i)$ est un relèvement projectif simultané. En particulier, si $\mathcal{F}(_)$ désigne l'un quelconque des foncteurs $\mathrm{B}^m(_)$, $\mathrm{Z}^m(_)$, $\mathrm{H}^m(_)$, la suite longue de $\mathcal{A}$

$$\cdots \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_{n+1})} \mathcal{F}\,\mathcal{R}_n \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_n)} \cdots \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_2)} \mathcal{F}\,\mathcal{R}_1 \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_1)} \mathcal{F}\,\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_0)} \mathcal{F}\,\mathcal{M} \to 0$$

est une résolution projective de $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{A}$.

5.1.11. Proposition

a) *Pour tout* $\mathcal{M} \in \mathcal{C}^*\mathcal{A}$*, et toutes résolutions projectives* $P^m_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}^m\,\mathcal{M}$ *et* $Q^m_\bullet \xrightarrow{\nu} \mathrm{B}^m\,\mathcal{M}$ *dans* $\mathcal{A}$*, il existe des résolutions projectives simultanées*

$$\big(\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M}\big) := \big(\cdots \xrightarrow{\epsilon_2} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{R}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{M} \to 0\big)$$

avec

$$\begin{cases} \big(\mathrm{H}^m\,\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\mathrm{H}^m\,\epsilon} \mathrm{H}^m\,\mathcal{M}\big) = \big(P^m_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}^m\,\mathcal{M}\big) \\ \big(\mathrm{B}^m\,\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\mathrm{B}^m\,\epsilon} \mathrm{B}^m\,\mathcal{M}\big) = \big(Q^m_\bullet \xrightarrow{\nu_0} \mathrm{B}^m\,\mathcal{M}\big)\,. \end{cases}$$

b) *Pour tout morphisme de complexes $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, et toutes résolutions projectives simultanées $(\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \!\!\!\rightarrow \mathcal{M})$ et $(\mathcal{R}'_\bullet \xrightarrow{\epsilon'} \!\!\!\rightarrow \mathcal{M}')$, il existe une famille de morphismes $\alpha_\bullet : \mathcal{R}_\bullet \to \mathcal{R}'_\bullet$, unique à homotopie près, rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\epsilon_2} & \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{R}_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & \mathcal{M} & \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & \\ \cdots & \xrightarrow{\epsilon'_2} & \mathcal{R}'_1 & \xrightarrow{\epsilon'_1} & \mathcal{R}'_0 & \xrightarrow{\epsilon'_0} & \mathcal{M}' & \to 0 \end{array}$$

Indications. L'assertion (a) se démontre inductivement à l'aide du lemme 5.1.5-(b) et du procédé de construction des relèvements projectifs simultanés décrit dans 5.1.4. L'assertion (b) résulte du fait que chaque $\mathcal{R}_i$ est de la forme $\mathcal{E}(\mathrm{B}\,\mathcal{R}_i)[1] \oplus \mathcal{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{R}_i)$ (5.1.9-(a)), et de la proposition 5.1.8 qui affirme que $\mathcal{E}(\mathrm{B}\,\mathcal{R}_i)$ est projectif dans $\mathcal{C}^*\mathcal{A}$, et que le foncteur $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^*\mathcal{A}}\big(\mathcal{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{R}_i), _\big)$ transforme la résolution simultanée $\mathcal{R}'_\bullet \xrightarrow{\epsilon'} \mathcal{M}' \to \mathbf{0}$ en suite exacte longue de groupes abéliens. □

5.2. Résolutions projectives simultanés des *R-mdg*'s

Toutes les définitions constructions et propositions de la section a s'adaptent sans difficulté au contexte des R-*mdg*'s.

5.2.1. Les foncteurs B, Z, H. On considère les foncteurs

$$\begin{cases} \mathrm{B}(_) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,, & \mathrm{B}\,\mathcal{M} := \mathrm{im}(d_M) \\ \mathrm{Z}(_) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,, & \mathrm{Z}\,\mathcal{M} := \ker(d_M) \\ \mathrm{H}(_) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,, & \mathrm{H}\,\mathcal{M} := \mathrm{Z}(\mathcal{M})/\,\mathrm{B}(\mathcal{M}) \end{cases}$$

dont on rappelle que lorsque ils sont appliqués à une suite exacte courte de R-*mdg*'s $\mathbf{0} \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to \mathcal{N} \to \mathbf{0}$, on a

— $\mathbf{0} \to \mathrm{Z}\,\mathcal{L} \to \mathrm{Z}\,\mathcal{M} \to \mathrm{Z}\,\mathcal{N} \to \mathbf{0}$ est exacte à gauche.
— $\mathbf{0} \to \mathrm{B}\,\mathcal{L} \to \mathrm{B}\,\mathcal{M} \to \mathrm{B}\,\mathcal{N} \to \mathbf{0}$ est exacte aux extrêmes.
— $\mathbf{0} \to \mathrm{H}\,\mathcal{L} \to \mathrm{H}\,\mathcal{M} \to \mathrm{H}\,\mathcal{N} \to \mathbf{0}$ est exacte aux centre.

5.2.2. Relèvements projectifs simultanés des *R-mdg*'s. On appellera « *relèvement projectif simultané* » d'un R-*mdg* $\mathcal{M}$, la donnée d'un morphisme de R-*mdg*'s $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{M}$, tel que les morphismes de R-*mg*'s

$$\begin{cases} \mathrm{o}\,\pi : \mathrm{o}\,\mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathrm{o}\,\mathcal{M}\,, & \mathrm{B}\,\pi : \mathrm{B}\,\mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathrm{B}\,\mathcal{M}\,, \\ \mathrm{Z}\,\pi : \mathrm{Z}\,\mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathrm{Z}\,\mathcal{M}\,, & \mathrm{H}\,\pi : \mathrm{H}\,\mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathrm{H}\,\mathcal{M}\,, \end{cases}$$

sont surjectifs de source projective, *i.e.* $\mathrm{o}\,\mathcal{P}$, $\mathrm{B}\,\mathcal{P}$, $\mathrm{Z}\,\mathcal{P}$ et $\mathrm{H}\,\mathcal{P}$ sont tous projectifs dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$.

5.2.3. Proposition. *Pour tout relèvement projectif simultané de R-mdg's $\epsilon : \mathcal{R} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$, il existe un isomorphisme de R-mdg's*

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{E}(\mathrm{B}\,\mathcal{R})[1] \oplus \mathcal{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{R})\,,$$

où $\mathcal{E}, \mathcal{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ sont les foncteurs de 2.3.2 et 2.2.1.

5.2.4. Résolutions projectives simultanées des *R-mdg*'s. On appellera « *résolution projective simultanée d'un R-mdg $\mathcal{M}$* » toute suite exacte de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\cdots \xrightarrow{\epsilon_{n+1}} \mathcal{R}_n \xrightarrow{\epsilon_n} \cdots \xrightarrow{\epsilon_2} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{R}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{M} \to 0 \qquad \text{(Eq.17)}$$

telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, le morphisme $\epsilon_i : \mathcal{R}_i \to \mathrm{im}(\epsilon_i)$ est un relèvement projectif simultané. En particulier, si $\mathcal{F}(_)$ désigne l'un quelconque des foncteurs $\mathrm{B}(_)$, $\mathrm{Z}(_)$, $\mathrm{H}(_)$, la suite longue de $\mathcal{A}$

$$\cdots \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_{n+1})} \mathcal{F}\,\mathcal{R}_n \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_n)} \cdots \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_2)} \mathcal{F}\,\mathcal{R}_1 \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_1)} \mathcal{F}\,\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_0)} \mathcal{F}\,\mathcal{M} \to 0$$

est une résolution projective de $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$.

5.2.5. Proposition

a) *Pour tout R-mdg $\mathcal{M}$, et toutes résolutions projectives $P_\bullet \xrightarrow{\pi}\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{H}(\mathcal{M})$ et $Q_\bullet \xrightarrow{\nu}\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{B}(\mathcal{M})$ dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, il existe des résolutions projectives simultanées*

$$\big(\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon}\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{M}\big) := \big(\cdots \xrightarrow{\epsilon_2} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{R}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{M} \to 0\big)$$

avec

$$\begin{cases} \big(\mathrm{H}\,\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\mathrm{H}\,\epsilon}\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{H}\,\mathcal{M}\big) = \big(P^m_\bullet \xrightarrow{\pi}\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{H}\,\mathcal{M}\big) \\ \big(\mathrm{B}\,\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\mathrm{B}\,\epsilon}\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{B}\,\mathcal{M}\big) = \big(Q^m_\bullet \xrightarrow{\nu_0}\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{B}\,\mathcal{M}\big)\,. \end{cases}$$

On dira alors que la résolution $\big(\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon}\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{M}\big)$ est « compatible » aux résolutions $P_\bullet \xrightarrow{\pi}\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{H}(\mathcal{M})$ et $Q_\bullet \xrightarrow{\nu}\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{B}(\mathcal{M})$ dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$.

b) *Pour tout morphisme de R-mdg's $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, et toutes résolutions projectives simultanées $(\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon}\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{M})$ et $(\mathcal{R}'_\bullet \xrightarrow{\epsilon'}\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{M}')$,*

i) *Il existe une famille $\alpha_\bullet = \{\alpha_m : \mathcal{R}_m \to \mathcal{R}'_m\}$ de morphismes de R-mdg's, rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\epsilon_2} & \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{R}_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & \mathcal{M} & \to & \mathbf{0} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\ \cdots & \xrightarrow{\epsilon'_2} & \mathcal{R}'_1 & \xrightarrow{\epsilon'_1} & \mathcal{R}'_0 & \xrightarrow{\epsilon'_0} & \mathcal{M}' & \to & \mathbf{0} \end{array}$$

ii) *Si $\alpha_\bullet$ et $\alpha'_\bullet$ sont deux familles vérifiant l'assertion* (i)*, il existe une famille $\{h_m : \mathcal{R}_m \to \mathcal{R}'_{m+1}\}$ de morphismes de R-mdg's, telle que*

$$\alpha_m - \alpha'_m = h_{m-1} \circ \epsilon_m + \epsilon'_{m+1} \circ h_m\,.$$

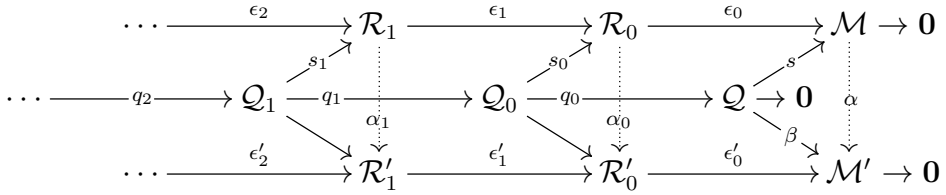
iii) *Les morphismes induits de complexes de R-mg's*

$$\mathrm{B}\,\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\mathrm{B}\,\alpha_\bullet} \mathrm{B}\,\mathcal{R}'_\bullet\,, \qquad \mathrm{Z}\,\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\mathrm{Z}\,\alpha_\bullet} \mathrm{Z}\,\mathcal{R}'_\bullet\,, \qquad \mathrm{H}\,\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\mathrm{H}\,\alpha_\bullet} \mathrm{H}\,\mathcal{R}'_\bullet$$

sont uniques à homotopie près.

Démonstration. Même preuve que celle de la proposition 5.1.11. □

5.2.6. Remarque. Dans l'assertion 5.2.5-(b), si $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ est, non pas un morphisme dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, mais plutôt dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, on fixe présentation projective $\mathcal{Q} \overset{s}{\twoheadrightarrow} \mathcal{M}_1$ et une résolution projective simultanée $\mathcal{Q}_\bullet \overset{q}{\twoheadrightarrow} \mathcal{Q}$. Le morphisme $\beta = \alpha \circ s$ est alors un morphisme de R-*mg*'s et l'on on a un diagramme commutatif dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$



vérifiant des propriétés d'unicité homotopique analogues à celles ennoncés dans la proposition. Un tel diagramme pourra être appelé un « *relèvement projectif simultané de* $\alpha \in \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ ».

5.2.7. À propos de $\mathbf{Hotgr}^*_R(\mathcal{P}, _)$. La proposition précédente nous permet d'apporter une précision laissée en suspens en 3.3.6 qui affirme que si le R-*mdg* $\mathcal{P}$ est tel que $\mathrm{o}(\mathcal{P})$ est projectif, alors $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{P}, \mathcal{A}) = 0$, pour tout R-*mdg* $\mathcal{A}$ acyclique.

En effet, soit $\mathcal{R}_\bullet \overset{\epsilon}{\twoheadrightarrow} \mathcal{P}$ une résolution projective simultanée de longueur finie comme dans 5.2.5-(a). Pour $m \in \mathbb{Z}$, on a $\mathcal{R}_m = \mathcal{E}(Q_m) \oplus \mathcal{F}(P_m)$, et

$$\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{R}_m, \mathcal{A}) = \mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{E}(Q_m), \mathcal{A}) \oplus \mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{F}(P_m), \mathcal{A}) = \mathbf{0}\,,$$

puisque $\mathcal{E}(Q_m)$ est homotope à zéro (5.1.8) et puisque un morphisme de complexes $\phi : \mathcal{F}P_m \to \mathcal{A}$ est un morphisme de R-*mg*'s de P_m à valeurs dans $\mathrm{Z}\,\mathcal{A}$ (*cf.* 2.2.2). Comme $\mathrm{Z}\,\mathcal{A} = \mathrm{B}\,\mathcal{A}$, le morphisme ϕ se factorise à travers de la surjection $d : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathrm{Z}\,\mathcal{A}$ puisque P_m est un R-*mg* projectif, et ceci qui prouve que ϕ est homotope à zéro.

Si nous appliquons maintenant le foncteur cohomologique $\mathrm{Hotgr}^*_R(_, \mathcal{A})$ (1.2.17) à la suite exacte (scindée) de troncatures bêtes (2.1.6)

$$\mathbf{0} \to \mathcal{R}_0 \longrightarrow \mathcal{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathcal{R}_{\geq 1} \to \mathbf{0}\,,$$

on obtient $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, \mathcal{A}) = \mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, \mathcal{A})$, et donc $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, \mathcal{A}) = \mathbf{0}$, de proche en proche par une itération évidente. Maintenant, si $\mathrm{o}(\mathcal{P})$ est

projectif, $\widetilde{\epsilon}_0 : \mathcal{R}_{\geq 0} \to \mathcal{P}$ est un isomorphisme à homotopie près et alors $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{P}, \mathcal{A}) = 0$. Nous avons ainsi démontré la proposition suivante.

5.2.8. Proposition. *Soit $\mathcal{P}$ un R-mdg tel que $\mathrm{o}(\mathcal{P})$ est projectif. Le foncteur*

$$\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{P}, _) : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$$

transforme quasi-isomorphisme en isomorphisme.

6. Foncteurs dérivés

6.1. Foncteurs Diff $\boldsymbol{F}$, $\mathbb{K}\boldsymbol{F}$, $\mathbb{D}\boldsymbol{F}$.

Soient R et R' deux anneaux commutatifs positivement gradués, et soient

$$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$$

des foncteurs *additifs*, $\boldsymbol{F}$ covariant commutant aux foncteurs de translation, et $\boldsymbol{G}$ contravariant anticommutant aux foncteurs de translation. Si $\mathcal{N} = (N, d_N)$ est un R-*mdg*, les couples $\boldsymbol{F}\mathcal{N} := (\boldsymbol{F}\,N, \boldsymbol{F}\,d_N)$ $\boldsymbol{G}\mathcal{N} := (\boldsymbol{G}\,N, \boldsymbol{G}\,d_N)$ sont clairement des R'-*mdg*'s. Ces correspondances définissent les foncteurs additifs

$$\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}, \mathrm{Diff}\,\boldsymbol{G} : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R')\,, \qquad \text{(Eq.18)}$$

possédant le même type de variance et d'exactitude que $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ respectivement. Il nous arrivera souvent de simplifier la notation $\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{F}$, et de même pour $\boldsymbol{G}$.

Dans la suite, pour éviter des repétitions inutiles, nous parlerons essentiellement du foncteur covariant $\boldsymbol{F}$, et sauf mention explicite des différences, les propos s'appiqueront *mutatis mutandis* au foncteur $\boldsymbol{G}$.

6.1.1. Le foncteur (Eq.18) est compatible aux homotopies et induit donc un foncteur

$$\mathbb{K}\boldsymbol{F} : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R')\,.$$

Mais, ce foncteur ne transforme pas forcément quasi-isomorphisme en quasi-isomorphisme. Lorsque $\dim_{\mathrm{gb}} R < \infty$, les quasi-isomorphismes de la sous-catégorie $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$ sont des isomorphismes d'après (3.2.1-(b)), et $\mathbb{K}\boldsymbol{F}$ les transforme bien en des isomorphismes. Mieux encore, dans un tel cas nous

disposons de l'équivalence de catégories 3.2.1-(d), d'où l'existence d'un et d'un unique foncteur (à isomorphisme près)

$$\boxed{\mathbb{D}\,\boldsymbol{F} : \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R')}$$

dont la restriction à $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$ coïncide avec $\mathbb{K}\boldsymbol{F}$. On pose alors

$$\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}) := \boldsymbol{F}(\widetilde{\mathcal{N}})\,,\ \text{et}\ \ \mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\alpha) := \boldsymbol{F}(\widetilde{\alpha})\,,$$

où $\widetilde{\mathcal{N}} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ est une présentation projective, et où $\widetilde{\alpha}$ est un relèvement de α.

!! *À partir de maintenant, l'anneau R sera toujours supposé de dimension globale finie, sauf mention explicite du contraire.*

6.1.2. Exemples. Soit N un R-*mg*. Les foncteurs « *produit tensoriel gradué* » et « *homomorphismes gradués* »

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_1 := (_) \otimes_R N : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,, \\ \boldsymbol{F}_2 := \mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(N, _) : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,, \\ \boldsymbol{G} := \mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(_, N) : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,. \end{cases}$$

sont des exemples de foncteurs vérifiant les conditions de 6.1. On a

$$\begin{cases} \mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}_1 = \big((_ \otimes_R N)^{\bullet}, \Delta_{\bullet}\big) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,, \\ \mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}_2 = \big(\mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(N, _), D_{\bullet}\big) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,, \\ \mathrm{Diff}\,\boldsymbol{G} = \big(\mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(_, N), D_{\bullet}\big) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,, \end{cases}$$

d'après définitions des sections 1.2.4 et 1.2.8

6.2. Filtrations et suites spectrales canoniques

Soit $\boldsymbol{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ un foncteur vérifiant les conditions de 6.1.

Pout tout R-*mdg* $\mathcal{N}$, le R'-*mdg* $\mathrm{H}\,\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$ peut se calculer à l'aide d'une résolution projective simultanée de longueur **finie**

$$(\mathcal{R}_{\bullet} \xrightarrow{\epsilon} \!\!\!\!\rightarrow \mathcal{N}) := \big(\mathbf{0} \to \mathcal{R}_d \xrightarrow{\epsilon_d} \mathcal{R}_{d-1} \xrightarrow{\epsilon_{d-1}} \cdots \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{R}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{N} \to \mathbf{0}\big) \qquad \text{(Eq.19)}$$

associée à des résolutions projectives de R-*mg*'s $P_{\bullet} \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}(\mathcal{N})$ et $Q_{\bullet} \xrightarrow{\nu} \mathrm{B}(\mathcal{N})$ que nous pouvons supposer de longueurs majorées par $d := \dim_{\mathrm{gb}}(R)$ (5.2.5). On a

$$\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})) = \mathrm{H}(\boldsymbol{F}(\textstyle\sum \mathcal{R}_{\bullet})) = \mathrm{H}(\textstyle\sum(\boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_{\bullet})) \qquad \text{(Eq.20)}$$

où la deuxième égalité est justifiée par la finitude de la résolution $(\mathcal{R}_{\bullet} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{N})$ [4].

4. En effet, le foncteur $\boldsymbol{F}$ étant additif, est toujours compatible aux sommes directes finies, mais pas forcément aux sommes directes quelconques, l'contre-exemple le plus immédiat est donné par le foncteur $(_) \rightsquigarrow \mathrm{Homgr}^{\bullet}_R(_, R)$.

6.2.1. Filtration canonique de $\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}))$. Reprenons la résolution (Eq.19) et considérons pour $m \leq d := \dim_{\mathrm{gb}}(R)$ les morphismes suivants entre les troncatures bêtes (*cf.* 2.1.6) :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathcal{R}_{m-1,0} & & & & & & 0 & \longrightarrow & \mathcal{R}_{m-1} & \xrightarrow{\epsilon_{m-1}} & \cdots & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{R}_0 \longrightarrow 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \iota_{m-1,0}} & & & & & & \downarrow & & \| & & & & \| \\
\mathcal{R}_{d,0} & 0 \longrightarrow \mathcal{R}_d & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathcal{R}_{m+1} & \xrightarrow{\epsilon_{m+1}} & \mathcal{R}_m & \xrightarrow{\epsilon_m} & \mathcal{R}_{m-1} & \xrightarrow{\epsilon_{m-1}} & \cdots & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{R}_0 & \longrightarrow 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_{d,m}} & \| & & \| & & \| & & \downarrow & & & & & \\
\mathcal{R}_{d,m} & 0 \longrightarrow \mathcal{R}_d & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathcal{R}_{m+1} & \xrightarrow{\epsilon_{m+1}} & \mathcal{R}_m & \longrightarrow & 0 & & & & &
\end{array}$$

donnant la suite exacte courte de complexes de R-*mdg*'s

$$\mathbf{0} \to \mathcal{R}_{m-1,0} \xhookrightarrow{\iota_{m-1,0}} \mathcal{R}_{d,0} \xrightarrow{\pi_{d,m}} \mathcal{R}_{d,m} \to \mathbf{0} \tag{Eq.21}$$

clairement scindée (terme à terme) dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$. Les morphismes dans cette suite donnent lieu à la filtration et à la cofiltration (de bicomplexes)

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{d,0} \xleftarrow{\ \iota\ } \mathcal{R}_{d-1,0} \xleftarrow{\ \iota\ } \cdots \xleftarrow{\ \iota\ } \mathcal{R}_{0,0} \longleftarrow \mathbf{0} \\ \mathcal{R}_{d,0} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathcal{R}_{d,1} \xrightarrow{\ \pi\ } \cdots \xrightarrow{\ \pi\ } \mathcal{R}_{d,d} \longrightarrow \mathbf{0} \end{cases} \tag{Eq.22}$$

En appliquant le foncteur « R-*mdg simple associé* » (2.1), on obtient la suite exacte courte de R-*mdg*'s

$$\mathbf{0} \to \Sigma\,\mathcal{R}_{m-1,0} \xhookrightarrow{\Sigma\,\iota_{m-1,0}} \Sigma\,\mathcal{R}_{d,0} \xrightarrow{\Sigma\,\pi_{d,m}} \Sigma\,\mathcal{R}_{d,m} \to \mathbf{0} \tag{Eq.23}$$

toujours scindée dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, d'où la filtration et cofiltration de R-*mdg*'s

$$\begin{cases} \Sigma\,\mathcal{R}_{d,0} \xleftarrow{\Sigma\,\iota} \Sigma\,\mathcal{R}_{d-1,0} \xleftarrow{\Sigma\,\iota} \cdots \xleftarrow{\Sigma\,\iota} \Sigma\,\mathcal{R}_{0,0} \longleftarrow \mathbf{0} \\ \Sigma\,\mathcal{R}_{d,0} \xrightarrow{\Sigma\,\pi} \Sigma\,\mathcal{R}_{d,1} \xrightarrow{\Sigma\,\pi} \cdots \xrightarrow{\Sigma\,\pi} \Sigma\,\mathcal{R}_{d,d} \longrightarrow \mathbf{0} \end{cases} \tag{Eq.24}$$

6.2.2. Le foncteur $\boldsymbol{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ (covariant) appliqué à (Eq.21) donne la suite

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_{m-1,0} \xhookrightarrow{\boldsymbol{F}\,\iota_{m-1,0}} \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_{d,0} \xrightarrow{\boldsymbol{F}\,\pi_{d,m}} \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_{d,m} \to \mathbf{0}\,, \tag{Eq.25}$$

qui est exacte, car scindée. On pose alors pour $i \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{F}\,\Sigma\,\mathcal{R}_\bullet)_{-i} := \mathrm{im}\left(\mathrm{H}\,\boldsymbol{F}\,\iota_{i,0} : \mathrm{H}\,\boldsymbol{F}\,\Sigma\,\mathcal{R}_{i,0} \longrightarrow \mathrm{H}\,\boldsymbol{F}\,\Sigma\,\mathcal{R}_{d,0}\right)$$

d'où la filtration décroissante finie de R'-*mg*'s (Eq.26)

$$\boxed{\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}\,\mathcal{N}) = \mathrm{H}(\boldsymbol{F}\,\Sigma\,\mathcal{R}_\bullet)_{-d} \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{H}(\boldsymbol{F}\,\Sigma\,\mathcal{R}_\bullet)_{-1} \supseteq \mathrm{H}(\boldsymbol{F}\,\Sigma\,\mathcal{R}_\bullet)_0 \supseteq \mathbf{0}}$$

et les R'-*mg*'s

$$\mathrm{Gr}^i\,\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})) := \frac{\mathrm{H}(\boldsymbol{F}\,\Sigma\,\mathcal{R}_\bullet)_i}{\mathrm{H}(\boldsymbol{F}\,\Sigma\,\mathcal{R}_\bullet)_{i+1}}\,, \quad \text{pour } -d \leq i \leq 0.$$

donnnant lieu au R'-module bigradué

$$\mathrm{Gr}\,\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})) := \bigoplus\nolimits_{-d\leq i\leq 0} \mathrm{Gr}^i\,\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}))\,.$$

6.2.3. Le foncteur $\boldsymbol{G} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ (contravariant) appliqué à (Eq.21) donne à la suite

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{d,m} \xrightarrow{\boldsymbol{G}\,\pi_{d,m}} \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{d,0} \xrightarrow{\boldsymbol{G}\,\iota_{m-1,0}} \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{m-1,0} \to \mathbf{0}\,, \tag{Eq.27}$$

qui est exacte, car scindée. On pose alors pour $i \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{G}\sum\mathcal{R}_\bullet)_i := \mathrm{im}\left(\mathrm{H}\,\boldsymbol{G}\,\pi_{d,i} : \mathrm{H}\,\boldsymbol{G}\sum\mathcal{R}_{d,i} \longrightarrow \mathrm{H}\,\boldsymbol{G}\sum\mathcal{R}_{d,0}\right)$$

d'où la filtration décroissante finie (Eq.28)

$$\boxed{\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{G}\mathcal{N}) = \mathrm{H}(\boldsymbol{G}\sum\mathcal{R}_\bullet)_0 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{H}(\boldsymbol{G}\sum\mathcal{R}_\bullet)_{d-1} \supseteq \mathrm{H}(\boldsymbol{G}\sum\mathcal{R}_\bullet)_d \supseteq \mathbf{0}}$$

et les R'-*mg*'s

$$\mathrm{Gr}^i\,\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N})) := \frac{\mathrm{H}(\boldsymbol{G}\sum\mathcal{R}_\bullet)_i}{\mathrm{H}(\boldsymbol{G}\sum\mathcal{R}_\bullet)_{i+1}}\,, \qquad \text{pour } 0\leq i\leq d.$$

donnant lieu au R'-module bigradué

$$\mathrm{Gr}\,\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N})) := \bigoplus\nolimits_{0\leq i\leq d} \mathrm{Gr}^i\,\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N}))\,.$$

6.2.4. Théorème. *Soit $\mathcal{N}$ un R-mdg.*

a) *Les filtrations* (Eq.26) *et* (Eq.28) *sont intrinsèques,* i.e. *ne dépendent pas de la résolution projective simultanée $(\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{N})$ considérée.*

b) *Le foncteur $\boldsymbol{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ étant covariant,* $\mathrm{Gr}\,\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}))$ *est limite d'une suite spectrale* canonique $(\mathbb{E}_r(\boldsymbol{F},\mathcal{N}), d_r)$, *naturelle par rapport à $\boldsymbol{F}$ et à $\mathcal{N}$, de deuxième terme*

$$\mathbb{E}_2^{-p,q}(\boldsymbol{F},\mathcal{N}) = \left[\mathbb{L}^p\boldsymbol{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{N})\right]^q \Longrightarrow \mathrm{Gr}^{-p}\,\mathrm{H}^{-p+q}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}))\,.$$

où $\mathbb{L}^p\boldsymbol{F} : D^-\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow D^-\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ désigne le p-ième foncteur dérivé à gauche entre catégories dérivées des complexes de R-mg's bornés à droite.

c) *Le foncteur $\boldsymbol{G}$:*$\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\rightsquigarrow\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ *étant contravariant,* $\mathrm{GrH}(\mathbb{D}\boldsymbol{G}(\mathcal{N}))$ *est limite d'une suite spectrale* canonique $(\mathbb{E}_r(\boldsymbol{G},\mathcal{N}), d_r)$, *naturelle par rapport à $\boldsymbol{G}$ et à $\mathcal{N}$, de deuxième terme*

$$\mathbb{E}_2^{p,q}(\boldsymbol{G},\mathcal{N}) = \left[\mathbb{R}^p\boldsymbol{G}(\mathrm{H}\,\mathcal{N})\right]^q \Longrightarrow \mathrm{Gr}^{p}\,\mathrm{H}^{p+q}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N}))\,.$$

où $\mathbb{R}^p\boldsymbol{G} : D^-\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow D^+\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ désigne les p-ième foncteur dérivé à droite entre catégories dérivées des complexes de R-mg's bornés à droite puis à gauche.

Démonstration. On raisonne pour le foncteur $\boldsymbol{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ covariant, le cas de $\boldsymbol{G}$ contravariant étant tout à fait analogue.

Soient $(\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{N})$ et $(\mathcal{R}'_\bullet \xrightarrow{\epsilon'} \mathcal{N})$ deux résolutions projectives simultanées respectivement associées à des résolutions projectives de R-mg's $P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\,\mathcal{N}$ et $Q_\bullet \xrightarrow{\nu} \mathrm{B}\,\mathcal{N}$, et $P'_\bullet \xrightarrow{\pi'} \mathrm{H}\,\mathcal{N}$. et $Q'_\bullet \xrightarrow{\nu'} \mathrm{B}\,\mathcal{N}$.

La proposition 5.2.5 affirme qu'il existe un morphisme de résolutions

$$\alpha_\bullet : (\mathcal{R}_\bullet, \epsilon_\bullet) \to (\mathcal{R}'_\bullet, \epsilon'_\bullet)$$

relevant $\mathrm{id}_{\mathcal{N}}$ (qui est unique à homotopie près) et telle que le morphisme de complexes

$$\mathrm{H}\,\alpha_\bullet : (\mathrm{H}\,\mathcal{R}_\bullet, \mathrm{H}\,\epsilon_\bullet) \to (\mathrm{H}\,\mathcal{R}'_\bullet, \mathrm{H}\,\epsilon'_\bullet) \qquad (*)$$

est un morphisme de résolutions de $(P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\,\mathcal{N})$ vers $(P'_\bullet \xrightarrow{\pi'} \mathrm{H}\,\mathcal{N})$ relevant $\mathrm{id}_{\mathrm{H}(\mathcal{N})}$, modulo des identifications canoniques $(\mathrm{H}\,\mathcal{R}_\bullet, \mathrm{H}\,\epsilon_\bullet) = (P_\bullet, \pi_\bullet)$ et $(\mathrm{H}\,\mathcal{R}'_\bullet, \mathrm{H}\,\epsilon'_\bullet) = (P'_\bullet, \pi'_\bullet)$.

Pour chaque $i \in \mathbb{N}$ on a le diagramme commutatif de R-$mdg's$

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma\,\mathcal{R}_{i,0} & \xrightarrow{\iota_{i,0}} & \Sigma\,\mathcal{R}_\bullet & \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}_0} & \mathcal{N} \\ {\scriptstyle \Sigma\,\alpha_{i,0}}\downarrow & & {\scriptstyle \Sigma\,\alpha_\bullet}\downarrow & & \| \\ \Sigma\,\mathcal{R}'_{i,0} & \xrightarrow{\iota_{i,0}} & \Sigma\,\mathcal{R}'_\bullet & \xrightarrow{\widetilde{\epsilon'}_0} & \mathcal{N} \end{array}$$

Dont on déduit, en passant en cohomologie, l'inclusion

$$(\mathrm{H}(\boldsymbol{F}\,\Sigma\,\mathcal{R}_\bullet))_i \subseteq (\mathrm{H}(\boldsymbol{F}\,\Sigma\,\mathcal{R}'_\bullet))_i\,.$$

et l'assertion (a) résulte, vu les rôles symétriques joués par $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

$\boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_\bullet$ est un bi-complexe de i-ième colonne $\boldsymbol{F}(\mathcal{E}(Q_i)) \oplus \boldsymbol{F}(\mathcal{F}(P_i))$. La cohomologie de cette colonne est égale à $\boldsymbol{F}(P_i)$ puisque $\mathcal{E}(Q_i)$ est homotope à zéro (*cf.* 2.3.3). Par conséquent, si nous filtrons $\boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_\bullet$ par indices des colonnes ([5]), on obtient une filtration régulière de $\Sigma(\boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_\bullet)$ et donc une suite spectrale de premier terme

$$I\!E_1 = \big(\cdots \longrightarrow \boldsymbol{F}(P_{i+1}) \xrightarrow{\boldsymbol{F}(\pi_{i+1})} \boldsymbol{F}(P_i) \xrightarrow{\boldsymbol{F}(\pi_i)} \cdots \xrightarrow{\boldsymbol{F}(\pi_1)} \boldsymbol{F}(P_0) \to \mathbf{0}\big)$$

et donc

$$I\!E_2^{-p,q} = [I\!L^p\,\boldsymbol{F}\,\mathrm{H}(\mathcal{N})]^q \Longrightarrow \mathrm{Gr}^{-p}\,\mathrm{H}^{-p+q}(I\!D\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}))$$

d'après (Eq.20). L'unicité de cette suite spectrale à partir du terme $I\!E_2$, résulte alors de l'homotopie $(*)$ dans les remarques préliminaires.

Enfin, la naturalité des suites spectrales vis-à-vis des transformations naturelles de foncteurs et évidente. □

5. aussi appelé « *degré externe* ».

6.3. Morphisme de comparaison entre $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}$ et $\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}$

6.3.1. Reprenons les données de 6.1. Soit

$$\boldsymbol{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$$

un foncteur *additif* et covariant commutant aux foncteurs de translation, ou bien contravariant anticommutant aux foncteurs de translation. Le foncteur induit

$$\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F} : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R')\,,$$

est additif entre catégories abéliennes qui admet un foncteur dérivé puisque la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ possède suffisamment de projectifs (2.4.1-(c)).

Le foncteur $\boldsymbol{F}$ étant covariant, on a le foncteur dérivé à gauche

$$\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F} : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow D^{-}(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R'))$$

qui fait correspondre

$$\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}) := \mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{P}_\bullet) \quad \text{et} \quad \mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\alpha) := \mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\alpha_\bullet)\,,$$

où $\mathcal{P}_\bullet \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ est une résolution projective dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, et $\alpha_\bullet$ est un relèvement de α (*cf.* 2.4.1).

6.3.2. Nous allons comparer les foncteurs $\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}$ et $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}$ à l'aide du foncteur « *R-mdg simple associé* » (*cf.* 2.1)

$$\textstyle\sum : \mathcal{C}^{-}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \qquad (*)$$

qui se prolonge naturellement (2.1.2) en un foncteur

$$K\textstyle\sum : K^{-}(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)) \rightsquigarrow \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,.$$

Lorsque $\dim_{\mathrm{gb}} R < \infty$, nous avons construit dans la preuve de 2.4.1-(d), un relèvement projectif d'un *R-mdg* $\mathcal{N}$ à l'aide de la troncature intelligente en $d := \dim_{\mathrm{gb}}(R)$ d'une résolution projective

$$(\cdots \to \mathcal{P}_m \xrightarrow{\epsilon_m} \cdots \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{P}_0 \to \mathbf{0}) = \mathcal{P}_\bullet \twoheadrightarrow \mathcal{N}\,,$$

où chaque $\mathrm{o}(\mathcal{P}_i)$ est un *R-mg* projectif. Le morphisme canonique de complexes de *R-mdg*'s

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
(\mathcal{P}_\bullet,\epsilon_\bullet) & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{M}_{d+2} & \xrightarrow{\epsilon_{d+2}} & \mathcal{M}_{d+1} & \xrightarrow{\epsilon_{d+1}} & \mathcal{M}_d & \longrightarrow & \mathcal{M}_{d-1} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{d-2} & \longrightarrow \cdots \\
\downarrow & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{d+1}} & & \| & & \| & & \| & \\
\tau_{\geq d}\mathcal{P}_\bullet & \cdots & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \ker(\epsilon_d) & \hookrightarrow & \mathcal{M}_d & \xrightarrow{\epsilon_d} & \mathcal{M}_{d-1} & \xrightarrow{\epsilon_{d-1}} & \mathcal{M}_{d-2} & \xrightarrow{\epsilon_{d-2}} \cdots
\end{array}$$

donne le morphisme de *R-mdg*'s

$$\textstyle\sum \mathbb{L}\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}) = \sum \boldsymbol{F}(\mathcal{P}_\bullet) \xrightarrow{\Phi(\mathcal{N})} \sum \boldsymbol{F}(\tau_{\geq d}(\mathcal{P}_\bullet)) = \boldsymbol{F}(\sum \tau_{\geq d}(\mathcal{P}_\bullet)) = \mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})\,, \qquad (\diamond)$$

permettant la comparaison de $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$ et $\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$.

6.3.3. Ce qui précède s'applique *mutatis mutandis* au foncteur $\boldsymbol{G}$ contravariant, et, conformément aux usages, on notera $\mathbb{R}\,\boldsymbol{G}$ et $\mathbb{R}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{G}$ plutôt que $\mathbb{L}\,\boldsymbol{F}$ et $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}$, s'agissant maintenant de foncteurs dérivés à droite. Le morphisme de comparaison $(\diamond)$ s'écrit alors

$$\mathbb{D}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N}) \xrightarrow{\Phi(\mathcal{N})} \sum \mathbb{R}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N})\,. \qquad (\diamond')$$

6.3.4. Proposition. *On suppose R de dimension globale finie. Soient*

$$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$$

des foncteurs additifs, $\boldsymbol{F}$ covariant et commutant aux foncteurs de translation, et $\boldsymbol{G}$ contravariant et anticommutant aux foncteurs de translation.

Pour tout R-mdg $\mathcal{N}$,

a) *Le R-mdg $\sum \mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$ est acyclique.*

b) *Si $\boldsymbol{G}$ est exact à gauche, le morphisme naturel*

$$\Phi(_) : \mathbb{D}\,\boldsymbol{G}(_) \to \sum \mathbb{R}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{G}(_)$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration

a) Pour calculer $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$, on prend une résolution $\mathcal{P}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \!\!\!\rightarrow \mathcal{N}$ où les $\mathcal{P}_m$ sont des *R-mdg*'s projectifs donc homotopes à zéro (3.2.1-(a)). Il en est donc de même pour $\boldsymbol{F}\,\mathcal{P}_m$, de sorte que le complexe $(\boldsymbol{F}\,\mathcal{P}_\bullet, \boldsymbol{F}\,\epsilon_\bullet)$ est conforme aux hypothèses du théorème d'acyclicité 2.1.4-(b) et donc

$$\sum \mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\mathcal{F}(\mathcal{N}) = \sum \mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{P}_\bullet) = \text{acyclique}$$

b) On procède comme dans (a) en appliquant le foncteur contravariant $\boldsymbol{G}$ à la résolution projective $(\mathcal{P}_\bullet, \epsilon_\bullet)$.

Les morphismes entre scindages intelligents

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\tau_{>d}\mathcal{P}_\bullet & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{P}_{d+2} & \overset{\epsilon_{d+2}}{\twoheadrightarrow} & \ker(\epsilon_{d+1}) & \longrightarrow & \mathbf{0} & & & & & \\
\downarrow & & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & & & & \\
(\mathcal{P}_\bullet, \epsilon_\bullet) & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{P}_{d+2} & \xrightarrow{\epsilon_{d+2}} & \mathcal{P}_{d+1} & \xrightarrow{\epsilon_{d+1}} & \mathcal{P}_d & \longrightarrow & \mathcal{P}_{d-1} & \longrightarrow & \mathcal{P}_{d-2} & \longrightarrow \cdots \\
\downarrow & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{d+1}} & & \| & & \| & & \| & \\
\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet & \cdots & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \ker(\epsilon_d) & \hookrightarrow & \mathcal{P}_d & \xrightarrow{\epsilon_d} & \mathcal{P}_{d-1} & \xrightarrow{\epsilon_{d-1}} & \mathcal{P}_{d-2} & \xrightarrow{\epsilon_{d-2}} \cdots
\end{array}$$

donnent lieu à la suite

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{G}(\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet) \longrightarrow \boldsymbol{G}\,\mathcal{P}_\bullet \longrightarrow \boldsymbol{G}(\tau_{>d}\mathcal{P}_\bullet) \to \mathbf{0} \qquad (\diamond)$$

qui est exacte : à gauche puisque $\boldsymbol{G}$ l'est ainsi, et à droite puisque le conoyau du morphisme de droite est $I\!R^1\boldsymbol{G}(\ker(\epsilon_d)) = I\!R^{d+2}\boldsymbol{G}(\mathcal{N}) = 0$ car $\dim_{\mathrm{gb}}(R) = d$. Par ailleurs, le complexe

$$\boldsymbol{G}(\tau_{>d}\mathcal{P}_\bullet) = \big(\mathbf{0} \to \boldsymbol{G}(\ker(\epsilon_{d+1})) \to \boldsymbol{G}(\mathcal{P}_{d+2}) \to \boldsymbol{G}(\mathcal{P}_{d+3}) \to \cdots\big)$$

est exact puisque $\boldsymbol{G}$ est exact à gauche et que sa cohomologie calcule $I\!R^k\boldsymbol{G}(\ker(\epsilon_{d+1})) = I\!R^{k+d+2}\boldsymbol{G}(\mathcal{N}) = 0$, pour les mêmes raisons.

Si nous appliquons maintenant le foncteur $\sum$ à $(\diamond)$, on obtient la suite exacte courte de R-*mdg*'s

$$\mathbf{0} \to \sum \boldsymbol{G}(\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet) \longrightarrow \sum \boldsymbol{G}\,\mathcal{P}_\bullet \longrightarrow \sum \boldsymbol{G}(\tau_{>d}\mathcal{P}_\bullet) \to \mathbf{0}$$

où le terme de droite est acyclique d'après 2.1.4-(c).

Le morphisme canonique

$$I\!D\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N}) = \sum \boldsymbol{G}(\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet) \xrightarrow{\Phi(\mathcal{N})} \sum \boldsymbol{G}\,\mathcal{P}_\bullet = \sum I\!R\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N})$$

est bien, par conséquent, un quasi-isomorphisme. □

6.3.5. Remarques

a) Dans le cas du foncteur covariant $\boldsymbol{F}$, le morphisme canonique $(\diamond)$,

$$\Phi(\mathcal{N}) : \sum I\!L\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}) \longrightarrow I\!D\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$$

induit un isomorphisme entre la limite de la suite spectrale associée au bicomplexe $I\!L\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$ filtré par degrés des *mdg*'s [6], et le gradué de cohomologie de $I\!D\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$. En effet, le morphisme canonique de complexes $\mathcal{P}_\bullet \twoheadrightarrow \tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet$ induit un morphisme de **bi**complexes

6. Appelés « *degrés internes* ».

$\boldsymbol{F}\,\mathcal{P}_\bullet \to \boldsymbol{F}\,\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet$, d'où le morphisme des suites spectrales associées aux filtrations par le degrés de R-*mdg*'s (degrés internes) :

$$\mathbb{E}_r\,\Phi : \mathbb{E}_r(\boldsymbol{F}\,\mathcal{P}_\bullet, d_r) \longrightarrow \mathbb{E}_r(\boldsymbol{F}\,\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet, d_r)\,.$$

Or, les complexes $\mathbb{E}_1^k(\boldsymbol{F}\mathcal{P}_\bullet, d_1)$ et $\mathbb{E}_1^k(\boldsymbol{F}\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet, d_1)$ réalisent $\mathbb{L}^k\boldsymbol{F}(\mathrm{o}(\mathcal{N}))$ dans la catégorie dérivée de $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, de sorte que $\mathbb{E}_1\,\Phi$ est un quasi-isomorphisme. On en déduit que les morphismes $\mathbb{E}_r\,\Phi$ sont des isomorphismes pour tout $r \geq 2$. Maintenant, comme la filtration par degré interne du bicomplexe $\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet$ est régulière, ces suites spectrales convergent vers bien vers le gradué de la cohomologie de $\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$.

b) Dans le cas du foncteur contravariant $\boldsymbol{G}$, le morphisme naturel de R-*mdg*'s $\Phi(\mathcal{N}) : \mathbb{D}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N}) \to \sum \mathbb{R}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N})$ est isomorphisme à homotopie près, si et seulement si, le R-*mdg* $\sum \boldsymbol{G}(\tau_{>d}\mathcal{P}_\bullet)$, dont on sait déjà qu'il est acyclique, est aussi homotopiquement nul. Une condition suffisante pour cela, d'après (3.2.1-(a)), est *que les* R*-mg's* $\mathrm{o}(\boldsymbol{G}\,\mathcal{P}_k)$ *et* $\mathrm{o}(\boldsymbol{G}\ker(\epsilon_{d+1}))$ *soeint projectifs* (†). Or, si R est noethérien et que $\mathcal{N}$ est un R-module de type fini, les termes $\mathcal{P}_k$, et donc $\ker(\epsilon_{d+1})$, peuvent être pris projectifs de type fini, donc facteurs directs de R-modules libres de rang fini, et la condition (†) sera satisfaite pour peu que $\boldsymbol{G}(R)$ soit un R'-module projectif. Un cas intéressant est celui du foncteur $\boldsymbol{G}(_) := \mathrm{Homgr}_R(_, R)$, où R est un anneau de polynômes à un nombre fini de variables, à coefficiens entiers ou dans un corps. Même dans ce cas, j'ignore au moment d'écrire ces lignes, quelle est la classe d'homotopie de $\sum \boldsymbol{G}(\tau_{>d}\mathcal{P}_\bullet)$ pour $\mathcal{N}$ quelconque.

7. Scindage de R-mdgr's

7.1. R-*mdg*'s scindés

7.1.1. Notation. Pour tout R-*mdg* $\mathcal{M} = (M, d_{\mathcal{M}})$, on note $\mathrm{H}\,\mathcal{M}$ sa cohomologie en tant R-*mg*, et on note $\mathcal{H}\,\mathcal{M} := \mathcal{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{M}) = (\mathrm{H}\,\mathcal{M}, 0)$ (*cf.* 2.2.1).

7.1.2. Définition. Un R-*mdg* $\mathcal{M}$ est « *scindé* » dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ (resp. dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ ou $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$), s'il y est isomorphe à sa cohomologie, soit :

$$\mathcal{M} \sim \mathcal{H}\,\mathcal{M}\,.$$

7.1.3. Lemme. *Soit* $\mathcal{M}$ *un* R*-mdg.*

a) *Si* $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ *est projectif, le* R*-mdg* $\mathcal{M}$ *est scindé dans* $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ *si, et seulement si, il existe un quasi-isomorphisme de* R*-mdg's* $\mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$.

b) *Il existe un quasi-isomorphisme de R-mdg's $\mathcal{H}\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ si, et seulement si, la surjection canonique de R-mg's $\pi : \mathrm{Z}\mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathrm{H}\mathcal{M}$ est scindée. En particulier, si $\mathrm{H}\mathcal{M}$ est projectif, $\mathcal{M}$ est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

c) *Si $\dim_{\mathrm{proj}}(\mathrm{H}\mathcal{M}) \leq 1$, le R-mdg $\mathcal{M}$ est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

Démonstration.

a) Si $\pi_1 : \mathcal{Q}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{M}$ et $\pi_2 : \mathcal{Q}_2 \twoheadrightarrow \mathcal{H}\mathcal{M}$ sont des relèvement projectifs, et si $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\mathcal{M}$ est un isomorphisme dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, il existe (3.2.1) un morphisme de R-*mdg*'s $\widetilde{\alpha} : \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_2$ tel que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}_1 & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{M} \\ {\scriptstyle\widetilde{\alpha}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ \mathcal{Q}_2 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{H}\mathcal{M} \end{array}$$

est commutatif dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Maintenant, si $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est projectif, on peut prendre $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{M}$ et $\pi_1 = \mathrm{id}$, auquel cas $\pi_2 \circ \widetilde{\alpha} : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\mathcal{M}$ est un quasi-isomorphisme de R-*mdg*'s.

b) Lorsque $\mathrm{H}(\mathcal{M})$ est un R-*mg* projectif, la surjection $\mathrm{Z}\mathcal{M} \to \mathrm{H}\mathcal{M}$ admet une section $\sigma : \mathrm{H}\mathcal{M} \to \mathrm{Z}\mathcal{M}$ qui composée à l'inclusion $\mathrm{Z}\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ donne clairement un quasi-isomorphisme de $\mathcal{H}\mathcal{M}$ vers $\mathcal{M}$.

c) Fixons une résolution projective simultanée de longueur finie $\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M}$ construite à l'aide de résolutions projectives $\mathbf{0} \to P_1 \xrightarrow{\pi_1} P_0 \to \mathrm{H}\mathcal{M} \to \mathbf{0}$ et $Q_\bullet \xrightarrow{\nu} \mathrm{B}\mathcal{M}$ de R-*mg*'s. On a $\mathcal{R}_1 = \mathcal{F}(P_1) \oplus \mathcal{E}(Q_1)$ et si $x \in \mathcal{F}(P_1)$, on a $\epsilon_1(x) = (\pi_1(x), y)$ pour un certain cocycle $y \in \mathcal{E}(Q_0)$. En particulier, le complexe de R-*mdg*'s $\mathbf{0} \to \mathcal{F}(P_1) \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{F}(\epsilon_1(P_1)) \oplus \mathcal{E}(Q_0) \to \mathbf{0}$ est exact. On considère alors le morphisme de complexes de R-*mdg*'*s*

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{F}(P_1) \oplus \mathbf{0} & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{F}(\epsilon_1(P_1)) \oplus \mathcal{E}(Q_0) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ & & \downarrow{\scriptstyle\subseteq} & & \downarrow{\scriptstyle\subseteq} & & \\ \longrightarrow \mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\epsilon_2} & \mathcal{F}(P_1) \oplus \mathcal{E}(Q_1) & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{F}(P_0) \oplus \mathcal{E}(Q_0) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \longrightarrow \mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\epsilon'_2} & \mathcal{R}'_1 & \xrightarrow{\epsilon'_1} & \mathcal{R}'_0 = \mathcal{F}(\mathrm{H}\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

où la troisième ligne est le quotient des deux premières. Comme la première ligne est exacte, le morphisme de R-*mdg*'s induit $\Sigma\mathcal{R}_\bullet \to \Sigma\mathcal{R}'_\bullet$ est un quasi-isomorphisme, de même par ailleurs que l'injection $\mathcal{R}'_0 \subseteq \Sigma\mathcal{R}'_\bullet$. On a donc les quasi-isomorphismes de R-*mdg*'s

$$\mathcal{H}\mathcal{M} = \mathcal{R}'_0 \to \Sigma\mathcal{R}'_\bullet \leftarrow \Sigma\mathcal{R}_\bullet \to \mathcal{M}$$

et $\mathcal{H}\mathcal{M} \sim \mathcal{M}$ dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. □

7.1.4. Remarque. Dans l'assertion 7.1.3-(a), l'hypothèse sur la projectivité de $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est nécessaire. En effet, soit $p : M_1 \twoheadrightarrow M_0$ une surjection de R-*mg*'s et soit $\mathcal{M} =: \sum M_\bullet$. On a $\mathrm{H}\,\mathcal{M} = \ker(p)[1]$. Tout morphisme de R-*mdg*'s $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ se factorise à travers $\mathcal{M}/\,\mathrm{B}\,\mathcal{M} = M_1[1]$, et dire que α est un quasi-isomorphisme, équivaut alors à dire que p est scindé, ce qui n'est pas toujours vrai. Le R-*mdg* $\mathcal{M}$ est pourtant scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ puisque l'inclusion $\ker(p)[1] \subseteq \sum M_\bullet$ est un quasi-isomorphisme, ce qui est aussi conforme à l'assertion (b) du même lemme.

7.1.5. Remarque. Dans le contrexemple précédent, nous pouvons supposer que $\ker(p)$ est projectif, mais pas M_0. Dans ce cas, il existe un quasi-isomorphisme $\mathcal{H}\,\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, et il n'existe pas de quasi-isomorphisme $\mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$. Inversement, si nous considérons une injection $i : N_1 \to N_0$ entre R-*mg*'s projectifs, telle que $\mathrm{coker}(i)$ n'est pas projectif, et si nous posons $\mathcal{N} := \sum N_\bullet$, il existe bien un quasi-isomorphisme $\mathcal{N} \to \mathcal{H}\,\mathcal{N}$, et il n'existe pas de quasi-isomorphisme $\mathcal{H}\,\mathcal{N} \to \mathcal{N}$. Dans les deux cas, la cohomologie est de dimension projective ≤ 1, de sorte que le R-*mdg* $\mathcal{L} := \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ d'après 7.1.3-(c), mais il n'existe pas de quasi-isomorphisme de R-*mdg*'s $\mathcal{L} \to \mathcal{H}\,\mathcal{L}$ ni $\mathcal{H}\,\mathcal{L} \to \mathcal{L}$.

7.1.6. $\mathbb{D}\,\mathbf{Hotgr}^*_R(\langle$scindé$\rangle, N)$. Soit N un R-*mg*. La section 3.3.4 introduit le foncteur cohomologique

$$\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^*_R(_, N) : \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,,$$

et donne, pour tout R-*mg* M, un isomorphisme canonique (3.3.5-(a))

$$\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{F}(M), N) \cong \textstyle\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Extgr}^n_R(M, N[k-n])\,, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

Nous étudions dans cette partie les conditions de validité de cette identification lorsque l'on remplace $\mathcal{F}(M)$ par un R-*mdg* scindé $\mathcal{M}$.

Soient $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ deux isomorphismes dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Par fonctorialité, on obtient les bijections (φ_1) et (φ_2) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{H}\,\mathcal{M}, N) & \xrightarrow{(\varphi_1)} & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (\varphi_2)^{-1}\circ(\varphi_1)} & & \mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{M}, N) \\ \mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{H}\,\mathcal{M}, N) & \xrightarrow{(\varphi_2)} & \end{array}$$

et la bijection de transition $(\varphi_2)^{-1} \circ (\varphi_1)$ correspond à l'isomorphisme de la catégorie $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathcal{H}\,\mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}\,.$$

Maintenant, si $(P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\,\mathcal{M})$ est une résolution projective dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, la loi de composition naturelle

$$\circ : \mathrm{Hotgr}^a_R(P_{\geq 0}, N) \times \mathrm{Hotgr}^b_R(P_{\geq 0}, P_{\geq 0}) \to \mathrm{Hotgr}^{a+b}_R(P_{\geq 0}, N)\,, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}\,,$$

montre que l'action de $(\varphi_2)^{-1} \circ (\varphi_1)$ sur $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{H}\,\mathcal{M}, N)$ s'identifie à la composition à droite par le morphisme « *de transition* » $\Phi \in \mathrm{Hotgr}^0_R(P_{\geq 0}, P_{\geq 0})$ défini par la composée de relèvements $\widetilde{\varphi}_1 \circ \widetilde{\varphi}_2^{-1}$, autrement dit, on a

$$\begin{cases} \bullet\ \Phi = \widetilde{\varphi}_1 \circ \widetilde{\varphi}_2^{-1} \in \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{P}_{\geq 0}, P_{\geq 0})\,, \text{ et} \\ \bullet\ ((\varphi_2)^{-1} \circ (\varphi_1))(\alpha) = \alpha \circ \Phi\,, \quad \forall \alpha \in \mathrm{Hotgr}^*_R(P_{\geq 0}, N)\,. \end{cases} \tag{Eq.29}$$

Or, d'après 5.2.7 et 3.3.5-(a), nous avons

$$\begin{aligned} \Phi \in\ \mathrm{Hotgr}^0_R(P_{\geq 0}, P_{\geq 0}) &= \mathrm{Hotgr}^0_R(P_{\geq 0}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \\ &= \mathrm{Homgr}^0_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \oplus \textstyle\bigoplus_{k>0} \mathrm{Extgr}^k_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}[-k])\,. \end{aligned}$$

ce qui donne la décomposition canonique du morphisme de transition :

$$\Phi = \Phi_0 \oplus \Phi_1 \oplus \Phi_2 \oplus \cdots\,,$$

où la composante $\Phi_k : P_{\geq 0} \to \mathrm{H}\,\mathcal{M}$, qui correspond au facteur appartenant à $\mathrm{Extgr}^k_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$, est le morphisme de R-*mdg*'s associé à un certain morphisme de complexes de la forme

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_{k+1} & \xrightarrow{\epsilon_{k+1}} & P_k & \xrightarrow{\epsilon_k} & P_{k-1} & \xrightarrow{\epsilon_{k-1}} & \cdots & \xrightarrow{\epsilon_1} & P_0 \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_k} & & \downarrow & & & & \\ & & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathrm{H}\,\mathcal{M}[-k] & \longrightarrow & \mathbf{0} & & & & \end{array}$$

de sorte que l'action de Φ_k en cohomologie est nulle dès que $k > 0$, de plus

$$\Phi_0 \in \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \quad \text{coïncide avec} \quad \mathrm{H}\,\Phi : \mathrm{H}\,\mathcal{M} \to \mathrm{H}\,\mathcal{M}\,. \tag{Eq.30}$$

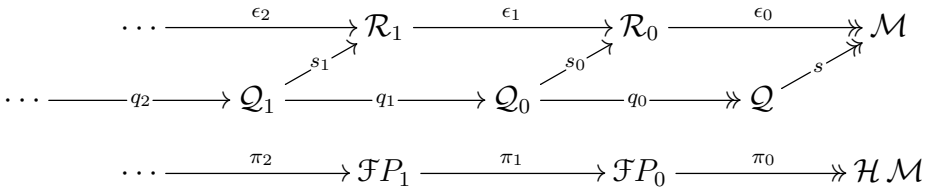
Conclusion. Ces observation montrent que même en exigeant aux isomorphismes $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ d'induire l'identité en cohomologie, les morphismes de transition Φ, qui vérifieraient alors $\Phi_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{H}\,\mathcal{M}}$, n'ont aucune raison d'être l'identité. Aussi, l'isomorphisme induit par φ :

$$\textstyle\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Extgr}^n_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, N[k-n]) \xrightarrow[(\varphi)]{\sim} \mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{M}, N)\,, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

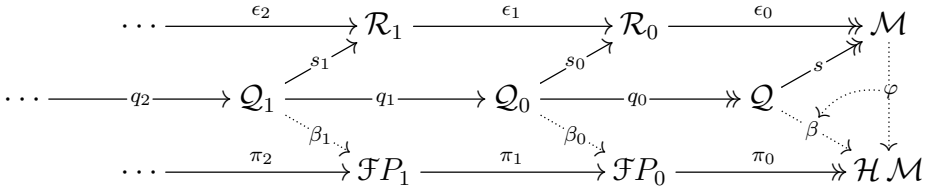
dépend du choix de φ, *i.e.* **n'est pas intrinsèque**.

Cette situation s'arrange par contre dès que l'on passe aux gradués. Donnons-nous une présentation projective $s : \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$ et des résolutions pro-

jectives simultannées $(\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M})$ et $(\mathcal{Q}_\bullet \xrightarrow{q} \mathcal{Q})$ compatibles à une résolution projective $(P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\,\mathcal{M})$. Soit $s_\bullet : \mathcal{Q}_\bullet \to \mathcal{R}_\bullet$ un relèvement de s. On a



Maintenant, pour tout isomorphisme $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ de $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, induisant l'identité en cohomologie, il existe un quasi-isomorphisme $\beta : \mathcal{Q} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et un relèvement projectif simultané de φ (5.2.6) :



où les morphismes

$$s_{\geq 0} : \mathcal{Q}_{\geq 0} \to \mathcal{R}_{\geq 0} \quad \text{et} \quad \beta_{\geq 0} : \mathcal{Q}_{\geq 0} \to \mathcal{F}P_{\geq 0}$$

sont des quasi-isomorphismes dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ qui respectent, par construction, les filtrations canoniques des complexes sous-jacents. Mais alors, les termes $\mathbb{E}_2$ des suites spectrales canoniques associées à $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, N)$ et $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{F}P_{\geq 0}, N)$ sont *identiques* et les morphismes induits par $(s_\bullet)$ et $(\beta_\bullet)$ sur ces termes sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre [7]. La proposition suivante en découle.

7.1.7. Proposition. *Soit $\mathcal{M}$ un R-mdg scindé et, pour $k \in \mathbb{Z}$, munissons $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{M}, N)$ et $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{H}\,\mathcal{M}, N)$ de la filtration canonique 6.2.1. Alors, pour tout isomorphisme $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ induisant l'identité en cohomologie, le morphisme induit*

$$\mathrm{Gr}\,\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{H}\,\mathcal{M}, N) \xrightarrow{\mathrm{Gr}(\varphi)} \mathrm{Gr}\,\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{M}, N)\,, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\,,$$

est une bijection indépendante de φ. En particulier, pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme canonique naturel de foncteurs

$$\mathrm{Extgr}^p_R(\mathrm{H}(_), N[k-p]) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gr}^p\,\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^k_R(_, N)\,,$$

7. On pourrait même faire abstraction de la compatibilité des résolutions simultanées par rapport à $(\mathcal{P}_\bullet \to \mathrm{H}\,\mathcal{M})$. Dans ce cas, les termes $\mathbb{E}_1$ des suites spectrales canoniques sont des résolutions projectives de $\mathrm{H}\,\mathcal{M}$ et les morphismes qui les relient sont homotopes à l'identité de sorte que les termes $\mathbb{E}_2$ s'identifient de même.

sur la sous-catégorie pleine des R-mdg's scindés de $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

7.1.8. Remarque. Une autre manière de procéder pour vérifier le caractère intrinsèque du morphisme $\mathrm{Gr}(\varphi)$ dans 7.1.7 consiste à montrer que la filtration canonique de $\mathcal{A} := \mathrm{Hotgr}^*_R(P_{\geq 0}, P_{\geq 0})$ en fait une *R-algèbre graduée filtrée* et que l'action de $\mathcal{A}$ à droite sur $\mathrm{Hotgr}^*_R(P_{\geq 0}, N)$ est bien compatible aux filtrations. On constate ensuite que le gradué de l'isomorphisme de transition Φ dans (Eq.29) n'est autre que l'isomorphisme $\Phi_0 = \mathrm{H}\,\Phi : \mathrm{H}\,\mathcal{M} \to \mathrm{H}\,\mathcal{M}$, d'après la remarque (Eq.30).

7.1.9. Suite spectale canonique associée à $\mathbb{D}\,\mathbf{Hotgr}^*_{\boldsymbol{R}}(_, \boldsymbol{N})$. En observant que le foncteur

$$\boldsymbol{G}_N(_) := \mathrm{Homgr}^\bullet_R(_, N) : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$$

est la somme directe $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Homgr}^0_R(_, N[k])[-k]$, l'assertion 6.2.4-(c) pour la suite spectrale canonique associée à $(\boldsymbol{G}_N, _)$, s'explicite en

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_2^{p,k-p}(\boldsymbol{G}_N, _) & \Longrightarrow & \mathbb{E}_\infty^{p,k-p}(\boldsymbol{G}_N, _) \\ \| & & \| \\ \mathrm{Extgr}^p_R(\mathrm{H}(_), N[k-p]) & & \mathrm{Gr}^p\,\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^k_R(_, N)\,, \end{array}$$

et ce *fonctoriellement sur toute la catégorie $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

Nous verrons dans 7.2.1 que lorsque $\mathcal{M}$ est scindé, cette suite spectale dégénère, on a $\mathbb{E}_2(\boldsymbol{G}_N, \mathcal{M}) = \mathbb{E}_\infty(\boldsymbol{G}_N, \mathcal{M})$, ce qui redémontre 7.1.7.

7.2. Critère général de scindage

7.2.1. Théorème. *On suppose R de dimension globale finie. Les conditions suivantes sont équivalentes pour un R-mdg $\mathcal{M}$.*

a) *$\mathcal{M}$ est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

b) *Pour tous les foncteurs additifs $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$, où $\boldsymbol{F}$ est covariant et commute aux foncteurs de translation, et où $\boldsymbol{G}$ est contravariant et anticommute aux foncteurs de translation, les suites spectrales canoniques 6.2.4-(b) :*

$$\begin{cases} (\mathbb{E}_r(\boldsymbol{F}, \mathcal{M}), d_r) : \ \mathbb{E}_2^{-p,q} = [\mathbb{L}^p\boldsymbol{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{M})]^q \implies \mathrm{Gr}^{-p}\,\mathrm{H}^{-p+q}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{M}))\,, \\ (\mathbb{E}_r(\boldsymbol{G}, \mathcal{M}), d_r) : \ \mathbb{E}_2^{p,q} = [\mathbb{R}^p\boldsymbol{G}\ \mathrm{H}(\mathcal{M})]^q \implies \mathrm{Gr}^{p}\,\mathrm{H}^{p+q}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{M}))\,, \end{cases}$$

sont dégénérées, i.e. *$d_r = 0$ pour tout $r \geq 2$.*

c) *L'assertion* (b) *est vérifiée par $\boldsymbol{G}(_) := \mathrm{Homgr}^\bullet_R(_, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$.*

d) *L'assertion* (b) *est vérifiée par $\boldsymbol{G}(_) := \mathrm{Homgr}^\bullet_R(_, R)$.* (*cf.* 1.2.4)

Démonstration

(a)⇒(b). Soit $\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M}$ une résolution projective simultanée de longueur finie compatible à une résolution projective de R-mg's $P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\mathcal{M}$ (*cf.* 5.2.5-(a)).

Supposons dans un premier temps que $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est projectif. Comme $\mathcal{M}$ est supposé scindé, on peut fixer (7.1.3-(a)) un quasi-isomorphisme de R-mdg's $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$. On a donc le diagramme de R-mdg's de lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{R}_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathcal{F}P_1 & \xrightarrow{\mathcal{F}\pi_1} & \mathcal{F}P_0 & \xrightarrow{\mathcal{F}\pi_0} & \mathcal{H}\,\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbf{0}
\end{array}$$

où l'on remarque que le foncteur « *cocycles* » $\mathrm{Z}(_)$ laisse exacte la deuxième ligne. Le morphisme φ se relève donc en un morphisme de résolutions $\varphi_\bullet$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{R}_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathcal{F}P_1 & \xrightarrow{\mathcal{F}\pi_1} & \mathcal{F}P_0 & \xrightarrow{\mathcal{F}\pi_0} & \mathcal{H}\,\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbf{0}
\end{array}$$

Maintenant, si $\boldsymbol{F}$ est un foncteur covariant, nous avons

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{M}) & = & \boldsymbol{F}(\sum \mathcal{R}_\bullet) \;=\; \sum \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_\bullet\,, \\
\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{H}\,\mathcal{M}) & = & \boldsymbol{F}(\sum \mathcal{F}P_\bullet) \;=\; \sum(\mathbb{L}\,\boldsymbol{F})(\mathrm{H}\,\mathcal{M})\,,
\end{array}\right.$$

et $\boldsymbol{F}\,\varphi_\bullet$ induit un morphisme de complexes de R-mdg's

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\boldsymbol{F}\,\epsilon_2} & \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\boldsymbol{F}\,\epsilon_1} & \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_0 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{F}\,\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{F}\,\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{F}\,\varphi_0} & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathcal{F}\,\boldsymbol{F}\,P_2 & \xrightarrow{\boldsymbol{F}\,\pi_2} & \mathcal{F}\,\boldsymbol{F}\,P_1 & \xrightarrow{\boldsymbol{F}\,\pi_1} & \mathcal{F}\,\boldsymbol{F}\,P_0 & \longrightarrow & \mathbf{0}
\end{array} \qquad (\circ)$$

d'où un morphisme des suites spectrales associées à la filtration par degré de résolution. Il est alors immédiat de constater que, par construction, $\boldsymbol{F}\,\varphi_\bullet$ induit un isomorphisme sur les termes $(\mathbb{E}_2, d_2)$ ($(\mathbb{E}_1, d_1)$ en fait). L'annulation de d_r pour $r \geq 2$, dans la suite spectrale de la deuxième ligne de $(\circ)$ entraîne alors la dégénérescence de la suite spectrale associée à la première ligne, qui n'est autre que la suite spectrale canonique.

Dans le cas où $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ n'est pas projectif, on fixé un relèvement projectif $\phi : \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$ (3.1.1, 3.1.3), des résolutions projectives simultanées $\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{Q}$ et $\mathcal{L}_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$, associées à une *même* résolution projective de $\mathrm{H}\,\mathcal{Q} = \mathrm{H}\,\mathcal{M}$, et l'on

considère le diagramme de R-*mdg*'s de lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{R}_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & \mathcal{Q} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathcal{L}_1 & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{L}_0 & \xrightarrow{\pi_0} & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbf{0}
\end{array}$$

où l'on remarque que le foncteur « *cocycles* » $\mathrm{Z}(_)$ laisse exacte la deuxième ligne. Le morphisme ϕ se relève donc en un morphisme de résolutions $\phi_\bullet$ donnant lieu au morphisme de complexes de R-*mdg*'s

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\boldsymbol{F}\,\epsilon_2} & \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\boldsymbol{F}\,\epsilon_1} & \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_0 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{F}\,\phi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{F}\,\phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_0} & & \\
\cdots & \longrightarrow & \boldsymbol{F}\,\mathcal{L}_2 & \xrightarrow{\pi_2} & \boldsymbol{F}\,\mathcal{L}_1 & \xrightarrow{\pi_1} & \boldsymbol{F}\,\mathcal{L}_0 & \longrightarrow & \mathbf{0}
\end{array}$$

induisant un isomorphisme sur les termes $\mathbb{E}_2$ des suites spectrales des lignes associées à la filtration par degré de résolution. La dégénérescence de la suites spectrale associée à la première ligne, déjà acquise puisque $\mathrm{o}(\mathcal{Q})$ est projective, entraîne la dégénérescence de la suite spectrale de la deuxième ligne, qui n'est autre que la suite spectrale canonique.

Le cas du foncteur contravariant $\boldsymbol{G}$ se traite de la même manière.

(c)⇒(a). Soit $\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M}$ une résolution projective simultanée de longueur finie compatible à une résolution projective de R-*mg*'s $P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\,\mathcal{M}$ (5.2.5-(a)). On a la suite exacte (verticalement) de complexes de R-*mdg*'s (*cf.* 2.1.6)

$$\begin{array}{lccccccccc}
\mathcal{R}_0 & & & & & & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{R}_0 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
{\scriptstyle i}\downarrow & & & & & & \downarrow & & \| & & \downarrow \\
\mathcal{R}_{\geq 0} & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{R}_3 & \xrightarrow{\epsilon_3} & \mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\epsilon_2} & \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{R}_0 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
{\scriptstyle p}\downarrow & & & \| & & \| & & \| & & \downarrow & & \\
\mathcal{R}_{\geq 1} & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{R}_3 & \xrightarrow{\epsilon_3} & \mathcal{M}_2 & \xrightarrow{\epsilon_2} & \mathcal{R}_1 & \longrightarrow & \mathbf{0} & &
\end{array} \qquad (\diamond_1)$$

où $\mathcal{R}_{\geq 0} := \Sigma\,\mathcal{R}_{\infty,0}$, et $\mathcal{R}_{\geq 1} := \Sigma\,\mathcal{R}_{\infty,1}$ (*cf.* 2.1.5), clairement scindée dans la catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, dont on déduit (4.1.1) le triangle distingué de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{i} \mathcal{R}_{\geq 0} \xrightarrow{p} \mathcal{R}_{\geq 1} \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}_1} \mathcal{R}_0[1]\,, \qquad (\diamond_2)$$

où $\widetilde{\epsilon}_1 : \mathcal{R}_{\geq_1} \to \mathcal{R}_0[1]$ est le morphisme de connexion de complexes (2.1.6)

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\mathcal{R}_{\geq 0} & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{R}_3 & \xrightarrow{\epsilon_3} & \mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\epsilon_2} & \mathcal{R}_1 & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \cdots \\
{\scriptstyle \widetilde{\epsilon}_1}\downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_1} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{R}_0[1] & \cdots & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{R}_0 & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

On en déduit le triangle distingué

$$\boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 1} \xrightarrow{\boldsymbol{G}\,p} \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\boldsymbol{G}\,i} \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\boldsymbol{G}\,\widetilde{\epsilon}_1} \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 1}[1]\,, \qquad (\diamond_3)$$

puis la suite longue de cohomologie (1.2.16)

$$\longrightarrow \mathrm{H}^0\,\boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 1} \xrightarrow{\boldsymbol{G}p} \mathrm{H}^0\,\boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\boldsymbol{G}i} \mathrm{H}^0\,\boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\boldsymbol{G}\widetilde{\epsilon}_1} \mathrm{H}^0\,\boldsymbol{G}(\mathcal{R}_{\geq 1}[1]) \longrightarrow,$$

et comme $\boldsymbol{G} = \mathrm{Homgr}^*_R(_, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$, on a (1.2.6)

$$\begin{aligned}\to \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \to \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \to \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) &\xrightarrow{\boldsymbol{G}\widetilde{\epsilon}_1} \\ &\longrightarrow \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \to\end{aligned}$$

dont déduit la suite exacte à gauche

$$\mathbf{0} \to\ \mathrm{Gr}^0(\mathrm{H}\,\boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 0})^0 \hookrightarrow \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \xrightarrow{\boldsymbol{G}\widetilde{\epsilon}_1} \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \to$$

que nous complétons par le diagramme commutatif (**I**), ci-dessous, à l'aide des morphismes 'h' qui font correspondre à un morphisme de R-*mdg*'s le morphisme de R-*mg*'s induit en cohomologie

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} \to\ \mathrm{Gr}^0(\mathrm{H}\,\boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 0})^0 & \hookrightarrow & \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \xrightarrow{\boldsymbol{G}\widetilde{\epsilon}_1} & \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \to & \\
\downarrow{\scriptstyle h}\ \vdots{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle h}\,(=) & (\mathbf{I}) & \downarrow{\scriptstyle h} & & (\diamond_4) \\
\mathrm{Homgr}^0_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \overset{\alpha}{\hookrightarrow} & \mathrm{Homgr}^0_R(P_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \overset{\beta}{\to} & \mathrm{Homgr}^0_R(K_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}), & &
\end{array}$$

où $K_0 = \ker(P_0 \xrightarrow{\pi_0} \mathrm{H}\,\mathcal{M})$ (*cf.* 5.2.5-(a)), et où α, β sont les morphismes naturels. On en déduit l'existence de l'injection ϕ qui n'est autre que le morphisme induit par $h : \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, R) \to \mathrm{Homgr}^0_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$ (dont on vérifie aisément que la composition avec $\mathrm{H}\,\boldsymbol{G}\,p : \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, R) \to \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, R)$ est nulle)

Si nous appliquons maintenant le foncteur $\boldsymbol{G} = \mathrm{Homgr}^\bullet_R(_, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$ au diagramme $(\diamond_1)$, nous obtenons la suite exacte de complexes de R-*mdg*'s *filtrés par la filtration canonique 6.2.1* :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\boldsymbol{G}\epsilon_2} & \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_2 \xrightarrow{\boldsymbol{G}\epsilon_3} \\
\downarrow & & \downarrow & & \| & & \| \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_0 & \xrightarrow{\boldsymbol{G}\epsilon_1} & \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\boldsymbol{G}\epsilon_2} & \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_2 \xrightarrow{\boldsymbol{G}\epsilon_3} \\
\downarrow & & \| & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_0 & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} \longrightarrow
\end{array}$$

de morphisme de R-*mdg*'s simples, la suite exacte scindée de R-*mdg*'s **filtrés**

$$\mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 1} \overset{\boldsymbol{G}p}{\hookrightarrow} \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 0} \overset{\boldsymbol{G}i}{\twoheadrightarrow} \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_0 \longrightarrow \mathbf{0}$$

dont est issu le triangle distingué $(\diamond_3)$ (4.1.1). On se retrouve alors avec la suite de termes $I\!E_1$ des suites spectrales canoniques correspondantes :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} & \longrightarrow & I\!E_1^*(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) & \longrightarrow & I\!E_1^*(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) & \longrightarrow & I\!E_1^*(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) \longrightarrow \mathbf{0} \\
 & & \| & & \| & & \| \\
\mathbf{0} & \dashrightarrow & \mathrm{Homgr}^*(P_{\geq 1}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \dashrightarrow & \mathrm{Homgr}^*(P_{\geq 0}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \dashrightarrow & \mathrm{Homgr}^*(P_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \dashrightarrow \mathbf{0}
\end{array}$$

où les morphismes induits (en pointillé) sont les morphismes naturels. On constate que cette suite de R-*mg*'s est exacte (et même scindée) de sorte que les termes $I\!E_2$ s'organisent suivant la suite exacte longue des $\mathrm{Extgr}(_, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & I\!E_2^p(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) & \longrightarrow & I\!E_2^p(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) & \longrightarrow & I\!E_2^p(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) & \longrightarrow \\
& \| & & \| & & \| & \\
\cdots\!\!\rightarrow & \mathrm{Extgr}_R^p(K_0[1], \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \cdots\!\!\rightarrow & \mathrm{Extgr}_R^p(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \cdots\!\!\rightarrow & \mathrm{Extgr}_R^p(P_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \cdots\!\!\rightarrow
\end{array}$$

dont on extrait

$$\begin{array}{ccccccc}
I\!E_2^0(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) & \longrightarrow & I\!E_2^0(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) & \longrightarrow & I\!E_2^1(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) & \longrightarrow & \\
\| & & \| & & \| & & \\
\mathrm{Homgr}_R^0(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \hookrightarrow^{\alpha} & \mathrm{Homgr}_R^0(P_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \stackrel{\beta}{\rightarrow} & \mathrm{Homgr}_R^0(K_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \longrightarrow &
\end{array}$$

où l'on retrouve les morphismes α, β du diagramme $(\diamond_4)$. On en déduit que lorsque la suite spectrale canonique $(I\!E_r(\boldsymbol{G}, \mathcal{M}), d_r)$ dégénère, on a

$$\mathrm{Gr}^0(\mathrm{H}\,\boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 0})^0 = I\!E_\infty^0(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) = I\!E_2^0(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) = \mathrm{Homgr}_R^0(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$$

et le morphisme $\phi : \mathrm{Gr}^0(\mathrm{H}\,\boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 0})^0 \to \mathrm{Homgr}_R^0(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$ de $(\diamond_4)$ est aussi surjectif. Il existe donc un morphisme dans $\mathrm{Hotgr}_R^0(\mathcal{R}_{\geq 0}, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$ induisant l'identité en cohomologie. Le R-*mdg* $\mathcal{R}_{\geq 0}$ est donc bien scindé.

(d)⇒(a). Par récurrence sur $\dim_{\mathrm{proj}}(\mathrm{H}\,\mathcal{M})$. Si $\dim_{\mathrm{proj}}(\mathrm{H}\,\mathcal{M}) \leq 1$, le R-*mdg* $\mathcal{M}$ est scindé d'après 7.1.3-(c). Soit maintenant $e > 1$ et supposons avoir établi l'implication (d)⇒(a) lorsque $\dim_{\mathrm{proj}}(\mathrm{H}\,\mathcal{M}) < e$.

Soit $\mathcal{M}$ vérifiant l'hypothèse de (d) et tel que $\dim_{\mathrm{proj}}(\mathrm{H}\,\mathcal{M}) = e$. Fixons une résolution projective simultanée de longueur finie $\mathcal{R}_\bullet \stackrel{\epsilon}{\to} \mathcal{M}$ compatible à une résolution projective de R-*mg*'s de longueur *minimale* $P_\bullet \stackrel{\pi}{\to} \mathrm{H}\,\mathcal{M}$, *i.e.* telle que $P_m = 0$ pour tout $m > \dim_{\mathrm{proj}}(\mathrm{H}\,\mathcal{M})$.

Nous avons la suite exacte courte de R-*mdg*'s

$$\mathbf{0} \to \mathcal{K}_0 \hookrightarrow \mathcal{R}_0 \stackrel{\epsilon_0}{\to} \mathcal{M} \to \mathbf{0}\,, \tag{Eq.31}$$

où $\mathcal{K}_0 := \ker(\epsilon_0)$. Nous avons la résolution projective simultanée

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{R}_2 \stackrel{\epsilon_2}{\to} \mathcal{R}_1 \stackrel{\epsilon_1}{\to} \mathcal{K}_0 \to \mathbf{0} \tag{Eq.32}$$

et la suite exacte courte de R-*mg*'s

$$\mathbf{0} \to K_0 \hookrightarrow P_0 \stackrel{\pi_0}{\to} \mathrm{H}\,\mathcal{M} \to \mathbf{0} \tag{Eq.33}$$

où $K_0 = \ker(\pi_0) = \mathrm{H}\,\mathcal{K}_0$. On a $\dim_{\mathrm{proj}}(K_0) = \dim_{\mathrm{proj}}(\mathrm{H}\,\mathcal{M}) - 1$, compte tenu de la minimalité de la longueur de la résolution $P_\bullet \stackrel{\pi}{\to} \mathrm{H}\,\mathcal{M}$.

La suite exacte (verticalement) de complexes de R-*mdg*'s (*cf.* 2.1.6)

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{R}_0 & \longrightarrow \mathbf{0} \\
 & \downarrow & & \downarrow & \overset{i_0}{} & \| & \downarrow \\
\longrightarrow & \mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\epsilon_2} & \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{R}_0 & \longrightarrow \mathbf{0} \\
 & {\scriptstyle p_2}\| & & {\scriptstyle p_1}\| & & {\scriptstyle p_0}\downarrow & \\
\longrightarrow & \mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\epsilon_2} & \mathcal{R}_1 & \longrightarrow & \mathbf{0} &
\end{array} \tag{Eq.34}$$

donne la suite exacte courte de R-*mdg*'s,

$$\mathbf{0} \to \mathcal{R}_0 \underset{\rho}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \mathcal{R}_{\geq 0} \underset{\sigma}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathcal{R}_{\geq 1} \to \mathbf{0}\,, \tag{Eq.35}$$

où $\mathcal{R}_{\geq 0} := \sum \mathcal{R}_{\infty,0}$, et $\mathcal{R}_{\geq 1} := \sum \mathcal{R}_{\infty,1}$ (*cf.* 2.1.5), scindée dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$ par l'inclusion $\sigma : \mathcal{R}_{\geq 1} \subseteq \mathcal{R}_{\geq 0}$ et la projection $\rho : \mathcal{R}_{\geq 0} \twoheadrightarrow \mathrm{coker}(\sigma) = \mathcal{R}_0$. On en déduit (4.1.1) le triangle distingué de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{i} \mathcal{R}_{\geq 0} \xrightarrow{p} \mathcal{R}_{\geq 1} \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}_1} \mathcal{R}_0[1] \longrightarrow\,, \tag{Eq.36}$$

où $\widetilde{\epsilon}_1 : \mathcal{R}_{\geq 1} \to \mathcal{R}_0[1]$ est le morphisme de connexion de complexes (2.1.6)

$$\begin{array}{cccccccccc}
\mathcal{R}_{\geq 1} & \cdots \longrightarrow & \mathcal{R}_3 & \xrightarrow{\epsilon_3} & \mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\epsilon_2} & \mathcal{R}_1 & \longrightarrow \mathbf{0} & \longrightarrow \mathbf{0} & \longrightarrow \cdots \\
{\scriptstyle \widetilde{\epsilon}_1}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle \epsilon_1}\downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\mathcal{R}_0[1] & \cdots \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{R}_0 & \longrightarrow \mathbf{0} & \longrightarrow \mathbf{0} & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Si nous appliquons maintenant un foncteur contravariant $\boldsymbol{G}$ au diagramme (Eq.34), nous obtenons la suite exacte (verticale) de complexes de R-*mdg*'s *filtrés par la filtration canonique 6.2.1* :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} & \longrightarrow \mathbf{0} & \longrightarrow \boldsymbol{G}\mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\boldsymbol{G}\epsilon_2} & \boldsymbol{G}\mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\boldsymbol{G}\epsilon_3} & \\
\downarrow & \downarrow & \| & & \| & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow \boldsymbol{G}\mathcal{R}_0 & \xrightarrow{\boldsymbol{G}\epsilon_1} \boldsymbol{G}\mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\boldsymbol{G}\epsilon_2} & \boldsymbol{G}\mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\boldsymbol{G}\epsilon_3} & \\
\downarrow & \| & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow \boldsymbol{G}\mathcal{R}_0 & \longrightarrow \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow &
\end{array}$$

la suite exacte des R-*mdg*'s simples associés (scindée dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$)

$$\mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{G}\mathcal{R}_{\geq 1} \xhookrightarrow{\boldsymbol{G}p} \boldsymbol{G}\mathcal{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\boldsymbol{G}i} \boldsymbol{G}\mathcal{R}_0 \longrightarrow \mathbf{0}\ ,$$

et le triangle distingué de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\boldsymbol{G}\mathcal{R}_{\geq 1} \xrightarrow{\boldsymbol{G}p} \boldsymbol{G}\mathcal{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\boldsymbol{G}i} \boldsymbol{G}\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\boldsymbol{G}\widetilde{\epsilon}_1} \boldsymbol{G}(\mathcal{R}_{\geq 1}[-1])\,, \tag{Eq.37}$$

où il convient de souligner que les morphismes $\boldsymbol{G}p, \boldsymbol{G}i, \boldsymbol{G}\widetilde{\epsilon}_1$ sont des morphismes de R-*mdg*'s *compatibles aux filtrations canoniques* et induisent donc *des morphismes des suites spectrales canoniques associées.*

Les paragraphes suivants développent la remarque 7.1.9.

Lorsque $\boldsymbol{G} = \mathrm{Homgr}^\bullet_R(_, N)$, où N est un R-*mg*, le triangle exact (Eq.37) donne, en passant en cohomologie (*cf.* 1.2.16, 1.2.6), la suite exacte longue

$$\begin{aligned}\longrightarrow \mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, N) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, N) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{R}_0, N) \xrightarrow{\gamma[1]} \\ \longrightarrow \mathrm{Hotgr}^{k+1}_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, N) \longrightarrow\end{aligned} \tag{Eq.38}$$

où $\alpha(_) := (_) \circ p$, $\beta(_) := \beta \circ i$ et $\gamma(_) = (_) \circ \tilde{\epsilon}_1$.

Le triangle (Eq.37) donne aussi lieu à la suite exacte courte de termes $I\!E_0$ des suites spectrales canoniques, trivialement scindée dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$,

$$\mathbf{0} \longrightarrow I\!E_0^{\bullet -1}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) \longrightarrow I\!E_0^\bullet(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) \longrightarrow I\!E_0^\bullet(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) \longrightarrow \mathbf{0}$$

avec

$$\begin{aligned} I\!E_0^{\bullet -1}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) &= \textstyle\bigoplus_{p\geq 1} \mathrm{Homgr}^*_R(\mathcal{R}_p[p], N) \\ I\!E_0^{\bullet}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) &= \textstyle\bigoplus_{p\geq 0} \mathrm{Homgr}^*_R(\mathcal{R}_p[p], N) \\ I\!E_0^{\bullet}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) &= \mathrm{Homgr}^*_R(\mathcal{R}_0, N) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} I\!E_1^{p-1,q+1}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) &= \textstyle\bigoplus_{p\geq 1} \mathrm{Homgr}^0_R(P_p, N[q]) \\ I\!E_1^{p,q}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) &= \textstyle\bigoplus_{p\geq 0} \mathrm{Homgr}^0_R(P_p, N[q]) \\ I\!E_1^{0,q}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) &= \mathrm{Homgr}^0_R(P_0, N[q]) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I\!E_2^{p-1,q+1}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) &= \textstyle\bigoplus_{p\geq 1} \mathrm{Extgr}^{p-1}_R(K_0, N[q]) \\ I\!E_2^{p,q}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) &= \textstyle\bigoplus_{p\geq 0} \mathrm{Extgr}^{p}_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, N[q]) \\ I\!E_2^{0,q}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) &= \mathrm{Homgr}^0_R(P_0, N[q]) \end{aligned}$$

ce qui montre que la suite longue des termes $I\!E_2$ induite par (Eq.37) est la somme directe des suites exactes longues des $\mathrm{Extgr}(_, N[q])$ induites par la suite exacte courte (Eq.33), soit

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow I\!E_2^{p-1,q+1}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) & \longrightarrow & I\!E_2^{p,q}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) & \longrightarrow & I\!E_2^{p,q}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) & \longrightarrow \\ \| & & \| & & \| & \\ \longrightarrow \mathrm{Extgr}^{p-1}_R(K_0, N[q]) & \longrightarrow & \mathrm{Extgr}^{p}_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, N[q]) & \longrightarrow & \mathrm{Extgr}^{p}_R(P_0, N[q]) & \longrightarrow \end{array}$$

Par conséquent, lorsque les trois suites spectrales en question dégénèrent, *i.e.* $d_r = 0$ pour $r \geq 2$, on a un isomorphisme naturel des suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow \mathrm{Gr}^{p-1,q+1}(\mathcal{R}_{\geq 1}, N) & \xrightarrow{\mathrm{Gr}\,\alpha} & \mathrm{Gr}^{p,q}(\mathcal{R}_{\geq 0}, N) & \xrightarrow{\mathrm{Gr}\,\beta} & \mathrm{Gr}^{p,q}(\mathcal{R}_0, N) & \xrightarrow{\mathrm{Gr}\,\gamma} \\ \updownarrow\cong & & \updownarrow\cong & & \updownarrow\cong & \\ \longrightarrow \mathrm{Extgr}^{p-1}_R(K_0, N[q]) & \longrightarrow & \mathrm{Extgr}^{p}_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, N[q]) & \longrightarrow & \mathrm{Extgr}^{p}_R(P_0, N[q]) & \longrightarrow \end{array} \tag{Eq.39}$$

où nous avons noté $\mathrm{Gr}^{a,b}(_, N) := \mathrm{Gr}^a(\mathrm{Hotgr}^{a+b}_R(_, N))$, et où, comme précédemment, $\alpha(_) := (_) \circ p$, $\beta(_) := \beta \circ i$, $\gamma(_) = (_) \circ \tilde{\epsilon}_1$.

1. – Dégénérescence de la suite spectrale canonique $\mathbb{E}(\boldsymbol{G}, \mathcal{K}_0)$.

Dans la construction de la suite spectrale $(\mathbb{E}(\mathcal{C})_r, d(\mathcal{C})_r)$ associée à un *R-mdg* filtré $\mathcal{C}_\star = (C, d)_\star$, on pose (*cf.* [G], §4 p. 77)

$$\begin{cases} Z(\mathcal{C})^p_r &:= \{\omega \in C_p \mid d\omega \in C_{p+r}\} \quad \text{et} \\ \mathbb{E}(\mathcal{C})^p_r &:= \dfrac{Z(\mathcal{C})^p_r}{dZ(\mathcal{C})^{p-r+1}_{r-1} + Z(\mathcal{C})^{p+1}_{r-1}}\,, \end{cases}$$

de sorte que l'annulation de la différentielle $d(\mathcal{C})_r : \mathbb{E}(\mathcal{C})_r \to \mathbb{E}(\mathcal{C})_r$, équivaut à l'inclusion

$$dZ(\mathcal{C})^p_r \subseteq dZ(\mathcal{C})^{p+1}_{r-1} + C_{p+r+1}\,, \quad \forall p \in \mathbb{N}\,.$$

Or, pour tout $m \geq 0$, on a $Z(\mathcal{C}_m)^p_r = Z(\mathcal{C})^{m+p}_r$, de sorte que la condition d'annulation de $d(\mathcal{C}_m)_r : \mathbb{E}(\mathcal{C}_m)_r \to \mathbb{E}(\mathcal{C}_m)_r$ s'écrit

$$dZ(\mathcal{C})^{m+p}_r \subseteq dZ(\mathcal{C})^{m+p+1}_{r-1} + C_{m+p+r+1}\,, \quad \forall p \in \mathbb{N}\,.$$

L'annulation de $d(\mathcal{C}_m)_r$ résulte donc de l'annulation de $d(C)_r$. En particulier, la dégénrescence de suite spectrale canonique $\mathbb{E}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0})$ entraîne celle de $\mathbb{E}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1})$ qui n'est autre que $\mathbb{E}(\boldsymbol{G}, \mathcal{K}_0)$ ((Eq.31),(Eq.32)).

2. – Scindage de $\mathcal{K}_0$. De (*1*), du fait que $\dim_{\mathrm{proj}}(K_0) < \dim_{\mathrm{proj}}(\mathcal{M})$ et par hypothèse de récurrence, le *R-mdg* $\mathcal{K}_0$ est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Fixons un quasi-morphisme de *R-mdg*'s

$$\phi : \mathcal{R}_{\geq 1} \to (K_0[1], 0)\,, \tag{Eq.40}$$

induisant l'identité en cohomologie, donc tel que sa restriction à $P_1 \subseteq \mathcal{R}_1$ est la surjection $\pi_1 : P_1 \twoheadrightarrow K_0$ présente dans la résolution $(P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\,\mathcal{M})$

3. – Dégénérescence de la suite spectrale canonique $\mathbb{E}(\mathrm{Homgr}^\bullet_R(_, P), \mathcal{M})$. Un *R-mg* projectif P est toujours facteur direct d'un *R-mg* libre L, on a donc $L = P \oplus P'$, d'où une décomposition de foncteurs

$$\mathrm{Homgr}^\bullet_R(_, L) = \mathrm{Homgr}^\bullet_R(_, P) \oplus \mathrm{Homgr}^\bullet_R(_, P')\,,$$

et donc des suites spectrales canoniques

$$\mathbb{E}(\mathrm{Homgr}^\bullet_R(_, L), \mathcal{M}) = \mathbb{E}(\mathrm{Homgr}^\bullet_R(_, P), \mathcal{M}) \oplus \mathbb{E}(\mathrm{Homgr}^\bullet_R(_, P'), \mathcal{M})\,.$$

Ainsi, la dégénérescence de $\mathbb{E}(\mathrm{Homgr}^\bullet_R(_, R), \mathcal{M})$ implique la dégénérescence de $\mathbb{E}(\mathrm{Homgr}^\bullet_R(_, L), \mathcal{M})$, qui implique celle des deux autres.

3. – Scindage de $\mathcal{R}_{\geq 0}$.

• *Conservation de degrés.* Le morphisme de R-*mdg*'s $p : \mathcal{R}_{\geq 0} \to \mathcal{R}_{\geq 1}$ respecte les filtrations canoniques en introduisant un décalage d'une unité, on a, de ce fait, un morphisme naturel

$$\mathrm{Gr}^* \,\mathrm{Hotgr}_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, N) \to \mathrm{Gr}^{*+1} \,\mathrm{Hotgr}_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, N)\,. \tag{Eq.41}$$

Il s'ensuit que si $\alpha : \mathcal{R}_{\geq 1} \to N$ est un morphisme de R-*mdg*'s, on a

$$\deg \mathrm{Gr}(\alpha \circ p) \geq \deg \mathrm{Gr}(\alpha) + 1\,.$$

Le rapport précis entre les degrés de α et $\alpha \circ p$ est un ingrédiant important dans la suite, et c'est là que l'hypothèse de dégénérescence des suites spectrales joue un rôle déterminant. Voici l'énoncé dont on aura besoin.

Lemme. Pour tout R-mg projectif P, le morphisme (Eq.41) *est tel que*

— $\mathrm{Gr}^0 \,\mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, P) \twoheadrightarrow \mathrm{Gr}^1 \,\mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, P)$ *est surjectif;*

— $\mathrm{Gr}^i \,\mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, P) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gr}^{i+1} \,\mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, P)$ *est bijectif* $\quad \forall i > 0$.

Par conséquent, pour tout morphisme de R-mdg's $\alpha : R_{\geq 1} \to P$ vérifiant $\deg \mathrm{Gr}(\alpha) > 0$, *on a*

$$\deg \mathrm{Gr}(\alpha \circ p) = \deg \mathrm{Gr}(\alpha) + 1\,.$$

Preuve. L'explicitation des suites (Eq.39) en degré total $p + q = 1$ donne :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Gr}^{0,1}(\mathcal{R}_0[1], P) & \xrightarrow{\mathrm{Gr}\,\gamma} & \bigoplus_{p+q=1} \mathrm{Gr}^{p-1,q+1}(\mathcal{R}_{\geq 1}, P) & \xrightarrow{\mathrm{Gr}\,\alpha} & \bigoplus_{p+q=1} \mathrm{Gr}^{p,q}(\mathcal{R}_{\geq 0}, P) & \xrightarrow{\mathrm{Gr}\,\beta} & \\
\updownarrow\cong & & \updownarrow\cong & & \updownarrow\cong & & \\
\mathrm{Homgr}^0_R(P_0, P[0]) & \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=1} \mathrm{Extgr}^{p-1}_R(K_0, P[q]) & \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=1} \mathrm{Extgr}^{p}_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, P[q]) & \longrightarrow & \\
\| & & \| & & \| & & \\
\mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathrm{Homgr}^0_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, P[1]) & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
\mathrm{Homgr}^0_R(P_0, P[0]) & \xrightarrow{(\gamma)_1} & \mathrm{Homgr}^0_R(K_0, P[0]) & \xrightarrow{(\alpha)_1} & \mathrm{Extgr}^1_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, P[0]) & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
\mathbf{0} & \xrightarrow{(\gamma)_2} & \mathrm{Extgr}^1_R(K_0, P[-1]) & \xrightarrow[\cong]{(\alpha)_2} & \mathrm{Extgr}^2_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, P[-1]) & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
\mathbf{0} & \xrightarrow{(\gamma)_3} & \mathrm{Extgr}^2_R(K_0, P[-2]) & \xrightarrow[\cong]{(\alpha)_3} & \mathrm{Extgr}^3_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, P[-2]) & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array} \tag{Eq.42}$$

et le lemme résulte de l'inspection de la colonne des morphismes (α). □

• *Première étape.* L'idée pour vérifier que $\mathcal{R}_{\geq 1}$ est scindé consiste à montrer qu'il existe dans $I\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ un diagramme commutatif (**I**)

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}_{\geq 1} & \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}_1} & \mathcal{R}_0[1] & \dashrightarrow & \hat{\boldsymbol{c}}(\widetilde{\epsilon}_1) = \mathcal{R}_{\geq 0}[1] \\ {\scriptstyle \text{q.i.}}\downarrow{\scriptstyle \phi} & & {\scriptstyle \text{q.i.}}\downarrow{\scriptstyle \psi} & & {\scriptstyle \text{q.i.}}\downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ K_0[1] & \xrightarrow[\subseteq]{j} & P_0[1] & \dashrightarrow & \hat{\boldsymbol{c}}(j) \xrightarrow[\text{q.i.}]{\lambda} \mathrm{H}\,\mathcal{M}[1] \end{array} \qquad (\mathbf{I}) \qquad \text{(Eq.43)}$$

où ϕ et ψ sont des quasi-isomorphismes. Les propiétés des catégories triangulées garantissent alors l'existence d'un quasi-isomorphisme $\varphi : \hat{\boldsymbol{c}}(\widetilde{\epsilon}_1) \to \hat{\boldsymbol{c}}(j)$ dans $I\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Or, on a $\hat{\boldsymbol{c}}(\widetilde{\epsilon}_1) = \mathcal{R}_{\geq 0}[1]$, et l'application $\lambda : \hat{\boldsymbol{c}}(j) \to \mathrm{H}\,\mathcal{M}[1]$ qui fait correspondre $(x, y) \mapsto x (\mathrm{mod}\ K_0)$ est bien un quasi-isomorphisme. La composée $(\lambda \circ \varphi)[-1] : \mathcal{R}_{\geq 0} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ est alors le quasi-isomorphisme cherché.

• *Deuxième étape.* Plaçons-nous dans $I\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et considérons le diagramme (non commutatif)

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{R}_0 & \xrightarrow{i} & \mathcal{R}_{\geq 0} & \xrightarrow{p} & \mathcal{R}_{\geq 1} & \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}_1} & \mathcal{R}_0[1] & \xrightarrow{i[1]} & \mathcal{R}_{\geq 0}[1] \\ & \searrow^{\beta} & & & {\scriptstyle \delta}\downarrow{\scriptstyle \phi} & \searrow^{\alpha} & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \\ & & & & K_0[1] & \xrightarrow[\subseteq]{j} & P_0[1] & \xrightarrow{q} & \hat{\boldsymbol{c}}(j) \longrightarrow K_0[2] \end{array} \qquad (\mathbf{I})$$

où

— les lignes sont des triangle distingués ;
— le morphisme $\phi : \mathcal{R}_{\geq 1} \to K_0[1]$ est le quasi-isomorphisme (Eq.40) ;
— le morphisme $\psi : \mathcal{R}_0[1] = \mathcal{E}(Q_0)[1] \oplus \mathcal{F}(P_0)[1] \to P_0[1]$, est le morphisme nul sur $\mathcal{E}(Q_0)[1]$ et l'identité sur $\mathcal{F}(P_0)[1]$;
— le morphisme $\alpha : \mathcal{R}_{\geq 1} \to \mathcal{P}_0[1]$ est la différence

$$\alpha := \psi \circ \widetilde{\epsilon}_1 - j \circ \phi\,.$$

Si $\alpha = 0$, les remarques de la première étape s'appliquent et l'implication (d)⇒(a) est prouvée. Autrement, on remarque que

$$q \circ (\alpha \circ p) = q \circ \psi \circ (\widetilde{\epsilon}_1 \circ p) - (q \circ j) \circ \phi \circ p = 0$$

de sorte qu'il existe $\beta : \mathcal{R}_{\geq 0} \to K_0[1]$ vérifiant $j \circ \beta = \alpha \circ p$. Or, l'action de β en cohomologie est nulle puisque

$$\mathrm{H}(j) \circ \mathrm{H}(\beta) = \mathrm{H}(j \circ \beta) = \mathrm{H}(\alpha \circ p)$$

où $\mathrm{H}(j)$ est injective. On en déduit l'annulation de $\beta \circ i$ puisque ce morphisme, élément de $\mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_0, P_0[1])$ est entièrement déterminé par son action en cohomologie d'après l'égalité d'adjonction (2.2.2) :

$$\mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_0, N) = \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{F}(P_0), N) = \mathrm{Homgr}^0_R(P_0, N) = \mathrm{Homgr}^0_R(\mathrm{H}(\mathcal{R}_0), N)$$

pour tout R-*mg* N. On conclut qu'il existe $\delta : \mathcal{R}_{\geq 1} \to K_0[1]$ tel que $\beta = \delta \circ p$

Montrons que $\mathrm{H}(\delta) = 0$.

Comme $\mathrm{H}(j)$ est injective, il suffit de monter que $\mathrm{H}(j \circ \delta) = 0$, autrement dit, que $\deg \mathrm{Gr}(j \circ \delta) > 0$

Maintenant, on aura $\deg \mathrm{Gr}(\delta) > 0$ si, et seulement si, l'action de δ en cohomologie est nulle, et , si, et seulement si, l'action de $j \circ \delta \in \mathrm{Homgr}(\mathcal{R}_{\geq 1}, P_0[1])$ est nulle en cohomologie

On note

$$\phi' := j \circ \phi \quad \text{et} \quad \widetilde{\phi}' := \phi' \circ p\,.$$

Supposons $\widetilde{\phi}' = 0$. Alors, grâce au fait que $\mathrm{Hotgr}_R(_, P_0[1])$ est un foncteur cohomologique, il existe $\psi : \mathcal{R}_0[1] \to P_0[1]$ rendant (**I**) commutatif, autrement dit, tel que l'on a $\phi' = \psi \circ \widetilde{\epsilon}_1 = \gamma(\psi)$ dans **??**. Par ailleurs, comme $\mathcal{R}_{\geq 1}$ et $\mathcal{R}_0$ sont scindés, $\mathrm{Gr}^0(\gamma)$ se lit dans son action en cohomologie (*cf.* 7.1.7), *i.e.* il correspond au morphisme de restriction $\mathrm{Homgr}^0_R(P_0, P_0) \to \mathrm{Homgr}^0_R(K_0, P_0)$. Or, $\mathrm{Gr}^0(\phi')$ s'identifie à l'inclusion $K_0 \subseteq P_0$ qui est bien la restriction de $\mathrm{id} : P_0 \to P_0$. On peut donc prendre ψ dans (**I**), tel qu'il induit l'identité en cohomologie. Le scindage de $\mathcal{R}_{\geq 0}$ en découle alors d'après la première étape.

Nous sommes ainsi ramenés à prouver, sachant que $\mathcal{R}_{\geq 1}$ est scindé, que

> *Il existe un morphisme $\Phi : \mathcal{R}_{\geq 1} \to K_0[1]$ induisant l'identité en cohomologie, et tel que la composée*
> $$\widetilde{\Phi}' := (j \circ \Phi) \circ p \in \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, P_0)$$
> *est nulle.* (Eq.44)

Nous allons construire un tel Φ en modifiant un quasi-isomorphisme donné $\phi \in \mathrm{Hotgr}^0(\mathcal{R}_{\geq 1}, K_0[1])$ dont on suppose qu'il induit l'identité en cohomologie. Nous avons

$$\phi \in \mathrm{Hotgr}^1(\mathcal{R}_{\geq 1}, K_0) = \textstyle\bigoplus_{\ell \geq 1} \mathrm{Extgr}^{\ell-1}_R(K_0, K_0[1-\ell])\,, \tag{Eq.45}$$

ce qui donne la décomposition, indexée par $\ell \geq 1$,

$$\phi = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \cdots\,, \quad \text{avec} \begin{cases} \phi_\ell \in \mathrm{Extgr}^{\ell-1}_R(K_0, K_0[1-\ell]) \text{ et} \\ \phi_1 = \mathrm{id}_{K_0} \end{cases} \tag{Eq.46}$$

On notera comme précédemment $\phi' := j \circ \phi$, et $\widetilde{\phi}' := \phi' \circ p$.

Nous avons muni $\mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, P_0)$ d'une filtration finie

$$\mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, P_0)_0 \supseteq \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, P_0)_1 \supseteq \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, P_0)_2 \supseteq \cdots$$

et l'hypothèse de dégénérescence sur $\mathcal{R}_{\geq 0}$ donne les identifications (Eq.39)

$$\begin{cases} \mathrm{Gr}^0(\mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, P_0)) = \mathrm{Homgr}^0_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, P_1)\,, \\ \mathrm{Gr}^j(\mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, P_0)) = \mathrm{Extgr}^\ell_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, P_0[1-\ell])\,, \quad \forall \ell > 0. \end{cases}$$

On voit alors, à l'aide de (Eq.42), que lorsque $\widetilde{\phi'} \neq 0$, le degré de $\mathrm{Gr}(\widetilde{\phi'})$ est nécessairement ≥ 2. En effet, on a

$$\phi' = j \circ \phi \in \mathrm{Homgr}^1(\mathcal{R}_{\geq 1}, P_0) = \bigoplus\nolimits_{\ell \geq 1} \mathrm{Extgr}^{\ell-1}_R(K_0, P_0[1-\ell])\,,$$

d'où la décomposition, indexée par $\ell \geq 1$,

$$\phi' = \phi'_1 \oplus \phi'_2 \oplus \cdots\,, \quad \text{avec } \phi'_\ell \in \mathrm{Extgr}^{\ell-1}_R(K_0, P_0[1-\ell])\,, \tag{Eq.47}$$

dont le rapport avec la décomposition (Eq.46) est donné par

$$\phi'_\ell = j^\ell_*(K_0)(\phi_\ell)\,, \tag{Eq.48}$$

où

$$j^\ell_*(K_0) : \mathrm{Extgr}^{\ell-1}_R(K_0, K_0[1-\ell]) \to \mathrm{Extgr}^{\ell-1}_R(K_0, P_0[1-\ell])$$

est le morphisme naturel d'extensions induit par l'inclusion $j : K_0 \subseteq P_0$.

Dans la décomposition (Eq.47), l'élément ϕ'_1 est l'inclusion canonique $K_0 \subseteq P_0$, image par $(\gamma)_1$ de $\mathrm{id} : P_0 \to P_0$. Comme les colonnes de gauche des diagrammes **??** et (Eq.42) coïncident, on conclut que $(\alpha)_1(\phi'_1) = 0$. Le gradué de $\widetilde{\phi'} = \phi' \circ p$ est de degré ≥ 2, plus précisément, si l'on note

$$e := \inf\{\ell \geq 2 \mid \phi'_\ell \neq 0\}\,,$$

on a

$$\mathrm{Gr}\,\widetilde{\phi'} = (\alpha)_e(\phi'_e) \neq 0\,. \tag{Eq.49}$$

Soit maintenant $\xi_e \in \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, K_0)$ tel que dans sa décomposition (Eq.45), on a $(\xi_e)_e = \phi_e$. Notons

$$\xi'_e = j \circ \xi_e \text{ et } \widetilde{\xi'_e} := \xi'_e \circ p\,.$$

Alors

a) Le morphisme ξ_e provient d'un morphisme de complexes de R-*mdg*'s

$$\begin{array}{ccccccccccc} \xrightarrow{\epsilon_e+2} & \mathcal{R}_{e+1} & \xrightarrow{\epsilon_{e+1}} & \mathcal{R}_e & \xrightarrow{\epsilon_e} & \mathcal{R}_{e-1} & \xrightarrow{\epsilon_e-1} & \cdots & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{R}_1 \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow & & & & \\ & \mathbf{0} & \longrightarrow & K_0[1-e] & \longrightarrow & \mathbf{0} & & & & \end{array}$$

et il induit clairement 0 en cohomologie pour peu que $e \geq 2$.

b) On a $(\xi'_e)_e = \phi'_e$, par construction d'après (Eq.48), et par (Eq.49)

$$\mathrm{Gr}\,\widetilde{\xi}'_e = (\alpha)_e(\xi'_e)_e = (\alpha)_e(\phi'_e) = \mathrm{Gr}\,\widetilde{\phi}'\,.$$

Par conséquent, le morphisme

$$\phi - \xi_e \in \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, K_0)$$

est un quasi-isomorphisme induisant l'identité en cohomologie et tel que

$$\deg \mathrm{Gr}\,\widetilde{(\phi' - \xi'_e)} > e\,.$$

L'itération de ce procédé permet de montrer que l'élément

$$\Phi := \phi - \textstyle\sum_{\ell\geq 2}\xi_\ell \in \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, K_0)$$

réponds aux demandes (Eq.44), ce qui termine la preuve du théorème.

7.2.2. Remarque. La preuve de (c)⇒(a) qui précède, montre aussi que le morphisme $\beta : \sum\mathcal{R}_\bullet \to \boldsymbol{h}\mathcal{M}$ induit un quasi-morphisme $\tilde{\beta} : \mathcal{M} \to \boldsymbol{h}\mathcal{M}$ si, et seulement si, $\beta \circ \epsilon_1 = 0$. Or $\epsilon_1(x_1, 0) = (\pi_1(x_1), D_\mathcal{E}(y'_0))$, et on a bien $\beta\epsilon_1(\mathcal{F}(P_1)) = 0$. L'existence de $\tilde{\beta}$ équivaut donc à la condition d'annulation

$$\beta\epsilon_1(\mathcal{E}(Q_1)) = 0\,. \qquad (\star)$$

Dans le contrexemple 7.1.4, où $\mathcal{M} = \sum(p : M_1 \twoheadrightarrow \mathcal{M}_0)$, supposons M_1 et $H = \ker(p)$ tous les deux projectifs. On a alors la résolution projective simultanée :

$$\begin{array}{c}
\mathbf{0} \to \mathcal{E}(H) \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{F}(H) \oplus \mathcal{E}(M_1) \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{M} \to \mathbf{0} \\
\hline
\begin{array}{ccccccc}
H & \xrightarrow{\epsilon_{1,1}} & \mathbf{0} & \oplus & M_1 & \xrightarrow{p} & M_2 \\
\| & & \uparrow & & \| & & {\scriptstyle p}\uparrow \\
H & \xrightarrow{\epsilon_{1,0}} & H & \oplus & M_1 & \xrightarrow{\epsilon_{0,0}} & M_1
\end{array} \\
\hline
\end{array}$$

avec $\epsilon_{0,0}(h, y) = h + y$, $\epsilon_{1,0}(h) = (-h, h)$ et $\epsilon_{1,1}(h) = (0, h)$. On a alors, l'égalité

$$\frac{\sum\mathcal{R}_\bullet}{\mathrm{B}\sum\mathcal{R}_\bullet} = \frac{H}{\mathbf{0}} \oplus \frac{H \oplus (H \oplus M_1)}{\{(h, -h, h)\}} \oplus \frac{M_2}{M_2} \cong H \oplus (H \oplus M_1)$$

et le morphisme $\beta : \sum\mathcal{R}_\bullet \to H$ provient de la projection $H \oplus (H \oplus M_1) \twoheadrightarrow H$, qui fait correspondre $(x, h, y) \mapsto h$. On y voit pourquoi la condition d'annulation $(\star)$ ne peut être vérifiée.

7.2.3. Corollaire. *Soit $\mathcal{M}$ un R-mdg. Pour tout relèvement projectif simultané (5.1.9-(a))*

$$\mathcal{R} = \mathcal{E}(Q) \oplus \mathcal{F}(P) \xrightarrow{\epsilon} \!\!\!\!\rightarrow \mathcal{M}$$

compatible à des relèvements projectifs R-mg's $P \xrightarrow{\pi} \!\!\!\!\rightarrow \mathrm{H}\,\mathcal{M}$ et $Q \xrightarrow{\nu} \!\!\!\!\rightarrow \mathrm{B}\,\mathcal{M}$, notons $\mathcal{K} := \ker(\epsilon) \hookrightarrow \mathcal{R}$ et $K := \ker(\pi) \hookrightarrow P$ les noyaux respectifs. On a ainsi le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K} & \hookrightarrow & \mathcal{R}_0 = \mathcal{E}(Q) \oplus \mathcal{F}(P) & & \\ & & \downarrow p_2 & \searrow^{\mu} & \\ K & \hookrightarrow & P & \xrightarrow{\pi_0} \!\!\!\!\rightarrow & \mathrm{H}\,\mathcal{M} \end{array}$$

où $\mu : \mathcal{E}(Q) \oplus \mathcal{F}(P) \to \mathrm{H}\,\mathcal{M}$ est le morphisme de R-mdg's $\mu(x, y) = \pi_0(y)$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

a) *$\mathcal{M}$ est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

b) *$\mathcal{K}$ est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et la composée $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\mu} \!\!\!\!\rightarrow \mathrm{H}\,\mathcal{M}$ est homotope à 0.*

Démonstration. □

7.2.4. Remarque. Soit $(\mathcal{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M})$ une résolution projective simultanée (pas nécessairement de longueur finie). L'itération de 7.2.3 montre alors que lorsque $\mathcal{M}$ est scindé tous les $\mathcal{K}_i := \ker(\epsilon_i)$ le sont aussi.

7.3. Scindage et anneaux héréditaires

7.3.1. Proposition. *Tout R-mdg est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ si, et seulement si, l'anneau R est héréditaire*[8].

Démonstration. D'après la proposition 5.2.5-(a), tout *R-mdg* $\mathcal{M}$ admet une résolution projective simultanée de longueur majorée par $\dim_{\mathrm{gb}}(R)$. Lorsque R est héréditaire, $\dim_{\mathrm{gb}}(R) \leq 1$, et le terme $(\mathbb{E}_2, d_2)$ de la suite spectrale canonique associée à $\mathcal{M}$ et un foncteur $\boldsymbol{F}$ (6.2.4-(b)), possède au plus deux colonnes de sorte que $d_r = 0$ pour tout $r \geq 2$. La suite spectrale est dégénérée et alors $\mathcal{M}$ est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ par 7.2.1-(b).

Réciproquement, soit N un sous-*R-mg* d'un *R-mg* projectif Q. Fixons un relèvement projectif $\beta : P \twoheadrightarrow N$ de N dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$. Notons $\mathcal{M} := (P \oplus Q, d)$ le *R-mdg* avec $d(x, y) := (0, \beta(x))$. Comme $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est projectif, le fait que $\mathcal{M}$ est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, équivaut à l'existence d'un morphisme de *R-mdg*'s $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{F}(\boldsymbol{h}\mathcal{M})$ qui est un quasi-isomorphisme (7.1.3-(a)). Comme

8. Un anneau est dit « *héréditaire* » lorsque tout sous-module d'un module projectif est lui-même projectif. Dans un anneau héréditaire, tout module admet une résolution projective de longueur ≤ 1, donc $\dim_{\mathrm{gb}}(R) \leq 1$.

la différentielle de $\mathcal{F}(\boldsymbol{h}\mathcal{M})$ est nulle, on déduit la suite de morphismes de R-mg's

$$\mathbf{0} \to \mathcal{F}(\boldsymbol{h}\mathcal{M}) = \frac{\mathrm{Z}\,\mathcal{M}}{\mathrm{B}\,\mathcal{M}} \hookrightarrow \frac{\mathcal{M}}{\mathrm{B}\,\mathcal{M}} \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathcal{F}(\boldsymbol{h}\mathcal{M}) \to \mathbf{0}$$
$$\text{id}$$

où $\bar{\alpha}$ est le morphisme induit par α. Or, $\mathcal{M} = P \oplus Q$, $\mathrm{Z}\,\mathcal{M} := \ker(\beta) \oplus Q$ et $\mathrm{B}\,\mathcal{M} = \mathbf{0} \oplus \mathrm{im}(\beta)$, et la suite précédente s'écrit aussi

$$\mathbf{0} \to \ker(\beta) \oplus \frac{Q}{\mathrm{im}(\beta)} \xhookrightarrow{i\oplus\mathrm{id}} P \oplus \frac{Q}{\mathrm{im}(\beta)} \xrightarrow{\bar{\alpha}} \ker(\beta) \oplus \frac{Q}{\mathrm{im}(\beta)} \to \mathbf{0}$$
$$\text{id}$$

On en déduit que $\ker(\beta)$ est facteur direct de P et donc N est projectif. □

7.3.2. Remarque. Un cas particulièrement important d'application de la proposition précédente (mais aussi de 7.1.3-(c)) est celui où $R = k[X]$ est l'anneau des polynômes à une variable et coefficients dans un corps. Dans le contexte de la cohomologie $\mathbb{S}^1$-équivariante que nous abordons dans la section suivante, la proposition dit que les complexes des formes différentielles $\mathbb{S}^1$-équivariantes sont scindés.

8. Cohomologie équivariante

8.1. Formes différentielles équivariantes

8.1.1. Les anneaux gradués $\boldsymbol{R(\mathfrak{g})}$ et $\boldsymbol{S_\mathfrak{g}}$. Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe de Lie réel, compact et connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On note $R(\mathfrak{g})$ l'algèbre des fonctions réelles polynomiales sur $\mathfrak{g}$, puis $S_\mathfrak{g} := R(\mathfrak{g})^{\boldsymbol{G}}$ la sous-algèbre des fonctions $\boldsymbol{G}$-invariantes. On munit $R(\mathfrak{g})$ et $S_\mathfrak{g}$ de la graduation qui assigne à une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ le degré 2. On rappelle le résultat classique suivant.

8.1.2. Proposition. *$R(\mathfrak{g})$ et $S_\mathfrak{g}$ sont de dimension globale finie.*

8.1.3. Les $\boldsymbol{S_\mathfrak{g}}$-$\boldsymbol{mdg}$'s $\boldsymbol{\Omega_G(X)}$ et $\boldsymbol{\Omega_{G,c}(X)}$. Les complexes des formes différentielles équivariantes sont les $S_\mathfrak{g}$-mg's

$$\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) := \big(R(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega(\boldsymbol{X})\big)^{\boldsymbol{G}}, \quad \Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) := \big(R(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_\mathrm{c}(\boldsymbol{X})\big)^{\boldsymbol{G}},$$

où $\boldsymbol{X}$ est une $\boldsymbol{G}$-variété différentiable et $\Omega(\boldsymbol{X})$ (resp. $\Omega_\mathrm{c}(\boldsymbol{X})$) désigne le complexe des formes différentielles (resp. à support compact) sur $\boldsymbol{X}$, munis de la

« *différentielle équivariante* »

$$d_{\boldsymbol{G}}\big(\omega(X)\big) = d\omega(X) + c(X)\omega(X)\,, \qquad \text{(Eq.50)}$$

où X est une variable qui dénote un élément de $\mathfrak{g}$, et $c(X)$ désigne la contraction par le champ de vecteurs ξ_X associé à l'action du groupe à un paramètre $\exp(tX)$ sur $\boldsymbol{X}$.

On note $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{h}(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}), d_{\boldsymbol{G}})$ (resp. $H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{h}(\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), d_{\boldsymbol{G}})$) le $S_{\mathfrak{g}}$-*mg* de cohomologie équivariante (resp. à support compact).

Comme $H_{\boldsymbol{G}}(\bullet) = S_{\mathfrak{g}}$, on notera désormais $H_{\boldsymbol{G}}$, l'anneau gradué $S_{\mathfrak{g}}$.

8.1.4. Proposition

a) $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ *et* $\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ *sont des* $H_{\boldsymbol{G}}$*-mg's libres.*

b) $(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}), d_{\boldsymbol{G}})$ *et* $(\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), d_{\boldsymbol{G}})$ *sont des* $H_{\boldsymbol{G}}$*-mdg's*

Démonstration. On sait que l'on a $R(\mathfrak{g}) = H_{\boldsymbol{G}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{H}$ où $\mathfrak{H}$ désigne l'espace des polynômes harmoniques sur $\mathfrak{g}$ (*cf.* [D], §**8** pp. 277-). Par conséquent,

$$\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) := H_{\boldsymbol{G}} \otimes_{\mathbb{R}} \big(\mathfrak{H} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega(\boldsymbol{X})\big)^{\boldsymbol{G}}\,, \quad \Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) := H_{\boldsymbol{G}} \otimes_{\mathbb{R}} \big(\mathfrak{H} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})\big)^{\boldsymbol{G}}\,.$$

L'assertion (b) est classique. □

8.1.5. Suite spectrale de Leray-Serre. Les bi-modules $H_{\boldsymbol{G}} \otimes \Omega(\boldsymbol{X})$ et $H_{\boldsymbol{G}} \otimes \Omega_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ ont des bi-graduations du premier quadrant. Un tenseur $P \otimes \omega$, avec P et ω homogènes, $\deg(P) = a$ et $\deg(\omega) = b$, est dit de « *degré total* » $a + b$, de « *degré forme différentielle* » b, et de « *degré complémentaire* » a. La filtration par degré complémentaire, *i.e.* $\Omega_{\boldsymbol{G},?}(\boldsymbol{X})_m := H_{\boldsymbol{G}}^{\geq m} \otimes \Omega_?(\boldsymbol{X})$ est une filtration décroissante $H_{\boldsymbol{G}}$-graduée, *i.e.* elle vérifie

$$H_{\boldsymbol{G}}^a \cdot (\Omega_{\boldsymbol{G},?}(\boldsymbol{X}))_m \subseteq (\Omega_{\boldsymbol{G},?}(\boldsymbol{X}))_{a+m}\,,$$

et c'est aussi une filtration régulière des complexes des formes différentielles, elle fournit donc des suites spectrales convergentes de terme $I\!E_2$

$$\begin{cases} I\!E_2^{p,q} := H_{\boldsymbol{G}}^p \otimes H_?^q(\boldsymbol{X}) \\ d_2(P \otimes \omega) := \sum_i P e_i^\vee \otimes c(e_i)\omega \end{cases}$$

où $\{e_i\}$ est une base de $\mathfrak{g}$ de base duale $\{e_i^\vee\}$. Les différents termes $(I\!E_r, d_r)$ de cette suite spectrale son naturellement munis d'une structure *R-mdg*, en particulier d_2 est entièrement déterminée par son action sur $\mathbf{1} \otimes H_?(\boldsymbol{X})$.

8.2. Le cas où $G = \mathbb{S}^1$

D'après la remarque 7.3.2, lorsque $\boldsymbol{G} = \mathbb{S}^1$, l'anneau $H_{\boldsymbol{G}}$ est héréditaire et l'on peut appliquer 7.3.1. En particulier, la proposition suivante est vérifiée.

8.2.1. Proposition. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

a) *Le morphisme canonique* $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{X})$ *(resp.* $H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}) \to H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$*) est surjectif.*

b) *La suite spectrale de Leray-Serre* $\mathbb{E}_2 = H_{\boldsymbol{G}} \otimes H(\boldsymbol{X})$ (resp. $H_{\boldsymbol{G}} \otimes H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$) *est dégénérée,* i.e. $d_r = 0$ *pour* $r \geq 2$.

c) $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ (resp. $H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X})$) *est libre dans* $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}})$.

Démonstration. La preuve est la même pour $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ et pour $\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$.

(a)⇒(b) Soit $\varphi : \Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) \to H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ un isomorphisme de $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}})$. Comme $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ est libre (8.1.4-(a)), φ se réalise à partir d'un morphisme surjectif de $H_{\boldsymbol{G}}$-*mdg*'s $\phi : \Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \twoheadrightarrow H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$. Le morphisme ϕ projette alors la filtration par degrés complémentaires de $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ (8.1.5), en une filtration régulière de $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$, de sorte qu'il induit un morphisme de suites spectrales convergentes dont l'action sur le second terme $\mathbb{E}_2(\phi) : H_{\boldsymbol{G}} \otimes H(\boldsymbol{X}) \to H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ composée au morphisme canonique $\nu : H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) \to H(X)$, fait correspondre $P \otimes [\omega] \mapsto P(0)[\omega]$. On a donc la factorisation de $\mathrm{id} : H(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{X})$,

$$H(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{\mathbf{1}\otimes(_)} H_{\boldsymbol{G}} \otimes H(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{\mathbb{E}_2(\phi)} H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{\nu} H(\boldsymbol{X})\,, \qquad (*)$$
$$\mathrm{id}$$

le morphisme ν est surjectif, et $H(\boldsymbol{X})$ est facteur direct de $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$.

On en déduit l'annulation de d_2 (car déterminée sur $\mathbf{1} \otimes H(\boldsymbol{X})$), mais alors $\mathbb{E}_3 = \mathbb{E}_2 = H_{\boldsymbol{G}} \otimes H(\boldsymbol{X})$ et d_3, étant $H_{\boldsymbol{G}}$-linéaire, est entièrement déterminée sur $\mathbf{1} \otimes H(\boldsymbol{X})$. La factorisation $(*)$ est donc aussi valable sur $\mathbb{E}_3$, et $d_3 = 0$. L'annulation des d_r, pour $r \geq 4$, résulte pareillement.

(b)⇒(c) Si la suite spectrale de Leray-Serre est dégénérée, on a bien $\mathrm{Gr}(H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})) = H_{\boldsymbol{G}} \otimes_{\mathbb{R}} H(\boldsymbol{X})$ et comme la filtration par degré complémentaire est une filtration $H_{\boldsymbol{G}}$-graduée, la liberté de $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ équivaut à celle de $\mathrm{Gr}(H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}))$, et on a un isomorphisme de $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg*'s $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) \sim H_{\boldsymbol{G}} \otimes H(\boldsymbol{X})$

(c)⇒(a) Si $\boldsymbol{h}(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}))$ est libre, la suite spectrale canonique 6.2.4-(b) est dégénérée car concentrée sur une seule colonne, et $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ est scindé d'après le critère général de scindage 7.2.1. □

8.3. Un critère de dualité équivariante lorsque $G = \mathbb{S}^1$

8.3.1. Nous appliquons les considérations du §**1** à l'anneau gradué $R = H_{\boldsymbol{G}}$. Les complexes de formes différentielles équivariantes sont des exemples de $H_{\boldsymbol{G}}$-*mdg*'s, et le « *morphisme de dualité de Poincaré équivariante* »

$$\mathbb{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}} : (\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}), d_{\boldsymbol{G}})[d_{\boldsymbol{X}}] \to \mathrm{Homgr}^{\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}\left((\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), d_{\boldsymbol{G}}), (H_{\boldsymbol{G}}, 0)\right) \qquad (\diamond)$$

est un morphisme dans la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}})$ et lorsque $\boldsymbol{X}$ est orientable c'est aussi un quasi-isomorphisme d'après le théorème de dualité de Poincaré équivariante.

8.3.2. Le foncteur

$$\boldsymbol{F}(_) := \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(_, H_{\boldsymbol{G}}) : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}}),$$

introduit dans 1.2.4, est un foncteur additif contravariant et exact à gauche, notons $\mathbb{R}\boldsymbol{F}(_) : D^{-}(\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)) \rightsquigarrow D(\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R))$ son dérivé à droite.

Maintenant, si M est un $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg*, on fixe une résolution projective $Q_{\bullet} \twoheadrightarrow M$ de longueur *finie* dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, possible car $H_{\boldsymbol{G}}$ est de dimension globale finie. La donnée du complexe

$$\mathbf{0} \to \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(Q_0, H_{\boldsymbol{G}})) \to \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(Q_1, H_{\boldsymbol{G}})) \to \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(Q_2, H_{\boldsymbol{G}})) \to \cdots$$

équivaut alors à celle du $H_{\boldsymbol{G}}$-*mdg* $(\mathrm{Homgr}^{\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}(\Sigma\, Q_{\bullet}, H_{\boldsymbol{G}}), D_{\bullet})$ (*loc.cit.*), car

$$\begin{aligned}\Sigma(\mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(Q_{\bullet}, H_{\boldsymbol{G}})) &:= \textstyle\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(Q_k, H_{\boldsymbol{G}})[-k] \\ &= \textstyle\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(Q_k[k], H_{\boldsymbol{G}}) \\ &= \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(\Sigma\, Q_{\bullet}, H_{\boldsymbol{G}})\end{aligned}$$

et puisque la somme porte sur un nombre *fini* de termes. On a donc

$$\Sigma\, \mathbb{R}\boldsymbol{F}(M) \cong \mathrm{Diff}\, \boldsymbol{F}(\Sigma\, Q_{\bullet}) = \mathbb{D}\, \boldsymbol{F}(M, 0)\,. \qquad (\diamond)$$

Le passage en cohomologie donne

$$\mathbb{R}^k\boldsymbol{F}(M) = \boldsymbol{h}^k(\mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(Q_{\bullet}, H_{\boldsymbol{G}})) =: \mathrm{Extgr}^{*,k}_{H_{\boldsymbol{G}}}(M, H_{\boldsymbol{G}}) \in \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$$

où l'indice de cohomologie 'k' est relatif au degré '$\bullet$' de la résolution.

La cohomologie $\boldsymbol{h}(\mathbb{R}\boldsymbol{F}(M)) := \mathbb{R}^{\bullet}\boldsymbol{F}(M)$ est donc bigraduée et l'on note

$$\mathbf{tot}\, \mathbb{R}^{\bullet}\boldsymbol{F}(M) := \textstyle\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^k\boldsymbol{F}(M)$$

muni de l'ordre total, *i.e.* si $x \in (\mathbb{R}^k\boldsymbol{F}(M))^{\ell}$, on pose $\deg(x) = k + \ell$ [9]. L'isomorphisme $(\diamond)$ donne alors

$$\mathbf{tot}\, \mathrm{Extgr}^{*,\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}(M, H_{\boldsymbol{G}}) = \boldsymbol{h}(\mathbb{D}\, \boldsymbol{F}(M, 0))\,. \qquad (*)$$

9. Dans le cas d'un foncteur $\boldsymbol{F}$ covariant, l'ordre total aurait été $k - \ell$.

D'autre part, on dispose des isomorphismes canoniques

$$\boldsymbol{h}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}),0)) \underset{1}{\cong} \boldsymbol{h}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}),d_{\boldsymbol{G}})) \underset{2}{\cong} \boldsymbol{h}(\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}),d_{\boldsymbol{G}}))$$

où $\cong_1$ est donné par le théorème de scindage 7.2.1 et 7.3.1, et $\cong_2$ puisque $\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ est un $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg* libre. On a donc

$$\boldsymbol{h}(\mathrm{Homgr}^{\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}((\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}),d_{\boldsymbol{G}}),(H_{\boldsymbol{G}},0))) \cong \mathbf{tot}\,\mathrm{Extgr}^{*,\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}(H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}),H_{\boldsymbol{G}})\,,$$

d'après $(*)$ où $M = H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X})$ ([10]). Cet isomorphisme, composé à celui induit par $\mathbb{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}}$ dans (8.3.1), donne alors l'isomorphisme

$$\boxed{H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}}] \cong \mathbf{tot}\,\mathrm{Extgr}^{*,\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}(H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}),H_{\boldsymbol{G}})}$$

Ces remarques constituent l'essentiel de la preuve du théorème suivant.

8.3.3. Théorème. *Soit $\boldsymbol{G} = \mathbb{S}^1$ et soit $\boldsymbol{X}$ une $\boldsymbol{G}$-variété différentielle orientable. Le morphisme de dualité de Poincaré équivariante*

$$\mathbb{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}} : (\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}),d_{\boldsymbol{G}})[d_{\boldsymbol{X}}] \to (\mathrm{Homgr}^{\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}(\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}),H_{\boldsymbol{G}}),D_{\bullet})$$

*induit un isomorphisme canonique de $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg*'s*

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}} : H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}}] \to \mathbf{tot}\,\mathrm{Extgr}^{*,\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}(H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}),H_{\boldsymbol{G}})\,.$$

En particulier, lorsque la cohomologie de de Rham $\boldsymbol{X}$ est de dimension finie, le morphisme :

$$H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}}] \to \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}),H_{\boldsymbol{G}})\,,$$

induit par $\mathbb{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}}$, est bijectif si, et seulement si, $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ est $H_{\boldsymbol{G}}$-libre.

Démonstration. La première partie du théorème à déjà été justifiée. Pour la seconde, la nécessité de la condition est claire puisque tout $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg* projectif est libre ([11]), et la suffisance résulte de l'isomorphisme $\mathcal{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}}$ moyennant le fait que pour tout $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg* M de type fini, le $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg* $\mathrm{Extgr}^{*,k}_{H_{\boldsymbol{G}}}(M,H_{\boldsymbol{G}})$ est de torsion dès que $k > 0$.

En effet, notons $\boldsymbol{I}$ le $H_{\boldsymbol{G}}$-module gradué $S^{-1}H_{\boldsymbol{G}}$ où S est le système multiplicatif constitué des éléments homogènes non nuls de $H_{\boldsymbol{G}}$. Le $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg* $\boldsymbol{I}$ est

10. Cet isomorphisme est bien sûr le même que celui de l'assertion 6.2.4-(b) que nous aurions pu aussi bien invoquer.
11. *Cf.* [J] corollaire du théorème 6.21, p. 386.

plat et a la propriété de tuer tout $H_{\boldsymbol{G}}$-mg de torsion. On a

$$\mathrm{Homgr}^*_{H_{\boldsymbol{G}}}(M, H_{\boldsymbol{G}}) \otimes \boldsymbol{I} = \mathrm{Homgr}^*_{H_{\boldsymbol{G}}}(M, \boldsymbol{I})$$

pour tout $H_{\boldsymbol{G}}$-module gradué de type fini M, car $\boldsymbol{I}$ est plat. On a donc

$$I\!R\,\mathrm{Homgr}^*_{H_{\boldsymbol{G}}}(M, H_{\boldsymbol{G}}) \otimes \boldsymbol{I} = I\!R\,\mathrm{Homgr}^*_{H_{\boldsymbol{G}}}(M, \boldsymbol{I}) \qquad (*)$$

grâce à la nœthérianité de $H_{\boldsymbol{G}}$.

Or, le foncteur $\mathrm{Homgr}^*_{H_{\boldsymbol{G}}}(_, \boldsymbol{I})$ est exact. En effet, il suffit pour cela de vérifier que pour toute suite exacte courte de $H_{\boldsymbol{G}}$-modules gradués

$$\mathbf{0} \to M \longrightarrow N \xrightarrow{\pi} \frac{H_{\boldsymbol{G}}}{(P_1, \ldots, P_r)}[d] \to \mathbf{0}$$

où les $\mathcal{P}_i$ sont homogènes et non nuls, tout morphisme gradué $\lambda : M \to \boldsymbol{I}$ (de degré 0 suffit), admet un prolongement à N. Or, si $m \in N$ est tel que $\pi(m) = \overline{1}$, l'élément $\lambda(P_i\, m) \in \boldsymbol{I}$ est bien défini pour $i = 1, \ldots, r$, et l'on a trivialement

$$P_j \lambda(P_i\, m) = P_i \lambda(P_j\, m) \in \boldsymbol{I}\,,$$

en particulier, l'élément

$$\lambda(m) := \frac{\lambda(P_i\, m)}{P_i} = \frac{\lambda(P_j\, m)}{P_j} \in \boldsymbol{I}$$

est bien défini et prolonge bien le morphisme λ à N tout entier.

Par conséquent, si $k > 0$ on a

$$\mathrm{Extgr}^{*,k}_{H_{\boldsymbol{G}}}(N, H_{\boldsymbol{G}}) \otimes \boldsymbol{I} = I\!R^k\,\mathrm{Homgr}^*_{H_{\boldsymbol{G}}}(M, \boldsymbol{I}) = 0\,,$$

d'après $(*)$, et tous les éléments de $\mathrm{Extgr}^{*,+}_{H_{\boldsymbol{G}}}(M, H_{\boldsymbol{G}})$ sont de $H_{\boldsymbol{G}}$-torsion. □

Références

[D] J. Dixmier. "Enveloping algebras". Revised reprint of the 1977 translation. Graduate Studies in Mathematics, 11. AMS, 1996.

[G] R. Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

[H] R. Hartshorne. Residues and duality. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20 Springer-Verlag, Berlin-New York 1966.

[J] N. Jacobson. *"Basic algebra. II"*. Second edition. W. H. Freeman and Company, New York, 1989

[M] John C. Moore. *Algebre homologique et homologie des espaces classifiants*, Seminaire H. Cartan–J. C. Moore, 12ème année (1959/60) exposé 7, pp. 1–37.

Algèbre & Géométrie
une interview de Gabriel Pallares
à Alberto Arabia

20 avril 2015

Question 1 : Qu'entendez-vous par «algèbre» et par «géométrie» ?

Après bien d'années de travailler dans ces disciplines, il m'est difficile de les dissocier, tant elles sont enchevêtrées dans mon esprit et tant elles participent à la fois à la recherche et à la découverte d'une réalité dont elles saisissent des vues complémentaires. Je vois l'algèbre et la géométrie interagir harmonieusement pour leur enrichissement mutuel et, au delà d'une forme de symbiose, je suis tenté de les voir comme les faces d'une pièce que l'on ne peut saisir qu'à travers elles.

D'un point de vue naïf, l'algèbre m'apparaît comme un monde abstrait dont les objets sont des expressions rattachées à une « structure d'algèbre », c'est à dire, à la donnée d'un ensemble muni d'opérations de somme '+' et de produit 'x' satisfaisant des propriétés d'associativité et distributivité inspirées de notre connaissance de l'arithmétique des nombres entiers. Ces expressions qui vont contenir quelques éléments particuliers $(0, 1, -1, ...)$ mais aussi des éléments variables, vont être quantifiées et seront reliées par des signes syntaxiques dont le plus remarquable est l'égalité '=', le tout constituant des « formules » ou « équations ». Ces formules et leurs propriétés constituent le sujet de l'algébriste. Quant à la géométrie, le préfixe « géo- » nous met déjà devant le « réel » : la terre, et le suffixe « -métrie » devant un geste concret vieux comme le monde : la mesure. On n'est plus dans l'abstrait mais dans le concret, dans l'espace qui nous entoure, ou tout du moins tel que nous nous le représentons depuis l'enseignement des anciens qui nous ont légué les concepts de droite, plan, espace, de triangles, polygones, polyèdres et solides platoniciens,... mais aussi des moins anciens qui ont façonné la géométrie différentielle et les concepts de variétés riemanniennes, fibrations, groupes de Lie,... Ces objets et leurs propriétés constituent le sujet du géomètre. En simplifiant à l'extrême, en géométrie il est question d'espace et de points, en algèbre, de formules et d'équations.

N'ayant pas de culture en histoire des mathématiques, je n'évoquerai rien du chemin parcouru par l'humanité dans l'appréhension des objets algébriques, mais il m'est clair pour l'avoir expérimenté, qu'ils ont une forme d'existence dans notre esprit. Je ne saurai dire, si c'est l'objet algébrique qui prend vie dans nos pensées ou si, au contraire, il préexiste à leur expérience, le fait est que pour peu que l'on se familiarise avec eux, la curiosité de notre esprit s'éveille et presque spontanément, à notre insu même, des intuitions sur leurs propriétés émergent. Quant aux objets géométriques, ils s'appréhendent autrement que

ceux de l'algèbre, il n'est point question ici de formules, mais souvent d'images ou de dessins d'objets dont on a pris conscience par le simple fait d'être immergés dans le monde « réel ». Ces objets nous apparaissent souvent sans effort et ne nécessitent pas de connaissances particulières, contrairement aux objets algébriques qui, eux, demandent un parcours initiatique.

Dans tous les cas, lorsque l'esprit s'intéresse à ces deux mondes, une forme de vie apparaît sous forme de pensées qui vont au-delà des faits acquis. C'est un mystère pour moi, mais je vois bien comment se mettent à interagir : objets, intuition, questionnements, exemples et contrexemples, preuves et réfutations, dans notre esprit, qui, par des chemins parfois très mystérieux, parvient découvrir des faits nouveau dans une démarche qui sans cesse gagne du terrain sur monde de l'inconnu.

Mais, si algèbre et géométrie sont indépendamment des mondes extrêmement riches et fertiles, c'est leur interaction qui est d'une étonnante efficacité dans la recherche, notamment en géométrie algébrique. L'interaction entre ces mondes vient de la représentation cartésienne d'un espace vectoriel V de dimension finie n sur un corps K. En effet, une fois fixée une base de V, un point de V se « voit » comme un système d'équations à n variables à coefficients dans K, et donc comme un idéal maximal de l'algèbre de polynômes $A = K[X_1, ..., X_n]$. Mieux encore, la notion de « point » va se trouver étonnamment généralisée dans le cadre algébrique en définissant comme « point » tout idéal premier (et pas seulement maximal) de l'algèbre A. Les conséquences de cette idée qui entraîne par exemple que l'algèbre « voit » des points que la géométrie ne voit pas, se sont avérées d'une étonnante richesse. En progressant dans cette « algébrisation » de la géométrie, une variété différentiable devient un « fourbis » de systèmes d'équations algébriques avec des conditions « de recollement » et donne lieu à la notion de variété algébrique. Ces variétés et ces points nouveaux constituent les éléments d'une nouvelle géométrie, la géométrie algébrique ou schématique. Bien de propriétés intuitivement claires de la géométrie ont trouvé leur pendant en géométrie algébrique, mais ce qui est très puissant c'est que l'intuition géométrique du monde qui nous entoure continue d'être un guide efficace pour évoluer dans le monde (à priori) (très) abstrait de l'algèbre (notamment en caractéristique positive), ce qui me semble être une découverte majeure en mathématiques.

En science, il faut avoir des idées et beaucoup d'inspiration, non seulement pour répondre à d'anciennes questions, mais aussi pour découvrir de nouvelles réalités. L'histoire du rapport entre algèbre et géométrie est édifiante de ce point de vue. Le dernier théorème de Fermat, de nature purement algébrique et que tout écolier comprend dès qu'il a appris à sommer et à multiplier des nombres, n'a pu être démontré sans inspirations géométriques, ce qui conforte mon idée que algèbre et géométrie sont indissociables.

Question 2 : Quel est votre domaine de recherche, et comment le situez-vous par rapport à l'algèbre et à la géométrie ?

Mon tempérament fait que mon domaine de recherches change régulièrement. En règle générale, une fois que j'ai accompli un travail important, je me retrouve assez rapidement à la quête d'un nouveau sujet pour lequel j'aurais une approche fraîche. C'est ainsi que, dans ma carrière, je me suis intéressé aux sujets suivants.

1. Géométrie riemannienne et formes automorphes (DEA).
2. Groupes de Lie, variétés de Schubert, cohomologie équivariante (THESE).
3. Singularités des variétés algébriques. Critères cohomologique de lissité rationnelle et algébrique.
4. Relèvement des algèbres lisses
5. Homologie d'intersection et faisceaux pervers.
6. Fondements de la cohomologie de de Rham p-adique et conjectures de Weil.
7. Isospectrailté des tambours et technique de transplantation.
8. Homologie des espaces de configuration

Dans leur ensemble, ces sujets concernent : la géométrie différentielle, riemannienne et algébrique (en toute caractéristique), la théorie des représentation des groupes, l'analyse fonctionnelle, les théories homologiques, catégories dérivées, la combinatoire. Algèbre et géométrie y sont omniprésentes, mais dans des proportions inégales et, surtout, n'interagissant pas de la même manière ni avec la même intensité. La plupart du temps, dans un même travail, ces disciplines restent clairement dissociées, cloisonnées même, certains passages étant éminemment algébriques, d'autres éminemment géométriques. Un classement croissant possible de la nécessité heuristique d'une interactivité entre les aspects algébriques et géométrique des sujets en question n'a aucun sens dans l'absolu, mais dans ma perception il pourrait être le suivant : $8 \prec 7 \prec 5 \prec 1 \prec 2 \prec 3 \prec 6 \prec 4$.

Dans (4) l'interaction entre algèbre et géométrie, au sens de ma réponse à votre première question, est maximale. Dans ce sujet, on s'intéresse aux algèbres lisses sur un anneau R. La lissité d'une algèbre est une propriété purement algébrique qui généralise la propriété universelle des algèbres de polynômes. Une question très importante en géométrie algébrique est de savoir si une algèbre lisse sur un corps de caractéristique p provient, par réduction modulo p, d'une algèbre lisse sur l'anneau des entiers. Enoncé qui, réinterprété dans un langage géométrique, dit qu'une variété algébrique (affine) lisse en caractéristique positive admet un épaississement lisse sur les entiers. Dans ce travail, on montre que c'est toujours le cas, mais à un moment donné l'intuition géométrique nous est incontournable, elle nous éclaire et nous indique le chemin à suivre, sans quoi, on serait perdu dans un fourbi inextricable d'équations algébriques.

A l'autre extrême, mon sujet de recherches actuel (8) concerne l'homologie des espaces de configuration. Je rappelle qu'on appelle ainsi l'espace $F(n, X)$ dans lequel évoluent sans heurts n points distincts d'un espace X donné. La définition ensembliste est donc de dire que $F(n, X)$ est l'ensemble des n-uplets d'éléments deux à deux distincts de X. L'espace de configuration est clairement

un objet important en physique et bien sûr en robotique. Il se trouve que pour X donné, l'étude des propriétés homologiques de $F(n, X)$ lorsque n tend vers l'infini, par exemple le comportement asymptotique du polynôme de Poincaré de $F(n, X)$, pose des problèmes mathématiques intéressants encore largement ouverts. Il y a un an environ, j'ai réalisé que lorsque X était un groupe de Lie non compact, l'analyse de la plupart ces problèmes se simplifiait considérablement et des réponses très explicites étaient alors accessibles. Depuis, j'ai cherché l'ingrédient suffisant et surtout nécessaire à cette simplification. Ce n'était pas tant la propriété *géometrique* d'être un groupe de Lie, mais plutôt une propriété *homologique*, plus subtile, celle de ne pas posséder de *cohomologie intérieure*, propriété partagée par bien plus d'espaces que les seuls groupes de Lie ([1]). En conclusion, ce sujet de recherche, de part sa nature homologique, ses questionnements et ses méthodes le situent plutôt dans un cadre de recherches transverse à celui d'une interaction algébro-géométrique.

Question 3 : Dans vos recherches, en quoi vous appuyez-vous sur l'intuition géométrique ?

Avant de me pencher sur cette question, je voudrais mentionner le fait que lorsque l'on fait des mathématiques, on aborde rarement un problème n'appartenant pas déjà à un certain univers que d'autres, avant nous, ont exploré, débroussaillé et relevé la nature des ses objets. Nous héritons, non seulement des problèmes ouverts, mais aussi d'une forme d'intuition qui nous est largement imposée par l'histoire du sujet. Les questions apparaissent alors comme des énoncés se rapportant à un certain univers, à un certain monde. Ce monde qui nous paraît indissociable des questions, s'installe dans nos esprits comme un modèle commode dans lequel la question « prend corps » et se laisse étudier. On dirait que notre cerveau a besoin de mettre une question dans un certain contexte dont il va se familiariser (s'il ne l'est pas déjà) et qu'il va apprivoiser jusqu'à ce que la question y trouve naturellement une réponse. Mais voilà, il nous arrive aussi d'être en face d'une question ouverte qui résiste à toute analyse, et d'entendre alors quelqu'un s'exclamer : « il manque une idée » ! Ce qui, clairement, en dit long sur le rapport entre les questions et les intuitions.

En mathématique, il existe beaucoup de mondes différents avec des objets et des intuitions qui leur sont propres. La géométrie n'en est qu'un parmi d'autres et si beaucoup de disciplines deviennent plus accessibles dans une approche géométrique, d'autres me paraissent en être hermétiques. N'étant pas assez savant, je préfère rester prudent et ne pas accorder à la géométrie le statut d'une approche universelle dans la recherche mathématique ; la question fondamental étant bien évidemment de savoir si une telle approche aide ou non à la découverte, dans quels cas et surtout dans quelles directions. Je pense qu'il faut, en tout et pour tout, rester maître de ses outils, et non pas le contraire...

1. A ce propos, je voudrais commenter à titre anecdotique que j'ai récemment assisté à une soutenance de thèse dans laquelle cette même condition cohomologique jouait un rôle important mais cette fois pour les variétés de Shimura et en théorie des nombres. J'ai trouvé cela assez drôle pour ne pas dire remarquable.

Je vais essayer maintenant de rendre mes propos plus concrets en citant deux exemples assez extrêmes où l'approche géométrique apporte réellement quelque chose.

—L'un est celui du théorème de Pythagore. En disant que le carré de la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés de longueurs des deux autres côtés, il exprime une propriété algébrique des longueurs des côtés du triangle. Et là, limité à des éléments aussi sommaires et en s'interdisant plus d'interprétation géométrique des données, l'esprit peine à trouver une explication à cette propriété et encore moins à la concevoir comme possible. Il suffit par contre d'interpréter l'opération d'élévation au carré d'une longueur comme représentant l'« aire » du carré de côté de cette longueur, pour que le problème s'éclaire d'une nouvelle lumière. On n'a plus affaire à une équation quadratique sur des longueurs, mais à une équation linéaire sur les aires des carrés que l'on peut dessiner sur les côtés du triangle. La question d'origine devient alors : peut on remplir le grand carré avec le contenu des deux autres. Et tout d'un coup, on réalise que l'on peut incorporer des opérations de déplacement, de découpage, de déformations à aire constante,... pour « manipuler » les données. De nouvelles pistes pour une réponse positive se présentent alors rapidement à l'esprit. Les démonstrations d'Euclides, chinoise, indienne,... relèvent de cette idée et sont toutes plus ingénieuses et amusantes les unes que les autres. Bien sûr, beaucoup d'autres preuves existent depuis et même qui ne parlent pas d'aires, mais la question n'est pas tant l'existence des preuves dans l'absolu, mais plutôt comment faire pour en trouver une. Quel modèle des données va nous permettre de transformer le problème original le rendant plus maniable à nos esprits, et en particulier nous permettant d'avoir un sentiment sur sa vraisemblance. Et, inversement, dans quel mesure le problème, lui-même, est une porte (initiatique) pour la découverte d'un monde plus vaste dont il est une évidence parmi beaucoup de phénomènes inconnus et étonnants à découvrir.

—La dernière phrase anticipe sur mon deuxième exemple : celui des conjectures de Weil, autour desquelles j'ai travaillé une dizaine d'années. Dans les années 40, André Weil s'intéresse au problème arithmétique du dénombrement des ensembles (finis) des solutions d'un système S d'équations polynomiales donné, lorsque l'on prend les coefficients successivement dans les différentes extensions finies du corps $\mathbb{F}$ à p éléments. Plus précisément, il s'intéressait à une série entière dont les coefficients permettent de retrouver la suite de ces cardinaux : la « fonction Zéta d'une variété algébrique sur un corps fini ». A son sujet, Weil démontra dans le cas des courbes, dans un travail pionnier remarquable, que sous des hypothèses assez naturelles, c'était une fonction rationnelle, c'est à dire, pouvait s'écrire comme quotient de deux polynômes à coefficients entiers. Il montra aussi qu'elle vérifiait une certaine équation fonctionnelle et une certaine propriété analogue à l'hypothèse de Riemann. Il conjectura aussi que toutes ces propriétés devaient être encore vérifiées, au delà des courbes, par toute variété projective non

singulière sur un corps fini, ce que l'on appellera depuis « les conjectures de Weil ». Il eut même « une idée » de la démarche à suivre. Notons $\overline{\mathbb{F}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}$, et soit X l'ensemble des solutions sur $\overline{\mathbb{F}}$ du système d'équations S. En caractéristique positive, il existe un opérateur remarquable : le Frobenius, noté Φ dans la suite, qui va agir sur X de telle manière que l'ensemble des solutions de S sur l'extension finie de degré n de $\mathbb{F}$ s'identifie à l'ensemble des points fixes de Φ^n agissant sur X. Ainsi, le problème original se transforme en un problème d'ensembles de points fixes finis d'une application (continue) agissant sur une espace topologique. Or, le théorème de points fixes de Lefschetz pour les variétés complexes, bien connu à l'époque, exprime le cardinal de ces ensembles en termes de la trace de l'opérateur Φ^n agissant sur la cohomologie rationnelle de X, et ce d'une manière « compatible » aux recouvrements ouverts de X (Mayer-Vietoris), ce qui permet de relier l'étude de la fonction Zéta de X à celles des ouverts d'un recouvrement. La rationalité ainsi que l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction Zéta de X devenaient alors conséquences faciles de celles des ouverts de X assez petits (affines), ce qui ne présentait pas de difficultés insurmontables. Ainsi, tout comme dans l'exemple du théorème de Pythagore, le changement de point de vue de la question, l'enrichissait par l'incorporation de nouvelles méthodes d'analyse, de nouvelles manières de « bouger » dans le problème. Mais cette idée lumineuse de Weil se heurtait à un problème majeur : il n'existait à l'époque aucune idée de ce que pouvait être l'analogue pour une variété algébrique en caractéristique positive de la cohomologie rationnelle d'une variété complexe. La fascination exercée par la beauté des conjectures de Weil, l'idée de démonstration générale de Weil, et aussi l'importance à priori de l'existence d'une telle théorie cohomologique en tant qu'outil disponible pour attaquer bien d'autres problèmes, poussa des mathématiciens de premier rang de l'époque, dans un effort de plus de trente ans, à la recherche, par des voies très diverses, de théories cohomologiques possédant assez de bonnes propriétés pour assurer la validité de l'heuristique de Weil, ce que l'on appelle depuis : les cohomologies de Weil. Les cohomologies : étale l-adique, de de Rham p-adique, cristalline et rigide, sont issues de cette quête, et c'est en 1974 que Pierre Deligne réussi, enfin, à prouver les conjectures à l'aide de la cohomologie étale l-adique.

Je voudrais insister sur le phénomène de la découverte et ses motivations (masquées). Au départ : un problème d'arithmétique qui trouve une réponse positive par une certaine méthode que l'on voit difficilement comment généraliser à des situations plus générales. Le cas traité étant « riche et profond », il justifie l'espoir d'une généralisation. C'est alors que le mathématicien, qui avait longuement réfléchi à la question, évoque une « idée nouvelle » (mais qui lui avait probablement chatouillé l'esprit bien de fois) en s'affranchissant de l'exigence de justifier tous ses détails. Il change le contexte : arithmétique $\mapsto$ géometrie-algébrique $\mapsto$ variétés complexes et il esquisse une ligne argumentaire avec l'outil clef de la cohomologie des variétés complexes qui n'avait pas (encore) d'analogue dans les autres contextes. Le problème se pose ensuite de voir si l'on peut donner un sens à un tel

outil dans ces autres contextes. Il n'y a aucune raison à priori pour que cette démarche réussisse, lorsque c'est le cas nous sommes devant une véritable découverte. On se demande alors si cette « nouvelle idée » était une intuition, au sens de prescience, d'une vérité cachée, ou seulement un coup de chance... Quoi qu'il en soit, tel Christophe Colomb qui, parti trouver une nouvelle route pour atteindre les Indes, découvre l'Amérique, l'esprit humain, parti à la recherche d'une preuve des conjectures de Weil, découvre (sous l'impulsion visionnaire de Grothendieck) les schémas, les topos, les catégories dérivées,..., les cohomologies de Weil,..., les motifs ! Ce qui donne tout son sens à ma réfection sur le fait que certaines question sont assimilables à des portes initiatiques.

Revenons maintenant à la question (3). Comme je l'évoquais plus haut, je me suis intéressé aux cohomologies de Weil entre les années 2002 et 2013, et plus particulièrement au fondements de la cohomologie de de Rham p-adique (au sens premier de Monsky-Washnitzer), restée inachevée depuis le succès de la cohomologie étale pour établir les conjectures de Weil. C'est avec Zoghman Mebkhout que nous nous sommes attelés, dans un travail de très longue haleine, à mener à terme la construction d'une théorie de cohomologie de de Rham p-adique sur la catégorie des schémas lisses et séparés sur un corps de caractéristique positive répondant aux exigences d'une cohomologie de Weil. Cela nous a permis d'aborder les conjectures de Weil sans sortir du cadre purement p-adique et de donner aux mathématiques un nouvel outil de recherche.

Dans tous mes travaux, l'intuition géométrique est omniprésente et s'impose, comme je le disais, par l'histoire propre de chaque sujet. Sujets qui se sont trouvés progressivement modelés par les intuitions de chacun des ses acteurs majeurs. Mais, en même temps, je dois dire que je trouve très surprenant que bien de questions abstraites puissent être traitées efficacement par des représentations géométriques. Points, espaces, variétés et sous-variétés différentielles, fibrations localement triviales, applications différentiables,... la quasi-totalité de l'intuition géométrique de la géométrie différentielle s'intègre harmonieusement à la géométrie algébrique devenant un puissant outil heuristique. Le langage géométrique nous aide ainsi à imaginer des propriétés probables du monde abstrait des équations polynomiales et souvent nous indique même le chemin à suivre. Ce support au raisonnement, ce support à la mémoire aussi, semble plutôt répondre non pas aux besoins de la logique intrinsèque aux problèmes mathématiques, mais plutôt aux besoin d'un cerveau devenu, après tant d'évolution, parfaitement adapté à un environnement éminemment géométrique : le monde réel qui nous entoure (tel que nos sens nous le font « sentir »).

En guise de conclusion, et à titre très personnel, je voudrais dire que, bien que je trouve fondamentale l'intuition géométrique dans mes recherches, son efficacité garde pour moi une grande part de mystère.

— Pourquoi est-elle si efficace dans un contexte à priori si éloigné ?

— Existe-t-il un risque pour que, à la longue, le modèle géométrique prenne la place du sujet lui-même et devienne alors une source édulcorée des progrès successifs dans le sujet. Progrès pour lesquels l'approche géométrique serait (donc) « tautologiquement » la plus efficace ? Quel garde-fou contre cette éventuelle dérive ?

Heureusement que des grandes question ouvertes sont toujours là ! Car ce sont bien elles qui montrent les limites de nos méthodes, de nos modèles, de nos intuitions, et, par cela même, qui nous exhortent à plus de création et de découverte. Sans cela aucun réel progrès ne me semble possible.

Question 4 : En quoi selon vous algèbre et géométrie sont liées dans les mathématiques en général ?

Revenant sur mes considérations dans la réponse à la question (1), l'algèbre m'apparaît comme un outil d'écriture, de manipulation et de comparaison de formules portant sur des opérations dont la nature rappelle (ou s'inspire de) celle de la somme et produit des entiers naturels. Mais, à y réfléchir, pourquoi doit-on s'arrêter à ces deux types d'opérations. La réponse à cette interrogation mais semble très floue, bien que, à l'opposé, j'aurais beaucoup de réticences qualifier de (purement) algébrique une formule comportant un signe intégral. Ce signe qui représente le résultat limite d'un processus infini de sommations, exige de l'ensemble sous-jacent (les nombres réels) des propriétés de densité et complétude qui manquent aux entiers naturels, de propriétés classiquement confinées par une convention bien établie à une autre branche des mathématiques : l'analyse. Ces branches, qui ont mis des siècles à se dégager, aussi bien par la nature de leurs objets, que par leur méthodes si spécifiques et par l'ensemble des recherches les incombant, ne me paraissent pas moins relever de subdivisions quelque peu artificielles dans l'esprit mathématicien, lequel devant une question ouverte se laisse influencer, parfois à son insu, par toutes source d'inspiration dans le but de faire une percée.

Si je fais cet aparté, c'est parce que j'ai tendance à voir l'algèbre, ou devrais-je plutôt dire, l'algébrisation d'un sujet, comme une méthode universelle incontournable en mathématiques, tant elle a fait ses preuves. En effet, une bonne partie de la méthode mathématique consiste dans l'encodage des faits dans un langage précis et reproductible (ce qui est le propre de la science). Cette méthode de transcription me parait être l'aboutissement d'une longue tradition algébrique. Je vois par expérience que quel que soit le sujet d'étude, en peu de temps apparaissent, des symboles, des opérations, une syntaxe, ... et des formules les reliant, tant et si bien que vois de l'algèbre partout. Ainsi, au delà de l'algèbre des matrices, de l'algèbre linéaire, de l'algèbre commutative (ou non-commutative), qui correspondent bien à une définition naïve d'algèbre, j'ai rencontré de l'algèbre dans des contextes très éloignés comme par exemple en topologie algébrique, revue dans la contexte de Grothendieck-Verdier qui concerne les catégories dérivées des catégories des faisceaux sur des espaces topologiques, dans la théorie des $\mathcal{D}$-modules... Dans ces contextes, l'algébrisation apparaît par l'introduction d'opérations homologiques, des six « opérations de Grothendieck » et par tout

un ensemble de formules les reliant dans un corpus algébrique. Ces formules qui condensent énormément d'information (certaines codent des théorèmes très profonds) sont d'une efficacité redoutable. Mais, redoutables aussi parce que l'on est tenté de les manipuler sans faire attention à leur signification, obtenant alors des preuves « formelles » (ou abstract nonsens) de théorèmes importants dont on peut se demander, à postériori, si on a réellement compris la preuve...

Tout ceci pour préciser comment j'interprète le mot « algèbre » lorsque je lis la question (4), et de lui répondre, donc, que je vois l'algèbre comme à priori liée à une méthode de réécriture, d'approche, de communication et de manipulation de l'information. En tant que telle, l'algèbre apparaît intimement liée au sujet, mais pas (forcément) à la géométrie, car celle-ci n'est pas toujours pertinente dans certains sujets (théorie des catégories, théorie des représentations, ...)

L'autre mot important dans la question (4) est le mot « géométrie » qui, tout comme le mot « algèbre », est susceptible d'avoir plusieurs sens.

On a la géométrie affine, euclidienne, projective, et celles non-euclidiennes issues de l'axiomatique d'Euclides en perturbant son cinquième postulat (des parallèles), par exemple la géométrie hyperbolique... Chacune de ces géométries admet des modèles comportant des structures additionnelles, dont une forte participation de l'algèbre par le biais des coordonnées cartésiennes des espaces sous-jacents, mais aussi par le biais des groupes d'isométries concernés. Dans ces exemples, le lien entre algèbre et géométrie est très fort. Parfois de manière inutilement redondante en ce sens qu'un théorème purement géométrique qui admet une preuve géométrique directe et très élégante, admet aussi une approche purement algébrique, mais celle-ci est souvent obscure et n'apporte rien de plus qu'une vérification calculatoire. D'autres fois, la redondance est très utile car complémentaire, par exemple tous ces théorèmes géométriques qui ont des preuves géométriques rapides et élégantes en petites dimensions sur lesquelles on bâtit une preuve algébrique indépendante de la dimension, ce qui établit le théorème en toute généralité. Il y a aussi des exemples de théorèmes qui font participer les deux contextes à parts égales, aussi bien dans l'énoncé que dans la preuve comme par exemple (parmi beaucoup d'autres) le théorème fondamental de la géométrie affine qui affirme qu'une bijection entre deux espaces affines est un isomorphisme affine, si et seulement si, elle transforme tout triplet de points alignés en un triplet de points alignés. Dans ce théorème, on peut sans risque dire que l'interaction entre algèbre et géométrie est optimale en ce sens que l'on ne peut replacer un point de vue par l'autre sans réellement perdre beaucoup dans la qualité de l'information.

Comme je l'ai déjà signalé dans la question (2), la géométrie de mes sujets de recherche, est plutôt celle de la géométrie différentielle, riemannienne, complexe, algébrique, et aussi celle des espaces localement compacts sur lesquels portent des questions de topologie algébrique. Aussi, le lien entre algèbre et géométrie va dépendre de chaque exemple concret.

Il y a tout un monde de nuances dans la manière dont algèbre et géométrie vont se lier, vont interagir, ça peut aller d'une redondance complète de points de vue avec des interactions très riches, une forme de symbiose, jusqu'au à la simple concomitance à l'intérieur d'un sujet, chacune apportant sa pierre à un édifice qui les dépasse toute deux.

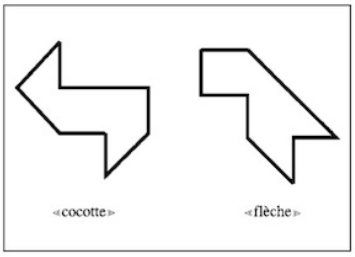
Je ne reviendrai pas sur rapport entre algèbre et géométrie en géométrie algébrique sur lequel j'ai déjà parlé dans la question (3), mais je voudrais éclairer mes propos des paragraphes précédents en parlant d'un autre sujet qui m'a beaucoup intéressé, celui de l'isospectralité des tambours. Dans ce sujet, la question à l'origine, posée par Marc Kac en 1966 : « Peut-on entendre la forme d'un tambour ? » se reformule d'emblée (modulo l'équation des membranes vibrantes) sous une forme très géométrique : Peut-on trouver deux domaines plans non isométriques ayant même spectre pour le laplacien ? La réponse est oui, et la première preuve connue qui date des années 90, repose sur une idée remarquable liée à la théorie des caractères des représentations des groupes finis. Cette idée permet de construire deux corps de nombres non isomorphes admettant la même fonction Zéta de Dedekind, ce qui est un résultat de théorie des nombres, donc essentiellement arithmétique et connu à l'époque. Or, dans le cas d'une variété riemannienne M, l'analogue de la fonction Zéta de Dedekind est la fonction « Zéta des variétés riemanniennes » définie par la série

$$\zeta_M(s) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^s}\,, \quad \mathrm{Re}(s) \gg 0,$$

où $\{0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots\}$ est l'ensemble des valeurs propres (non nulles) avec leur multiplicités du moins-laplacien $-\Delta_M$. Il est connu que l'application $s \mapsto \zeta_M(s)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ et que $\zeta_{M_1} = \zeta_{M_2}$ si et seulement si, M_1 et M_2 sont isospectrales.

Aussi, l'analogue en théorie des nombres de la question de Kac avait déjà une réponse négative. Et c'est ainsi que M-.F. Vigneras, spécialiste de la théorie des nombres, réalise, alors qu'elle écoute une conférence sur le sujet de Henri McKean (analyste), qu'elle connaissait déjà la réponse à la question de Kac. Elle publie alors en 1980 un article prouvant l'existence de surfaces hyperboliques compactes isospectrales non isométriques ce qui lui vaut une très rapide reconnaissance internationale. Par la suite, le mathématicien japonais T. Sunada s'intéressera à l'approche de Vigneras pour en extraire ses idées clefs et donnera en 1985 une méthode théorique simplifiée pour construire de surfaces isospectrales, méthode qui sera mise en pratique par P. Buser qui introduira en 1987 les surfaces qui portent son nom, surfaces sur lesquelles P. Berard participera à la mise au point de la technique de transplantation, avantageusement utilisée par C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert dans un travail conjoint en 1992, pour construire les des deux premières surfaces compactes planes isospectrales

non-isométriques connues. Voici à quoi elles ressemblent :



Cet exemple montre à quel point il faut se méfier de la tentation de croire que la réponse à une question dans une discipline donnée viendra de l'intérieur seul de la discipline. Il met en relief mes propos sur l'attitude de totale liberté que l'on doit avoir devant une question ouverte. Ici donc, alors que la question de Kac venait de très loin : d'abord posée par les physiciens du XIXe sous la forme : Peut-on entendre la forme d'une cloche ? et même : Peut on voir la composition des étoiles (en faisant allusion à la spectrographie) ? ensuite reprise par les spécialistes en EDP sous la forme de la question de Kac, toutes des questions de ce que l'on appelle aujourd'hui : « le problème inverse » en « géométrie spectrale », alors donc que ce sujet stagnait dans des recherches (en interne) restées plutôt infructueuses, la première réponse claire est apparue presque 100 ans plus tard et ce grâce à une inspiration dont la source était très algébrique puisqu'il s'agissait de la théorie des nombres.

Aujourd'hui, si l'on doit expliquer complètement l'isospectralité des deux formes ci-dessus, il faut un peu de algèbre pour la partie élémentaire de la théorie des caractères des groupes finis, et aussi pour dépouiller la structure du groupe $\mathrm{Sl}(3, I\!F_2)$. Il faut aussi un peu de géométrie riemannienne, mais seulement dans le cas plat ce qui représente une énorme simplification par rapport à la théorie générale. Mais il ne faut quasiment plus rien d'analyse et des EDP, et absolument plus rien du tout de la théorie des nombres. L'isospectralité peut ainsi être expliquée de manière exhaustive en M2, voire fin de M1. Il en résulte qu'un résultat important dont l'énoncé est très chargé de références à l'analyse est conséquence de constructions et résultats qui n'ont rien de commun avec cette discipline, ni par ailleurs avec les sources historiques de sa résolution. Aussi, le lien entre algèbre et géométrie dans ce sujet qui a été tellement déterminant d'un point de vue historique, se retrouve aujourd'hui réduit à une simple concomitance de méthodes.

C'est là un point qui donne matière à réfléchir car, en effet, dans les versions épurés de beaucoup de grands théorèmes, les idées clés, les liens et interactions entre disciplines différentes, les sources d'inspirations, qui ont tous participé à la découverte, s'effacent pour le « besoin » d'une esthétique parfois sans commune mesure avec les besoins fondamentaux en recherche : la genèse des idées, la découverte de preuves, et surtout le besoin de projection vers l'inconnu.

Question 5 : Selon vous, qu'est ce qui représente le mieux les liens entre algèbre et géométrie ? Un objet mathématique, un théorème en particulier...

Comme je le disais dans les précédentes questions, les liens entre algèbre et géométrie sont très divers et dépendent du sens précis que l'on donne à ces termes. Une fois cet aspect précisé, il y a aussi l'échelle de l'interaction : locale ou globale, le sens : laquelle agit sur laquelle, la forme de l'interaction : par le langage, l'heuristique, par la nature des énoncés. En géométrie algébrique les interactions se manifestent à toute échelle, dans tous les sens et sous toutes ses formes.

On a tendance à dire que la géométrie algébrique est l'ensemble de faits algébriques que l'on découvre par le biais d'une heuristique géométrique. Mais, fait remarquable, inversement, l'algèbre est aussi à l'origine de la découverte de nouveaux êtres géométriques.

Le point de départ de la géométrie algébrique pourrait se situer peu après le théorème des zéros de Hilbert qui établit une correspondance biunivoque et naturelle entre les points d'une partie algébrique Y d'un espace affine sur $\mathbb{C}$ (corps des complexes), et les idéaux maximaux de l'algèbre des fonctions complexes polynomiales sur Y. Ce théorème établit déjà un premier lien important entre algèbre et géométrie. A partir de là, et alors que le langage des catégories se répandait (fin des années 40), on a pu reformuler ce théorème par une équivalence de catégories entre, d'une part, la catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres de type fini et réduites, et les homomorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres, et, d'autre part, la catégorie des variétés algébriques affines complexes et les applications algébriques. C'était là, un deuxième lien beaucoup plus fertile que le premier. Il a permis d'établir un dictionnaire d'opérations équivalentes : sur les algèbres (quotients, localisations, produits tensoriels,...), et sur les espaces géométriques (restrictions fermées, ouvertes, produits,...). Ce dictionnaire sera un puissant moteur de recherches car il permettait dès lors de s'appuyer sur des intuitions géométriques pour progresser dans le monde abstrait des algèbres.

Il faudra ensuite attendre la fin des années 50 pour que Grothendieck se lance dans un vaste projet d'extension de cette équivalence dans le but de s'affranchir des limitations du corps de base $\mathbb{C}$, pour le remplacer par n'importe quel autre anneau commutatif A, et de s'affranchir aussi des limitations de finitude et réduction des algèbres. La question devenait alors : comment « géométriser » la catégorie des A-algèbres commutatives toute entière, et ce, quel que soit l'anneau A.

Mais voilà, si l'extension du côté algébrique avait été évidente, celle du côté géométrique et celle, postérieure, de la l'équivalence de catégories, l'étaient beaucoup moins, notamment dans les situations où le théorème de Hilbert n'était plus satisfait. Le côté géométrique s'est alors vu progressivement enrichi des concepts de « spectre » d'un anneau (ensemble de ses idéaux premiers muni de la topologie « spectrale »), de « faisceau (d'anneaux) structural », d'« espace annelé », pour enfin en arriver à celui de « schéma ». Tous ont été créés de toutes

pièces pour résoudre la question de l'extension de la catégorie des espaces algébriques. Le fait que de tels objets aient pu exister est déjà en soi une découverte majeure (à mes yeux) à la fois par le contenu que par la méthode. C'a été un acte de création/découverte très puissant qui a demandé la révision de toute sorte de notions dont celles de point et d'espace.

L'équivalence entre la catégorie des A-algèbres et celle des schémas basés sur $\mathrm{Spec}(A)$ et, pour moi, indiscutablement le théorème qui fonde la naissance de la géométrie algébrique commutative. Il représente le mieux le lien entre algèbre et géométrie sous la forme d'un théorème.

Un schéma est un espace topologique, muni d'un faisceau d'algèbres qui en fait un espace « localement »annelé. De nature à la fois géométrique et algébrique, il représente le mieux le lien entre algèbre et géométrie sous la forme d'un objet.

Mais l'algèbre et la géométrie sont aussi inextricablement liées à travers l'heuristique et le langage. En effet, dans cette histoire d'émergement de la géométrie algébrique, je voudrais insister sur la nature et sens successifs des interactions.

Au départ, algèbre et géométrie concourent dans le contexte de la géométrie complexe pour l'étude d'un même objet : courbe, surface, sous-espace, définis comme les zéros d'une famille de polynômes. Ces disciplines y concourent mais d'une manière que l'on pourrait qualifier de concomitante, de complémentaire. La poursuite de l'étude de ces ensembles de nature algébro-géométriques conduit finalement à la découverte d'un premier lien intime, une forme de tunnel ou de passage qui va permettre de « transporter » les concepts d'un domaine vers l'autre. Et c'est alors que va s'installer une forme de symbiose entre les deux disciplines, chacune servant à explorer et enrichir l'autre. La géométrie envers l'algèbre : les opérations de sous-espace algébrique engendré par une ensemble, de réunion ou intersections d'espaces algébriques, de produits d'espaces algébriques, d'applications algébriques, de fibrations, etc. conduiront à la recherche des opérations correspondantes dans les ensembles des idéaux des algèbres. Réciproquement, l'algèbre envers la géométrie : poussera à dépasser l'univers des variétés algébriques affines et l'effort conduira à la conception de nouveaux objets géométriques : les schémas affines.

Ce processus évolutif aboutira à la découverte de l'équivalence entre la catégorie des A-algèbres commutatives et celle des schémas (affines) basés sur $\mathrm{Spec}(A)$, et à l'éclosion d'un nouveau continent : la géométrie algébrique commutative dont chaque catégorie était une incarnation possible. Pour reprendre mes propos du tout au début du questionnaire, algèbre et géométrie apparaissaient alors comme les deux faces d'une pièce que l'on ne pouvait saisir qu'à travers elles.

Par tous ces commentaires, je justifie ma réponse à la question (5) : de mon point de vue, ce qui représente le mieux l'existence d'un lien intime et fort entre deux mondes est la possibilité de ce type de symbiose. Cela se traduit sous la forme de théorèmes et objets dont l'intuition, les preuves, les applications, mêlent de manière indissociables les deux mondes.

Question 5 bis : Pour vous, le théorème des zéros de Hilbert est-il un bon exemple de l'articulation entre l'algèbre et la géométrie ?

C'est un bon exemple, mais je le trouve beaucoup moins frappant que l'équivalence des catégories entre la catégorie des variétés affines sur $\mathbb{C}$ et la catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres de type fini réduites. Equivalence qui, rappelons-le, a été étendue bien au-delà de la sphère de validité du théorème de zéros de Hilbert.

En fait, cette équivalence est une « dualité » entre algèbre et géométrie, ce qui est un phénomène conceptuellement bien plus profond et universel que celui décrit par le théorème de Hilbert qui, lui, se « limite » à révéler le sens algébrique du concept géométrique de « point d'une variété affine ».

A ce sujet, je voudrais faire une parenthèse pour insister sur le fait fondamental qui dit que l'identité d'un objet mathématique (dans une catégorie) est dans ses « relations » avec les autres objets (les morphismes de la catégorie). Aussi, dans la dualité entre algèbre et géométrie, si l'un des volets importants est de comprendre quel objet algébrique correspond à tel objet géométrique et vice-versa, le deuxième grand volet est celui d'expliquer comment se correspondent les « relations ». Or, le théorème de Hilbert qui intervient certes de manière indiscutable et décisive dans le premier volet, ne suffit pas à lui tout seul pour répondre aux besoins du deuxième. Ceci sera le résultat en fait d'une autre grande idée en mathématiques qui consiste à systématiquement (fonctoriellement) remplacer un espace par son algèbre de fonctions, ce qui est, en essence, le réflexe de base du principe de « dualité ».

Je vais rappeler comment, à partir de l'interprétation algébrique du « point », une certaine heuristique de dualité se déroule sans difficulté technique majeure, ce qui justifie largement l'idée que le théorème de Hilbert occupe bien une place distinguée dans l'« articulation » entre l'algèbre et la géométrie. (Bien que, aussi distinguée soit-elle, je ne la vois toujours pas éclipser l'importance du principe de dualité dont elle fait partie.)

Le principe de dualité suivant fonctionne bien dans beaucoup de contextes différents ce qui lui confère une certaine universalité. Pour l'illustrer mais aussi pour rappeler les étapes à suivre, je vais l'appliquer à la catégorie des espaces topologiques compacts et les applications continues plutôt qu'à celle des variétés affines complexes et les applications algébriques. Ici, je choisis délibérément de changer de contexte pour montrer que la géométrie algébrique n'a pas l'exclusivité d'une dualité géométrie/algèbre, ce qui devrait aider à mieux évaluer la place du principe de dualité relativement au théorème des zéros de Hilbert, une fois revenus dans le cadre de la géométrie algébrique complexe.

La transposition des données et remarques qui vont suivre, du cadre topologique au cadre algébrique, devrait être évidente.

0) On note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels muni de la topologie ordinaire.
1) Si X est un espace topologique compact, on note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}$-algèbre des applications continues de X à valeurs dans $\mathbb{R}$, somme et produits définis point par point.

Commentaire. L'algèbre $\mathbb{R}[X]$ est réduite, i.e. sans élément nilpotent. Elle n'est presque jamais de type fini, contrairement au cas des variétés affines.

2) Si $a : X \to Y$ est une application continue, l'application $a^* : \mathbb{R}[Y] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $a^*(f) = f \circ a$, est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres.

3) La correspondance qui associe

$$X \mapsto \mathbb{R}[X] \quad et \quad (a : X \to Y) \mapsto (a^* : \mathbb{R}[Y] \to \mathbb{R}[X]) \,,$$

est un foncteur contravariant de la catégorie d'espaces topologiques compacts vers la catégorie $\mathrm{Alg}(\mathbb{R})$ des $\mathbb{R}$-algèbres.

4) Pour $x \in X$, l'idéal $\mathfrak{Z}(x)$ des fonctions de $\mathbb{R}[X]$ qui s'annulent en x, est maximal. En particulier l'intersection des idéaux maximaux (le radical de Jacobson) de $\mathbb{R}[X]$ est l'idéal nul.

5) Un exercice facile de topologie générale à l'aide du lemme d'Urysohn permet de voir que tout idéal maximal de $\mathbb{R}[X]$ est de la forme $\mathfrak{Z}(x)$ pour un unique $x \in X$. La correspondance $x \to \mathfrak{Z}(x)$ est donc une bijection entre X et l'ensemble $\mathrm{Spm}(\mathbb{R}[X])$ des idéaux maximaux de $\mathbb{R}[X]$.

Commentaire. De (1) et de (5), on voit que les algèbres de la forme $\mathbb{R}[X]$ sont de radical de Jacobson nul (donc réduites) et de corps résiduel $\mathbb{R}$.

6) Si $\alpha : \mathbb{R}[Y] \to \mathbb{R}[X]$ est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres, l'image inverse par α d'un idéal maximal $\mathfrak{Z}(x)$ de $\mathbb{R}[X]$ est un idéal de $\mathbb{R}[X]$, lui aussi maximal (!), donc de la forme $\mathfrak{Z}(y)$ pour un unique y dans Y (d'après (5)). L'homomorphisme α détermine ainsi l'application $a : X \to Y$ définie par $a(x) = y$. On montre alors que pour toute fonction f de $\mathbb{R}[Y]$, on a $\alpha(f) = f \circ a$ (lié à la question (4)), ce qui prouve, d'abord, que a est continue, et ensuite, que $\alpha = a^*$ (cf. (3)).

7) D'après (6), tout homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\alpha : \mathbb{R}[Y] \to \mathbb{R}[X]$ est de la forme a^* pour une certaine application continue $a : X \to Y$. Cette application est unique à avoir cette propriété. En effet, si $b : X \to Y$ était telle que $a^* = b^*$ alors

$$\mathfrak{Z}(b(x)) = (b^*)^{-1}(\mathfrak{Z}(x)) = (a^*)^{-1}(\mathfrak{Z}(x)) = \mathfrak{Z}(a(x)) \,,$$

et alors $b(x) = a(x)$, d'après (5).

8) Par ce qui précède, le foncteur dans (3) est une équivalence de catégories sur la sous-categorie pleine de $\mathrm{Alg}(R)$ des algèbres de la forme $\mathbb{R}[X]$.

9) Dans le principe de dualité, il y a aussi la « bidualité » qui dit que le dual du dual doit s'identifier à l'objet de départ. En termes de catégories et dans le contexte présent, cela signifie qu'il existe une équivalence contravariante de la catégorie des $\mathbb{R}$-algèbres (de la forme $\mathbb{R}[X]$) vers la catégorie des espaces topologiques, que je vais noter $(_) \rightsquigarrow (_)^\vee$, et un application naturelle (dite d'adjonction) $X \to \mathbb{R}[X]^\vee$ qui est un homéomorphisme.

Sans trop entrer dans les détails et suivant le réflexe de base en dualité, notons pour une algèbre $\mathbb{R}[X]$ donnée, par $\mathbb{R}[X]^\vee$, l'ensemble des homomorphismes de $\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$. Cet ensemble $\mathbb{R}[X]^\vee$ est, d'après (5) (corps résiduels $= \mathbb{R}$), en bijection canonique avec l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathbb{R}[X]$, qui, de nouveau d'après (5)(idéal-max $= \mathfrak{Z}(x)$), est aussi en bijection canonique avec l'ensemble X lui-même. D'où la bijection ensembliste $E(X) : X \to \mathbb{R}[X]^\vee$ qui associe à x la surjection canonique $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]/\mathfrak{Z}(x) = \mathbb{R}$ (écriture intrinsèque pour l'homomorphisme d'évaluation en x qui fait correspondre à une fonction f de $\mathbb{R}[X]$ le nombre réel $e_x(f) := f(x)$). Mais l'ensemble $\mathbb{R}[X]^\vee$ doit être un espace topologique, aussi, nous devons encore le munir d'une topologie. Pour cela, on remarque que la classe d'un élément f de $\mathbb{R}[X]$ dans l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/\mathfrak{Z}(x) = \mathbb{R}$, que nous notons (pour cause) $f(x)$, définit une application ensembliste $f : X \to \mathbb{R}$. La topologie de $\mathbb{R}[X]^\vee$ est alors définie comme la plus grossière rendant continues toutes ces applications $f : X \to \mathbb{R}$. Cette topologie est séparée et est à priori plus grossière que celle de X, ce qui assure la continuité de l'application $E(X) : X \to \mathbb{R}[X]^\vee$, sa bicontinuité découle alors de ce que X est compact.

Pour être rigoureux, la définition du foncteur $(_) \rightsquigarrow (_)^\vee$ demande encore de préciser son action sur les homomorphismes de $\mathbb{R}$-algèbres, mais comme cette action suit de près les constructions des étapes (6) et (7), je m'abstiendrai d'en parler davantage.

Commentaire. Cette étape (9), qui n'est pas absolument nécessaire, est souvent appelée la procédure de « reconstruction ». Comme son nom l'indique, elle permet de reconstruire un espace à partir de la connaissance de son dual. Le but de cette étape, on l'aura compris, est la construction d'un inverse de la l'équivalence de catégories de (3).

Dans le cadre de la géométrie algébrique, la démarche est exactement la même, seule change la nature des justifications. En termes de difficulté de justification, la différence la plus remarquable étant dans (5) qui, dans le cas algébrique, est précisément remplacée par le théorème des zéros de Hilbert.

Ma motivation en présentant tous ces détails a été de souligner les endroits précis où la caractérisation algébrique du concept de « point d'un espace » intervient de manière essentielle à l'établissement d'une dualité entre algèbre et géométrie, mais aussi de montrer la nature des autres ingrédients. Il résulte de leur inspection, mais aussi de mon expérience, que c'est effectivement le point (5) qui normalement bloque cette forme d'une dualité, de sorte que l'on est en droit de voir en lui un ingrédient critique, et de lui reconnaître donc un statut privilégié. Néanmoins, et en accord avec ma première réponse, je continue de penser que si le point (5) est un point clef, il n'est pas le phénomène clef, à savoir la dualité algèbre/géométrie.

Question 6 : Donnez-vous, ou avez-vous donné, des cours d'algèbre ? Si oui : Quelle place donnez-vous à l'articulation avec la géométrie, et aux représentations géométriques ? Avez-vous un exemple ?

Je ne suis pas enseignant, mais j'ai donné des cours spécialisés en M2 dans des thèmes liés à la géométrie algébrique et dans le cadre de la formation à la recherche. Je ne suis donc pas un professionnel de l'enseignement.

Mes cours partaient nécessairement d'un bagage de connaissances de base relativement large dans une discipline donnée, large mais non pas pointu, le but du cours étant alors précisément de mettre rapidement l'étudiant devant un secteur où l'on fait activement de la recherche. Il fallait apporter à sa conscience un problème ouvert en lui donnant tous les éléments pour sa compréhension mais aussi qui pourraient lui permettre de faire des progrès.

A ce niveau où le temps est limité, la technicité prime et la réflexion explicite sur les articulations entre l'algèbre et la géométrie n'est plus d'actualité. C'est quelque chose que l'on présume (souvent à tort) plus ou moins acquise par les étudiants. Le cours apparaît alors comme un terrain où ces articulations se mettent à l'oeuvre révélant alors dans la pratique tout leur intérêt.

A ce sujet, je dois dire que, moi-même, je n'ai pas souvenir d'avoir suivi des cours en géométrie algébrique dans lesquels on se soit livré à une réflexion un tant soit peu élaborée sur les thèmes de votre questionnaire. Le cours de mathématiques sont généralement guidés par des considérations pragmatiques, ils sont orientés vers l'action et peuvent manquer certaines occasions de réflexion, ce qui relève bien souvent de la qualité et expérience de l'enseignant.

En mathématiques, comme dans tant d'autres métiers, il y a le « faire » et le « comprendre », ce sont des questions très différentes, elles répondent à des besoins différents et même en opposition. La première est d'ordre pratique : on veut percer la barrière de l'inconnu, peu importe comment, c'est une nécessité « à priori ». La seconde est d'ordre philosophique, elle répond à un besoin beaucoup plus profond qui se pose (forcément) après que la première ait réussi : « qu'est ce qu'on a fait, qu'est ce qu'on a découvert, pourquoi on a réussi... ». C'est une question « à postériori » fondamentale, elle demande du temps supplémentaire, du recul et des qualités d'esprit d'une autre nature. Les thèmes de votre questionnaire se rapportent davantage à cette seconde question, contrairement à mes cours.

En reprenant une réflexion que j'ai déjà exprimée, on pourrait dire que les grandes questions mathématiques non résolues sont des portes initiatiques. Le vrai travail de l'esprit commence lorsque l'on a réussi à les entr'ouvrir.

Je voudrais terminer en citant René Thom lorsqu'il dit : *Le but de la science n'est pas seulement d'agir, mais de comprendre. C'est cette compréhension qui distingue la science de la magie.*

A propos d'un théorème d'Henri Cartan

Alberto Arabia*

Ce texte concerne les articles de Henri Cartan suivants :

C1. *Notions d'algèbre différentielle ; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie.* Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, pp. 15–27.

C2. *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal.* Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, pp. 57–71.

On donne une preuve simple du Théorème 3 de [C2] (p. 62). Les notations seront celles de [C1,C2] à de petites différences près.

§ 1. Rappels

1.1 Objets et notations

- Dans la suite, les objets gradués le sont sur $\mathbb{N}$.
- $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dual noté $\mathfrak{g}^\vee$.
- $\boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee)$ algèbre graduée des fonctions polynôme sur $\mathfrak{g}$.
- $\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$ algèbre graduée des formes multilinéaires alternées sur $\mathfrak{g}$.
- Pour chaque $x \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme $\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ induit une action sur $\mathfrak{g}^\vee$ qui se prolonge en des dérivations de degré 0 sur $\boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee)$ et $\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$, notées $\theta(x)$. On a ainsi des homomorphisme d'algèbres de Lie
$$\theta : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}^0(\boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee), \boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee)) \quad \text{et} \quad \theta : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}^0(\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee), \Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee))$$
- Pour chaque $x \in \mathfrak{g}$, la forme linéaire qui fait correspondre $\lambda \in \mathfrak{g}^\vee \mapsto \lambda(x)$ induit une antidérivation de degré -1 sur $\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$ notée $\boldsymbol{i}(x)$.
- $d_{\boldsymbol{K}} : \Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee) \to \Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$, « *différentielle de Koszul* », antidérivation de degré $+1$, définie par :
$$d_{\boldsymbol{K}}(_) = \frac{1}{2} \sum_k x'_k \wedge \theta(x_k)(_),$$
où $\{x'_k\}$ désigne la base duale d'une base $\{x_k\}$ de $\mathfrak{g}$ arbitrairement choisie.
- $\boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) := \Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee) \otimes \boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee)$, « *Algèbre de Weil de* $\mathfrak{g}$ », munie de la graduation définie par :
$$\boldsymbol{W}^d(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{d=a+2b} \Lambda^a(\mathfrak{g}^\vee) \otimes \boldsymbol{S}^b(\mathfrak{g}^\vee),$$
et d'une structure d'algèbre différentielle graduée par la donnée de l'antidérivation $d_{\boldsymbol{W}} : \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \to \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$, de degré $+1$:
$$\begin{cases} d_{\boldsymbol{W}}(\lambda \otimes 1) &:= 1 \otimes \lambda + d_{\boldsymbol{K}}(\lambda) \otimes 1 \\ d_{\boldsymbol{W}}(1 \otimes \lambda) &:= \sum_k x'_k \otimes \theta(x_k)\lambda \end{cases}$$
La dérivation $\theta(x)$ sur $\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$ et $\boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee)$ se prolonge en une unique dérivation de degré 0 sur $\boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$ notée également $\theta(x)$. L'antidérivation $\boldsymbol{i}(x)$ sur $\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$ se prolonge en une unique antidérivation de $\boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$ dont la restriction à $\boldsymbol{S}^1(\mathfrak{g}^\vee)$ est nulle qui sera également notée $\boldsymbol{i}(x)$. On a ainsi le quadruplet $\big(\boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}), d_{\boldsymbol{W}}, \theta, \boldsymbol{i}\big)$.

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 6e étage, bureau 6D15, 75013 Paris.
Adresse électronique : arabia@math.jussieu.fr

- Une « *algèbre différentielle graduée munie d'une action de* $\mathfrak{g}$ », $\mathfrak{g}$-ADG dans la suite, est la donnée d'une algèbre différentielle graduée $(\boldsymbol{E}^*, d_{\boldsymbol{E}})$, d'un homomorphisme d'algèbres de Lie, $\theta : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}^0(\boldsymbol{E}^*, \boldsymbol{E}^*)$, et d'un morphisme $\boldsymbol{i} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}^{-1}(\boldsymbol{E}^*, \boldsymbol{E}^*)$ vérifiant les conditions :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(I)} & \theta([x,y]) = \theta(x)\theta(y) - \theta(y)\theta(x); \\ \text{(II)} & \boldsymbol{i}([x,y]) = \theta(x)\,\boldsymbol{i}(y) - \boldsymbol{i}(y)\theta(x); \\ \text{(III)} & \theta(x) = \boldsymbol{i}(x) d_{\boldsymbol{E}} + d_{\boldsymbol{E}}\,\boldsymbol{i}(x) \end{array}}$$

Remarque. $\big(\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee), d_{\boldsymbol{K}}, \theta, \boldsymbol{i}\big)$ et $\big(\boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}), d_{\boldsymbol{W}}, \theta, \boldsymbol{i}\big)$ sont des $\mathfrak{g}$-ADG.

Un élément ω d'une $\mathfrak{g}$-ADG $(\boldsymbol{E}^*, \boldsymbol{d_E}, \theta, \boldsymbol{i})$, est dit « *basique* » lorsque

$$\boldsymbol{i}(x)\omega = \theta(x)\omega = 0\,, \qquad \text{pour tout } x \in \mathfrak{g}\,.$$

L'ensemble $\mathbf{Bas}^*(\boldsymbol{E})$ des éléments basiques est alors une sous-algèbre différentielle graduée de $(\boldsymbol{E}^*, d_{\boldsymbol{E}})$.

- Une « *connexion* » d'une $\mathfrak{g}$-ADG $\big(\boldsymbol{E}^*, d_{\boldsymbol{E}}, \theta, \boldsymbol{i}\big)$ est la donnée d'une application linéaire $f : \Lambda^1(\mathfrak{g}^\vee) \to \boldsymbol{E}^1$ vérifiant, pour tout $x \in \mathfrak{g}$,

$$f \circ \theta(x) = \theta(x) \circ f \quad \text{et} \quad f \circ \boldsymbol{i}(x) = \boldsymbol{i}(x) \circ f\,.$$

- Pour $(\boldsymbol{E}^*, d_{\boldsymbol{E}})$ comme ci-dessus, on note $\overline{\boldsymbol{E}}^* := \boldsymbol{E}^* \otimes \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$, et

$\bar{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{E}} : \overline{\boldsymbol{E}}^* \to \overline{\boldsymbol{E}}^*$: antidérivation de degré $+1$ qui prolonge $d_{\boldsymbol{W}} : \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \to \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$ et $d_{\boldsymbol{E}} : \boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{E}^*$.

$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) : \overline{\boldsymbol{E}}^* \to \overline{\boldsymbol{E}}^*$: antidérivation de degré -1 qui prolonge $\boldsymbol{i}(x) : \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \to \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$ et $\boldsymbol{i}(x) : \boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{E}^*$.

$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}) : \overline{\boldsymbol{E}}^* \to \overline{\boldsymbol{E}}^*$: dérivation de degré 0 qui prolonge $\theta(x) : \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \to \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$ et $\theta(x) : \boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{E}^*$.

Le quadruplet $\big(\overline{\boldsymbol{E}}^*, \bar{d}_{\boldsymbol{E}}, \theta, \boldsymbol{i}\big)$ est à nouveau une $\mathfrak{g}$-ADG.

§2. Le théorème

Théorème (th. 3 [C2]). *Avec les données ci-dessus, l'application $\omega \mapsto \omega \otimes 1 \otimes 1$ est un homomorphisme injectif de $\mathfrak{g}$-ADG, noté $\Xi : \boldsymbol{E}^* \hookrightarrow \overline{\boldsymbol{E}}^*$, de restriction aux éléments basiques notée $\xi : \mathbf{Bas}^*(\boldsymbol{E}) \hookrightarrow \mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}})$.*

Lorsque $(\boldsymbol{E}^*, d_{\boldsymbol{E}}, \theta, \boldsymbol{i})$ admet une connexion, les morphismes de complexes Ξ et ξ sont des quasi-isomorphismes.

Démonstration. Soit $f : \Lambda^1(\mathfrak{g}^\vee) \to \boldsymbol{E}^1$ une connexion et considérons, suivant Cartan, l'antidérivation κ sur $\overline{\boldsymbol{E}}^* = \boldsymbol{E}^* \otimes \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$, de degré -1, nulle sur $\boldsymbol{E}^* \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee) \otimes 1$ et dont la restriction à $\boldsymbol{S}^1(\mathfrak{g}^\vee)$ est définie par :

$$\kappa(1 \otimes 1 \otimes \lambda) = (1 \otimes \lambda \otimes 1) - (f\lambda \otimes 1 \otimes 1)\,.$$

Pour chaque $x \in \mathfrak{g}$, on a les égalités sur $\overline{\boldsymbol{E}}^*$

$$\boxed{\kappa \circ \theta(x) = \theta(x) \circ \kappa \quad \text{et} \quad \kappa \circ \boldsymbol{i}(x) = -\boldsymbol{i}(x) \circ \kappa} \qquad (*)$$

En effet, $\kappa\circ\theta(x)-\theta(x)\circ\kappa$ et $\kappa\circ\boldsymbol{i}(x)+\boldsymbol{i}(x)\circ\kappa$ (‡) sont respectivement une antidérivation de degré -1 et une dérivation de degré -2. Leur action sur $\overline{\boldsymbol{E}}^*$ est donc déterminée par leurs restrictions à $1\otimes 1\otimes \boldsymbol{S}^1(\mathfrak{g}^\vee)$, à $1\otimes\Lambda^1(\mathfrak{g}^\vee)\otimes 1$ et à $\boldsymbol{E}^*\otimes 1\otimes 1$ qui sont trivialement nulles. ([1])

L'endomorphisme de $\overline{\boldsymbol{E}}^*$:

$$\boxed{h=\bar{d}_{\boldsymbol{E}}\circ\kappa+\kappa\circ\bar{d}_{\boldsymbol{E}}}$$

est une dérivation de degré 0 de $\overline{\boldsymbol{E}}^*$ qui vérifie :

$$\boxed{h\circ\theta(x)=\theta(x)\circ h\,,\quad h\circ\bar{d}_{\overline{\boldsymbol{E}}}=\bar{d}_{\overline{\boldsymbol{E}}}\circ h\,,\quad h\circ\boldsymbol{i}(x)=\boldsymbol{i}(x)\circ h\,,\quad h(\boldsymbol{E}^*\otimes 1\otimes 1)=0}$$

(immédiat d'après (∗) et (I,II,III)). Il induit donc un endomorphisme de module différentiel gradué sur $\mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}})$ et sur les complexes quotients

$$\operatorname{coker}\Xi=\frac{\overline{\boldsymbol{E}}^*}{\boldsymbol{E}^*\otimes 1\otimes 1}\quad\text{et}\quad\operatorname{coker}\xi=\frac{\mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}})}{\mathbf{Bas}^*(\boldsymbol{E})\otimes 1\otimes 1}\,.$$

Notons $\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\Xi)$, $\mathcal{B}^*(\operatorname{coker}\Xi)$, $\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\xi)$, $\mathcal{B}^*(\operatorname{coker}\xi)$ respectivement les sous-algèbres de cocycles et les idéaux des cobords des complexes en question. On a

$$h(\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\Xi))\subseteq\mathcal{B}^*(\operatorname{coker}\Xi)\quad\text{et}\quad h(\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\xi))\subseteq\mathcal{B}^*(\operatorname{coker}\xi)$$

et les diagrammes de morphismes de modules gradués de degré 0 suivants, où l'on note Π et π les surjections canoniques, sont trivialement commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\Xi) & \xrightarrow{h} & \mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\Xi)\\ {\scriptstyle\Pi}\downarrow & \oplus & {\scriptstyle\Pi}\downarrow\\ H^*(\operatorname{coker}\Xi) & \xrightarrow{0} & H^*(\operatorname{coker}\Xi)\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\xi) & \xrightarrow{h} & \mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\xi)\\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \oplus & {\scriptstyle\pi}\downarrow\\ H^*(\operatorname{coker}\xi) & \xrightarrow{0} & H^*(\operatorname{coker}\xi)\end{array}\qquad(\mathcal{D})$$

Décomposition spectrale de $h:\overline{\boldsymbol{E}}^*\to\overline{\boldsymbol{E}}^*$. On commence par remarquer que $\overline{\boldsymbol{E}}^*$ est un $\boldsymbol{E}^*$-module gradué à gauche *libre* admettant comme base la famille des monômes

$$M_{\Lambda,P}:=1\otimes(x'_{j_1}\wedge\cdots\wedge x'_{j_r})\otimes(x'_{\ell_1}\cdots x'_{\ell_s})$$

où :

- $\{x_i\}$ est une base de $\mathfrak{g}$ de base duale $\{x'_i\}$,
- $\Lambda:=(j_1<\cdots<j_r)$ et $P:=(\ell_1\leqslant\cdots\leqslant\ell_s)$ avec la convention que lorsque $P=\varnothing$ (resp. $\Lambda=\varnothing$) le terme symétrique (resp. antisymétrique) vaut 1. On notera $|\Lambda|:=r$ et $|P|:=s$.

Étant données deux suite ordonnées d'entiers naturels P_1,P_2 on note « $P_1\preccurlyeq P_2$ » lorsque P_1 est une sous-suite de P_2. La notation « $P_1\prec P_2$ » équivaut à « $P_1\preccurlyeq P_2$ *et* $P_1\neq P_2$ ». La relation '$\preccurlyeq$' est un ordre partiel sur l'ensemble des suites finies croissantes d'entiers naturels. On munit l'ensemble des couples de suites finies $\{(\Lambda,P)\}$ de l'ordre partiel défini par l'ordre lexicographique inverse, autrement dit :

$$(\Lambda_1,P_1)\preccurlyeq(\Lambda_2,P_2)\Longleftrightarrow\begin{cases}P_1\prec P_2\,,\text{ ou bien}\\ P_1=P_2\text{ et }\Lambda_1\preccurlyeq\Lambda_2\,.\end{cases}$$

[1] Il s'ensuit que $\kappa(\mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}}))\subseteq\mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}})$, mais on n'aura pas besoin de ce résultat.

D'autre part, $h : \overline{\boldsymbol{E}}^* \to \overline{\boldsymbol{E}}^*$ est un endomorphisme de $\boldsymbol{E}^*$-module vérifiant :

- $h(1\otimes 1\otimes\lambda)=(\bar{d}_{\boldsymbol{E}}\circ\kappa+\kappa\circ\bar{d}_{\boldsymbol{E}})\big(1\otimes 1\otimes\lambda\big)$
$=\bar{d}_{\boldsymbol{E}}(1\otimes\lambda\otimes 1)-\bar{d}_{\boldsymbol{E}}\big(f\lambda\otimes 1\otimes 1\big)+\kappa\sum_k\big(1\otimes x'_k\otimes\theta(x'_k)\lambda\big)$
$=\big(1\otimes 1\otimes\lambda\big)+(1\otimes d_{\boldsymbol{K}}\lambda\otimes 1)-\big(d_{\boldsymbol{E}}f\lambda\otimes 1\otimes 1\big)-2(1\otimes d_{\boldsymbol{K}}\lambda\otimes 1)+\sum_k\big(\theta(x_k)f\lambda\otimes x'_k\otimes 1\big)$
$=\big(1\otimes 1\otimes\lambda\big)-(1\otimes d_{\boldsymbol{K}}\lambda\otimes 1)-\big(d_{\boldsymbol{E}}f\lambda\otimes 1\otimes 1\big)+\sum_k\big(\theta(x_k)f\lambda\otimes x'_k\otimes 1\big)$
- $h(1\otimes\lambda\otimes 1)=(\bar{d}_{\boldsymbol{E}}\circ\kappa+\kappa\circ\bar{d}_{\boldsymbol{E}})(1\otimes\lambda\otimes 1)=\kappa\big(1\otimes 1\otimes\lambda\big)=(1\otimes\lambda\otimes 1)-\big(f\lambda\otimes 1\otimes 1\big)$

et comme h est en plus une dérivation, on en déduit aussitôt l'égalité, pour tous (λ, P) :

$$\boxed{h(M_{\Lambda,P})=(|\Lambda|+|P|)M_{\Lambda,P}+\textstyle\sum_{(\Lambda',P')}\omega_{\Lambda,P}^{\Lambda',P'}\cdot M_{\Lambda',P'}}$$

où $(\Lambda', P') \prec (\Lambda, P)$ et $\omega_{\Lambda,P}^{\Lambda',P'} \in \boldsymbol{E}^*$. D'où la conséquence fondamentale suivante :

- *L'endomorphisme* $h : \overline{\boldsymbol{E}}^* \to \overline{\boldsymbol{E}}^*$ *est trigonalisable.*
- $\mathbb{N}$ *est l'ensemble des valeurs propres de* $h : \overline{\boldsymbol{E}}^* \to \overline{\boldsymbol{E}}^*$.
- *Le sous-espace spectral de* h *dans* $\overline{\boldsymbol{E}}^*$ *associé à la valeur propre* 0 *est* $\boldsymbol{E}^* \cdot M_{\varnothing,\varnothing} = \boldsymbol{E}^* \otimes 1 \otimes 1$. *Il coïncide donc avec* $\ker h$.

Enfin, comme h commute aux opérateurs $\bar{d}_{\boldsymbol{E}}, \theta(x), \boldsymbol{i}(x)$, les espaces vectoriels

$$\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}(\xi)) \subseteq \mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}(\Xi)) \subseteq \frac{\overline{\boldsymbol{E}}^*}{\boldsymbol{E}^*\otimes 1\otimes 1}$$

se décomposent en somme directe de sous-espaces spectraux de h associés à des valeurs propres **strictement positives**. En particulier, les surjections Π et π dans $(\mathcal{D})$ sont nécessairement nulles et alors

$$\boxed{H^*(\operatorname{coker}\Xi)=H^*(\operatorname{coker}\xi)=0}$$

Ces annulations reportées dans suites exactes longues de cohomologie

$$\longrightarrow H^{m-1}(\operatorname{coker}\Xi)\longrightarrow H^m(\boldsymbol{E}^*)\xrightarrow{H^m(\Xi)}H^m(\overline{\boldsymbol{E}}^*)\longrightarrow H^m(\operatorname{coker}\Xi)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{m-1}(\operatorname{coker}\xi)\longrightarrow H^m(\boldsymbol{B}^*)\xrightarrow{H^m(\xi)}H^m(\overline{\boldsymbol{B}}^*)\longrightarrow H^m(\operatorname{coker}\xi)\longrightarrow$$

où $\boldsymbol{B}^* := \mathbf{Bas}^*(\boldsymbol{E})$ et $\overline{\boldsymbol{B}}^* := \mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}})$, terminent la preuve du théorème. ∎

———————×———————

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes
Samedi 2 juin 2003

Notes on the Cartan Model

Alberto Arabia

§1. The Cartan model

1.1. Let $\boldsymbol{G}$ denote a connected compact Lie Group with universal fibre bundle $I\!E\boldsymbol{G}$. Let $I\!E\boldsymbol{G} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} I\!E\boldsymbol{G}(m)$, where $I\!E(m) \subseteq I\!E\boldsymbol{G}$ is a compact $\boldsymbol{G}$-manifold with no cohomology in degrees belonging to the interval $[1, m+1]$.

Let $\boldsymbol{M}$ be a $\boldsymbol{G}$-manifold. Denote $(\Omega^*(\boldsymbol{M}), d_{\boldsymbol{M}})$ its de Rham complex of differential forms, $\boldsymbol{Z}^*(\boldsymbol{M})$ the subring of cocycles, $\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{M})$ its ideal of coboundaries, and finally $H^*_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{Z}^*(\boldsymbol{M})/\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{M})$ its de Rham cohomology ring.

The "*Cartan complex of* $\boldsymbol{M}$" is by definition

$$\big(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}), d_{\boldsymbol{G}}\big) := \begin{cases} \Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}) = \big(S(\mathfrak{g}^\vee)\otimes\Omega(\boldsymbol{M})\big)^{\boldsymbol{G}} \\ d_{\boldsymbol{G}}(\omega(X)) = d_{\boldsymbol{M}}(\omega(X)) - \iota(X)(\omega(X)) \end{cases}$$

Théorème (Cartan model). *For any $\boldsymbol{G}$-manifold $\boldsymbol{M}$, there exist a natural isomorphism*

$$\boxed{H^*(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{G}}, \mathbb{R}) \cong H^*(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}), d_{\boldsymbol{G}})}$$

where the left hand side denotes the singular cohomology of the Borel construction on $\boldsymbol{M}$, the space $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{G}} := I\!E\boldsymbol{G} \times_{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{M}$.

1.2. The last theorem is a consequence of the three following propositions.

Proposition A. *For each $n \in \mathbb{N}$, the restriction map*

$$H^n(I\!E\boldsymbol{G} \times_{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{M}, \mathbb{R}) \to H^n(I\!E\boldsymbol{G}(m) \times_{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{M}, \mathbb{R})$$

is un isomorphism for all $m \gg 0$.

Proposition B (Cartan). *For each $m \in \mathbb{N}$, one has a natural isomorphism*

$$H^n(I\!E\boldsymbol{G}(m) \times_{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{M}, \mathbb{R}) \cong H^*\big(\Omega_{\boldsymbol{G}}(I\!E\boldsymbol{G}(m) \times \boldsymbol{M}), d_{\boldsymbol{G}}\big)$$

Proposition C (Homotopic invariance). *Let $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ be a $\boldsymbol{G}$-equivariant map between $\boldsymbol{G}$-manifolds such that $f^* : H^\ell_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{N}) \to H^\ell_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M})$ is an isomorphism for all $\ell \leqslant 2N$, then the induced pull-back map*

$$f^\ell : H^\ell\big(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{N}), d_{\boldsymbol{G}}\big) \to H^\ell\big(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}), d_{\boldsymbol{G}}\big)$$

is an isomorphism for all $\ell < N$.

1.3. The Cartan model theorem then follows from the natural diagram

$$\begin{array}{ccc} \operatorname*{limproj}_m H(I\!E\boldsymbol{G}(m) \times_{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{M}, \mathbb{R}) & \xrightarrow[\text{prop. B}]{\cong} & \operatorname*{limproj}_m H\big(\Omega_{\boldsymbol{G}}(I\!E\boldsymbol{G}(m) \times \boldsymbol{M}), d_{\boldsymbol{G}}\big) \\ \cong \uparrow \text{prop. A} & & \cong \uparrow \text{prop. C} \\ H(I\!E\boldsymbol{G} \times_{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{M}, \mathbb{R}) & & H\big(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}), d_{\boldsymbol{G}}\big) \end{array}$$

where the "prop. C" arrow is induced by the projections $I\!E\boldsymbol{G}(m) \times \boldsymbol{M} \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}$, $(x, m) \mapsto m$.

The fact that the arrows in this diagram are bijections is a consequence of propositions A, B, C.

§2. Proposition A

The singular cohomologies of $I\!E\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{M}$ and of $I\!E\boldsymbol{G}(m)\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{M}$ are just the $\boldsymbol{G}$-equivariant cohomologies of $I\!E\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{M}$ and $I\!E\boldsymbol{G}(m)\times\boldsymbol{M}$, as the group $\boldsymbol{G}$ acts freely in these topological spaces. On the other and, the natural map between the fibred spaces over $I\!B\boldsymbol{G}$

$$\begin{array}{ccc} I\!E\boldsymbol{G}(m)\times\boldsymbol{M} & \xrightarrow[\subseteq]{} & I\!E\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ I\!E\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}(I\!E\boldsymbol{G}(m)\times\boldsymbol{M}) & \xrightarrow[\subseteq]{} & I\!E\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}(I\!E\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ I\!B\boldsymbol{G} & = & I\!B\boldsymbol{G} \end{array}$$

induces a morphism of the Leray spectral sequences associated to these fibrations, which coincides with the natural restriction map

$$\rho_2^{p,q}: H^p(I\!B\boldsymbol{G})\otimes H^q(I\!E\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{M})\longrightarrow H^p(I\!B\boldsymbol{G})\otimes H^q(I\!E\boldsymbol{G}(m)\times\boldsymbol{M})$$

at the $I\!E_2^{p,q}$ terms.

Standard arguments show then that if m is sufficiently large (in fact if $m\geqslant 2n$), the induced morphisms $\rho_r^{p,q}$, with $n=p+q$, will be isomorphic between the corresponding subsequent terms $I\!E_r^{p,q}$, for all $r\geqslant 2$. This implies that the induced map $\rho_\infty^{*,*}$ on $\bigoplus_{n=p+q}I\!E_\infty^{p,q}$ is also bijective, and proposition A follows since this map is the graded morphism induced by the restriction map

$$H^n(I\!E\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}(I\!E\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{M}),\mathbb{R})\longrightarrow H^n(I\!E\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}(I\!E\boldsymbol{G}(m)\times\boldsymbol{M}),\mathbb{R})$$

filtered by a finite decreasing filtration.

§3. Proposition B

This is Cartan's theorem for principal $\boldsymbol{G}$-bundles.

§4. Proposition C

4.1. Symmetrization. A very particular feature concerns the $\boldsymbol{G}$-modules $\Omega^\ell(\boldsymbol{M})$.

Proposition (Symmetrizing operator). *Let $\boldsymbol{G}$ be a compact Lie group endowed with the Haar measure. Let $\boldsymbol{M}$ be a $\boldsymbol{G}$-manifold. Let $\boldsymbol{V}$ be a finite dimensional $\boldsymbol{G}$-module. For $\ell\in\mathbb{N}$, endow $\boldsymbol{V}\otimes\Omega^\ell(\boldsymbol{M})$ with the diagonal action of $\boldsymbol{G}$,* i.e. $g\cdot(v\otimes\omega)=g\cdot v\otimes g\cdot\omega$.

a) *The map* $\mathfrak{S}:\boldsymbol{V}\otimes\Omega^\ell(\boldsymbol{M})\to\boldsymbol{V}\otimes\Omega^\ell(\boldsymbol{M})$

$$\mathfrak{S}(v\otimes\omega)=\int_{\boldsymbol{G}}g\cdot(v\otimes\omega)\,dg$$

is well defined and verifies:

i) $(\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}})\circ\mathfrak{S}=\mathfrak{S}\circ(\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}})$.

ii) $\mathfrak{S}(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{K}^\ell)=\big(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{K}^\ell\big)^{\boldsymbol{G}}$, *where* $\boldsymbol{K}^\ell\in\{\Omega^\ell(\boldsymbol{M}),\boldsymbol{B}^\ell(\boldsymbol{M}),\boldsymbol{Z}^\ell(\boldsymbol{M}),H^\ell_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M})\}$

iii) $\mathfrak{S}^2=\mathfrak{S}$,

b) *If $\boldsymbol{G}$ is connected, there exist a canonical isomorphism*

$$H\big((\boldsymbol{V}\otimes\Omega^*(\boldsymbol{M}))^{\boldsymbol{G}},\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}}\big)\cong\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{G}}\otimes H^*_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M})$$

Proof. Claim (a) is standard. For (b), let's denote $\Omega^\ell=\Omega^\ell(\boldsymbol{M})$, $\boldsymbol{B}^\ell=\boldsymbol{B}^\ell(\boldsymbol{M})$ and $\boldsymbol{Z}^\ell=\boldsymbol{Z}^\ell(\boldsymbol{M})$. One then has the following sequence of inclusions and surjections which is exact at the Ω's terms:

$$\boldsymbol{B}^{\ell-1}\xrightarrow[\subseteq]{}\boldsymbol{Z}^{\ell-1}\xrightarrow[\subseteq]{}\Omega^{\ell-1}\xrightarrow[\twoheadrightarrow]{d_{\boldsymbol{M}}}\boldsymbol{B}^{\ell}\xrightarrow[\subseteq]{}\boldsymbol{Z}^{\ell}\xrightarrow[\subseteq]{}\Omega^{\ell}\xrightarrow[\twoheadrightarrow]{d_{\boldsymbol{M}}},$$

giving rise to the analog sequence of $\boldsymbol{G}$-modules

$$\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^{\ell-1}\xrightarrow[\subseteq]{}\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^{\ell-1}\xrightarrow[\subseteq]{}\boldsymbol{V}\otimes\Omega^{\ell-1}\xrightarrow[\twoheadrightarrow]{\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}}}\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^{\ell}\xrightarrow[\subseteq]{}\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^{\ell}\xrightarrow[\subseteq]{}\boldsymbol{V}\otimes\Omega^{\ell}\xrightarrow[\twoheadrightarrow]{\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}}}$$

as $\boldsymbol{V}\otimes(_)$ is an exact functor. Now, if we take $\boldsymbol{G}$-invariants, the map

$$(\boldsymbol{V}\otimes\Omega^{\ell-1})^{\boldsymbol{G}}\xrightarrow[\twoheadrightarrow]{\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}}}(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^{\ell})^{\boldsymbol{G}}\tag{$\diamond$}$$

remains onto. Indeed, if $\sum_\alpha v_\alpha\otimes\omega_\alpha\in(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^\ell)^{\boldsymbol{G}}$, choose $\nu_\alpha\in\Omega^{\ell-1}$ such that $\omega_\alpha=d_{\boldsymbol{M}}(\nu_\alpha)$. We then have after (a)

$$(\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}})\big(\mathfrak{S}(\textstyle\sum_\alpha v_\alpha\otimes\nu_\alpha)\big)=\mathfrak{S}(\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}})\big(\textstyle\sum_\alpha v_\alpha\otimes\nu_\alpha\big)=\mathfrak{S}(\textstyle\sum_\alpha v_\alpha\otimes\omega_\alpha)=\sum_\alpha v_\alpha\otimes\omega_\alpha\,,$$

proving that ($\diamond$) is onto. One gets in this way a sequence of injections and surjections

$$(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^{\ell-1})^{\boldsymbol{G}}\underset{\subseteq}{\to}(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^{\ell-1})^{\boldsymbol{G}}\underset{\subseteq}{\to}(\boldsymbol{V}\otimes\Omega^{\ell-1})^{\boldsymbol{G}}\underset{\twoheadrightarrow}{\to}(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^{\ell})^{\boldsymbol{G}}\underset{\subseteq}{\to}(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^{\ell})^{\boldsymbol{G}}\underset{\subseteq}{\to}(\boldsymbol{V}\otimes\Omega^{\ell})^{\boldsymbol{G}}\underset{\twoheadrightarrow}{\to}$$

which is again exact at the Ω's terms. This fact immediately gives a canonical isomorphism

$$H^\ell\big((\boldsymbol{V}\otimes\Omega^*)^{\boldsymbol{G}},\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}}\big)\longrightarrow(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^\ell)^{\boldsymbol{G}}/(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^\ell)^{\boldsymbol{G}}.\tag{$*$}$$

On the other hand, and for the same reasons as above, one has the exact sequence

$$\mathbf{0}\to\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^\ell\xrightarrow[\subseteq]{}\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^\ell\xrightarrow[\twoheadrightarrow]{}\boldsymbol{V}\otimes H^\ell\to\mathbf{0}\,,$$

where $H^\ell:=H^\ell_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M})$. And, using the symmetrizing operator $\mathfrak{S}$ over $\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^\ell$ as we did in the previous paragraph, we get the exactness of the sequence

$$\mathbf{0}\to(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{B}^\ell)^{\boldsymbol{G}}\xrightarrow[\subseteq]{}(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{Z}^\ell)^{\boldsymbol{G}}\xrightarrow[\twoheadrightarrow]{}(\boldsymbol{V}\otimes H^\ell)^{\boldsymbol{G}}\to\mathbf{0}\,,$$

which shows that the right hand side of ($*$) is just $(\boldsymbol{V}\otimes H^\ell)^{\boldsymbol{G}}$. We then have

$$H^\ell\big((\boldsymbol{V}\otimes\Omega^*)^{\boldsymbol{G}},\mathbf{id}\otimes d_{\boldsymbol{M}}\big)=(\boldsymbol{V}\otimes H^\ell)^{\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{G}}\otimes H^\ell\,,$$

as the action of $\boldsymbol{G}$ on H^ℓ is trivial because $\boldsymbol{G}$ is connected. ∎

4.2. Proof of C. Put $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_i=(S^{\geqslant i}(\mathfrak{g}^\vee)\otimes\Omega)^{\boldsymbol{G}}$, where $S^{\geqslant i}(\mathfrak{g}^\vee)$ denotes the ideal of $S(\mathfrak{g}^\vee)$ generated by the products of i elements of $\mathfrak{g}^\vee$. Each $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_i$ is clearly a $d_{\boldsymbol{G}}$ subcomplex of $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})$ and we get a decreasing filtration

$$\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})=\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_0\supseteq\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_1\supseteq\cdots\supseteq\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_i\supseteq\cdots\tag{$\diamond\diamond$}$$

which is *regular* ([1]) as one has $\Omega^\ell_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})\cap\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_i=0$, for $i>\ell$. As usual, this data generates a

[1] Our reference on spectral sequences is: Godement, *Topologie algébrique et théorie des Faisceaux*, pp. 75-89.

spectral sequence $I\!E(\boldsymbol{M})_*$ whose first term is

$$I\!E(\boldsymbol{M})_0^{p,q} = (S^p(\mathfrak{g}^\vee) \otimes \Omega^q(\boldsymbol{M}))^{\boldsymbol{G}}, \qquad d_0 = (\mathbf{id} \otimes d_{\boldsymbol{M}}) : I\!E(\boldsymbol{M})_0^{p,q} \to I\!E(\boldsymbol{M})_0^{p,q+1},$$

so that one gets

$$\boxed{I\!E(\boldsymbol{M})_1^{p,q} = S^p(\mathfrak{g}^\vee)^{\boldsymbol{G}} \otimes H^q_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M})}$$

as a consequence of (b) in the symmetrizing operator theorem.

Now, given a differentiable $\boldsymbol{G}$-equivariant map $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ one gets a morphism of Cartan complexes $f^* : \Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{N}) \to \Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})$ such that $f^*(\Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{N})_i) \subseteq (\Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_i)$ for all $i \in \mathbb{N}$, inducing thereafter a morphism of spectral sequences

$$f_r^{*,\bullet} : I\!E(\boldsymbol{N})_r^{*,\bullet} \to I\!E(\boldsymbol{M})_r^{*,\bullet}$$

which, for $r = 1$, takes the value

$$f_1^{*,\bullet} = \mathbf{id}^* \otimes f^\bullet : S^*(\mathfrak{g}^\vee)^{\boldsymbol{G}} \otimes H^\bullet_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{N}) \longrightarrow S^*(\mathfrak{g}^\vee)^{\boldsymbol{G}} \otimes H^\bullet_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M}).$$

Standard arguments then show that if $f^\bullet : H^\bullet_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{N}) \to H^\bullet_{\mathrm{dR}}(\boldsymbol{M})$ is bijective in degrees $\leqslant 2N$, then

$$f_\infty^{p,q} : I\!E(\boldsymbol{N})_\infty^{p,q} \longrightarrow I\!E(\boldsymbol{M})_\infty^{p,q}$$

is bijective for $p + q \leqslant N$.

Recall now (*loc.cit.* thm. 4.4.2) that the filtration $(\diamond\diamond)$ gives the sequence of morphisms

$$H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})) = H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_0) \leftarrow H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_1) \leftarrow \cdots \leftarrow H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_i) \leftarrow \cdots$$

and that if we denote by $H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}))_i$ the image of $H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})_i)$ in $H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}))$, we get a decreasing filtration

$$H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})) = H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}))_0 \supseteq H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}))_1 \supseteq \cdots \leftarrow H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}))_i \supseteq \cdots,$$

such that the spectral series $I\!E(\boldsymbol{M})_*$ converges to $I\!E_\infty(\boldsymbol{M}) = \mathrm{Gr}\, H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}))_\star$. The conclusion of the last paragraph maybe then restated by saying that the map

$$\mathrm{Gr}\, f^* : \mathrm{Gr}\, H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{N}))_\star \to \mathrm{Gr}\, H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}))_\star$$

is bijective in total degrees bounded above by N, and the same for

$$f^* : H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{N})) \to H(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})),$$

since the filtrations are regular.

———————×———————

Autour des exposés n° 19, 20 du Séminaire Cartan 1949/50

La catégorie des $\mathfrak{g}$-adg

Dans l'exposé n° 19 du séminaire Cartan (49-50), on introduit, pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, la catégorie des $\mathfrak{g}$-algèbres différentielles graduées ($\mathfrak{g}$-adg). Une $\mathfrak{g}$-adg est un quadruplet $E = (E, d, \theta, i)$ où (E, d) est une algèbre différentielle positivement graduée, où $\theta : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_0(E, d)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie à valeurs dans l'algèbre de Lie des dérivations de degré 0 de (E, d), et où $i : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_{-1}(E)$ est une application linéaire à valeurs dans l'espace des (anti)dérivations de degré -1 de E, telles que

$$\bullet\ \iota([x,y]) = \theta(x)\iota(y) - \iota(y)\theta(x)\,, \qquad \bullet\ \theta(x) = \iota(x)d + d\iota(x)\,,$$

pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

L'ensemble $\mathrm{Bas}(E)$ des éléments « *basiques* » de E, i.e. tués par toutes les dérivations $\theta(x)$ et $i(x)$, est une sous-algèbre différentielle de (E, d), d'où l'inclusion d'adg's

$$(\mathrm{Bas}(E), d) \subset (E, d)\,. \tag{$*$}$$

Un « *morphisme de $\mathfrak{g}$-adg's de $E_1 = (E_1, d, \theta, i)$ vers $E_2 = (E_2, d, \theta, i)$* » est un morphisme d'algèbres différentielles graduées de (E_1, d) vers (E_2, d) de degré 0 qui commute aux opérateurs $\{d, \theta(x), i(x) \mid x \in \mathfrak{g}\}$. On note $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{g}\text{-adg}}(E_1, E_2)$ l'ensemble de ces morphismes.

Connexions algébriques des $\mathfrak{g}$-adg's et algèbre de Weil $W(\mathfrak{g})$

Un cas particulièrement important de $\mathfrak{g}$-adg est donné par « *l'algèbre de Weil* » $W(\mathfrak{g}) = (S(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}), d, \theta, i)$, caractérisée par le fait de représenter le foncteur de « *connexions algébriques d'une $\mathfrak{g}$-adg* », *i.e.* le foncteur qui fait correspondre

$$\mathfrak{g}\text{-adg} \ni E \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\theta,i}(\Lambda^1(\mathfrak{g}), E^1)$$

où $\mathrm{Hom}_{\theta,i}(\Lambda^1(\mathfrak{g}), E^1)$ est l'espace des « *connexions algébriques de E* », *i.e.* des applications linéaires $\xi : \Lambda^1(\mathfrak{g}) \to E^1$ vérifiant pour tout $x \in \mathfrak{g}$ les conditions :

$$\bullet\ \theta(x)(\xi(\phi)) = \xi(\theta(x)(\phi)) \qquad \bullet\ i(x)(\xi(\phi)) = \phi(x)\,.$$

Dans les paragraphes §5 et §6 de l'exposé n° 19, Cartan montre dans le détail comment le foncteur $E \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\theta,i}(\Lambda^1(\mathfrak{g}), E^1)$ est représenté par la couple $(W(\mathfrak{g}), \Phi)$ où Φ est l'isomorphisme naturel

$$\Phi(_) : \mathrm{Mor}_{\mathfrak{g}\text{-adg}}(W(\mathfrak{g}), _) \xrightarrow[(\simeq)]{} \mathrm{Hom}_{\theta,\xi}(\Lambda^1(\mathfrak{g}), (_)^1) \tag{$\ddagger$}$$

qui fait correspondre à un morphisme de $\mathfrak{g}$-adg's de $W(\mathfrak{g}) \to E$ sa restriction au sous-espace $1 \otimes \Lambda^1(\mathfrak{g}) \subseteq W(\mathfrak{g})$.

Les G-variétés et les fibrés principaux

Soit G un groupe de Lie connexe et compact ([1]) d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'exposé n° 19 introduit plusieurs concepts liés à la donnée d'une G-variété différentielle M.

C-1) L'algèbre des formes différentielles $\Omega(M)$ est munie d'une structure de $\mathfrak{g}$-adg, et lorsque la surjection canonique $p : M \to M/G$ est un fibré principal, le complexe $(\mathrm{Bas}(\Omega(M)), d)$ calcule $H(M/G)$. L'inclusion $(*)$ induit alors le morphisme image inverse $p^* : H(M/G) \to H(M)$.

C-2) Des arguments géométriques sur l'espace total d'un fibré principal de variétés différentielles $p : M \to B$ de groupe G sont utilsés pour montrer que $(\Omega(M), d, \theta, i)$ admet des connexions $\xi : \Lambda^1(\mathfrak{g}) \to \Omega^1(M)$. L'équivalence $(\ddagger)$ donne alors un homomorphisme de $\mathfrak{g}$-adg's $\overline{\xi} : W(\mathfrak{g}) \to \Omega(M)$ et, par restriction, le morphisme canonique entre algèbres basiques

$$\overline{\xi} : (\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g})), d) \to (\mathrm{Bas}(\Omega(M)), d)\,. \qquad (**)$$

Comme on a $(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g})), d) = (S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}, 0)$, ce morphisme induit en cohomologie « *le morphisme caractéristique* »

$$H(\overline{\xi}) : S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to H(B)\,.$$

L'indépendance de $H(\overline{\xi})$ par rapport à ξ sera établie par le théorème 3 de l'exposé n° 20 du même séminaire.

Steenrod, Chern, Weil

Le diagramme suivant est un résumé des différentes approches pour définir le morphisme caractéristique $\mathrm{ch} : S(\mathfrak{g})^G \to H(B)$ pour un fibré principal de variétés différentielles $p : M \to B$ de groupe G, compact et connexe.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Mor}_{\mathfrak{g}\text{-adg}}(W(\mathfrak{g})), \Omega(M)) & \xlongequal{\text{Weil}} & \{\text{connexions algébriques sur } \Omega(M)\} \\
\downarrow \text{Bas} & & \uparrow \\
\{\mathrm{ch} : S(\mathfrak{g})^G \to H(B)\} & \xleftarrow{\text{Chern}} & \{\text{connexions infinitésimales sur } \Omega(M)\} \\
\uparrow & & \downarrow\!\!\downarrow \\
\mathrm{Hot}(B, I\!BG) & \xleftarrow{\text{Steenrod}} & \{\text{fibrés principaux } p : M \to B\}
\end{array}$$

Dans la première ligne, l'algèbre de Weil représente le foncteur covariant « *connexions algébriques* », tandis que dans la troisième, basée sur le théorème de que Steenrod, le classifiant $I\!BG$ représente le foncteur contravariant « *fibrés principaux de groupe G à isomorphisme près* » dans la catégorie des variétés différentielles et applications continues à homotopie près.

1. La plupart des constructions dans l'exposé n° 19 sont indépendantes de ces hypothèses sur G, mais elles deviennent incontournables pour les résultats les plus intéressants.

Le Complexe de Cartan pour la cohomologie équivariante

On se donne une variété différentielle M munie d'une action différentiable (pas nécessairement libre) de G (connexe et compact). Bien que ce ne soit pas un objet central des exposés de Cartan, l'exposé n° 20 introduit le sous-complexe $(S(\mathfrak{g})^G \otimes \Omega(M), d_{\mathfrak{g}}) \subseteq \Omega_{\mathfrak{g}}(M) := \mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M))$ des « *formes différentielles G-équivariantes de M* ». Bien des années plus tard, dans l'article d'Atiyah-Bott *The moment map and equivariant cohomology*, Topology, 23, 1984, le complexe $\Omega_{\mathfrak{g}}(M)$ réapparaît sous le nom « *modèle infinitésimal de de Rham pour l'espace* $M_G := \mathbb{E}G \times_G M$ », où l'on trouve une ébauche de preuve du fait que ce complexe calcule la cohomologie singulière de M_G.

Pour montrer que le complexe de Cartan $(S(\mathfrak{g})^G \otimes \Omega(M), d_{\mathfrak{g}})$ calcule la cohomologie *singulière* de l'espace topologique $\mathbb{E}G \times_G M$ on peut procéder en deux étapes.

C-A) Monter que $H(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M)), d) = H(\mathbb{E}G \times_G M)$.

C-B) Montrer que $(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M), d) = (S(\mathfrak{g})^G \times \Omega(M), d_{\mathfrak{g}})$.

La question (C-A) est abordée par Cartan uniquement lorsque M est l'espace total d'un fibré principal $p : M \to B$, auquel cas on applique (C-1). C'est le Théorème 3, donné sans démonstration en page 20-05 de l'exposé 20 du Séminaire Cartan (*loccit*), il donne l'égalité

$$H(B) = H(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M)), d)\,.$$

L'assertion (C-A) résulte alors du fait que la projection $\mathbb{E}G \times_G M \to B$ est une équivalence d'homotopie.

Dans ses articles, Cartan ne discute pas du cas général où $M \to M/G$ n'est pas un fibré principal de variétés différentielles. En sont exclus notamment les deux cas importants suivants.

C-i) Le groupe G n'opère pas librement sur la variété différentielle M. Par exemple, le groupe orthogonal $G := O(2)$ agissant sur $\mathbb{R}^2$.

C-ii) Le groupe G opère librement sur M, mais M n'est pas une variété différentielle. Par exemple, $M = \mathbb{E}G$, cas pour lequel Cartan donne seulement une heuristique justifiant du fait que $H(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g})))$ doit s'identifier canoniquement à $H(\mathbb{B}G)$. ([2])

Dans "A propos du théorème de Cartan" je donne une preuve du Théorème 3 (*loccit*) dans les mêmes lignes argumentaires de l'exposé n° 20.

Pour (C-i), il faut un travail supplémentaire pour se ramener à des actions libres auxquelles on peut appliquer les idées de Cartan. Dans "Notes on the Cartan model" je donne l'approche qui consiste à réaliser *l'espace topologique*

2. Une idée de preuve pour l'identification $H(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}))) = H(\mathbb{B}G)$ est donnée en page 11 de l'article d'Atiyah-Bott.

$\mathbb{E}G \times_G M$ comme réunion croissante de variétés différentielles $\mathbb{E}G(m) \times_G M$. Je profite alors du fait que G opère librement sur chaque $\mathbb{E}G(m) \times M$. ([3])

La proposition C dans ces Notes, qui est l'analogue du Théorème 3 (*loccit*), est prouvée en intégrant encore d'autres ingrédients permettant de sortir du cadre restreint où G opère librement sur M.

Une démarche légèrement différente, en filigrane dans ce qui précède, est basée sur la réalisation de l'espace classifiant $\mathbb{B}G$ comme réunion croissante de variétés différentielles $\mathbb{E}(m)/G$. Il est bien connu que les *approximations* $\mathbb{E}G(m)$ peuvent être choisies de sorte que l'on ait pour chaque $i \in \mathbb{N}$

$$H^i(\mathbb{B}G) = \varprojlim{}_m H^i(\mathbb{E}G(m)/G) = \varprojlim{}_m H^i(\mathrm{Bas}(\Omega(\mathbb{E}G(m)))) \,,$$

ce qui nous conduit à introduire le complexe

$$(\Omega(\mathbb{E}G), d) := \varprojlim{}_m (\Omega(\mathbb{E}G(m)), d)$$

comme modèle de complexe pour remplacer le complexe des cochaînes simpliciales de $\mathbb{E}G$. L'intérêt, ce faisant, est que $(\Omega(\mathbb{E}G), d)$ est muni d'une structure de $\mathfrak{g}$-adg et d'une connexion (car limite de $\mathfrak{g}$-adg's à connexion). La théorie de Cartan peut alors s'appliquer et donne un *quasi-isomorphisme*

$$(W(\mathfrak{g}), d, \theta, i) \to (\Omega(\mathbb{E}G), d, \theta, i) \,.$$

La question (C-A) se réduit alors à montrer l'égalité

$$H^i(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M))) = H^i(\mathrm{Bas}(\Omega(\mathbb{E}G) \otimes \Omega(M))) \,, \quad \forall i \in \mathbb{N} \,,$$

ce pourquoi un raisonnement par suites spectrales de Leray permet de conclure.

Enfin, la question (C-B) est relativement formelle et ne comporte pas de difficulté majeure. Elle fait l'objet d'une étude détaillée dans le paragraphe 7 de l'exposé n° 20 du Séminaire Cartan (*loccit*, p. 20-05).

Paris, 21 décembre 2016
Alberto Arabia

3. C'est l'idée décrite dans le §4 de l'article d'Atiyah-Bott.

Comparison theorem between the equivariant de Rham cohomology of a G-manifold M and the ordinary cohomology of the homotopic quotient M_G

Alberto Arabia*

November 28, 2018

1. Description of the problem. Let G be a compact (not necessarily connected) Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$. We compare, for a given G-manifold M, the ordinary cohomology, with coefficients in the field of real numbers $\mathbb{R}$, of the homotopic quotient

$$M_G := \mathbb{E}G \times_G M, \tag{1}$$

with the cohomology of the complex of G-equivariant differential forms

$$\Omega_G(M) := ((S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M))^G, d_{\mathfrak{g}}). \tag{2}$$

We would like to emphasize that as (1) and (2) are functorial on the category G-Man of G-manifolds and equivariant differentiable maps, what we are aiming for is to compare the two contravariant functors

$$G\text{-Man} \ni M \rightsquigarrow \begin{array}{l} H(M_G;\mathbb{R}) \\ H_G(M) := H\big(\Omega_G(M)\big) \end{array} \tag{3}$$

We will do this by constructing a specific isomorphism of graded $\mathbb{R}$-algebras

$$\Phi_M : H(M_G;\mathbb{R}) \simeq H_G(M), \tag{4}$$

which will be functorial for $M \in G$-Man. In the particular case where $M := \{\bullet\}$, we get an isomorphism of graded $\mathbb{R}$-algebras

$$\Phi_{\{\bullet\}} : H(\mathbb{B}G;\mathbb{R}) \simeq S(\mathfrak{g})^G. \tag{5}$$

The functors in (3) will therefore have values in the category of $S(\mathfrak{g})^G$-graded algebras. In other words, we will get commutative diagrams of graded $\mathbb{R}$-algebras

$$G\text{-Man} \ni M \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} H(\mathbb{B}G;\mathbb{R}) & \longrightarrow & H(M_G;\mathbb{R}) \\ {\scriptstyle \Phi_{\{\bullet\}}}\downarrow \simeq & \bigoplus & {\scriptstyle \Phi_M}\downarrow \simeq \\ S(\mathfrak{g})^G & \longrightarrow & H_G(M) \end{array} \tag{6}$$

*Université Paris Diderot-Paris 7, IMJ-PRG, CNRS, Bâtiment Sophie Germain, bureau 608, Case 7012, 75205. Paris Cedex 13, France. Contact: alberto.arabia@imj-prg.fr.

2. Constructing Φ_M for free actions. Let G-Man$_f$ denote the full subcategory of G-Man whose objects are the G-manifolds M on which G acts freely. The quotient space M/G then has a unique structure of manifold such that the orbit map $\nu : M \to M/G$ is a locally trivial fibration of manifolds of fiber G.

In that case, the projection onto the second coordinate

$$\xi_M : M_G := \mathbb{E}G \times_G M \twoheadrightarrow M/G, \quad [b,m] \mapsto [m],$$

is a locally trivial fibration with fibers homeomorphic to $\mathbb{E}G$. The map ξ_M is thus a homotopy equivalence, and a natural transformation of functors

$$\begin{array}{ccccc} & & M_G & \xrightarrow{\phi_G} & N_G \\ G\text{-Man}_f \ni (M & \xrightarrow{\phi} & \Big\downarrow{\scriptstyle \xi_M}\sim & & \Big\downarrow{\scriptstyle \xi_N}\sim \\ & & M/G & \xrightarrow{\overline{\phi}} & N/G \end{array} \tag{7}$$

This is saying that there exists a de Rham model for the algebra $H(M_G;\mathbb{R})$, in this case the de Rham complex $(\Omega(M/G),d)$.

In this situation, the diagram (6) splits naturally in two isomorphisms of $\mathbb{R}$-algebras

$$\begin{array}{ccccc} & & H(M_G;\mathbb{R}) & & \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\xi_M^*)^{-1}}\simeq & & \\ G\text{-Man} \ni M & & H_{\mathrm{dR}}(M/G) & \xrightarrow{\Phi_M} & H_G(M) \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi'_M}\simeq & & \\ & & H_G(M) & & \end{array} \tag{8}$$

where Φ'_M is the isomorphism defined by Cartan in his Brussels lectures, and whose construction is functorial on the category G-Man$_f$.

3. Constructing Φ_M for general actions

3.1. The spaces M_G are generally not of finite cohomological dimension, as the example of the classifying space $\mathbb{B}G$ already shows. On the other hand, if the action of G on M is not free, the topological quotient space M/G is no longer necessarily a manifold. So it appears that Cartan's method, which depends on the existence of some kind of differential model for the ordinary cohomology of M_G, becomes useless for comparing $H(M_G;\mathbb{R})$ and $H_G(M)$.

3.2. The universal G-bundle $\mathbb{E}G$, is the topological inductive limit of an increasing sequence (a tower) of G-manifolds

$$\mathbb{E}G(0) \subset \mathbb{E}G(1) \subset \mathbb{E}G(2) \subset \cdots \subset \mathbb{E}G \tag{9}$$

where $\mathbb{E}G(n)$ is compact and n-connected, i.e. such that

$$\Pi_q(\mathbb{E}G(n)) = 0, \quad \forall q \leq n. \tag{10}$$

The family of restriction homomorphisms of algebras

$$H(I\!EG;\mathbb{R}) \rightrightarrows \cdots \to H(I\!EG(n+1);\mathbb{R}) \to H(I\!EG(n);\mathbb{R}) \to H(I\!EG(n-1);\mathbb{R}) \to \cdots$$

is then a projective family and induces, as such, an algebra homomorphism:

$$H(I\!EG;\mathbb{R}) \to \varprojlim H(I\!EG(n);\mathbb{R}), \tag{11}$$

which will be shown to be an isomorphism (*cf.* 5.1-(a)).

3.3. If X is a G-space, the increasing sequence (9) can be used to realize X_G as the topological inductive limit of the tower of spaces

$$X_G(*) := \big(X_G(0) \subset X_G(1) \subset X_G(2) \subset \cdots \subset X_G(\infty) := X_G\big) \tag{12}$$

where

$$X_G(n) := I\!EG(n) \times_G X\,.$$

– The correspondence $X \rightsquigarrow X_G(*)$ is functorial relative to $X \in G$-Man.

– Furthermore, if X is a manifold, then the $X_G(n)$'s will also be so, since G is compact and acts freely on $I\!EG(n) \times X$, which is also a manifold.

The tower (12) induces, as in section 3.2, the projective system of restriction homomorphisms of algebras

$$H(X_G;\mathbb{R}) \rightrightarrows \cdots \to H(X_G(n+1);\mathbb{R}) \to H(X_G(n);\mathbb{R}) \to H(X_G(n-1);\mathbb{R}) \to \cdots$$

and, therefore, the algebra homomorphism:

$$\boxed{H(X_G;\mathbb{R}) \to \varprojlim H(X_G(n);\mathbb{R})} \tag{13}$$

which will also be shown to be an isomorphism (*cf.* 5.1-(b)).

3.4. Let M be a G-manifold. For each $n \in \mathbb{N}$, the projection of G-manifolds

$$p_n : I\!EG(n) \times M \to M, \quad (x,m) \mapsto m, \tag{14}$$

is equivariant and induces an homomorphism of equivariant cohomologies

$$\boxed{p_n^* : H_G(M) \to H_G(I\!EG(n) \times M) = H_{\mathrm{dR}}(M_G)} \tag{15}$$

where the equality at the right-hand is, once again, justified by Cartan's lectures.

Putting together the family of the projections (14), we get the inductive system

$$I\!EG(n-1) \times M \quad \subset \quad I\!EG(n) \times M \quad \subset \quad I\!EG(n-1) \times M \quad \subset \quad \ldots$$

with p_{n+1}, p_n, p_{n+1} all mapping to M.

which induces, by (15), the projective system of algebra homomorphisms

$$H_G(M) \xrightarrow[p_{n+1}^*]{p_n^*} \cdots \to H_{\mathrm{dR}}(M_G(n+1)) \to H_{\mathrm{dR}}(M_G(n)) \to H_{\mathrm{dR}}(M_G(n-1)) \to \cdots$$

and, hence, the algebra homomorphism:

$$\boxed{H_G(M) \to \varprojlim H_{\mathrm{dR}}(M_G(n))} \tag{16}$$

which, as before, will be shown to be an isomorphism (*cf.* 5.1-(c)).

3.5. To compare $H(M_G;\mathbb{R})$ and $H_G(M)$, we put together (13) and (16) thanks to the identification $H(M(n);\mathbb{R}) \cong H_{\mathrm{dR}}(M(n))$ given by the de Rham comparison theorem. We thus have three functorial isomorphisms for $M \in G$-Man

$$H(M_G;\mathbb{R}) \underset{\simeq}{\longrightarrow} \varprojlim H(M_G(n);\mathbb{R}) \cong \varprojlim H_{\mathrm{dR}}(M_G(n)) \underset{\simeq}{\longleftarrow} H_G(M),$$

the composition of which defines the announced algebra isomorphism

$$\boxed{\Phi_M : H(M_G;\mathbb{R}) \underset{\simeq}{\longrightarrow} H_G(M)}$$

functorial relative to $M \in G$-Man.

4. A technical result. The fact that (11), (13) and (16) are isomorphisms, will be consequence of one and the same property that we now establish.

4.1. Theorem. *Let $\varphi : C \to D$ be a morphism of regular filtered graded complexes whose corresponding spectral sequences pages $\mathbb{E}(C)_2$ and $\mathbb{E}(D)_2$ are in the first quadrant, i.e. are such that $\mathbb{E}(C)_2^{p,q} = \mathbb{E}(D)_2^{p,q} = 0$, if $p < 0$ or $q < 0$. Assume that, for some fixed $n \in \mathbb{N}$, the induced homomorphisms*

$$\mathbb{E}(\varphi)_2^{p,q} : \mathbb{E}(C)_2^{p,q} \to \mathbb{E}(D)_2^{p,q}$$

are isomorphisms for all $q \leq n$. Then, the induced morphisms in cohomology

$$H^i(\varphi) : H^i(C) \to H^i(D)$$

are isomorphisms for all $i \leq n$.

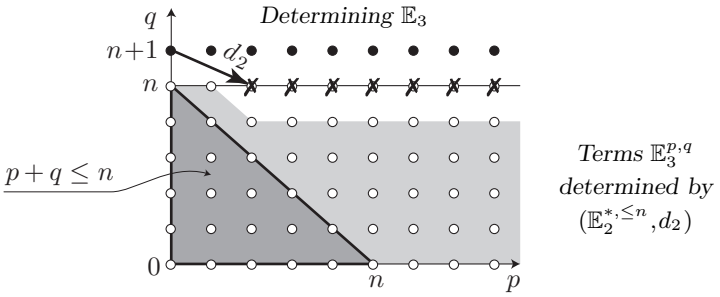
Proof. In the page $(\mathbb{E}_2, d_2)$, one has $d_2(\mathbb{E}_2^{p-2,q+1}) \subset \mathbb{E}_2^{p,q}$, which implies that the determination of $\mathbb{E}_3^{p,q}$ is based on the knowledge of the sub-complex $(\mathbb{E}_2^{*,\leq n}, d_2)$ only, except if

$$p - 2 \geq 0 \quad \text{and} \quad q + 1 > n, \tag{$*$}$$

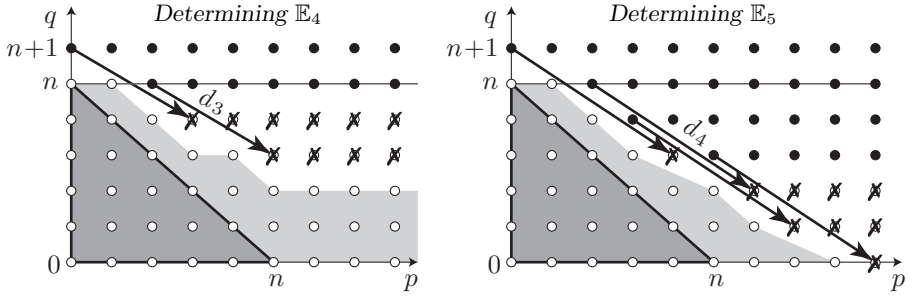
since in that case it may happen that $d_2(\mathbb{E}_2^{p-2,q+1}) \neq 0$, while $\mathbb{E}_2^{p-2,q+1} \not\subset \mathbb{E}_2^{*,\leq n}$. Notice also that if the conditions $(*)$ are satisfied, then $p + q > n + 1$.

In the pictures below, the symbol '$\circ$' indicates the terms $\mathbb{E}_{r+1}^{p,q}$ determined only by the sub-complex $(\mathbb{E}_2^{p,\leq n}, d_2)$, while a '$\bullet$' indicates those not entirely deter-

mined by $(\mathbb{E}_2^{p,\leq n}, d_2)$, and '✗' indicates that $\mathbb{E}_r^{p,q}$ is determined by $(\mathbb{E}_2^{p,\leq n}, d_2)$ but that $\mathbb{E}_{r+1}^{p,q}$ is not so.



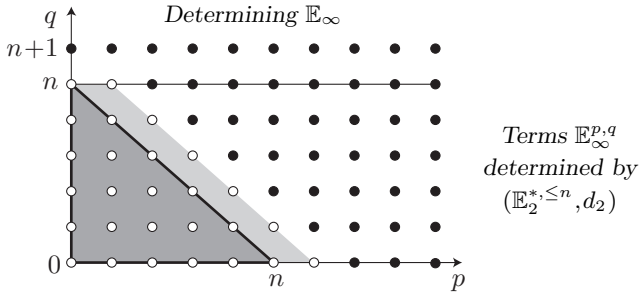
The same analysis for the terms $\mathbb{E}_4^{p,q}$ and $\mathbb{E}_5^{p,q}$ gives the pictures



Since the image of

$$d_r : \mathbb{E}_r^{0,n+1} \to \mathbb{E}_r \qquad (\diamond)$$

is contained in the term $\mathbb{E}_r^{r,n+1-r+1}$, which is of total degree $n+2$, we understand that any term in $\mathbb{E}_\infty^{\geq 0,\geq 0}$ of total degree $n+2$ may depend on $\mathbb{E}_2^{0,n+1}$. On the other hand, none of the arrows $(\diamond)$ affect the terms $\mathbb{E}_r^{p,q}$ with $p+q \leq n$ so that, at the end, we can easily justify the following picture showing terms $\mathbb{E}_r^{p,q}$ depending only on the sub-complex $(\mathbb{E}_2^{*,\leq n}, d_2)$ for all $r \geq 2$, hence for $r = \infty$.



It then follows that if $\mathbb{E}(\varphi)_2^{*,\leq n}$ is an isomorphism, the induced homomorphisms

$$\mathbb{E}(\varphi)_r^{p,q} : \mathbb{E}(C)_\infty^{p,q} \to \mathbb{E}(D)_\infty^{p,q},$$

are isomorphisms for all $p+q \leq n$, hence the theorem. □

5. Application of Theorem 4.1. We now prove the statements in 3.5.

5.1. Theorem

a) *Given $n \in \mathbb{N}$, the restriction homomorphism*

$$H^q(I\!EG;\mathbb{R}) \to H^q(I\!EG(n);\mathbb{R})$$

is an isomorphism for $q \leq n$. In particular, the algebra homomorphism (11)

$$H(I\!EG;\mathbb{R}) \to \varprojlim H(I\!EG(n);\mathbb{R})$$

is an isomorphism.

b) *Given $n \in \mathbb{N}$, and a G-space X, the restriction homomorphism*

$$H^q(X_G;\mathbb{R}) \to H^q(X_G(n);\mathbb{R})$$

is an isomorphism for $q \leq n$. In particular, the algebra homomorphism (13)

$$H(X_G;\mathbb{R}) \to \varprojlim H(X_G(n);\mathbb{R})$$

is an isomorphism.

c) *Given $n \in \mathbb{N}$, and a G-manifold M, the restriction homomorphism* (15)

$$H^q_G(M) \to H^q_{\mathrm{dR}}(M_G(n))$$

is an isomorphism for $q \leq n$. In particular, the algebra homomorphism (16)

$$H_G(M) \to \varprojlim H_{\mathrm{dR}}(M_G(n))$$

is an isomorphism.

Proof. (a) We can assume the group G embedded in the orthogonal group $\mathrm{O}(k)$ for some $k \in \mathbb{N}$. We then set

$$I\!EG(n) := V(k,k+n+1), \quad (\forall k \geq 1)(\forall n \geq 1), \tag{$\dagger$}$$

where $V(\ell,m)$ denotes the Stiefel manifold of ℓ-tuples $(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_\ell)$ of orthonormal vectors in $\mathbb{R}^m$, which is easily seen to be compact and $(m-\ell-1)$-connected ([1]).

The manifold $I\!EG(n)$ is therefore compact and n-connected, and verifies, by Hurewicz theorems,

$$H^q(I\!EG(n);\mathbb{R}) = 0, \quad \forall q \leq n,$$

One easily sees that $I\!EG(n) \sim \mathrm{O}(k+n+1)/(\mathbb{1}_k \times \mathrm{O}(n+1))$ and that $\mathrm{O}(k)$ acts freely at the right of $I\!EG(n)$. In particular, the space $I\!EG := \bigcup_n I\!EG(n)$ meets the requirements for a universal principal bundle for $\mathrm{O}(k)$, hence for G.

(b) Since the diagonal action of G on $I\!EG(n) \times X$ is free, the ideas in section 2 apply. We can therefore replace $X_G(n) \leftrightarrow (I\!EG(n)\times X)_G$ and consider the natural fibration $\pi : I\!EG \times_G (I\!EG(n)\times X) \twoheadrightarrow I\!BG$ and the corresponding Leray-Serre spectral sequence

$$\mathbb{E}(X_G(n))_2^{p,q} = H^p(I\!BG;\mathbb{R}) \otimes H^q(I\!EG(n)\times X) \Rightarrow H^{p+q}(X_G(n))$$

which is contravariant functorial for $(I\!EG(n)\times X) \in G\text{-Top}_f$. In particular, we get a morphism of spectral sequences

$$\mathbb{E}(\varphi)_2^{p,q} : \mathbb{E}(X_G(n))_2^{p,q} \to \mathbb{E}(X_G)_2^{p,q}$$

[1] Indeed, for $\ell \leq m+1$, the map $p_\ell : V(\ell,m+1) \to \mathbb{S}^m$, $(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_\ell) \mapsto \vec{v}_\ell$, is a locally trivial fibration of fiber $V(\ell-1,m)$, and an inductive argument on $\ell \in [\![1m]\!]$, immediately shows that $\Pi_q(V(\ell,m)) = 0$, for all q such that $q+\ell < m$.

which is an isomorphism for all $q \leq n$ since, in that case, by Künneth,

$$H^q(I\!EG(n)\times X;\mathbb{R}) = \bigoplus_{a+b=q} H^a(I\!EG(n);\mathbb{R}) \otimes H^b(X;\mathbb{R})$$
$$= \bigoplus_{a+b=q} H^a(I\!EG;\mathbb{R}) \otimes H^b(X;\mathbb{R}) = H^q(I\!EG\times X;\mathbb{R}).$$

where $a \leq n$. We can therefore apply theorem 4.1, and (b) follows.

(c) Here, the important fact is that $I\!EG(n)\times M$ is a manifold, in which case we can use Cartan's identification $H_{\mathrm{dR}}(M_G(n)) = H_G(I\!EG(n)\times M)$ and the corresponding spectral sequence for equivariant cohomology (see **6**):

$$\mathbb{E}(I\!EG(n)\times M)_2^{p,q} := H_G^p \otimes H^q(\Omega(I\!EG(n)\times M))$$

where $H_G^{2m} := S^m(\mathfrak{g})^G$ and $H_G^{2m+1} = 0$, for all $m \in \mathbb{N}$.

These constructions are contravariant functorial over G-Man, and for the equivariant projection $p_n : I\!EG(n) \times M \to M$, $(x,m) \mapsto m$, give a morphism of spectral sequences for equivariant cohomology

$$\mathbb{E}(p_n^*)_2^{p,q} : \mathbb{E}(M)_2^{p,q} \to \mathbb{E}(I\!EG(n)\times M)_2^{p,q},$$

which is an isomorphism for all $q \leq n$, since the pullbacks

$$p_n^* : H^q(M)) \to H^q(\Omega(I\!EG(n)\times M))$$

are so. We can therefore apply theorem 4.1 and state that the restriction homomorphisms $H_G(M)^q \to H^q_{\mathrm{dR}}(M(n))$ (15) are isomorphisms for all $q \leq n$, which ends the proof of (c). □

6. On the spectral sequence for equivariant cohomology. The complex of equivariant differential forms of a G-manifold M is the complex

$$\Omega_G(M) := ((S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M))^G, d_{\mathfrak{g}}), \qquad (*)$$

where, if $\{e_j\}$ is a basis of $\mathfrak{g}$ of dual basis and $\{e^j\}$, the equivariant differential $d_{\mathfrak{g}}$ is given by the expression

$$d_{\mathfrak{g}}(P \otimes \omega) = P \otimes d\omega + \sum\nolimits_j Pe^j \otimes \iota(e_j)(\omega).$$

Denote by $S^a(\mathfrak{g})$ the polynomial functions on $\mathfrak{g}$ of degree a, and define the *principal degree* of $S^a(\mathfrak{g}) \otimes \Omega^b(M)$ by $2a$, and its *total degree* by $2a + b$.

In order to be able to apply theorem 4.1 *without reindexing terms*, we choose to filter the complex $(*)$ by principal degrees in $\mathbb{N}$, and not just in $2\mathbb{N}$.
We therefore set, for all $j \in \mathbb{N}$,

$$\Omega_G(M)_{\geq j} = S^{\geq \frac{j}{2}} \otimes \Omega(M). \qquad (\dagger)$$

(In particular, $\Omega_G(M)_{\geq j} = \Omega_G(M)_{\geq j+1}$, if j is odd.)

Endowed with the filtration $(\dagger)$, the complex $(\Omega_G(M), d_{\mathfrak{g}})$ is a regular filtered graded complex. We can then apply the general theory of spectral sequences and construct a spectral sequence $(\mathbb{E}(\Omega_G(M))_r, d_r)$, where

$$\mathbb{E}(\Omega_G(M))_2^{p,q} = S^{p/2}(\mathfrak{g})^G \otimes \Omega^q(M),$$

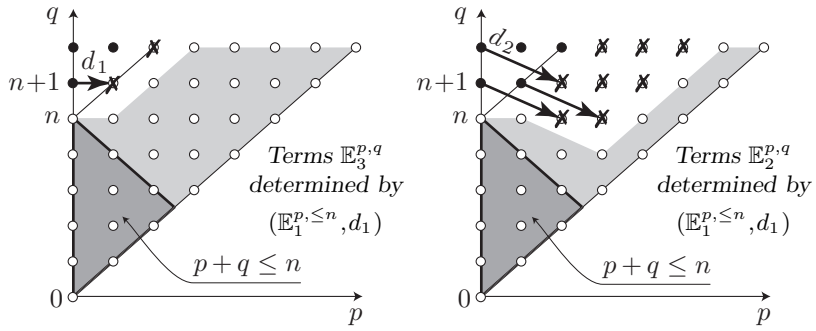
($S^{p/2}(\mathfrak{g}) = 0$, for p odd) where $d_2 : \mathbb{E}(\Omega_G(M))_2^{p,q} \to \mathbb{E}(\Omega_G(M))_2^{p+2,q-1}$.

For $r \geq 2$, we then have, as usual, $d_r(\mathbb{E}(\Omega_G(M))_r^{p,q}) \subset \mathbb{E}(\Omega_G(M))_r^{p+r,q-r+1}$, and the spectral sequence converges to the graded $S(\mathfrak{g})^G$-module associated with the filtered module $H_G(M)$, by the decreasing successive images

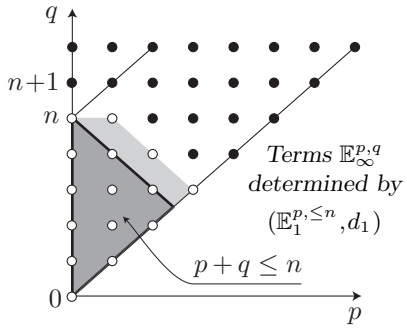
$$H_G(M)_{\geq k} := \mathrm{im}\big(H(\Omega_G(M)_{\geq j}) \to H_G(M)\big).$$

We have $$\mathbb{E}(\Omega_G(M))_\infty^p = \frac{H_G(M)_{\geq p}}{H_G(M)_{\geq p+1}}.$$

6.1. Comment on a different spectral sequence. In appendix A.9 of ([2]), the complex $\Omega_G(M)$ is put under the form of a bi-complex, which is quite nice, but then one has to prove the analog of theorem 4.1 which gives better bounds for the proposition A.10 in *loc.cit.*. The proof will then be the same, but the pictures must be replaced by the followings



where we see (again) that the terms $\mathbb{E}_r^{p,q}$ with $p+q \leq n$ are determined solely by the sub-complex $(\mathbb{E}_1^{p,\leq n}, d_1)$, as in the proof of 4.1.



These details, which are not difficult to understand, are missing in the proposition A.10. In its proof, it is only observed that under d_r, the superscript q lowers to $q-r+1$, without considering that at the same time the superscript p raises to $p+r$ leaving enough room to preserve the $\mathbb{E}^{p,q}$'s such that $p+q \leq n$.

Alberto Arabia
November 28, 2018

[2] Forthcoming book of Loring Tu, *Introductory Lectures on Equivariant Cohomology*, in Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES DANS LES ANNEAUX D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS EN INÉGALE CARACTÉRISTIQUE

Alberto Arabia

TABLE DE MATIÈRES

1 Matrices de connexion **1**
1.1 Procédures Maple destinées au calcul de la matrice $\mathbf{C}(P,m)$ **2**
1.2 Exemples numériques de matrices de connexion **4**
1.3 Exemple d'affichage lors du calcul des matrices de connexion **5**
1.4 Procédures Maple auxiliaires pour l'étude des matrices de connexion **6**
1.5 Exemples numériques des procédures auxiliaires dans l'étude des matrices de connexion **6**
2 Solutions formelles d'équations différentielles **6**
2.1 Procédure Maple pour le calcul des matrices $\frac{1}{k!}\mathbf{C}(P,m,k)$ **7**
2.2 Exemples numériques des matrices $\frac{1}{k!}\mathbf{C}(P,m,k)$ **7**
2.3 Exemple d'affichage et délais des calculs **8**
3 Normes et rayon de convergence **8**
3.1 Procédures Maple pour le calcul des normes **9**
3.2 Procédure Maple pour le calcul des rayons de convergence **10**
3.3 Exemple numérique de calcul des rayon de convergence **11**
3.4 Procédures complémentaires dans l'étude des séries formelles **12**
3.5 Exemples numériques d'études complémentaires des séries formelles **13**
4 Vecteurs cycliques, polynômes indiciels et exposants formels **13**
4.1 Procédure Maple pour la détection d'un vecteur cyclique **14**
4.2 Exemples numériques de vecteurs cycliques **15**
4.3 Procédure Maple pour le calcul des polynômes indiciels et exposants formels **18**
4.4 Exemples numériques de calcul des polynômes indiciels et exposants formels **19**
5 Conclusion **20**

1. MATRICES DE CONNEXION

Soit p un nombre premier, notons $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments et $\mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques. Fixons un polynôme $\overline{P} \in \mathbb{F}_p[X_1,\ldots,X_n]$ et notons P un relèvement de $\overline{P}$ dans l'anneau $\mathbb{Z}_p[X_1,\ldots,X_n]$. On notera $\deg(P)$ et $\deg_i(P)$ respectivement : le degré polynôme total de P et celui relatif à la variable X_i.

Soit $\mathbb{Z}_p[\pi]$ l'extension de $\mathbb{Z}_p$ définie par la relation algébrique : $\pi^{p-1}+p=0$ et notons $\mathbf{A}_{p,n}$ l'anneau $\mathbb{Z}_p[\pi][X_1,\ldots,X_n,y^{-1},y]$, où y désigne une variable abstraite. Fixons un entier positif $m > \deg(P)$, appelé *déformation*, et considérons la famille d'opérateurs différentiels $\mathbb{Z}_p[\pi]$-linéaires sur $\mathbf{A}_{p,n}$:

$$\begin{cases} \nabla_i \ : f \to \frac{\partial}{\partial X_i}(f) + \pi \frac{\partial}{\partial X_i}\left(P + y\sum_{k=1}^{n} {X_k}^m\right) f\,, \quad \text{pour } 1 \le i \le n; \\ \nabla_y \ : f \to \frac{\partial}{\partial y}(f) + \pi\left(\sum_{k=1}^{n} {X_k}^m\right) f\,. \end{cases}$$

(*) Université Paris 7-Denis Diderot; 175, rue du Chevaleret, neuvième étage, bureau 9D11, 75013 Paris.
UFR de Mathématiques. Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
Adresse électronique : arabia@mathp7.jussieu.fr
Téléphone : (1) 44 27 79 57. Fax : (1) 44 27 78 18.

Le module quotient :

$$\mathbf{M}(P,m) := \frac{\mathbf{A}_{p,n}}{\sum_{i=1}^{n} \nabla_i(\mathbf{A}_{p,n})}\,,$$

est alors un $\mathbb{Z}[\pi, y, y^{-1}]$-module libre de rang $(m-1)^n$ de base canonique : la famille des "monômes" $\prod_{i=1}^{n} {X_i}^{\alpha_i}$, où $0 \leq \alpha_i \leq m-2$. L'opérateur ∇_y opère naturellement sur $\mathbf{M}(P,m)$ et la matrice de la connexion associée, relativement à la base canonique, notée $\mathbf{C}(P,m)$, est une matrice carrée, indépendante de p, à $(m-1)^n$ lignes et colonnes et à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}_p[\pi, y^{-1}]$.

La matrice $\mathbf{C}(P,m)$ joue un rôle fondamental dans la théorie, mais la réduction des éléments $\nabla_y(\prod_{i=1}^{n} {X_i}^{\alpha_i}) = \pi\Big(\sum_{k=1}^{n} {X_k}^{m}\Big) \prod_{i=1}^{n} {X_i}^{\alpha_i} \in \mathbf{A}_{p,n}$, modulo les relations $\sum_{i=1}^{n} \nabla_i(\mathbf{A}_{p,n})$, est définitivement inaccessible au calcul manuel en dehors de cas triviaux, inintéressants sur le plan théorique. L'informatique est ainsi devenue incontournable pour la détermination explicite des matrices de connexion; la sous-section suivante donne les procédures `Maple` que nous avons rédigées pour leur calcul.

1.1 Procédures `Maple` destinées au calcul de la matrice $\mathbf{C}(P,m)$

```
#########################################################################
###################### RELATIONS DE LA CONNEXION ########################
relaciones:=proc() #
local i,k,temp:
global relacion,F,m,n;
 for i from 1 to n do
  relacion[i]:=[]:
  for k from 0 to m-1 do
   relacion[i]:=
                [op(relacion[i]),
                 solve(
                 collect(
   diff(x[i]^k,x[i])+PPi*(diff(F,x[i])+y*diff(x[i]^m,x[i]))*x[i]^k,
                        x[i]
                        ),
                       x[i]^(k+m-1)
                      )
                ]:
  od:
 od:
end:
#########################################################################
#########################    BASE DE MONOMES     ########################
bon:=proc(Pol) #
local i,flag:
 flag:=true:
 for i from 1 by 1 to n do
  if degree(Pol,x[i]) > m-2 then
   flag:=false:
  fi:
 od:
 RETURN(flag):
end:
#########################################################################
#########################  BASE DE M(P,m) ###############################
genere_base:=proc() #
local i,h,temp,y:
global Base,card_base,monome,liste_var;
 for i from 1 by 1 to n*(m-2) do
  temp:=monome^(i):
  if n=1 then
   Base:=[op(Base),temp]:
  else
   temp:=sort(expand(temp),liste_var):
   for h from 1 by 1 to nops(temp) do
    y:=op(h,temp):
    if bon(y) then
     Base:=[op(Base),y/tcoeff(y)]:
    fi:
   od:
  fi:
 od:
 card_base:=nops(Base):
 lprint(`Cardinal de la base:`,card_base):
end:
```

Cette procédure génère la suite

`relacion`[1],...,`relacion`[n]

où `relacion[i]` est une liste d'équivalents modulo $\sum_{i=1}^{n} \nabla_i(\mathbf{A}_{p,n})$, des termes ${X_i}^{\alpha_i}$ avec $m-1 \leq \alpha_i \leq 2(m-1)$, pouvant intervenir dans l'explicitation de ∇_y.
Le degré total, ainsi que les degrés relatifs aux différentes variables X_k, de l'équivalent associé à ${X_i}^{\alpha_i}$, vérifient des majorations garantissant la convergence de la procédure `reduit`.

Teste la condition $\sup\Big\{\deg_i(\texttt{Pol})\Big\} \leq m-2$

Génère la liste `Base` contenant les éléments $\prod_{i=1}^{n} {X_i}^{\alpha_i}$ de la base canonique de $\mathbf{M}(P,m)$.
La base est obtenue en developpant

$$(X_1 + \cdots + X_n)^i$$

pour $1 \leq i \leq n(m-2)$ et en receuillant les monômes de bons degrés.

```
########################################################################
#####################  REDUCTION MODULO RELATIONS  #####################
reduit:=proc(PP) #
local i,temp,dg,L,FLAG:
global relacion,trainnee;
 trainnee:=``:
 temp:=PP:
 FLAG:=1:
 while FLAG = 1 do #
  FLAG:=0:
  L:=[]:
  for i from 1 to n do
   temp:=collect(temp,x[i]):
   L:=[op(L),degree(temp,x[i])]:
  od:
  dg:=max(op(L)):
  if dg > m-2 then
   FLAG:=1:
   member(dg,L,'i'):
   if dg <= 2*(m-1) then
    trainnee:=cat(trainnee,`.`):
    temp:=subs(x[i]^dg=op(dg-(m-2),relacion[i]),temp):
   else
    trainnee:=cat(trainnee,`*`):
    temp:=subs(x[i]^dg=(op(m,relacion[i]))*x[i]^(dg-2*(m-1)),temp):
   fi:
   temp:=collect(expand(temp),liste_var):
  fi:
 od:
 RETURN(temp):
end:
########################################################################
#####################  MATRICE DE LA CONNEXION  ########################
#####################     PROCEDURE INTERNE     ########################
genere:=proc() #
local i,k,h,temp,b,yy,dg,sec,secc,texte,champ:
global Base,card_base,trainnee,Mat,facteur;
 secc:=time():
 print(`MATRICE DE LA CONNEXION`):
 Mat:=array(1..card_base,1..card_base):
 for i from 1 by 1 to card_base do
  sec:=time():
  temp:=collect(facteur*op(i,Base),list_var):
  temp:=reduit(temp): #
  for h from 1 by 1 to card_base do
   b:=op(h,Base):
   yy:=temp:
   for k from 1 to n do
    dg:=degree(b,x[k]):
    yy:=collect(yy,x[k]):
    yy:=coeff(yy,x[k],dg):
   od:
   Mat[h,i]:=collect(yy,y):
  od:
  sec:=temps(time()-sec):
  champ:=gformat(i,2):
  texte:=cat(`Colonne `,champ,
          ` de la mat. de connexion calculee. Delai:=`,sec,trainnee):
  lprint(texte):
 od:
 secc:=temps(time()-secc):
 lprint(`DELAI TOTAL DE LA  SOUS-ROUTINE:=`,secc):
 Pause():
end:
########################################################################
#####################  MATRICE DE LA CONNEXION  ########################
#####################    PROCEDURE PRINCIPALE   ########################
connexion:=proc(a,nn,b) #
local i:
global Base,Mat,monome,facteur,liste_var,F,n,m;
 F:=a:    #polynome
 n:=nn:   #nombre de variables
 m:=b:    #deformation
 Base:=[1]:
 #generation de la liste des variables x[1],...,x[n]
 #et des elements x[1]+...+x[n] et x[1]^m+...+x[n]^m
 liste_var:=[]:
 monome:=0:
 facteur:=0:
 for i from 1 to n do
```

Détermine l'élément `reduit(PP)` vérifiant $\sup\Big\{\deg_i(\texttt{reduit(PP)})\Big\}\leq m-2$, équivalent, modulo $\sum_{i=1}^{n}\nabla_i(\mathbf{A}_{p,n})$, d'un élément $\texttt{PP}\in\mathbf{A}_{p,n}$.

Début de la boucle de réduction.
Elle réduit successivement, à l'aide des listes `relacion[i]`, les degrés en chaque variable X_k d'un polynôme `temp`, jusqu'à les rendre tous majorés par $m-2$.

Calcule la matrice de connexion $\texttt{Mat}:=\mathbf{C}(P,m)$.

Appel à la sous-routine de réduction modulo $\sum_{i=1}^{n}\nabla_i(\mathbf{A}_{p,n})$.

Cette procédure calcule et affiche à l'écran la matrice de connexion $\mathbf{C}(\texttt{a},\texttt{b})$ pour un polynôme $\texttt{a}\in\mathbf{A}_{p,\texttt{nn}}$ et une déformation $\texttt{b}>\deg(\texttt{a})$.

```
 monome:=monome+x[i]:
 facteur:=facteur+x[i]^m:
 liste_var:=[op(liste_var),x[i]]:
od:
facteur:=PPi*facteur:
# #------------------------------------------------------------ Appel des sous-routines principales
genere_base():
relaciones():
interface(quiet=true);
genere():
#
Mat:=scalarmul(Mat,-1):
Mat:=map(collect,map(collect,Mat,PPi),y):
if nops(Base)<20 then
 print(Mat): #------------------------------------------------ Affichage la matrice de connexion
else
 lprint(
 `Trop d'elements dans la base pour afficher la matrice de la connexion !!!`):
fi:
end:
```

1.2 Exemples numériques de matrices de connexion

Voici quelques explicitations des matrices de connexion $\mathbf{C}(P,m)$ obtenues en exécutant les scripts précédents.

- Pour le polynôme $P=X^3\in\mathbf{A}_{p,1}$ et les déformations 4, 5, 6, 7, et 8, on obtient :

$$\mathbf{C}(X^3,4)=\begin{bmatrix} \frac{1}{4\,y} & \frac{-3}{16\,y^2} & \frac{9}{64\,y^3} \\ 0 & \frac{1}{2\,y} & \frac{-3}{8\,y^2} \\ \frac{-9\,\pi}{16\,y^2} & \frac{27\,\pi}{64\,y^3} & \frac{-81\,\pi}{256\,y^4}+\frac{3}{4\,y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(X^3,5)=\begin{bmatrix} \frac{1}{5\,y} & 0 & \frac{-3}{25\,y^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5\,y} & 0 & \frac{-6}{25\,y^2} \\ 0 & \frac{-9\,\pi}{25\,y^2} & \frac{3}{5\,y} & \frac{27\,\pi}{125\,y^3} \\ \frac{3\,\pi}{5\,y} & 0 & \frac{-9\,\pi}{25\,y^2} & \frac{4}{5\,y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(X^3,6)=\begin{bmatrix} \frac{1}{6\,y} & 0 & 0 & \frac{-1}{12\,y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3\,y} & 0 & 0 & \frac{-1}{6\,y^2} \\ 0 & 0 & \frac{-\pi}{4\,y^2}+\frac{1}{2\,y} & 0 & 0 \\ \frac{\pi}{2\,y} & 0 & 0 & \frac{-\pi}{4\,y^2}+\frac{2}{3\,y} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2\,y} & 0 & 0 & \frac{-\pi}{4\,y^2}+\frac{5}{6\,y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(X^3,7)=\begin{bmatrix} \frac{1}{7\,y} & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{49\,y^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{7\,y} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6}{49\,y^2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{7\,y} & \frac{-9\,\pi}{49\,y^2} & 0 & 0 \\ \frac{3\,\pi}{7\,y} & 0 & 0 & \frac{4}{7\,y} & \frac{-9\,\pi}{49\,y^2} & 0 \\ 0 & \frac{3\,\pi}{7\,y} & 0 & 0 & \frac{5}{7\,y} & \frac{-9\,\pi}{49\,y^2} \\ 0 & 0 & \frac{3\,\pi}{7\,y} & 0 & 0 & \frac{6}{7\,y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(X^3,8)=\begin{bmatrix} \frac{1}{8\,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{64\,y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{32\,y^2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{8\,y} & 0 & \frac{-9\,\pi}{64\,y^2} & 0 & 0 \\ \frac{3\,\pi}{8\,y} & 0 & 0 & \frac{1}{2\,y} & 0 & \frac{-9\,\pi}{64\,y^2} & 0 \\ 0 & \frac{3\,\pi}{8\,y} & 0 & 0 & \frac{5}{8\,y} & 0 & \frac{-9\,\pi}{64\,y^2} \\ 0 & 0 & \frac{3\,\pi}{8\,y} & 0 & 0 & \frac{3}{4\,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3\,\pi}{8\,y} & 0 & 0 & \frac{7}{8\,y} \end{bmatrix}$$

- Pour le polynôme $P = X_1 + X_2 + X_3 \in \mathbf{A}_{p,3}$ et les déformations 2 et 3, on obtient :

$$\mathbf{C}(X_1 + X_2 + X_3, 2) = \left[\frac{-3\,\pi}{4\,y^2} + \frac{3}{2\,y}\right]$$

$$\mathbf{C}(X_1 + X_2 + X_3, 3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & \frac{-\pi}{9\,y^2} & \frac{-\pi}{9\,y^2} & \frac{-\pi}{9\,y^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi}{3\,y} & \frac{4}{3\,y} & 0 & 0 & \frac{-\pi}{9\,y^2} & \frac{-\pi}{9\,y^2} & 0 & 0 \\ \frac{\pi}{3\,y} & 0 & \frac{4}{3\,y} & 0 & \frac{-\pi}{9\,y^2} & 0 & \frac{-\pi}{9\,y^2} & 0 \\ \frac{\pi}{3\,y} & 0 & 0 & \frac{4}{3\,y} & 0 & \frac{-\pi}{9\,y^2} & \frac{-\pi}{9\,y^2} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{3\,y} & \frac{\pi}{3\,y} & 0 & \frac{5}{3\,y} & 0 & 0 & \frac{-\pi}{9\,y^2} \\ 0 & \frac{\pi}{3\,y} & 0 & \frac{\pi}{3\,y} & 0 & \frac{5}{3\,y} & 0 & \frac{-\pi}{9\,y^2} \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{3\,y} & \frac{\pi}{3\,y} & 0 & 0 & \frac{5}{3\,y} & \frac{-\pi}{9\,y^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{3\,y} & \frac{\pi}{3\,y} & \frac{\pi}{3\,y} & \frac{2}{y} \end{bmatrix}$$

- Pour le polynôme $P = {X_1}^2 + X_2 \in \mathbf{A}_{p,2}$ et déformation 3 et 4 :

$$\mathbf{C}(X_1^2 + X_2, 3) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3\,y} & \frac{-2}{9\,y^2} & \frac{-\pi}{9\,y^2} & 0 \\ \frac{-4\,\pi}{9\,y^2} & \frac{8\,\pi}{27\,y^3} + \frac{1}{y} & 0 & \frac{-\pi}{9\,y^2} \\ \frac{\pi}{3\,y} & 0 & \frac{1}{y} & \frac{-2}{9\,y^2} \\ 0 & \frac{\pi}{3\,y} & \frac{-4\,\pi}{9\,y^2} & \frac{8\,\pi}{27\,y^3} + \frac{4}{3\,y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(X_1^2 + X_2, 4) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\,y} & 0 & 0 & \frac{-1}{8\,y^2} & 0 & \frac{-\pi}{16\,y^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\pi}{4\,y^2} + \frac{3}{4\,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\pi}{16\,y^2} & 0 \\ \frac{\pi}{4\,y} & 0 & \frac{3}{4\,y} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{8\,y^2} & 0 & 0 \\ \frac{\pi}{2\,y} & 0 & 0 & \frac{1}{y} - \frac{\pi}{4\,y^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\pi}{16\,y^2} \\ 0 & \frac{\pi}{4\,y} & 0 & 0 & \frac{1}{y} - \frac{\pi}{4\,y^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{4\,y} & 0 & 0 & \frac{1}{y} & 0 & 0 & \frac{-1}{8\,y^2} \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2\,y} & \frac{\pi}{4\,y} & 0 & 0 & \frac{-\pi}{4\,y^2} + \frac{5}{4\,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{4\,y} & 0 & 0 & \frac{-\pi}{4\,y^2} + \frac{5}{4\,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2\,y} & \frac{\pi}{4\,y} & 0 & \frac{-\pi}{4\,y^2} + \frac{3}{2\,y} \end{bmatrix}$$

Remarque : Plusieurs conjectures concernant le comportement asymptotique des matrices $\mathbf{C}(P, m)$, en fonction de m, ont pu être testées à l'aide de ces procédures et de celles de **1.4**.

1.3 Exemple d'affichage lors du calcul des matrices de connexion

Pour $P = {X_1}^2 + X_2$, déformation $m = 4$, le calcul de $\mathbf{C}(X_1^2 + X_2, 4)$ affiche :

```
************************************************************
************************************************************
Cardinal de la base:   9
                          MATRICE DE LA CONNEXION
Colonne  1 de la mat. de connexion calculee. Delai:=0.05s... #
Colonne  2 de la mat. de connexion calculee. Delai:=0.05s....
Colonne  3 de la mat. de connexion calculee. Delai:=0.05s...
Colonne  4 de la mat. de connexion calculee. Delai:=0.05s....
Colonne  5 de la mat. de connexion calculee. Delai:=0.05s....
Colonne  6 de la mat. de connexion calculee. Delai:=0.05s....
Colonne  7 de la mat. de connexion calculee. Delai:=0.067s....
Colonne  8 de la mat. de connexion calculee. Delai:=0.067s.....
Colonne  9 de la mat. de connexion calculee. Delai:=0.066s.....
DELAI TOTAL DE LA  SOUS-ROUTINE:=   0.516s.
```

La suite des points en fin de chaque ligne indique le nombre d'itérations de la boucle de réduction.

1.4 Procédures `Maple` auxiliaires pour l'étude des matrices de connexion

```
#########################################################################
#####################    ROUTINES AUXILIAIRES   #########################
diagonale:=proc(deg) #
local i,L:
global card_base,Mat;
 interface(quiet=true):
 L:=[]:
 for i from 1 to card_base do
  L:=[op(L),coeff(Mat[i,i],y,deg)*y^(deg)]:
 od:
 print(L):
 interface(quiet=false):
end:
####################################
sousmat:=proc(dg) #
local i,j,A:
global card_base,Mat;
 interface(quiet=true):
 A:=array(1..card_base,1..card_base):
 for i from 1 to card_base do
  for j from 1 to card_base do
   A[i,j]:=coeff(Mat[i,j],y,dg)*y^dg:
  od:
 od:
 print(A);
 interface(quiet=false):
end:
```

Affiche les termes de degré `deg` en y de la diagonale de la matrice de connexion courante.

Calcule et affiche la matrice des termes de degré `dg` en y de la matrice de connexion courante.

1.5 Exemples numériques des procédures auxiliaires dans l'étude des matrices de connexion

Pour l'exemple où $P = {X_1}^2 + X_2$ et $m = 3$, on a :

- Procédure : `diagonale`.

$$\texttt{diagonale}(-3) \Rightarrow \left[0, \frac{8\,\pi}{27\,y^3}, 0, \frac{8\,\pi}{27\,y^3}\right].$$

- Procédure : `sousmat`.

$$\texttt{sousmat}(-2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2}{9\,y^2} & \frac{-\pi}{9\,y^2} & 0 \\ -\frac{4\,\pi}{9\,y^2} & 0 & 0 & \frac{-\pi}{9\,y^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{9\,y^2} \\ 0 & 0 & \frac{-4\,\pi}{9\,y^2} & 0 \end{bmatrix}; \qquad \texttt{sousmat}(-3) \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8\,\pi}{27\,y^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8\,\pi}{27\,y^3} \end{bmatrix}.$$

2. SOLUTIONS FORMELLES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Pour chaque $t \in \mathbb{Z}_p[\pi]$ différent de 0, on s'intéresse au développement en série entière en $(y-t)$ de la solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial y}(F) + \mathbf{C}(P,m)\cdot F = 0\,,$$

où F désigne une matrice carrée à $(m-1)^n$ lignes et colonnes à coefficients dans $\mathbb{Z}_p[\pi][[y-t]]$ vérifiant la condition $F(t) = \mathrm{Id}$. On a donc :

$$F(y) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\mathbf{C}(P,m,k)(t)(y-t)^k\,,$$

où les matrices $\mathbf{C}(P,m,k)$ vérifient la récurrence :

$$\begin{cases} \mathbf{C}(P,m,0) = \mathrm{Id}; \\ \mathbf{C}(P,m,1) = \mathbf{C}(P,m); \\ \mathbf{C}(P,m,k+1) = \frac{\partial}{\partial y}\big(\mathbf{C}(P,m,k)\big) + \mathbf{C}(P,m,k)\cdot\mathbf{C}(P,m). \end{cases}$$

2.1 Procédure `Maple` pour le calcul des matrices $\frac{1}{k!}\mathbf{C}(P,m,k)$

Dans ces procédures, on a noté `G_k` la matrice $\frac{1}{k!}\mathbf{C}(P,m,k)$.

```
#########################################################################
############################  MATRICES G_k  #############################
genere_G:=proc(M,ordre) #
local A,i,B,sec,secc,texte,champ,aux:
global card_base,Liste_G;
 secc:=time():
 A:=matrix(card_base,card_base,0):
 B:=matrix(card_base,card_base,0):
 for i from 1 to card_base do
  A[i,i]:=1:
 od:
 Liste_G:=[eval(A)]:
 aux:=cat(`SUITE DES MATRICES G_n (n=1,...,`,convert(ordre,name),`)`):
 print(aux):
 for i from 1 to ordre do #
  sec:=time():
  B:=map(diff,A,y):
  A:=add(B ,multiply(A,M)):
  A:=map(collect,A,y):
  sec:=temps(time()-sec):
  champ:=dformat_(i,2):
  texte:=cat(`Matrice G_`,champ,` calculee. Delai:=`,sec):
  lprint(texte):
  Liste_G:=[op(Liste_G),eval(scalarmul(A,1/i!))]:
 od: #
 secc:=temps(time()-secc):
 lprint(`DELAI TOTAL DE LA SOUS-ROURINE:=`,secc):
end:
```

Pour `M`=$\mathbf{C}(P,m)$, cette procédure calcule la liste `Liste_G` des matrices : `G_0`,...,`G_ordre`.

Début de la boucle de récursivité pour le calcul des matrices `G_k`.

Fin de la boucle récursivité

2.2 Exemples numériques des matrices $\frac{1}{k!}\mathbf{C}(P,m,k)$

Voici quelques exemples des matrices considérées obtenus à l'aide des procédures précédentes. Dans les sections suivantes, nous traiterons du problème des rayons de convergence de séries définies ci-dessus, le lecteur comprendra aisément la lourdeur des calculs à développer lorsque l'on cherche, par exemple, à calculer les 200 premiers termes des séries en question; ceci a été nécessaire dans les recherches de Mebkhout pour certaines conjectures et a demandé d'importantes ressources matérielles sur Médicis où des scripts nécessitant de plus d'un mois et demi de calculs ininterrompus ont été lancés.

- Pour $P=X^3\in\mathbf{A}_{p,1}$ et déformation 4, on obtient :

$$\mathbf{C}(X^3,4,0)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{C}(X^3,4,1)=\begin{bmatrix}\frac{1}{4\,y}&\frac{-3}{16\,y^2}&\frac{9}{64\,y^3}\\0&\frac{1}{2\,y}&-\frac{3}{8\,y^2}\\-\frac{9\,\pi}{16\,y^2}&\frac{27\,\pi}{64\,y^3}&\frac{-81\,\pi}{256\,y^4}+\frac{3}{4\,y}\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{C}(X^3,4,2)=\begin{bmatrix}-\frac{3}{32\,y^2}-\frac{81\,\pi}{2048\,y^5}&\frac{15}{128\,y^3}+\frac{243\,\pi}{8192\,y^6}&\frac{-27}{256\,y^4}-\frac{729\,\pi}{32768\,y^7}\\\frac{27\,\pi}{256\,y^4}&\frac{-1}{8\,y^2}-\frac{81\,\pi}{1024\,y^5}&\frac{9}{64\,y^3}+\frac{243\,\pi}{4096\,y^6}\\\frac{9\,\pi}{32\,y^3}+\frac{729\,\pi^2}{8192\,y^6}&\frac{-81\,\pi}{256\,y^4}-\frac{2187\,\pi^2}{32768\,y^7}&\frac{-3}{32\,y^2}+\frac{567\,\pi}{2048\,y^5}+\frac{6561\,\pi^2}{131072\,y^8}\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3!}\mathbf{C}(X^3,4,3)=\begin{bmatrix}\frac{7}{128\,y^3}+\frac{675\,\pi}{8192\,y^6}+\frac{2187\,\pi^2}{524288\,y^9}&\frac{-47}{512\,y^4}-\frac{2187\,\pi}{32768\,y^7}-\frac{6561\,\pi^2}{2097152\,y^{10}}&\frac{195}{2048\,y^5}+\frac{1701\,\pi}{32768\,y^8}+\frac{19683\,\pi^2}{8388608\,y^{11}}\\-\frac{81\,\pi}{512\,y^5}-\frac{729\,\pi^2}{65536\,y^8}&\frac{1}{16\,y^3}+\frac{135\,\pi}{1024\,y^6}+\frac{2187\,\pi^2}{262144\,y^9}&\frac{-23}{256\,y^4}-\frac{1701\,\pi}{16384\,y^7}-\frac{6561\,\pi^2}{1048576\,y^{10}}\\-\frac{123\,\pi}{512\,y^4}-\frac{3645\,\pi^2}{16384\,y^7}-\frac{19683\,\pi^3}{2097152\,y^{10}}&\frac{693\,\pi}{2048\,y^5}+\frac{729\,\pi^2}{4096\,y^8}+\frac{59049\,\pi^3}{8388608\,y^{11}}&\frac{5}{128\,y^3}-\frac{675\,\pi}{2048\,y^6}-\frac{72171\,\pi^2}{524288\,y^9}-\frac{177147\,\pi^3}{33554432\,y^{12}}\end{bmatrix}$$

- Pour $P=X^3\in\mathbf{A}_{p,1}$ et déformation 5, on obtient :

$$\mathbf{C}(X^3,5,0)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{C}(X^3,5,1)=\begin{bmatrix}\frac{1}{5\,y}&0&\frac{-3}{25\,y^2}&0\\0&\frac{2}{5\,y}&0&\frac{-6}{25\,y^2}\\0&\frac{-9\,\pi}{25\,y^2}&\frac{3}{5\,y}&\frac{27\,\pi}{125\,y^3}\\\frac{3\,\pi}{5\,y}&0&\frac{-9\,\pi}{25\,y^2}&\frac{4}{5\,y}\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{C}(X^3,5,2) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{25\,y^2} & \frac{27\,\pi}{1250\,y^4} & \frac{9}{125\,y^3} & \frac{-81\,\pi}{6250\,y^5} \\ -\frac{9\,\pi}{125\,y^3} & \frac{-3}{25\,y^2} & \frac{27\,\pi}{625\,y^4} & \frac{12}{125\,y^3} \\ \frac{81\,\pi^2}{1250\,y^4} & \frac{9\,\pi}{50\,y^3} & \frac{-3}{25\,y^2} - \frac{243\,\pi^2}{6250\,y^5} & -\frac{81\,\pi}{625\,y^4} \\ 0 & \frac{81\,\pi^2}{1250\,y^4} & \frac{9\,\pi}{125\,y^3} & -\frac{2}{25\,y^2} - \frac{243\,\pi^2}{6250\,y^5} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3!}\mathbf{C}(X^3,5,3) = \begin{bmatrix} \frac{6}{125\,y^3} - \frac{81\,\pi^2}{31250\,y^6} & \frac{-108\,\pi}{3125\,y^5} & \frac{-34}{625\,y^4} + \frac{243\,\pi^2}{156250\,y^7} & \frac{27\,\pi}{1250\,y^6} \\ \frac{54\,\pi}{625\,y^4} & \frac{8}{125\,y^3} - \frac{81\,\pi^2}{15625\,y^6} & \frac{-36\,\pi}{625\,y^5} & \frac{-38}{625\,y^4} + \frac{243\,\pi^2}{78125\,y^7} \\ -\frac{27\,\pi^2}{250\,y^5} & \frac{-177\,\pi}{1250\,y^4} + \frac{729\,\pi^3}{156250\,y^7} & \frac{7}{125\,y^3} + \frac{2187\,\pi^2}{31250\,y^6} & \frac{72\,\pi}{625\,y^5} - \frac{2187\,\pi^3}{781250\,y^8} \\ -\frac{2\,\pi}{125\,y^3} - \frac{243\,\pi^3}{31250\,y^6} & \frac{-54\,\pi^2}{625\,y^5} & \frac{-6\,\pi}{125\,y^4} + \frac{729\,\pi^3}{156250\,y^7} & \frac{4}{125\,y^3} + \frac{1701\,\pi^2}{31250\,y^6} \end{bmatrix}$$

Remarque : Des conjectures concernant la "complexité" des termes des matrices $\frac{1}{k!}\mathbf{C}(P,m,k)$ en fonction de la déformation, ont pu être testées grâce à de telles explicitations.

2.3 Exemple d'affichage et délais des calculs

A titre d'illustration, l'affichage lors de l'exécution de la procédure `genere_G` pour le calcul des matrices $\frac{1}{k!}\mathbf{C}(X^3,5,k)$ et $k \leq 50$ sur `marie.polytechnique.fr`, a été le suivant :

```
                    SUITE DES MATRICES G_n (n=1,...,50)

Matrice G_1  calculee. Delai:=0.167s.       Matrice G_2  calculee. Delai:=0.066s.
Matrice G_3  calculee. Delai:=0.1s.         Matrice G_4  calculee. Delai:=0.15s.
Matrice G_5  calculee. Delai:=0.184s.       Matrice G_6  calculee. Delai:=0.217s.
Matrice G_7  calculee. Delai:=0.267s.       Matrice G_8  calculee. Delai:=0.483s.
Matrice G_9  calculee. Delai:=0.3s.         Matrice G_10 calculee. Delai:=0.35s.
Matrice G_11 calculee. Delai:=0.45s.        Matrice G_12 calculee. Delai:=0.667s.
Matrice G_13 calculee. Delai:=0.55s.        Matrice G_14 calculee. Delai:=0.816s.
Matrice G_15 calculee. Delai:=0.717s.       Matrice G_16 calculee. Delai:=0.784s.
Matrice G_17 calculee. Delai:=0.9s.         Matrice G_18 calculee. Delai:=1.183s.
Matrice G_19 calculee. Delai:=1.084s.       Matrice G_20 calculee. Delai:=1.5s.
Matrice G_21 calculee. Delai:=1.367s.       Matrice G_22 calculee. Delai:=1.616s.
Matrice G_23 calculee. Delai:=2.267s.       Matrice G_24 calculee. Delai:=2.233s.
Matrice G_25 calculee. Delai:=2.316s.       Matrice G_26 calculee. Delai:=2.567s.
Matrice G_27 calculee. Delai:=2.867s.       Matrice G_28 calculee. Delai:=3.15s.
Matrice G_29 calculee. Delai:=3.616s.       Matrice G_30 calculee. Delai:=4.483s.
Matrice G_31 calculee. Delai:=5.684s.       Matrice G_32 calculee. Delai:=7.35s.
Matrice G_33 calculee. Delai:=5.767s.       Matrice G_34 calculee. Delai:=8.184s.
Matrice G_35 calculee. Delai:=8.283s.       Matrice G_36 calculee. Delai:=9.3s.
Matrice G_37 calculee. Delai:=8.05s.        Matrice G_38 calculee. Delai:=8.45s.
Matrice G_39 calculee. Delai:=8.75s.        Matrice G_40 calculee. Delai:=8.566s.
Matrice G_41 calculee. Delai:=9.167s.       Matrice G_42 calculee. Delai:=9.884s.
Matrice G_43 calculee. Delai:=10.55s.       Matrice G_44 calculee. Delai:=12.117s.
Matrice G_45 calculee. Delai:=12.4s.        Matrice G_46 calculee. Delai:=13.083s.
Matrice G_47 calculee. Delai:=14.85s.       Matrice G_48 calculee. Delai:=15.267s.
Matrice G_49 calculee. Delai:=15.866s.      Matrice G_50 calculee. Delai:=17.084s.

DELAI TOTAL DE LA SOUS-ROURINE:=   4m. 34.8s.
```

3. NORMES ET RAYON DE CONVERGENCE

On considère sur $\mathbb{Z}_p$ la valuation p-adique. La relation algébrique $\pi^{p-1}+p=0$ induit alors une structure d'anneau normé sur $\mathbb{Z}_p[\pi]$ par :

$$\left|\sum_{k=0}^{p-2} a_k\,\pi^k\right|_p := \sup\left\{|a_k|_p \cdot p^{\frac{-k}{p-1}}\right\} \quad \text{où } a_k \in \mathbb{Z}_p\,.$$

On définit alors, pour chaque nombre réel strictement positif r appelé *rayon*, une norme $\|\cdot\|_r$ sur le corps $\mathbb{Z}_p[\pi](t)$ par le procédé suivant. Pour tout $Q(t) \in \mathbb{Z}_p[\pi](t)$, sous la forme $Q(t) = \frac{A(t)}{B(t)}$, où $A(t)$ et $B(t)$ appartiennent à $\mathbb{Z}_p[\pi, t]$, on pose :

$$\|Q(t)\|_r := \frac{\|A(t)\|_r}{\|B(t)\|_r} ,$$

puis, si $A(t) = \sum a_k\, t^k$, avec $a_k \in \mathbb{Z}_p[\pi]$, on pose :

$$\|A(t)\|_r := \sup\left\{|a_k|_p \cdot r^k\right\} ,$$

en particulier $\|t\|_r = r$.

Les matrices $\frac{1}{k!}\mathbf{C}(P, m, k)(t)$ ont leurs coefficients dans le corps $\mathbb{Z}_p[\pi](t)$ de sorte que les séries formelles de la section précédente auront des rayons de convergence dépendant du rayon r choisi. Un partie significative des recherches de Mebkhout concerne précisément le comportement asymptotique de ces rayons de convergence lorsque $r \to 1^-$.

D'un point de vue théorique, il était important de pouvoir calculer les rayons de convergence suivant des directions $\vec{V} \in {\mathbb{Z}_p}^{(m-1)^n}$ bien choisies et, en particulier, suivant les directions des vecteurs $\vec{e}_i$ de la base canonique.

Notons $\mathbf{R}(P, m, p, r, \vec{V})$ le rayon de convergence de la série formelle :

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\mathbf{C}(P, m, k)(t)(y - t)^k \cdot \vec{V} .$$

On a la formule de Cauchy bien connue :

$$\mathbf{R}(P, m, p, r, \vec{V}) = \limsup_{k\to\infty} \mathbf{R}_k(P, m, p, r, \vec{V}) , \quad \text{où} \quad \mathbf{R}_k(P, m, p, r, \vec{V}) := \sqrt[k]{\frac{\|k!\|_p}{\|\mathbf{C}(P, m, k)(t) \cdot \vec{V}\|_r}} .$$

Un résultat intéressant à souligner relatif au comportement des nombres $\mathbf{R}_k(P, m, p, r, \vec{V})$ affirme que lorsque $r = 1$, $\vec{V} \neq 0$ et que p est relativement premier à m, on a

$$\mathbf{R}_k(P, m, p, r, \vec{V}) \leq 1 , \quad \text{pour tout } k >> 0 ,$$

et $\lim_{k\to\infty} \mathbf{R}_k(P, m, p, r, \vec{V}) = 1$.

L'étude des nombres réels $\mathbf{R}_k(P, m, p, r, \vec{V})$ en fonction des six paramètres et suivant diverses évolutions asymptotiques, a constitué une bonne partie des recherches numériques de la première moitié de l'année 1994.

3.1 Procédures `Maple` pour le calcul des normes

Les variables globales dans ce script sont `NNT`, `NNPPi` et `infty`, la première désigne $\|t\|_r = r$, puis `NNPPi` $= \|\pi\|_r = |\pi|_p = p^{\frac{-1}{p-1}}$, où p est la caractéristique en cours, enfin `infty` est la valuation p-adique de 0 que nous avons fixé à 1000 pour les besoins des calculs.

```
##############################################################################
#######################     NORME p-adique       #############################
NN:=proc(Q) #
 RETURN(Poly_NN(numer(Q))/Poly_NN(denom(Q))):
end:
####################################
Poly_NN:=proc(PP) #
local ld,md,i,L,P:
global NNT;
 P:=collect(PP,y):
 ld:=ldegree(P,y):
 md:=degree(P,y):
 L:=[]:
 for i from ld by 1 while i <= md do
  L:=[op(L),evalf(PPi_NN(coeff(P,y,i))*NNT^i)]:
```

Détermine les numérateur et dénominateur de la fraction rationnelle `Q`$\in\mathbb{Z}_p(y,\pi)$, en tant qu'éléments de $\mathbb{Z}_p[y,\pi]$, et rend le quotient des normes p-adiques respectives.

Pour tout polynôme `PP`$\in\mathbb{Z}_p[y,\pi]$, écrit sous la forme :

$$\texttt{PP}=\sum_{i\geq 0} a_i\, y^i , \quad \text{où } a_i\in\mathbb{Z}_p[\pi],$$

cette procédure rend le nombre réel :

$$\texttt{Poly_NN(PP)}=\sup\left\{|a_i|_p\cdot|y|_p^i\right\}_{i\geq 0} .$$

```
 od:
 RETURN(max(op(L))):
end:
####################################
PPi_NN:=proc(P) #
local ld,md,L,i,P_mod;
global NNPPi;
 P_mod:=collect(rem(P,PPi^(p-1)+p,PPi),PPi):
 ld:=ldegree(P_mod,PPi):
 md:=degree(P_mod,PPi):
 L:=[]:
 for i from ld by 1 while i <= md do
  L:=[op(L),evalf(Z_NN(coeff(P_mod,PPi,i))*NNPPi^i)]:
 od:
 RETURN(max(op(L))):
end:
####################################
Z_NN:=proc(n) #
local val;
global infty:
 if (n=0)
  then RETURN(0);
 else val:=gcd(n,p^infty);
  if (val=p^infty) then print(`norme_infinie_rencontree`) fi;
  RETURN(1/val);
 fi;
end:
```

Pour tout polynôme $\mathtt{P}\in\mathbb{Z}_p[\pi]$, écrit sous la forme :

$$\mathtt{P}=\sum_{i\geq 0} m_i\,\pi^i,\quad \text{où } m_i\in\mathbb{Z},$$

cette procédure rend le nombre réel :

$$\mathtt{PPi_NN(P)}=\sup\left\{|m_i|_p\cdot|\pi|_p^i\right\}_{i\geq 0}.$$

Pour $n\in\mathbb{Z}$, rend la norme p-adique de n

3.2 Procédure `Maple` pour le calcul des rayons de convergence

```
##########################################################################
#######################    RAYONS DE CONVERGENCE  ########################
rayon:=proc(S,indice) #
local j,n,sec,NNS,LS,ray,texte,champ_1,champ_2;
 sec:=time():
 LS:=convert(S,list):
 NNS:=map(NN,LS):
 n:=max(op(NNS)):
 sec:=temps(time()-sec):
 if n=0 then
  lprint(`LA NORME DE F`,indice,`EST NULLE !!!`,`Delai:=`,sec):
 else
  ray:=convert(evalf(r),name):
  champ_1:=dformat_(indice,2):
  champ_2:=fformat(evalf(n^(1/indice))^(-1),12):
  texte:=cat(`Rayon de F_`,champ_1,`:=`,champ_2,` r:=`,ray,` Delai:=`,sec):
  lprint(texte):
 fi:
end:
##########################################################################
#######################     ROUTINE PRINCIPALE    ########################
work:=proc(Poly,var,def,rr,pp,ordre) #
local i,j,flag,rep,sec,total_time,texte,aux;
global r,p,NNT,NNPPi,last_command,card_base,Mat,Liste_G;
 total_time:=time():
 etoiles(60,`*`):
 etoiles(60,`*`):
 interface(quiet=true);
 r:=convert(rr,rational):
 p:=pp:
 NNT:=r;
 NNPPi:=p^(-1/(p-1));
 connexion(Poly,var,def): #
 Pause():
 genere_G(Mat,ordre): #
 interface(quiet=false):
 lprint(``):
 rep:=readstat(
 `CALCUL DES RAYONS SUIVANT LES DIRECTIONS CANONIQUES? [1,0]: `):
 if rep=1 then
  interface(quiet=true):
  lprint(` `):
  lprint(`SUITE DES RACINES N-IEMES DES INVERSES DES NORMES DES F_N`):
  for j from 1 to card_base do #
   lprint(` `):
   texte:=cat(`VECTEURS F_n POUR LA CONDITION INITIALE E_`,convert(j,name)):
   lprint(texte):
   aux:=cat(`E_`,convert(j,name),`:=[`):
    for i from 1 to card_base-1 do
```

Pour tout vecteur $\mathtt{S}\in\mathbb{Z}_p[\pi](t)^{(m-1)^n}$, cette procédure calcule le nombre réel $\|S\|_r^{\frac{-1}{\mathtt{indice}}}$. Un message est affiché lorsque ce nombre est ∞.

Procédure principale destinée au calcul des rayons de convergence des séries formelles développées à l'ordre `ordre` et associées à la matrice de connexion $\mathbf{C}(\mathtt{Poly},\mathtt{def})$, où $\mathtt{Poly}\in\mathbf{A}_{\mathtt{pp},\mathtt{var}}$ et où le rayon vaut $r=\mathtt{rr}$.

Calcul de la matrice de connexion $\mathbf{C}(\mathtt{Poly},\mathtt{def})$.

Génération des matrices $\frac{1}{k!}\mathbf{C}(\mathtt{Poly},\mathtt{def},k)$ pour $k\leq\mathtt{ordre}$.

Début de la boucle donnant successivement, pour chaque vecteur $\vec{e}_j$ de la base canonique, la suite de nombres $\mathbf{R}_k(\mathtt{Poly},\mathtt{def},\mathtt{pp},\mathtt{rr},\vec{e}_j)$, pour $k\leq\mathtt{ordre}$.

```
     if i=j then
      aux:=cat(aux,`1,`):
     else
      aux:=cat(aux,`0,`):
     fi:
    od:
     if i=j then
      aux:=cat(aux,`1]`):
     else
      aux:=cat(aux,`0]`):
    fi:
   lprint(aux):
   sec:=time():
    for i from 2 to ordre+1 do
     rayon(col(op(i,Liste_G),j),i-1): #
    od:
   sec:=temps(time()-sec):
   lprint(`DELAI TOTAL:=`,sec):
  od:
 fi:
 total_time:=temps(time()-total_time):
 total_time:=cat(`| TEMPS TOTAL DE CALCUL POR "work":= `,total_time,` |`):
 etoiles_(length(total_time)-1,`-`):
 lprint(total_time):
 etoiles_(length(total_time)-1,`-`):
 Prompt():
end:
```

Calcule et affiche les nombres $\mathbf{R}_k$(Poly,def,pp,rr,$\vec{e}_j$) pour $1 \leq k \leq$ ordre.

3.3 Exemple numérique de calcul des rayon de convergence

- Pour le polynôme $P = X^3 \in \mathbf{A}_{3,1}$, déformation $m = 4$, rayon $r = 0.95$ et jusqu'à l'ordre 20, nous avons obtenu les résultats suivants sur `marie.polytechnique.fr` :

```
SUITE DES RACINES N-IEMES DES INVERSES DES NORMES DES F_N #
#
VECTEURS F_n POUR LA CONDITION INITIALE E_1
E_1:=[1,0,0] #
Rayon en F_1 := 0.949999999999 r:=0.95 Delai:=0.134s.
Rayon en F_2 := 1.645448267190 r:=0.95 Delai:=0.184s.
Rayon en F_3 := 0.949999999999 r:=0.95 Delai:=0.3s.
Rayon en F_4 := 0.949999999999 r:=0.95 Delai:=0.367s.
Rayon en F_5 := 1.183444392634 r:=0.95 Delai:=0.483s.
Rayon en F_6 := 0.949999999999 r:=0.95 Delai:=0.55s.
Rayon en F_7 := 0.949999999999 r:=0.95 Delai:=0.7s.
Rayon en F_8 := 1.152430495111 r:=0.95 Delai:=0.783s.
Rayon en F_9 := 0.992669953649 r:=0.95 Delai:=0.867s.
Rayon en F_10:= 0.988318101205 r:=0.95 Delai:=1.3s.
Rayon en F_11:= 0.989374428781 r:=0.95 Delai:=1.167s.
Rayon en F_12:= 0.981826068512 r:=0.95 Delai:=1.533s.
Rayon en F_13:= 0.979340503288 r:=0.95 Delai:=1.367s.
Rayon en F_14:= 0.980801921482 r:=0.95 Delai:=1.8s.
Rayon en F_15:= 1.221901434890 r:=0.95 Delai:=1.984s.
Rayon en F_16:= 1.175217089190 r:=0.95 Delai:=1.716s.
Rayon en F_17:= 1.648872735270 r:=0.95 Delai:=2.267s.
Rayon en F_18:= 0.992669953649 r:=0.95 Delai:=2.3s.
Rayon en F_19:= 0.990377121657 r:=0.95 Delai:=2.517s.
Rayon en F_20:= 0.990856058885 r:=0.95 Delai:=2.65s.
DELAI TOTAL:=   26.017s.
#
VECTEURS F_n POUR LA CONDITION INITIALE E_2
E_2:=[0,1,0] #
Rayon en F_1 := 0.949999999999 r:=0.95 Delai:=0.116s.
Rayon en F_2 := 0.949999999999 r:=0.95 Delai:=0.2s.
Rayon en F_3 := 0.933895193866 r:=0.95 Delai:=0.3s.
Rayon en F_4 := 0.937895617656 r:=0.95 Delai:=0.383s.
Rayon en F_5 := 0.949999999999 r:=0.95 Delai:=0.483s.
Rayon en F_6 := 0.941913177619 r:=0.95 Delai:=0.833s.
Rayon en F_7 := 0.943064209619 r:=0.95 Delai:=0.633s.
Rayon en F_8 := 1.898425559170 r:=0.95 Delai:=0.75s.
Rayon en F_9 := 0.944601107261 r:=0.95 Delai:=1.1s.
Rayon en F_10:= 0.945139612952 r:=0.95 Delai:=0.966s.
Rayon en F_11:= 0.949999999999 r:=0.95 Delai:=1.233s.
Rayon en F_12:= 0.945947947161 r:=0.95 Delai:=1.167s.
Rayon en F_13:= 0.946259028983 r:=0.95 Delai:=1.367s.
Rayon en F_14:= 0.949999999999 r:=0.95 Delai:=1.467s.
Rayon en F_15:= 1.187006797620 r:=0.95 Delai:=2.033s.
Rayon en F_16:= 1.142649295150 r:=0.95 Delai:=2.s.
Rayon en F_17:= 1.372690295210 r:=0.95 Delai:=1.967s.
```

On note F_N le vecteur $\frac{1}{N!}\mathbf{C}(P,m,\mathtt{N})(t)\cdot\vec{V}$

Cas où la direction $\vec{V}$ est donnée par le vecteur $\vec{e}_1$=[1,0,0] de la base canonique

Cas où la direction $\vec{V}$ est donnée par le vecteur $\vec{e}_2$=[0,1,0] de la base canonique

```
Rayon en F_18:= 0.968337305571 r:=0.95 Delai:=2.484s.
Rayon en F_19:= 0.967363419055 r:=0.95 Delai:=2.533s.
Rayon en F_20:= 0.968969656978 r:=0.95 Delai:=2.666s.
DELAI TOTAL:=   25.35s.
```

3.4 Procédures complémentaires dans l'étude des séries formelles

Une fois la liste des matrices $\frac{1}{k!}\mathbf{C}(P,m,k)$ calculée, trois routines `Maple` ont été utilisées pour des études complémentaires; les voici :

```
#########################################################################
#############################       DEGRES      #############################
degres:=proc() #
local i,L,AUX:
global Liste_G;
 interface(quiet=true):
 L:=[]:
 for i from 1 to nops(Liste_G) do
  AUX:=map(ldegree,op(i,Liste_G),y):
  AUX:=convert(AUX,set):
  L:=[op(L),min(op(AUX))]:
 od:
 print(L):
 interface(quiet=false):
end:
#########################################################################
#############################      SOLUTION     #############################
solution:=proc(i) #
local vec,j;
global card_base,Liste_G;
 interface(quiet=true);
 vec:=matrix(card_base,1,0):
 for j from 1 to nops(Liste_G) do
  vec:=add(vec,scalarmul(col(op(j,Liste_G),i),z^(j-1))):
 od:
 interface(quiet=false);
 RETURN(vec):
end:
#########################################################################
#############################     DIRECTION     #############################
direction:=proc(vecteur) #
local i,j,sec,flag:
global r,NNT,NNPPi,card_base,Liste_G,INI;
 sec:=time():
 r:=convert(r,rational):
 NNT:=r;
 NNPPi:=p^(-1/(p-1));
 interface(quiet=true);
 INI:=matrix(card_base,1,0):
 for i from 1 by 1 to card_base do
  flag:=0:
  for j from 1 by 1 to nops(vecteur)/2 do
   if i=op(2*j-1,vecteur) then
    flag:=convert(op(2*j,vecteur),rational):
   fi:
  od:
  INI[i,1]:=flag:
 od:
 lprint(` `):
 lprint(`Caracteristique:=`,p):
 lprint(`Rayon:=`,r):
 lprint(`Condition Initiale`):
 print(convert(convert(col(INI,1),list),name)):
 print(`SUITE DES RACINES N-IEMES DES INVERSES DES NORMES DES F_N`):
 for i from 2 to nops(Liste_G) do
  rayon(col(multiply(op(i,Liste_G),INI),1),i-1):
 od:
 sec:=temps(time()-sec):
 lprint(`DELAI TOTAL DE LA SOUS-ROUTINE:=`,sec):
 interface(quiet=false);
end:
```

Donne la liste des y-valuations des matrices $\frac{1}{k!}\mathbf{C}(P,m,k)$.

Calcule la somme de la série $\sum_{k=0}^{\text{ordre}} \frac{z^k}{k!}\mathbf{C}(P,m,k)(y)\cdot\vec{e}_i$

Calcule et affiche la suite $\mathbf{R}_k(P,m,p,r,\vec{V})$ pour une direction $\vec{V}$ donnée.

3.5 Exemples numériques d'études complémentaires des séries formelles

Appliquées au cas $P = X^3 \in \mathbf{A}_{3,1}$, $m = 4$, $r = 0.95$, $p = 3$ et jusqu'à l'ordre 20, les procédures précédentes donnent :

- Procédure `degres`.

```
> degres();

 [0, -4, -8, -12, -16, -20, -24, -28, -32, -36, -40, -44, -48, -52, -56, -60,
     -64, -68, -72, -76, -80]
```

- Procédure `solution`. Cette routine, utile dans certaines recherches théoriques, ne prévoit pas d'affichage à l'écran. En effet, dans l'exemple en cours, l'expression du vecteur solution `solution(1)` comporte respectivement 210, 211 et 190 termes dans ses trois coordonnées. La fin de l'expression de la troisième coordonnée étant alors :

```
                                                                          18
              71709930399965127705007266275311664 7                   PPi
    + ------------------------------------------------------------------ -----
      4134699571508970836945737422722859279186881928935505920000       72
                                                                        y
                                                                          19
                 22559302699321807024202068516576 17                   PPi
    + ------------------------------------------------------------------ -----
      1323103862882870667822635975271314969339802217259361894400 0     75
                                                                        y
                                                                             20
                  25031555049932416013155719860858 49                    PPi
    + ------------------------------------------------------------------ -----)]
      3387145888980148909625948096694566321509893676183966449664000 00    78
                                                                         y
```

4. VECTEURS CYCLIQUES, POLYNÔMES INDICIELS ET EXPOSANTS FORMELS

Dans l'étude des solutions formelles les objets considérés dans cette section jouent un rôle fondamental. Rappelons que dans la section **1** nous avons introduit le $\mathbb{Z}[\pi, y, y^{-1}]$-module libre $\mathbf{M}(P, m)$ de rang $N := (m-1)^n$. Tout élément $\xi \in \mathbf{M}(P, m)$, tel que la famille :

$$\xi,\ (y\nabla_y)(\xi),\ (y\nabla_y)^2(\xi),\ \ldots,\ (y\nabla_y)^{N-1}(\xi)\,, \qquad (\dagger)$$

est $\mathbb{Z}[\pi, y, y^{-1}]$-linéairement indépendante sera appelé *vecteur cyclique pour la connexion* $y\nabla_y$. Notons $\mathbb{Z}_p(\pi, y)$ le corps des fractions de $\mathbb{Z}[\pi, y, y^{-1}]$, le vecteur ξ est donc cyclique, *si et seulement si*, la famille (†) est une base du $\mathbb{Z}_p(\pi, y)$-espace vectoriel $\mathbb{Z}_p(\pi, y) \otimes \mathbf{M}(P, m)$. Des résultats théoriques sur les équations différentielles p-adiques garantissent l'existence de tels vecteurs, mais ceci de manière non effective. Nous indiquerons dans la section **4.1** une procédure `Maple` destinée à les détecter.

Fixons maintenant un élément $\xi_0 \in \mathbf{M}(P, m)$ cyclique pour la connexion $y\nabla_y$ et considérons la décomposition :

$$(y\nabla_y)^N(\xi) = A_0\,\xi + A_1\,(y\nabla_y)(\xi) + A_2\,(y\nabla_y)^2(\xi) + \cdots + A_{N-1}\,(y\nabla_y)^{N-1}(\xi)\,,$$

où $A_k \in \mathbb{Z}_p[\pi](y)$. Remarquons que les coefficients A_k sont précisément ceux de la dernière colonne de la matrice de la connexion $y\nabla_y$ relative à la base des $(y\nabla_y)^i(\xi)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_p(\pi, y) \otimes \mathbf{M}(P, m)$. Cette matrice est donc la matrice *compagnon* :

$$(\!(y\nabla_y)\!) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & A_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & A_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & A_{N-1} \end{pmatrix}$$

Il existe alors des éléments $B_0, \dots, B_N \in \mathbb{Z}_p[\pi][y]$, tels que l'on ait :

$$B_N\,(y\nabla_y)^N(\xi) = B_0\,\xi + B_1\,(y\nabla_y)(\xi) + B_2\,(y\nabla_y)^2(\xi) + \cdots + B_{N-1}\,(y\nabla_y)^{N-1}(\xi)\,,$$

Notons $d_{\min}$ et $d_{\max}$ respectivement les bornes inférieure et supérieure des degrés en y intervenant dans les différents B_k. Soient $(B_k)_{(0)}$ et $(B_k)_{(\infty)}$ les coefficients des termes de B_k dont les degrés en y valent respectivement $d_{\min}$ et $d_{\max}$ et posons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{In}_{\xi_0}(P,m,0) & = & B_{N\,(0)}\Theta^N - \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} B_{k\,(0)}\Theta^k\,, \\ \\ \mathrm{In}_{\xi_0}(P,m,\infty) & = & B_{N\,(\infty)}\Theta^N - \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} B_{k\,(\infty)}\Theta^k\,. \end{array}\right.$$

Ce sont les *polynômes indiciels*, respectivement *à l'origine et à l'infini*, associés au couple (P,m). Leurs racines (en Θ), dans la cloture algébrique de $\mathbb{Z}_p[\pi]$, sont appelées les *exposants formels* de la connexion $y\nabla_y$.

Rappelons que si les polynômes In_ξ dépendent clairement du choix de l'élément cyclique ξ, un théorème affirme que les classes modulo $\mathbb{Z}$ des exposants en sont par contre indépendantes.

4.1 Procédure `Maple` pour la détection d'un vecteur cyclique

L'idée implémentée par les procédures suivantes est élémentaire, elle répose sur le fait que $\xi \in \mathbf{M}(P,m)$ est cyclique, si et seulement si, le déterminant de la matrice à N lignes et N colonnes dont les coefficients représentent les coefficients de $(y\nabla_y)^k(\xi)$ relativement à la base canonique de $\mathbf{M}(P,m)$, pour $k = 0, \dots, N-1$, est non nul. On calcule alors ces déterminant sur des polynômes de $\mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_N, y]$, de plus en plus compliqués, jusqu'à obtention d'un résultat non nul. Notons $\{\vec{e}_0 = 1, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{N-1}\}$ la base canonique de $\mathbf{M}(P,m)$, les polynômes en question sont alors obtenus par la formule :

$$\xi(s,t) = \sum_{j=0}^{N-1} \Big(\sum_{i=0}^{s-1} a(i,j)\,y^i \Big)\,\vec{e}_j + \sum_{j=0}^{t} a(s,j)\,y^s\,\vec{e}_j\,,$$

en faisant varier t entre 0 et $N-1$, pour chaque $s = 0, 1, 2, \dots$ (Dans ces expressions les termes $a(i,j)$ désignent des constantes abstraites.)

Bien entendu, si ces idées sont d'une grande simplicité théorique, les calculs nécessaires à leur explicitation sont décidemment inaccessibles à l'être humain et le choix informatique reste, une fois de plus, la seule alternative envisageable.

```
#############################################################################
##########################    COORDONNEES    ################################
coordonnees:=proc(Poly) #
local temp,tempp,L,b,h,k,dg:
global card_base,Base:
 L:=[]:
 temp:=reduit(Poly):
  for h from 1  to card_base do
   b:=op(h,Base):
   tempp:=temp:
   for k from 1 to nops(liste_var) do
    dg:=degree(b,x[k]):
    tempp:=collect(expand(tempp),x[k]):
    tempp:=coeff(tempp,x[k],dg):
   od:
   L:=[op(L),tempp]:
  od:
 RETURN(L):
end:
```

Calcule pour un élément `Poly`$\in \mathbf{A}_{p,n}$ la liste des coordonnées canoniques de l'élément de $\mathbf{M}(P,m)$ qu'il représente.

```
#########################################################################
#########################    DET_CYCLIQUE   #############################
det_cyclique:=proc(Poly) #
local text,temp,tempp,j,L_Poly,dg,sec:
global card_base,facteur,Base,liste_var;
 temp:=reduit(Poly):
 L_Poly:=[temp]:
 for j from 1 to card_base-1 do
  sec:=time():
  temp:=reduit(y*diff(temp,y)+y*facteur*temp):
  L_Poly:=[op(L_Poly),temp]:
  sec:=temps(time()-sec):
  text:=cat(`Itere `,j+1,`/`,card_base,` calcule. Delai:=`,sec):
  lprint(text):
 od:
 sec:=time():
 L_Poly:=map(coordonnees,L_Poly):
 temp:=simplify(det(L_Poly)):
 sec:=temps(time()-sec):
 lprint(`Delai de calcul du determinant:=`,sec):
 RETURN(temp):
end:
#########################################################################
########################## RECHERCHE-CYCLIQUE  ##########################
trouve_fonction_cyclique:=proc() #
 local i,h,k,Poly,determinant,total_time,sols:
 global card_base,Base,liste_var,Liste_A,cyclique;
 interface(quiet=true);
  total_time:=time():
  Poly:=0:
  determinant:=0:
  Liste_A:=[]:
  for h from 0 while determinant = 0 do #
   for k from 1 while (determinant = 0 and k <= card_base) do:
   Liste_A:=[op(Liste_A),a[k-1,h]]:
   Poly:=Poly+a[k-1,h]*y^(h)*op(k,Base):
   Poly:=sort(Poly,liste_var):
   lprint(`----------`):
   lprint(`Teste la famille de polynomes`):
   print(Poly):
   determinant:=det_cyclique(Poly): #
   if determinant = 0 then
    lprint(`ECHEC !!`):
   fi:
od:
 od: #
 etoiles(60,`*`):
 lprint(`La famille suivante comporte des elements cycliques`):
 lprint(` pour la connexion "y Nabla_y".`):
 lprint():
 print(Poly):
 lprint(`Elle est enregistree dans la variable globale de nom "cyclique"`):
 total_time:=temps(time()-total_time):
 lprint(`Delai de la recherche:=`,total_time):
 etoiles(60,`*`):
 cyclique:=Poly:
 print(`CONDITIONS DE NON CYCLICITE`): #
 sols:=solve({0=determinant},{op(Liste_A)}):
 print(sols):
 etoiles(60,`*`):
 interface(quiet=false):
end:
#########################################################################
macro(vect_cyclique=trouve_fonction_cyclique()): #
#########################################################################
```

Génère la matrice des coordonnées canoniques des éléments $(y\nabla_y)^k$(Poly), pour k=0,...,N−1; puis calcule son déterminant.

Calcule les valeurs det_cyclique($\xi(s,t)$) jusqu'à obtention d'un résultat non nul. Affecte à la variable globale "cyclique" le premier élément $\xi(s,t)$ satisfaisant à cette dernière condition.

Boucle génératrice des polynômes Poly :=ξ(h,k)

Teste si Poly est cyclique

Fin de la boucle génératice des ξ(h,k)

Recheche des conditions sur les coefficients a(k,h) donnant des polynômes ξ(h,k) non cycliques.

Raccourci d'appel de procédure

4.2 Exemples numériques de vecteurs cycliques

- Pour le polynôme $P = X^3 \in \mathbf{A}_{p,1}$ et la déformation 8, la procédure vect_cyclique donne l'affichage :

```
----------
Teste la famille de polynomes
                                  a[0, 0]
Itere 2/7 calcule. Delai:=0.033s.
Itere 3/7 calcule. Delai:=0.017s.
Itere 4/7 calcule. Delai:=0.083s.
Itere 5/7 calcule. Delai:=0.1s.
```

```
Itere 6/7 calcule. Delai:=0.134s.
Itere 7/7 calcule. Delai:=0.167s.
Delai de calcul du determinant:=   0.65s.
************************************************************
La famille suivante comporte des elements cycliques
 pour la connexion "y Nabla_y".
                                  a[0, 0]
Elle est enregistree dans la variable globale de nom "cyclique"
Delai de la recherche:=   1.217s.
************************************************************
                         CONDITIONS DE NON CYCLICITE
  {a[0, 0] = 0}, {a[0, 0] = 0}, {a[0, 0] = 0}, {a[0, 0] = 0}, {a[0, 0] = 0},
      {a[0, 0] = 0}, {a[0, 0] = 0}
************************************************************
```

L'élément $\xi = 1$ est donc bien cyclique dans $\mathbf{M}(X^3, 8)$.

On aura remarqué que la condition $a(0,0) = 0$ apparaît avec multiplicité 7, en effet, dans cet exemple le déterminant associé est tres précisément :

$$\frac{36245123848395}{604462909807314587353088} \frac{{a_{0,0}}^7 \pi^{17}}{y^6}$$

- Voici un exemple où la recherche d'éléments cycliques demande plus de travail. Pour le polynôme $P = X_1\, X_2 \in \mathbf{A}_{p,2}$ et la déformation 3, on obtient :

```
----------
Teste la famille de polynomes
                                  a[0, 0]
Itere 2/4 calcule. Delai:=0.05s.
Itere 3/4 calcule. Delai:=0.134s.
Itere 4/4 calcule. Delai:=0.184s.
Delai de calcul du determinant:=   0.2s.
ECHEC !!
----------
Teste la famille de polynomes
                           a[1, 0] x[1] + a[0, 0]
Itere 2/4 calcule. Delai:=0.133s.
Itere 3/4 calcule. Delai:=0.234s.
Itere 4/4 calcule. Delai:=0.266s.
Delai de calcul du determinant:=   0.233s.
ECHEC !!
----------
Teste la famille de polynomes
                     a[1, 0] x[1] + a[2, 0] x[2] + a[0, 0]
Itere 2/4 calcule. Delai:=0.633s.
Itere 3/4 calcule. Delai:=0.3s.
Itere 4/4 calcule. Delai:=0.35s.
Delai de calcul du determinant:=   0.333s.
ECHEC !!
----------
Teste la famille de polynomes
          a[3, 0] x[1] x[2] + a[1, 0] x[1] + a[2, 0] x[2] + a[0, 0]
Itere 2/4 calcule. Delai:=0.266s.
Itere 3/4 calcule. Delai:=0.317s.
Itere 4/4 calcule. Delai:=0.4s.
Delai de calcul du determinant:=   0.45s.
ECHEC !!
----------
Teste la famille de polynomes
     a[3, 0] x[1] x[2] + a[1, 0] x[1] + a[2, 0] x[2] + a[0, 0] + a[0, 1] y
Itere 2/4 calcule. Delai:=0.666s.
Itere 3/4 calcule. Delai:=0.35s.
Itere 4/4 calcule. Delai:=0.45s.
Delai de calcul du determinant:=   0.483s.
ECHEC !!
----------
Teste la famille de polynomes
   a[3, 0] x[1] x[2] + a[1, 0] x[1] + a[1, 1] y x[1] + a[2, 0] x[2] + a[0, 0]
       + a[0, 1] y
Itere 2/4 calcule. Delai:=0.284s.
Itere 3/4 calcule. Delai:=0.35s.
Itere 4/4 calcule. Delai:=0.45s.
Delai de calcul du determinant:=   0.95s.
```

```
************************************************************
La famille suivante comporte des elements cycliques
 pour la connexion "y Nabla_y".
   a[3, 0] x[1] x[2] + a[1, 0] x[1] + a[1, 1] y x[1] + a[2, 0] x[2] + a[0, 0]
       + a[0, 1] y
Elle est enregistree dans la variable globale de nom "cyclique"
Delai de la recherche:=   8.75s.
************************************************************
                          CONDITIONS DE NON CYCLICITE
{a[0, 0] = a[0, 0], a[1, 0] = a[1, 0], a[0, 1] = a[0, 1], a[3, 0] = a[3, 0],
    a[1, 1] = a[1, 1], a[2, 0] = 0},
{a[0, 0] = a[0, 0], a[1, 0] = a[1, 0], a[0, 1] = a[0, 1], a[3, 0] = a[3, 0],
    a[2, 0] = a[2, 0], a[1, 1] = 0},
{a[1, 0] = a[1, 0], a[0, 1] = a[0, 1], a[3, 0] = a[3, 0], a[1, 1] = a[1, 1],
    a[2, 0] = a[2, 0],
                           6              2  4    2                 6
    a[0, 0] = RootOf((324 y  PPi - 648 PPi  y ) _Z  + (324 a[3, 0] y
                  7                   3                            4
         - 1539 y  PPi a[0, 1] - 4 PPi  a[3, 0] + 1332 a[3, 0] PPi y
                  2          2          2          5         3          3
         + 186 PPi  a[3, 0] y  + 1188 PPi  a[0, 1] y  - 36 PPi  a[0, 1] y ) _Z
                    2  8                     7                     2      2
         + 324 a[0, 1]  y  PPi - 1620 a[0, 1] y  a[3, 0] - 258 a[3, 0]  PPi y
                2       2             2  4           5
         + 4 PPi  a[3, 0]  + 720 a[3, 0]  y  - 3015 PPi y  a[0, 1] a[3, 0]
                  2  3                          3  4       2
         + 60 PPi  y  a[0, 1] a[3, 0] - 36 PPi  y  a[0, 1]
                3                           2  6       2
         - 4 PPi  y a[0, 1] a[3, 0] + 378 PPi  y  a[0, 1] )                  }
************************************************************
```

En particulier, l'élément $\xi = y\,X_1 + X_2 + 1$ est bien cyclique dans $\mathbf{M}(X_1\,X_2, 3)$.

- Enfin, lorsque $P = X_1 + X_2 \in \mathbf{A}_{p,2}$ et en deformation 3, on obtient :

```
----------
Teste la famille de polynomes
                                  a[0, 0]
Itere 2/4 calcule. Delai:=0.05s.
Itere 3/4 calcule. Delai:=0.183s.
Itere 4/4 calcule. Delai:=0.2s.
Delai de calcul du determinant:=   0.217s.
ECHEC !!
----------
Teste la famille de polynomes
                           a[1, 0] x[1] + a[0, 0]
Itere 2/4 calcule. Delai:=0.117s.
Itere 3/4 calcule. Delai:=0.25s.
Itere 4/4 calcule. Delai:=0.717s.
Delai de calcul du determinant:=   0.333s.
************************************************************
La famille suivante comporte des elements cycliques
 pour la connexion "y Nabla_y".
                           a[1, 0] x[1] + a[0, 0]
Elle est enregistree dans la variable globale de nom "cyclique"
Delai de la recherche:=   2.15s.
************************************************************
                          CONDITIONS DE NON CYCLICITE
{a[1, 0] = 0, a[0, 0] = a[0, 0]},
                                        3    2          2
{a[1, 0] = a[1, 0], a[0, 0] = RootOf(12 y _Z  PPi  + 36 y _Z  PPi a[1, 0]
                                       2           2    2              3
                         + (24 y a[1, 0]  + 4 a[1, 0]  PPi ) _Z - a[1, 0]  PPi)
    }
************************************************************
```

L'élément $\xi = X_1$ (de même que $\xi = X_2$, par symétrie) est donc cyclique dans $\mathbf{M}(X_1 + X_2, 3)$.

4.3 Procédure Maple pour le calcul des polynômes indiciels et exposants formels

Elle suit de près la démarche théorique rappelée au début de cette section.

```
#########################################################################
############################    COORDONNEES    ##########################
Poly_indiciel:=proc(Poly) #
local text,temp,tempp,k,j,L_Poly,Der_Poly,A,B,LA,TA,LL,h,
      Den,b,Comp,ldg,tdg,PP,PPinfty,sec,total_time:
global card_base,facteur,Base,liste_var;
 interface(quiet=true);
 total_time:=time():
 etoiles(60,`*`):
 print(`GENERATION DE LA BASE CYCLIQUE`): #
 temp:=reduit(Poly):
 L_Poly:=[coordonnees(temp)]:
 for k from 1 to card_base-1 do
  sec:=time():
  temp:=reduit(y*diff(temp,y)+y*facteur*temp):
  L_Poly:=[op(L_Poly),coordonnees(temp)]:
  sec:=temps(time()-sec):
  text:=cat(`Itere `,k+1,`/`,card_base,` calcule. Delai:=`,sec):
  lprint(text):
 od:
 etoiles(60,`*`):
 print(`COEFFICIENTS DES POLYNOMES INDICIELS`): #
 lprint(`MATRICE COMPAGNON`):
 temp:=reduit(y*diff(temp,y)+y*facteur*temp):
 Der_Poly:=coordonnees(temp):
 Den:=det(L_Poly):
 Comp:=[]:
 for k from 1 to card_base do
   sec:=time():
   LL:=[]:
   for j from 1 to card_base do
    if (j=k) then
     LL:=[op(LL),Der_Poly]:
    else
     LL:=[op(LL),op(j,L_Poly)]:
    fi:
   od:
   Comp:=[op(Comp),det(LL)/Den]:
   sec:=temps(time()-sec):
   text:=cat(`Coeff `,k,`/`,card_base,
   ` de la matrice compagnon calcule. Delai:=`,sec):
   lprint(text):
 od:
#####DENOMINATUER COMMUN
 sec:=time():
 B:=1:
 for k from 1 to card_base do
  B:=lcm(B,denom(op(k,Comp))):
 od:
########################
 etoiles(60,`-`):
 lprint(`POLYNOMES INDICIELS`): #
 A:=map(proc(x,t,z) collect(simplify(x*t),z) end,Comp,B,y):
 A:=[op(A),collect(-B,y)]:
 ldg:=ldegree(op(1,A),y):
 for k from 2 to card_base+1 do
  ldg:=min(ldg,ldegree(collect(op(k,A),y),y)):
 od:
 tdg:=degree(op(1,A),y):
 for k from 2 to card_base+1 do
  tdg:=max(tdg,degree(collect(op(k,A),y),y)):
 od:
 LA:=map(proc(x,d,t) coeff(x,t,d) end,A,ldg,y):
 TA:=map(proc(x,d,t) coeff(x,t,d) end,A,tdg,y):
 PP:=0:
 PPinfty:=0:
 for k from 1 to card_base+1 do
   PP:=PP+op(k,LA)*(Theta)^(k-1):
   PPinfty:=PPinfty+op(k,TA)*(Theta)^(k-1):
 od:
 sec:=temps(time()-sec):
 lprint(`Calcul termine. Delai:=`,sec):
 etoiles(60,`*`): #
 print(`POLYNOME INDICIEL A L'ORIGINE`):
 print(collect(sort(expand(PP)),Theta)):
```

Procédure destinée au calcul des polynômes indiciels et exposants associés à un élément cyclique `Poly`.

Génère la liste `L_Poly` des itérés $(y\nabla_y)^{\mathtt{k}}$(`Poly`), pour `k`$=0,\ldots,N-1$.

Calcul des coefficients de la matrice compagnon

Calcul des coefficients des polynômes indiciels

Affichage des résultats

```
 etoiles(60,`-`):
 if degree(PP,Theta)=0 then
  print(`Pas d'exposants formels a l'origine`)
 else
  text:=`LISTE D'EXPOSANTS FORMELS A L'ORIGINE`:
  print(text):
  print(map(simplify,[solve(PP,Theta)])):
 fi:
 etoiles(60,`*`):
 print(`POLYNOME INDICIEL A L'INFINI`):
 print(collect(sort(expand(PPinfty)),Theta)):
 etoiles(60,`-`):
 if degree(PPinfty,Theta)=0 then
  print(`Pas d'exposants formels a l'infini`)
 else
  text:=`LISTE D'EXPOSANTS FORMELS A L'INFINI`:
  print(text):
  print(map(simplify,[solve(PPinfty,Theta)])):
 fi:
 interface(quiet=false):
 total_time:=temps(time()-total_time):
 lprint(`Delai total de la procedure:=`,total_time):
end:
########################################################################
macro(exposants=Poly_indiciel(cyclique)): #
########################################################################
```

Raccourci d'appel de procédure

4.4 Exemples numériques de calcul des polynômes indiciels et exposants formels

- Dans le cas : $P = X^3$ et $m = 8$, on obtient pour le vecteur cyclique $\xi = 1$:

```
************************************************************
                        GENERATION DE LA BASE CYCLIQUE
Itere 2/7 calcule. Delai:=0.05s.
Itere 3/7 calcule. Delai:=0.067s.
Itere 4/7 calcule. Delai:=0.1s.
Itere 5/7 calcule. Delai:=0.15s.
Itere 6/7 calcule. Delai:=0.167s.
Itere 7/7 calcule. Delai:=0.2s.
************************************************************
                     COEFFICIENTS DES POLYNOMES INDICIELS
MATRICE COMPAGNON
Coeff 1/7 de la matrice compagnon calcule. Delai:=0.667s.
Coeff 2/7 de la matrice compagnon calcule. Delai:=0.383s.
Coeff 3/7 de la matrice compagnon calcule. Delai:=0.45s.
Coeff 4/7 de la matrice compagnon calcule. Delai:=0.3s.
Coeff 5/7 de la matrice compagnon calcule. Delai:=0.7s.
Coeff 6/7 de la matrice compagnon calcule. Delai:=0.3s.
Coeff 7/7 de la matrice compagnon calcule. Delai:=0.3s.
------------------------------------------------------------
POLYNOMES INDICIELS
Calcul termine. Delai:=   0.1s.
************************************************************
                        POLYNOME INDICIEL A L'ORIGINE
                             5      2           5
                      6561 PPi  Theta  - 13122 PPi  Theta
------------------------------------------------------------
                    LISTE D'EXPOSANTS FORMELS A L'ORIGINE
                                  [0, 2]
************************************************************
                         POLYNOME INDICIEL A L'INFINI
                 7                 6                 5                   4
  - 16777216 Theta  - 159383552 Theta  - 602406912 Theta  - 1158676480 Theta
                           3                 2
       - 1202622464 Theta  - 653641728 Theta  - 162412288 Theta - 12172160
------------------------------------------------------------
                       LISTE D'EXPOSANTS FORMELS A L'INFINI
                  [-11/4, -1/8, -1/2, -7/8, -5/4, -13/8, -19/8]
Delai total de la procedure:=   5.283s.
```

- Dans le cas : $P = X_1\,X_2$ et $m = 3$, on obtient pour le vecteur cyclique $\xi = y\,X_1 + X_2 + 1$:

```
************************************************************
                        GENERATION DE LA BASE CYCLIQUE
Itere 2/4 calcule. Delai:=0.283s.
Itere 3/4 calcule. Delai:=0.3s.
```

```
Itere 4/4 calcule. Delai:=0.817s.
************************************************************
                    COEFFICIENTS DES POLYNOMES INDICIELS
MATRICE COMPAGNON
Coeff 1/4 de la matrice compagnon calcule. Delai:=0.2s.
Coeff 2/4 de la matrice compagnon calcule. Delai:=0.167s.
Coeff 3/4 de la matrice compagnon calcule. Delai:=0.15s.
Coeff 4/4 de la matrice compagnon calcule. Delai:=0.133s.
------------------------------------------------------------
POLYNOMES INDICIELS
Calcul termine. Delai:=   0.133s.
************************************************************
                       POLYNOME INDICIEL A L'ORIGINE
                                    4
                             16 PPi  Theta
------------------------------------------------------------
                    LISTE D'EXPOSANTS FORMELS A L'ORIGINE
                                  [0]
************************************************************
                       POLYNOME INDICIEL A L'INFINI
                     4              3              2
          - 19683 Theta  - 59049 Theta  - 56862 Theta  - 17496 Theta
------------------------------------------------------------
                    LISTE D'EXPOSANTS FORMELS A L'INFINI
                            [0, -2/3, -4/3, -1]
Delai total de la procedure:=   3.s.
```

- Enfin, dans le cas : $P = X_1 + X_2$ et $m = 3$, on obtient pour le vecteur cyclique $\xi = X_1 + X_2$:

```
************************************************************
                       GENERATION DE LA BASE CYCLIQUE
Itere 2/4 calcule. Delai:=0.116s.
Itere 3/4 calcule. Delai:=0.25s.
Itere 4/4 calcule. Delai:=0.717s.
************************************************************
                    COEFFICIENTS DES POLYNOMES INDICIELS
MATRICE COMPAGNON
Coeff 1/4 de la matrice compagnon calcule. Delai:=0.134s.
Coeff 2/4 de la matrice compagnon calcule. Delai:=0.067s.
Coeff 3/4 de la matrice compagnon calcule. Delai:=0.083s.
Coeff 4/4 de la matrice compagnon calcule. Delai:=0.1s.
------------------------------------------------------------
POLYNOMES INDICIELS
Calcul termine. Delai:=   0.033s.
************************************************************
                       POLYNOME INDICIEL A L'ORIGINE
                         2      2        2              2
                   - 4 PPi  Theta  - 6 PPi  Theta - 2 PPi
------------------------------------------------------------
                    LISTE D'EXPOSANTS FORMELS A L'ORIGINE
                                 [-1, -1/2]
************************************************************
                       POLYNOME INDICIEL A L'INFINI
                    4            3           2
           - 27 Theta  - 162 Theta  - 357 Theta  - 342 Theta - 120
------------------------------------------------------------
                    LISTE D'EXPOSANTS FORMELS A L'INFINI
                            [-5/3, -4/3, -2, -1]
Delai total de la procedure:=   2.183s.
```

Cet exemple est à souligner par le fait qu'il montre que les exposants formels peuvent être de valuation p-adique négative (pour $p = 2$ dans la situation présente).

Remarquons pour terminer que l'ensemble des exposants à l'origine peut être dans certains cas vide. C'est le cas, par exemple, sur $\mathbf{M}(X_1 - X_2, 3)$.

5. CONCLUSION

Ce rapport succint de notre activité informatique en liaison avec des recherches en mathématique pures, qui a délibérément passé sous silence bien d'aspects théoriques fondamentaux sur lesquels abondent les articles de Mebkhout, s'est également montré avare de précisions quant à la diversité des programmes de calcul formel que nous avons élaborés. Nous nous

sommes, en effet, limités a donner un aperçu rapide des motivations qui nous ont emmenées à envisager sérieusement d'utiliser l'informatique comme outil de découverte. Conscients du fait que des structures mathématiques riches et profondes non encore dévoilées mais soupçonnées par le mathématicien, demandent de plus en plus souvent des calculs inaccessibles à l'être humain pour être mises en évidence, et sachant que l'informatique, utilisée à bon escient, élargit incontestablement, aujourd'hui, l'horizon du chercheur, nous avons consciemment voulu tester la puissance de cet outil de recherche. Notre expérience des quatre dernières années s'est avérée, en ce sens, extrêmement positive et des percées théoriques fondamentales ont pu être réalisées dans le domaine de la théorie des équations différentielles p-adiques.

Nous persistons à croire en l'importance potentielle pour la recherche scientifique, des Centres de "référence" de Calcul de niveau international, spécifiques pour les Mathématiques, ouverts aux demandes de tous les mathématiciens et leur offrant des installations informatiques de pointe.

Le Centre de Calcul du **GDR-Médicis** en région parisienne, répond dans une large mesure, à l'heure actuelle et de notre point de vue, à cette exigence. Nous souhaitons que Médicis continue d'évoluer dans cette direction tout en se dotant des derniers progrès technologiques.

Alberto Arabia

mercredi 15 mars 2000

Conditions de Hirai et Chaînes Sous-Analytiques, I

(d'après Masaki Kashiwara)

par A. Arabia[1]

Le but de cet exposé est de fournir des détails complémentaires aux définitions et arguments de l'article [K-2] de Masaki Kashiwara : « *Character, Character Cycle, Fixed Point Theorem and Group Representations* », essentiellement pour ceux des sections qui motivent sa remarque fondamentale concernant ce qu'il appelle la *Correspondance de Hirai* (*loc. cit.* Proposition 2.3.1) ; correspondance *bijective* permettant de relier, d'une part, l'espace des distributions sur une forme réelle $G_{\mathbb{R}}$ d'un groupe semi-simple complexe et connexe G, invariantes et propres pour le caractère infinitésimal trivial χ, et d'autre part, le groupe de cohomologie de degré $-\dim(G_{\mathbb{R}})$ du complexe

$$R\Gamma(\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}}); \omega_{\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}})} \otimes \rho^{-1}\underline{\underline{or}}_{G_{\mathbb{R}}}), \tag{1}$$

noté $\mathrm{H}^{\inf}_{\dim(G_{\mathbb{R}})}(\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}}); \underline{\underline{or}}_{G_{\mathbb{R}}})$ et où $\rho : \widetilde{G} \to G$ dénote la projection canonique de la variété d'incidence $\widetilde{G}$ associée à G. Soit :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Distributions invariantes}\\ \chi\text{-propres sur } G_{\mathbb{R}}.\end{array}\right\} \underset{\equiv}{\xleftarrow{\textit{Correspondance de Hirai}}} \mathrm{H}^{\inf}_{\dim(G_{\mathbb{R}})}(\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}}); \underline{\underline{or}}_{G_{\mathbb{R}}}).$$

Kashiwara introduit alors le *Complexe des Chaînes Sous-Analytiques* de $\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}})$ et montre que, de manière analogue au complexe des chaînes simpliciales localement finies, ce « sous-complexe » réalise un représentant du dualisant $\omega_{\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}})}$, constitué par des faisceaux *fins*[2] (*confer* Propositions 1.5.1 et 1.5.3). Cette remarque lui permet de « relever » toute classe de cohomologie de degré $-p$ du complexe (1) en un p-cycle sous-analytique à coefficients dans $\rho^{-1}\underline{\underline{or}}_{G_{\mathbb{R}}}$; en particulier, comme en degré $-\dim(G_{\mathbb{R}})$ ce relèvement est trivialement unique puisque il n'existe pas d'ensemble sous-analytique de dimension supérieure, la correspondance de Hirai associe à une distribution invariante χ-propre, un cycle sous-analytique de $\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}})$ bien déterminé, et ceci bijectivement.

Cette correspondance, qui sera détaillée dans le §2 du présent exposé et que l'on obtient aisément à l'aide de manipulations formelles en catégorie dérivée à partir de résultats fondamentaux établis dans [H-K], a l'avantage d'être *a priori* naturelle, de sorte que l'on obtient un diagramme commutatif associé à l'opération de restriction de $G_{\mathbb{R}}$ à sa partie régulière $G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$:

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{l}\text{Distributions invariantes}\\ \chi\text{-propres sur } G_{\mathbb{R}}.\end{array}\right\} & \xrightarrow{\textit{restriction}} & \left\{\begin{array}{l}\text{Distributions invariantes}\\ \chi\text{-propres sur } G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}.\end{array}\right\} \\
\textit{Hirai}\ \updownarrow\ \equiv & & \equiv\ \updownarrow\ \textit{Hirai} \\
\mathrm{H}^{\inf}_{\dim(G_{\mathbb{R}})}(\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}}); \underline{\underline{or}}_{G_{\mathbb{R}}}) & \xrightarrow{\textit{restriction}} & \mathrm{H}^{\inf}_{\dim(G_{\mathbb{R}})}(\rho^{-1}(G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}); \underline{\underline{or}}_{G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}})
\end{array}$$

permettant de « poser », en termes d'opérations sur les chaînes sous-analytiques, les conditions nécessaires pour qu'une distribution invariante propre sur la partie régulière puisse

[1] Université de Paris VII. URA 748, tour 45–55, 5^{e} étage. 2, place Jussieu, 75 251 Paris Cedex 05.

[2] En fait Φ-fins pour toute famille paracompactifiante Φ. En particulier acycliques pour les foncteurs de sections à supports dans Φ (*cf.* [God]).

être prolongée en une distribution de même type sur $G_{\mathbb{R}}$ tout entier ; conditions auxquelles on réfère classiquement par le nom de *Conditions de Hirai* —ce qui explique par ailleurs la terminologie choisie par Kashiwara. Mais, très rapidement introduite par une rédaction souvent succinte, cette correspondance apparaît dépourvue du degré suffisant d'explicitation permettant de reconnaître l'ensemble des conditions énoncé par Hirai (*cf.* [Hir]). C'est pourquoi j'ai entrepris, à la demande de Michèle Vergne, le travail d'élucidation dont cette rédaction fait l'objet.

Dans le présent exposé, le lecteur trouvera, par rapport aux articles précités, un traitement plus détaillé, mais suivant toujours les directions esquissées par Kashiwara, des fondements du Complexe des Chaînes Sous-Analytiques pour un espace qui est lui même sous-analytique et localement fermé dans une variété analytique réelle ; suffisamment détaillé en tout cas pour faire aboutir le §1, dans les sections 1.4 et 1.5, à l'explicitation du morphisme bord au niveau des section globales, aussi bien dans le cas régulier que dans le cas singulier localement fermé. On trouvera aussi, en §2, les détails de l'explicitation de la correspondance de Hirai sur la partie régulière de $G_{\mathbb{R}}$. Ces deux sujets constituent l'introduction indispensable pour l'exposé suivant, par A. Bouaziz, qui traitera plus proprement du problème du prolongement des distributions considérées.

Je me dois aussi de signaler que, malgré le fait que les résultats de l'article de R. Hotta et M. Kashiwara ([H-K]) jouent un rôle incontestablement capital dans la chaîne de raisonnements permettant d'établir la correspondance de Hirai, ces résultats ne seront que sommairement rappelés et à peine discutés. En particulier, les liens d'interdépendance entre les travaux de Harish-Chandra ([HC]) et les résultats de [H-K] utilisés dans [K-2] n'ont pas été suffisament explorés, bien qu'ils eussent mérité, à eux seuls, une section à part entière.

Lors de la composition de ce texte j'ai bénéficié de la lecture de diverses sources d'information dont le livre de M. Kashiwara et P. Schapira [K-S], actuellement en cours d'édition chez Springer et intitulé : « *Sheaves on Manifolds* », constitue sans doute la principale référence. En ce sens je remercie P. Schapira de m'avoir permis d'accéder aux chapitres intimement liés aux problèmes que nous avions à traiter et tiens à préciser que les sections 1.2 et 1.3 suivent pour l'essentiel leur exposé.

Je termine cette brève introduction en exprimant ma gratitude à Michèle Vergne pour m'avoir suggéré ce travail.

Contents

1 Complexe de chaînes sous-analytiques **3**
1.1 Catégories de travail. 3
1.2 Faisceaux de chaînes sous-analytiques. 3
1.3 Complexe des faisceaux de chaînes sous-analytiques. 9
1.4 Explicitation du morphisme bord. 11
1.5 Généralités sur le complexe de chaînes sous-analytiques. 14

2 Correspondance de Hirai **18**
2.1 Equivalence de Hirai d'après M. Kashiwara. 19
2.2 Restriction aux ouverts réguliers. 22

3 Références Bibliographiques 26

4 Terminologie et notations 27

1 Complexe de chaînes sous-analytiques

1.1 Catégories de travail.

Au niveau le plus élémentaire la catégorie d'espaces à considérer sera celle dont les objets sont les espaces topologiquement stratifiables et les morphismes les applications continues.

Je rappelle (*cf.* [Bor] I) qu'un espace topologiquement stratifié de dimension n est la donnée d'un espace séparé, paracompact, dénombrable à l'infini et muni d'une filtration par de fermés

$$X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq \emptyset,$$

de sorte que pour chaque point $p \in X_{i,\mathrm{reg}} := X_i \backslash X_{i+1}$, il existe un voisinage N de p dans X, un espace compact L toplogiquement stratifié de dimension $i-1$

$$L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_{i-1} \supseteq \emptyset,$$

et un homéomorphisme $\phi : \mathbb{R}^{n-i} \times \mathring{c}(L) \to N$ transformant $\mathbb{R}^{n-i} \times \mathring{c}(L_j)$ sur $N \cap X_j$.[3]

Il s'ensuit que l'ensemble $X_{i,\mathrm{reg}}$ est une sous-variété topologique, localement fermée de X et de codimension i, nous l'appellerons suivant la terminologie habituelle *la strate $(n-i)$-dimensionnelle* de la stratification considérée et la noterons parfois X^{n-i}. On dira aussi que X_{i+1} est la *singularité* de X_i et que $X_{i,\mathrm{reg}}$ est sa *partie régulière*. Lorsque $i = 1$, la situation locale est celle de l'espace $N = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathring{c}(L^0)$, où L^0 dénote un ensemble fini de points ; ainsi l'ouvert N apparaît comme un bouquet de sous-variétés à bord, de dimension n, localement fermées dans X et collées par leur bord.

Les exemples les plus familiers de tels espaces sont fournis par les variétés algébriques, les ensembles semi-algébriques, semi-analytiques et plus généralement sous-analytiques d'une variété analytique réelle (*cf.* [H-1]) ; enfin, tout espace admettant une stratification de Whitney est aussi topologiquement stratifiable (*cf.* [Bor] IV).

Considérons maintenant pour chaque espace X la catégorie dérivée des complexes à cohomologie bornée et constructible relativement à des stratifications topologiques, elle sera notée $\mathcal{D}^b_c(X)$. La nature stratifiée des espaces sous-jacents permet alors de démontrer les théorèmes de finitude indispensables pour assurer la stabilité de ces catégories vis-à-vis des opérations de Grothendieck (*cf.* [Bor] V §8). Ces remarques sont en particulier vraies pour la sous-catégorie d'espaces constituée des ensembles sous-analytiques des variétés analytiques réelles et dont les morphismes sont les restrictions des applications analytiques ; dans ce cas la constructibilité sera relative à des stratifications par des parties sous-analytiques.

1.2 Faisceaux de chaînes sous-analytiques.

Soit X une variété analytique réelle et fixons un entier positif p. Pour chaque ouvert $U \subseteq X$ considérons, suivant M. Kashiwara, le $\mathbb{Z}$-module libre $\mathcal{CS}'_p(U)$ engendré par les

[3] Dans cette définition $\mathring{c}(L)$ dénote le cône ouvert associé à l'espace L. Dans la situation extrême où $i = 0$, on aura $L = \emptyset$ et $\mathring{c}(\emptyset) = \mathrm{pt}$.

couples (S, Σ), où S dénote une sous-variété analytique réelle de dimension p, plongée dans U (donc localement fermée) et sous-analytique[4] en tant que sous-ensemble de U, et où Σ dénote une section globale du faisceau d'orientation de S.

Soit $\mathcal{R}_p(U)$ le sous-module de $\mathcal{CS}'_p(U)$ engendré par les éléments des trois *types* suivants :

a) $(S_1, \Sigma_1) - (S_2, \Sigma_2)$; s'il existe $(S_3, \Sigma_3) \in \mathcal{CS}'_p(U)$, avec $S_3 \subseteq S_1 \cap S_2$, tel que $\Sigma_i|_{S_3} = \Sigma_3$ et $\overline{\text{supp}}(\Sigma_i) = \overline{\text{supp}}(\Sigma_3)$[5] pour $i = 1, 2$,

b) $m(S, \Sigma) - (S, m\Sigma)$; pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

c) $(S_1 \amalg S_2, \Sigma_1 \amalg \Sigma_2) - (S_1, \Sigma_1) - (S_2, \Sigma_2)$,

et considérons le module quotient $\mathcal{CS}_p(U) := \mathcal{CS}'_p(U)/\mathcal{R}_p(U)$. Ses éléments seront appelés *les p-chaînes sous-analytiques de* U. On notera $[S, \Sigma]$ la classe d'équivalence du couple (S, Σ) modulo $\mathcal{R}_p(U)$.

Lemme 1.2.1

i) Tout élément de $\mathcal{CS}_p(U)$ *est de la forme* $[S, \Sigma]$.

ii) L'élément $[S, \Sigma] \in \mathcal{CS}_p(U)$ *est nul si et seulement si* $\Sigma \equiv 0$. *En particulier* $\mathcal{CS}_p(U)$ *est un* $\mathbb{Z}$*-module plat.*

Démonstration : Pour i), on remarque que dans $\mathcal{CS}_p(U)$ l'annulation des éléments a) b) et c) fait que, à partir de l'égalité

$$S_1 \cup S_2 = (S_1 \backslash S_2) \amalg (S_1 \cap S_2) \amalg (S_2 \backslash S_1) \tag{2}$$

et après restriction aux parties régulières des ensembles sous-analytiques du membre de droite de (2), on peut décrire une somme $[S_1, \Sigma_1] + [S_2, \Sigma_2]$ (et donc toute somme finie) à l'aide d'un seul symbole $[S, \Sigma]$.

La suffisance dans ii) étant claire étudions la nécessité. Tout élément $(S_0, \Sigma_0) \in \mathcal{R}_p(U)$ est une somme finie de termes de types a) b) et c), ce qui donnera une expression $(S_0, \Sigma_0) = \Sigma_{i=1}^r m_i(S_i, \Sigma_i)$. Le bord topologique $\delta S_i = \overline{S_i} \backslash S_i$ de S_i est un fermé dans U et l'ensemble $\Delta = \cup_{i=1}^r \delta S_i$ y est sous-analytique de dimension $< p$, par conséquent $S_0 \backslash \Delta$ est un ouvert dense de S_0 dont les éléments x vérifient : $x \notin \delta S_i$, pour tout $i \geq 0$.

Ceci étant, la donnée en $y \in U$ d'un germe $T(y)$ de variété orientée de dimension p permet de définir une forme linéaire $\delta_{T(y)}$ sur $\mathcal{CS}'_p(U)$ en posant : $\delta_{T(y)}(S, \Sigma) = m$, si $y \in S$ et le germe de variété $S(y)$, défini par S en y, coïncide avec $T(y)$, auquel cas m sera le facteur de proportionnalité entre $\Sigma(y)$ et l'orientation de $T(y)$; et en posant dans

[4] Rappelons pour mémoire (*confer* [H-1]) qu'une partie S d'une variété analytique réelle X est dite sous-analytique si pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage U_x tel que $U_x \cap S$ est une réunion finie de parties de la forme $\pi_1(Y_1) \backslash \pi_2(Y_2)$, où Y_i dénote une variété analytique réelle et $\pi_i : Y_i \to U_x$ est un morphisme analytique *propre*. Les ensembles sous-analytiques admettent toujours des stratifications satisfaisant aux conditions de Whitney, ce sont donc des espaces topologiques stratifiables.

[5] La notation $\overline{\text{supp}}(\Sigma)$ sera utilisée pour dénoter l'adhérence, dans la variété ambiante, du support de la section Σ.

toute autre circonstance $\delta_{T(y)}(S,\Sigma)=0$. Le noyau de $\delta_{T(y)}$ ne contient certainement pas $\mathcal{R}_p(U)$ tout entier, cependant notons $\mathcal{T}(y)$ le sous-module de $\mathcal{CS}'_p(U)$ engendré par les couples (S,Σ) tels que $\delta S \not\ni y$; alors $\ker(\delta_{T(y)}) \supseteq \mathcal{R}_p(U)\cap\mathcal{T}(y)$. Ceci est clair pour les éléments de la forme b) ou c), et pour un élément de la forme a) le seul cas méritant quelque détail est celui où $y\notin\overline{S_1}$ et $y\in S_2$, mais alors $\delta_{T(y)}(S_1,\Sigma_1)=0$ et comme $\mathrm{supp}(\Sigma_2)\subseteq\overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_1)\subseteq\overline{S_1}$, on a $\Sigma_2(y)=0$ donc aussi $\delta_{T(y)}(S_2,\Sigma_2)=0$.

Ces considérations appliquées aux données de départ impliquent que $\delta_{T(y)}(S_0,\Sigma_0)=0$ pour tout germe de variété orientée $T(y)$ en $y\in S_0\backslash\Delta$. En particulier, on peut prendre $T(y)=S_0(y)$ en tant que germe de variété que l'on oriente arbitrairement ; on en déduit que $\Sigma_0\big|_{S_0\backslash\Delta}\equiv 0$ et par densité que $\Sigma_0\equiv 0$.

Nous avons ainsi démontré que le $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{CS}_p(U)$ est sans torsion, il est donc $\mathbb{Z}$-plat. ∎

Soient maintenant $V\subseteq U$ deux ouverts de X. L'application ρ_V^U définie au niveau des couples $(S,\Sigma)\in\mathcal{CS}'_p(U)$ par $\rho_V^U(S,\Sigma)=(S\cap V,\Sigma|_{S\cap V})$, vérifie trivialement $\rho_V^U(\mathcal{CS}'_p(U))\subseteq\mathcal{CS}'_p(V)$ et $\rho_V^U(\mathcal{R}_p(U))\subseteq\mathcal{R}_p(V)$, nous allons donc la considérer définie sur $\mathcal{CS}_p(U)$ et à valeurs dans $\mathcal{CS}_p(V)$. La famille $\{\mathcal{CS}_p(U);\rho_V^U\}$ constitue clairement un préfaisceau sur X que l'on notera $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$.

Lemme 1.2.2

i) Le préfaisceau $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$ est un faisceau de $\mathbb{Z}$-modules plat.

ii) Pour chaque ouvert U de X, on a $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X\big|_U\equiv\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U$.

Démonstration : Soit $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_\alpha$ un recouvrement ouvert de $U\subseteq X$. Pour toute section non nulle $[S,\Sigma]$ de $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$ au-dessus de U, le lemme précédent garantit l'existence d'un $x\in S$ tel que $\Sigma(x)\neq 0$; il s'ensuit, pour la même raison, que la restriction $\rho_{U_\alpha}^U[S,\Sigma]$ sera non nulle dès que $U_\alpha\ni x$. La propriété d'unicité locale pour les préfaisceaux se trouve ainsi vérifiée. Soit maintenant $\{[S_\alpha,\Sigma_\alpha]\in\mathcal{CS}_p(U_\alpha)\}_\alpha$ une famille de sections vérifiant la propriété de compatibilité locale : $\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha\cap U_\beta}[S_\alpha,\Sigma_\alpha]=\rho^{U_\beta}_{U_\alpha\cap U_\beta}[S_\beta,\Sigma_\beta]$ pour tous α et β, et supposons, dans un premier temps, le recouvrement $\mathcal{U}$ localement fini. Notons par S'_α le support de Σ_α (c'est une réunion peut être vide de composantes connexes de S_α), l'ensemble $S=\cup_\alpha S'_\alpha$ est alors une sous-variété localement fermée de dimension p et sous-analytique dans U puisque, par construction, on aura $S\cap U_\alpha=S'_\alpha$, pour tout $x\in U$ et tout α tel que $U_\alpha\ni x$. Une section Σ du faisceau d'orientation de S peut maintenant être définie à partir d'orientations respectives des S_α grâce à la propriété de compatibilité locale. L'élément $[S,\Sigma]\in\mathcal{CS}_p(U)$ est le recollement des $[S_\alpha,\Sigma_\alpha]$ donnés. Le cas où le recouvrement n'est pas localement fini résulte de ce que sur une variété paracompacte la possibilité de recollements localement finis implique toujours le cas général.

On termine la preuve de *i)* en remarquant que la $\underline{\mathbb{Z}}$-platitude du faisceau $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$ est conséquence de la propriété analogue des modules $\Gamma(U;\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X)$ que nous avons établie dans le lemme précédent.

Enfin, l'affirmation *ii)* est claire de par la définition même des modules $\Gamma(U;\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X)=\mathcal{CS}_p(U)$. ∎

Remarque 1.2.3 Les variétés S des symboles $[S, \Sigma] \in \mathcal{CS}_p(U)$ peuvent comporter une infinité de composantes connexes, toutefois ce cardinal sera toujours localement fini par rapport aux points de U puisque S y est sous-analytique.

Posons maintenant $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X = 0$, pour tout entier p strictement négatif. Le reste de cette section sera consacré à donner une caractérisation des faisceaux $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$ qui nous sera utile pour introduire un morphisme *bord* $\delta_p^X : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_{p-1}^X$ pour lequel $(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_\bullet^X, \delta_\bullet^X)$ sera un complexe. Pour cela il nous faut établir au préalable le résultat technique suivant.

Pour toute partie sous-analytique Y de X, notons par ω_Y le complexe dualisant de $\mathcal{D}_c^b(Y)$ et, lorsqu'il s'agira d'une variété topologique, par $\underline{\underline{or}}_Y$ le faisceau d'orientation associé.

Proposition 1.2.4 ([K-S]) *Soit S une partie sous-analytique localement fermée de X de dimension $\leq p$ et de partie régulière $S_{\rm reg}$. Soit S' une partie sous-analytique localement fermée contenue dans S et notons j_S et $j_{S'}$ les injections canoniques de ces ensembles dans X, alors*

i) si S' est fermée dans S, on a une injection canonique

$$j_{S'*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_{S'}) \hookrightarrow j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S)$$

qui est un isomorphisme lorsque $S\backslash S'$ est de dimension $< p$,

ii) lorsque S' est un ouvert dense dans $S_{\rm reg}$, il existe une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S) \longrightarrow j_{S'*}\underline{\underline{or}}_{S'} \longrightarrow j_{(S\backslash S')*}\mathcal{H}^{-p+1}(\omega_{(S\backslash S')}).$$

Démonstration : Commençons par une remarque générale concernant les espaces topologiquement stratifiés Y de dimension p : leur complexe dualisant ω_Y est concentré en degrés supérieurs ou égaux à $-p$.

On voit ceci tout d'abord lorsque Y est une variété topologique, en remarquant que comme le faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^m(\omega_Y)$ est engendré par le préfaisceau $U \mapsto \mathrm{H}^m(U;\omega_Y)$, il suffit de montrer que $\mathrm{H}^m(U;\omega_Y)$ est nul pour des ouverts suffisamment petits lorsque $m < -p$. Or les égalités bien connues

$$\begin{aligned} R\Gamma(U;\omega_Y) &\equiv \mathrm{RHom}^\bullet(\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_U, \omega_Y) \\ &\equiv \mathrm{RHom}^\bullet(R\Gamma_c(U;\mathbb{Z}), \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

nous ramènent à la cohomologie à support compact d'un ouvert contractile que l'on sait bornée supérieurement par la dimension[6]. Dans le cas ou Y n'est pas nécessairement

[6]Il convient de rappeler la remarque classique suivante (*cf.* [Sem], [Ive], [Bor]) : Fixons une résolution injective $I^\bullet$ de l'anneau de base $\mathbb{Z}$ et une résolution c-molle $K^\bullet$du faisceau constant $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_Y$. La correspondance $U \mapsto \mathrm{Hom}(\Gamma_c(K_U^\bullet), I^\bullet)$ constitue un bi-complexe $(*)$ de *faisceaux* injectifis sur Y qui réalise le complexe dualisant ω_Y. Le faisceau $\mathcal{H}^q(\omega_Y)$ est engendré par le préfaisceau $U \mapsto \mathrm{H}^q(U;\omega_Y)$ où le module $\mathrm{H}^q(U;\omega_Y)$ est l'aboutissement de la suite spectrale associée au bi-complexe $(*)$ et dont le terme $E_2^{a,b}$ vaut $\mathrm{Ext}^a(\mathrm{H}_c^{-b}(U;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$. Or si l'ouvert U est suffisament petit, le module $\mathrm{H}_c^b(U;\mathbb{Z})$ est nul si $b \neq p$ et est isomorphe à $\mathbb{Z}$ autrement, de sorte que le seul terme non-trivial de E_2 est $E_2^{0,-p} = \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_c^p(U;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \equiv \mathrm{H}_p(Y, Y\backslash U)$. Enfin comme la restriction à un sous-ouvert V correspond au morphisme naturel de restriction $\mathrm{H}_p(Y, Y\backslash U) \to \mathrm{H}_p(Y, Y\backslash V)$, on conclut que : « *Si Y est une variété topologique de dimension p, le complexe dualisant ω_Y est quasi-isomorphe au faisceau d'orientation décalé* : $\underline{\underline{or}}_Y[\dim(Y)]$. »

régulier notons par $i : Y_1 \to Y$ et $j : Y_{\rm reg} \to Y$ les injections canoniques. On a le triangle exact

$$Ri_*\omega_{Y_1} \longrightarrow \omega_Y \longrightarrow Rj_*\omega_{Y_{\rm reg}} \longrightarrow \tag{3}$$

sur lequel nous pouvons affirmer que $Rj_*\omega_{Y_{\rm reg}}$ sera acyclique en dimension $< -p$ puisque nous venons de voir qu'il en est ainsi de $\omega_{Y_{\rm reg}}$ et que le foncteur j_* est exact à gauche. Comme d'autre part le complexe $i_*\omega_{Y_1}$ est acyclique en dimensions $< -p+1$, par hypothèse de récurrence, notre affirmation sur le complexe ω_Y résultera de considérer la suite exacte longue de cohomologie de faisceaux associée à (3).

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la proposition.

L'injection de *i)* résulte de considérer un triangle analogue à (3), avec $Y_1 = S'$. L'isomorphisme s'explique par le fait que $\omega_{S\backslash S'}$ est concentré en degrés $> -p$.

Enfin, pour *ii)* on remarque que, comme $\widetilde{S} = S\backslash S'$ est un fermé sous-analytique de dimension $< p$, le triangle exact

$$Rj_{\widetilde{S}*}\omega_{\widetilde{S}} \longrightarrow Rj_{S*}\omega_S \longrightarrow Rj_{S'*}\omega_{S'} \longrightarrow$$

donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S) \longrightarrow j_{S'*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_{S'}) \longrightarrow j_{\widetilde{S}*}\mathcal{H}^{-p+1}(\omega_{\widetilde{S}})$$

où $\mathcal{H}^{-p}(\omega_{S'}) \equiv \underline{or}_{S'}$ puisque S' est une variété topologique de dimension p. ∎

Ceci étant notons par $\mathrm{lcls}_p(X)$ l'ensemble des parties sous-analytiques de dimension $\leq p$ et localement fermées dans X. Munissons $\mathrm{lcls}_p(X)$ de la relation $\prec$ définie par : $R \prec S$ si et seulement si, il existe une partie $T \in \mathrm{lcls}_p(X)$, dite de *transition*, telle que

I) T est ouverte dans R et $R\backslash T$ est de dimension $< p$,

II) T est fermée dans S.

Notons $(\mathrm{var}_p(X), \prec)$ le sous-système de $(\mathrm{lcls}_p(X), \prec)$ des parties *lisses* de dimension p dans X.

Proposition 1.2.5 ([K-S])

i) La relation $\prec$ définit un ordre partiel sur $\mathrm{lcls}_p(X)$ filtrant supérieurement. Le sous-système $(\mathrm{var}_p(X); \prec)$ est cofinal dans $(\mathrm{lcls}_p(X); \prec)$.

ii) Etant donnés $R \prec S$ dans $\mathrm{lcls}_p(X)$, il existe un morphisme canonique injectif

$$j_{R*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_R) \hookrightarrow j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S)$$

de sorte que la famille $\{j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S)\}_{S\in\mathrm{lcls}_p(X)}$ est inductive.

iii) On a des isomorphismes canoniques

$$\underline{\mathcal{CS}}_p^X \equiv \varinjlim_{S\in\mathrm{var}_p(X)}{}^{\rm ind}\, j_{S*}\underline{or}_S \equiv \varinjlim_{S\in\mathrm{lcls}_p(X)}{}^{\rm ind}\, j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S).$$

Démonstration : En ce qui concerne l'affirmation i), la transitivité de la relation découle de ce que si $R \prec S$ et $S \prec T$ et si U et V sont respectivement des parties de transition, alors l'ensemble $U \cap V$ est une partie de transition pour $R \prec T$, car son complémentaire dans R est contenu dans $(R\backslash U) \cup (S\backslash V)$ donc est de dimension $< p$; d'autre part elle est clairement fermée dans T puisque U est fermé dans S est que V est un fermé de T *contenu dans* S. Le fait que la relation soit supérieurement filtrante vient de remarquer que pour S et T donnés, on a $S \prec (S\backslash(\overline{T}\backslash T)) \cup (T\backslash(\overline{S}\backslash S))$. Enfin, la relation $S \prec S^p$, où l'on note S^p la strate (peut être vide) de dimension p de S, est toujours vérifiée et prouve le caractère cofinal de $\mathrm{var}_p(X)$ dans $(\mathrm{lcls}_p(X), \prec)$.

Le morphisme de l'affirmation ii) provient de ce que si T est une partie de transition pour $R \prec S$, la proposition précédente garantit l'existence de morphismes injectifs canoniques

$$j_{R*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_R) \lhook\joinrel\longrightarrow j_{T*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_T) \lhook\joinrel\longrightarrow j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S) \tag{4}$$

de sorte que si T' est une autre partie de transition (que l'on peut toujours supposer contenue dans T, puisque si T_1 et T_2 sont de transition il en sera de même de $T_1 \cap T_2$), T' est ouverte et fermée dans T de complémentaire dans T de dimension $< p$. Ainsi les deux flèches naturelles reliant $j_{T*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_T)$ et $j_{T'*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_{T'})$ s'inversent respectivement impliquant l'indépendance du morphisme composé (4).

La seconde équivalence de iii) est conséquence immédiate du caractère cofinal du système $\mathrm{var}_p(X)$ dans $\mathrm{lcls}_p(X)$.

Construisons maintenant un morphisme de faisceaux de $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^X_p$ dans $\lim_{\mathrm{ind}} j_{T*}\underline{\underline{or}}_T$, où T varie dans $\mathrm{lcls}_p(X)$. Soit U un ouvert de X et (S, Σ) un élément de $\mathcal{CS}'_p(U)$. La section Σ du faisceau d'orientation de S détermine un élément du module $\Gamma(W; j_{S*}\underline{\underline{or}}_S)$ pour tout ouvert W de X, mais l'ensemble $S \cap W$ peut ne pas être sous-analytique dans X alors que ceux de $\mathrm{lcls}_p(X)$ doivent l'être. Pour contourner cette difficulté nous allons considérer la famille $\mathcal{U}$ de sous-ouverts V de U, sous-analytiques dans X et tels que $\overline{V} \subseteq U$ —cette condition garantira que les parties $S \cap V$ appartiennent à $\mathrm{lcls}_p(X)$. Ceci étant, on a pour chaque $V \in \mathcal{U}$ et $(S, \Sigma) \in \mathcal{CS}'_p(U)$, un homomorphisme canonique de $\Gamma(V; j_{S*}\underline{\underline{or}}_S)$ à valeurs dans $\lim_{\mathrm{ind}} \Gamma(V; j_{T*}\underline{\underline{or}}_T)$, puis de ce dernier dans $\Gamma(V; \lim_{\mathrm{ind}} j_{T*}\underline{\underline{or}}_T)$; l'assertion ii) ci-dessus implique qu'il s'agit d'*injections*.[7] Leur composée fournit une application $\varphi(U, V) : \mathcal{CS}'_p(U) \to \Gamma(V; \mathcal{L})$ pour chaque $V \in \mathcal{U}$, où par commodité on a noté $\mathcal{L} := \lim_{\mathrm{ind}} j_T\underline{\underline{or}}_T$.

Le sous-module $\mathcal{R}_p(U)$ de $\mathcal{CS}'_p(U)$ est contenu dans le noyau de $\varphi(U, V)$. Pour le voir commençons par prouver que les éléments de $\mathcal{R}_p(U)$ de type c) (*cf.* page 4) sont bien annulés par $\varphi(U, V)$. En effet, les parties S_i de la variété $S = S_1 \coprod S_2$ sont ouvertes et fermées dans S de sorte que $S_i \prec S$ et les inclusions $j^S_{S_i} : S_i \hookrightarrow S$ induiront, dans ce cas, des morphismes canoniques $j^S_{S_i*}\underline{\underline{or}}_{S_i}$ dans $\underline{\underline{or}}_S$ donnant la décomposition $\underline{\underline{or}}_S = j^S_{S_1*}\underline{\underline{or}}_{S_1} \oplus j^S_{S_2*}\underline{\underline{or}}_{S_2}$ qui, grâce aux factorisations $j_{S_i*} = j_{S*} \circ j^S_{S_i*}$, entraîne l'égalité

[7] En effet, soit $\{\mu^\alpha_\beta : \mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{F}_\beta\}$ une famille filtrante supérieurement de faisceaux de modules où les μ^α_β sont *injectifs*. Les morphismes $\mu^\alpha_{\beta,x}$ des germes en $x \in X$ sont alors injectifs et par conséquent les applications canoniques $\mathcal{F}_{\alpha,x} \to \lim_{\mathrm{ind}}(\mathcal{F}_{\beta,x}) = (\lim_{\mathrm{ind}} \mathcal{F}_\beta)_x$ le sont aussi. On en déduit l'injectivité des flèches $\mathcal{F}_\alpha \to \lim_{\mathrm{ind}} \mathcal{F}_\beta$ et donc nécessairement celle des $\Gamma(U; \mathcal{F}_\alpha) \to \Gamma(U; \lim_{\mathrm{ind}} \mathcal{F}_\beta)$, pour tout ouvert U de X. Partant, le morphisme canonique $\lim_{\mathrm{ind}} \Gamma(U; \mathcal{F}_\beta) \to \Gamma(U; \lim_{\mathrm{ind}} \mathcal{F}_\beta)$ est injectif. Enfin, l'injectivité des $\mu^\alpha_\beta(U)$ entraîne celle des $\Gamma(U; \mathcal{F}_\alpha) \to \lim_{\mathrm{ind}} \Gamma(U; \mathcal{F}_\beta)$.

souhaitée : $\varphi(U,V)(S,\Sigma) = \varphi(U,V)(S_1,\Sigma|_{S_1}) + \varphi(U,V)(S_2,\Sigma|_{S_2})$. Une conséquence utile est que pour (S,Σ) donné, on aura $\varphi(U,V)(S,\Sigma) = \varphi(U,V)(S',\Sigma|_{S'})$, où $S' = \mathrm{supp}(\Sigma)$.

Considérons maintenant un terme $(S_1,\Sigma_1) - (S_2,\Sigma_2)$ de $\mathcal{R}_p(U)$ de type a) dans lequel nous pouvons supposer, d'après la remarque précédente, que $S_i = \mathrm{supp}(\Sigma_i)$. Il existe alors un *ouvert* S_3 de complémentaire de dimension $< p$ dans S_i, *id est* $S_i \prec S_3$, tel que par les morphismes canoniques de $j_{S_i *}\underline{\underline{or}}_{S_i} \to j_{S_3 *}\underline{\underline{or}}_{S_3}$, les sections Σ_1 et Σ_2 atteignent la même section du faisceau $\underline{\underline{or}}_{S_3}$puisque l'on a $\overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_i) = \overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_3)$. On conclut que les éléments de type a) sont bien dans le noyau de $\varphi(U,V)$.

Enfin, on vérifie sans difficulté particulière que les éléments de type b) sont aussi annulés.

A présent nous pouvons considérer $\varphi(U,V)$ définie sur $\mathcal{CS}_p(U) = \Gamma(U;\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_p)$. La construction que nous en avons donnée en fait un homomorphisme à valeurs dans le système *projectif* $\{\Gamma(V;\mathcal{L})\}_{V\in\mathcal{U}}$. Or, comme $\mathcal{L}$ est un faisceau de modules, la limite projective de ce système sera précisément $\Gamma(U;\mathcal{L})$. Nous obtenons ainsi un homomorphisme $\varphi(U) := \lim_{\mathrm{proj}} \varphi(U,V) : \Gamma(U;\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_p) \to \Gamma(U;\mathcal{L})$ compatible aux structures de préfaisceau, d'où le morphisme de faisceaux $\varphi : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_p \to \lim_{\mathrm{ind}} j_{T*}\underline{\underline{or}}_T$ promis.

Le morphisme φ est injectif. En effet, le lemme 1.2.1 affirme que chaque élément non nul de $\mathcal{CS}_p(U)$ est décrit par un symbole $[S,\Sigma]$ où Σ n'est pas identiquement nulle. L'élément de $\Gamma(V;j_{S*}\underline{\underline{or}}_S)$ déterminé par Σ sera non nul dès que $V \cap \mathrm{supp}(\Sigma) \neq \emptyset$, auquel cas l'injectivité des flèches nous conduisant vers $\Gamma(V;\lim_{\mathrm{ind}} j_{T*}\underline{\underline{or}}_T)$ garantit la non annulation de cet élément dont l'image sera nécessairement restriction d'une section non nulle de $\Gamma(U;\mathcal{L})$.

Le morphisme φ est surjectif. Soit $x \in X$ et $\sigma \in \mathcal{L}_x$ un germe de section de $\mathcal{L}$ en x. Comme on a $\mathcal{L}_x = \lim_{\mathrm{ind}}(j_{T*}\underline{\underline{or}}_T)_x$, le germe σ provient d'un germe $\tilde{\sigma} \in (j_{T*}\underline{\underline{or}}_T)_x$ pour un certain $T \in \mathrm{lcls}_p(X)$. Il existe alors un voisinage U_x de x et une section $\Sigma \in \Gamma(U_x;j_{T*}\underline{\underline{or}}_T) = \Gamma(T\cap U_x;\underline{\underline{or}}_{T\cap U_x})$, déterminant l'élément $[T\cap U_x,\Sigma] \in \mathcal{CS}_p(U_x)$, qui atteint le germe $\tilde{\sigma}$. La surjectivité annoncée résulte d'observer que l'on a $[\varphi(U_x)([T\cap U_x,\Sigma])]_x = \sigma$, par construction. ∎

1.3 Complexe des faisceaux de chaînes sous-analytiques.

Dans cette section on définit le morphisme de faisceaux $\delta^X_p : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_p \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_{p-1}$, qu'on notera aussi δ_p, annoncé dans la section précédente, nous permettant de munir $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_\cdot$ d'une structure de complexe dont on verra dans la section 1.5 qu'il est quasi-isomorphe à ω_X. L'affirmation *iii*) de la proposition 1.2.5 a emmené M. Kashiwara et P. Schapira à introduire la définition au niveau des faisceaux $j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S)$ pour passer ensuite à la limite inductive. Soit donc $S \in \mathrm{lcls}_p(X)$ et notons $\overline{S}$ sa fermeture topologique dans X et $\delta S = \overline{S}\backslash S$ son *bord topologique*, on remarquera que ce dernier est sous-analytique de dimension $< p$ et *fermé* dans X. Le triangle exact

$$Rj_{\delta S*}\omega_{\delta S} \longrightarrow Rj_{\overline{S}*}\omega_{\overline{S}} \longrightarrow Rj_{S*}\omega_S \longrightarrow$$

et les considérations déjà habituelles sur les dimensions donnent la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_{\overline{S}*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_{\overline{S}}) \longrightarrow j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S) \longrightarrow j_{\delta S*}\mathcal{H}^{-p+1}(\omega_{\delta S}) \tag{5}$$

où le besoin de passer à la limite inductive nous conduit à considérer le sous-système $(\mathrm{cls}_p(X);\prec)$ de $(\mathrm{lcls}_p(X);\prec)$ constitué des parties sous-analytiques *fermées* dans X.

Définissons donc le faisceau $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^X$ des *p-cycles*[8] *sous-analytiques de* X par

$$\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^X := \varinjlim_{S\in \mathrm{cls}_p(X)} {}_{\mathrm{ind}}\, j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S),$$

et remarquons que le morphisme canonique de $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^X$ dans $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$ résultant de l'inclusion $\mathrm{cls}_p(X) \subseteq \mathrm{lcls}_p(X)$, est *injectif* d'après 1.2.5 *ii*).

Reprenons maintenant la construction de δ_p. Il importe de remarquer que les suites (5) vont dépendre *fonctoriellement* de la donnée de $S \in (\mathrm{cls}_p(X); \prec)$ puisque

Lemme 1.3.1 *Soient R et S des éléments de $\mathrm{lcls}_p(X)$, alors*

i) Si $\dim(R) < p$, on a $R \prec S$ pour tout S.

ii) Si R et S sont fermés dans X et si $\dim(R) = p$, on a $R \prec S$ si et seulement si $R \subseteq S$.

iii) Si $R \prec S$, on a $\overline{R} \prec \overline{S}$ et $\delta R \prec \delta S$.

dont la démonstration[9] résulte d'arguments de topologie élémentaire.

Ainsi la limite inductive des suites (5) par rapport aux $S \in \mathrm{lcls}_p(X)$, fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^X \hookrightarrow \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \longrightarrow \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_{p-1}^X \tag{6}$$

où l'injection coïncide avec l'inclusion canonique et l'application de droite nous donne, après composition avec l'inclusion respective de $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_{p-1}^X \subseteq \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_{p-1}^X$, le morphisme $\delta_p : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_{p-1}^X$ vérifiant, par construction, $\delta_{p-1}\circ\delta_p = 0$.

Dans la suite nous allons noter par $(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_\bullet^X; \delta_\bullet^X)$, le complexe de chaînes ainsi obtenu et par $(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_X^\bullet; d_X^\bullet)$ celui des *co-chaînes* où, suivant la convention classique, on pose $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_X^{-m} := \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_m^X$ et $d_X^{-m} := \delta_m^X$. La notation $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_X^m := \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_{-m}^X$ en est alors une conséquence naturelle.

Proposition 1.3.2 ([K-S]) *Soit Φ une famille paracompactifiante*[10] *de la variété X.*

i) $(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_X^\bullet; d_X^\bullet)$ est un complexe de faisceaux Φ-fins, en particulier acycliques pour les foncteurs de sections à support dans Φ.

ii) $\ker(d_X^m) = \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_X^m$.

iii) Pour chaque ouvert U de X, on a $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_X^\bullet|_U \equiv \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_U^\bullet$ et $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_X^m|_U \equiv \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_U^m$.

[8] Cette terminologie sera justifiée par la proposition 1.3.2 *ii*).

[9] Démontrons *iii*) à titre d'exemple. D'après *i*) il suffit d'analyser le cas où $\dim(R) = p$. La conclusion $\overline{R} \subseteq \overline{S}$ est alors immédiate. Supposons maintenant $\dim(\delta R) = p-1$ et prouvons que $\delta R \subseteq \delta S$. Notons T la partie de transition et soit $x \in \overline{R}\backslash R$, alors $x \in \overline{T} \subseteq \overline{S}$ et si on avait $x \in S$ il s'ensuivrait que $x \in T$ puisque T est fermé dans S, ce qui est contradictoire ; par conséquent $x \in \overline{S}\backslash S$.

[10] On appelle ainsi toute famille Φ de fermés de X vérifiant :
a) Φ est stable par réunion finie,
b) si $S \in \Phi$ et si S' est un fermé de X contenu dans S, alors $S' \in \Phi$,
c) pour chaque S dans Φ, il existe un élément S' de Φ, voisinage de S dans X,
confer [God] 3.2 page 150.

Démonstration : Pour prouver *i*) commençons par démontrer que $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^p_X$ est fin. Soient donc φ_1 et φ_2 deux fermés disjoints de X et considérons un voisinage ouvert W de φ_1 sous-analytique dans X et tel que $\overline{W} \cap \varphi_2 = \emptyset$. Ceci est possible puisque tout point admet une base de voisinages sous-analytiques dans X et que de tout recouvrement ouvert de φ_1 par des ouverts sous-analytiques de X et d'adhérence disjointe de φ_2, on peut extraire un sous-recouvrement localement fini *dans* X, donc de réunion sous-analytique dans X et d'adhérence disjointe de φ_2. Le morphisme canonique

$$j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S) \to j_{(S\cap W)*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_{(S\cap W)})$$

induit alors un endomorphisme ρ_W de $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^p_X$ vérifiant, par construction, $\rho_W\big|_{\varphi_1} = \mathrm{id}$ et $\rho_W\big|_{\varphi_2} = 0$ ce qui équivaut au fait que $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^p_X$ est fin (*cf.* [God] II 3.7). Le passage de « fin » à « Φ-fin » se fait sans difficulté puisque cela revient à démontrer que les restrictions $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^p_X\big|_\varphi$ sur chaque $\varphi \in \Phi$ sont fines, cas auxquels la même démonstration peut être appliquée.

L'affirmation *ii*) découle immédiatement de la suite exacte (6) et *iii*) est triviale (*cf.* lemme 1.2.2). ∎

1.4 Explicitation du morphisme bord.

L'introduction du morphisme δ_p par l'intermédiaire de l'isomorphisme $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_p \equiv \lim_{\text{ind}} j_{S*}\underline{or}_S$ présente un certain nombre d'avantages formels dont l'intérêt est manifeste, cependant elle ne fournit pas de description suffisamment transparente des morphismes $\delta_p(U) : \mathcal{CS}_p(U) \to \mathcal{CS}_{p-1}(U)$; le but de la présente section est de combler cette absence.

Soit U un ouvert de X et définissons le morphisme $\Delta'_p(U) : \mathcal{CS}'_p(U) \to \mathcal{CS}'_{p-1}(U)$ par le procédé suivant, inspiré bien évidemment de la définition de δ_p. Pour $(S, \Sigma) \in \mathcal{CS}'_p(U)$, fixons une stratification topologique du bord $\delta S = \overline{S}\backslash S$ de S dans U, et notons $S^\natural$ sa partie régulière. L'ensemble $\widehat{S} := S^\natural \coprod S$ est sous-analytique dans U et la filtration $\widehat{S} \supseteq S^\natural \supseteq \emptyset$ donne une stratification dont la partie régulière est réalisée par S. Notons $i_{S^\natural} : S^\natural \hookrightarrow \widehat{S}$ et $i_S : S \hookrightarrow \widehat{S}$ les inclusions canoniques, une suite exacte de même nature que (5) fournit un morphisme naturel, auquel on référera éventuellement par la notation imprécise ∂, reliant les faisceaux $i_{S*}\underline{or}_S$ et $i_{S^\natural *}\underline{or}_{S^\natural}$; il associe à la section Σ une certaine section $\Sigma^\natural$ de $\underline{or}_{S^\natural}$ —que l'on explicitera ultérieurement. Posons alors $\Delta'_p(U)(S, \Sigma) := (S^\natural, \Sigma^\natural)$ et prolongeons à $\mathcal{CS}'_p(U)$ par linéarité.

On observera que cette définition dépend intimement des choix (arbitraires) des stratifications des ensembles δS ; le morphisme $\Delta'_p(U)$ à toutefois un sens bien canonique sur le module quotient $\mathcal{CS}_p(U)$, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.4.1

i) $\Delta'_p(U)(\mathcal{R}_p(U)) \subseteq \mathcal{R}_{p-1}(U)$.

ii) *Le morphisme* $\Delta_p(U) : \mathcal{CS}_p(U) \to \mathcal{CS}_{p-1}(U)$, *induit par* $\Delta'_p(U)$, *est canonique et compatible aux restrictions aux sous-ouverts de* U.

iii) *Le morphisme de faisceaux* $\Delta_p : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_p \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_{p-1}$, *défini par les* $\Delta_p(U)$, *coïncide avec le morphisme* δ_p.

Démonstration : Considérons le composé $\Delta_p^\natural(U)$ de $\Delta'_p(U)$ et de la projection canonique de $\mathcal{CS}'_{p-1}(U)$ sur $\mathcal{CS}_{p-1}(U)$, et prouvons dans un premier temps qu'il est indépendant des choix des stratifications des différents δS. En effet, soit $(S,\Sigma)\in\mathcal{CS}'_p(U)$ et soient $S_a^\natural$ et $S_b^\natural$ deux parties régulières de δS de complémentaires de dimension $<p-1$, de δS, que nous pouvons toujours supposer vérifier $S_a^\natural\supseteq S_b^\natural$. Il s'ensuit une inclusion ouverte $\widehat{S}_a\supseteq\widehat{S}_b$ qui respecte les stratifications de ces ensembles considérées dans la définition de $\Delta'_p(U)$. Les morphismes de restriction définissent alors un morphisme de triangles exacts dans $\mathcal{D}^b_c(\widehat{S}_a)$

$$\begin{array}{ccccccc}
i_{S_a^\natural *}\omega_{S_a^\natural} & \longrightarrow & \omega_{\widehat{S}_a} & \longrightarrow & i_{S*}\omega_S & \longrightarrow \\
\downarrow{\scriptstyle \text{rest}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{rest}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{id}} & \\
i_{S_b^\natural *}\omega_{S_b^\natural} & \longrightarrow & i_{\widehat{S}_b *}\omega_{\widehat{S}_b} & \longrightarrow & i_{S*}\omega_S & \longrightarrow
\end{array}$$

où nous avons généralisé la notation de manière évidente et qui donne en cohomologie le diagramme commutatif de faisceaux de modules sur $\widehat{S}_a$

$$\begin{array}{ccc}
i_{S*}\underline{\underline{or}}_S & \xrightarrow{\partial} & i_{S_a^\natural *}\underline{\underline{or}}_{S_a^\natural} \\
\downarrow{\scriptstyle \text{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_b^a} \\
i_{S*}\underline{\underline{or}}_S & \xrightarrow{\partial} & i_{S_b^\natural *}\underline{\underline{or}}_{S_b^\natural}
\end{array}$$

où la restriction ρ_b^a est injective puisque $\dim(S_a^\natural\backslash S_b^\natural)<p-1$. Par conséquent, on aura $\overline{\text{supp}}(\Sigma_b^\natural)=\overline{\text{supp}}(\Sigma_b^\natural)$ et donc $[S_a^\natural,\Sigma_a^\natural]=[S_b^\natural,\Sigma_b^\natural]$, ce qui prouve le caractère canonique de $\Delta_p^\natural(U)$ annoncé.

Ceci étant montrons l'inclusion $\mathcal{R}_p(U)\subseteq\ker(\Delta_p^\natural(U))$. Commençons par les éléments de $\mathcal{R}_p(U)$ de type c) (*cf.* page 4). Soit donc $S=S_1\coprod S_2$, de sorte que $\delta S=\delta S_1\cup\delta S_2$, et fixons des parties régulières $S_i^\natural$ de complémentaires dans δS_i respectivement de dimensions $<p-1$. Posons alors $S^\natural:=S_1^\natural\cup S_2^\natural$ et remarquons que l'on peut toujours supposer $S_i^\natural$ ouvert et *fermé* dans $S^\natural$ quitte à enlever des parties de dimension $<p-1$. Les observations du paragraphe précédent permettent d'utiliser ces éléments pour le calcul des images de $\Delta_p^\natural(U)$; notons donc $\Delta_p^\natural(U)(S_1\coprod S_2,\Sigma_1\coprod\Sigma_2)=[S^\natural,\Sigma^\natural]$ et $\Delta_p^\natural(U)(S_i,\Sigma_i)=[S_i^\natural,\Sigma_i^\natural]$. Les partitions en ouverts fermés : $S^\natural=(S_1^\natural\backslash S_2^\natural)\coprod(S_1^\natural\cap S_2^\natural)\coprod(S_2^\natural\backslash S_1^\natural)$, et *mutatis mutandis* pour $S_i^\natural$, réduisent la vérification de l'égalité $[S^\natural,\Sigma^\natural]=[S_1^\natural,\Sigma_1^\natural]+[S_2^\natural,\Sigma_2^\natural]$ à simplement

$$[S_{12}^\natural,\Sigma^\natural\big|_{S_{12}^\natural}]=[S_{12}^\natural,\Sigma_1^\natural\big|_{S_{12}^\natural}]+[S_{12}^\natural,\Sigma_2^\natural\big|_{S_{12}^\natural}],$$

où $S_{12}^\natural:=S_1^\natural\cap S_2^\natural$. Egalité que l'on démontre en considérant la stratification de l'ensemble $L:=S\coprod S_{12}^\natural$ donnée par la filtration $L\supseteq S_{12}^\natural\supseteq\emptyset$, pour laquelle on a le diagramme de faisceaux de modules sur L

$$\begin{array}{ccc}
i_{S*}\underline{\underline{or}}_S & \xrightarrow{\partial} & i_{S_{12}^\natural *}\underline{\underline{or}}_{S_{12}^\natural} \\
\uparrow{\scriptstyle \equiv} & & \uparrow{\scriptstyle \text{id}} \\
i_{S_1*}\underline{\underline{or}}_{S_1}\oplus i_{S_2*}\underline{\underline{or}}_{S_2} & \xrightarrow{\partial_1+\partial_2} & i_{S_{12}^\natural *}\underline{\underline{or}}_{S_{12}^\natural}
\end{array}$$

dont découle aisément la conclusion. Tout élément de type c) de $\mathcal{R}_p(U)$ est ainsi annulé par $\Delta_p^\natural(U)$, en particulier $\Delta_p^\natural(U)(S,\Sigma)=\Delta_p^\natural(U)(S',\Sigma\big|_{S'})$, où $S'=\text{supp}(\Sigma)$.

Considérons à présent des éléments (S_1, Σ_1) et (S_3, Σ_3) de $\mathcal{CS}'_p(U)$ vérifiant les conditions stipulées par la définition des termes de $\mathcal{R}_p(U)$ de type a). On peut supposer comme d'habitude S_3 ouvert dans S_1 et même, d'après la remarque du paragraphe précédent, que $\overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_3) = \overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_1) = \overline{S_1}$. Nous avons alors une inclusion $\delta S_1 \subseteq \delta S_3$; munissons ces ensembles de stratifications et notons Z la réunion de leur singularité, c'est une partie sous-analytique fermée de codimension ≥ 2 dans $\overline{S_1}$. Posons $Y := \overline{S_1} \backslash Z$, alors pour toute partie sous-analytique $A \subseteq \overline{S_1}$, la dimension de Z fait que les morphismes de faisceaux de restriction de $R^q i^Y_{A*}\omega_A$ vers $R^q i^Y_{(A\backslash Z)*}\omega_{(A\backslash Z)}$ seront des isomorphismes pour $q = -p$ et des monomorphismes pour $q = -p+1$, en particulier ils préservent les adhérences des supports des sections. Or, comme la définition de $\Delta'_p(U)$ ne fait intervenir que des faisceaux de cohomologie en degrés $\leq -p+1$, on comprend que l'on peut supposer, sans perte de validité de nos conclusions concernant les supports, que notre espace ambiant est Y. Dans ce cas l'inclusion $\delta S_3 \supseteq \delta S_1$ concerne des parties lisses et on peut poser $S_i^\natural := \delta S_i$ où le point important à signaler est que $S_1^\natural$ sera ainsi ouverte et *fermée* dans $S_3^\natural$. On aura alors un morphisme de suites exactes longues de faisceaux sur Y

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{H}^{-p}(\omega_Y) & \longrightarrow & i_{S_1*}\underline{or}_{S_1} & \xrightarrow{\partial} & i_{S_1^\natural *}\underline{or}_{S_1^\natural} & ; & \Sigma_1 & \overset{\partial}{\longmapsto} & \Sigma_1^\natural \\
 & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \mathrm{rest} & & \downarrow \mathrm{inc} & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{H}^{-p}(\omega_Y) & \longrightarrow & i_{S_3*}\underline{or}_{S_3} & \xrightarrow{\partial} & i_{S_3^\natural *}\underline{or}_{S_3^\natural} & ; & \Sigma_3 & \overset{\partial}{\longmapsto} & \Sigma_3^\natural
\end{array}$$

impliquant aussitôt l'inclusion $\overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_3^\natural) \subseteq \overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_1^\natural)$. La naturalité des diagrammes considérés et une « chasse aux diagrammes » élémentaire montrent la relation de contenance réciproque qui prouve l'égalité $[S_1^\natural, \Sigma_1^\natural] = [S_3^\natural, \Sigma_3^\natural]$ souhaitée.

Comme les éléments de $\mathcal{R}_p(U)$ de type b) sont évidemment annulés par $\Delta_p^\natural(U)$, ces considérations terminent la démonstration des assertions *i*) et *ii*) de la proposition.

L'affirmation *iii*) résulte trivialement, par une étude au niveau des germes de sections, des définitions des morphismes de faisceaux Δ_p et δ_p. ∎

Donnons-nous maintenant un élément $[S, \Sigma]$ de $\mathcal{CS}_p(U)$ et soit $\delta_p(U)[S, \Sigma] = [S^\natural, \Sigma^\natural]$ pour une certaine stratification de δS ; nous allons aborder à présent le problème de l'explicitation de $\Sigma^\natural(x)$ en chaque point $x \in S^\natural$. L'idée est de remarquer que comme nos constructions sont fonctorielles par rapport aux restrictions, la détermination de $\Sigma^\natural(x)$ ne dépendra que du germe de (S, Σ) en x. Or, nous avons déjà remarqué (*cf.* section 1.1) que la situation locale de $S^\natural$ dans $\overline{S}$ est celle de $S^\natural \times \{s\}$ dans $S^\natural \times \mathring{c}(L^0)$, où L^0 est un ensemble fini de points $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_r\}$ et s est le sommet du cône ouvert $\mathring{c}(L^0)$. Dans cette perspective nous aurons, localement, $\widehat{S} = \overline{S}$ et S pourra s'identifier à la réunion disjointe $S = \coprod_{i=1}^r S^\natural \times \{\lambda_i\} \times]0,1[$. Notons $S_i := S^\natural \times \{\lambda_i\} \times]0,1[$, c'est une partie ouverte et fermée de S ; les inclusions canoniques $i^S_{S_i} : S_i \hookrightarrow S$ donnent lieu, dans ce cas, à une décomposition $\underline{or}_S = \oplus_{i=1}^r i^S_{S_i *}\underline{or}_{S_i}$ qui permet d'exprimer le morphisme ∂ comme une somme finie $\partial = \Sigma_{i=1}^r \partial_i$. L'inclusion fermée $\overline{S_i} \subseteq \overline{S}$ et la naturalité du morphisme de

foncteurs $\underline{\Gamma}_{\overline{S}_i} \to \mathrm{id}$ donnent lieu à un morphisme de triangles exacts dans $\mathcal{D}^b_c(\overline{S})$

$$\begin{array}{ccccccc} i_{S^\natural *}\omega_{S^\natural} & \longrightarrow & \omega_{\overline{S}} & \longrightarrow & i_{S*}\omega_S & \longrightarrow \\ \uparrow \equiv & & \uparrow \mathrm{inc} & & \uparrow \mathrm{inc} & \\ i_{S^\natural *}\omega_{S^\natural} & \longrightarrow & i_{\overline{S}_i *}\omega_{\overline{S}_i} & \longrightarrow & i_{S_i *}\omega_{S_i} & \longrightarrow \end{array}$$

dont on déduit, en cohomologie, le diagramme commutatif de faisceaux sur $\overline{S}$

$$\begin{array}{ccc} i_{S*}\underline{\underline{or}}_S & \xrightarrow{\partial} & i_{S^\natural *}\underline{\underline{or}}_{S^\natural} \\ \uparrow \mathrm{inc} & & \uparrow \mathrm{id} \\ i_{S_i *}\underline{\underline{or}}_{S_i} & \xrightarrow{\partial_i} & i_{S^\natural *}\underline{\underline{or}}_{S^\natural} \end{array}$$

Mais $\overline{S_i}$ est une variété à bord $S^\natural$ et, dans ce cas, ∂_i n'est autre que le prolongement linéaire et faisceautique de l'application qui associe à une orientation de S_i l'orientation induite sur $S^\natural$. Dans la suite on appellera *section induite* de (S_i, Σ_i) sur $S^\natural$, la section de $\underline{\underline{or}}_{S^\natural}$ ainsi obtenue à partir de Σ_i.

Ces considérations constituent la démonstration du lemme

Lemme 1.4.2 *Soit $[S, \Sigma] \in \mathcal{CS}_p(U)$. Dans la correspondance $\delta_p(U)[S, \Sigma] = [S^\natural, \Sigma^\natural]$, la valeur de $\Sigma^\natural(x)$ pour $x \in S^\natural$, est obtenue en additionnant les contributions des sections induites par les différentes composantes du germe de (S, Σ) en x.*

1.5 Généralités sur le complexe de chaînes sous-analytiques.

Proposition 1.5.1 ([K-S]) *Soit X une variété analytique réelle. Le complexe $(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^\cdot_X, d^\cdot)$ de chaînes sous-analytiques de X, est acyclique en tout degré différent de $-\dim(X)$ et le faisceau $\mathcal{H}^{-\dim(X)}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^\cdot_X)$ s'identifie canoniquement à $\underline{\underline{or}}_X$.*

Démonstration : Je décris dans ces lignes la démonstration présentée dans [K-S]. Notons n la dimension réelle de X. Le lemme 1.3.2 affirme que $\mathcal{H}^{-n}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^\cdot_X) = \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}^X_n := \varinjlim_{\mathrm{ind}} j_{S*}\mathcal{H}^{-n}(\omega_S)$, où S parcourt le système $(\mathrm{cls}_n(X), \prec)$, mais la variété X réalise l'élément maximal de ce système, on a donc bien $\mathcal{H}^{-n}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^\cdot_X) = \mathcal{H}^{-n}(\omega_X) \equiv \underline{\underline{or}}_X$.

Prouvons maintenant l'acyclicité de $(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^\cdot_X, d^\cdot)$ en degré $p > -n$. Soit σ un germe de p-cycle en $x \in X$ et prenons-en un représentant local $[S, \Sigma]$. Supposons provisoirement l'existence d'un morphisme *propre* $f : [0, \infty[\times\overline{S} \to X$ tel que $f(0, \cdot) \equiv \mathrm{id}_{\overline{S}}$ et notons $T =]0, \infty[\times S$, de sorte que $\delta T = \{0\} \times \overline{S} \cup [0, \infty[\times \delta S$ et $\overline{T} = [0, \infty[\times\overline{S}$; soient $i : \delta T \to \overline{T}$ et $j : T \to \overline{T}$ les injections canoniques. Le triangle exact des complexes dualisants associé à la donnée (i, j) fournit, après restriction à la partie régulière de δT concernée par la notation suivante, un morphisme $\partial : j_*(\underline{\underline{or}}_{]0,\infty[} \boxtimes \underline{\underline{or}}_S) \to i_*(\underline{\underline{or}}_{\{0\}\times S} \oplus \underline{\underline{or}}_{]0,\infty[\times\tilde{S}})$ qui associe à la section $\mu \otimes \Sigma$, où μ désigne l'orientation décroissante de $]0, \infty[$, la section $(\partial\mu \otimes \Sigma, -\mu \otimes \partial\Sigma) \equiv (\Sigma, 0)$. D'autre part l'application du foncteur image directe f_*

donne lieu à un morphisme de triangles exacts

$$\begin{array}{ccccccc} f_*i_*\omega_{\delta T} & \longrightarrow & f_*\omega_{\overline{T}} & \longrightarrow & f_*j_*\omega_T & \longrightarrow \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & \\ j_{f(\delta T)*}\omega_{f(\delta T)} & \longrightarrow & j_{\overline{T}*}\omega_{\overline{T}} & \longrightarrow & j_{Z*}\omega_Z & \longrightarrow \end{array}$$

où $Z = f(\overline{T})\backslash f(\delta T)$ et où α et β sont les flèches naturelles et γ provient de composer la restriction ouverte de T à $T' := T \cap f^{-1}(Z)$ avec le morphisme canonique de $f_*\omega_{T'}$ vers ω_Z découlant de la propreté de $f : T' \to Z$. On observera aussi que les ensembles $f(\delta T)$, $f(\overline{T})$ et Z appartiennent respectivement à $\mathrm{cls}_p(X)$, $\mathrm{cls}_{p+1}(X)$ et $\mathrm{lcls}_{p+1}(X)$ puisque f est propre. Nous en concluons que l'image de $(\Sigma, 0)$ dans le faisceau $j_*\mathcal{H}^{-p}(j_{f(\delta T)*}\omega_{f(\delta T)})$, et par passage à la limite inductive, dans $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}_p^X$, est un bord dont le germe coïncide avec σ.

Partant la démonstration sera terminée si l'on prouve l'existence locale du morphisme f. Pour ceci les auteurs de [K-S] remarquent l'existence d'une décomposition de X au voisinage de x en produit de variétés $\mathbb{R} \times Y$ de sorte que la projection $p_2 : X \to Y$ est propre sur $\overline{S}$. L'application $f : [0, \infty[\times \overline{S} \to X$ définie par $f(t, (s, y)) = (t + s, y)$ satisfait alors aux conditions exigées. ∎

Corollaire 1.5.2 *Il existe un isomorphisme canonique dans $\mathcal{D}^b_c(X)$ entre les complexes ω_X et $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^{\bullet}_X$.*

A présent nous allons généraliser les objets introduits dans les sections précédentes dans deux directions : en définissant le complexe $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^{\bullet}_S$ pour toute partie S sous-analytique et localement fermée de X et en considérant des coefficients autres que $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_X$.

Abordons d'abord la construction des complexes $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^{\bullet}_S$. Soit S une partie sous-analytique localement fermée de X et soit $j : S \hookrightarrow X$ l'injection canonique. Notons $j^!_S$ le foncteur qui associe à un faisceau de modules $\mathcal{F}$ sur X, le faisceau $j^!_S(\mathcal{F})$ sur S, engendré par les sections de $\mathcal{F}$ à support contenu dans S, c'est un foncteur exact à gauche. Posons pour chaque entier p

$$\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}_p^S := j^!_S(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}_p^X) \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}_p^S := j^!_S(\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}_p^X)$$

et conservons la convention $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}_S^{-p} := \underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}_p^S$ et $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}_S^{-p} := \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}_p^S$.

Lorsque l'ensemble S est une partie ouverte de la variété X nous avons ainsi deux définitions possibles du faisceau $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}_p^U$, leur cohérence découle de l'égalité classique entre les foncteurs $j^!_U$ et j_U^{-1}. D'autre part, dans la situation général, l'objet $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}_p^S$ paraît dépendre du plongement $S \hookrightarrow X$; nous verrons dans la proposition suivante que cela n'est pas le cas, tout au moins en tant qu'objet de $\mathcal{D}^b_c(S)$.

Proposition 1.5.3 *Soient S une partie sous-analytique localement fermée et Φ une famille paracompactifiante de la variété X. Soit p un entier quelconque.*

i) Le faisceau $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}_p^S$ est un $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_S$-module plat et $\Phi|_S$-fin.

ii) $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}_p^S = \ker(\delta_p^S : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}_p^S \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}_{p-1}^S)$.

iii) *Le faisceau* $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$ *est* $j_S^!$*-acyclique,* i.e. *le morphisme canonique entre le module* $j_S^!(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X)$ *concentré en degré zéro et le complexe* $Rj_S^!(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X)$*, est un isomorphisme dans* $\mathcal{D}_c^b(S)$*.*

iv) *Il existe un isomorphisme canonique dans* $\mathcal{D}_c^b(S)$ *entre* ω_S *et* $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_S^{\cdot}$*.*

Démonstration : La partie non-triviale de l'affirmation *i*) est classique.[11] Pour prouver *ii*) remarquons que, d'après la proposition 1.5.1, nous avons des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^X \longrightarrow \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \longrightarrow \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_{p-1}^X \longrightarrow 0$$

pour tout $p \geq -\dim(X)$, de sorte qu'en leur appliquant le foncteur exact à gauche $j_S^!$, on obtient aisément l'identification entre $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S$ et le noyau de $\delta_p^S : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_{p-1}^S$, pour tout entier p.

Pour ce qui est des autres affirmations, il suffira de nous limiter à developper le cas où S est fermée. Commençons donc par remarquer qu'alors les suites

$$0 \longrightarrow j_{S*}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S \longrightarrow \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \longrightarrow j_{U*}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U \longrightarrow 0,$$

où $U = X \backslash S$, sont exactes. En effet, la surjectivité sur le terme de droite provient de ce que si $[S, \Sigma]$ est une section de $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U$, il existe en chaque point $x \in U$ un voisinage V tel que $\overline{V} \subseteq U$ et $\overline{V}$ est sous-analytique dans X ; la section $[S \cap V, \Sigma|_{S\cap V}]$ est alors trivialement une section de $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$. On observera que l'exactitude de ces suites est aussi assurée si l'on remplace les faisceaux $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$ par des faisceaux injectifs (car flasques) ; ceci signifie que si l'on fixe une résolution injective $\rho : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \to \mathcal{I}^{\cdot}$, l'application de la suite de foncteurs $j_{S*}j_S^! \to \mathrm{id} \to j_{U*}j_U^{-1}$ au morphisme de complexes ρ se traduira en un morphisme de triangles exacts

$$\begin{array}{ccccccc}
j_{S*}j_S^!\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X & \longrightarrow & j_{U*}j_U^{-1}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X & \longrightarrow \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow & \\
j_{S*}Rj_S^!\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X & \longrightarrow & Rj_{U*}j_U^{-1}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X & \longrightarrow
\end{array}$$

et l'isomorphisme annoncé dans *iii*) sera conséquence de ce que $j_{U*}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U \to Rj_{U*}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U$ est un quasi-isomorphisme puisque $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U$ est j_{U*}-acyclique. Pour voir ce dernier point on peut utiliser le fait que $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U$ est fin ; les modules de cohomologie $\mathrm{H}^i(V; \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U)$ s'annulent alors pour $V \subseteq U$ et $i > 0$ et comme ils engendrent les faisceaux $R^i j_{U*}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U$, ces derniers sont nuls pour $i > 0$.

L'affirmation *iv*) résulte immédiatement de *iii*) et du corollaire 1.5.2. ∎

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathbb{Z}$-modules sur une partie sous-analytique localement fermée S de la variété X. Dans la suite on appellera *faisceau de p-chaînes sous-analytiques de* S *à coefficients dans* $\mathcal{F}$, le faisceau

$$\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S(\mathcal{F}) := \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S \otimes_{\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_S} \mathcal{F},$$

[11] Elle découle de Théorème 3.5.5 et section 3.7 dans [God].

et *faisceau de p-cycles sous-analytiques de S à coefficients dans* $\mathcal{F}$, le faisceau $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}^S_p(\mathcal{F}) := \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}^S_p \otimes_{\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_S} \mathcal{F}$.

Lemme 1.5.4 *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau de modules sur une partie sous-analytique localement fermée* S *d'une variété analytique réelle* X.

i) Il existe un isomorphisme canonique dans $\mathcal{D}^b_c(S)$ *entre* $\omega_S \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{F}$ *et* $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^{\cdot}_S(\mathcal{F})$.[12]

ii) $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}^S_p(\mathcal{F})$ *est un sous-module de* $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^S_p(\mathcal{F})$ *et le noyau du morphisme bord* $\delta^S_p(\mathcal{F}) : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^S_p(\mathcal{F}) \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^S_{p-1}(\mathcal{F})$ *contient* $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}^S_p(\mathcal{F})$ *et vérifie*

$$\ker(\delta^S_p(\mathcal{F}))/\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}^S_p(\mathcal{F}) \equiv \mathcal{T}or^{\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_S}_1(\mathcal{H}^{-p+1}(\omega_S), \mathcal{F}).$$

Démonstration : Nous avons déjà remarqué dans le lemme 1.2.2 que les faisceaux $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^X_p$ sont des $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_X$-modules plats, il s'ensuit que les sous-modules $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^S_p$ le sont aussi et l'assertion *i)* est alors conséquence directe de *iv)* dans la proposition 1.5.3.

Pour l'assertion *ii)* rappelons que d'après cette même proposition 1.5.3, le noyau de $\delta^S_p : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^S_p \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^S_{p-1}$ s'identifie à $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}^S_p$ et notons $\underline{\underline{\mathcal{BS}}}{}^S_{p-1}$ le module image du morphisme δ^S_p, c'est un $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_S$-module plat intervenant dans les suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}^S_p & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^S_p & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{BS}}}{}^S_{p-1} & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{BS}}}{}^S_{p-1} & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}^S_{p-1} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{-p+1}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^{\cdot}_S) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont on tire, après tensorisation par $\mathcal{F}$, le diagramme de suites exactes verticales et horizontales :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & \mathcal{T}or^{\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_S}_1(\mathcal{H}^{-p+1}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^{\cdot}_S), \mathcal{F}) & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}^S_p(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^S_p(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha} & \underline{\underline{\mathcal{BS}}}{}^S_{p-1} \otimes \mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow \beta & & \\ & & & & 0 & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}^S_{p-1}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\gamma} & \underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^S_{p-1}(\mathcal{F}) \end{array}$$

où $\gamma \circ \beta \circ \alpha = \delta^S_p(\mathcal{F})$, qui prouve l'équivalence annoncée :

$$\ker(\delta^S_p(\mathcal{F}))/\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}^S_p(\mathcal{F}) \equiv \mathcal{T}or^{\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_S}_1(\mathcal{H}^{-p+1}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}{}^{\cdot}_S), \mathcal{F})$$

et permet de compléter la démonstration du lemme. ∎

Remarque 1.5.5 Ce lemme, dans l'affirmation *ii)*, met en évidence l'inadéquation de la terminologie attachée aux modules $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}^S_p(\mathcal{F})$ puisque l'inclusion $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}{}^S_p(\mathcal{F}) \subseteq \ker(\delta^S_p(\mathcal{F}))$

[12] La dérivation du produit tensoriel est inévitable pour $\mathcal{F}$ quelconque. Par exemple, si S est réduite à un point, on a $\omega_\bullet = (0 \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0)$ et la cohomologie en degré zéro du complexe $\omega_\bullet \otimes F$ est le module $\mathrm{coker}(\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, F) \hookrightarrow F)$ où $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, F)$ est généralement non nul.

sera généralement stricte[13]. Toutefois, si $\mathcal{F}$ est plat ou bien si S est une variété, cas auxquels nous allons appliquer ces considérations, l'égalité entre ces modules est assurée.

On termine maintenant ces préliminaires en rappelant la notation introduite par M. Kashiwara dans [K-1] et [K-2] ; il pose por chaque entier p et tout faisceau $\mathcal{F}$ de modules sur S :

$$\mathrm{H}^{\inf}_p(S;\mathcal{F}) := \mathrm{H}^{-p}\Big(S;\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\cdot}_S(\mathcal{F})\Big) = \mathrm{H}^{-p}(S;\omega_S \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{F})$$

et appelle ce groupe *le p-ième groupe d'homologie de chaînes localement finies de S à valeurs dans $\mathcal{F}$* (*cf.* Remarque 1.2.3 en page 6).

Voici maintenant un résultat auquel on référera dans le §2 de cet exposé.

Lemme 1.5.6 *Soient $\mathcal{P}$ un module plat et $\mathcal{L}$ un système local sur la variété analytique réelle X. Soit Y une partie sous-analytique fermée de X et notons j_Y l'injection canonique de Y dans X, on a alors*

$$\begin{aligned} R\Gamma\Big(X;R\underline{\underline{\Gamma}}_Y(\mathcal{L})\otimes\mathcal{P}\Big) &\equiv \Gamma\Big(X;j_{Y*}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\cdot}_Y)\otimes\underline{\underline{or}}_X\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{P}\Big)[-\dim(X)] \\ &\equiv \Gamma\Big(Y;\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\cdot}_Y\otimes j_Y^{-1}(\underline{\underline{or}}_X\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{P})\Big)[-\dim(X)]. \end{aligned}$$

Démonstration : Comme $\mathcal{L}$ est un système local et que l'on a $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_X \equiv \underline{\underline{or}}_X \otimes \underline{\underline{or}}_X$, l'équivalence $R\underline{\underline{\Gamma}}_Y(\mathcal{L}) \equiv R\underline{\underline{\Gamma}}_Y(\underline{\underline{or}}_X)\otimes\underline{\underline{or}}_X\otimes\mathcal{L}$ découle aussitôt, d'autre part

$$R\underline{\underline{\Gamma}}_Y(\underline{\underline{or}}_X) \equiv j_{Y*}Rj_Y^{!}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\cdot}_X)[-\dim(X)]$$

et d'après la proposition précédente, on obtient dans $\mathcal{D}^b_c(X)$

$$R\underline{\underline{\Gamma}}_Y(\mathcal{L})\otimes\mathcal{P} \equiv j_{Y*}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\cdot}_Y)\otimes\underline{\underline{or}}_X\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{P}[-\dim(X)].$$

dont découle le lemme en utilisant le fait que les faisceaux du complexe $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\cdot}_Y$ sont fins. ■

2 Correspondance de Hirai

Dans le but d'introduire, sous la forme la plus générale possible, les éléments de ce que nous pourrions appeler la Théorie des Chaînes Sous-Analytiques, nous avons considéré dans le §1 de cet exposé l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs comme anneau de base ; dans la

[13] En effet, le module $\mathcal{H}^*(\omega_S)$ peut avoir de la torsion. Par exemple, soit $\mathbb{V}$ une variété topologique compacte, posons $S := \mathring{c}(\mathbb{V})$ et notons s le sommet de S. La note 6, en bas de la page 6, entraîne que l'équivalence $\mathcal{H}^p(\omega_S)_s \equiv \bigoplus_{a-b=p}\mathrm{Ext}^a(\hat{\mathrm{H}}^b_c(S);\mathbb{Z})$ sera satisfaite, et comme $\hat{\mathrm{H}}^b_c(S) \simeq \varphi(\hat{\mathrm{H}}_{b-1}(\mathbb{V}))\oplus\tau(\hat{\mathrm{H}}_{b-2}(\mathbb{V}))$, où φ et τ dénotent respectivement les parties libres et de torsion des modules concernés et où $\hat{\mathrm{H}}$ dénote l'homologie réduite, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^p(\omega_S)_s &\simeq \mathrm{Hom}(\varphi(\hat{\mathrm{H}}_{-p-1}(\mathbb{V})),\mathbb{Z})\oplus\mathrm{Ext}^1(\tau(\hat{\mathrm{H}}_{-p-1}(\mathbb{V})),\mathbb{Z}) \\ &\simeq \varphi(\hat{\mathrm{H}}_{-p-1}(\mathbb{V}))\oplus\tau(\hat{\mathrm{H}}_{-p-1}(\mathbb{V})) \simeq \hat{\mathrm{H}}_{-p-1}(\mathbb{V}). \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\mathbb{V}$ possède de la torsion en cohomologie il en sera de même du germe $\mathcal{H}^*(\omega_S)_s$, et l'inclusion $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}^S_*(\underline{\underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}}) \subseteq \ker(\delta^S_*(\underline{\underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}}))$ sera nécessairement stricte.

suite nous n'aurons plus besoin de cette généralité et les coefficients de référence seront désormais les éléments du corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

La section suivante est destinée à rappeler, en transcrivant presque littéralement le texte de M. Kashiwara [K-2], sa remarque fondamentale concernat la correspondance de Hirai ; nous verrons comment les chaînes sous-analytiques interviennent alors très naturellement et permettent de transposer en des termes de combinatoire simpliciale, heuristiquement très éclairants, des questionnements propres à l'analyse fonctionnelle.

2.1 Equivalence de Hirai d'après M. Kashiwara.

Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple et connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et notons $G_{\mathbb{R}} \hookrightarrow G$ une forme réelle pour G. Soit X la variété des sous-groupes de Borel de G et notons $\widetilde{G}$ la *variété d'incidence* de G ; c'est le sous-ensemble de l'espace $G{\times}X$ constitué des couples (g, B) vérifiant la relation d'incidence $g \in B$. La variété $\widetilde{G}$ possède une structure de variété complexe, lisse et de même dimension que G.[14] Notons $\rho : \widetilde{G} \to G$ l'application (propre) obtenue en restreignant la projection canonique de $G{\times}X$ sur la première composante, et adoptons la convention de noter, pour toute partie $A \subseteq G$, par $\widetilde{A}$ le sous-ensemble $\rho^{-1}(A)$ de $\widetilde{G}$. Un des objets essentiels des prochains développements sera l'espace $\widetilde{G}_{\mathbb{R}}$; ensemble sous-analytique fermé de $\widetilde{G}$ de même dimension que $G_{\mathbb{R}}$. Posons G_{reg} l'ouvert de G des éléments semi-simples réguliers, c'est une partie partout dense de G qui possède la particularité que la restriction de ρ à $\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}$ est un revêtement dont le nombre de feuillets coïncide avec le cardinal du groupe de Weyl W de G. Notons $G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}} := G_{\mathrm{reg}} \cap G_{\mathbb{R}}$; cet ensemble, de même que $\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$, est une variété analytique réelle de dimension $\dim(G_{\mathbb{R}})$.

Soit $\mathcal{O}_G$ le faisceau des fonctions analytiques complexes sur G et notons $\mathcal{D}_G$ le faisceau d'opérateurs différentiels linéaires sur G à coefficients dans $\mathcal{O}_G$. Rappelons que l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ s'identifie à l'algèbre d'opérateurs différentiels invariants à gauche sur G, son centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ correspond alors à la sous-algèbre des opérateurs bi-invariants sur ce groupe. L'action de G sur lui-même par automorphismes intérieurs induit une action de $\mathfrak{g}$ sur les sections de $\mathcal{O}_G$, notée Ad. Soit $\mathcal{I}_\chi$ l'idéal à gauche de $\mathcal{D}_G$ engendré par les opérateurs $\mathrm{Ad}(A)$ pour $A \in \mathfrak{g}$, et par les sections de la forme $P - \chi(P)$, où $P \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ et où χ dénote le caractère infinitésimal trivial de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Notons $\mathcal{M}_\chi := \mathcal{D}_G/\mathcal{I}_\chi$ le module quotient, il peut être caractérisé aussi comme le $\mathcal{D}$-module engendré par une section globale u vérifiant

a) $\mathrm{Ad}(A){\cdot}u = 0$, pour tout $A \in \mathfrak{g}$,

b) $Pu = \chi(P)u$, pour tout $P \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

L'intérêt du module $\mathcal{M}_\chi$ repose en ceci que, en notant $\mathcal{B}_{G_{\mathbb{R}}}$ le faisceau des hyperfonctions sur $G_{\mathbb{R}}$ que l'on définit dans la catégorie des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur G

[14] La manière la plus simple de vérifier cette affirmation consiste à fixer un sous-groupe de Borel B_0 de G et à considérer l'application de $G{\times}B_0$ à valeurs dans $\widetilde{G}$ qui associe au couple (g, b) la paire $(gbg^{-1}, g(B_0)g^{-1})$. Cette application est surjective et induit sur $G{\times}B_0$ la relation d'équivalence définie par l'action (libre) de B_0 à droite de $G{\times}B_0$ donnée par $(g, b){\cdot}b_1 := (gb_1, b_1^{-1}bb_1)$; on en déduit une identification entre $\widetilde{G}$ et la variété quotient $G{\times}^B B$.

par (*cf.* [Sat], [SKK])

$$\mathcal{B}_{G_{\mathbb{R}}} := \mathcal{H}^{\dim(G_{\mathbb{R}})}_{G_{\mathbb{R}}}(\mathcal{O}_G) \otimes \underline{or}_G \otimes j_{G_{\mathbb{R}}*}\underline{or}_{G_{\mathbb{R}}},^{15}$$

on obtient l'espace $\mathcal{D}ist_\chi(G_{\mathbb{R}})$ des distributions invariantes χ-propres sur $G_{\mathbb{R}}$ par l'équivalence

$$\mathcal{D}ist_\chi(G_{\mathbb{R}}) \equiv \mathrm{H}^0\left(G; \mathcal{RH}om^{\cdot}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}_\chi, \mathcal{B}_{G_{\mathbb{R}}})\right);$$

et comme le complexe $R\underline{\underline{\Gamma}}_{G_{\mathbb{R}}}(\mathcal{O}_G)$ est cohomologiquement concentré en degré $\dim(G_{\mathbb{R}})$ (*loc. cit.*), on a aussi

$$\mathcal{D}ist_\chi(G_{\mathbb{R}}) \equiv \mathrm{h}^{\dim(G_{\mathbb{R}})}\left\{R\Gamma\left(G; \mathcal{RH}om^{\cdot}_{\mathcal{D}_G}\left(\mathcal{M}_\chi, R\underline{\underline{\Gamma}}_{G_{\mathbb{R}}}(\mathcal{O}_G) \otimes \underline{or}_G \otimes j_{G_{\mathbb{R}}*}\underline{or}_{G_{\mathbb{R}}}\right)\right)\right\}, \quad (7)$$

où $\mathrm{h}^{\dim(G_{\mathbb{R}})}\{\mathcal{C}\}$ dénote le groupe de cohomologie de degré $\dim(G_{\mathbb{R}})$ du complexe $\mathcal{C}$.

M. Kashiwara met alors en évidence la suite de complexes équivalents à (7) en catégories dérivées, suivante :

$$\begin{aligned}
&\equiv^{16} \quad R\Gamma\left(G; \mathcal{RH}om^{\cdot}_{\mathcal{D}_G}\left(\mathcal{M}_\chi, R\underline{\underline{\Gamma}}_{G_{\mathbb{R}}}(\mathcal{O}_G)\right) \otimes \underline{or}_G \otimes j_{G_{\mathbb{R}}*}\underline{or}_{G_{\mathbb{R}}}\right) && : \mathcal{C}_1\\
&\equiv^{17} \quad R\Gamma\left(G; R\underline{\underline{\Gamma}}_{G_{\mathbb{R}}}\left(\mathcal{RH}om^{\cdot}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}_\chi, \mathcal{O}_G)\right) \otimes \underline{or}_G \otimes j_{G_{\mathbb{R}}*}\underline{or}_{G_{\mathbb{R}}}\right) && : \mathcal{C}_2\\
&\equiv^{18} \quad R\Gamma\left(G; R\underline{\underline{\Gamma}}_{G_{\mathbb{R}}}\left(R\rho_*(\mathbb{C}_{\widetilde{G}})\right) \otimes \underline{or}_G \otimes \ j_{G_{\mathbb{R}}*}\underline{or}_{G_{\mathbb{R}}}\right) && : \mathcal{C}_3 \qquad (8)\\
&\equiv^{19} \quad R\Gamma\left(\widetilde{G}; R\underline{\underline{\Gamma}}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R}}}(\mathbb{C}_{\widetilde{G}}) \otimes \underline{or}_{\widetilde{G}} \otimes j_{\widetilde{G}_{\mathbb{R}}*}\rho^{-1}\underline{or}_{G_{\mathbb{R}}}\right) && : \mathcal{C}_4\\
&\equiv^{20} \quad R\Gamma\Big(\widetilde{G}_{\mathbb{R}}; \underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\cdot}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R}}} \otimes \rho^{-1}\underline{or}_{G_{\mathbb{R}}}\Big)[-\dim(G)], && : \mathcal{C}_5
\end{aligned}$$

(où les expressions de la colonne de droite sont destinées à faciliter de futures références). On en déduit la démonstration de la proposition

Proposition 2.1.1 ([K-2]) *L'espace $\mathcal{D}ist_\chi(G_{\mathbb{R}})$ des distributions invariantes χ-propres sur $G_{\mathbb{R}}$ est isomorphe au groupe d'homologie* $\mathrm{H}^{\mathrm{inf}}_{\dim(G_{\mathbb{R}})}(\widetilde{G}_{\mathbb{R}}; \rho^{-1}\underline{or}_{G_{\mathbb{R}}})$.

---

[15] Les produits tensoriels dans cette section seront toujours relatifs au faisceau constant de fibres $\mathbb{C}$. D'autre part, sur un groupe de Lie H, le faisceau d'orientation $\underline{or}_H$ est toujours isomorphe (mais non canoniquement) au faisceau constant $\underline{\mathbb{C}}_H$; l'ingérence des faisceaux d'orientation dans ce qui suit, ne se justifie donc que par la nécessité de considérer des objets intrinsèquement associés aux espaces étudiés.

[16] Puisque l'action de $\mathcal{D}_G$ sur les faisceaux $\underline{or}_G$ et $j_{G_{\mathbb{R}}*}\underline{or}_{G_{\mathbb{R}}}$ est triviale.

[17] Dans les complexes considérés, le foncteur $R\underline{\underline{\Gamma}}_{G_{\mathbb{R}}}(\cdot)$ se calcule dans la catégorie dérivée des complexes de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur G, tandis que $\mathcal{RH}om^{\cdot}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}_\chi, \cdot)$ opère sur celle de $\mathcal{D}$-modules. Cela étant, l'équivalence en question découle d'un fait général affirmant que le morphisme naturel de $\mathcal{RH}om^{\cdot}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}, R\underline{\underline{\Gamma}}(\mathcal{N}))$ vers $R\underline{\underline{\Gamma}}_{G_{\mathbb{R}}}(\mathcal{RH}om^{\cdot}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}, \mathcal{N}))$ est un isomorphisme en catégories dérivées pour tous $\mathcal{D}$-modules $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. On voit ceci en considérant une résolution de Godement $\mathcal{I}^{\cdot}$ pour le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{N}$; chaque faisceau $\mathcal{I}^j$ est alors flasque, donc nécessairement acyclique pour le foncteur $\underline{\underline{\Gamma}}_{G_{\mathbb{R}}}$ et, en plus, le faisceau $\underline{\underline{\Gamma}}_{G_{\mathbb{R}}}(\mathcal{I}^j)$ est un $\mathcal{D}$-module *injectif* (*cf.* R. Hartshorne, Algebraic Geometry §III 2, par exemple). On ramène ainsi notre questionnement à celui, élémentaire, de vérifier que l'injection canonique de faisceaux de $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}, \underline{\underline{\Gamma}}_{G_{\mathbb{R}}}(\mathcal{I}^j))$ dans $\underline{\underline{\Gamma}}_{G_{\mathbb{R}}}(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}, \mathcal{I}^j))$ est bien surjective.

[18] Résulte d'adapter, sur le groupe G, les arguments qui dans [H-K] étaient valables sur l'agèbre $\mathfrak{g}$ et qui prouvent l'existence d'un quasi-isomorphisme entre $\mathcal{RH}om^{\cdot}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}_\chi, \mathcal{O}_G)$ et $R\rho_*(\underline{\mathbb{C}}_{\widetilde{G}})$. Nous reviendrons sur cette question dans la section 2.2.

[19] Manipulation classique exploitant la propreté de ρ.

[20] D'après les raisonnements de la preuve du lemme 1.5.6.

Le lien ainsi établi entre les cycles sous-analytiques de $\widetilde{G}_{\mathbb{R}}$ et les distributions invariantes χ-propres sur $G_{\mathbb{R}}$ est nommé *Correspondance de Hirai*. Il importe d'observer que comme $\dim(G_{\mathbb{R}}) = \dim(\widetilde{G}_{\mathbb{R}})$, cette correspondance associe à une distribution sur $G_{\mathbb{R}}$, un cycle sous-analytique de $\widetilde{G}_{\mathbb{R}}$ bien déterminé puisque la notion de cycles homologues est vide en cette dimension. On remarquera aussi que la nature des objets et des raisonnements qui précèdent fait que nous sommes en présence d'une correspondance *naturelle* par rapport aux ouverts de $G_{\mathbb{R}}$; on aura, par conséquent, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}ist_{\chi}(G_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\quad restriction \quad} & \mathcal{D}ist_{\chi}(G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}) \\ \mathrm{Hirai}\ \Big\updownarrow \equiv & & \mathrm{Hirai}\ \Big\updownarrow \equiv \\ \mathrm{H}^{\inf}_{\dim(G_{\mathbb{R}})}(\widetilde{G}_{\mathbb{R}}; \rho^{-1}(\underline{\underline{or}}_{G_{\mathbb{R}}})) & \xrightarrow{restriction} & \mathrm{H}^{\inf}_{\dim(G_{\mathbb{R}})}(\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}; \underline{\underline{or}}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}}) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes.

Ce diagramme permet de transposer aussitôt, dans un contexte de combinatoire simpliciale, deux problèmes classiques en analyse fonctionnelle sur $G_{\mathbb{R}}$, à savoir ceux de préciser le noyau el l'image de l'opération de restriction de $\mathcal{D}ist_{\chi}(G_{\mathbb{R}})$ vers $\mathcal{D}ist_{\chi}(G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}})$.

En ce qui concerne le premier questionnement, il convient de préciser la remarque suivante.

Remarque 2.1.2 Dans le dernier diagramme la restriction établit une injection entre les groupes d'homologie de chaînes sous-analytiques concernés. En effet, comme $\dim(G_{\mathbb{R}}) = \dim(\widetilde{G}_{\mathbb{R}}) = \dim(\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}) =: n$, nous avons (*cf.* lemme 1.5.4)

$$\mathrm{H}^{\inf}_{n}(\widetilde{G}_{\mathbb{R}}; \rho^{-1}\underline{\underline{or}}_{G_{\mathbb{R}}}) = \Gamma\Big(\widetilde{G}_{\mathbb{R}}; \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}^{-n}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R}}}(\rho^{-1}\underline{\underline{or}}_{G_{\mathbb{R}}})\Big)$$

et *mutatis mutandis* pour $G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$. L'affirmation découle alors de remarquer que le morphisme de restriction de $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{-n}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R}}}$ vers $j_{\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}*}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{-n}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}}$ est un monomorphisme de faisceaux[21] puisque son noyau égale l'image directe du faisceau $i^{!}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{-n}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R}}}$, où i dénote l'inclusion du complémentaire de $\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$ dans $\widetilde{G}_{\mathbb{R}}$, et que la dimension de cet ensemble sous-analytique étant strictement majorée par n force l'annulation du faisceau $i^{!}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{-n}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R}}}$.

Cela étant, il est important d'observer qu'il serait fallacieux de conclure que ce raisonnement élémentaire pourrait fournir une nouvelle preuve, moyennant la commutativité du diagramme en question, du célèbre théorème de Harish-Chandra affirmant l'injectivité de l'opération de restriction au niveau des distributions étudiées (*cf.* [HC] mais aussi [Var]). La raison de ceci est que ce théorème intervient déjà de maniére décisive (*cf.* [H-K]) dans l'établissement de l'équivalence entre $R\rho_{*}(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{G}})$ et $\mathcal{RH}om^{\cdot}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}_{\chi}, \mathcal{O}_G)$; élément clef de la correspondance de Hirai.

Abordons maintenant le problème de l'image de l'opération de restiction des distributions. Dans la remarque précédente nous avons signalé que le morphisme de restriction de $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{-n}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R}}}$ vers $j_{\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}*}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{-n}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}}$, où $n = \dim(G_{\mathbb{R}})$, est en fait un *isomorphisme* de faisceaux ; ceci nous permet d'affirmer à présent qu'une distribution invariante χ-propre sur $G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$ admettra un prolongement en une distribution du même type sur $G_{\mathbb{R}}$, si et seulement si,

[21] En fait un isomorphisme dont la surjectivité se démontre comme dans la proposition 1.5.3.

le cycle sous-analytique de $\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$ que la correspondance de Hirai lui associe, cycle qui est aussi une chaîne sous-analytique de $\widetilde{G}_{\mathbb{R}}$, possède un bord nul *en tant que chaîne sous-analytique de* $\widetilde{G}_{\mathbb{R}}$. Ainsi, les conditions de prolongement pour les distributions invariantes χ-propres de $G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$ (*cf.* [Hir]), connues sous le nom de *Conditions de Hirai*, vont résulter, d'une part, de l'explicitation de la correspondance de Hirai sur $G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$, ce à quoi sera consacré la fin de cet exposé, et d'autre part, de l'étude de la géométrie de $\widetilde{G}_{\mathbb{R}}$ jointe à l'explicitation du morphisme bord donnée dans la section 1.4 (*cf.* lemme 1.4.2) ce qui fera l'objet de l'exposé suivant.

2.2 Restriction aux ouverts réguliers.

Soit U un ouvert de G_{reg} et notons $U_{\mathbb{R}} := U \cap G_{\mathbb{R}}$. Le fait que la restriction de l'application ρ à $\widetilde{U}$ soit un revêtement de fibres isomorphes à W jouera tout au long de cette section un rôle simplificateur fondamental. On peut d'ores et déjà déduire l'exactitude du foncteur ρ_* et une identification des foncteurs « image directe » et « image inverse » des catégories dérivées de $\mathcal{D}$-modules aux foncteurs analogues de la catégorie de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Notons $\mathcal{S}ol_U(\mathcal{M}_\chi)$ la restriction du complexe $\mathcal{RH}om^{\cdot}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}_\chi, \mathcal{O}_G)$ à l'ouvert U. La suite de quasi-isomorphismes (8), qui se restreint naturellement à U, fait intervenir de manière essentielle un quasi-isomorphisme entre $R\rho_*(\underline{\mathbb{C}}_{\widetilde{U}})$ et $\mathcal{S}ol_U(\mathcal{M}_\chi)$ sur lequel nous n'avons pas encore été très explicites mais que l'on admettra provisoirement dans le but d'indiquer la suite des raisonnements. L'exactitude du foncteur ρ_* explique que ces derniers complexes sont en fait des systèmes locaux ; d'autre part on a, pour un système local $\mathcal{L}$, un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{h}^{\dim(G_{\mathbb{R}})}\left\{R\Gamma\left(U; R\underline{\Gamma}_{U_{\mathbb{R}}}(\mathcal{L}) \otimes \underline{or}_U \otimes j_{U_{\mathbb{R}}*}\underline{or}_{U_{\mathbb{R}}}\right)\right\} \equiv \Gamma(U_{\mathbb{R}}; j^{-1}_{U_{\mathbb{R}}}(\mathcal{L}))$$

qui découle de manipulations élémentaires à partir des équivalences classiques :

$$R\underline{\Gamma}_{U_{\mathbb{R}}}(\mathcal{L}) \equiv R\underline{\Gamma}_{U_{\mathbb{R}}}(\underline{or}_U) \otimes \underline{or}_U \otimes \mathcal{L} \equiv j_{U_{\mathbb{R}}*}\underline{or}_{U_{\mathbb{R}}} \otimes \underline{or}_U \otimes \mathcal{L}[-\dim(G_{\mathbb{R}})].$$

En appliquant cette remarque[22] à la suite (8) on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{h}^{\dim(G_{\mathbb{R}})}\{\mathcal{C}_2\} & \equiv & \Gamma\Big(U_{\mathbb{R}}; j^{-1}_{U_{\mathbb{R}}}(\mathcal{S}ol_U(\mathcal{M}_\chi))\Big) \\
\| & & \| * \\
\mathrm{h}^{\dim(G_{\mathbb{R}})}\{\mathcal{C}_3\} & \equiv & \Gamma\Big(U_{\mathbb{R}}; j^{-1}_{U_{\mathbb{R}}}(\rho_*(\underline{\mathbb{C}}_{\widetilde{U}}))\Big) \\
\| & & \| \\
\mathrm{h}^{\dim(G_{\mathbb{R}})}\{\mathcal{C}_4\} & \equiv & \Gamma\Big(\widetilde{U}_{\mathbb{R}}; j^{-1}_{\widetilde{U}_{\mathbb{R}}}(\underline{\mathbb{C}}_{\widetilde{U}})\Big) \\
\| & & \| \\
\mathrm{H}^{\mathrm{inf}}_{\dim(G_{\mathbb{R}})}(\widetilde{U}_{\mathbb{R}}; \underline{or}_{\widetilde{U}_{\mathbb{R}}}) & \equiv & \Gamma\Big(\widetilde{U}_{\mathbb{R}}; \underline{\mathbb{C}}_{\widetilde{U}_{\mathbb{R}}}\Big)
\end{array} \tag{9}$$

où tous les nouveaux morphismes sont évidents à l'exception près de $*$.

[22] Il aurait aussi été possible d'utiliser systématiquement le lemme 1.5.6 et obtenir ainsi des explicitations en termes de sections globales des faisceaux de chaînes sous-analytiques. C'est ainsi que j'ai procédé lors de mon exposition orale ; la démarche présente paraît cependant plus adaptée et directe.

La correspondance de Hirai apparaît ainsi naturellement scindée en deux équivalences :

$$\mathcal{D}ist_\chi(U_\mathbb{R}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Solutions analytiques complexes de} \\ \mathcal{M}_\chi \text{ définies au voisinage de } U_\mathbb{R}. \end{array} \right\} \overset{(9)}{\equiv} \mathrm{H}^{\inf}_{\dim(G_\mathbb{R})}(\widetilde{U}_\mathbb{R}; \underline{or}_{\widetilde{U}_\mathbb{R}}) \tag{10}$$

où la première est suffisamment classique (*cf.* [Var] I §4) pour que nous puissions la considérer comme acquise et pour que nous concentrions nos efforts d'explicitation uniquement sur (9). Cette dernière résultera clairement de la donnée d'une présentation de $\mathcal{M}_\chi|_U$ et d'avoir précisé le quasi-isomorphisme reliant $\rho_*(\underline{\mathbb{C}}_{\widetilde{U}})$ et $\mathcal{S}ol_U(\mathcal{M}_\chi)$ utilisé dans (8). Pour ceci nous établirons, dans un premier temps, un isomorphisme de faisceaux entre $\mathcal{M}_\chi|_{G_{\mathrm{reg}}}$ et $\rho_*(\mathcal{O}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}})$.

Commençons par introduire la fonction holomorphe Ψ sur G_{reg}. Elle est définie de la manière suivante : pour $p = (g, x) \in \widetilde{G}_{\mathrm{reg}}$, l'élément x est un point fixe *isolé* pour l'action de g sur X, et l'action que g induit sur l'espace vectoriel tangent $T_x(X)$ est, en conséquence, telle que l'endomorphisme $1 - g$ est régulier. On pose alors $\Psi(p) := \det^{-1}(1-g : T_x(X))$. Cette fonction, en s'associant à l'opérateur différentiel constant $\mathbb{1}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}$, détermine un morphisme μ de $\mathcal{D}$-modules de $\mathcal{D}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}$ dans $\mathcal{O}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}$ et donne par image directe $\rho_*(\mu) : \rho_*\mathcal{D}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}} \to \rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}$. Comme d'autre part le fait que ρ soit un revêtement garantit que $\mathcal{D}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}} \equiv \rho^{-1}\mathcal{D}_{G_{\mathrm{reg}}}$, on peut définir un morphisme de $\mathcal{D}$-modules $\zeta : \mathcal{D}_{G_{\mathrm{reg}}} \to \rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}$ en composant $\rho_*(\mu)$ au morphisme canonique $\theta : \mathcal{D}_{G_{\mathrm{reg}}} \to \rho_*\rho^{-1}\mathcal{D}_{G_{\mathrm{reg}}}$, *i.e.* en composant les flèches :

$$\mathcal{D}_{G_{\mathrm{reg}}} \xrightarrow{\theta} \rho_*\rho^{-1}\mathcal{D}_{G_{\mathrm{reg}}} \equiv \rho_*\mathcal{D}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}} \xrightarrow{\rho_*(\mu)} \rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}.$$

Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 2.2.1 *Le morphisme $\zeta : \mathcal{D}_{G_{\mathrm{reg}}} \to \rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}$ est surjectif et de noyau $\mathcal{I}_\chi|_{G_{\mathrm{reg}}}$. Il induit, par conséquent, un isomorphisme de faisceaux entre $\mathcal{M}_\chi|_{G_{\mathrm{reg}}}$ et $\rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}$.*

Démonstration : Commençons par expliciter $\zeta(U)$ pour un ouvert U suffisament petit pour que $\rho\big|_{\widetilde{U}}$ soit une fibration triviale. Fixons un élément $g_0 \in U$, un tore maximal T_0 de G contenant g_0 et un sous-groupe de Borel $B_0 \supseteq T_0$ et notons Δ le système des racines de (B_0, T_0) de demi-somme[23] ρ. Soit W le groupe de Weyl de (G, T_0), on identifie alors $\widetilde{U}$ à $U \times W$ de sorte que (g_0, wB_0) corresponde à (g_0, w) pour tout $w \in W$, et l'on introduit la famille $\{\Psi_w\}_{w\in W}$ de fonctions holomorphes sur U en posant $\Psi_w(g) := \Psi(g, w)$. Dans cette situation, le module $(\rho_*\mathcal{D}_{\widetilde{U}})(U)$ va s'identifier à $\bigoplus_W \mathcal{D}_U(U)$ et l'homomorphisme $\theta(U)$ associe à l'opérateur $\mathbb{1}_U$ le W-uplet $(\mathbb{1}_U)_{w\in W}$ dont l'image par $\rho_*(\mu)$ dans le module $(\rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{U}})(U) \equiv \bigoplus_W \mathcal{O}_U(U)$ est le W-uplet $(\Psi_w)_{w\in W}$; soit, en condensé :

$$\begin{array}{rcl} \zeta(U) : \mathcal{D}_U(U) & \longrightarrow & (\rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{U}})(U) \equiv \bigoplus_W \mathcal{O}_U(U) \\ \mathbb{1}_U & \longmapsto & (\Psi_w)_{w\in W}. \end{array}$$

Nous prouverons ultérieurement que, quitte à restreindre l'ouvert U si nécessaire, il existe une fonction analytique $\sigma : U \to G$ telle que si $g \in U$ l'élément $\sigma(g)^{-1}\cdot g\cdot\sigma(g)$ appartient à T_0 et telle que $\sigma(g_0)$ est l'élément neutre e de G. Cette remarque permet

[23] Ces notations étant très classiques nous sommes obligés de les conserver malgré l'ambiguïté flagrante en ce qui concerne le signifié de ρ ; le contexte sera toutefois suffisamment clair pour éviter toute erreur d'interprétation.

d'exprimer les fonctions Ψ_w en termes de données attachées au sous-groupe de Cartan T_0. En effet, des raisonnements élémentaires prouvent alors l'égalité :

$$\Psi_w(g) = \frac{e^{\rho - w\rho}}{\prod_{\alpha\in\Delta}(1-e^{-\alpha})}(a), \tag{11}$$

pour tous $g \in U$ et $a \in \mathrm{Lie}(T_0)$ tels que $\sigma(g)\cdot\exp(a)\cdot\sigma(g)^{-1} = g$.

L'affirmation concernant le noyau de $\zeta(U)$ est maintenant immédiate puisque l'on reconnaît dans la description (11) des fonctions Ψ_w, la description d'une famille de fonctions constituant une base pour les solutions du système d'équations différentielles définissant $\mathcal{I}_\chi$. C'est un point qui résulte des developpements présentés dans [Var] I §4 par exemple, auquel nous référons pour plus de détails.

Analysons l'image du morphisme de faisceaux ζ sur un voisinage de g_0. Observons que Ψ_w est une fonction inversible sur U et admettons provisoirement l'existence, pour chaque $A \in \mathrm{Lie}(T_0)$, d'un champ de vecteurs V_A sur U tel que l'opérateur différentiel qu'il définit, noté ∂_A, vérifie

$$\partial_A(\Psi_w^{-1}\Psi_{w'}) = (w\rho - w'\rho)(A)\Psi_w^{-1}\Psi_{w'}. \tag{12}$$

Numérotons arbitrairement les éléments du groupe de Weyl : $w_1, \ldots, w_s$. Comme l'image de $\zeta(U)$ contient $\Psi_{w_1}^{-1}\cdot\zeta(U)(\mathbb{1}_U) = (1, \Psi_{w_1}^{-1}\Psi_{w_2}, \ldots, \Psi_{w_1}^{-1}\Psi_{w_s})$, on comprend, d'après (12), que si A est choisi dans le complémentaire de la réunion des noyaux des formes linéaires concernées, on pourra réaliser un certain W-uplet $(0, m_2\Psi_{w_2}, \ldots, m_s\Psi_{w_s})$, où $m_i \in \mathbb{C}^*$, comme élément image de $\zeta(U)$. Ces raisonnements peuvent bien évidemment être itérés et prouvent ainsi que $(0, \ldots, 0, \Psi_{w_s})$, et donc $(0, \ldots, 0, 1)$, est atteint par $\zeta(U)$. Enfin, comme l'indexation choisie des éléments de W n'a joué aucun rôle dans cette argumentation, la surjectivité annoncée de $\zeta(U)$ se trouve démontrée.

Prouvons pour terminer, l'existence de l'application σ et des champs V_A, vérifiant (12), sur un certain voisinage de l'élément $g_0 \in U$. Nous allons utiliser le fait que l'application

$$\begin{array}{rcl} \nu : T_0\times(G/T_0) & \longrightarrow & G \\ (g,[p]) & \longmapsto & p\cdot g\cdot p^{-1} \end{array}$$

établit un difféomorphisme local au voisinage de $(g_0, [e])$. Il suffit pour ceci d'inspecter le noyau de la différentielle de ν en ce point ; on a $d\nu_{(g_0,[e])}(A,B) = (\mathrm{ad}(g_0^{-1})\cdot B - B)_{g_0} + A$, d'où l'injectivité résulte d'avoir supposé g_0 régulier. L'application σ provient alors de considérer la seconde coordonnée d'un inverse local de ν, composée à une section convenable de la projection canonique $G \to G/T_0$ au voisinage de $[e]$.

Notons maintenant $\nu' : \mathrm{Lie}(T_0)\times(G/T_0) \to G$ l'application définie par $\nu'(a,[p]) := \nu(\exp(a),[p])$; elle établit un difféomorphisme entre un voisinage U'' d'un certain $(a_0,[e])$, où $\exp(a_0) = g_0$, et un ouvert U' contenant g_0. Pour chaque $A \in \mathrm{Lie}(T_0)$ soit $\mathcal{A}$ le champ de vecteurs sur U'' dont la première coordonnée est constante et égale à A et la seconde est nulle et définissons V_A comme le champ image directe $\nu'_*\mathcal{A}$. On aura alors l'identité standard $\partial_{\nu'_*\mathcal{A}}(f) = (\partial_{\mathcal{A}}(f\circ\nu'))\circ(\nu')^{-1}$ pour toute fonction f sur U' ; en particulier comme $((\Psi_w^{-1}\Psi_{w'})\circ\nu')(a,[p]) = e^{w\rho - w'\rho}(a)$, la formule (12) sera satisfaite. ∎

Ceci étant, reprenons notre discussion au sujet de la suite d'isomorphismes (9). Nous

allons avoir pour tout ouvert $U \subseteq G_{\rm reg}$ et puisque ρ est un revêtement fini, les équivalences

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}ol_U(\mathcal{M}_\chi) & := & \mathcal{RH}om^{\cdot}_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{M}_\chi, \mathcal{O}_U) \overset{\zeta}{\equiv} \mathcal{RH}om^{\cdot}_{\mathcal{D}_U}(\rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{U}}, \mathcal{O}_U) \\ & \equiv & \rho_*\mathcal{RH}om^{\cdot}_{\mathcal{D}_{\widetilde{U}}}(\mathcal{O}_{\widetilde{U}}, \mathcal{O}_{\widetilde{U}}) \equiv \rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{U}}), \end{array} \tag{13}$$

où la dernière est classique dans ces théories. Or, comme les complexes $\mathcal{S}ol_G(\mathcal{M}_\chi)$ et $R\rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{G}})$ sont les extensions minimales (*cf.* [H-K]) de leur restriction à $G_{\rm reg}$, cette équivalence (13) entre $\mathcal{S}ol_{G_{\rm reg}}(\mathcal{M}_\chi)$ et $\rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{G}_{\rm reg}})$ va se prolonger *de manière unique* à G tout entier fournissant le quasi-isomorphisme utilisé par M. Kashiwara pour relier $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ dans (8), c'est donc bien cette dernière équivalence que nous devons employer dans notre projet d'explicitation de la correspondance de Hirai.

Observons maintenant que comme tous les complexes de (13) sont concentrés en degré zéro, on a

$$\ker\Big(\mathcal{O}_U \overset{\kappa}{\to} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{I}_\chi|_U, \mathcal{O}_U)\Big) \equiv \mathcal{S}ol_U(\mathcal{M}_\chi) \equiv \rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{U}}),$$

où le morphisme κ découle d'appliquer le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(\cdot, \mathcal{O}_U)$ au noyau de $\zeta : \mathcal{D}_U \to \rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{U}}$. Ainsi, la présentation du module des équations différentielles pour les distributions invariantes χ-propres, donnée par le morphisme ζ, nous permet de préciser à présent la fonction analytique correspondant à une section du faisceau $\rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{U}})$. En effet, supposons pour simplifier l'ouvert U connexe et suffisamment petit pour que la restriction de ρ à $\widetilde{U}$ soit une fibration triviale. L'ouvert $\widetilde{U}$ s'identifie dans ce cas au produit $U \times W$ ce qui permet de définir, comme dans la proposition 2.2.1, une fonction Ψ_w analytique sur U, en posant $\Psi_w(g) := \Psi(g, w)$. Une section s de $\rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{U}})$ se voit alors comme une somme formelle $s = \sum_{w\in W} m_w(U \times \{w\})$ de nappes de $\rho\big|_{\widetilde{U}}$. Il résulte ainsi assez clairement de ce qui précède que la fonction associée à s est simplement $\sum_{w\in W} m_w\Psi_w$; il en découle, par restriction à $G_{\mathbb{R}}$, la proposition suivante qui termine cet exposé.

Proposition 2.2.2 ([K-2]) *Soit U un ouvert de $G_{\rm reg}$ et $U_{\mathbb{R}} := U \cap G_{\mathbb{R}}$. L'équivalence établie par le correspondance de Hirai*

$$\mathrm{H}^{\rm inf}_{\dim(G_{\mathbb{R}})}(\widetilde{U}_{\mathbb{R}}; \underline{\underline{or}}_{\widetilde{U}_{\mathbb{R}}}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Solutions analytiques complexes de} \\ \mathcal{M}_\chi \text{ définies au voisinage de } U_{\mathbb{R}}. \end{array} \right\},$$

associe à un cycle sous-analytique σ de dimension $\dim(G_{\mathbb{R}})$ *la fonction f_σ définie sur $U_{\mathbb{R}}$ par*

$$f_\sigma(g) = \sum_{p\in\rho^{-1}(g)} \sigma(p)\Psi(p),$$

où $\sigma(p)$ dénote le nombre d'intersection de σ et $\rho^{-1}(g)$ au point p.

Démonstration : D'après le lemme 1.5.4 (page 17) les cycles sous-analytiques de dimension $\dim(G_{\mathbb{R}})$ à coefficients dans $\underline{\underline{or}}_{\widetilde{U}_{\mathbb{R}}}$ de la variété $\widetilde{U}_{\mathbb{R}}$ sont les sections globales du faisceau constant $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{U}_{\mathbb{R}}}$, *i.e.* les sommes formelles de composantes connexes de $\widetilde{U}_{\mathbb{R}}$. Comme d'autre part il existe un voisinage V de $\widetilde{U}_{\mathbb{R}}$ dans $\widetilde{U}$ tel que l'inclusion $\widetilde{U}_{\mathbb{R}} \hookrightarrow V$ établisse une bijection des composantes connexes de $\widetilde{U}_{\mathbb{R}}$ sur celles de V,[24] on comprend que tout cycle

[24] C'est un fait qui découle de raisonnements généraux de topologie élémentaire. En effet, nous avons donné dans les premières lignes de la démonstration du lemme 1.3.2 (page 10) des arguments qui prouvent que sur un espace paracompact et localement fermé, deux fermés disjoint admettent toujours des voisinages disjoints. En rajoutant l'hypothèse, pour l'espace ambiant, d'être localement connexe, le même raisonnement fournit pour chaque sous-espace fermé, des voisinages ouverts disjoints et connexes de ses composantes connexes.

sous-analytique σ de $\mathrm{H}^{\inf}_{\dim(G_{\mathbb{R}})}(\widetilde{U}_{\mathbb{R}}; \underline{or}_{\widetilde{U}_{\mathbb{R}}})$ s'obtient, par la suite d'équivalences (9), en restreignant une section globale Σ du faisceau constant de V. Mais alors la fonction associée à σ est bien la restriction à $U_{\mathbb{R}}$ de celle associée à Σ par la correspondance (13), ce que nous avons déjà etudié dans le paragraphe précédent et fournit la fin de la démonstration de cette proposition. ■

3 Références Bibliographiques

[Bor] *Intersection Cohomology*. Armand BOREL et al. Progress in Mathematics. Vol. 50. Birkhaüser (1984).

[God] *Topologie Algébrique et Théorie de Faisceaux*. Roger GODEMENT. Act. Sci. Ind. 1252. Hermann Paris (1958).

[HC] *Invariant Eigendistributions on a Semisimple Lie Group*. HARISH-CHANDRA. Trans. Amer. Math. Soc. 119 (1965), pp. 457–508.

[Hir] *Invariant Eigendistributions of Laplace Operators on Real Simple Groups* II. T. Hirai. Japan Journal of Math. 2 (1976), pp. 28–89.

[H-1] *Introduction aux Ensembles Sous-Analytiques*. Heisuke HIRONAKA. Colloque sur les Singularités en Géométrie Analytique (Cargèse 1972). Astérisque 7–8 (1973).

[H-2] *Subanalytic Sets in Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Heisuke HIRONAKA. Volume in Honor of Y. Akizuki, Kinokuniya (1973).

[H-K] *The Invariant Holonomic System in a Semisimple Lie Algebra*. R. HOTTA et M. KASHIWARA. Inventiones Mathematicæ 75 (1984), pp. 327–358.

[Ive] *Cohomology of Sheaves*. Birger IVERSEN. Universitext, Springer Verlag (1985).

[K-1] *Index Theorem for Constructible Sheaves*. Masaki KASHIWARA. Astérisque 130 (1985), pp. 193–209.

[K-2] *Character, Character Cycle, Fixed Point Theorem and Group Representations*. Masaki KASHIWARA. Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. RIMS-569 (1987).

[K-S] *Sheaves on Manifolds*. Masaki KASHIWARA and Pierre SCHAPIRA. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. En cours d'édition.

[Sat] *Theory of Hyperfunctions,* II. Mikio SATO. Journal Fac. Sci. Univ. Tokio 8 (1960), pp. 387–437.

[SKK] *Microfunctions and Pseudo-Differential Equations*. Mikio SATO, Takahiro KAWAI, Masaki KASHIWARA. In Lecture Notes in Mathematics 287. Springer-Verlag (1973).

[Sem] *Dualité de Poincaré*. Séminaire Heidelberg Strasbourg 1966/67. Publication I.R.M.A. Strasbourg n° 3 (1969).

[Var] *Harmonic Analysis on Real Reductive Groups*. V. S. VARADARAJAN. Lecture Notes in Mathematics 576. Springer-Verlag (1977).

4 Terminologie et notations

Tout le long de cet exposé nous avons noté, pour une inclusion d'ensembles $A \subseteq B$, par i_A^B et j_A^B les injections canoniques. Les lettres i et j ne font pas nécessairement allusion au caractère respectivement fermé et ouvert de ces applications comme c'est parfois le cas dans la littérature classique. Enfin, lorsque B est l'espace ambiant ou bien lorsque le contexte élimine toute ambiguïté, l'indication de cet élément a été omise.

Dans le but de faciliter la lecture des différentes sections de ce papier, j'indique pour terminer, la liste complète des notations, souvent non-standard, employées dans le texte extérieur aux démonstrations.

Notation	*Page*
$\widetilde{A} := \rho^{-1}(A)$	20
bord $\delta_p^X : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_{p-1}^X$	10
bord topologique : $\delta S = \overline{S} \backslash S$	10
$\mathcal{B}_{G_\mathbb{R}}$	20
$\mathring{c}(L_j)$	3
$(\mathrm{cls}_p(X); \prec)$	10
$\mathcal{CS}'_p(U)$	4
$\mathcal{CS}_p(U) := \mathcal{CS}'_p(U)/\mathcal{R}_p(U)$	4
$\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$	5
$(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_X^\bullet; d_X^\bullet)$	11
$\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S := j_S^!(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X)$	16
$\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S(\mathcal{F})$	17
Correspondance de Hirai	21
$\mathcal{D}_c^b(X)$	3
$\mathcal{D}_G$	20
$\mathcal{D}ist_\chi(G_\mathbb{R})$	21
∂	12
$\Delta'_p(U)(S, \Sigma) := (S^\natural, \Sigma^\natural)$	12
famille paracompactifiante	11
G	20
$G_\mathbb{R} \hookrightarrow G$	20
$G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}} := G_{\mathrm{reg}} \cap G_\mathbb{R}$	20
$\mathrm{h}^{\dim(G_\mathbb{R})}\{\mathcal{C}\}$	21
$\mathrm{H}_p^{\inf}(S; \mathcal{F})$	19
$\mathcal{I}_\chi$	20
$(\mathrm{lcls}_p(X), \prec)$	8
$\mathcal{M}_\chi := \mathcal{D}_G/\mathcal{I}_\chi$	20
$\underline{or}_Y$	6

Notation	*Page*
$\mathcal{O}_G$	20
ω_Y	6
partie de transition	7
$\Psi : G_{\mathrm{reg}} \to \mathbb{C}$	24
$\Psi_w(g) := \Psi(g, w)$	26
ρ_V^U	5
$\rho : \widetilde{G} \to G$	20
$\mathcal{R}_p(U)$	4
$\overline{\mathrm{supp}}(\Sigma)$	4
(S, Σ)	4
$[S, \Sigma]$	4
$\widehat{S} := S^\natural \coprod S$	12
section induite	15
$\mathcal{S}ol_U(\mathcal{M}_\chi) := \mathcal{RH}om_{\mathcal{D}_G}^\bullet(\mathcal{M}_\chi, \mathcal{O}_G)\vert_U$	23
types a) b) c)	4
$\mathbb{1}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}$	24
$U_\mathbb{R} := U \cap G_\mathbb{R}$	23
variété d'incidence $\widetilde{G}$	20
$(\mathrm{var}_p(X), \prec)$	8
W	20
X	20
X_i	3
$X_{i,\mathrm{reg}}$	3
χ	20
$\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^X$	10
$\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S := j_S^!(\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^X)$	16
$\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S(\mathcal{F})$	17
$\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	20

mars 1990

Introduction à la cohomologie de de Rham

Alberto Arabia

Notes du cours

Université Paris 7 – Denis Diderot

175, rue de Chevaleret. Paris 75013

Complexe de de Rham

Par Alberto Arabia

Table des Matières

§**1. Espace topologique quotient** **4**
1.1. Généralités 4
1.2. Sous-espaces topologiques d'un quotient 6
1.3. Séparation du quotient topologique 7
1.4. Relations induites par des applications continues 8
1.5. Relations induites par des actions de groupes 9
1.6. Recollement d'espaces topologiques 13
1.7. Quelques exemples à retenir 14
§**2. Variétés différentiables** **17**
2.1. Généralités 17
2.2. Exemples de Variétés différentiables 19
2.3. Morphismes entre variétés différentiables 25
2.4. La catégorie des variétés différentiables 28
2.5. Sous-variétés d'une variété différentiable 29
2.6. Variété produit 30
2.7. Variétés quotients 31
2.8. Groupes de Lie 31
2.9. Fibrations localement triviales 37
2.10. Revêtements 40
2.11. Fibrés vectoriels sur les variétés différentiables 43
§**3. Complexe de de Rham et cohomologie de de Rham des variétés différentiables** **51**
3.1. Formes alternées sur un espace vectoriel de dimension finie 51
3.2. Formes différentielles sur les espaces vectoriels 56
3.3. Intégration des formes différentielles de degré maximum sur les espaces vectoriels 62
3.4. Formes différentielles et cohomologie de de Rham sur les variétés 65
§**4. Orientabilité et intégration sur les variétés** **69**
4.1. Partition de l'unité et variétés paracompactes 69
4.2. Variétés orientées 70
4.3. Intégration sur une variété orientée 71
4.4. L'intégration des classes de cohomologie à support compact 73
4.5. Morphisme de dualité 73
4.6. Variété d'orientations d'une variété différentiable 75
4.7. Cohomologie de de Rham de la base d'un revêtement 78
§**5. Suites exactes de Mayer-Vietoris** **82**
5.1. Suites exactes courtes de Mayer-Vietoris 82
5.2. Suites exactes longues de Mayer-Vietoris 83
5.3. Compatibilité entre le morphisme de dualité et le morphisme de liaison 88
§**6. Lemmes de Poincaré** **90**
6.1. Lemme de Poincaré pour la cohomologie de de Rham ordinaire 92
6.2. Lemme de Poincaré pour la cohomologie de de Rham à supports compacts 93
§**7. Dualité de Poincaré et finitude des nombres de Betti** **96**
7.1. Bons recouvrements 97
7.2. Finitude des nombres de Betti 97
7.3. Dualité de Poincaré 98
§**8. Généralités sur les catégories** **99**
8.1. Catégories et foncteurs 99
8.2. Foncteurs et naturalité 103
8.3. Catégories abéliennes 110

8.3.2. Cohomologie et catégories abéliennes ... 111
8.3.3. Exactitude des foncteurs additifs sur les catégories (de complexes) de modules ... 113
8.3.4. Exactitude des foncteurs additifs dans les catégories d'espaces vectoriels ... 115
8.3.5. Homotopies ... 116
8.4. Limites ... 118
8.4.2. Exactitude du foncteur limite inductive ... 122
§**9. Cohomologie des bicomplexes de modules** ... **126**
9.1. Complexe simple associé à un bicomplexe ... 126
9.2. Cohomologies sur un bicomplexe ... 127
9.3. Quelques propositions d'algèbre homologique à retenir ... 127
§**10. Cohomologie de Čech relative à un recouvrement dénombrable** ... **131**
10.1. Préfaisceaux de groupes abéliens ... 131
10.2. Complexe de Čech relatif à un recouvrement dénombrable ... 132
10.3. Complexe de Čech-de Rham d'une variété différentiable ... 133
§**11. Applications du complexe de Čech** ... **135**
11.1. Dualité de Poincaré revue par Čech ... 135
11.2. Formule de Künneth ... 136
§**12. Cohomologie de Čech des préfaisceaux** ... **138**
12.1. Complexe de cochaînes singulières de Čech relatives à un recouvrement ... 138
12.2. Fonctorialités des complexes de Čech relatifs aux recouvrements ... 142
12.3. Cohomologie de Čech d'un espace topologique ... 144
12.4. Complexes de Čech d'un espace topologique ... 145
12.5. Fonctorialités du complexe et de la cohomologie de Čech ... 146
12.6. Préfaisceau de complexes de Čech et faisceaux ... 147
12.7. Etude locale du préfaisceau des complexe de Čech ... 149
12.8. Théorèmes d'annulation pour la cohomologie de Čech ... 153
§**13. Cohomologie de faisceaux** ... **154**
13.1. Catégorie abélienne des préfaisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules ... 154
13.2. Catégorie abélienne des faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules ... 157
13.3. Cohomologie des faisceaux ... 164
§**14. Hyper-cohomologie des complexes de faisceaux** ... **178**
14.1. Définition de l'hyper-cohomologie d'un complexe de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules ... 180
14.2. Propriétés élémentaires de l'hyper-cohomologie ... 181
14.3. Sous-catégorie de complexes de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules bornés à gauche ... 184
14.4. Théorèmes fondamentaux de la cohomologie de faisceaux ... 186
§**15. Cohomologie de Čech de faisceaux** ... **189**
15.1. Compléments sur les faisceaux flasques et les foncteurs $\mathcal{C}^p$ de Godement ... 189
15.2. Faisceau de p-cochaînes de Čech d'un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules relatives à un recouvrement ... 191
15.3. Complexe de faisceaux des cochaînes de Čech à valeurs dans un faisceau et relatives à un recouvrement ouvert ... 192
15.4. Cohomologie singulière d'une variété différentiable ... 196
§**16. Schémas affines et variétés algébriques affines** ... **201**
16.1. Espaces topologiques nœthériens ... 202
16.2. Spectres associés à un anneau commutatif arbitraire ... 204
16.3. Spectres associés aux algèbres de type fini sur un corps ... 208
16.4. Le foncteur "Spec" vers la catégorie d'espaces topologiques ... 215
16.5. Catégorie des espaces (localement) annelés ... 217
16.6. Schéma affine associé à un anneau commutatif ... 218
16.7. Variétés algébriques affines ... 224
16.8. Catégorie des $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules quasi-cohérents ... 226
16.9. Cohomologie de faisceaux des $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules quasi-cohérents ... 231
§**17. Bibliographie** ... **239**

Avertissement. Ces notes sont une rédaction préliminaire du cours, on y trouvera les détails que les contraintes de temps ne nous permettent pas donner oralement. Bien de résultats importants

sont mentionnés sans en donner la démonstration, dans ces cas nous renvoyons à la littérature spécialisée à chaque fois que cela nous a paru nécessaire compte tenu des insuffisances des programmes d'enseignement de licence et maîtrise.

Vous trouverez beaucoup de résultats théoriques énoncés sous forme d'exercice ; ceci répond à un fait d'expérience : c'est souvent en cherchant à démontrer une assertion que l'on comprend pleinement sa signification. Comme ces résultats font partie du bagage de connaissances "minimales" que l'on doit connaître et puisqu'ils seront utilisés dans le cours, vous êtes encouragés à y réfléchir et à les retenir.

Le niveau de difficulté des exercices est très variable. Certains sont triviaux, ne nécessitent aucune écriture et leur résolution devrait être "instantanée", leur but est alors simplement d'appeler votre attention sur un fait qui, bien qu'évident, est ou sera significatif ultérieurement dans le cours. D'autres demanderont de la réflexion et une certaine dose d'initiative. Enfin, si certains exercices peuvent être laborieux, aucun ne nous paraît franchement difficile et leur ensemble constitue un très bon test de connaissances et de mise à niveau ; ne les négligez pas !

§1. Espace topologique quotient

1.1 Généralités

Dans cette section nous allons nous intéresser aux objets de la catégorie des espaces topologiques. Pour deux tels espaces $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$, l'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Top}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ des morphismes de $\boldsymbol{X}$ vers $\boldsymbol{Y}$ est l'ensemble des applications continues de $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\boldsymbol{Y}$([1]). On notera $\mathrm{Homéom}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ le sous-ensemble de $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Top}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ des morphismes inversibles, et même $\mathrm{Homéom}(\boldsymbol{X})$ lorsque $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$; ce dernier ensemble contient l'application identique sur $\boldsymbol{X}$, notée $\mathbf{1}_{\boldsymbol{X}}$, et le triplet $(\mathrm{Homéom}(\boldsymbol{X}), \circ, \mathrm{id}_{\boldsymbol{X}})$, où '$\circ$' désigne l'opération de composition des applications, est une structure de groupe.

1.1.1 Relations d'équivalence sur un espace topologique. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$. Notons $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de $\boldsymbol{X}$ modulo $\mathcal{R}$, et $\nu : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ la surjection canonique qui associe à chaque $x \in \boldsymbol{X}$ sa classe modulo $\mathcal{R}$ (notée également $\bar{x} := \nu(x)$).

1.1.1-1. Définition : Rappelons que pour toute relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble $\boldsymbol{X}$, on appelle «graphe de $\mathcal{R}$» le sous-ensemble $\mathrm{Gr}(\mathcal{R})$ de $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ des couples (x_1, x_2) tels que $x_1 \,\mathcal{R}\, x_2$.

1.1.1-2. Exercice : Montrer qu'un sous-ensemble $\mathcal{R} \subseteq \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ est une relation d'équivalence, si et seulement si, il existe une partition $\boldsymbol{X} = \amalg_{\alpha\in\mathfrak{A}} \boldsymbol{X}_\alpha$ telle que

$$\mathcal{R} = \amalg_{\alpha\in\mathfrak{A}} \boldsymbol{X}_\alpha\times\boldsymbol{X}_\alpha\,.$$

Lorsque $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, précisez le rapport entre les parties $\boldsymbol{X}_\alpha$ et les classes d'équivalence d'éléments de $\boldsymbol{X}$ module $\mathcal{R}$.

1.1.1-3. Exercice : Soient $\mathcal{R}_1$ est $\mathcal{R}_2$ deux relations sur $\boldsymbol{X}$. On dit que $\mathcal{R}_1$ est «plus fine» ([2]) que $\mathcal{R}_2$, ou bien que $\mathcal{R}_2$ est «plus grossière» que $\mathcal{R}_1$ lorsque $\mathrm{Gr}(\mathcal{R}_1) \subseteq \mathrm{Gr}(\mathcal{R}_2)$; autrement dit, si à chaque fois que l'on a $x_1 \,\mathcal{R}_1\, x_2$, on a $x_1 \,\mathcal{R}_2\, x_2$. Les relations de graphes : la diagonale([3]) de $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$, notée $\Delta_{\boldsymbol{X}}$ et $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ sont respectivement les relations d'équivalence la plus fine et la plus grossière sur $\boldsymbol{X}$.

Soit $\mathcal{R}$ une relation quelconque sur $\boldsymbol{X}$. Montrer qu'il existe une relation d'équivalence $\tilde{\mathcal{R}}$ plus fine que n'importe quelle relation d'équivalence $\mathcal{R}'$ plus grossière que $\mathcal{R}$. On appelle $\tilde{\mathcal{R}}$ «la relation d'équivalence engendrée par $\mathcal{R}$».

Soit maintenant $\boldsymbol{Y}$ un espace topologique et $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ une application telle que, pour tous $x_1, x_2 \in \boldsymbol{X}$ et vérifiant $x_1 \,\mathcal{R}\, x_2$, on ait $f(x_1) = f(x_2)$. L'application f est alors constante sur chaque classe modulo $\mathcal{R}$ et induit une application, notée $\bar{f} : \boldsymbol{X}/\mathcal{R} \to \boldsymbol{Y}$ rendant le diagramme

[1] Lorsque les objets d'une catégorie sont des ensembles et que les morphismes sont aussi des applications ensemblistes, l'opération de composition de morphismes sera, sauf mention explicite du contraire, la composition des applications. Dans un tel cas il faudra simplement s'assurer que la composition ensembliste de deux morphismes est encore un morphisme.

[2] En ce sens qu'elle distingue mieux les éléments.

[3] Rappelons que l'on appelle ainsi le sous-ensemble de $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ constitué des couples (x, x), pour tout $x \in \boldsymbol{X}$.

suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \boldsymbol{Y} \\ & {\scriptstyle\nu}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\overline{f}} & \\ & \boldsymbol{X}/\mathscr{R} & \end{array} \qquad (*)$$

On a donc $\overline{f}(\bar{x}) = f(x)$, pour tout $x \in \boldsymbol{X}$.

1.1.1-4. Exercice :

1) Montrer que l'ensemble des parties $V \subseteq \boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ telles que $\nu^{-1}(V)$ est un ouvert de $\boldsymbol{X}$, est une topologie sur $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ vérifiant la "propriété universelle suivante" :
"Pour toute application f vérifiant les conditions du paragraphe précédent, on a :

$$\boxed{f \textit{ est continue, si et seulement si, } \overline{f} \textit{ l'est}}\text{"}$$

2) Montrer qu'une topologie sur $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ vérifiant la propriété universelle précédente est nécessairement celle introduite dans la question ((1)).

1.1.1-5. Définitions : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$.

1) On appelle «topologie quotient» sur $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ *la* topologie définie dans la question ((1)) de l'exercice 1.1.1-4.
2) On appelle «espace topologique quotient de $\boldsymbol{X}$ par $\mathcal{R}$», et on le note (abusivement) $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$, l'ensemble des classes de $\boldsymbol{X}$ modulo $\mathcal{R}$ muni de la topologie quotient.

1.1.1-6. Remarque : Les fermés de la topologie quotient sont les partie F de $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ telles que $\nu^{-1}(F)$ est une partie fermée de $\boldsymbol{X}$.

1.1.1-7. Définitions : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$.

1) Une partie $A \subseteq \boldsymbol{X}$ est dite «$\mathcal{R}$-saturée» (ou simplement «saturée» lorsque $\mathcal{R}$ est sous-entendue) lorsque c'est une réunion de classes d'équivalences, ou encore, lorsque A contient tous les $x \in \boldsymbol{X}$ équivalents à au moins un élément de A. Ainsi, les ouverts (resp. fermés) de la topologie quotient sont en correspondance bijective avec les ouverts (resp. fermés) $\mathcal{R}$-saturés de $\boldsymbol{X}$.

   L'intersection d'une famille de parties $\mathcal{R}$-saturées est $\mathcal{R}$-saturée. On appelle «$\mathcal{R}$-saturation d'une partie $A \subseteq \boldsymbol{X}$» l'intersection de la famille de *toutes* les parties $\mathcal{R}$-saturées de $\boldsymbol{X}$ qui contiennent A.
2) La relation $\mathcal{R}$ est dite «ouverte» (resp. «fermée») lorsque la surjection canonique $\nu : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ est une application ouverte (resp. fermée), ou, ce qui revient au même, lorsque la $\mathcal{R}$-saturation de toute partie ouverte (resp. fermée) de $\boldsymbol{X}$ est ouverte (resp. fermée).

1.1.1-8. Exercice : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$. Notons $p_i : \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ la projection canonique $p_i((x_1, x_2)) := x_i$.
1) Soit $\boldsymbol{A}$ un sous-ensemble de $\boldsymbol{X}$ et notons $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ la $\mathcal{R}$-saturation de $\boldsymbol{A}$. Montrer l'égalité :

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = p_2(p_1^{-1}(\boldsymbol{A}) \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{R}))\,.$$

2) Montrer que si la restriction $p_1|_{\mathrm{Gr}(\mathcal{R})}$, de p_1 au graphe de $\mathcal{R}$, est une application *ouverte* (resp. *fermée*) la relation $\mathcal{R}$ est *ouverte* (resp. *fermée*).
3) Montrer que si $\mathrm{Gr}(\mathcal{R})$ est ouvert dans $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$, le relation $\mathcal{R}$ est ouverte.
4) Montrer à l'aide de la relation "identité" sur $\mathbb{R}$ que la relation peut être ouverte sans que pour autant le graphe de la relation soit ouvert.
5) Soit $\boldsymbol{X}=\mathbb{R}$ et considérons la relation :

$$x_1\,\mathcal{R}\,x_2\,,\quad \text{si et seulement si}\quad \begin{cases} x_1 = x_2\,, & \text{ou bien}\,,\\ x_i\neq 0 \quad\text{et}\quad x_1x_2=1\,. \end{cases}$$

Montrer que cette relation est une équivalence *non fermée* sur $\boldsymbol{X}$ dont le graphe est fermé.
6) Supposons l'espace $\boldsymbol{X}$ localement fermé([4]). Montrer que si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence fermée sur $\boldsymbol{X}$, le graphe $\mathrm{Gr}(\mathcal{R})$ est alors bien une partie fermée de $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$.

Indication : Soit $(x,y)\notin\mathrm{Gr}(\mathcal{R})$. Après avoir remarqué que la classe $\bar{y}$ est fermée, on montrera qu'il existe un voisinage V_x de x dans $\boldsymbol{X}$, tel que $(V_x\times\{y\})\cap\mathrm{Gr}(\mathcal{R})=\varnothing$ (faute de quoi $\bar{y}\ni x$ et donc $x\,\mathcal{R}\,y$). En particulier, si V_x est fermé, sa $\mathcal{R}$-saturation $\overline{V}_x$ sera fermée dans $\boldsymbol{X}$ et ne contiendra pas y. Il existe donc un voisinage V_y de y dans $\boldsymbol{X}$ tel que $\overline{V}_x\cap V_y=\varnothing$, i.e. tel que $V_x\times V_y\cap\mathrm{Gr}(\mathcal{R})=\varnothing$.

1.2 Sous-espaces topologiques d'un quotient

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$. Notons $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ l'espace topologique quotient et $\nu:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ la surjection canonique. Soit $\boldsymbol{Z}$ un sous-espace topologique de $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ et notons $\boldsymbol{Y}\subseteq\boldsymbol{X}$ l'image inverse par ν de $\boldsymbol{Z}$, *i.e.* $\boldsymbol{Y}=\nu^{-1}(\boldsymbol{Z})$. En tant que sous-ensemble de $\boldsymbol{X}$, la partie $\boldsymbol{Y}$ est $\mathcal{R}$-saturée, notons $\mathcal{R}|_{\boldsymbol{Y}}$ la "restriction" de $\mathcal{R}$ à $\boldsymbol{Y}$, *i.e.* on pose pour tous $y_1,y_2\in\boldsymbol{Y}$:

$$y_1\,\mathcal{R}|_{\boldsymbol{Y}}\,y_2\,,\quad \text{si et seulement si,}\quad y_1\,\mathcal{R}\,y_2\,.$$

A partir de maintenant considérons $\boldsymbol{Y}$ munie de la topologie induite par $\boldsymbol{X}$. L'application $\nu|_{\boldsymbol{Y}}$, restriction de ν à $\boldsymbol{Y}$, est alors : continue, à valeurs dans $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ et d'image $\boldsymbol{Z}$; elle est également constante sur les classes de $\mathcal{R}|_{\boldsymbol{Y}}$ et induit, par conséquent, une application **bijective** $\bar{\nu}:\boldsymbol{Y}/\mathcal{R}|_{\boldsymbol{Y}}\to\boldsymbol{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{Y} & \hookrightarrow & \boldsymbol{X} \\ \downarrow{\scriptstyle \nu|_{\boldsymbol{Y}}} & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\ \boldsymbol{Y}/\mathcal{R}|_{\boldsymbol{Y}} & \xrightarrow[\equiv]{\bar{\nu}} & \boldsymbol{Z}\subseteq\boldsymbol{X}/\mathcal{R} \end{array}$$

Cette application **n'est pas**, en toute généralité, un homéomorphisme. On a cependant le résultat suivant qui nous sera souvent utile :

1.2-1. Lemme : *Lorsque la relation $\mathcal{R}$ est **ouverte ou fermée**, l'application $\bar{\nu}$ établit un homéomorphisme de $\boldsymbol{Y}/\mathcal{R}|_{\boldsymbol{Y}}$ sur $\boldsymbol{Z}$.*

Démonstration : Nous détaillerons le cas ou la relation est ouverte et laissons l'autre cas aux soins du lecteur.

La propriété universelle de la topologie quotient garantit la continuité de $\bar{\nu}$. Son image est par définition le sous-espace $\boldsymbol{Z}$. Soit maintenant V une partie ouverte de $\boldsymbol{Y}/\mathcal{R}|_{\boldsymbol{Y}}$. L'ensemble $U:=(\nu|_{\boldsymbol{Y}})^{-1}(V)$ est alors une

[4] On appelle ainsi un espace topologique tel que tout point admet une base de voisinages fermés. Les espaces localement compacts, en particulier ceux localement homéomorphes à des ouverts des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie (variétés topologiques) en sont des exemples.

partie ouverte et $\mathcal{R}|_{\boldsymbol{Y}}$-saturée de $\boldsymbol{Y}$ (également par définition). Comme $\boldsymbol{Y}$ est $\mathcal{R}$-saturée dans $\boldsymbol{X}$, la partie U est $\mathcal{R}$-saturée dans $\boldsymbol{X}$. Soit W un ouvert de $\boldsymbol{X}$ (non nécessairement $\mathcal{R}$-saturé), tel que $W \cap \boldsymbol{Y} = U$. Notons $\tilde{W}$ la $\mathcal{R}$-saturation de W dans $\boldsymbol{X}$; alors $\tilde{W} \cap \boldsymbol{Y} = U$. En effet, soit $\tilde{w} \in \tilde{W} \cap \boldsymbol{Y}$, il existe $w \in W$ avec $w \,\mathcal{R}\, \tilde{w}$ et comme $\boldsymbol{Y}$ est $\mathcal{R}$-saturé on a également $w \in \boldsymbol{Y}$ et alors $w \in U$; mais U est $\mathcal{R}$-saturée, donc $\tilde{w} \in U$. Enfin, le fait que $\mathcal{R}$ soit *ouverte* assure que $\tilde{W}$ est une partie ouverte de $\boldsymbol{X}$. L'ensemble $\nu(\tilde{W})$ est alors un ouvert de $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ dont l'intersection avec $\boldsymbol{Z}$ coïncide avec $\bar{\nu}(V)$. L'application $\bar{\nu}$ établit donc une bijection continue *et ouverte* sur $\boldsymbol{Z}$, c'est donc bien un homéomorphisme. ∎

1.3 Séparation du quotient topologique

La continuité des applications $\nu : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ et $\nu\times\nu : \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}/\mathcal{R}\times\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ jointe au fait qu'un espace topologique $\boldsymbol{Y}$ est séparé, si et seulement si, la diagonale $\Delta_{\boldsymbol{Y}}$ est une partie fermée de $\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{Y}$, fournissent aussitôt les deux conditions suivantes nécessaires à la séparation de l'espace topologique quotient $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$:

1.3-1. Lemme : *Lorsque l'espace topologique $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ est séparé, on a*

Sep-1) *Le graphe de la relation $\mathcal{R}$ est une partie fermée de $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$.*

Sep-2) *Les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ sont des parties fermés de $\boldsymbol{X}$.*

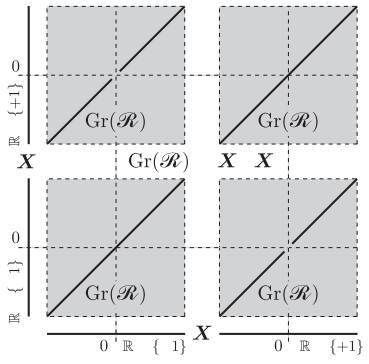
1.3-2. Exercice : Démontrer le lemme précédent en prouvant les implications :

$$\boldsymbol{X}/\mathcal{R} \text{ est séparé} \Rightarrow (1.3\text{-}1\text{-}(1)) \Rightarrow (1.3\text{-}1\text{-}(2))\,.$$

1.3-3. Remarque : La condition ((2)) ne suffit pas pour garantir la séparation de l'espace quotient. En effet, soit $\boldsymbol{X}$ le sous-espace topologique de $\mathbb{R}^2$ constitué des couples de nombres réels de la forme $(x, \pm 1)$, avec $x \in \mathbb{R}$. Notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence définie par :

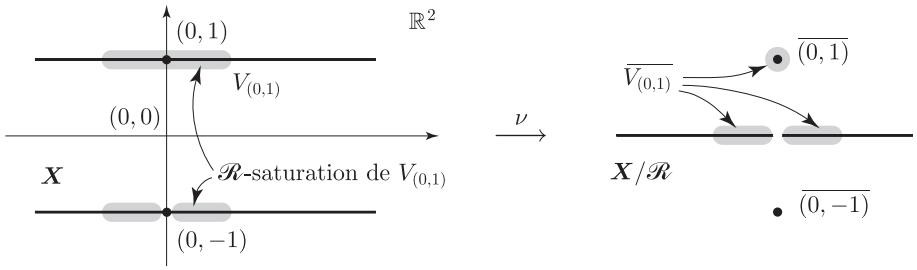
$$(x_1, y_1)\ \mathcal{R}\ (x_2, y_2)\,, \quad \text{si et seulement si,}$$
$$\begin{cases} x_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad x_1 = x_2\,, & \text{ou bien,} \\ x_1 = x_2 = 0 \quad \text{et} \quad y_1 = y_2\,. \end{cases}$$

Les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ sont de cardinal au plus deux et sont donc des parties fermées de $\boldsymbol{X}$. Par contre le graphe de $\mathcal{R}$ n'est pas fermé dans $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ (*cf.* figure ci-contre). Le quotient $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ n'est donc pas séparé.



La non séparation de $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ concerne les classes $\overline{(0,1)}$ et $\overline{(0,-1)}$. En effet, ces classes sont des éléments distincts de $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ et la $\mathcal{R}$-saturation de tout voisinage de $(0,1)$ dans $\boldsymbol{X}$ rencontre bien tout voisinage de $(0,-1)$. Il n'est donc pas possible de séparer les points $\overline{(0,1)}$ et $\overline{(0,-1)}$ dans l'espace

topologique quotient.



1.3-4. Exercice : Montrer que dans l'exemple de la remarque précédente

1) La surjection canonique $\nu : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ est ouverte.
2) La restriction de la surjection canonique $\nu : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ au sous-espace de $\boldsymbol{X}$ des couples d'ordonnée égale à 1, est bien un homéomorphisme sur son image. L'espace $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ est donc réunion de deux copies de $\mathbb{R}$.

1.3-5. Remarque : La condition ((1)) n'est pas non plus suffisante pour la séparation de $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$. Les exercices 10 et 28 (pages 101 et 105) du chapitre I de [Bou$_{\mathrm{T}}$] en donnent des contre-exemples.

Il existe cependant des situations assez générales où la condition ((1)) est bien équivalente à la séparation de la topologie quotient comme le montre la proposition suivante.

1.3-6. Proposition : *Soient $\boldsymbol{X}$ et $\mathcal{R}$ comme précédemment. Lorsque la relation $\mathcal{R}$ est* ***ouverte****, il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

1) *L'espace topologique quotient $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ est* séparé.
2) *Le graphe* $\mathrm{Gr}(\mathcal{R})$ *est une partie* fermée *de l'espace topologique produit $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$.*

Démonstration : Nous nous limiterons à rappeler la preuve de l'implication ((2))⇒((1)).

Commençons par observer que l'application $\nu\times\nu : \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}/\mathcal{R}\times\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ est ouverte. En effet, comme tout ouvert de $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ est réunion de parties de la forme $U\times U$, où U est un ouvert de $\boldsymbol{X}$, et que l'image par $\nu\times\nu$ d'une réunion est la réunion des images, on est ramené à montrer que $\nu\times\nu(U\times U) = \nu(U)\times\nu(U)$ est un ouvert de $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}\times\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$, ce qui résulte du fait que ν est ouverte. La démonstration de la proposition découle alors du fait que le complémentaire de $\nu\times\nu(\mathrm{Gr}(\mathcal{R})) = \Delta_{\boldsymbol{X}/\mathcal{R}}$ est précisément $\nu\times\nu(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}\backslash\mathrm{Gr}(\mathcal{R}))$ qui est ouvert d'après ce qui précède. ∎

1.4 Relations induites par des applications continues

Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ une application *continue* entre deux espaces topologiques. On définit alors la relation $\mathcal{R}_f$ sur $\boldsymbol{X}$ en posant :

$$x_1 \,\mathcal{R}_f\, x_2\,, \quad \text{si et seulement si,} \quad f(x_1) = f(x_2)\,.$$

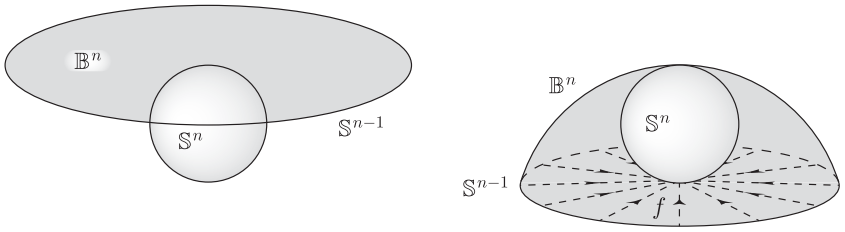
La relation $\mathcal{R}_f$ est trivialement une équivalence sur $\boldsymbol{X}$. On note $\boldsymbol{X}/f := \boldsymbol{X}/\mathcal{R}_f$.

1.4-1. Exercice :
1) Monter que si $\boldsymbol{Y}$ est un espace topologique *séparé*, il en est de même de $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$.
2) Montrer que si l'application f est ouverte (resp. fermée), la relation $\mathcal{R}_f$ sera ouverte (resp. fermée).
3) Supposons $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ compacts et f surjective. Montrer que $\overline{f} : \boldsymbol{X}/\mathcal{R}_f \to \boldsymbol{Y}$ est un homéomorphisme.

1.4-2. Exercice : Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, notons $\mathbb{B}^n$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$ (on suppose $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure d'espace euclidien canonique). Notons $\mathbb{S}^n$ la sphère unité, frontière de $\mathbb{B}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Considérons l'application $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n$ définie par :

$$f(\vec{x}) = \left(2\sqrt{\tfrac{1-\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}}\ \vec{x}, 1 - 2\|\vec{x}\|\right).$$

Montrer que f est continue. Expliciter la relation d'équivalence $\mathcal{R}_f$ et montrer que l'application $\overline{f} : \mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^n$ et un homéomorphisme.



Plus généralement, on s'intéressera au cas où $f : \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{Y}$ et que $\boldsymbol{X}' \subseteq \boldsymbol{X}$. La relation $\mathcal{R}_f$ sur $\boldsymbol{X}'$ engendre une relation d'équivalence sur $\boldsymbol{X}$ dont le graphe dans $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ est donné par $\mathrm{Gr}(\mathcal{R}_f)\cup\Delta_{\boldsymbol{X}}$. Cette relation sur $\boldsymbol{X}$ est également notée (par abus) $\mathcal{R}_f$. Le quotient de $\boldsymbol{X}$ par cette dernière relation est noté $\boldsymbol{X}/f$.

Soit $\boldsymbol{Y}$ l'espace topologique réduit à un point $\{\bullet\}$. Soit $\boldsymbol{X}' \subseteq \boldsymbol{X}$ et $f : \boldsymbol{X}' \to \{\bullet\}$ l'application constante. L'espace topologique quotient $\boldsymbol{X}/f$ est généralement noté $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{X}'$.

1.4-3. Exercice : Montrer que la projection canonique $\nu : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}/\boldsymbol{X}'$ est ouverte (resp. fermée), si $\boldsymbol{X}'$ est ouverte (resp. fermée) dans $\boldsymbol{X}$.

1.4-4. Exercice : Supposons $\boldsymbol{X}$ séparé et localement fermé.
1) Montrer que la projection canonique $\nu : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}/\boldsymbol{X}'$ est fermée, si et seulement si, $\boldsymbol{X}'$ est fermée.
2) Montrer que $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{X}'$ est séparé, si et seulement si, $\boldsymbol{X}'$ est fermé.

1.5 Relations induites par des actions de groupes

Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe. Rappelons que l'on appelle «action de $\boldsymbol{G}$ sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$», la donnée d'un homomorphisme de groupes $\rho : \boldsymbol{G} \to \mathrm{Homéom}(\boldsymbol{X})$. Pour chaque $g \in \boldsymbol{G}$, l'application $\rho(g)$ est alors un homéomorphisme de $\boldsymbol{X}$ et nous noterons $g\cdot x := \rho(g)(x)$ lorsque l'homomorphisme ρ ne mérite pas d'être précisé.

1.5-1. Définition : Pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$, notons $\boldsymbol{G} \cdot x$ l'ensemble des éléments de $\boldsymbol{X}$ de la forme $g \cdot x$, où $g \in \boldsymbol{G}$; on l'appelle «l'orbite de $\boldsymbol{G}$ passant par x».

Notons $\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}$ la relation d'équivalence sur $\boldsymbol{X}$ définie en posant :

$$x_1 \, \mathcal{R}_{\boldsymbol{G}} \, x_2 \,, \quad \text{si et seulement si,} \quad \boldsymbol{G} \cdot x_1 = \boldsymbol{G} \cdot x_2 \,.$$

1.5-2. Définition : L'espace topologique $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}$, également noté $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}$, est appelé «espace des $\boldsymbol{G}$-orbites».

1.5-3. Exercice :
1) Montrer que $\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}$ est une relation d'équivalence *ouverte*.
2) Monter $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}$ est séparé, si et seulement si, $\mathrm{Gr}(\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}})$ est fermé dans $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}$.
3) Faisons agir $\boldsymbol{G}$ sur $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}$ par l'action sur la seconde coordonnée, *i.e.* $g \dot{}_2(x_1, x_2) := (x_1, g \cdot x_2)$. Montrer l'égalité :
$$\mathrm{Gr}(\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}) = \cup_{g \in \boldsymbol{G}} \, g \dot{}_2 \Delta_{\boldsymbol{X}} \,.$$
En conclure que si $\boldsymbol{X}$ est séparé et que $\boldsymbol{G}$ est de cardinal fini, l'espace quotient $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}$ est également séparé.

1.5-4. Exercice : Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique muni d'une action d'un groupe $\boldsymbol{G}$. Soit $\boldsymbol{Y}$ un sous-espace de $\boldsymbol{X}$ stable sous l'action de $\boldsymbol{G}$. Montrer que l'application canonique de $\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{G} \to \boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}$ qui associe à chaque $\boldsymbol{G}$-orbite dans $\boldsymbol{Y}$ la $\boldsymbol{G}$-orbite dans $\boldsymbol{X}$ est un homéomorphisme sur son image.

1.5-5. Exercice : Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique muni d'une action d'un groupe $\boldsymbol{G}$. Soit $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X}$ une partie rencontrant toute $\boldsymbol{G}$-orbite de $\boldsymbol{X}$, *i.e.* $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{Y}$. Notons $\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}|_{\boldsymbol{Y}}$ la restriction de la relation d'équivalence définie par $\boldsymbol{G}$ à l'ensemble $\boldsymbol{Y}$. Supposons $\boldsymbol{Y}$ muni de la topologie induite par $\boldsymbol{X}$. Montrer que l'application d'inclusion de $\boldsymbol{Y}$ dans $\boldsymbol{X}$ induit une bijection $\boldsymbol{Y}/\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}|_{\boldsymbol{Y}} \to \boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}$ qui est un homéomorphisme.

Indication : Utiliser le lemme 1.2-1.

1.5.1 Actions proprement discontinues sans point fixe.

Dans cette section l'espace topologique $\boldsymbol{X}$ est supposé *séparé*.

1.5.1-1. Définition : On dit que l'action de $\boldsymbol{G}$ sur $\boldsymbol{X}$ est *proprement discontinue* et *sans point fixe* lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) Pour tous $x, y \in \boldsymbol{X}$ tels que $x \notin \boldsymbol{G} \cdot y$, il existe des voisinages $V_x \ni x$ et $V_y \ni y$ vérifiant

$$V_x \cap \boldsymbol{G} \cdot V_y = \varnothing \,.$$

b) Pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, il existe un voisinage $V_x \ni x$ tel que

$$V_x \cap g \cdot V_x = \varnothing\,,$$

pour tout $g \in \boldsymbol{G}$ différent de l'élément neutre.

1.5.1-2. Exercice : Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe agissant sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$.

1) Soient A et B deux sous-ensembles de $\boldsymbol{X}$. Montrer l'équivalence suivante :

$$(A\times B) \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}) = \varnothing \iff A \cap \boldsymbol{G}\cdot B = \varnothing\,.$$

2) En déduire que la condition (a) équivaut à la fermeture du graphe de $\mathcal{R}$, et donc à la séparation de l'espace quotient $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}$.

3) Montrer que la condition (b) équivaut au fait que la projection canonique $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}$ est un revêtement (*cf.* section 2.10) de fibre l'ensemble sous-jacent au groupe $\boldsymbol{G}$.

1.5.1-3. Exercice : Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe agissant de manière proprement discontinue et sans point fixe sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$ que l'on supposera *séparé et séparable*.

1) Montrer que les orbites de $\boldsymbol{G}$ sont des parties fermées et discrètes de $\boldsymbol{X}$. En déduire que $\boldsymbol{G}$ est de cardinal au plus dénombrable.

2) Supposons $\boldsymbol{X}$ compacte. Montrer que $\boldsymbol{G}$ est nécessairement fini.

3) Montrer que si $\boldsymbol{G}$ est un groupe *fini* agissant librement sur $\boldsymbol{X}$, l'action est proprement discontinue sans point fixe.

1.5.1-4. Exercice : Pour tout entier naturel n considérons le groupe additif $\boldsymbol{G}_n = \mathbb{Z}^m$ et définissons

$$(m_1,\dots,m_n)\cdot(x_1,\dots,x_n) = (x_1+m_1,\dots,y_n+m_n)\,,$$

pour tous $(m_1,\dots,m_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1) Montrer que l'opération '$\cdot$' définit une action proprement discontinue sans point fixe de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

2) Monter que l'espace topologique quotient $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est compact et localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ et isomorphe à $\mathbb{S}^1\times\cdots\times\mathbb{S}^1$ (n-facteurs).

3) Dessiner $\mathbb{T}^0$, $\mathbb{T}^1$ et $\mathbb{T}^2$.

1.5.1-5. Exercice : Soient $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{G} = \{\pm 1\}$. Faisons agir $\boldsymbol{G}$ sur $\mathbb{S}^{n-1}$ par $\pm 1\cdot x = \pm x$ (action antipodale).

1) Montrer que cette action est proprement discontinue sans point fixe.

2) Montrer que $\mathbb{S}^{n-1}/\{\pm 1\}$ est un espace compact localement homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$. On appelle cet espace «l'espace projectif réel de dimension $n-1$» et on le note $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$.

3) En faisant correspondre à chaque droite vectorielle $\mathbb{L}$ de $\mathbb{R}^n$ les points de $\mathbb{S}^{n-1}\cap\mathbb{L}$, montrer que $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ est naturellement en correspondance bijective avec l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^n$.

4) Montrer que $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à l'espace quotient du disque $\mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ muni de la relation d'équivalence définie par l'action antipodale sur la sphère frontière $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{D}^2$.

1.5.1-6. Exercice : Rappelons qu'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension finie) E muni d'une forme bilinéaire définie positive $\langle _/_ \rangle$ est appelé un «espace euclidien». En posant $N(x) := \sqrt{\langle x/x \rangle}$, le couple (E, N) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Lorsque ces données seront présentes on considérera E muni de la topologie associée à sa structure d'espace métrique pour la distance $d_N(x, y) = N(x - y)$.

Une application linéaire $\psi \in \mathcal{L}(E)$ est dite orthogonale si $\langle \varphi(x)/\varphi(y) \rangle = \langle x/y \rangle$, pour tous $x, y \in E$. On démontre qu'il y a équivalence, pour une application $\psi : E \to E$, entre : être une isométrie qui fixe l'origine, et être une application linéaire *orthogonale*. L'ensemble des isométries est stable par composition d'applications et constitue un groupe noté $\mathrm{O}(E)$ (et même $\mathrm{O}(n)$ lorsque $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire de vecteurs canonique).

Soient $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure canonique d'espace euclidien et $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une isométrie. Toute isométrie se décompose de manière unique comme la composée d'une translation et d'une application linéaire orthogonale. Il existe donc $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\psi \in \mathrm{O}(n)$, tels que pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ on ait :

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{v}_0 + \psi(\vec{x}) \,.$$

1) Montrer que φ n'a pas de point fixe([5]), si et seulement si :

$$\begin{cases} 1 \text{ est valeur propre de } \psi, \text{ et} \\ \vec{v}_0 \notin \mathrm{im}(\psi - \mathrm{id}) \end{cases}$$

2) Considérons la décomposition orthogonale

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{E}_\psi(1) \oplus H \,, \qquad (*)$$

où $\mathbb{E}_\psi(1)$ désigne le sous-espace ψ-propre de $\mathbb{R}^n$ associé à la valeur propre 1, et où $H := \mathbb{E}_\psi(1)^\perp$. Notons $\vec{w}_0$ la projection orthogonale (qui découle de $(*)$) de $\vec{v}_0$ sur $\mathbb{E}_\psi(1)$.

Montrer que la condition : $\vec{v}_0 \notin \mathrm{im}(\psi - \mathrm{id})$, équivaut à : $\vec{w}_0 \neq 0$

3) Montrer la formule :

$$\varphi^n(\vec{x}) = (\mathrm{id} + \psi + \psi^2 + \cdots + \psi^{n-1})(\vec{v}_0) + \psi^n(\vec{x}) \,,$$

pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Puis, à l'aide de (2), prouver que si φ est une isométrie *sans point fixe*, il en est de même de φ^n, quel que soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

4) Montrer la minoration :

$$\|\varphi^n(\vec{x}) - \vec{x}\| \geqslant \|(\mathrm{id} + \psi + \psi^2 + \cdots + \psi^{n-1})(\vec{v}_0)\| - 2\|\vec{x}\| \geqslant n\|\vec{w}_0\| - 2\|\vec{x}\| \,,$$

pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Prouver alors, toujours à l'aide de (2), que si φ est une isométrie *sans point fixe*,

$$\lim_{|n| \to \infty} \|\varphi^n(\vec{x}) - \vec{x}\| = \infty$$

et donc que pour chaque $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, il existe un nombre réel $\varepsilon_{\vec{x}} > 0$ tel que

$$\|\varphi^n(\vec{x}) - \vec{x}\| > \varepsilon_{\vec{x}} \,,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

5) A l'aide des résultats qui précèdent, montrer que le groupe d'isométries de $\mathbb{R}^n$ engendré par une isométrie *sans point fixe*, opère toujours de façon proprement discontinue et sans point fixe sur $\mathbb{R}^n$.

1.5.1-7. Exercice : L'exercice précédent traite du cas des groupes d'isométries sur les espaces vectoriels euclidiens de dimension finie engendrés par une isométrie sans point fixe. La généralisation à un nombre fini de générateurs du fait que l'on obtient des actions proprement discontinues sans point fixe est fausse.

Soit $\boldsymbol{G}_s$ le groupe de translations de $\mathbb{R}$ engendré par les translations $\tau_1(t) = t + 1$ et $\tau_s(t) = t + s$. Montrer que $\boldsymbol{G}_s$ opère sur $\mathbb{R}$ de façon proprement discontinue sans point fixe, si et seulement si, $s \in \mathbb{Q}$.

[5] On dit que $\vec{x}$ est un «point fixe de φ» lorsque $\varphi(\vec{x}) = \vec{x}$.

1.5.1-7.1. Remarque : La décomposition d'une isométrie de $\mathbb{R}^n$ en composition d'une translation et une application linéaire orthogonale montre que le groupe d'isométries de $\mathbb{R}^n$ est isomorphe (en tant que groupe) à un produit semi-direct $\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n)$ ($\mathbb{R}^n$ muni de sa structure de groupe additif). D'autre part $\mathrm{O}(n) \subseteq \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ est une partie *compacte* et le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$ se trouve canoniquement muni d'une structure de groupe topologique. On démontre alors que pour qu'un groupe d'isométries de $\mathbb{R}^n$ opère de façon proprement discontinue et sans point fixe sur $\mathbb{R}^n$, il faut et il suffit, qu'il soit fermé et discret dans $\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n)$ et qu'il agisse librement sur $\mathbb{R}^n$.

1.5.1-2. Exercice : Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe agissant sur l'espace topologique $\boldsymbol{X}$ et soit $\boldsymbol{H}$ un sous-groupe distingué de $\boldsymbol{G}$.

1) Pour chaque $\bar{g} \in \boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$ et chaque $\bar{x} \in \boldsymbol{X}/\boldsymbol{H}$, posons $\bar{g} \cdot \bar{x} = \overline{g \cdot x}$.

   Montrer que l'élément $\bar{g} \cdot \bar{x}$ est bien défini, *i.e.* est indépendant des représentants g, x choisis ; puis que l'on obtient ainsi une action du groupe $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$ sur $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{H}$.

2) Considérons l'application
$$\mu : \boldsymbol{X}/\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}\,,$$
qui associe à chaque $\boldsymbol{H}$-orbite de $\boldsymbol{X}$ la $\boldsymbol{G}$-orbite que la contient.

   a) Montrer que μ est continue est que la relation d'équivalence $\mathcal{R}_\mu$ qu'elle induit sur $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{H}$ est précisément la relation $\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}}$ donnée par l'action de $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$ sur $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{H}$ de la question précédente.

   b) Montrer que l'application canonique
$$\bar{\mu} : (\boldsymbol{X}/\boldsymbol{H})/(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}) \to \boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}\,,$$
   est un homéomorphisme.

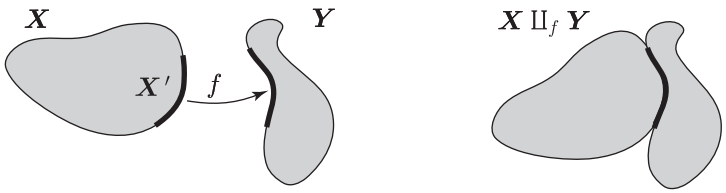
3) Montrer que $\boldsymbol{G}$ opère de façon proprement discontinue sans point fixe sur $\boldsymbol{X}$, si et seulement si, il en est de même des actions de $\boldsymbol{H}$ et de $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$ respectivement sur $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{H}$.

   En particulier, lorsque $\boldsymbol{G}$ opère de façon proprement discontinue sans point fixe sur $\boldsymbol{X}$, l'application $\mu : \boldsymbol{X}/\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}$ est un revêtement de fibre : l'ensemble sous-jacent au groupe $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$.

1.6 Recollement d'espaces topologiques

Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ deux espaces topologique, et $f : \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{Y}$ une application définie sur un sous-espace $\boldsymbol{X}'$ de $\boldsymbol{X}$, à valeurs dans $\boldsymbol{Y}$. On considère sur l'espace topologique $\boldsymbol{Z} := \boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y}$, "réunion disjointe" des espaces $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$, la relation $\mathcal{R}_f$ définie par :

$$z_1 \,\mathcal{R}_f\, z_2, \quad \text{si et seulement si,} \quad \begin{cases} z_1 = z_2\,, & \text{ou bien,} \\ z_1 \in \boldsymbol{X}' \quad \text{et} \quad z_2 = f(z_1)\,, & \text{ou bien,} \\ z_2 \in \boldsymbol{X}' \quad \text{et} \quad z_1 = f(z_2)\,, & \text{ou bien,} \\ z_1, z_2 \in \boldsymbol{X}' \quad \text{et} \quad f(z_1) = f(z_2)\,. \end{cases}$$



1.6-1. Définition : La relation $\mathcal{R}_f$ est une relation d'équivalence sur $\boldsymbol{Z}$, et l'espace topologique quotient, noté $\boldsymbol{X} \amalg_f \boldsymbol{Y}$, et appelé «recollement de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ par f». L'application f est dite «application

de recollement».

1.6-2. Exercice : Reprenons les données ci-dessus. Soit $F : (\boldsymbol{X}' \amalg \boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{Y}$ l'application définie par :

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \boldsymbol{Y}, \\ f(x), & \text{si } x \in \boldsymbol{X}'. \end{cases}$$

Montrer que F est bien continue et que $\mathcal{R}_F = \mathcal{R}_f$. Le recollement d'espaces topologiques est donc bien un cas particulier du quotient d'un espace par une fonction, *i.e.* $\boldsymbol{X} \amalg_f \boldsymbol{Y} \equiv (\boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y})/F$.

1.6-3. Exercice : Supposons $\boldsymbol{X}'$ ouvert dans $\boldsymbol{X}$ et $f : \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{Y}$ un plongement ouvert. Montrer que les applications canoniques $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X} \amalg_f \boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X} \amalg_f \boldsymbol{Y}$ sont également des plongements ouverts. On peut donc dire (par abus de langage) que $\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\}$ est un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X} \amalg_f \boldsymbol{Y}$ et que $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}'(= f(\boldsymbol{X}'))$.

1.6-4. Exercice : Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ l'application $f(x) = x$. Montrer que $\mathbb{R} \amalg_f \mathbb{R}$ est homéomorphe à l'espace quotient $\boldsymbol{X}/\mathcal{R}$ de la remarque 1.3-3.

1.6-5. Exercice : Nous avons introduit dans l'exercice 1.5.1-5 l'espace projectif réel $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ à l'aide de l'action du groupe $\boldsymbol{G} := \{\pm 1\}$ sur la sphère $\mathbb{S}^n$. Notons $\nu : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ l'application canonique. Soit $\mathbb{S}^n_+$ le sous-espace de $\mathbb{S}^n$ des points d'ordonnée $\geqslant 0$ (hémisphère nord) ; on a $\nu(\mathbb{S}^n_+) = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ et la restriction de la relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}$ sur $\mathbb{S}^n_+$ n'est autre que la relation d'équivalence "antipodale" sur l'équateur $\mathbb{S}^{n-1}$, frontière de $\mathbb{S}^n_+$ dans $\mathbb{S}^n$. D'autre part $\mathbb{S}^n_+$ est homéomorphe à la boule unité fermée $\mathbb{B}^n$ de $\mathbb{R}^n$. On conclut ainsi à l'existence d'un homéomorphisme entre $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ et l'espace topologique

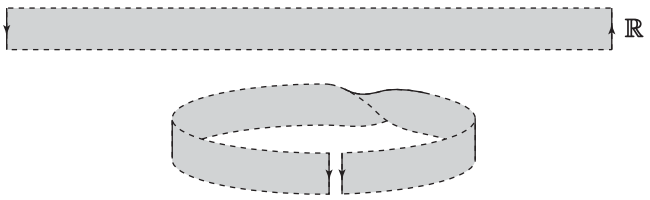
$$\boxed{\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \sim \mathbb{B}^n \amalg_{f_n} \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})}$$

où l'application de recollement f_n est définie sur $\mathbb{S}^{n-1}$ et associe à $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ sa classe module $\boldsymbol{G}$.

1.7 Quelques exemples à retenir

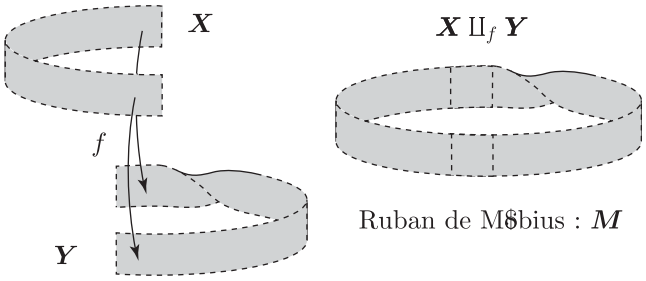
1.7.1 Ruban de Möbius.

Par identification de points d'un rectangle. La construction pratique d'un ruban de Möbius est schématisée par l'illustration suivante.



Il s'agit donc de l'espace topologique obtenu à partir d'un rectangle $\boldsymbol{X} = [-1, 1] \times \mathbb{R}$ en en identifiant les points $(-1, t)$ et $(1, -t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Par recollement de deux copies de $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} = \mathbb{R}^2$. Nous laissons aux soins du lecteur d'imaginer l'application de recollement f.



Ruban de Möbius : $\boldsymbol{M}$

Le ruban de Möbius comme quotient de $\mathbb{R}^2$ par l'action d'un groupe. Soit $\boldsymbol{G}$ le sous-groupe du groupe d'isométries de $\mathbb{R}^2$ engendré par l'application affine $\beta(x, y) = (x + 2, -y)$.

1) Montrer que l'action de $\boldsymbol{G}$ sur $\mathbb{R}^2$ est bien proprement discontinue sans point fixe.
2) Montrer que $\boldsymbol{G}\cdot([-1, 1]\times\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ et que la relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}|_{([-1,1]\times\mathbb{R})}$ coïncide avec celle introduite dans la construction du ruban de Möbius par identification de points d'un rectangle.
3) En conclure que $\mathbb{R}^2/\boldsymbol{G}$ est bien homéomorphe au ruban de Möbius.

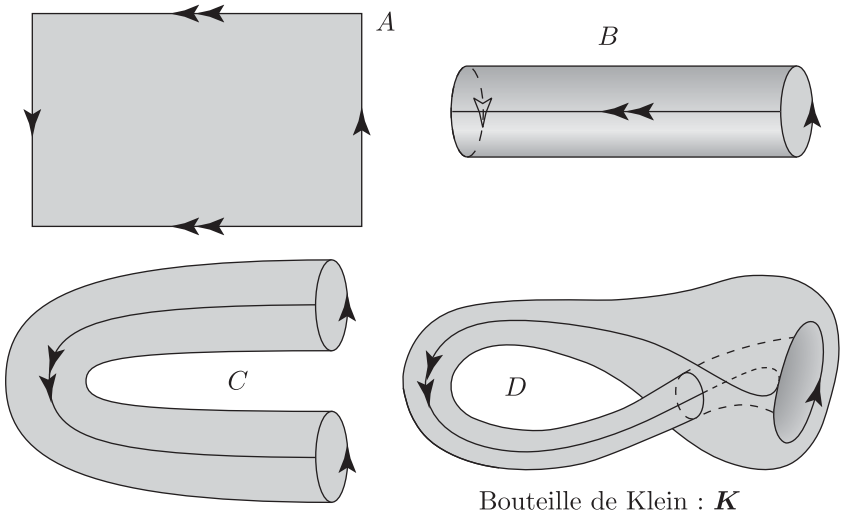
1.7.2 Bouteille de Klein.

Par identification de points d'un rectangle

La bouteille de Klein([6]) est obtenue et identifiant des points d'une bande rectangulaire $[-1, 1]\times[-1, 1]$, par exemple, suivant la relation $\mathcal{R}$: la plus fine des relations d'équivalence dont le graphe contient les couples

$$\big((t, 1), (t, -1)\big) \quad \text{et} \quad \big((1, t), (-1, -t)\big)$$

L'illustration suivante décrit le processus d'identification de points suivant deux étapes. On commence par coller les bords "horizontaux", ce qui donne un cylindre ; on colle ensuite les cercles frontière. A remarquer que le passage de C à D ne peut se faire dans $\mathbb{R}^3$ puisqu'il n'est pas possible de plonger la bouteille de Klein dans cet espace (nous prouverons ceci dans un chapitre ultérieur).

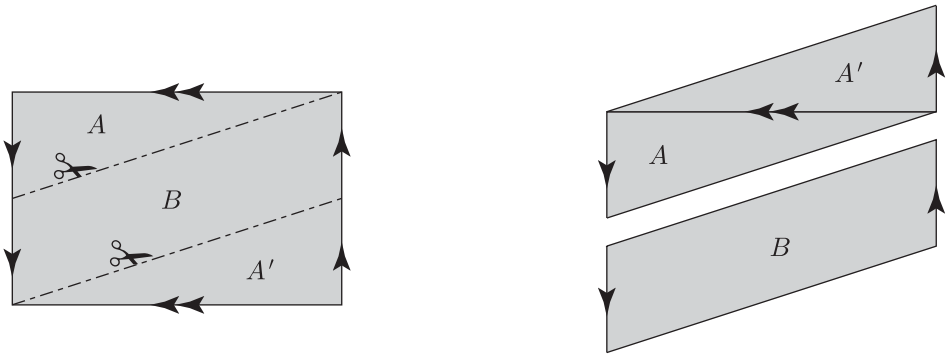


Bouteille de Klein : $\boldsymbol{K}$

[6] Les figures de cette section sont des reproductions de celles du petit livre "*Introduction à la topologie combinatoire*" de M. Fréchet et Ky Fan.

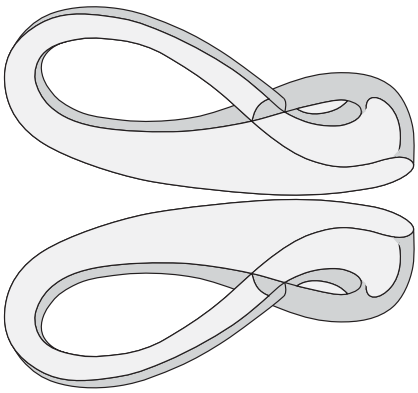
Par recollement de deux rubans de Möbius

Dans les étapes d'identification de points de la construction précédente, nous aurions pu commencer par le recollement des bords "verticaux" ; cela nous aurait donné un ruban de Möbius sur lequel des identifications des points sur son bord auraient permis de retrouver la bouteille de Klein. Plutôt que de procéder ainsi, nous allons commencer par découper le rectangle $[-1,1]\times[-1,1]$ en trois parties A, A' et B comme indique l'illustration suivante :



On colle alors les parties A et A' le long de leur bord "horizontal", ce qui fait apparaître deux parallélogrammes. Sur chacun d'eux, l'identification des points se trouvant sur les côtés "verticaux" donnera lieu à un ruban de Möbius.

C'est ainsi que la bouteille de Klein peut être décrite comme le recollement de deux rubans de Möbius le long de leur (unique) bord. L'illustration suivante suggère la façon de disposer ces rubans pour procéder au recollement voulu.



La bouteille de Klein comme quotient de $\mathbb{R}^2$ par l'action d'un groupe

Soit $\boldsymbol{G}$ le groupe d'isométries de $\mathbb{R}^2$ engendré par les applications :

$$\alpha(x,y)=(x,y+2) \quad \text{et} \quad \beta(x,y)=(x+2,-y)\,.$$

1) Montrer l'égalité : $\beta\circ\alpha\circ\beta^{-1}=\alpha^{-1}$.
2) Montrer que les éléments de $\boldsymbol{G}$ sont les isométries de la forme : $\alpha^a\circ\beta^b$, avec $a,b\in\mathbb{Z}$.
   On a : $\alpha^a\circ\beta^b(x,y)=(x+2b,(-1)^by+2a)$.
3) Prouver que $\boldsymbol{G}$ opère de façon proprement discontinue sans point fixe sur $\mathbb{R}^2$.
4) Montrer que la restriction de l'application canonique $\nu:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2/\boldsymbol{G}$ à l'ensemble $[-1,1]\times[-1,1]$ reste surjective. Montrer également que l'équivalence que cette restriction induit sur $[-1,1]\times[-1,1]$

est précisément celle qui nous a permis d'introduire la bouteille de Klein par identification de points d'un rectangle. En déduire que $\mathbb{R}^2/\boldsymbol{G}$ est homéomorphe à la bouteille de Klein.

1.7.2-1. Exercice : La question ((1)) montre que le sous-groupe $\langle\alpha\rangle$ est distingué dans $\langle\alpha,\beta\rangle$. On en déduit (*cf.* exercice 1.5.1-2) un revêtement $\mathbb{R}^2/\langle\alpha\rangle \to \boldsymbol{K}$. Montrez que $\mathbb{R}^2/\langle\alpha\rangle$ est homéomorphe au tore $\mathbb{T}^2 \equiv \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$. Décrivez l'action de $\langle\alpha,\beta\rangle/\langle\alpha\rangle \equiv \{\pm 1\}$ sur $\mathbb{T}^2$.

———————×———————

§2. Variétés différentiables

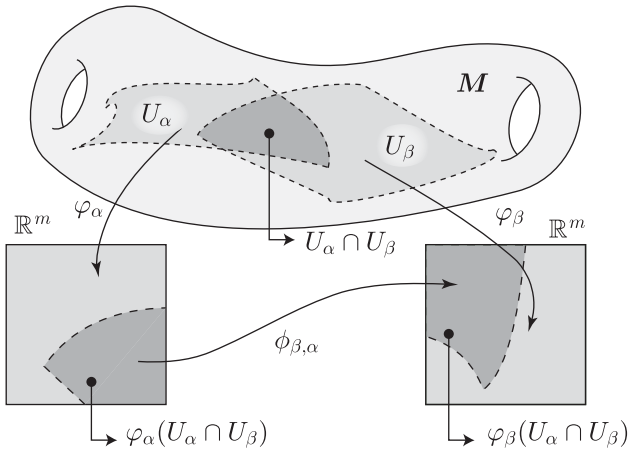
2.1 Généralités

Nous introduisons dans cette section le concept de variété différentiable de dimension finie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Les références [B-T,A-M-R,Die,Ber] suffiront largement pour les besoins du cours.

Avertissement
Dans la suite, le calcul différentiel sur les espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$ sera supposé connu. D'autre part, le mot "différentiel" sera synonyme de "de classe $\mathcal{C}^\infty$", de même les concepts de : immersion, submersion, difféomorphisme, *etc*, présupposeront cette condition.

2.1-1. Définition : Soit $\boldsymbol{M}$ un espace topologique (non nécessairement séparé). On appelle «atlas m-dimensionnel (et de classe $\mathcal{C}^\infty$) pour $\boldsymbol{M}$», la donnée d'une famille de couples $\mathcal{A} = \{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

a) La famille $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ est un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{M}$.
b) Pour chaque $\alpha\in\mathfrak{A}$, φ_α est un homéomorphisme $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^m$.
c) Pour chaque couple d'indices $\alpha,\beta\in\mathfrak{A}$ tel que $U_{\alpha\beta} := U_\alpha\cap U_\beta \neq \varnothing$, l'application, dite «de transition»,
$$\phi_{\beta,\alpha} : \varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\,,$$
définie par $\phi_{\beta,\alpha} := \varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$, est *différentiable*.



La famille $\mathcal{A} = \{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ est appelée «l'atlas de définition» de la structure de variété différentiable ainsi introduite. Chaque couple $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ est appelé : une «carte de coordonnées locales» de la variété.

2.1-2. Définition : Soit M un espace topologique. On dira que deux atlas de M «définissent la même structure différentiable» si leur réunion est encore un atlas pour M.

La relation "définir la même structure différentiable" est clairement réflexive et symétrique ; elle est aussi transitive (le vérifier). On appelle alors «structure différentiable sur M» chaque classe d'équivalence d'atlas de M.

2.1-3. Remarque sur l'atlas complet : Chaque classe d'équivalence d'atlas de M possède un représentant canonique appelé «atlas complet de la structure». On l'introduit souvent comme "réunion de tous les atlas de la classe", mais ceci n'est qu'une heuristique puisque la notion de "réunion de familles" n'a de sens en théorie des ensembles que lorsque la réunion disjointe des ensembles d'indices des différentes familles est encore un ensemble ce qui aurait présupposé des hypothèses que l'on ne fait pas dans la pratique. Il existe pourtant un moyen pour justifier l'existence de l'atlas complet. En effet, il résulte du fait que *chaque élément* d'un atlas est une application définie sur une partie de M à valeurs dans $\mathbb{R}^m$; il se représente donc à l'aide d'un sous-ensemble de $M\times\mathbb{R}^m$: son graphe. Ainsi les éléments de tous les atlas d'une classe d'équivalence d'atlas constituent un sous-ensemble de $\mathcal{P}(M\times\mathbb{R}^m)$. Cet ensemble est bien canonique et comme tout ensemble est trivialement une famille ([7]), c'est bien un atlas.

2.1-4. Définition : On appelle «variété différentiable de dimension m» la donnée d'un espace topologique muni une classe d'atlas m-dimensionnels, ou, ce qui revient au même, de atlas complet de la classe en question.

2.1-5. Notation et terminologie : Une variété différentiable est donc la donnée d'un couple $(M,\mathcal{A})$ où M est un espace topologique et $\mathcal{A}$ est un atlas sur M. Bien souvent l'atlas $\mathcal{A}$ sera sous-entendu et la variété sera désignée simplement par la notation M.

On dira que M est : séparée, compacte, dénombrable à l'infini, *etc.*, si l'espace topologique sous-jacent l'est.

2.1-6. Exercice : Toute variété différentiable est connexe par arcs, localement compacte et localement contractile, en particulier, localement connexe par arcs et localement simplement connexe. Chaque composante connexe d'une variété différentiable est une variété différentiable (de même dimension).

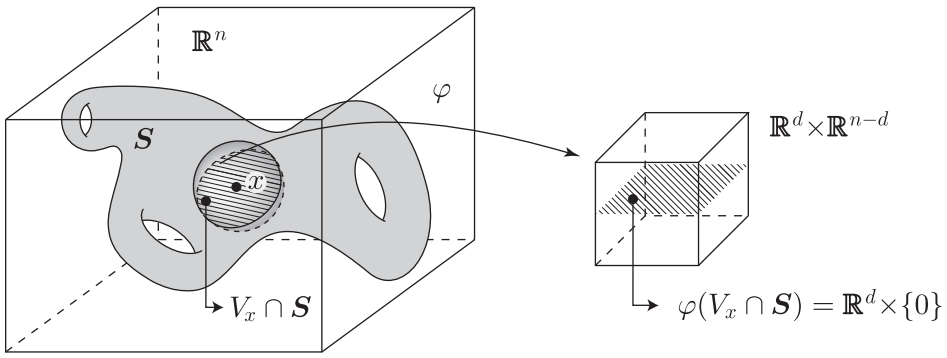
2.1-7. Exercice : Montrer que les domaines de cartes d'un atlas complet constituent une base pour la topologie de l'espace topologique sous-jacent à la variété, *i.e.* tout ouvert admet un recouvrement par de domaines de cartes de coordonnées locales.

[7] On prend comme ensemble d'indices l'ensemble lui-même ; la fonction d'indexation étant alors l'identité.

2.2 Exemples de Variétés différentiables

2.2.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

2.2.1-1. Définition : Une partie $\boldsymbol{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ est appelée «sous-variété différentiable» (et simplement «sous-variété» dans ce cours) de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, si pour tout $x \in \boldsymbol{S}$ il existe un voisinage ouvert V_x est un difféomorphisme $\varphi : V_x \to \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(V_x \cap \boldsymbol{S}) = \mathbb{R}^d \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$.



La famille de tous les couples $(V_x \cap \boldsymbol{S}, \varphi|_{V_x \cap \boldsymbol{S}})$ est un atlas (canonique) de variété différentiable pour $\boldsymbol{S}$.

2.2.1-2. Remarque : Les ouverts des sous-espaces affines de $\mathbb{R}^n$ sont des sous-variétés. Une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ est toujours localement fermée et localement connexe (par arcs). Chaque composante connexe d'une sous-variété de dimension d est une sous-variété de même dimension.

2.2.1-3. Exercice : Reprenons les notations de la définition ci-dessus. En composant φ avec la projection $p_2 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \to \mathbb{R}^{n-d}$ qui associe $p_2 : (x, y) \mapsto y$, montrer qu'une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ est, localement, l'image inverse d'un point par une submersion sur $\mathbb{R}^{n-d}$.

2.2.1-4. Exercice : Les ouverts de $\mathbb{R}^n$ sont les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimension n. Les parties discrètes (non nécessairement fermées) de $\mathbb{R}^n$ sont les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimension 0.

Sous-variétés définies par des submersions

Soient $m \geqslant n \in \mathbb{N}$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, une application différentiable *submersive*, *i.e.* telle que l'application linéaire tangente $df_x : T_x(U) = \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est surjective pour tout $x \in U$, ou, ce qui revient au même : telle que la matrice jacobienne

$$J_f(x) := \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}},$$

est de rang n pour tout $x \in U$. Dans ce cas, le calcul différentiel (de licence) nous apprend que f est localement (par rapport à U) une projection. Ceci signifie que pour tout $x_0 \in U$, il existe

un voisinage $V_{x_0} \subseteq U$, un voisinage $V_{f(x_0)} \subseteq \mathbb{R}^n$ et des difféomorphismes $\Psi_{x_0} : V_{x_0} \to \mathbb{R}^m$ et $\Psi_{f(x_0)} : V_{f(x_0)} \to \mathbb{R}^n$, tels que la composition $\Psi_{f(x_0)} \circ f \circ \Psi_{x_0}^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est la projection canonique

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Notons $y_0 := f(x_0)$. On a donc $\Psi_{x_0}(f^{-1}(y_0) \cap V_{x_0}) = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$, ce qui correspond *très précisément* à la notion de sous-variété de $\mathbb{R}^m$. Dans un tel cas, la famille de *tous* les couples :

$$\left(f^{-1}(y_0) \cap V_{x_0}, \Psi_{x_0}|_{(f^{-1}(y_0) \cap V_{x_0})}\right),$$

défini une structure (canonique) de variété différentiable de dimension $(m-n)$ sur $\boldsymbol{M} = f^{-1}(y_0)$.

2.2.1-5. Remarque : On aura observé dans ce qui précède que le rang de f est supposé "maximal" en chaque point de l'ouvert U de définition de f. Dans la pratique il est inutile de vérifier cette condition sur U tout entier. En effet, le "théorème du rang" assure que le rang d'une application différentiable est une application (à valeurs dans $\mathbb{N}$) semi-continue *inférieurement*, ce qui signifie que les rangs d'une application f aux points voisins d'un point x_0 donné, majorent toujours $\operatorname{rang}_f(x_0)$. En particulier, si $\operatorname{rang}_f(x_0)$ est maximal, il en sera de même pour tous les points d'un certain voisinage de x_0.

2.2.1-5.1. A retenir : Nous voyons donc que pour peu que $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ soit différentiable et submersive (de rang n) **en chaque point de** $\boldsymbol{M} = f^{-1}(y_0)$, il existera un ouvert $W \subseteq U$ contenant $\boldsymbol{M}$, tel que $f|_W$ est bien une submersion *en chaque point de* W. L'ensemble $\boldsymbol{M}$ sera alors une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension $m-n$.

Plus généralement, la définition même de sous-variété montre qu'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est une partie qui se voit, localement, comme image inverse d'un point par une submersion (exercice 2.2.1-3). En particulier : Si dans le paragraphe précédent $\boldsymbol{Y}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et f est submersive en tout point de $\boldsymbol{M} = f^{-1}(\boldsymbol{Y})$, la partie $\boldsymbol{M}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension $m - n + \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{Y})$.

2.2.1-6. Exercice : Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une surjection linéaire. Pour tout $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $f^{-1}(\vec{w})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^m$. Par conséquent toute sous-variété affine de $\mathbb{R}^m$ est une sous-variété différentiable et possède une structure de variété différentiable.

2.2.1-7. Exercice : Considérons une application $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de la forme :

$$f(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i\, X_i^{\varepsilon_i} \quad \text{où } \varepsilon_i \in \{1, 2\}\,,$$

et notons $\boldsymbol{M}_t := f^{-1}(t)$, pour chaque réel t.

Montrer que s'il existe i tel que $a_i \neq 0$ et $\varepsilon_i = 1$, $\boldsymbol{M}_t$ est une sous-variété pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puis, en toute généralité, que si $t \neq 0$ et $\boldsymbol{M}_t$ n'est pas vide, c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension $(m-1)$.

En particulier les ellipsoïdes, hyperboloïdes, paraboloïdes sont des variétés différentiables.

2.2.1-8. Exercice : Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable. En considérant l'application $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $F(x, y) = y - f(x)$. Montrer que $\operatorname{Gr}(f) = F^{-1}(0)$ et que le graphe d'une application différentiable possède une structure canonique de variété différentiable.

2.2.1-9. Exercice : Pour les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{M}_0 = \{(t, \sin 1/t) \mid t \neq 0\} \qquad \boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}_0 \cup \{(0,0)\} \qquad \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}_0 \cup \{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

préciser si elles sont localement fermées, localement connexes, des sous-variétés de $\mathbb{R}^2$.

2.2.1-10. Exercice : Soit $\mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ l'anneau des matrices à coefficients réels à n lignes et n colonnes.

a) Notons $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ le groupe (multiplicatif) des matrices de $\mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ de déterminant non nul. Montrer que $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

b) Notons $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices de déterminant égal à un.

Soit $\det : \mathrm{M}(n;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application déterminant. En démontrant la formule

$$d(\det)_R(H) = \det(R)\,\mathrm{tr}(R^{-1}H)$$

valable pour tour $R \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ et tout $H \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ prouver que $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ de dimension (n^2-1).

c) Notons $\mathrm{O}(n)$ le groupe des matrices orthogonales, *i.e.* les matrices A telles que $A \cdot {}^tA = \mathbf{1}$.

Soit maintenant $\mathrm{Sym(n;\mathbb{R})} \subseteq \mathrm{M}(n;\mathbb{R})$, l'ensemble (sous-espace vectoriel) des matrices symétriques, *i.e.* telles que $A = {}^tA$. Soit $f : \mathrm{M}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym(n;\mathbb{R})}$ l'application

$$f(A) := A \cdot {}^tA\,.$$

Montrez la formule :

$$df_A(H) = A \cdot {}^tH + H \cdot {}^tA\,,$$

pour tous $A, H \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R})$. En déduisez que f est une submersion en chaque point $A \in \mathrm{O}(n)$ et que $\mathrm{O}(n)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n\times n}$ dont on précisera la dimension.

Indication : On doit prouver que pour toute matrice orthogonal $A \in \mathrm{O}(n)$ et toute matrice symétrique S, il existe une matrice H telle que $S = A \cdot {}^tH + H \cdot {}^tA$, soit, telle que $S = {}^t(H \cdot {}^tA) + H \cdot {}^tA$; ce pour quoi il suffit de prendre $H = \frac{1}{2}\, S \cdot A$

d) Montrer que $\mathrm{O}(n)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Puis, en observant que le déterminant d'une matrice orthogonal est ± 1, montrer que $\mathrm{O}(n)$ possède exactement deux composantes connexes. On notera $\mathrm{SO}(n;\mathbb{R}) := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$.

e) Expliciter $\mathrm{O}(1)$ et $\mathrm{O}(2)$.

Sous-variétés définies par des immersions

De manière analogue au cas précédent, soient $m \leqslant n \in \mathbb{N}$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, une application différentiable *immersive*, *i.e.* telle que l'application linéaire tangente $df_x : T_x(U) = \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est *injective* pour tout $x \in U$.

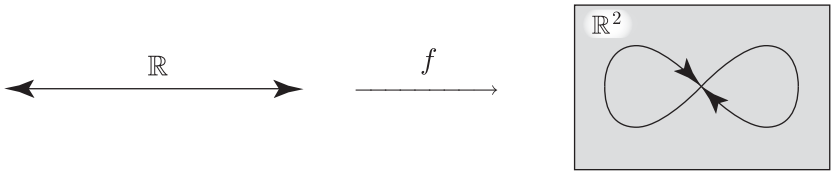
On démontre alors que pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage $V_{x_0} \subseteq U$, un voisinage $V_{f(x_0)} \subseteq \mathbb{R}^n$ et des difféomorphismes $\Psi_{x_0} : V_{x_0} \to \mathbb{R}^m$ et $\Psi_{f(x_0)} : V_{f(x_0)} \to \mathbb{R}^n$, tels que la composition $\Psi_{f(x_0)} \circ f \circ \Psi_{x_0}^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est l'injection canonique :

$$(X_1, \ldots, X_m) \mapsto (X_1, \ldots, X_m, 0, \ldots, 0)\,.$$

On a donc $\Psi_{f(x_0)}(f(V_{x_0})) = \{0\}\times\mathbb{R}^{m-n}$, ce qui montre bien que $\Psi_{f(x_0)}(f(V_{x_0}))$ est une «sous-variété» de $\mathbb{R}^m$ et possède donc une structure canonique de variété différentiable.

En faisant varier le point $x_0 \in \mathbb{R}^m$, les parties $f(V_{x_0})$ vont recouvrir l'ensemble $\boldsymbol{M} := f(U)$ mais **il n'est pas vrai en général** que $\boldsymbol{M}$ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, et ceci même si cette image est

fermée (voire compacte). L'illustration suivante en est un contre-exemple :



2.2.1-11. A retenir : La condition nécessaire et suffisante pour que l'image d'une immersion f soit une sous-variété, est que f soit un *homéomorphisme* sur son image (considérée munie de la topologie induite par l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$).

2.2.1-11. Exercice : Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable. En considérant l'application $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ définie par $F(x) = (x, f(x))$. Montrer que F est bien une immersion et que $\mathrm{Gr}(f) = F(\mathbb{R}^m)$. Montrer que l'application (ouverte) $p_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est un inverse à gauche de F. En déduire que F est un homéomorphisme sur son image et redémontrez le fait que le graphe d'une application différentiable possède une structure canonique de variété différentiable.

2.2.2 Quotients de $\mathbb{R}^n$ par des actions de groupes. Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe agissant (topologiquement) sur $\mathbb{R}^n$ et notons $\boldsymbol{M} := \mathbb{R}^n/\boldsymbol{G}$. Supposons vérifiée la condition (b) caractérisant les actions proprement discontinues sans points fixes qui affirme l'existence, pour chaque point $x \in \mathbb{R}^n$, d'un voisinage V_x vérifiant la condition :

$$V_x \cap g \cdot V_x = \varnothing\,, \qquad (*)$$

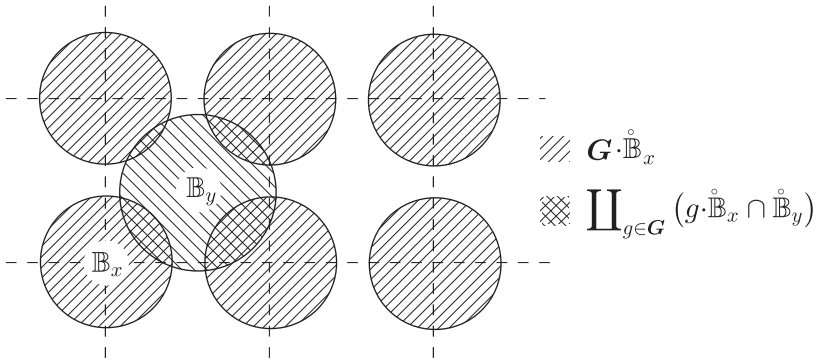
pour tout $g \in \boldsymbol{G}$ différent de l'élément neutre. Ceci signifie que la restriction de l'application canonique $\nu : \mathbb{R}^n \to \boldsymbol{M}$ à l'ouvert V_x est un plongement ouvert, *i.e.* un homéomorphisme entre V_x et son image (ouverte puisque ν est ouverte). Fixons maintenant, pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, une boule ouverte $\mathring{\mathbb{B}}_x$ centrée en x et contenue dans un voisinage vérifiant la condition $(*)$. Pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, posons $U_x := \nu(\mathring{\mathbb{B}}_x)$ et $\psi_x : U_x \to \mathring{\mathbb{B}}_x$ l'application inverse de $\nu|_{\mathring{\mathbb{B}}_x}$. La famille $\{U_x\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ est alors un recouvrement de $\boldsymbol{M}$.

Soient maintenant $x, y \in \mathbb{R}^n$ et étudions l'application :

$$\Psi_{y,x} = \psi_y \circ \psi_x^{-1} : \psi_x(U_x \cap U_y) \to \psi_y(U_x \cap U_y)$$

L'ensemble $\psi_x(U_x \cap U_y)$ est constitué des éléments de $\mathring{\mathbb{B}}_x$ dont la $\boldsymbol{G}$-orbite rencontre la boule $\mathring{\mathbb{B}}_y$; on a donc :

$$\psi_x(U_x \cap U_y) = \mathring{\mathbb{B}}_x \cap \boldsymbol{G} \cdot \mathring{\mathbb{B}}_y = \mathring{\mathbb{B}}_x \cap \big(\coprod\nolimits_{g\in\boldsymbol{G}} g^{-1} \cdot \mathring{\mathbb{B}}_y\big) = \coprod\nolimits_{g\in\boldsymbol{G}} \big(\mathring{\mathbb{B}}_x \cap g^{-1} \cdot \mathring{\mathbb{B}}_y\big)\,.$$



En raisonnant de manière analogue pour $\psi_y(U_x\cap U_y)$, nous pouvons écrire :

$$\Phi_{y,x}:\coprod_{g\in\boldsymbol{G}}\left(\mathring{\mathbb{B}}_x\cap g^{-1}\cdot\mathring{\mathbb{B}}_y\right)\longrightarrow\coprod_{g\in\boldsymbol{G}}\left(g\cdot\mathring{\mathbb{B}}_x\cap\mathring{\mathbb{B}}_y\right)$$

d'où :

$$\Psi_{y,x}\big|_{\left(\mathring{\mathbb{B}}_x\cap g^{-1}\cdot\mathring{\mathbb{B}}_y\right)}=g\big|_{\left(\mathring{\mathbb{B}}_x\cap g^{-1}\cdot\mathring{\mathbb{B}}_y\right)},$$

où 'g' désigne (par abus) à la fois : l'élément de $\boldsymbol{G}$ et l'homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par l'action en cours.

On peut donc conclure que si $\boldsymbol{G}$ opère sur $\mathbb{R}^n$ par des homéomorphismes différentiables, les applications $\Psi_{y,x}$ seront également différentiables.

Ceci étant, fixons pour chaque $x\in\mathbb{R}^n$ un difféomorphisme $\theta_x:\mathring{\mathbb{B}}_x\to\mathbb{R}^n$ et posons $\varphi_x=\theta_x\circ\psi_x$. La famille $\mathcal{A}=\{(U_x,\varphi_x)\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ est alors un atlas définissant une structure de variété différentiable sur $\mathbb{R}^n/\boldsymbol{G}$. En effet, la différentiabilité de $\phi_{y,x}=\varphi_y\circ\varphi_x^{-1}$ est équivalente à la différentiabilité de $\Psi_{y,x}$ puisque :

$$\phi_{y,x}=\theta_y\circ\Psi_{y,x}\circ\theta_x\,.$$

2.2.2-1. Remarque : Les cartes de l'atlas $\mathcal{A}$ que nous venons d'introduire dépendent évidemment des choix arbitraires qui sont intervenus lors de sa construction. On peut néanmoins vérifier que la famille de toutes les cartes, quels que soient les choix, constituent un atlas, canonique cette fois-ci, de variété différentiable sur $\boldsymbol{M}$. On référera à cette structure différentiable comme étant *la* structure de variété standard sur $\boldsymbol{M}:=\mathbb{R}^n/\boldsymbol{G}$ (voir remarque 2.3-4.1).

Nous avons ainsi prouvé la proposition suivante.

2.2.2-2. Proposition : *Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe agissant sur $\mathbb{R}^n$ par des applications* différentiables *et supposons que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, il existe un voisinage $V_x\ni x$ tel que*

$$V_x\cap g\cdot V_x=\varnothing\,,$$

pour tout $g\in\boldsymbol{G}$ différent de l'élément neutre.

L'espace topologique quotient $\boldsymbol{M}=\mathbb{R}^n/\boldsymbol{G}$ admet alors une structure de variété différentiable canonique de dimension n.

De plus, $\boldsymbol{M}$ est séparé, *si et seulement si, l'action de $\boldsymbol{G}$ est proprement discontinue sans point fixe.*

2.2.2-3. Remarque : Les tores $\mathbb{T}^n$, le ruban de Möbius, la bouteille de Klein possèdent des structures de variétés différentiables (séparées).

2.2.3 Espaces projectifs. Notons $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (corps de quaternions)([8]). L'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ est, du point de vue ensembliste, l'ensemble des droites vectorielles du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{n+1}$.

Notons $\mathbb{K}^*$ le groupe multiplicatif des éléments non nuls de $\mathbb{K}$ et faisons-le agir sur $\mathbb{K}^{n+1}$ par multiplication (à gauche) de vecteurs. Il est immédiat de constater que l'application canonique $\nu : \mathbb{K}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ qui associe à un vecteur non nul la droite $\mathbb{K}$-vectorielle qu'il engendre, est surjective et induit sur $\mathbb{K}^{n+1}\backslash\{0\}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\mathbb{K}^*}$. On a donc

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}^{n+1}/\mathbb{K}^*\,,$$

et l'on munit $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ de la topologie quotient.

Rappelons que $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^4$ et que les structures canoniques d'espace euclidien sur les espaces $\mathbb{K}^n$ sont compatibles au produit, *i.e.*

$$\|t \cdot \vec{v}\| = |t|\,\|\vec{v}\|\,, \quad \text{pour tous } t \in \mathbb{K} \text{ et } \vec{v} \in \mathbb{K}^n.$$

Il s'ensuit donc que la restriction de ν à la sphère unité de $\mathbb{K}^{n+1}$ est bien surjective et donc que $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ est un espace topologique quasi-compact. Sa compacité résultera alors de prouver qu'il est également séparé.

Or, la relation d'équivalence induite par ν sur la sphère unité de $\mathbb{K}^{n+1}$ correspond très précisément à celle donnée par l'action du sous-groupe $\mathbb{K}^*_u$ de $\mathbb{K}^*$ des éléments de $\mathbb{K}$ de "valeur absolue" égale à un. Ces ensembles sont respectivement les sphères unité de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$, *i.e.* $\{\pm 1\}$, $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^3$([9]). On voit donc bien que les graphes des relations d'équivalence sur les sphères unités de $\mathbb{K}^{n+1}$

---

[8] Le corps de quaternions, introduit en 1843 par Hamilton, a été le premier exemple d'un corps non commutatif connu en mathématique. Il est obtenu comme extension algébrique de $\mathbb{C}$ en introduisant une structure d'anneau (non commutatif) sur $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. L'extension en question est déterminée sur les éléments : $\mathbf{1} = (1,0)$, $\mathbf{i} = (i,0)$, $\mathbf{j} = (0,1)$, $\mathbf{k} = (0,i)$ en imposant les égalités :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 = \mathbf{ijk} \qquad (*)$$

La réalisation du corps de quaternions procède à partir de l'anneau $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ où l'on note $\mathbb{H}$ le sous-ensemble ($\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de dimension 4) des matrices de la forme :

$$\mathbf{x}(a,b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix},$$

pour tous $a, b \in \mathbb{C}$. On vérifie que $\mathbb{H}$ est bien stable par les opérations d'anneau de $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$, et en posant $\mathbf{1} = \mathbf{x}(1,0)$, $\mathbf{i} = \mathbf{x}(i,0)$, $\mathbf{j} = \mathbf{x}(0,1)$, $\mathbf{k} = \mathbf{x}(0,i)$ les conditions $(*)$ se trouvent vérifiées.
La relation :

$$\boxed{|\mathbf{x}(a,b)| := \sqrt{\det(\mathbf{x}(a,b))} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}}$$

montre que $|_|$ est une "valeur absolue" pour $\mathbb{H}$ (elle intervient dans démonstration du fait que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible).

[9] Il convient de retenir le fait que $\mathbb{K}^*_u$ est connexe uniquement dans les cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, ceci est à la base de l'orientabilité de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{P}_n(\mathbb{H})$ et de la non orientabilité de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ pour n pair et différent de 0 (*cf.* 4.6.2-1)

sont compacts donc fermés ; d'où la séparation de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ d'après la proposition 1.3-6 et l'exercice 1.5-3.

La structure de variété différentiable sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ procède d'observer que pour chaque $i = 0, 1, \ldots, n$, l'ensemble U_i des droites engendrées par des vecteurs $\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $x_i \neq 0$ est en bijection avec $\mathbb{K}^n$ par l'application : $\varphi_i : U_i \to \mathbb{K}^n$, définie par [10]

$$\varphi_i\Big(\big\langle (x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\big\rangle\Big) = \big(\tfrac{x_0}{x_i}, \ldots, \tfrac{x_{i-1}}{x_i}, \tfrac{x_{i+1}}{x_i} \ldots, \tfrac{x_n}{x_i}\big)$$

D'autre part, l'ensemble $U_i \subseteq \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ est bien ouvert car son image inverse par ν est l'ensemble des points de $\mathbb{K}^{n+1}\backslash\{0\}$ dans le complémentaire de l'hyperplan $\{x_i = 0\}$. On réalise de cette manière $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ comme réunion des $n+1$ ouverts $U_0, U_1, \ldots, U_n$.

Montrons que la famille $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0,\ldots,n}$ est un atlas de variété différentiable pour $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ de dimension :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{P}_n(\mathbb{K})) = n \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$$

Pour $i \neq j$, l'ouvert $U_{ij} = U_i \cap U_j$ est l'ensemble des droites vectorielles engendrées par des vecteurs dont les coordonnées d'indices i et j sont *toutes les deux* non nulles. Supposons $i < y$. L'ensemble $V^n_{i,j} = \varphi_i(U_{ij})$ est alors l'ensemble de n-uplets $(y_1, \ldots, y_n)$ tels que $y_{j-1} \neq 0$ et $V^n_{j,i} = \varphi_j(U_{ij})$ celui des $(y_1, \ldots, y_n)$ tels que $y_i \neq 0$. L'application de transition $\phi_{ji} : V^n_{i,j} \to V^n_{j,i}$ est alors la suivante :

$$(y_1, \ldots, y_n) \overset{\varphi_i^{-1}}{\longmapsto} \big\langle (y_1, \ldots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \ldots, y_n)\big\rangle \overset{\varphi_j}{\longmapsto} \Big(\tfrac{y_1}{y_j}, \ldots, \tfrac{y_{i-1}}{y_j}, \tfrac{1}{y_j}, \tfrac{y_{i+1}}{y_j}, \ldots, \widehat{\tfrac{y_j}{y_j} = 1}, \ldots, \tfrac{y_n}{y_j}\Big)$$

(où le terme sous le chapeau est à omettre). Les applications ϕ_{ji} sont donc bien différentiables et $\mathcal{A}$ est un atlas de variété différentiable pour $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$.

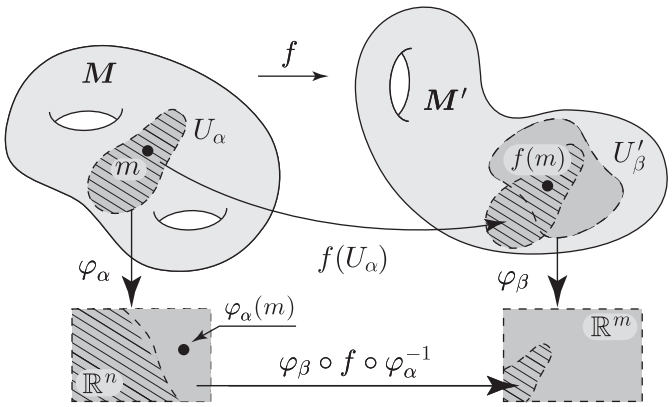
2.2.3-1. Exercice : Prouver l'existence de difféomorphismes :

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \sim \mathbb{S}^1 \qquad \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \sim \mathbb{S}^2 \qquad \mathbb{P}_1(\mathbb{H}) \sim \mathbb{S}^4 .$$

2.3 Morphismes entre variétés différentiables

2.3-1. Définition : Soient $(\boldsymbol{M}, \mathcal{A})$ et $(\boldsymbol{M}', \mathcal{A}')$ deux variétés différentiables. Une application *continue* $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}'$ est dite «morphisme de variétés» si pour chaque point $m \in \boldsymbol{M}$ il existe des cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ et $(U'_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}'$ telles que $m \in U_\alpha$, $f(m) \in U'_\beta$ et telles que l'application composée $\varphi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ (définie sur un voisinage de $\varphi_\alpha(m)$) soit différentiable.

[10] Dans le cas des quaternions une fraction de la forme $\frac{a}{b}$ désignera dans ces notes l'élément $b^{-1}a$.



Les concepts habituels de «rang d'un morphisme en un point, immersion, submersion, morphisme étal, difféomorphisme, etc.» habituels en calcul différentiel sur les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ gardent bien évidemment un sens dans le cadre des variétés différentiables.

2.3-2. Lemme :

a) *L'application identique sur une variété différentiable est un morphisme.*

b) *La composition de morphismes est encore un morphisme.*

2.3-3. Exercice : Soit $(\boldsymbol{M}, \mathcal{A})$ une variété différentiable et $h : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ un homéomorphisme de l'espace topologique sous-jacent. Notons $h \cdot \mathcal{A}$ l'atlas sur $\boldsymbol{M}$ dont les cartes sont de la forme $(h(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ h^{-1})$. L'application $h : (\boldsymbol{M}, \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{M}, h \cdot \mathcal{A})$ est alors tautologiquement un difféomorphisme.

Montrer que les atlas $\mathcal{A}$ et $h \cdot \mathcal{A}$ sont compatibles, si et seulement si, l'application $h : (\boldsymbol{M}, \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{M}, \mathcal{A})$ est un difféomorphisme de variétés.

2.3-4. Variétés homéomorphes non difféomorphes : La correspondance $\mathcal{A} \mapsto h \cdot \mathcal{A}$ du dernier exercice définit une action du groupe Homéom$(\boldsymbol{M})$ sur l'ensemble des structures différentiables de l'espace topologique $\boldsymbol{M}$. Une orbite pour cette action est très précisément un ensemble maximal de structures différentiables sur $\boldsymbol{M}$ deux-à-deux *difféomorphes*. L'exercice précédent montre que le stabilisateur d'une structure $(\boldsymbol{M}, \mathcal{A})$ est le sous-groupe Difféom$(\boldsymbol{M}, \mathcal{A}) \subseteq$ Homéom$(\boldsymbol{M})$. L'ensemble Homéom$(\boldsymbol{M})$/ Difféom$(\boldsymbol{M}, \mathcal{A})$ paramètre donc l'ensemble des structures différentiables sur $\boldsymbol{M}$ difféomorphes à $(\boldsymbol{M}, \mathcal{A})$.

La subtilité dans ces considérations vient du fait que l'action de Homéom$(\boldsymbol{M})$ sur l'ensemble des structures différentiables sur $\boldsymbol{M}$ **n'est pas transitive**, *i.e.* un espace topologique **peut admettre des structures de variété différentiable *non difféomorphes*** comme l'a montré Milnor en 1956 pour la sphère $\mathbb{S}^7$ et comme semble être également le cas pour $\mathbb{R}^4$ (*cf.* [A-M-R] page 126).

Il conviendra donc d'être précis et prudent dans la pratique lorsque, après avoir muni par des procédés divers un espace topologique de structures de variété différentiable, on affirmera qu'il s'agit bien de la "même" structure.

2.3-4.1. Remarque : Dans ce cours, les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ seront considérés munis de leur structure de variété différentiable *standard*, *i.e.* celle dont l'atlas complet contient la carte $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$. Également, toute sous-variété de $\mathbb{R}^n$ le sera relativement à cette structure standard, d'ou une structure

de variété différentiable dite *standard* pour les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

Plus généralement, si V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie d, l'ensemble des cartes de la forme (V, φ), où φ est un *isomorphisme* $\mathbb{R}$-*linéaire* de V sur $\mathbb{R}^d$ constitue bien un atlas de variété pour V. La structure standard de variété de V est, par définition, celle donnée par cet atlas. (A la rigueur une seule de ces cartes suffirait, mais la définition perdrait alors de son caractère intrinsèque.)

Signalons pour terminer que toute variété différentiable connexe de dimension 1 est difféomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{S}^1$ (munis de leur structure standard) (*cf.* [Mil]).

2.3.1 Fonctions sur les variétés différentiables.

2.3.1-1. Définition : Soit $\boldsymbol{M}$ une variété, on appelle «fonction sur $\boldsymbol{M}$» tout morphisme de $\boldsymbol{M}$ à valeurs dans la variété $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$ l'ensemble des fonctions sur $\boldsymbol{M}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$, on appelle «support de f» et on le note $|f|$, l'adhérence de l'ensemble des $x \in \boldsymbol{M}$ tels que $f(x) \neq 0$. On notera alors $\mathcal{C}^\infty_c(\boldsymbol{M})$ l'ensemble des fonctions sur $\boldsymbol{M}$ à supports compacts.

2.3.1-2. Exercice : Montrer que sur toute variété les applications constantes sont des fonctions. Montrer que somme et produit de deux fonctions sont des fonctions et donc que $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{M})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre avec identité multiplicative.

Discuter chacune des assertions précédentes pour les fonctions à supports compacts sur une variété *non compacte*.

2.3.1-3. Proposition : *Soit $\boldsymbol{M}$ une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Les fonctions de $\boldsymbol{M}$ sont les restrictions des fonctions différentiables définies sur les voisinages ouverts de $\boldsymbol{M}$ dans $\mathbb{R}^n$ et* mutatis mutandis *pour les fonctions à support compact.*

Démonstration : Soient $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un voisinage ouvert de $\boldsymbol{M}$ (supposée de dimension d) et $f : W \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Toute carte de l'atlas de définition de la structure de variété de $\boldsymbol{M}$ provient de la restriction d'un difféomorphisme $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ à $\boldsymbol{M} \cap U$ tel que $\varphi(\boldsymbol{M} \cap U) = \mathbb{R}^d \times \{0\}$. Dans un tel cas nous devons étudier la différentiabilité de l'application $f \circ \varphi^{-1}|_{\mathbb{R}^d \times \{0\}}$. Or, $f \circ \varphi^{-1}$ est définie sur le voisinage $\varphi(U \cap W) \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ de $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ et est différentiable car composée des applications différentiables ; sa restriction au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ est donc également différentiable. Comme ces raisonnements sont valables pour toute carte de l'atlas de définition, l'application f est bien une fonction de la variété $\boldsymbol{M}$.

Réciproquement, soit $f : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$ une fonction. En reprenant les notations du paragraphe précédent, la fonction $f \circ (\varphi|_{\boldsymbol{M} \cap U})^{-1}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^d \times \{0\}$. Notons

$$F_\varphi := f \circ (\varphi|_{\boldsymbol{M} \cap U})^{-1} \circ p^n_d \,,$$

où $p^n_d : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \to \mathbb{R}^d \times \{0\}$ est la projection canonique $p^n_d : (x_1, \ldots, x_d, x_{d-1}, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0)$. L'application F_φ est clairement différentiable et sa restriction à $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ coïncide avec $f \circ (\varphi|_{\boldsymbol{M} \cap U})^{-1}$. Posons $F_U = F_\varphi \circ \varphi$, c'est une fonction différentiable définie sur $U \subseteq \mathbb{R}^n$ dont la restriction à $U \cap \boldsymbol{M}$ est précisément f.

Ces raisonnements montrent bien que les fonctions de $\boldsymbol{M}$ se prolongent *localement par rapport aux points de* $\boldsymbol{M}$ en des fonctions différentiables définies sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$; il existe, par conséquent, un recouvrement

$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de $\boldsymbol{M}$ par des ouverts de $\mathbb{R}^n$ sur lesquels f admet des prolongements différentiables F_{U_α}. Soit $\{\rho_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ une partition de l'unité *à supports compacts*[11] de l'ouvert $\cup_{\alpha\in\mathfrak{A}}U_\alpha$ subordonnée à $\mathcal{U}$ et choisissons pour chaque $\beta\in\mathfrak{B}$ un indice $\alpha(\beta)\in\mathfrak{A}$ tel que $|\rho_\beta|\subseteq U_\alpha$. La somme $\sum_{\beta\in\mathfrak{B}}\rho_\beta F_{U_{\alpha(\beta)}}$ est alors localement finie et définit bien une fonction différentiable F (dont le domaine est, par ailleurs, $\mathbb{R}^n$ tout entier).

Lorsque f est à support compact on pourra se limiter à une famille *finie* de fonctions de partition et la fonction F sera elle aussi à support compact. ∎

2.3.1-4. Remarque : La démonstration précédente montre que l'application de restriction de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (resp. de $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$) à $C^\infty(\boldsymbol{M})$ (resp. de $\mathcal{C}^\infty_c(\boldsymbol{M})$) est bien définie et *surjective*.

2.3.1-5. Exercice : Soient $\boldsymbol{M}\subseteq\mathbb{R}^m$ et $\boldsymbol{N}\subseteq\mathbb{R}^n$ deux sous-variétés. Notons $\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications différentiables $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, telles que $f(\boldsymbol{M})\subseteq\boldsymbol{N}$. En utilisant les idées de la démonstration de la proposition 2.3.1-3, montrer que le morphisme de restriction $f\mapsto f|_{\boldsymbol{M}}$ est bien défini et est *surjectif* de $\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ sur l'ensemble $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ des morphismes de variétés de $\boldsymbol{M}$ vers $\boldsymbol{N}$.

2.3.1-6. Exercice : Soit $\boldsymbol{G}$ l'un des groupes déjà introduits dans l'exercice 2.2.1-10 : $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}(n)$. Montrer pour chacun de ces groupes que $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n\times n}$, puis que l'application

$$\cdot:\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G}\longrightarrow\boldsymbol{G}$$

est un morphisme de variétés.

De même, l'exercice 2.2.3 a mis en évidence les structures de groupes sur les variétés : $\mathbb{S}^0(\mathbb{R})=\mathbb{R}^*_u$, $\mathbb{S}^1(\mathbb{R})=\mathbb{C}^*_u$ et $\mathbb{S}^3(\mathbb{R})=\mathbb{H}^*_u$. Répondre à la question précédente pour ces groupes.

2.4 La catégorie des variétés différentiables

Les définitions précédentes de «variétés différentiables» et de «morphismes» constituent une catégorie que nous noterons Diff.

Pour $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$, deux variétés différentiables, on note $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ l'ensemble des morphismes de variétés. On notera $\mathrm{Difféom}(\boldsymbol{M})$ le groupe des éléments inversibles de $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{M})$.

2.4-1. Notation : On notera par $\boldsymbol{M}\sim\boldsymbol{N}$, l'existence d'un difféomorphisme entre deux variétés $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$, et par $\boldsymbol{M}\equiv\boldsymbol{N}$: l'existence d'un difféomorphisme *canonique*.

2.4-2. Proposition : *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable* connexe. *Le groupe* $\mathrm{Difféom}(\boldsymbol{M})$ *opère transitivement sur $\boldsymbol{M}$.*

[11] Voir la section 4.1.

Démonstration : Supposons $m = \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M})$. L'idée est de montrer que sur $\mathbb{R}^m$ l'orbite passant par 0 du sous-groupe de Difféom($\mathbb{R}^m$) des applications qui fixent les points extérieurs à $[-1,1]^m$, contient l'ensemble $[-1/2,1/2]^m$; ce pour quoi il suffit de raisonner par récurrence à partir de la dimension 1 où l'assertion se démontre de manière élémentaire. Or, sur chaque carte de coordonnées $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ de $\boldsymbol{M}$, un difféomorphisme qui fixe tous les points extérieurs à $\varphi^{-1}([-1/2,1/2]^m)$ se prolonge (par id) à un élément de Difféom($\boldsymbol{M}$). La conséquence de cette remarque est que les orbites de Difféom($\boldsymbol{M}$) dans $\boldsymbol{M}$ sont *ouvertes* (donc fermées). Il s'ensuit que si $\boldsymbol{M}$ est connexe l'action de Difféom($\boldsymbol{M}$) est bien transitive. ∎

2.4-3. Exercice : Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable de dimension *supérieure ou égale* à deux, et soit $\mathbb{D}$ une partie fermée et discrète de $\boldsymbol{M}$.

1) Montrer que $\boldsymbol{M}\backslash\mathbb{D}$ est connexe (par arcs).
2) Prouver que le groupe Difféom$_{\mathbb{D}}(\boldsymbol{M})$ des difféomorphismes de $\boldsymbol{M}$ qui fixent l'ensemble $\mathbb{D}$ opère transitivement sur $\boldsymbol{M}\backslash\mathbb{D}$.
3) En déduire que si $\boldsymbol{M}$ est une variété différentiable, l'action de Difféom($\boldsymbol{M}$) est r-transitive, pour tout $r \in \mathbb{N}$. (*Indication : Par induction sur r.*)

2.5 Sous-variétés d'une variété différentiable

Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable de dimension m. Une partie $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{M}$ est dite une «sous-variété de $\boldsymbol{M}$ de dimension n», si pour tout point $x \in \boldsymbol{N}$ il existe une carte $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ (dans l'atlas complet de $\boldsymbol{M}$) telle que $x \in U_\alpha$ et $\varphi_\alpha(\boldsymbol{N} \cap U_\alpha)$ s'identifie au sous-espace $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

Notons $p_n^m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la projection canonique : $p_n^m(x_1,\ldots,x_m) \mapsto (x_1,\ldots,x_n)$. On vérifie alors que la famille $\mathcal{B} = \{(U_\alpha \cap \boldsymbol{N}, p_n^m \circ \varphi_\alpha)\}$, de telles cartes constitue bien un atlas pour $\boldsymbol{N}$. La structure de variété différentiable ainsi obtenue sur $\boldsymbol{N}$ est «la structure de variété induite par $\boldsymbol{M}$».

2.5-1. Remarque : Une condition nécessaire pour qu'une partie $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{M}$ puisse être une sous-variété est qu'elle soit localement fermée.

Un ouvert de $\boldsymbol{M}$ est (trivialement) une sous variété de dimension m de $\boldsymbol{M}$, de même, par ailleurs, que toute partie discrète (non nécessairement fermée).

2.5-2. Exercice : En procédant de manière analogue au cas des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, considérons un morphisme entre deux variétés :

$$f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}\,.$$

a) Montrer que si f est un morphisme *submersif* et si $y \in \mathrm{im}(f) \subseteq \boldsymbol{N}$. L'ensemble $f^{-1}(y)$ est une sous-variété fermée de $\boldsymbol{M}$.
b) Montrer que si f est un morphisme *immersif* qui établit un *homéomorphisme* entre $\boldsymbol{M}$ et son image, l'ensemble $f(\boldsymbol{M})$ est une sous-variété de $\boldsymbol{N}$. En particulier, si $\boldsymbol{M}$ est compacte, l'image de toute immersion de $\boldsymbol{M}$ dans $\boldsymbol{N}$ est bien une sous-variété de $\boldsymbol{N}$.

2.5-3. Exercice : Généraliser les assertions de la proposition 2.3.1-3 et de l'exercice 2.3.1-5 en remplaçant $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ par des variétés différentiables.

2.6 Variété produit

Soient $(\boldsymbol{M},\mathcal{A})$ et $(\boldsymbol{N},\mathcal{B})$ deux variétés différentiables avec $\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ et $\mathcal{B}=\{(U_\beta,\beta)\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$. Notons $\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}$ la famille $\{(U_\alpha\times U_\beta,\alpha\times\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}$. L'égalité ensembliste $(U_\alpha\times U_\beta)\cap(U_{\alpha'}\times U_{\beta'})=(U_\alpha\cap U_{\alpha'})\times(U_\beta\cap U_{\beta'})$ permet alors de définir les applications de transition en posant :

$$\phi_{(\alpha',\beta'),(\alpha,\beta)}=\phi_{\alpha',\alpha}\times\phi_{\beta',\beta}\,,$$

d'où un atlas canonique sur $\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}$ pour l'espace topologique (produit) $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}$.

On appelle «variété produit» de $(\boldsymbol{M},\mathcal{A})$ et $(\boldsymbol{N},\mathcal{B})$ la variété $(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N},\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B})$.

Les projections canoniques :

$$\pi_{\boldsymbol{N}}:\begin{array}{ccc}\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}&\longrightarrow&\boldsymbol{N}\\(m,n)&\longmapsto&n\end{array}\quad\text{et}\quad\pi_{\boldsymbol{M}}:\begin{array}{ccc}\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}&\longrightarrow&\boldsymbol{M}\\(m,n)&\longmapsto&m\end{array}$$

sont alors des morphismes submersifs de variétés. Les injections canoniques :

$$\sigma_{m_0}:\begin{array}{ccc}\boldsymbol{N}&\longrightarrow&\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}\\n&\longmapsto&(m_0,n)\end{array}\quad\text{et}\quad\tau_{n_0}:\begin{array}{ccc}\boldsymbol{M}&\longrightarrow&\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}\\m&\longmapsto&(m,n_0)\end{array}$$

sont des immersions fermées (des plongements) de variétés pour tous $(m_0,n_0)\in\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}$.

2.6-1. Remarque : On observera que la structure standard de variété différentiable de $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la structure de variété produit associée à toute "mise en facteurs" : $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n_i}$ (où $n=n_1+\cdots+n_i$).

2.6-2. Exercice : Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable et notons $\Delta_{\boldsymbol{M}}$ la "diagonale de $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{M}$", *i.e.* l'ensemble des couples de la forme (x,x) pour $x\in\boldsymbol{M}$. Montrer que $\Delta_{\boldsymbol{M}}$ est une sous-variété de $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{M}$.

2.6-3. Exercice Produit fibré de variétés : Soient $f:\boldsymbol{M}\to\boldsymbol{B}$ et $\pi:\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{B}$ deux morphismes de variétés et supposons π **submersif**. Notons $\boldsymbol{M}\times_{f,\pi}\boldsymbol{P}$ le sous-ensemble de $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{P}$ des couples (m,p) tels que $f(m)=\pi(p)$. Soit $f\times\pi:\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}$ le morphisme de variétés $(m,p)\mapsto(f(m),\pi(p))$.

a) Montrer que $(f\times\pi)^{-1}(\Delta_{\boldsymbol{B}})$ est une sous-variété différentiable de $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{P}$.
*Indication : Pour chaque carte de coordonnées (U,φ) de $\boldsymbol{B}$, on considère la carte $(U\times U,\varphi\times\varphi)$ de $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}$. Soit $\xi_\varphi:U\times U\to\mathbb{R}$ l'application $\xi_\varphi(a,b)=\varphi(a)-\varphi(b)$. Cette application est **submersive** et $\Delta_{\boldsymbol{B}}\cap(U\times U)=\xi_\varphi^{-1}(0)$. En vous servant du fait que π est submersive, montrer que $\zeta_\varphi=\xi_\varphi\circ(f\times\pi)$ est submersive et que $\zeta_\varphi^{-1}(0)=\big(\boldsymbol{M}\times_{f,\pi}\boldsymbol{P}\big)\cap\big((f\times\pi)^{-1}(U\times U)\big)$. Conclure.*

b) Montrer l'égalité ensembliste $\boldsymbol{M}\times_{f,\pi}\boldsymbol{P}=\amalg_{m\in\boldsymbol{M}}\pi^{-1}(f(m))$ qui montre que $\boldsymbol{M}\times_{f,\pi}\boldsymbol{P}$ est un "recollement différentiable de fibres" de π.

c) Notons $\overline{f}$ et $\overline{\pi}$ les restrictions à $\boldsymbol{M}\times_{f,\pi}\boldsymbol{P}$ des projections canoniques $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{M}$, respectivement. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{M}\times_{f,\pi}\boldsymbol{P}&\xrightarrow{\overline{f}}&\boldsymbol{P}\\\downarrow{\scriptstyle\overline{\pi}}&&\downarrow{\scriptstyle\pi}\\\boldsymbol{M}&\xrightarrow{f}&\boldsymbol{B}\end{array}$$

Montrer que les applications $\overline{f}$ et $\overline{\pi}$ sont des morphismes de variétés et que $\overline{\pi}$ est submersif.

d) Montrer que pour tout $m\in\boldsymbol{M}$, les ensembles $\tilde{\pi}^{-1}(m)$ et $\pi^{-1}(f(m))$ sont des sous-variétés de $\boldsymbol{M}\times_{f,\pi}\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{P}$ respectivement et que $\tilde{f}|_{\tilde{\pi}^{-1}(m)}:\tilde{\pi}^{-1}(m)\to\pi^{-1}(f(m))$ est un difféomorphisme.

2.7 Variétés quotients

Le résultat suivant concerne le problème de l'existence d'une structure de variété sur le quotient d'une variété différentiable ; il est dû à Godement et le lecteur pourra consulter sa démonstration dans [God$_1$,Pha,A-M-R].

2.7-1. Théorème [Godement] : *Soient $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $\boldsymbol{M}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

a) *L'espace topologique quotient $\boldsymbol{M}/\mathcal{R}$ admet une structure de variété différentiable (et une seule) telle que la projection canonique $\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\mathcal{R}$ est une submersion.*

b) *Le graphe $\mathrm{Gr}(\mathcal{R}) \subseteq \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{M}$ est une sous-variété de la variété produit $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{M}$ et la restriction de la projection canonique $p_1 : \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ à $\mathrm{Gr}(\mathcal{R})$ est une submersion.*

Dans ces cas, la dimension de $\boldsymbol{M}/\mathcal{R}$ vaut $\big(2\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M}) - \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{R})\big)$.

2.7-2. Remarque : On exige souvent dans l'énoncé (b) du théorème que $\mathcal{R}$ soit une sous-variété *fermée* de $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{M}$. Cette donnée supplémentaire n'est utile que pour garantir la *séparation* de l'espace topologique quotient.

2.7-3. Exercice : Soient $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable séparée et $\boldsymbol{G}$ un groupe agissant par des difféomorphismes de façon proprement discontinue et sans point fixe sur $\boldsymbol{M}$.

Appliquer le théorème de Godement pour prouver l'existence d'un structure de variété différentiable sur le quotient $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$. Puis, montrer que lorsque $\boldsymbol{M} = \mathbb{R}^n$, la structure ainsi obtenue doit nécessairement coïncider avec celle introduite dans la section 2.2.2.

2.8 Groupes de Lie

2.8-1. Définition : On appelle «groupe de Lie» la donnée d'un groupe $\boldsymbol{G}$ muni d'une structure de variété différentiable telle que l'application :

$$\begin{aligned} \mu : \boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G} &\longrightarrow \boldsymbol{G} \\ (g,h) &\longmapsto gh \end{aligned} \qquad (\diamond)$$

soit un morphisme de variétés.

2.8-2. Remarque : Dans la catégorie des espaces topologiques, où les morphismes sont les applications continues, on définit un «groupe topologique» de la même manière mais on exige également que l'application $g \mapsto g^{-1}$ soit un morphisme. Cette condition est automatiquement vérifiée par les groupes de Lie (qui sont donc également des groupes topologiques).

En effet, une des conséquences immédiates de la définition est que pour tout $g \in \boldsymbol{G}$, l'application $\gamma_g : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$ qui fait correspondre $\gamma_g : h \mapsto gh$, est un difféomorphisme de $\boldsymbol{G}$. Ceci découle immédiatement de la définition de structure produit puisque alors on a la décomposition $\gamma_g = \mu \circ \sigma_g$ (voir la section 2.6) qui montre que γ_g est un morphisme de variétés. Comme par ailleurs γ_g a comme inverse $\gamma_{g^{-1}}$ qui est également un morphisme, il s'ensuit que $\gamma_g \in \mathrm{Difféom}(\boldsymbol{G})$.

Cela étant, la décomposition $\gamma_g = \mu \circ \sigma_g$, prouve la submersivité de μ. En particulier, l'ensemble $\mu^{-1}(e)$, où e désigne l'élément neutre de $\boldsymbol{G}$, sera une sous-variété de $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G}$, et comme $\mu^{-1}(e)$ est précisément le graphe de l'application $g \mapsto g^{-1}$, cette dernière est nécessairement un morphisme de variétés.[12]

2.8-3. Exemples :

a) Les variétés différentiables $\mathbb{R}^m$ munies de leur structure de groupe additif sont des groupes de Lie.

b) Nous avons introduit dans l'exercice 2.2.1-10 des structures de variétés différentiables sur les groupes $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$. Chacun de ces exemples est une sous-variété de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ et leur opération de groupe est restriction de l'opération de produit de matrices qui est différentiable ; ces groupes, munis des structures de variétés en question, sont donc des groupes de Lie.

c) Dans le même ordre d'idées, les groupes $\mathbb{R}^*_u = \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$, $\mathbb{C}^*_u = \mathbb{S}^1$ et $\mathbb{H}^*_u = \mathbb{S}^3$ que nous avons mis en évidence lors de l'introduction des espaces projectifs (*cf.* 2.2.3) sont des groupes de Lie.

Voici maintenant une généralisation des actions proprement discontinues sans points fixes. On supposera les variétés séparées.

2.8-4. Définition : On dira qu'un «groupe de Lie $\boldsymbol{G}$ agit sur une variété différentiable $\boldsymbol{M}$» lorsque l'on se donne un homomorphisme de groupes $\rho : \boldsymbol{G} \to \mathrm{Difféom}(\boldsymbol{M})$ telle que l'application :

$$\begin{aligned} \mu : \boldsymbol{G}\times\boldsymbol{M} &\longrightarrow \boldsymbol{M} \\ (g,x) &\longmapsto \rho(g)(x) \end{aligned}$$

est un morphisme des variétés.

Les exercices et remarques suivants sont à la base de la théorie des groupes de Lie.

2.8-5. Exercice : Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable munie d'une action du groupe de Lie $(\mathbb{R},+,0)$.

a) Pour tout $m \in \boldsymbol{M}$, posons $\mu_m : \mathbb{R} \to \boldsymbol{M}$ le morphisme défini par $\rho_m(t) = t\cdot m$. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

1) μ_m n'est pas une immersion en $0 \in \mathbb{R}$.

2) μ_m n'est immersive en aucun point de $\mathbb{R}$. L'application μ_m est donc constante et l'orbite $\mathbb{R}\cdot m$ est réduite à un point.

En particulier, si l'action de $\mathbb{R}$ est libre, l'application μ_m est une immersion injective.

b) Généraliser ce qui précède en montrant que si $(\mathbb{R}^n,+,0)$ agit librement sur $\boldsymbol{M}$, ces orbites sont des images d'immersions injectives de $\mathbb{R}^n$.

Indication : Montrer que si μ_m n'était pas immersive en $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, elle ne serait pas immersive en 0. Il existerait alors une droite vectorielle $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^n$ telle que $\mu_m|_{\mathbb{L}}$ ne serait pas non plus immersive en 0. Appliquer la question (a) pour conclure que l'action de $\mathbb{R}^n$ ne pourrait être libre.

[12] On utilise le fait qui affirme qu'une involution $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est différentiable, si et seulement si, son graphe est une sous-variété de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

2.8-5.1. Remarque Groupes à un paramètre : Dans le dernier exercice, ce qui permet la généralisation de la question (a) à (b), c'est bien le fait que toute droite vectorielle est un sous-groupe et une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Plus précisément ce qui est utilisé c'est le fait que lorsque l'on considère pour chaque paramétrage linéaire $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{L}$ d'une droite vectorielle $\mathbb{L}$, le vecteur $\gamma'(0)$, l'ensemble de tous les vecteurs ainsi obtenus est précisément $\mathbb{R}^n$ tout entier. Ceci relève du fait général suivant (théorème 2.8-5.1.2) pour les groupes de Lie.

2.8-5.1.1. Définition : Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe de Lie, on appelle «groupe à un paramètre» la donnée d'un homomorphisme de groupes $\gamma : \mathbb{R} \to \boldsymbol{G}$ qui soit également un morphisme de variétés.

Le résultat suivant joue un rôle important dans la partie élémentaire de la théorie des groupes de Lie ; on pourra consulter [God$_1$] ou [Pha] pour la démonstration.

2.8-5.1.2. Théorème : *Soient $\boldsymbol{G}$ un groupe de Lie de dimension d et $\Gamma(\boldsymbol{G})$ l'ensemble des groupes à un paramètre de $\boldsymbol{G}$. Soit (U, φ) une carte arbitraire de $\boldsymbol{G}$ autour de son élément neutre et considérons l'application $\theta_\varphi : \Gamma(\boldsymbol{G}) \to \mathbb{R}^d$ définie par $\gamma \mapsto (\varphi \circ \gamma)'(0)$. L'application θ_φ est* bijective.

Utilisez ce résultat dans l'exercice suivant.

2.8-3. Exercice : Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe de Lie agissant *librement* sur une variété différentiable $\boldsymbol{M}$. Montrer que quel que soit $m \in \boldsymbol{M}$, l'application $\mu_m : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{M}$, définie par $g \mapsto g \cdot m$, est une immersion. En particulier, si $\boldsymbol{G}$ est *compact* ses orbites dans $\boldsymbol{M}$ sont des sous-variétés de $\boldsymbol{M}$ difféomorphes à $\boldsymbol{G}$.

2.8-4. Théorème [Godement] : *Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe de Lie* compact *agissant librement* ([13]) *sur une variété différentiable $\boldsymbol{M}$. Il existe alors une et une seule structure de variété différentiable sur l'espace quotient $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ telle que la projection canonique $\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ est une submersion de variétés.*

Démonstration : Nous allons vérifier les conditions sur le graphe de la relation $\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}}$ exigées dans le théorème 2.7-1.

Le graphe en question est précisément l'image du morphisme :

$$\begin{aligned} \Gamma : \boldsymbol{G}\times\boldsymbol{M} &\longrightarrow \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{M} \\ (g, x) &\longmapsto (gx, x) \end{aligned}$$

et comme $\boldsymbol{G}$ est compact, cette application est propre donc fermée. L'ensemble $\mathrm{Gr}(\boldsymbol{R})$ est par conséquent une partie fermée de $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{M}$ et sera une sous-variété de $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{M}$ si Γ est immersive. Or, Γ est une immersion en (g, m), si et seulement si, elle l'est en (e, m), ceci parce que le morphisme $\gamma_g \times \mathrm{id}_{\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{G}\times\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{G}\times\boldsymbol{M}$ est un difféomorphisme qui échange l'étude différentielle de Γ autour de (g, m) par celle autour du point (e, m). Cela étant, et en prenant si besoin des cartes, nous aurons à étudier les solutions de l'équation :

$$d\Gamma_{e,m}(X, L) = \frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{G}}(e, m)(X) + \frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{M}}(e, m)(L) = 0 \qquad (\ddagger)$$

mais comme $\frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{G}}(e, m)(X)$ est de la forme $(*, 0)$ et que $\frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{M}}(e, m)(L) = (*, L)$, on conclut que nécessairement $L = 0$ et alors l'équation $(\ddagger)$ devient simplement $\frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{G}}(e, m)(X) = (0, 0)$. Or, lorsque l'on fixe $m \in \boldsymbol{M}$, la dérivée

[13] On dit qu'un groupe agit «librement» sur un ensemble $\boldsymbol{M}$ lorsque, quel que soit $x \in \boldsymbol{M}$, l'égalité $g \cdot x = x$ n'a lieu que pour $g = e$.

partielle en question sera nulle, si et seulement si, l'application $\mu_m : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{M}$, définie par $\mu_m(g) = g \cdot m$, n'est pas immersive en $e \in \boldsymbol{G}$. L'exercice 2.8-3 nous dit alors que cela est impossible du fait de la liberté de l'action de $\boldsymbol{G}$.

Le graphe $\mathrm{Gr}(\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}})$ est donc bien une sous-variété fermée de $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{M}$.

Montrons maintenant que la restriction de la projection canonique $p_1 : \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$, à $\mathrm{Gr}(\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}})$ est une submersion. Il suffira en fait de voir que la composition $p_1 \circ \Gamma : \boldsymbol{G}\times\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ l'est. Or, cette application associe $p_1 \circ \Gamma : (g, m) \mapsto m$ de sorte que la submersivité est évidente. ∎

2.8.1 Somme amalgamée de variétés différentiables. Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ deux variétés différentiables (séparées pour simplifier) **de même dimension $d > 0$**. Fixons deux points $m_0 \in \boldsymbol{M}$ et $n_0 \in \boldsymbol{N}$ et des cartes de coordonnées (V_{m_0}, φ_{m_0}) et (V_{n_0}, φ_{n_0}) respectivement dans $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$, vérifiant :

$$m_0 \in V_{m_0}, \quad \varphi_{m_0}(V_{m_0}) = \mathbb{R}^d \quad \text{et} \quad \varphi_{m_0}(m_0) = \mathbf{0}\,,$$

et *mutatis mutandis* pour $\boldsymbol{N}$. (On considère $\mathbb{R}^d$ muni de sa structure canonique d'espace euclidien.)

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur la réunion disjointe de variétés $\boldsymbol{Z} := (\boldsymbol{M} - m_0) \amalg (\boldsymbol{N} - n_0)$, par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \bullet\ z\ \mathcal{R}\ z \text{ pour tout } z \in \mathbb{Z}\,; \\ \bullet \text{ si } x \in V_{m_0} \text{ et } y \in V_{n_0}, \text{ alors :} \\ \qquad x\ \mathcal{R}\ y, \quad \text{si et seulement si,} \quad \varphi_{m_0}(x) = -\dfrac{\varphi_{n_0}(y)}{\|\varphi_{n_0}(y)\|^2}\,, \qquad (\diamond_4) \\ \text{et } \textit{mutatis mutandis} \text{ pour } x \in V_{n_0} \text{ et } y \in V_{m_0}. \end{cases}$$

(Penser à la projection stéréographique.)

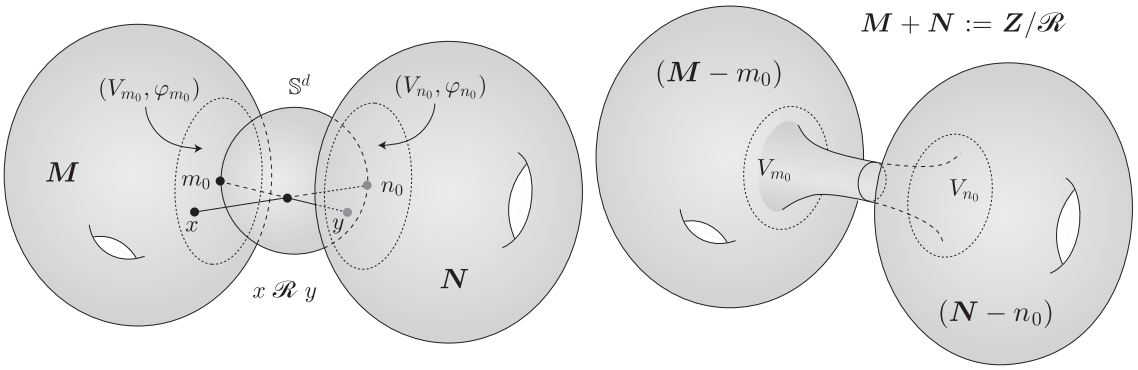
La relation $\mathcal{R}$ est *réflexive et symétrique* par construction. Puis, la condition $(\diamond_4)$, implique :

$$\|\varphi_{m_0}(x)\| = \frac{\|\varphi_{n_0}(y)\|}{\|\varphi_{n_0}(y)\|^2} = \frac{1}{\|\varphi_{n_0}(y)\|}\,,$$

et donc :

$$\frac{\varphi_{m_0}(x)}{\|\varphi_{m_0}(x)\|^2} = -\frac{\frac{\varphi_{n_0}(y)}{\|\varphi_{n_0}(y)\|^2}}{\frac{1}{\|\varphi_{n_0}(y)\|^2}} = -\varphi_{n_0}(y)\,,$$

ce qui entraîne la *transitivité* de $\mathcal{R}$. La relation est donc bien une équivalence sur $\boldsymbol{Z}$.



Graphe de $\mathcal{R}$

Dans notre cas, l'ensemble $\mathrm{Gr}(\mathcal{R})$ est composé, d'une part, de la diagonale $\Delta_{\boldsymbol{Z}}$ puisque $\mathcal{R}$ est réflexive, et d'autre part, du graphe de l'application $\phi = \varphi_{n_0}^{-1} \circ \varphi_{m_0}$ entre les ouverts $\boldsymbol{V}_{m_0}$ et $\boldsymbol{V}_{n_0}$ et du graphe de ϕ^{-1}. Nous avons donc par symétrie

$$\mathrm{Gr}(\mathcal{R}) = \Delta_{\boldsymbol{Z}} \amalg \mathrm{Gr}(\phi) \amalg \mathrm{Gr}(\phi^{-1}),$$

et comme les variétés $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont séparées :

- $\Delta_{\boldsymbol{Z}}$ sera fermé dans $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$, et
- l'ensemble $\boldsymbol{G} := \mathrm{Gr}(\phi) \cup \mathrm{Gr}(\phi^{-1})$ sera fermé dans l'ouvert $U_\phi := \big((\boldsymbol{V}_{m_0}\times\boldsymbol{V}_{n_0}) \amalg (\boldsymbol{V}_{n_0}\times\boldsymbol{V}_{m_0})\big)$ (car graphe d'applications continues) ; mais également dans $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$. En effet, soit (m,n) un point de la frontière de $\boldsymbol{G}$ dans $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$; comme (m,n) ne peut appartenir à U_ϕ, on peut supposer que m est dans la frontière de $\boldsymbol{V}_{m_0} - m_0$ dans $\boldsymbol{Z}$, dans ce cas n ne peut être que n_0 ce qui est impossible.

On conclut que $\mathrm{Gr}(\mathcal{R})$ est une partie *fermée* de $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$.

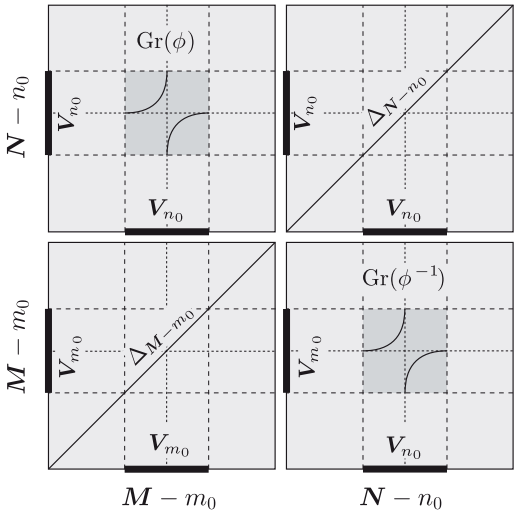
Enfin, l'application $x \mapsto (x, \phi(x))$ de $\boldsymbol{V}_{m_0} \to \mathrm{Gr}(\phi)$ est une immersion et un homéomorphisme entre $\boldsymbol{V}_{m_0}$ et $\mathrm{im}(\phi)$ (et de manière analogue pour ϕ^{-1}), de sorte que toutes les conditions pour assurer que $\mathrm{Gr}(\mathcal{R})$ est une sous-variété différentiable de $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ de dimension d sont réunies. Enfin la restriction de la projection canonique $p_1 : \boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$ à $\mathrm{Gr}(\mathcal{R})$ est trivialement une submersion aux points de la diagonale de $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ et chacune des composantes de la forme $\mathrm{Gr}(\phi)$ est $\mathrm{Gr}(\phi^{-1})$. Le théorème de Godement peut donc être appliqué à notre situation.

Nous exhibons les données du paragraphe précédent dans le graphique ci-après qui représente la variété produit $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$. On a :

$$\boldsymbol{Z} := (\boldsymbol{M} - m_0) \amalg (\boldsymbol{N} - n_0)$$

$$\mathrm{Gr}(\mathcal{R}) = \Delta_{\boldsymbol{M}-m_0} \amalg \Delta_{\boldsymbol{N}-n_0} \amalg \mathrm{Gr}(\phi) \amalg \mathrm{Gr}(\phi^{-1})$$

$$\phi(z) = -\frac{z}{\|z\|^2}.$$



L'espace topologique $\boldsymbol{Z}/\mathcal{R}$, muni de l'unique la structure de variété différentiable rendant la projection $\pi : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}/\mathcal{R}$ submersive est appelée «somme amalgamée» de $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$. A remarquer que lorsque $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont connexes, bien que le choix des points m_0 et n_0 joue un rôle incontournable dans la construction effective de la somme amalgamée, la variété résultante en est "indépendante". En effet, si d'autres points m_1 et n_1 sont choisis, les variétés obtenues restent tout de même *difféomorphes*. Ceci est conséquence du fait que, sur une variété connexe $\boldsymbol{X}$, le groupe des difféomorphismes $\mathrm{Diff}(\boldsymbol{X})$ opère de façon *transitive* sur $\boldsymbol{X}$. Les variétés $\boldsymbol{M} - m_0$ et $\boldsymbol{M} - m_1$ sont donc difféomorphes par un certain difféomorphisme Ξ de $\boldsymbol{M}$ et nous pouvons "transporter" (à l'aide de Ξ) les opérations de recollement entre $\boldsymbol{M} - m_0$ et $\boldsymbol{N} - n_0$ pour amalgamer $\boldsymbol{M} - m_1$ et $\boldsymbol{N} - n_0$. Sur les variétés obtenues, les difféomorphisme $\Xi : \boldsymbol{M} - m_0 \to \boldsymbol{M} - m_1$ et $\mathrm{id} : \boldsymbol{N} - n_0$ se recollent alors en un difféomorphisme global, etc, etc...

2.8.1-1. Remarque et notation : Lorsque les variétés $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont toutes les deux connexes, les variétés $\boldsymbol{Z}/\mathcal{R}$ sont deux-à-deux difféomorphes indépendamment des choix qui intervenus dans la construction précédente. On note souvent $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ la structure différentiable ainsi obtenue.

2.8.1-2. Exercice : Montrer que la projection canonique $\nu : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$, identifie les variétés $\boldsymbol{M}-m_0$ et $\boldsymbol{N}-n_0$ à des ouverts de $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$, notés respectivement $U_{\boldsymbol{M}}$ et $U_{\boldsymbol{N}}$, qui recouvrent $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$. Montrez que $U_{\boldsymbol{M}} \cap U_{\boldsymbol{N}}$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$.

2.8.1-3. Exercice : Montrer que lorsque $d>1$, $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ est respectivement : compacte, connexe, si et seulement si, il en est de même pour $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ (simultanément). Discuter le cas $d=1$.

2.8.2 Variétés différentiables abstraites. Nous voudrions insister sur un point des fondements de la théorie des variétés différentiables. Dans la définition la plus répandue de la notion de variété différentiable, **on part** d'un espace topologique $\boldsymbol{Y}$ (supposé souvent : séparé, paracompact, dénombrable à l'infini, etc, suivant les besoins de l'auteur) que l'on **munit d'une structure de variété différentiable de dimension** n à l'aide d'une famille de cartes recouvrant $\boldsymbol{Y}$ et dont les applications de transition sont des difféomorphismes entre des ouverts de $\mathbb{R}^n$. On peut résumer cette démarche en disant que l'on part d'une vision globale et très floue de la variété (l'espace topologique $\boldsymbol{Y}$) pour, en s'en rapprochant, percevoir les détails de son aspect local (sa *structure différentiable* à travers les images des cartes). La démarche inverse, que nous allons décrire dans les paragraphes suivants, apparaît pourtant très naturellement dans la pratique, elle est validée par le théorème de Godement.

Soit $(\boldsymbol{M},\mathcal{A})$ une variété différentiable de dimension m et d'atlas $\mathcal{A}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ et considérons l'ensemble $\mathcal{A}(m) := \coprod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathbb{R}^m$ muni de structure de variété différentiable «réunion disjointe de variétés». Notons $\mathcal{A}(m)_\alpha$ la composante connexe de $\mathcal{A}(m)$ correspondante à l'indice α et considérons l'application

$$\Phi : \coprod\nolimits_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{A}(m)_\alpha \longrightarrow \boldsymbol{M}$$

définie par φ_α^{-1} sur $\mathcal{A}(m)_\alpha$, pour chaque $\alpha\in\mathfrak{A}$. L'application Φ est alors (tautologiquement) une submersion de variétés. Notons $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathcal{A}(m)$ définie par $x\ \mathcal{R}\ y$, si et seulement si, $\Phi(x)=\Phi(y)$. Le graphe $\mathrm{Gr}(\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{A}(m)\times\mathcal{A}(m)$ est l'image inverse de la diagonale de $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{M}$ par le morphisme $\Phi\times\Phi$ et comme ce dernier est submersif, l'ensemble $\mathrm{Gr}(\mathcal{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{A}(m)\times\mathcal{A}(m)$ de dimension m, ce qui équivaut à dire que sa «trace» sur chaque produit $\mathcal{A}(m)_\alpha\times\mathcal{A}(m)_\beta$ l'est également. Or, cette trace est, soit vide, soit le graphe d'un difféomorphisme d'un ouvert $U(\alpha,\beta)_\alpha\in\mathcal{A}(m)_\alpha$ sur un ouvert $U(\alpha,\beta)_\beta\in\mathcal{A}(m)_\beta$ qui n'est autre que l'application de transition entre les ouverts $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ et $\varphi_\beta(U_\beta)$. Ces remarques montrent le graphe de la relation $\mathcal{R}$ dépend uniquement des applications de transition entre des ouverts de $\mathbb{R}^m$; l'existence et la nature de *l'espace topologique* $\boldsymbol{M}$ seront conséquences, *a posteriori*, du théorème 2.7-1, en particulier ces données ne sont pas indispensables pour définir la variété $\boldsymbol{M}$.

2.8.2-1. Définition : Une variété différentiable *abstraite* de dimension m est la donnée :

a) d'un ensemble d'indices $\mathfrak{A}$,

b) d'une partie $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$ (d'incidences) symétrique et contenant la diagonale de $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$,

c) pour chaque $(\alpha,\beta) \in \mathfrak{I}$, d'un couple $\big(U(\alpha,\beta)_\alpha, U(\alpha,\beta)_\beta\big)$ d'ouverts de $\mathbb{R}^m$ et d'une application différentiable :

$$\phi_{\beta,\alpha} : U(\alpha,\beta)_\alpha \longrightarrow U(\alpha,\beta)_\beta$$

de telle sorte que pour tous $(\alpha,\beta) \in \mathfrak{I}$ on ait :

c-1) $U(\alpha,\alpha)_\alpha = \mathbb{R}^m$ et $\phi_{\alpha,\alpha} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$.

c-2) $U(\alpha,\beta)_\alpha = U(\beta,\alpha)_\alpha$.

c-3) Pour tous (α,β), (β,γ) et (γ,α) dans $\mathfrak{I}$, tels que $U(\alpha,\beta)_\beta \cap U(\gamma,\beta)_\beta \neq \varnothing$, les applications $\phi_{\gamma,\alpha}$ et $\phi_{\gamma,\beta}\circ\phi_{\beta,\alpha}$ prennent les mêmes valeurs aux points communs de leur domaine de définition.

Nous aurons l'occasion d'utiliser ce point de vue lors de l'introduction de la variété d'orientation associée à variété.

2.9 Fibrations localement triviales

2.9-1. Définitions : Soit $\pi : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{B}$ une application continue entre deux espaces topologiques. On dit que π est un «fibration localement triviale de fibre l'espace topologique $\boldsymbol{F}$», si pour tout $b \in \boldsymbol{B}$, il existe un voisinage V_b et un homéomorphisme $\phi_{V_b} : \pi^{-1}(V_b) \to V_b\times\boldsymbol{F}$ rendant la diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(V_b) & \xrightarrow{\phi_{V_b}} & V_b\times\boldsymbol{F} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ V_b & \xrightarrow{\mathrm{id}} & V_b \end{array}$$

où $p_1(v,z) = v$. On dit alors que π est «trivialisable au-dessus de V_b», ou encore que V_b est un «ouvert de trivialisation de la fibration».

L'espace $\boldsymbol{B}$ est appelé «la base de la fibration», et l'espace $\boldsymbol{P}$: «l'espace total de la fibration» ou encore «l'espace fibré au-dessus de $\boldsymbol{B}$». On référera souvent à une fibration localement triviale par la notation $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{B},\pi)$, et même uniquement par l'application π.

Une fibration localement triviale $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{B},\pi)$ est dite «trivialisable», si $\boldsymbol{B}$ est un ouvert de trivialisation. Dans ce cas $\boldsymbol{P} \sim \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{F}$.

Lorsque les données appartiennent à la catégorie des variétés différentiables, on obtient la notion de «fibration localement triviale de variétés». Notons $d_{\boldsymbol{B}}$, $d_{\boldsymbol{F}}$ et $d_{\boldsymbol{P}}$ les dimensions respectives de $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{P}$, on a $d_{\boldsymbol{P}} = d_{\boldsymbol{B}} + d_{\boldsymbol{F}}$.

2.9-2. Avertissement : Dans ce cours, les expressions «fibration localement triviale» et «fibration» seront synonymes.

2.9-2. Exercice : Soit $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{B},\pi)$ une fibration de fibre $\boldsymbol{F}$. L'espace $\boldsymbol{P}$ est séparé, si et seulement si, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{F}$ le sont.

2.9-3. Exercice : Soit $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \pi)$ une fibration de variétés de fibre $\boldsymbol{F}$. L'application π est une submersion surjective, de sorte que si $\boldsymbol{B}' \subseteq \boldsymbol{B}$ une sous-variété, l'ensemble $\pi^{-1}(\boldsymbol{B}')$ est une sous-variété de $\boldsymbol{P}$. Montrer que $(\pi^{-1}(\boldsymbol{B}'), \boldsymbol{B}', \pi)$ est une fibration de variétés de fibre $\boldsymbol{F}$; on l'appelle «la restriction de la fibration π à $\boldsymbol{B}'$»

2.9-4. Exercice : En vous servant des idées de l'exercice 2.6-3 montrer que si $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \pi)$ est une fibration de fibre $\boldsymbol{F}$, et si $f : \boldsymbol{B}' \to \boldsymbol{B}$ est un morphisme, alors le produit fibré $(\boldsymbol{B}' \times_{f,\pi} \boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}', \tilde{\pi})$ est également une fibration de fibre $\boldsymbol{F}$; l'espace fibré total $\boldsymbol{B}' \times_{f,\pi} \boldsymbol{P}$ est appelé «fibré image inverse par f» et est souvent noté $f^{-1}(\boldsymbol{P})$, la projection $\tilde{\pi}$ sera notée alors $f^{-1}(\pi)$.

Morphisme de fibrations

2.9-5. Définition : Soient $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{B}_1, \pi_1)$ et $(\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{B}_2, \pi_2)$ deux fibrations. Un «morphisme de fibrations π_1 vers π_2» est la donnée de deux morphismes $f : \boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{P}_2$ et $g : \boldsymbol{B}_1 \to \boldsymbol{B}_2$, tels que $\pi_2 \circ f = g \circ \pi_1$, il sera noté par $(f, g) : (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{B}_1, \pi_1) \to (\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{B}_2, \pi_2)$. En particulier, l'application f restreinte à "la fibre" $\pi_1^{-1}(b)$ est à valeurs dans la fibre $\pi_2^{-1}(g(b))$.

Lorsque $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2$, on dit que f est un «morphisme de fibrations au-dessus de $\boldsymbol{B}$» ou encore un «$\boldsymbol{B}$-morphisme» si $(f, \mathrm{id}_{\boldsymbol{B}})$ est un morphisme de fibrations ; il sera noté par $f : (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{B}, \pi_1) \to (\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{B}, \pi_2)$.

2.9-6. Exercice : Les définitions qui précédent permettent de définir la catégorie des fibrations au-dessus d'une variété donnée $\boldsymbol{B}$. Pour tout morphisme $f : \boldsymbol{B}' \to \boldsymbol{B}$, et tout $\boldsymbol{B}$-morphisme $g : (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{B}, \pi_1) \to (\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{B}, \pi_2)$, on définit une application $f^{-1}(g) : f^{-1}(\boldsymbol{P}_1) \to f^{-1}(\boldsymbol{P}_2)$ fibre-à-fibre, *i.e.* : en composant, pour chaque $b' \in \boldsymbol{B}'$:

$$\big(f^{-1}(\pi_1)\big)^{-1}(b') \xrightarrow[\equiv]{\bar{f}} \pi_1^{-1}(f(b')) \xrightarrow{\ g\ } \pi_2^{-1}(f(b')) \xleftarrow[\equiv]{\bar{f}} \big(f^{-1}(\pi_2)\big)^{-1}(b')\,.$$

L'application $f^{-1}(g)$ est un $\boldsymbol{B}'$-morphisme et la correspondance f^{-1} est alors fonctorielle et covariante de la catégorie de fibrations au-dessus de $\boldsymbol{B}$ vers la catégorie de fibrations au-dessus de $\boldsymbol{B}'$.

2.9-7. Exercice : Soient $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \pi)$ une fibration de variétés et $f : \boldsymbol{B}' \to \boldsymbol{B}$ l'inclusion canonique d'une sous-variété $\boldsymbol{B}'$ de $\boldsymbol{B}$. Montrer que les fibrations "restriction de π à $\boldsymbol{B}'$" et "image inverse de π par f" des exercices 2.9-3 et 2.9-4 sont $\boldsymbol{B}'$-isomorphes.

Sections d'une fibration

2.9-8. Définition : Soit $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \pi)$ une fibration. Une application continue $\sigma : U \to \boldsymbol{P}$ définie sur un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{B}$ est appelée «section de π» si l'on a $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$. Lorsque $U = \boldsymbol{B}$, on dit que σ est une «section globale».

2.9-9. Remarque : Une section de $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \pi)$ s'identifie donc à un $\boldsymbol{B}$-morphisme de $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}, \mathrm{id}_{\boldsymbol{B}})$ vers $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \pi)$.

2.9-10. Remarque : Dans une fibration, le liens d'interdépendance entre les faits *d'être trivialisable* et de *posséder des sections globales* sont subtils. Rappelons que :

a) Une fibration trivialisable possède toujours des sections globales, mais la réciproque est fausse (*cf.* exercice 2.9-3).

b) Une fibration de fibre homéomorphe à un espace vectoriel de dimension finie admet des sections globales. (Voir [Die] **16.12.13** page 82.) Mais, en général, il n'y a aucune raison pour que la fibration soit triviale.

2.9-10-b.1. Exercice : Reprenons la construction du ruban de Möbius sous la forme $\boldsymbol{M} = \mathbb{R}^2/\boldsymbol{G}$ de la section 1.7.1.

1) Montrer que le sous-espace $\mathbb{R}\times\{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ est $\boldsymbol{G}$-stable et que la projection canonique $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\times\{0\}$ est compatible à l'action de $\boldsymbol{G}$; puis que la projection p_1 induit une application $\pi : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}\times\{0\}/\boldsymbol{G} \sim \mathbb{S}^1$ qui est une fibration de fibre $\mathbb{R}$.

2) Montrer que cette fibration n'est pas trivialisable en remarquant que pour toute section $\sigma : \mathbb{S}^1 \to \boldsymbol{M}$ l'ensemble $\boldsymbol{M}\backslash\mathrm{im}\sigma$ est connexe

c) L'équivalence entre la trivialisation et l'existence de sections globales est pourtant vérifiée dans la situation suivante :

Soient $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable et $\boldsymbol{G}$ un groupe de Lie. Supposons donnée une action libre et différentiable de $\boldsymbol{G}$ sur $\boldsymbol{M}$ telle que l'espace quotient $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ admette une structure de variété différentiable rendant l'application canonique $\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ submersive (p.ex. si $\boldsymbol{G}$ est compact d'après 2.8-4).

1) Montrer que lorsque ces conditions sont réunies le morphisme canonique $\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ est une fibration trivialisable, si et seulement si, elle admet une section globale. (Voir l'exercice 2.9-4.)

2) En conclure que $\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ est toujours une fibration localement triviale.

2.9-2. Remarque : Dans la catégorie des variétés différentiables, une fibration est toujours une submersion surjective.

Le théorème de Ehresmann donne une réciproque à cette assertion :

Une submersion propre *à valeurs dans une variété* connexe *est une fibration localement triviale.*

Ce résultat est faux lorsque l'application f n'est plus propre :

2.9-3. Exercice : Soit $\boldsymbol{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ l'ouvert

$$\boldsymbol{P} = \{(x,y) \mid xy \neq 1\}\backslash\{(0,0)\}\,,$$

considéré muni de la structure de variété différentiable standard.

a) Montrer que l'application $\pi : \boldsymbol{P} \to \mathbb{R}$ définie par $\pi(x,y) = x$, est une submersion de variétés surjective de fibres $\pi^{-1}(x) \sim \mathbb{R}\backslash\{0\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il existe une section globale différentiable $\sigma : \mathbb{R} \to \boldsymbol{P}$.

c) Montrer pourtant que $\pi : \boldsymbol{P} \to \mathbb{R}$ **n'est pas** une fibration *localement triviale*.

2.9-4. Exercice : Pour chaque entier naturel $n > 1$, fixons un élément $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ et considérons l'application $\pi_n : \mathrm{SO}(n) \to \mathbb{S}^{n-1}$ définie par $\pi_n(g) = g(x_0)$.

a) Montrer que π_n est une fibration de fibre $\mathrm{SO}(n-1)$.

b) Montrer que π_n est trivialisable, si et seulement si, elle admet une section globale.

c) Montrer que π_n n'admet pas de sections globales lorsque n est impair supérieur à 1.

Indication : Supposons $x_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Si la fibration était triviale, il existerait une section globale $\sigma : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathrm{SO}(n)$ et comme $\mathrm{SO}(n)$ s'identifie à l'ensemble des repères orientés de $\mathbb{R}^n$, si nous posons $\sigma(\vec{x}) = (\vec{x} = \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$, la correspondance $\tau : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ définie par $\tau(\vec{x}) = \sigma(\vec{x})_2 = \vec{x}_2$, serait continue et sans point fixe ce qui est connu comme étant impossible[14] *pour tout $n > 1$ impair.*

d) Considérons maintenant le cas où $n = 4$, et rappelons que le groupe quaternionique (unitaire) $\mathbb{H}_u^*$ s'identifie à $\mathbb{S}^3$. Montrez que π_4 est trivialisable en construisant un inverse à l'application :

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{H}_u^* \times \mathrm{SO}(3) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(4) \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha \cdot \beta \end{array}$$

2.10 Revêtements

2.10-1. Définition : Une fibration $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \pi)$ de fibre $\boldsymbol{F}$ est dite «un revêtement» lorsque $\boldsymbol{F}$ est munie de la topologie discrète (dans le cas différentiable, il revient donc au même de dire que $\boldsymbol{F}$ est une variété de dimension 0.)

Lorsque le cardinal de $\boldsymbol{F}$ est un nombre fini r, on dira que le revêtement est à r feuillets.

2.10-2. Exercice : Soit $(f, g) : (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{B}_1, \pi_1) \to (\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{B}_2, \pi_2)$ un morphisme topologique de revêtements différentiables. Montrer que f est différentiable, si et seulement si, g l'est.

Indication : Les applications π_1 et π_2 sont étales.

2.10-3. Remarque : Soient $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable et $\boldsymbol{G}$ un groupe agissant différentiablement sur $\boldsymbol{M}$ de façon proprement discontinue et sans point fixe. La projection $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ est alors un revêtement.

2.10-4. Remarque : Rappelons qu'un espace topologique connexe par arcs $\boldsymbol{Y}$ est dit «simplement connexe» si son groupe fondamental (groupe de Poincaré) : $\Pi_1(\boldsymbol{Y})$ est réduit à l'élément neutre, *i.e.* si tout lacet dans $\boldsymbol{Y}$ peut être déformé en un lacet constant.

2.10-4.1. Exercice : Soit $(\pi, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{B})$ une fibration de fibre $\boldsymbol{F}$. Supposons $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{F}$ connexes par arcs. Montrer que $\boldsymbol{P}$ est connexe par arcs et que si $\boldsymbol{P}$ est simplement connexe, $\boldsymbol{B}$ l'est également.

Indication : Soit $\gamma : [0, 1] \to \boldsymbol{B}$ un chemin (continu) tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$ (un lacet donc). Montrer, par approximations successives et à l'aide des trivialisations locales, l'existence d'une application continue $\Gamma : [0, 1] \to \boldsymbol{P}$ vérifiant $\pi \circ \Gamma = \gamma$ (c'est ce que l'on appelle «un relèvement continu de γ»). En utilisant la connexité par arcs de la fibre de π montrer que le chemin Γ peut être "fermé" en un lacet Γ' de $\boldsymbol{P}$ dont l'image par π est le lacet γ ; puis que toute déformation homotopique de Γ' induit une déformation homotopique de γ. Conclure.

Nous avons montré que les espaces projectifs $\mathbb{P}_m(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, s'obtiennent comme quotients de la sphère unité $\mathbb{S}(\mathbb{K}^{m+1})$ de $\mathbb{K}^{m+1}$ par le groupe $\mathbb{K}_u^*$ (*cf.* section 2.2.3). Expliquer pourquoi les projections $\mathbb{S}(\mathbb{K}^{m+1}) \to \mathbb{P}_m(\mathbb{K})$ sont des fibrations ; en déduire la simple-connexité des espaces projectifs $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ et $\mathbb{P}_m(\mathbb{H})$.

[14] Nous redémontrerons ce résultat dans un chapitre ultérieur.

Rappelons le résultat classique de la théorie de l'homotopie qui affirme que **tout revêtement de base simplement connexe est trivialisable**. En particulier, les revêtements dont la base est une sphère $\mathbb{S}^n$, pour $n > 1$, sont trivialisables.

On retiendra la fait que si un revêtement de base simplement connexe est toujours trivialisable, **il n'en est pas de même** pour une fibration localement triviale à base simplement connexe (*cf.* exercice 2.9-4).

Structure de variété des revêtements d'une variété différentiable

2.10-2. Proposition : *Soient $\boldsymbol{B}$ une variété différentiable $\boldsymbol{P}$ un espace topologique et $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \pi)$ un revêtement. Il existe alors une, et une seule, structure de variété différentiable sur $\boldsymbol{P}$ telle que π est un morphisme de variétés.*

Démonstration : Supposons le problème résolu et notons $\boldsymbol{F}$ la fibre du revêtement. Soit (V, φ) une carte de $\boldsymbol{B}$ dont le l'ouvert V est trivialisant. Comme $\pi^{-1}(V) \sim V \times \boldsymbol{F}$, une composante connexe U de $\pi^{-1}(V)$ sera ouverte dans $\boldsymbol{P}$ et homéomorphe par π à V. Le couple $(U, \varphi \circ \pi)$ est alors une carte de coordonnées pour $\boldsymbol{P}$. En effet, soit (W, ψ) une carte de la structure de $\boldsymbol{P}$ telle que $W \cap U \neq \varnothing$. Comme π est supposée un morphisme de variétés, il s'ensuit que $\psi^{-1} \circ \pi \circ \varphi$ est différentiable sur son domaine de définition. Or, ceci veut très précisément dire que (W, ψ) et $(U, \varphi \circ \pi)$ sont des cartes compatibles et comme le choix de (W, ψ) est arbitraire dans l'atlas de $\boldsymbol{P}$, on conclut que $(U, \varphi \circ \pi)$ est dans l'atlas complet de $\boldsymbol{P}$.

Nous voyons ainsi que s'il existe une structure de variété sur $\boldsymbol{P}$, comme annoncé dans la proposition, l'ensemble des couples $(U, \varphi \circ \pi)$ constituera un atlas de la structure en question. Montrons que les cartes de cet ensemble font nécessairement un atlas. Soient $(U_1, \varphi_1 \circ \pi)$ et $(U_2, \varphi_2 \circ \pi)$ deux cartes telles que $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, l'application de transition sera $(\varphi_2 \circ \pi) \circ (\varphi_1 \circ \pi)^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ et la compatibilité est donc vérifiée, ce qui termine la démonstration. ∎

2.10-3. Remarque : Une variété différentiable $\boldsymbol{M}$ étant localement contractile([15]), sera localement connexe par arcs et localement simplement connexe. D'après un résultat classique d'homotopie, il existe alors un espace topologique $\tilde{\boldsymbol{M}}$ *simplement connexe* et un revêtement $(\pi, \tilde{\boldsymbol{M}}, \boldsymbol{M})$ dont la fibre $\pi^{-1}(x_0)$ en un point $x_0 \in \boldsymbol{M}$ est en bijection canonique avec $\Pi_1(\boldsymbol{M}; x_0)$. La proposition précédente montre que $\tilde{\boldsymbol{M}}$ est en fait une variété différentiable.

Rappelons que lorsque $\boldsymbol{M}$ est connexe, le revêtement (topologique) $(\tilde{\boldsymbol{M}}, \boldsymbol{M}, \pi)$ est caractérisé par la propriété universelle suivante :

Pour tout revêtement $\tau : (y, \boldsymbol{Y}) \to (x, \boldsymbol{M})$, il existe une unique application (continue) $f : (\tilde{x}, \tilde{\boldsymbol{M}}) \to (y, \boldsymbol{Y})$, telle que $\pi = \tau \circ f$. (L'application f est alors également un revêtement.)

([16]) Cette propriété reste vraie dans la catégorie des variétés différentiables. Dans ce cas, la différentiabilité de f est une simple conséquence du fait que les revêtements différentiels sont étales. En particulier, la variété $\tilde{\boldsymbol{M}}$ est unique à difféomorphisme près ; on l'appelle «le revêtement universel de $\boldsymbol{M}$».

2.10-4. Exercice : Les espaces projectifs $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ ne sont jamais simplement connexes des que $n > 0$; on a $\Pi_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \{\pm 1\}$. Par contre $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, sont toujours simplement connexes.

[15] On appelle ainsi les espaces topologiques admettant une base de la topologie par des ouverts contractiles, *i.e.* homotopes à un point. Dans une variété de dimension m les domaines de cartes constituent bien une base de la topologie par des ouverts homéomorphes à $\mathbb{R}^m$ donc contractiles.

[16] Rappelons que la notation, usuelle en topologie, $\tau : (y, \boldsymbol{Y}) \to (x, \boldsymbol{M})$ signifie que $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{M}$ est continue et que $f(y) = x$.

2.10.1 Revêtement associé à une fibration localement triviale. Ce paragraphe prépare à la définition de la variété d'orientations d'une variété différentiable.

Soit $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{B},\pi)$ une fibration de variétés de fibre $\boldsymbol{F}$. Notons $\doteq_{\boldsymbol{F}}$ la relation d'équivalence sur $\boldsymbol{P}$, définie par :

$$x \doteq_{\boldsymbol{F}} y\,, \quad \text{si et seulement si,} \quad \begin{cases} \pi(x)=\pi(y)\,, & \text{et} \\ x \text{ et } y \text{ sont dans la même composante} \\ \text{connexe de la fibre } \pi^{-1}(\pi(x)). \end{cases}$$

Notons $\boldsymbol{P}/\doteq_{\boldsymbol{F}}$ l'espace topologique quotient de $\boldsymbol{P}$ par $\doteq_{\boldsymbol{F}}$, on a un diagramme commutatif d'applications continues :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{P} & \xrightarrow{\nu_{\boldsymbol{F}}} & \boldsymbol{P}/\doteq_{\boldsymbol{F}} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\pi}} \\ \boldsymbol{B} & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{B}}} & \boldsymbol{B} \end{array}$$

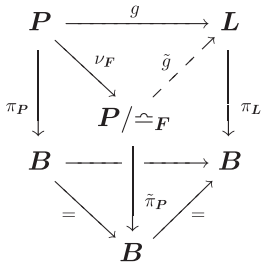
Soit maintenant $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha\times\boldsymbol{F}$ une trivialisation locale de π. L'ouvert $\pi^{-1}(U_\alpha)$ est $\doteq_{\boldsymbol{F}}$-saturé et l'on a :

$$\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) \xleftarrow[\equiv]{\nu_{\boldsymbol{F}}} \pi^{-1}(U_\alpha)/\doteq_{\boldsymbol{F}} \xrightarrow[\equiv]{\tilde{\phi}_\alpha} U_\alpha\times\Pi_0(\boldsymbol{F})$$

La composée de ces homéomorphismes défini donc une trivialisation locale de $\tilde{\pi}$, ce qui montre bien que $\tilde{\pi}$ est un revêtement topologique de $\boldsymbol{B}$, de fibre $\Pi_0(\boldsymbol{F})$. On munit alors l'espace $\boldsymbol{P}/\doteq_{\boldsymbol{F}}$ de l'unique structure de variété différentiable rendant $\tilde{\pi}$ différentiable (*cf.* proposition 2.10-2). Le revêtement de variétés $(\boldsymbol{P}/\doteq_{\boldsymbol{F}},\boldsymbol{B},\tilde{\pi})$ sera appelé «le revêtement associé à la fibration (localement triviale) π». On remarquera enfin que le morphisme canonique $\nu_{\boldsymbol{F}} : (\boldsymbol{P},\boldsymbol{B},\pi_{\boldsymbol{P}}) \to (\boldsymbol{P}/\doteq_{\boldsymbol{F}},\boldsymbol{B},\tilde{\pi}_{\boldsymbol{P}})$ de fibrations au-dessus de $\boldsymbol{B}$ est également différentiable puisque $\tilde{\pi}$ est étale.

L'application $\nu_{\boldsymbol{F}} : (\pi_{\boldsymbol{P}},\boldsymbol{P},\boldsymbol{B}) \to (\tilde{\pi}_{\boldsymbol{P}},\boldsymbol{P}/\doteq_{\boldsymbol{F}},\boldsymbol{B})$ vérifie la propriété universelle suivante :

2.10.1-1. Proposition : *Soit $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{B},\pi_{\boldsymbol{P}})$ une fibration localement triviale de variétés différentiables de fibre $\boldsymbol{F}$. Notons $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{P}} : \boldsymbol{P}/\doteq_{\boldsymbol{F}} \to \boldsymbol{B}$ le revêtement associé et $\nu_{\boldsymbol{F}} : (\boldsymbol{P},\boldsymbol{B},\pi_{\boldsymbol{P}}) \to (\boldsymbol{P}/\doteq_{\boldsymbol{F}},\boldsymbol{B},\tilde{\pi}_{\boldsymbol{P}})$ le $\boldsymbol{B}$-morphisme canonique. Pour tout $\boldsymbol{B}$-morphisme $g : (\boldsymbol{P},\boldsymbol{B},\pi_{\boldsymbol{P}}) \to (\boldsymbol{L},\boldsymbol{B},\pi_{\boldsymbol{L}})$, où $(\boldsymbol{L},\boldsymbol{B},\pi_{\boldsymbol{L}})$ est un* revêtement, *il existe un et un seul morphisme $\tilde{g} : (\boldsymbol{P}/\doteq_{\boldsymbol{F}},\boldsymbol{B},\tilde{\pi}_{\boldsymbol{P}}) \to (\boldsymbol{L},\boldsymbol{B},\pi_{\boldsymbol{L}})$ de revêtements au-dessus de $\boldsymbol{B}$, tel que : $g=\tilde{g}\circ\nu_{\boldsymbol{F}}$.*



Démonstration : Il suffira de monter l'existence "ensembliste" de $\tilde{g}$, les attributs de différentiabilité découleront alors automatiquement du fait que $\pi_{\boldsymbol{L}}$ et $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{P}}$ sont étales.

Le morphisme $g : (\boldsymbol{P},\boldsymbol{B},\pi_{\boldsymbol{P}}) \to (\boldsymbol{L},\boldsymbol{B},\pi_{\boldsymbol{L}})$ étant donné, notons $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ les fibres respectives de $\pi_{\boldsymbol{P}}$ et $\pi_{\boldsymbol{L}}$.

On peut prendre *un même* ouvert U_α de trivialisation pour $\pi_{\boldsymbol{P}}$ et $\pi_{\boldsymbol{L}}$; on a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{P} & \xrightarrow{\quad g \quad} & \boldsymbol{L} \\
\subseteq\uparrow & & \uparrow\subseteq \\
\pi_{\boldsymbol{P}}^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{g|_{\pi_{\boldsymbol{P}}^{-1}(U_\alpha)}} & \pi_{\boldsymbol{L}}^{-1}(U_\alpha) \\
\phi_\alpha\uparrow\equiv & & \equiv\uparrow\psi_\alpha \\
U_\alpha\times\boldsymbol{F} & \xrightarrow{\psi_\alpha^{-1}\circ g\circ\phi_\alpha} & U_\alpha\times\boldsymbol{G} \\
(u,x) & \longmapsto & (u,\xi(u,x))
\end{array}$$

où pour peu que U_α soit connexe, nous voyons que $\xi(u,x)$ est constante, indépendamment de $u\in U_\alpha$ et de x dans sa composante connexe dans $\boldsymbol{F}$. Or ceci signifie très précisément que $g|_{\pi_{\boldsymbol{P}}^{-1}(U_\alpha)}$ est compatible à la relation $\doteq_{\boldsymbol{F}}$ et donc qu'elle induit bien une application sur la restriction de $(\boldsymbol{P}/\doteq_{\boldsymbol{F}},\boldsymbol{B},\tilde\pi_{\boldsymbol{P}})$ au-dessus de U_α qui est **indépendante** des trivialisations ϕ_α et ψ_α ; ce qui garantit le recollement de ces applications locales en l'application $\tilde g$ cherchée. ∎

2.10.1-2. Exercice : Lorsque la fibre $\boldsymbol{F}$ de $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{B},\pi)$ est connexe, on a $\boldsymbol{P}/\doteq_{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{B}$.

2.10.1-3. Exercice : Nous avons donné dans l'exercice 2.9-10-b.1 un structure d'espace fibré de fibre $\mathbb{R}$ sur le ruban de Möbius $\boldsymbol{M}$ en quotientant la projection canonique $p_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\times\{0\}$ par l'action de $\boldsymbol{G}$. La projection p_1 étant à valeurs dans un sous-espace fixé par p_1, elle admet une section globale également compatible à l'action de $\boldsymbol{G}$. La fibration $(\boldsymbol{M},\mathbb{S}^1,\pi)$ admet donc une section section globale que nous noterons σ.

a) Montrer que $\pi:\boldsymbol{M}\backslash\mathrm{im}(\sigma)\to\mathbb{S}^1$ est une fibration de fibre $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ***non trivialisable***.

b) Montrer que le revêtement associé à $(\boldsymbol{M}\backslash\mathrm{im}(\sigma),\mathbb{S}^1,\pi)$ est isomorphe (en tant que revêtement de $\mathbb{S}^1$) au revêtement $(_)^2:\mathbb{C}_u^*\to\mathbb{C}_u^*$ qui associe $(_)^2:x\mapsto x^2$.

2.11 Fibrés vectoriels sur les variétés différentiables

2.11-1. Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie r que l'on suppose muni de sa structure standard de variété différentiable. On appelle «fibré vectoriel de base $\boldsymbol{B}$ et fibre E» la donnée :

FV-1) d'une fibration de variétés $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{B},\pi)$ de fibre E ;

FV-2) d'un recouvrement de $\boldsymbol{B}$ par des ouverts trivialisants $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$; et pour chaque $\alpha\in\mathfrak{A}$, d'un difféomorphisme de trivialisation :

$$\begin{array}{rcl}
\phi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\equiv} & U_\alpha\times E \\
x & \longmapsto & (\pi(x),\varphi_\alpha(x))
\end{array}$$

de telle sorte que, pour tous $\alpha,\beta\in\mathfrak{A}$ tels que $U_{\alpha\beta}\neq\varnothing$, dans le difféomorphisme de transition :

$$\begin{array}{rcl}
\phi_{\beta,\alpha}:=\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1}:U_{\alpha\beta}\times E & \longrightarrow & U_{\beta\alpha}\times E \\
(u,X) & \longmapsto & (u,\varphi_{\beta,\alpha}(u,X))
\end{array}$$

l'application $X\in E\mapsto\varphi_{\beta,\alpha}(u,X)\in E$, soit $\mathbb{R}$-**linéaire**, pour tout $u\in U_{\alpha\beta}$.

La dimension $\dim_{\mathbb{R}}(E)=r$ est appelée «le rang du fibré».

2.11-2. Remarque : Dans la définition ci-dessus les applications $\varphi_{\beta,\alpha} : U_{\alpha\beta}\times E \to E$ sont différentiables. Or, la différentiabilité (de classe $\mathcal{C}^\infty$) est équivalente à la différentiabilité "coordonnée par coordonnée" et comme pour chaque $u \in U_{\alpha\beta}$ fixe, l'application $\varphi_{\alpha,\beta}(u,_)$ est un endomorphisme linéaire (d'un espace vectoriel réel de dimension finie), donc, est automatiquement différentiable, nous voyons que la différentiabilité de $\varphi_{\beta,\alpha} : U_{\alpha\beta}\times E \to E$ est équivalente à la différentiabilité de $\overline{\varphi}_{\beta,\alpha} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}(E) \subseteq \mathrm{End}(E) \sim \mathbb{R}^{\dim_{\mathbb{R}}(E)^2}$, où $\overline{\varphi}_{\beta,\alpha}(u)(X) := \varphi_{\beta,\alpha}(u,X)$.

Les relations $\phi_{\alpha,\alpha} = \mathrm{id}$, $\phi_{\beta,\alpha} = \phi_{\alpha,\beta}^{-1}$ et $\phi_{\gamma,\alpha} = \phi_{\gamma,\beta}\circ\phi_{\beta,\alpha}$ définies sur des ensembles de la forme $U_*\times E$, deviennent $\overline{\varphi}_{\alpha,\alpha} = \mathrm{id}$, $\overline{\varphi}_{\beta,\alpha} = \overline{\varphi}_{\alpha,\beta}^{-1}$ et $\overline{\varphi}_{\gamma,\alpha} = \overline{\varphi}_{\gamma,\beta}\cdot\overline{\varphi}_{\beta,\alpha}$ et concernent des applications définies sur des ouverts de la forme U_*, à valeurs dans $\mathrm{GL}(E)$ (en particulier, les opérations $(_)^{-1}$ et '$\cdot$' font référence à la structure multiplicative du groupe $(\mathrm{GL}(E),\cdot,\mathrm{id}_E)$).

2.11-3. Remarque atlas complet d'une fibration vectorielle : De même que pour les variétés, on peut définir la notion d'atlas pour une fibration vectorielle comme une collection de cartes de trivialisation vérifiant les conditions 2.11-1-(1) et 2.11-1-(2). On dira que deux tels atlas définissent la «même structure fibrée vectorielle», si leur réunion est encore un atlas de variété fibrée vectorielle. Cette relation entre atlas est clairement une équivalence et une classe d'équivalence de tels atlas est appelée une «structure de variété fibrée vectorielle». La notion d'atlas complet de la structure relève de la même définition que pour les variétés.

2.11.1 Structure canonique d'espace vectoriel des fibres d'un fibré vectoriel. Soit $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{B},\pi)$ un fibré vectoriel de fibre E. Pour chaque $b \in \boldsymbol{B}$, on munit la fibre $\pi^{-1}(b)$ d'une structure d'espace vectoriel par le procédé suivant. Soient $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(b)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; pour chaque ouvert de trivialisation U_α contenant b et pour chaque difféomorphisme de trivialisation de la structure fibrée vectorielle $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha\times E$, $y \mapsto (\pi(y),\varphi_\alpha(y))$, on pose :

$$y_1 +_\alpha \lambda \cdot_\alpha y_2 := \phi_\alpha^{-1}\Big(\big(b, \varphi_\alpha(y_1) + \lambda\cdot\varphi_\alpha(y_2)\big)\Big)\,.$$

L'égalité $y_1 +_\alpha \lambda \cdot_\alpha y_2 = y_1 +_\beta \lambda \cdot_\beta y_2$ découle alors des égalités :

$$\varphi_\beta(y_1) + \lambda\cdot\varphi_\beta(y_2) = \overline{\varphi}_{\beta,\alpha}(b)(\varphi_\alpha(y_1)) + \lambda\cdot\overline{\varphi}_{\beta,\alpha}(b)(\varphi_\alpha(y_2)) = \overline{\varphi}_{\beta,\alpha}(b)\big(\varphi_\alpha(y_1) + \lambda\cdot\varphi_\alpha(y_2)\big)\,,$$

garanties par la linéarité des applications $\varphi_{*,*}(b) \in \mathrm{GL}(E)$.

2.11.1-1. Exercice et définition : Soit $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{B},\pi)$ un fibré vectoriel. L'application qui associe à chaque $b \in \boldsymbol{B}$, le vecteur nul de l'espace vectoriel $\pi^{-1}(b)$ est une section différentiable ; on l'appelle «la section nulle» du fibré. En particulier un fibré vectoriel admet toujours une section globale canonique (*cf.* 2.9-10-b).

La section nulle définit un plongement canonique $\boldsymbol{B}$ dans $\boldsymbol{P}$, son image est souvent référée également par l'expression «section nulle», par abus de langage.

2.11.1-2. Exercice et terminologie : Soit $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{B},\pi)$ un fibré vectoriel de fibre E et notons, pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{B}$, par $\Gamma(U;\pi)$ (ou $\Gamma(U;\boldsymbol{P})$) l'ensemble de toutes les sections (différentiables) de π au-dessus de U. Montrer que $\Gamma(U;\pi)$ muni d'une addition et d'une multiplication par des scalaires définies point par point est fermé pour ces opérations et est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que si U est de trivialisation, $\Gamma(U;\pi)$ s'identifie (non canoniquement) à $\mathcal{C}^\infty(U)\otimes_{\mathbb{R}} E$.

Soient U un ouvert de $\boldsymbol{B}$ et $\sigma \in \Gamma(U;\boldsymbol{P})$. On définit le «support de la section σ» comme d'adhérence topologique de l'ensemble des $x \in U$ tels que $\sigma(x) \neq 0$, on le note $|\sigma|$. Montrer que l'ensemble $\Gamma_c(U;\boldsymbol{P})$ des «sections à supports compacs» est un sous-espace vectoriel de $\Gamma(U;\boldsymbol{P})$.

2.11.1-3. Définition : Soient $(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{B}_1,\pi_1)$ et $(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{B}_2,\pi_2)$ deux fibrés vectoriels. Un morphisme de fibrations $(f,g) : \pi_1 \to \pi_2$ et dit «morphisme de fibrés vectoriels» lorsque, quel que soit $b \in \boldsymbol{B}_1$, la restriction :

$$f|_{\pi_1^{-1}(b)} : \pi_1^{-1}(b) \to \pi_2^{-1}(g(b))$$

est $\mathbb{R}$-*linéaire* relativement aux structures d'espace vectoriel des fibres.

Lorsque $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}$, on dira que $f : \boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{P}_2$ est un «morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de $\boldsymbol{B}$» ou un «$\boldsymbol{B}$-morphisme de fibrés vectoriels», si $(f,\mathrm{id}_{\boldsymbol{B}})$ est un morphisme de fibrés vectoriels.

Explicitons la description locale d'un $\boldsymbol{B}$-morphisme f de fibrations vectorielles entre $(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{B},\pi_1)$ et $(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{B},\pi_2)$ de fibres respectives E_1 et E_2. Supposons, pour simplifier, que les ouverts de trivialisation le soient simultanément pour les deux fibrations[17]. On aura alors des diagrammes commutatifs de la forme :

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{f|_{U_\alpha}} & \pi_2^{-1}(U_\alpha) \\
{\scriptstyle\phi_{1,\alpha}}\downarrow \equiv & & \equiv \downarrow{\scriptstyle\phi_{2,\alpha}} \\
U_\alpha\times E_1 & \xrightarrow{f_\alpha} & U_\alpha\times E_2 \\
(u,v) & \longmapsto & (u,\overline{f}_\alpha(u)(v))
\end{array}$$

où $\overline{f}_\alpha : U_\alpha \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1,E_2)$ est différentiable. Soit maintenant U_β un autre ouvert de trivialisation avec $U_{\alpha\beta} \neq \varnothing$. Posons $\overline{f}_{\alpha,\beta} := \overline{f}_\alpha|_{U_{\alpha\beta}}$ et *mutatis mutandis* pour les autres notations à doubles indices ; on a alors les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
U_{\alpha\beta}\times E_1 & \xrightarrow{f_{\alpha,\beta}} & U_{\alpha\beta}\times E_2 \\
{\scriptstyle\phi_{1,\beta,\alpha}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi_{2,\beta,\alpha}} \\
U_{\beta\alpha}\times E_1 & \xrightarrow{f_{\beta,\alpha}} & U_{\beta\alpha}\times E_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(u,v) & \xmapsto{f_{\alpha,\beta}} & (u,\overline{f}_{\alpha,\beta}(u)(v)) \\
{\scriptstyle\phi_{1,\beta,\alpha}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi_{2,\beta,\alpha}} \\
(u,\overline{\varphi}_{1,\beta,\alpha}(u)(v)) & \xmapsto{f_{\beta,\alpha}} & \Big(u,\overline{f}_{\beta,\alpha}(u)(\overline{\varphi}_{1,\beta,\alpha}(u)(v))\Big)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\Big(u,\overline{\varphi}_{2,\beta,\alpha}(u)(\overline{f}_{\alpha,\beta}(u)(v))\Big) \\
= \\
\Big(u,\overline{f}_{\beta,\alpha}(u)(\overline{\varphi}_{1,\beta,\alpha}(u)(v))\Big)
\end{array}$$

où l'on remarque la contrainte de commutation :

$$\Big(\overline{\varphi}_{2,\beta,\alpha}(u)\circ\overline{f}_{\alpha,\beta}(u)\Big)(v) = \Big(\overline{f}_{\beta,\alpha}(u)\circ\overline{\varphi}_{1,\beta,\alpha}(u)\Big)(v)\,. \tag{C}$$

pour tout $u \in U_{\alpha\beta}$.

2.11.1-4. Remarque : Des descriptions analogues peuvent être données pour les morphismes de fibrations vectorielles à bases arbitraires.

[17] Cette hypothèse n'est pas restrictive puisque les ouverts de trivialisation d'une fibration (même vectorielle) constituent une base de la topologie de la base.

2.11.1-5. Exercice : Les définitions qui précédent permettent de définir la catégorie $\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{B})$ des fibrés vectoriels (réels) au-dessus d'une variété $\boldsymbol{B}$ donnée. Montrer que pour tout morphisme de variétés $f : \boldsymbol{B}' \to \boldsymbol{B}$, le foncteur f^{-1} "image inverse de fibrés" de l'exercice 2.9-4 est un foncteur de la catégorie des fibrés vectoriels au-dessus de $\boldsymbol{B}$ vers la catégorie des fibrés vectoriels au-dessus de $\boldsymbol{B}'$.

2.11.1-6. Exercice : Soient $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{B}, \pi_1)$ et $(\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{B}, \pi_2)$ deux fibrés vectoriels au-dessus de la variété $\boldsymbol{B}$, de fibres respectives E_1 et E_2. Notons $\boldsymbol{P}_1 \times_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{P}_2$ le produit fibré $\boldsymbol{P}_1 \times_{\pi_1,\pi_2} \boldsymbol{P}_2$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{P}_1 \times_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{P}_2 & \xrightarrow{\pi_1^{-1}(\pi_2)} & \boldsymbol{P}_1 \\ {\scriptstyle \pi_2^{-1}(\pi_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ \boldsymbol{P}_2 & \xrightarrow{\pi_2} & \boldsymbol{B} \end{array}$$

Montrer que l'application $\pi_2 \circ \pi_2^{-1}(\pi_1) = \pi_1 \circ \pi_1^{-1}(\pi_2)$, de $\boldsymbol{P}_1 \times_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{P}_2$ sur $\boldsymbol{B}$, est une fibration vectorielle de fibre $E_1 \oplus E_2$.

2.11.1-7. Exercice : Soit $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \pi)$ un fibré vectoriel de fibre E et notons $\boldsymbol{P} \times_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{P}$ le produit fibré $\boldsymbol{P} \times_{\pi,\pi} \boldsymbol{P}$.

a) La variété $\boldsymbol{P} \times_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{P}$ est l'espace total d'une fibration vectorielle au-dessus de $\boldsymbol{B}$ de fibre $E \oplus E$. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} + : & \boldsymbol{P} \times_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{P} & \longrightarrow & \boldsymbol{P} \\ & (b, (y_1, y_2)) & \longmapsto & (b, (y_1 + y_2)) \end{array}$$

où la notation est relative à des cartes trivialisantes, est bien définie et est un $\boldsymbol{B}$-morphisme de fibrés vectoriels.

b) Vérifier la différentiabilité de l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathbb{R} \times \boldsymbol{P} & \longrightarrow & \boldsymbol{P} \\ & (\lambda, y) & \longmapsto & \lambda\, y \end{array}$$

c) Déduire de (b) que $\boldsymbol{P}$ est différentiablement homotope à la section nulle (et donc à $\boldsymbol{B}$).

2.11.1-8. Remarque : Ces derniers exercices montrent que les ensembles de $\boldsymbol{B}$-morphismes de fibrés vectoriels au-dessus de $\boldsymbol{B}$, sont naturellement des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et que la catégorie $\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{B})$ est "additive". On remarquera que lorsque $\boldsymbol{B}$ est réduit à un singleton, la catégorie en question est équivalente à la catégorie $\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}$ d'espaces vectoriels ; on peut donc considérer $\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{B})$ comme une généralisation de $\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}$. L'exercice 2.11.2-3 évoque le problème de l'existence de "noyaux" dans $\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{B})$; en particulier $\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{B})$ **n'est pas une catégorie abélienne** dès que $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{B}) > 0$.

Soit $f : \boldsymbol{B}' \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de variétés. Montrer que le foncteur $f^{-1} : \mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{B}) \rightsquigarrow \mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{B}')$ est compatible aux produits fibrés, *i.e.* il existe un difféomorphisme naturel entre $f^{-1}(\boldsymbol{P}_1 \times_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{P}_2) \equiv f^{-1}(\boldsymbol{P}_1) \times_{\boldsymbol{B}'} f^{-1}(\boldsymbol{P}_1)$. Cette propriété traduit le fait que f^{-1} est un foncteur dit «additif».

2.11.2 Le fibré tangent à une variété. Le fibré tangent à une variété est sans doute le fibré vectoriel le plus naturellement rattaché à une variété. Voici comment il peut être introduit en tant que variété abstraite (voir la section 2.8.2) en utilisant le théorème de Godement 2.7-1.

Soit $\boldsymbol{M}$ une variété de dimension d, d'atlas complet $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}\alpha \in \mathfrak{A}$. On considère alors la variété différentiable réunion disjointe de variétés produits : $\mathfrak{T}(\mathcal{A}) := \amalg_{\alpha\in\mathfrak{A}}\ \mathbb{R}^d_\alpha \times \mathbb{R}^d$ et l'on note :

$$\begin{aligned} \Pi :\ \amalg_{\alpha\in\mathfrak{A}}\ \mathbb{R}^d_\alpha \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \boldsymbol{M} \\ (x_\alpha, v) &\longmapsto \varphi_\alpha^{-1}(x) \end{aligned}$$

L'application Π est alors bien définie et différentiable.

Soit maintenant $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathfrak{T}(\mathcal{A}) = \amalg_{\alpha\in\mathfrak{A}}\ \mathbb{R}^d_\alpha \times \mathbb{R}^d$ définie par :

$$(x_\alpha, v)\ \mathcal{R}\ (x_\beta, w)\,, \quad \text{si et seulement si,} \quad \begin{cases} \Pi(x) = \Pi(y)\,, \text{ et} \\ d(\phi_{\beta,\alpha})_{x_\alpha}(v) = w. \end{cases}$$

La réflexivité, symétrie et transitivité de $\mathcal{R}$ découlent respectivement des relations $\phi_{\alpha,\alpha} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$, $\phi_{\alpha,\beta} = \phi_{\beta,\alpha}$ et $\phi_{\gamma,\alpha} = \phi_{\gamma,\beta} \circ \phi_{\beta,\alpha}$. D'autre part $\mathcal{R}$ étant clairement compatible à la projection Π, on aura une surjection canonique

$$\pi : \mathfrak{T}(\boldsymbol{M}) := \Big(\coprod_{\alpha\in\mathfrak{A}}\ \mathbb{R}^d_\alpha \times \mathbb{R}^d\Big)/\mathcal{R} \longrightarrow \boldsymbol{M}\,.$$

L'espace topologique $\mathfrak{T}(\boldsymbol{M})$ admet une structure canonique de variété différentiable rendant $\nu : \mathfrak{T}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{T}(\boldsymbol{M})$ submersive. En effet, la trace du graphe de $\mathcal{R}$ sur la composante $\big(\mathbb{R}^d_\alpha \times \mathbb{R}^d\big) \times \big(\mathbb{R}^d_\beta \times \mathbb{R}^d\big)$ n'est autre que le graphe de l'application définie sur $U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^d$ par :

$$(x_\alpha, u) \mapsto \big(\phi_{\beta,\alpha}(x_\alpha), d(\phi_{\beta,\alpha})_{x_\alpha}(v)\big)\,, \tag{$\diamond$}$$

ce qui prouve immédiatement que $\mathrm{Gr}(\mathcal{R})$ est une sous-variété de $\mathfrak{T}(\mathcal{A}) \times \mathfrak{T}(\mathcal{A})$ et que $p_1 : \mathrm{Gr}(\mathcal{R}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{A})$ est submersive. Le théorème de Godement permet alors de conclure que $\mathfrak{T}(\boldsymbol{M})$ possède une structure de variété différentiable de dimension :

$$2\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{T}(\mathcal{A})) - \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{R}) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{T}(\mathcal{A})) = 2\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M})\,.$$

La projection canonique $\nu : \mathfrak{T}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{T}(\boldsymbol{M})$ est alors submersive entre variétés de même dimension ; elle est donc *étale*, et les restrictions $\nu|_{\mathbb{R}^d_\alpha \times \mathbb{R}^d}$ constituent des cartes de coordonnées pour $\mathfrak{T}(\boldsymbol{M})$. Ces cartes définissent la structure fibrée vectorielle de $\mathfrak{T}(\boldsymbol{M})$ que nous annonçons. Les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d_\alpha \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow[\equiv]{\nu} & \pi^{-1}(U_\alpha) & \subseteq & \mathfrak{T}(\boldsymbol{M}) \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{R}^d_\alpha & \xrightarrow[\equiv]{\varphi_\alpha^{-1}} & U_\alpha & \subseteq & \boldsymbol{M} \end{array}$$

donnent la structure de fibré localement trivial de $\mathfrak{T}(\boldsymbol{M})$ au-dessus de $\boldsymbol{M}$ et comme l'application de transition de $\mathbb{R}^d_\alpha \times \mathbb{R}^r$ vers $\mathbb{R}^d_\beta \times \mathbb{R}^r$ est donnée par ($\diamond$), où $x_\alpha \in U_\alpha \mapsto d(\phi_{\beta,\alpha})_{x_\alpha} \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ est différentiable, la famille de cartes en question constitue bien un atlas de fibré vectoriel au-dessus de $\boldsymbol{M}$ de rang $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M})$. La fibration $(\mathfrak{T}(\boldsymbol{M}), \boldsymbol{M}, \pi)$ est appelée «le fibré tangent de $\boldsymbol{M}$».

2.11.2-1. Définition : L'espace vectoriel $\pi^{-1}(x)$ est noté $\mathfrak{T}_x(\boldsymbol{M})$ et ses éléments sont appelés les «vecteurs tangents à $\boldsymbol{M}$ basés en $x \in \boldsymbol{M}$». Les éléments de $\mathfrak{T}(\boldsymbol{M})$ sont appelés les «vecteurs tangents de $\boldsymbol{M}$», et les sections de $(\mathfrak{T}(\boldsymbol{M}), \boldsymbol{M}, \pi)$ au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{M}$, s'appellent les «champs de vecteurs (tangents) au-dessus de U».

Le foncteur $\mathfrak{T}$

Nous venons de montrer comment associer à toute variété différentiable son fibré tangent. Soit maintenant $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}'$ un morphisme de variétés de dimensions d et d' respectivement ; on définit un morphisme de fibrés vectoriels $\mathfrak{T}(f) : \mathfrak{T}(\boldsymbol{M}) \to \mathfrak{T}(\boldsymbol{M}')$ en posant, pour chaque couple de cartes trivialisantes $(U_\alpha \subseteq \boldsymbol{M}, U'_{\alpha'} \subseteq \boldsymbol{M}')$ vérifiant $f(U_\alpha) \subseteq U'_{\alpha'}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}(f)_{\alpha',\alpha} : \mathbb{R}^d_\alpha \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^{d'}_{\alpha'} \times \mathbb{R}^{d'} \\ (x, v) &\longmapsto \big(\xi_{\alpha',\alpha}(x), d(\xi_{\alpha',\alpha})_x(v)\big) \end{aligned}$$

où $\xi_{\alpha',\alpha} := \varphi'_{\alpha'} \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$.

2.11.2-2. Exercice : Vérifier que les applications $\mathfrak{T}(f)_{\alpha',\alpha}$ définissent bien un morphisme de fibrés vectoriels de $\mathfrak{T}(\boldsymbol{M})$ à valeurs dans $\mathfrak{T}(\boldsymbol{M}')$.

Montrer que la correspondance $\boldsymbol{M} \rightsquigarrow \mathfrak{T}(\boldsymbol{M})$ et $f \rightsquigarrow \mathfrak{T}(f)$ définit un foncteur covariant de la catégorie des variétés vers la catégorie des fibrés vectoriels.

2.11.2-3. Exercice Sous-fibré tangent associé à un morphisme submersif : Soit $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}'$ un morphisme de variétés différentiables de dimensions respectives d et d', on note $\ker(\mathfrak{T}(f)) \subseteq \mathfrak{T}(\boldsymbol{M})$ l'ensemble des points $z \in \mathfrak{T}(\boldsymbol{M})$ tels que $\mathfrak{T}(f)(z)$ est le vecteur nul de la fibre $\mathfrak{T}(\boldsymbol{M}')_{f(\pi(z))}$.

a) Montrer que $\mathfrak{T}(f) : \mathfrak{T}(\boldsymbol{M}) \to \mathfrak{T}(\boldsymbol{M}')$ est submersive ;

b) Montrer l'égalité $\ker(\mathfrak{T}(f)) = \mathfrak{T}(f)^{-1}(\sigma_0(\boldsymbol{M}'))$, où $\sigma_0(\boldsymbol{M}')$ est la section nulle de $(\mathfrak{T}(\boldsymbol{M}'), \boldsymbol{M}', \pi')$. En déduire que $\ker(\mathfrak{T}(f))$ est une sous-variété différentiable de $\mathfrak{T}(\boldsymbol{M})$ de dimension $(2d - d')$.

c) Montrer que $(\ker(\mathfrak{T}(f)), \boldsymbol{M}, \pi)$ est une fibration vectorielle de rang $(d - d')$.

d) Montrer que pour tout $x' \in \boldsymbol{M}'$, la restriction de $\ker(\mathfrak{T}(f))$ à la sous-variété $f^{-1}(x')$, s'identifie à $\mathfrak{T}(f^{-1}(x'))$.

e) Démontrez que si $(\ker(\mathfrak{T}(f)), \boldsymbol{M}, \pi)$ est un sous-fibré vectoriel de $\mathfrak{T}(\boldsymbol{M})$, alors f est de rang constant.

f) Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto x^2$. Expliciter l'ensemble $\ker(\mathfrak{T}(f))$ en identifiant $\mathfrak{T}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^2$. Même question pour l'application $z \mapsto z^2$ définie sur $\mathbb{C}^*_u$.

2.11.3 Fibrés vectoriels associés par représentations de groupes. Nous allons tirer profit dans cette section et la suivante de la remarque 2.11-2 pour construire de nouveaux fibrés.

Soit $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \pi)$ un fibré vectoriel de fibre E ; l'atlas complet de sa structure de fibré vectoriel donne les trivialisations locales de la condition 2.11-1-(2) :

$$\begin{aligned} \phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\xrightarrow{\equiv} U_\alpha \times E \\ x &\longmapsto (\pi(x), \varphi_\alpha(x)) \end{aligned}$$

et les difféomorphisme de transition :

$$\begin{aligned} \phi_{\beta,\alpha} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : U_{\alpha\beta} \times E &\longrightarrow U_{\beta\alpha} \times E \\ (u, X) &\longmapsto (u, \overline{\varphi}_{\beta,\alpha}(u)(X)) \end{aligned}$$

où $\overline{\varphi}_{\alpha,\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}(E)$ est différentiable.

Soit maintenant F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\rho : \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{GL}(F)$ un homomorphisme de groupes différentiable ([18]). On considéré alors la réunion disjointe des $U_\alpha \times F$ et l'on substitue les difféomorphismes de transition $\phi_{\beta,\alpha}$ par les applications :

$$\begin{aligned}(\phi_\rho)_{\beta,\alpha} : U_{\alpha\beta}\times F &\longrightarrow U_{\beta\alpha}\times F\\ (u, X) &\longmapsto (u, \rho(\overline{\varphi}_{\beta,\alpha}(u))(X))\end{aligned}$$

Ces applications ont les propriétés requises pour être les difféomorphismes de transition d'une structure fibrée vectorielle comme annoncée. En effet :

a) $(\phi_\rho)_{\beta,\alpha}$ est différentiable.
Il suffit pour cela de vérifier la différentiabilité de $u \mapsto \rho(\overline{\varphi}_{\beta,\alpha}(u)) \in \mathrm{GL}(F)$. Or, cette application s'obtient en composant $u \mapsto \overline{\varphi}_{\beta,\alpha}(u)$ avec l'homomorphisme ρ ; des applications différentiables par hypothèse.

b) On a $(\phi_\rho)_{\alpha,\alpha} = \mathrm{id}$, $(\phi_\rho)_{\beta,\alpha} = (\phi_\rho)^{-1}_{\alpha,\beta}$ et $(\phi_\rho)_{\gamma,\alpha} = (\phi_\rho)_{\gamma,\beta} \circ (\phi_\rho)_{\beta,\alpha}$.
Conséquences formelles du fait que ρ est un homomorphisme de groupes.

Les mêmes raisonnements que ceux qui nous ont permis d'introduire le fibré tangent, permettent le recollement des $U_\alpha \times F$ en un fibré vectoriel $(\boldsymbol{P}_\rho, \boldsymbol{B}, \pi_\rho)$.

2.11.3-1. Exemple et définition : Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable de dimension d. L'application de matrices $A \mapsto {}^tA^{-1}$ défini un homomorphisme de groupes $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{GL}((\mathbb{R}^d)^*)$. Le fibré associé est noté $\mathfrak{T}^*(\boldsymbol{M})$; on l'appelle «le fibré cotangent à $\boldsymbol{M}$».

2.11.4 Fibrés vectoriels construits "par fonctorialité". La construction de la section précédente, valable pour un fibré vectoriel donné, peut être vue comme un cas particulier d'une correspondance fonctorielle définie sur la catégorie $\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M})$ de tous les fibrés vectoriels au-dessus d'une variété $\boldsymbol{M}$.

Notons $\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et les morphismes sont les applications linéaires. Nous allons nous intéresser aux foncteurs additifs $\mathcal{F}$ (covariants pour simplifier l'exposé) définis sur $\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}$ vers elle-même. En particulier, les morphismes :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(V_1), \mathcal{F}(V_2))\,, \qquad (\diamond)$$

sont $\mathbb{R}$-linéaires.

Soit maintenant $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \pi)$ un fibré vectoriel de fibre E et soit $\mathcal{F}$ un foncteur additif comme ci-dessus. Nous allons décrire un procédé canonique pour associer à $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \pi)$ un fibré vectoriel $(\mathcal{F}\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \mathcal{F}\pi)$ de fibre $\mathcal{F}(E)$ et à un morphisme $f : (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{B}, \pi_1) \to (\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{B}, \pi_2)$ de fibrés vectoriels au-dessus de $\boldsymbol{B}$, un morphisme $\mathcal{F}(f) : (\mathcal{F}(\boldsymbol{P}_1), \boldsymbol{B}, \mathcal{F}(\pi_1)) \to (\mathcal{F}(\boldsymbol{P}_2), \boldsymbol{B}, \mathcal{F}(\pi_2))$. La correspondance ainsi définie sera fonctorielle de la catégorie des fibrés vectoriels (au-dessus de $\boldsymbol{B}$) vers elle-même.

L'idée est assez simple et provient de remarquer que l'application $(\diamond)$ étant linéaire, est automatiquement différentiable lorsque V_1 et V_2 sont de dimension finie, et d'autre part, que lorsque $V_1 = V_2 = V$, elle donne un homomorphisme de groupes $\rho_{\mathcal{F}}(V) : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(\mathcal{F}(V))$ qui permet,

[18] Par exemple provenant d'un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ vers $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(F)$.

par le procédé décrit dans la section précédente, de construire la fibration $(\boldsymbol{P}_{\rho_{\mathcal{F}}}, \boldsymbol{B}, \pi_{\rho_{\mathcal{F}}})$ également notée $(\mathcal{F}(\boldsymbol{P}), \boldsymbol{B}, \mathcal{F}(\pi))$.

L'analyse locale d'un $\boldsymbol{B}$-morphisme de fibrés vectoriels $f : (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{B}, \pi_1) \to (\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{B}, \pi_2)$ faite en page 45, donnait les descriptions :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{f|_{U_\alpha}} & \pi_2^{-1}(U_\alpha) \\ {\scriptstyle \phi_{1,\alpha}}\downarrow \equiv & & \equiv \downarrow{\scriptstyle \phi_{2,\alpha}} \\ U_\alpha \times E_1 & \xrightarrow{f_\alpha} & U_\alpha \times E_2 \\ (u,v) & \longmapsto & (u, \overline{f}_\alpha(u)(v)) \end{array}$$

et la condition de commutation nécessaire (C) :

$$\Big(\overline{\varphi}_{2,\beta,\alpha}(u) \circ \overline{f}_{\alpha,\beta}(u)\Big)(v) = \Big(\overline{f}_{\beta,\alpha}(u) \circ \overline{\varphi}_{1,\beta,\alpha}(u)\Big)(v)\,. \tag{C}$$

L'application du foncteur $\mathcal{F}$ aux applications $\overline{f}_\alpha$, $\overline{f}_\beta$, $\overline{f}_{\alpha,\beta}$, $\overline{f}_{\beta,\alpha}$, $\overline{\varphi}_{\alpha,\beta}$, $\overline{\varphi}_{\beta,\alpha}$, donnera des applications différentiables satisfaisant toujours la relation de commutation (C). Or, c'est bien tout ce dont on a besoin pour montrer que la famille des $\mathcal{F}(\overline{f}_\alpha)$ se recollent en un morphisme de fibrés vectoriels $\mathfrak{T}(f) : (\mathcal{F}(\boldsymbol{P}_1), \boldsymbol{B}, \mathcal{F}(\pi_1)) \to (\mathcal{F}(\boldsymbol{P}_2), \boldsymbol{B}, \mathcal{F}(\pi_2))$.

2.11.4-1. Remarque : Ces idées se généralisent sans difficulté à la catégorie de fibrations vectorielles sur des bases arbitraires. En particulier, le foncteur $\mathfrak{T}$ peut être "composé" avec le foncteur induit par le foncteur qui associe à un espace vectoriel son algèbre extérieure : $\bullet \rightsquigarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}^*(\bullet)$. La section suivante est destinée à l'étude détaillée de ce foncteur.

2.11.4-2. Remarque Bifoncteurs : Plus généralement, soit $\mathcal{B}$ un foncteur additif $\mathcal{B} : \mathrm{Vec}_{\mathbb{R}} \times \mathrm{Vec}_{\mathbb{R}} \rightsquigarrow \mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}$, où $\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}} \times \mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}$ désigne la catégorie dont les objets sont les couples d'espaces vectoriels et où :

$$\mathrm{Mor}((V_1, W_1), (V_2, W_2)) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W_1, W_2)\,,$$

la composition étant définie coordonnée par coordonnée ; la catégorie résultante est alors additive (et même abélienne). Un tel foncteur est appelé un bifoncteur additif, sa variance dépendra de son comportement "coordonnée par coordonnée". La "somme directe ", le "produit tensoriel", "le foncteur Hom" qui associe $(V, W) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, sont des exemples classiques de bifoncteurs, les deux premiers sont bi-covariants et le dernier contravariant en la première coordonnée et covariant en la seconde coordonnée.

Les constructions fonctorielles de fibrés vectoriels que nous avons décrites ses généralisent, laborieusement mais sans difficulté, au cadre de bifoncteurs, c'est ainsi que l'on peut faire correspondre *de manière fonctorielle* à tout couple de fibrés vectoriels $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{B}, \pi_1)$ et $(\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{B}, \pi_2)$ au-dessus d'une même variété $\boldsymbol{B}$, les fibrés au-dessus de $\boldsymbol{B}$ notés : $\boldsymbol{P}_1 \oplus \boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_1 \otimes_{\mathbb{R}} \boldsymbol{P}_2$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)$.

2.11.4-2.1. Exercice : L'espace vectoriel $\Gamma(\boldsymbol{B}; \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2))$ des sections globales du fibré vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2) \to \boldsymbol{B}$ s'identifie canoniquement à l'espace $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{B})}(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)$ des $\boldsymbol{B}$-morphismes de fibrés vectoriels au-dessus de $\boldsymbol{B}$.

———————×———————

§3. Complexe de de Rham et cohomologie de de Rham des variétés différentiables

3.1 Formes alternées sur un espace vectoriel de dimension finie

Dans la suite, on désignera par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On pourra consulter la référence [Car] pour toute cette section.

3.1.1 Formes multilinéaires. Soit m un entier naturel positif. On appelle «forme m-multilinéaire», toute application :

$$\varphi : \underbrace{E \oplus \cdots \oplus E}_{m\text{-fois}} \to \mathbb{R}$$

qui soit $\mathbb{R}$-linéaire par rapport à chaque coordonnée indépendamment, *i.e.* telle que pour chaque $1 \leqslant k \leqslant m$ et chaque $(m-1)$-uplet $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_m) \in E^{m-1}$, l'application :

$$\vec{x} \in E \longmapsto \varphi(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{x}, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_m) \in \mathbb{R}\,,$$

est une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur E. L'ensemble des formes m-linéaires sur E sera noté $\boldsymbol{\mathcal{L}}^m(E)$.

En posant pour tous $\varphi, \psi \in \boldsymbol{\mathcal{L}}^m(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m) &= \varphi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m) + \psi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)\\ (\lambda \cdot \varphi)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m) &= \lambda\big(\varphi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)\big)\end{aligned}$$

les applications $(\varphi + \psi)$ et $(\lambda \cdot \varphi)$ sont encore m-multilinéaires. Muni de ces opérations, l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{L}}^m(E)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3.1.1-1. Exercice : Pour E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, notons $\mathcal{L}(E,F) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,F)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications linéaires de E à valeurs dans F. Pour chaque entier naturel m, l'application qui fait correspondre à $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{L}}^{m+1}(E)$ l'application qui associe à $\vec{x}_0 \in E$ l'application $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m) \mapsto \varphi(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$, établit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{m+1}(E) \equiv \mathcal{L}(E, \boldsymbol{\mathcal{L}}^m(E))\,.$$

Lorsque l'on fixe un repère $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d)$ de E, la multilinéarité suffit à montrer que pour chaque $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{L}}^m(E)$ donnée, il existe une famille de nombres réels $\{A_{i_1,\ldots,i_m}\}$ indexée par les suites d'entiers $(i_1, \ldots, i_m)$ avec $1 \leqslant i_k \leqslant d$, telle que :

$$\alpha(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m) = \sum_{(i_1,\ldots,i_m)} A_{i_1,\ldots,i_m}\, (\vec{x}_1)_{i_1} (\vec{x}_2)_{i_2} \cdots (\vec{x}_m)_{i_m} \qquad (\diamond)$$

où $(\vec{x})_j$ désigne la j-ième coordonnée de $\vec{x}$ dans le repère $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{B}^* = ((\vec{e}_1)^*, \ldots, (\vec{e}_d)^*)$ le repère dual de $\mathcal{B}$, on a $(\vec{x})_j = (\vec{e}_j)^*(\vec{x})$, et l'égalité $(\diamond)$ se réécrit :

$$\begin{aligned}\alpha(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m) &= \sum_{(i_1,\ldots,i_m)} A_{i_1,\ldots,i_m} \big((\vec{e}_{i_1})^*(\vec{x}_1)\big) \cdots \big((\vec{e}_{i_m})^*(\vec{x}_m)\big)\\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_m)} A_{i_1,\ldots,i_m} \big((\vec{e}_{i_1})^* \cdots (\vec{e}_{i_m})^*\big)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)\end{aligned}$$

où $\big((\vec{e}_{i_1})^* \cdots (\vec{e}_{i_m})^*\big)$ désigne le produit des formes linéaires duales en question. Il s'ensuit que la famille de toutes les formes multilinéaires de la forme $\big((\vec{e}_{i_1})^* \cdots (\vec{e}_{i_m})^*\big)$ constitue une base pour

$\mathcal{L}^m(E)$, en particulier :

$$\dim_{\mathbb{R}}\big(\mathcal{L}^m(E)\big) = \dim_{\mathbb{R}}(E)^m = d^m\,.$$

3.1.2 Action de $\mathfrak{S}_m$ sur $\mathcal{L}^m(E)$. Notons $\mathfrak{S}_m$ le groupe des permutations de l'ensemble des entiers $\{1, 2, \ldots, m\}$; et posons pour chaque $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ et chaque $\varphi \in \mathcal{L}^m(E)$:

$$(\sigma \cdot \varphi)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m) := \varphi\big(\vec{x}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{x}_{\sigma(m)}\big)\,.$$

L'application $\sigma \cdot \varphi$ est alors une m-forme multilinéaire et $\cdot : \mathfrak{S}_m \times \mathcal{L}^m(E) \to \mathcal{L}^m(E)$ est une action du groupe $\mathfrak{S}_m$ sur $\mathcal{L}^m(E)$ par des isomorphismes linéaires (on parle alors d'«action linéaire»).

Rappelons que l'on appelle «caractère» de $\mathfrak{S}_m$ tout homomorphisme de groupes $\rho : \mathfrak{S} \to (\mathbb{C}, \cdot, 1)$. Le fait que $\mathfrak{S}_m$ soit de cardinal *fini* entraîne que ρ est à valeurs dans le sous-groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*_u$ des nombres complexes de valeur absolue égale à 1. Et comme $\mathbb{C}^*_u$ est abélien, la restriction de ρ au sous groupe «dérivé» $\mathfrak{A}_m := [\mathfrak{S}_m, \mathfrak{S}_m]$ (également appelé «sous-groupe alterné») sera trivial. Il s'ensuit que ρ se factorise à travers du groupe $\mathfrak{S}_m/\mathfrak{A}_m$ que l'on sait être isomorphe à $\{\pm 1\}$ (signatures des permutations) ; de sorte que $\rho = \varepsilon^\ell$, où $\ell = 0, 1$, et où $\varepsilon(\sigma)$ dénote la signature de $\sigma \in \mathfrak{S}_m$.

3.1.3 Algèbre des formes multilinéaires. Posons $\mathcal{L}^0(E) = \mathbb{R}$ et notons $\mathcal{L}^*(E)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel somme directe de tous les $\mathcal{L}^m(E)$ avec $m \in \mathbb{N}$. On désignera par $0, 1 \in \mathcal{L}^*(E)$, les scalaires $0, 1 \in \mathbb{R} = \mathcal{L}^0(E) \subseteq \mathcal{L}^*(E)$. L'application :

$$\cdot : \mathcal{L}^m(E) \oplus \mathcal{L}^n(E) \longrightarrow \mathcal{L}^{m+n}(E)$$

qui associe au couple (φ, ψ) la $(m+n)$-forme multilinéaire :

$$(\varphi \cdot \psi)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \ldots, \vec{x}_{m+n}) := \varphi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)\, \psi(\vec{x}_{m+1}, \ldots, \vec{x}_{m+n})\,,$$

est $\mathbb{R}$-bilinéaire et fait de $(\mathcal{L}^*(E), +, \cdot, 0, 1)$ une $\mathbb{R}$-algèbre graduée. Les formes de $\mathcal{L}^m(E) \subseteq \mathcal{L}^*(E)$ sont appelées «homogènes de degré m» ; on note $\deg(\alpha)$ le degré d'une forme multilinéaire homogène.

3.1.4 Formes alternées et opérateur d'antisymétrisation. On appelle «m-forme alternée» toute forme m-multilinéaire α telle que $\alpha(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m) = 0$ à chaque fois que $\vec{x}_i = \vec{x}_j$ pour *deux indices différents* i, j ; on notera $\mathcal{A}^m(E)$[19] leur ensemble.

3.1.4-1. Exercice :
a) Une application $\alpha \in \mathcal{L}^m(E)$ est alternée, si et seulement si,

$$\sigma \cdot \alpha = \varepsilon(\sigma)\, \alpha\,, \quad \text{pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_m,$$

i.e., si et seulement si,

$$\alpha(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m) = \varepsilon(\sigma)\, \alpha\big(\vec{x}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{x}_{\sigma(m)}\big)\,.$$

pour tout $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m) \in E^m$ et toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_m$.

[19] La notation $\bigwedge^m(E^*)$ est également très classique.

b) L'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{L}}^m(E)$ est un sous-espace vectoriel.

c) Pour chaque entier positif m (plus grand que 1), l'application linéaire $\mathfrak{a}_m : \boldsymbol{\mathcal{L}}^m(E) \to \boldsymbol{\mathcal{L}}^m(E)$ définie par :

$$\mathfrak{a}_m(\alpha)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon(\sigma)\, (\sigma \cdot \alpha)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon(\sigma)\, \alpha\big(\vec{x}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{x}_{\sigma(m)}\big)$$

est à valeurs dans $\boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E)$ et l'on a : $\mathfrak{a}_m(\alpha) = m!\,\alpha$, pour tout $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E)$.

L'application $\mathfrak{a}_m$ est appelée «opérateur d'antisymétrisation».

d) En fixant un repère $\mathcal{B}$ pour E, montrer dans l'écriture $(\diamond)$ de $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{L}}^m(E)$, que $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E)$, si et seulement si,

$$A_{(i_1,\ldots,i_m)} = \varepsilon(\sigma)\, A_{(i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(m)})}\,, \quad \text{pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_m.$$

e) Déduire de la question précédente que $\dim_{\mathbb{R}}\big(\boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E)\big) = 0$, pour tout $m > \dim_{\mathbb{R}}(E)$, et que :

$$\dim_{\mathbb{R}}\big(\boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E)\big) = \binom{\dim_{\mathbb{R}}(E)}{m}, \qquad (*)$$

pour tout $m \leqslant \dim_{\mathbb{R}}(E)$.

3.1.4-1-e.1. Remarque : Le cas $m = \dim_{\mathbb{R}}(E)$ jouera un rôle particulièrement important dans le cours. L'égalité $(*)$ montre que $\dim_{\mathbb{R}}\big(\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\dim_{\mathbb{R}}(E)}(E)\big) = 1$. Bien de subtilités seront conséquence directe de la **non existence** d'un isomorphisme canonique entre $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\dim_{\mathbb{R}}(E)}(E)$ et $\mathbb{R}$ (*cf.* page 56).

3.1.4-1-e.2. Remarque : Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, et que l'on identifie $(\mathbb{R}^n)^n$ à l'ensemble des matrices $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$, l'application déterminant $\det : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ est une application n-linéaire alternée. Rappelons que $\det(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ mesure le volume "signé" du parallélépipède de côtés donnés par les vecteurs $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$, ce qui explique de manière intuitivement claire à la fois la notion de multilinéarité et d'alternance. Par ailleurs, la remarque précédente montre que toute autre n-forme alternée est un multiple de celle-ci.

3.1.5 Algèbre extérieure. Notons $\boldsymbol{\mathcal{A}}^*(E)$[20] le $\mathbb{R}$-espace vectoriel somme directe des $\boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E)$ pour $m \in \mathbb{N}$. On définit une opération binaire $\wedge : \boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E) \oplus \boldsymbol{\mathcal{A}}^n(E) \to \boldsymbol{\mathcal{A}}^{m+n}(E)$ appelée «produit extérieur» par :

$$\varphi \wedge \psi := \frac{1}{m!\,n!}\, \mathfrak{a}_{m+n}(\varphi \cdot \psi)\,. \qquad (\diamond)$$

L'opération $\wedge$ est alors *associative et distributive* et définit une structure d'algèbre graduée «anti-commutative» sur $\boldsymbol{\mathcal{A}}^*(E)$; on a la relation de commutation :

$$\boxed{\varphi \wedge \psi = (-1)^{\deg(\varphi)\deg(\psi)}\, \psi \wedge \varphi} \qquad (\diamond\diamond)$$

3.1.5-1. Exercice : Vérifier l'associativité, distributivité et anti-commutativité du produit extérieur de formes alternées (*cf.* [Car] propositions 1.5.1 et 1.5.2, en page 185).

[20] Noté également $\bigwedge^*(E^*)$.

3.1.5-1.1. Remarque : Le lecteur peut comprendre sans difficulté la raison de la division par l'entier $(m!\,n!)$ dans l'égalité $(\diamond)$; elle provient du fait que comme φ et ψ sont déjà alternées de degrés respectifs m et n, deux permutations $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_{m+n}$, vérifiant $\sigma_1([1,m]) = \sigma_2([1,m])$ donneront deux formes identiques $\varepsilon(\sigma_1)\,\sigma_1 \cdot (\varphi \cdot \psi) = \varepsilon(\sigma_2)\,\sigma_2 \cdot (\varphi \cdot \psi)$ lors de l'application de l'opérateur d'antisymétrisation $\mathfrak{a}_{m+n}$. C'est donc bien dans un but de correction de ces redondances que l'on divise par $(m!\,n!)$. Plus précisément, la relation d'équivalence '$\sim_m$' sur $\mathfrak{S}_{m+n}$ définie par

$$\sigma_1 \sim_m \sigma_2\,, \quad \text{si et seulement si,} \quad \sigma_1([1,m]) = \sigma_2([1,m])$$

produit des classes d'équivalence de cardinal $(m!\,n!)$. En effet, pour chacune de ces classes, il existe une et une seule permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{m+n}$ vérifiant

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(m) \quad \text{et} \quad \sigma(m+1) < \cdots < \sigma(m+n) \qquad (\ddagger)\,,$$

toute autre permutation de la classe s'en déduit par permutations des ensembles $\sigma([1,m])$ et $\sigma([m+1, m+n])$, ce qui explique le facteur $(m!\,n!)$. Notons $\mathfrak{S}_{m,n}$ le *sous-ensemble* des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_{m+n}$ vérifiant $(\ddagger)$, nous aurions donc pu poser comme définition de produit extérieur, à la place de $(\diamond)$:

$$\varphi \wedge \psi(\vec{a}_1, \dots \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_{m+n}) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{m,n}} \varepsilon(\sigma)\, \varphi(\vec{a}_{\sigma(1)}, \dots \vec{a}_{\sigma(m)}) \cdot \psi(\vec{a}_{\sigma(m+1)}, \dots, \vec{a}_{\sigma(m+n)})\,,$$

ce qui aurait donné exactement le même résultat, avec l'avantage bien évident que ne devant pas diviser par $(m!\,n!)$, la formule est valable sur des anneaux autres que $\mathbb{Q}$, en particulier sur des corps de caractéristique positive ; mais bien sûr, la preuve de l'associativité du produit extérieur, sera alors plus élaborée.

Les permutation de $\mathfrak{S}_{m,n}$ sont appelées «permutations de battage en tas de m et n cartes» pour des raisons intuitivement claires.

3.1.5-2. Exercice : Montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}^*(E)) = 2^{\dim_{\mathbb{R}}(E)}$.

3.1.5-3. Exercice et terminologie : Les éléments du sous-espace $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{2*}(E) := \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\mathcal{A}}^{2m}(E)$ sont appelés des «formes (alternées) paires». Montrer que $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{2*}(E)$ est le centre $\mathfrak{Z}(\boldsymbol{\mathcal{A}}^*(E))$ de l'algèbre $\boldsymbol{\mathcal{A}}^*(E)$.

De manière analogue, les formes du sous-espace $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{2*+1}(E) := \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\mathcal{A}}^{2m+1}(E)$ sont appelés «formes (alternées) impaires».

3.1.5-4. Exercice :

a) Monter qu'un élément $u \in \boldsymbol{\mathcal{A}}^*(E)$ est *nilpotent*, si et seulement si, sa composante de degré zéro est nulle.

b) Montrer que $u \in \boldsymbol{\mathcal{A}}^*(E)$ est *inversible*, si et seulement si, sa composante de degré zéro est non nulle.

c) Montrer que $\boldsymbol{\mathcal{A}}^*(E)$ est un anneau local. Précisez son idéal maximal.

3.1.5-5. Exercice : Montrer que si φ est homogène de degré *impair*, alors $\varphi \wedge \varphi = 0$. Que dire du même produit $\varphi \wedge \varphi$ lorsque φ est *non-homogène* et *impaire* ?

3.1.5-6. Exercice : Montrer que l'inclusion $\mathcal{A}^*(E) \subseteq \mathcal{L}^*(E)$ n'est pas en général une inclusion d'algèbres.

3.1.5-7. Exercice : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de repère $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$ et repère dual $\mathcal{B}^* = ((\vec{e}_1)^*, \dots, (\vec{e}_d)^*)$. A l'aide de l'exercice 3.1.4-1-d montrer que dans $\mathcal{A}^m(E)$, on a pour chaque suite ordonnée $(i_1 < \cdots < i_m)$, où $1 \leqslant i_k \leqslant d$:

$$(\vec{e}_{i_1})^* \wedge \cdots \wedge (\vec{e}_{i_m})^* = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon(\sigma)\, (\vec{e}_{i_{\sigma(1)}})^* \cdots (\vec{e}_{i_{\sigma(m)}})^* ,$$

où $\mathfrak{S}_m$ dénote le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, m\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ désigne « la signature » de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_m$. La famille $\{(\vec{e}_{i_1})^* \wedge \cdots \wedge (\vec{e}_{i_m})^*\}$ indexée par l'ensemble de toutes les suites $(i_1 < \cdots < i_m)$ avec $1 \leqslant i_k \leqslant d$, est une base pour $\mathcal{A}^m(E)$.

3.1.6 Images inverses des formes multilinéaires et des formes alternées. Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire, on définit $f^* : \mathcal{L}^m(F) \to \mathcal{L}^m(E)$ par :

$$f^*(\varphi)(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) := \varphi\big(f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_m)\big)$$

On en déduit une application $f^* : \mathcal{L}^*(F) \to \mathcal{L}^*(E)$.

3.1.6-1. Exercice : Sous les hypothèses en cours,

a) Montrer que $f^* : \mathcal{L}^m(F) \to \mathcal{L}^m(E)$ est $\mathbb{R}$-linéaire et commute à l'action de $\mathfrak{S}_m$, en particulier, elle commute à l'action de l'opérateur d'antisymétrisation $\mathfrak{a}_m$. Lorsque φ est alternée, montrer que $f^*(\varphi)$ l'est également.

b) Montrer l'égalité : $f^*(\varphi \wedge \psi) = f^*(\varphi) \wedge f^*(\psi)$, pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{A}^*(E)$.

c) Les applications $f^* : \mathcal{L}^*(F) \to \mathcal{L}^*(E)$ et $f^* : \mathcal{A}^*(F) \to \mathcal{A}^*(E)$ sont des homomorphismes de $\mathbb{R}$-algèbres graduées.

3.1.6-2. Exercice : Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de repères $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{d(E)})$ et $\mathcal{B}_F = \big(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{d(F)}\big)$ respectivement. Notons $\mathcal{B}_E^* = ((\vec{e}_1)^*, \dots, (\vec{e}_{d(E)})^*)$ et $\mathcal{B}_F^* = \big((\vec{f}_1)^*, \dots, (\vec{f}_{d(F)})^*\big)$ les repères duaux. Soit $g : E \to F$ une application linéaire de matrice $((g)) = (g_{j,i})$, relativement aux repères $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

a) Pour chaque $1 \leqslant k \leqslant d(F)$, on a :

$$g^*\big((\vec{f}_k)^*\big) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant d(E)} g_{k,i}\, (\vec{e}_i)^* .$$

b) Pour chaque entier naturel r et chaque suite d'entiers $(1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant d(F))$, on a :

$$\begin{aligned} g^*\big((\vec{f}_{j_1})^* \wedge \cdots \wedge (\vec{f}_{j_r})^*\big) &= g^*(\vec{f}_{j_1})^* \wedge \cdots \wedge g^*(\vec{f}_{j_r})^* \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_r \leqslant d(E)} g_{j_1,i_1}\, g_{j_2,i_2} \cdots g_{j_r,i_r}\, (e_{i_1})^* \wedge \cdots \wedge (e_{i_r})^* \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant d(E)} \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon(\sigma)\, g_{j_1,i_{\sigma(1)}}\, g_{j_2,i_{\sigma(2)}} \cdots g_{j_r,i_{\sigma(r)}} \Big) (e_{i_1})^* \wedge \cdots \wedge (e_{i_r})^* \end{aligned}$$

où l'on voit apparaître entre parenthèses les « mineurs de rang r » de la matrice $((g))$.

c) En particulier, si $d(E) = d(F) = d$, on a :

$$g^*\big((\vec{f}_1)^* \wedge \cdots \wedge (\vec{f}_d)^*\big) = \det((g))\,(\vec{e}_1)^* \wedge \cdots \wedge (\vec{e}_d)^*\,.$$

3.1.6-3. Exercice : Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
a) f est un isomorphisme.
b) $f^* : \boldsymbol{\mathcal{A}}^*(F) \to \boldsymbol{\mathcal{A}}^*(E)$ est un isomorphisme d'algèbres.
c) Il existe un entier naturel $m > 0$ tel que $f^* : \boldsymbol{\mathcal{A}}^m(F) \to \boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E)$ est un isomorphisme.

3.1.6-4. Exercice : Notons $\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}$ la catégorie des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie où les morphismes sont les applications $\mathbb{R}$-linéaires et la composition de morphismes est la composition d'applications.

Notons $\mathrm{Alg}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ la catégorie des $\mathbb{R}$-algèbres graduées sur $\mathbb{N}$ dont les morphismes sont les $\mathbb{R}$-homomorphismes graduées (de degré 0) d'algèbres. Montrer que la correspondance qui associe à un espace vectoriel E l'algèbre graduée $\boldsymbol{\mathcal{L}}^*(E)$ (resp. $\boldsymbol{\mathcal{A}}^*(E)$) et à l'application linéaire $f : E \to F$ l'application $f^* : \boldsymbol{\mathcal{L}}^*(F) \to \boldsymbol{\mathcal{L}}^*(E)$ (resp. $f^* : \boldsymbol{\mathcal{A}}^*(F) \to \boldsymbol{\mathcal{A}}^*(E)$), est un *foncteur additif contravariant exact*([21]).

3.1.7 Non naturalité d'une dualité. Pour tout nombre naturel $m \leqslant d = \dim_{\mathbb{R}}(E)$, le produit extérieur de formes alternées définit une application bilinéaire non dégénérée :

$$\wedge : \boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E) \oplus \boldsymbol{\mathcal{A}}^{d-m}(E) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}^d(E) \sim \mathbb{R}\,. \qquad (\mathcal{D}(E))$$

On en déduit l'égalité $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E)) = \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}^{d-m}(E))$, mais ce qui est vraiment important à souligner c'est le fait que toute identification "par dualité" entre $\boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E)$ et $(\boldsymbol{\mathcal{A}}^{d-m}(E))^*$ **sera relative à un isomorphisme entre $\boldsymbol{\mathcal{A}}^d(E)$ et $\mathbb{R}$** autrement dit, **relative à la donnée d'une forme alternée de degré maximal non nulle** ; or, il n'existe aucun choix naturel ou canonique (en dehors du cas $E = \mathbb{R}^d$) d'une telle forme alternée.

3.1.7-1. Exercice : Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Montrer la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{\mathcal{A}}^m(F)\times\boldsymbol{\mathcal{A}}^n(F) & \xrightarrow{\ \wedge\ } & \boldsymbol{\mathcal{A}}^{m+n}(F) \\
{\scriptstyle f^*}\downarrow \quad \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\
\boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E)\times\boldsymbol{\mathcal{A}}^n(E) & \xrightarrow{\ \wedge\ } & \boldsymbol{\mathcal{A}}^{m+n}(E)
\end{array}$$

3.2 Formes différentielles sur les espaces vectoriels

Commençons cette section en rappelant que la notion de différentielle d'une application a un sens sur la catégorie des ouverts des espaces vectoriels normés complets (les espaces de Banach).

[21] Un chapitre ultérieur est destiné à rappeler les notions de la théorie de catégories sous-jacentes à cette question.

Lorsque l'on se restreint à la sous-catégorie des ouverts des espaces vectoriels de dimension finie, le "calcul différentiel" y est indépendant des normes puisque dans ce cas toutes les normes sont équivalentes. Il importe cependant de retenir que si la différentielle d'une application ne dépend pas du "choix" d'une norme, elle dépend néanmoins du fait que les normes existent. Plus précisément, soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, la définition et l'étude de :

- la topologie de E et F ;
- la différentiabilité d'une application $f : U \subseteq E \to F$, pour U ouvert dans E ;
- la définition de la différentielle $df_{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{L}(E, F)$ en chaque point $\boldsymbol{x} \in U$;
- la différentiabilité de l'application $df : U \to \mathcal{L}(E, F)$;

se font à l'aide d'un choix de normes, mais les conclusions en sont indépendantes.

Une autre manière de procéder dans le cas de dimension finie, consiste à se ramener, à l'aide d'isomorphismes *linéaires* $\varphi : E \to \mathbb{R}^m$ et $\psi : F \to \mathbb{R}^n$, aux mêmes questions et à l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ entre les ouverts $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ et $\psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$. En effet, si l'on part d'espaces vectoriels normés E et F, la différentiabilité de f en un point $\boldsymbol{x} \in U$, équivaut à la différentiabilité de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(\boldsymbol{x})$; auquel cas, on a :

$$df_{\boldsymbol{x}}(H) = \psi^{-1}\Big(d\Big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\Big)_{\varphi(\boldsymbol{x})}\Big(\varphi(H)\Big)\Big)\,, \qquad (*)$$

et ceci, quels que soient les isomorphismes φ et ψ. Ceci suggère que l'on puisse faire abstraction des normes sur E et F dans une définition de la différentiabilité et différentielle d'une application $f : U \subseteq E \to F$ basée sur l'égalité $(*)$.

Cette deuxième manière d'introduire le calcul différentiel sur un espace vectoriel correspond très précisément au point de vue des variétés différentiables et c'est bien celle que nous allons privilégier.

Ces remarques préliminaires suffisent donc pour donner un sens intrinsèque à l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(U, V)$ des «applications différentiables entre les ouverts $U \subseteq E$ et $V \subseteq F$», pour tous $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension *finie* E et F.

3.2-1. Exercice : Sous les hypothèses en cours et lorsque $V = F$, la somme point par point de deux applications différentiables et le produit point par point d'une application différentiable par un scalaire fixe, sont des fonctions différentiables. Ces opérations munissent l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(U, F)$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3.2-2. Définition : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie d, et $U \subseteq E$ une partie ouverte. Pour chaque entier naturel m, on note $\Omega^m(U)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(U, \boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E))$ d'applications différentiables de U à valeurs dans $\boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E)$. On pose :

$$\Omega^*(U) := \Omega^0(U) \oplus \Omega^1(U) \oplus \cdots \oplus \Omega^d(U)\,.$$

Les éléments de $\Omega^m(U) \subseteq \Omega^*(U)$ sont appelés «les formes différentielles homogènes de degré m sur U» et aussi «les m-formes différentielles sur U».

On munit $\Omega^*(U)$ d'une structure de $\mathbb{R}$-algèbre graduée anticommutative en définissant l'addition, multiplication par un scalaire et produit extérieur des formes différentielles, point par point. On pose donc pour le produit extérieur de deux formes différentielles ω_1 et ω_2 :

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\boldsymbol{x}) := \omega_1(\boldsymbol{x}) \wedge \omega_2(\boldsymbol{x})\,,$$

pour tout $\boldsymbol{x} \in U$. On laisse aux soins du lecteur de vérifier que $\omega_1 \wedge \omega_2$ est une application différentiable de U à valeurs dans l'espace vectoriel $\boldsymbol{\mathcal{A}}^*(E)$.

3.2.1 Formes différentielles à support compact.

3.2.1-1. Définition : Une forme différentielle $\omega \in \Omega^*(U)$ étant une application de $U \subseteq E$ à valeurs dans un espace vectoriel, l'ensemble des zéros de ω, *i.e.* l'ensemble des $\boldsymbol{x} \in U$ tels que $\omega(\boldsymbol{x}) = 0$, est bien défini. Une forme différentielle $\omega \in \Omega^*(U)$ sera dite «à support compact» lorsque l'adhérence de l'ensemble des zéros de ω, noté $|\omega|$, est *compact*. On note $\Omega^*_c(U)$ l'ensemble de telles formes différentielles, c'est un *idéal gradué* de $\Omega^*(U)$.

3.2.1-2. Exercice : Montrer que lorsque $\dim_{\mathbb{R}}(E) > 0$ et $U \neq \varnothing$, les espaces vectoriels réels $\Omega^m(U)$ et $\Omega^m_c(U)$ sont de dimension *infinie*, de même, par ailleurs, que l'espace vectoriel quotient $\Omega^m(U)/\Omega^m_c(U)$.

3.2.1-3. Exercice : Expliquer pourquoi, lorsque $\dim_{\mathbb{R}}(E) > 0$ et $U \neq \varnothing$, l'idéal $\Omega^*_c(U)$ n'est pas un anneau.

3.2.1-4. Exercice : On a $\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$ et $\Omega^0_c(U) = \mathcal{C}^\infty_c(U)$, et plus généralement :

$$\Omega^m(U) \equiv \mathcal{C}^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} \boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E) \quad \text{et} \quad \Omega^m_c(U) \equiv \mathcal{C}^\infty_c(U) \otimes_{\mathbb{R}} \boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E)\,.$$

3.2.1-5. Remarque : Considérons l'espace vectoriel E muni de sa structure standard de variété différentiable ; le fibré tangent $\boldsymbol{\mathcal{T}}(E)$ s'identifie alors à $E \times E$. Le foncteur $\boldsymbol{\mathcal{A}}^m$ qui fait correspondre à un espace vectoriel l'espace des m-formes alternées fournit ensuite par le procédé décrit dans la section 2.11.4 le fibré $\boldsymbol{\mathcal{A}}^m\boldsymbol{\mathcal{T}}(E)$ qui sera également trivial et s'identifiera à la variété différentiable $E \times \boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E)$. Par restriction des fibrés à l'ouvert $U \subseteq E$, on obtient les fibrés vectoriels $\boldsymbol{\mathcal{A}}^m\boldsymbol{\mathcal{T}}(U)$ et le fibré $\boldsymbol{\mathcal{A}}^*\boldsymbol{\mathcal{T}}(U) := \oplus_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\mathcal{A}}^m\boldsymbol{\mathcal{T}}(U)$. On a alors :

$$\Omega^*(U) = \Gamma(U; \boldsymbol{\mathcal{A}}^*\boldsymbol{\mathcal{T}}(U)) = \Gamma(U; \boldsymbol{\mathcal{A}}^*\boldsymbol{\mathcal{T}}(E)) \quad \text{et} \quad \Omega^*_c(U) = \Gamma_c(U; \boldsymbol{\mathcal{A}}^*\boldsymbol{\mathcal{T}}(U)) = \Gamma_c(U; \boldsymbol{\mathcal{A}}^*\boldsymbol{\mathcal{T}}(E))$$

3.2.2 Image inverse d'une forme différentielle.

Soient des ouverts $U \subseteq E$ et $V \subseteq F$ et une application différentiable $f : U \to V$. Rappelons que pour tout $\boldsymbol{x} \in U$ la différentielle $df_{\boldsymbol{x}}$, de f

en $\boldsymbol{x}$, est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$ et que l'application $\boldsymbol{x} \mapsto df_{\boldsymbol{x}}$ de U à valeurs dans $\mathcal{L}(E,F)$ est différentiable. Pour chaque $\omega \in \Omega^m(V)$, on définit la forme différentielle $f^*(\omega) \in \Omega^m(U)$ en posant :

$$f^*(\omega)(\boldsymbol{x}) := (df_{\boldsymbol{x}})^*\big(\omega(f(\boldsymbol{x}))\big)\,,$$

pour chaque $\boldsymbol{x} \in U$.

3.2.2-1. Exercice : Vérifier la différentiabilité de $f^*(\omega)$.

3.2.2-2. Exercice :

a) Montrer que $f^* : \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres graduées de degré 0.

b) Soient $f : U \to V$ et $g : V \to W$ ou U, V et W sont des ouverts d'espaces vectoriels de dimension finie. Montrer l'égalité :
$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*\,.$$

c) Notons Ouv la catégorie dons les objets sont les parties ouvertes des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et où les morphismes sont les les applications différentiables. La correspondance qui associe à un ouvert U l'algèbre $\Omega^*(U)$ et à un morphisme f, le morphisme f^*, définit un foncteur *contravariant* de Ouv vers la catégorie des $\mathbb{R}$-algèbres graduées.

3.2.2-2.1. Remarque : On observera que la notion d'"image inverse d'une forme différentielle" n'est autre que le résultat de composer les foncteurs

$$\langle\text{variété}\rangle \rightsquigarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}^*\mathfrak{T}(\langle\text{variété}\rangle) \quad \text{et} \quad \langle\text{fibré vectoriel}\rangle \rightsquigarrow \langle\text{sections globales du fibré}\rangle\,.$$

La contravariance finale est alors reflet de la contravariance des foncteurs qui associent à un espace vectoriel les espaces des formes alternées.

3.2.2-2.2. Remarque : On prendra garde du fait que si l'image inverse par une application f d'une forme différentielle à support compact est bien une forme différentielle, elle **ne sera pas nécessairement à support compact**. (Une condition nécessaire et suffisante pour cela est que f soit *propre*.)

3.2.2-3. Exercice : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et soit $\phi : U \to V$ une application différentiable. Les formes différentielles de degré d sur V sont de la forme $f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$, où $f \in \Omega^0(U)$ et où $\{dx_1, \ldots, dx_d\}$ désigne la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. A l'aide du résultat de l'exercice 3.1.6-2-c, prouver l'égalité :

$$\phi^*\big(f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d\big) = (f \circ \phi)\det\left(\tfrac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d\,.$$

La matrice $\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\right)$ est connue sous le nom de «matrice jacobienne» et son déterminant : $\det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\right)$, le «jacobien de f», on le notera également $J(f)$.

3.2.3 Différentielle d'une forme différentielle. Soit U un ouvert du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie et $\omega \in \Omega^m(U)$; l'application $\omega : U \to \boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E)$ est différentiable et $d\omega : U \to$

$\mathcal{L}(E, \boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E)) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{L}}^{m+1}(E)$ l'est également. On pose alors

$$d_m(\omega)(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{m!}\, \mathfrak{a}_{m+1}(d\omega_{\boldsymbol{x}}) \qquad (\diamond)$$

pour tout $\boldsymbol{x} \in U$.

3.2.3-1. Exercice : Soit $\omega \in \Omega^m(U)$, prouver l'égalité :

$$d_m(\omega)(\boldsymbol{x})(\vec{h}_0, \vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_m) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i\, d\omega_{\boldsymbol{x}}(\vec{h}_i)(\vec{h}_0, \ldots, \widehat{\vec{h}_i}, \ldots, \vec{h}_m)\,, \qquad (\Delta)$$

où le terme sous le chapeau est à omettre.

3.2.3-1.1. Remarque : On observera que l'égalité (Δ) est l'explicitation de l'antisymétrisation d'une $(m+1)$-forme linéaire de $\mathcal{L}(E, \boldsymbol{\mathcal{A}}^m(E))$ à l'aide des permutations de battage de $\mathfrak{S}_{1,m}$ (voir la remarque 3.1.5-1.1). L'expression (Δ) peut donc être utilisée dans la définition de la différentielle d'une forme différentielle lorsque la caractéristique du corps de base est positive (en géométrie algébrique par exemple).

3.2.3-2. Exercice et terminologie : Soient $\omega_1 \in \Omega^{m_1}(U)$ et $\omega_2 \in \Omega^{m_2}(U)$.

a) Montrer que $d_{m_1}(\omega_1) \in \Omega^{m_1+1}(U)$ et que $d_{m_1}(\omega_1) \in \Omega_c^{m_1+1}(U)$ lorsque $\omega_1 \in \Omega_c^{m_1}(U)$.

b) Montrer que $d_{m_1+m_2}(\omega_1 \wedge \omega_2) = d_{m_1}(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{m_1}\, \omega_1 \wedge d_{m_2}(\omega_2)$; on dit alors que $d_* : \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$ est une «antidérivation».

c) Montrer, à l'aide de (Δ) et de la symétrie de la différentielle seconde, l'égalité $(d_{m_1+1} \circ d_{m_1})(\omega_1) = 0$; on dit alors que $(\Omega^*(U), d_*)$ est une «algèbre différentielle graduée».

3.2.3-3. Exercice : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et notons $x_i : U \to \mathbb{R}$ l'application qui associe au d-uplet $(a_1, \ldots, a_d)$ sa i-ième coordonnée a_i. L'application x_i est alors un élément de $\Omega^0(U)$. Montrer que $d_0(x_i)$ *coïncide tautologiquement* avec la différentielle dx_i de l'application x_i. Ceci justifie donc que l'on confonde souvent les notations $d_0(x_i)$ et dx_i ; convention que nous adopterons dans ce cours.

a) Montrer que $\{dx_1, \ldots, dx_d\}$ est une base de $\Omega^1(U)$ en tant que $\Omega^0(U)$-module.

b) Généraliser (a) en montrant que pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la famille $\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\}_{i_1 < \cdots < i_k}$, où $1 \leqslant i_j \leqslant d$, est une base de $\Omega^k(U)$ en tant que $\Omega^0(U)$-module.

3.2.3-4. Proposition : *Soit $f : U \to V$ une application différentiable entre deux ouverts d'espaces vectoriels. Soit $f^* : \Omega^m(V) \to \Omega^m(U)$ le morphisme image inverse. Alors :*

$$\boxed{f^* \circ d_m = d_m \circ f^*}$$

Démonstration : La démonstration relève d'une simple vérification à partir des définitions. Pour chaque

$\boldsymbol{x} \in U$ et chaque $\omega \in \Omega^m(V)$, on a :

$$\begin{aligned} f^*(d_m(\omega))(\boldsymbol{x}) &= (df_{\boldsymbol{x}})^*\big(d_m(\omega)(f(\boldsymbol{x}))\big) \\ &= (df_{\boldsymbol{x}})^*\big(\tfrac{1}{m!}\mathfrak{a}_m(d\omega_{f(\boldsymbol{x})})\big) = \tfrac{1}{m!}\mathfrak{a}_m\big((df_{\boldsymbol{x}})^*(d\omega_{f(\boldsymbol{x})})\big) \\ &= \tfrac{1}{m!}\mathfrak{a}_m\big(d(f^*(\omega)_{\boldsymbol{x}}) = d_m(f^*(\omega))(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

■

3.2.4 Complexe de de Rham, cohomologie de de Rham et fonctorialité. Les remarques du paragraphe précédent montrent que, pour tout ouvert U d'un espace vectoriel de dimension finie n, le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{0} & \to & \Omega^0(U) & \xrightarrow{d_0} & \Omega^1(U) & \xrightarrow{d_1} & \cdots & \xrightarrow{d_{n-2}} & \Omega^{n-1}(U) & \xrightarrow{d_{n-1}} & \Omega^n(U) \to \mathbf{0} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \to & \Omega^0_c(U) & \xrightarrow{d_0} & \Omega^1_c(U) & \xrightarrow{d_1} & \cdots & \xrightarrow{d_{n-2}} & \Omega^{n-1}_c(U) & \xrightarrow{d_{n-1}} & \Omega^n_c(U) \to \mathbf{0} \end{array}$$

où les flèches verticales désignent les inclusions canoniques, est un morphisme de complexes différentiels gradués.

3.2.4-1. Définition : Soit U un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie n. On appelle «complexe des formes différentielles (resp. à supports compacts) sur U» et aussi «complexe de de Rham (resp. à supports compacts) sur U», le complexe différentiel gradué $(\Omega^*(U), d_*)$ (resp. $(\Omega^*_c(U), d_*)$).

3.2.4-2. Définitions et remarques :

a) Le noyau de $d_* : \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$ est noté $\mathfrak{Z}^*(U)$. Les éléments de $\mathfrak{Z}^*(U)$ sont appelés des «cocycles sur U» et comme d_* est un morphisme gradué compatible au produit extérieur, $\mathfrak{Z}^*(U)$ est une sous-algèbre graduée (avec identité multiplicative) de $\Omega^*(U)$, ses éléments de degré m sont alors appelés des «m-cocycles».

b) L'image de $d_* : \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$ est notée $\mathfrak{B}^*(U)$. L'annulation de $d_* \circ d_*$ montre l'inclusion $\mathfrak{B}^*(U) \subseteq \mathfrak{Z}^*(U)$, et $\mathfrak{B}^*(U)$ est un idéal homogène de $\mathfrak{Z}^*(U)$, ses éléments sont appelés des «cobords sur U» et un élément de degré m est dit «un m-cobord».

c) D'après ce qui précède le quotient :

$$\boxed{H^*_{\mathrm{DR}}(U) := \frac{\mathfrak{Z}^*(U)}{\mathfrak{B}^*(U)}}$$

est une $\mathbb{R}$-algèbre graduée anticommutative ; elle est appelée «l'algèbre de cohomologie de de Rham de U»

d) De manière entièrement analogue on définit $\mathfrak{B}^*_c(U) \subseteq \mathfrak{Z}^*_c(U) \subseteq \Omega^*_c(U)$ et l'on pose

$$\boxed{H^*_{\mathrm{DR,c}}(U) := \frac{\mathfrak{Z}^*_c(U)}{\mathfrak{B}^*_c(U)}}$$

que l'on appelle «l'algèbre de cohomologie de de Rham à supports compacts de U».

e) Deux formes différentielles sont dites «cohomologues» lorsque leur différence est un cobord. Les formes différentielles cohomologues à un cocycle ω sont également des cocycles et sont caractérisés par le fait qu'il définissent la même classe de cohomologie que ω.

3.2.4-3. Définition : Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable. On appelle «n-ième nombre de Betti de $\boldsymbol{M}$» et on le note $\mathbf{b}_n(\boldsymbol{M})$, la dimension, finie ou infinie, du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $H^n_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})$.

3.2.4-4. Exercice : Soit U un ouvert d'un espace vectoriel de dimension d. On a $\mathfrak{Z}^d(U) = \Omega^d(U)$ et $\mathfrak{Z}^d_c(U) = \Omega^d_c(U)$.

3.2.4-5. Exercice : Soit $f : U \to V$ une application différentiable entre deux ouverts d'espaces vectoriels de dimension finie.

a) Montrer que l'on a $f^*(\mathfrak{B}^*(V)) \subseteq \mathfrak{B}^*(U)$ et $f^*(\mathfrak{Z}^*(V)) \subseteq \mathfrak{Z}^*(U)$.

b) Déduire de la question précédente que le morphisme f^* induit un homomorphisme d'algèbres graduées (de degré 0), noté encore f^*, entre :

$$f^* : H^*_{\mathrm{DR}}(V) \longrightarrow H^*_{\mathrm{DR}}(U)\,.$$

Fonctorialité

Notons Ouv la catégorie dons les objets sont les parties ouvertes des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et où les morphismes sont les les applications différentiables. La proposition 3.2.3-4 montre que la correspondance qui associe à un ouvert U l'algèbre différentielle graduée $(\Omega^*(U), d_*)$ (resp. l'algèbre $H^*_{\mathrm{DR}}(U)$) et à un morphisme f l'application f^*, défini un foncteur *contravariant* de Ouv vers la catégorie des $\mathbb{R}$-algèbres différentielles graduées (resp. des $\mathbb{R}$-algèbres graduées).

3.2.4-6. Remarque : La remarque 3.2.2-2.2 explique la raison pour laquelle la même idée ne permettra pas de définir un foncteur associant à U l'algèbre différentielle graduée $(\Omega^*_c(U), d_*)$.

3.3 Intégration des formes différentielles de degré maximum sur les espaces vectoriels

Soit U une partie ouverte d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension d. Le but de cette section est de donner un sens intrinsèque, *i.e.* indépendant des choix des repères de E, à l'intégrale d'une d-forme différentielle à support compact sur U.

Le cas des ouverts de $\mathbb{R}^d$

Le fait que $\mathbb{R}^d$ possède une base canonique permet de faire un choix canonique d'un élément non nul de $\boldsymbol{\mathcal{A}}^d(\mathbb{R}^d)$, a savoir $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$ et par conséquent d'avoir un isomorphisme canonique entre $\Omega^0(U)$ et $\Omega^d(U)$ en associant à $f \in \Omega^0(U)$ la d-forme différentielle $\omega(\vec{x}) = f(\vec{x})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$. La forme différentielle ω est à support compact, si et seulement si, f l'est.

On définit alors pour chaque $\omega \in \Omega^*_c(U)$ «l'intégrale de $\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$», à l'aide de l'intégrale de Riemann-Lebesgue, en posant :

$$\boxed{\int_U \omega := \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x})\, dx_1 \cdots dx_d}$$

où, dans l'expression de droite, on à «prolongé par zéro» l'application f à $\mathbb{R}^d$ tout entier.

3.3.1 Effet des changements de variables. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, puis $\phi : U \to V$ un difféomorphisme, et $f \in \Omega^0_c(V) = \mathcal{C}^\infty_c(V)$. La formule de changement des variables pour l'intégrale de Riemann-Lebesgue établit l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x})\,dx_1\cdots dx_d = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(\phi(\vec{x}))\left|\det\left(\tfrac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\right)\right| dx_1\cdots dx_d \qquad (\diamond)$$

et nous avons vu dans l'exercice 3.2.2-3 que la forme différentielle $\omega_V = f\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d \in \Omega^d_c(V)$ est contrainte de vérifier :

$$\phi^*(\omega_V) = \phi^*(f\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d) = (f\circ\phi)\det\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\right)\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d\,.$$

En remplaçant dans ($\diamond$), on aura une égalité :

$$\boxed{\int_V \omega_V = \int_U \phi^*(\omega_V)}$$

indépendamment de la forme différentielle ω_V **uniquement lorsque le jacobien de ϕ ne prend pas de valeurs négatives.**

3.3.1-1. Définition : On dira qu'un difféomorphisme ϕ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ «préserve l'orientation» ou bien qu'il est «orienté» lorsque son jacobien est de signe constant et *positif*.

3.3.2 Le cas des ouverts d'espaces vectoriels arbitraires. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension d. Le fait qu'il n'existe *a priori* aucun repère particulier pour E nous empêche de donner une définition de l'intégrale suivant le procédé choisi pour $\mathbb{R}^d$. L'idée alors est de nous ramener à $\mathbb{R}^d$ à l'aide d'isomorphismes d'espaces vectoriels pour y calculer l'intégrale ; il faudra alors vérifier que ces intégrales donnent bien le même nombre réel. Plus précisément, soit U un ouvert de E et $\omega \in \Omega^d_c(U)$; chaque isomorphisme $\varphi : E \to \mathbb{R}^d$ permet calculer une intégrale :

$$\int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*(\omega)\,,$$

mais le choix d'un autre isomorphisme $\psi : E \to \mathbb{R}^d$ donnera, d'après la formule de changement de variables du paragraphe précédent :

$$\int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*(\omega) = \pm\int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^*(\omega)\,,$$

où le signe dépendra uniquement de la signature du déterminant du «difféomorphisme de transition» : $\psi\circ\varphi^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

Cette remarque relève un point d'importance : L'intégration des formes différentielles dans le cas de $\mathbb{R}^d$ est passé par le choix d'une forme différentielle non nulle de $\boldsymbol{\mathcal{A}}^d(\mathbb{R}^d)$, à savoir $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d$, mais en cherchant à donner un sens intrinsèque aux intégrales sur un espace vectoriel arbitraire E de dimension d, on s'aperçoit que si le choix d'un élément non nul de $\boldsymbol{\mathcal{A}}^d(E)$ aurait suffit (on demanderait alors que φ le transforme en $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d$), le simple fait de choisir l'une des deux

composantes connexes de $\boldsymbol{\mathcal{A}}^d(E)\backslash\{0\}$ et de demander à φ de transformer cette composante en la composante connexe de $\boldsymbol{\mathcal{A}}^d(\mathbb{R}^d)$ contenant la forme $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$, suffit également.

3.3.2-1. Définition : Chaque composante connexe de $\boldsymbol{\mathcal{A}}^d(E)\backslash\{0\}$ est appelée «une orientation de E». Un espace vectoriel accompagné d'une orientation est un «un espace vectoriel orienté».

Soient maintenant E_+ un espace vectoriel orienté de dimension d, et U une partie ouverte de E. Choisissons arbitrairement une forme différentielle ω_+ dans la composante connexe de $\boldsymbol{\mathcal{A}}^*(E)\backslash\{0\}$ associée à l'orientation. Pour chaque forme différentielle $\omega \in \Omega^d_c(U)$, on définit son intégrale par la formule

$$\boxed{\int_U \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*(\omega)}$$

où φ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^d$ tel que $(\varphi^{-1})^*(\omega_+) = \lambda\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$.

Les contraintes dans cette définition font que les jacobiens des isomorphismes de transition $\phi = \psi \circ \varphi^{-1}$ seront toujours de signe positif, ceci non seulement indépendamment de φ et de ψ, mais également indépendamment de la forme ω_+ choisie dans l'orientation de E_+.

3.3.2-2. Remarque : une subtilité supplémentaire : La définition de l'intégrale sur $\mathbb{R}^d$ comporte en fait **deux** choix arbitraires (bien que devenus canoniques). D'une part : l'orientation canonique de $\mathbb{R}^d$, liée à son repère canonique qui privilégie la forme $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$; et d'autre part : la mesure du volume du parallélépipède de côtés donnés par les vecteurs de la base canonique dont on demande qu'il soit égale à 1 (choix sous-jacent à l'intégrale de Riemann-Lebesgue).

La subtilité apparaît lorsque l'on réalise que l'intégration sur un espace vectoriel quelconque (telle que nous l'avons introduite) n'a fait intervenir que le problème d'orientation et qu'**aucun choix supplémentaire** n'a été nécessaire... La réponse à ce mystère se trouve très précisément dans l'interdépendance entre "la formule de changement de variables" et les morphismes "images inverses". Ce lien fait que l'"image inverse" propage le choix de la mesure du parallélépipède de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ à tout autre espace vectoriel, mais seulement au signe près. Et c'est justement pour "déterminer" ce dernier qu'il suffit de fixer une orientation sur l'espace vectoriel ; le caractère intrinsèque de l'intégrale est ainsi assuré.

3.3.2-3. Exercice : Montrer que dans la définition de l'intégrale sur $\Omega^d_c(U)$, où U est un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel orienté E_+, il suffit de prendre un difféomorphisme $\varphi : U \to V$ sur un ouvert $V \subseteq \mathbb{R}^d$ tel que le $(\varphi^{-1})^*(\omega_+)(\boldsymbol{x}) = \lambda\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$, pour tout $\boldsymbol{x} \in U$.

3.3.2-4. Exercice : Montrer que sous les hypothèses en cours, l'application $\int_U : \Omega^d_c(U) \to \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

3.3.3 Théorème de Stokes faible. Le théorème de Stokes que l'on pourra consulter dans [B-T,A-M-R,Ber] concerne les variétés à bord (que nous n'allons pas introduire) et donne un résultat plus précis que celui dont nous aurons besoin dans ce cours. Voici la version affaiblie de ce théorème que nous utiliserons :

3.3.3-1. Proposition : *Soit U un ouvert d'un espace vectoriel orienté E_+ de dimension d. Pour toute forme différentielle* à support compact $\omega \in \Omega_c^{d-1}(U)$, *on a :*

$$\boxed{\int_U d_{d-1}(\omega) = 0}$$

En particulier, l'intégration sur U induit une forme linéaire :

$$\boxed{\int_U : H^d_{\mathrm{DR,c}}(U) \longrightarrow \mathbb{R}}$$

Démonstration : Comme les morphismes d'image inverse sont compatibles à la différentielle des formes différentielles et transforment cobords en cobords, nous pourrons supposer $E = \mathbb{R}^d$. On a l'équivalence $\Omega_c^{d-1}(U) \equiv \mathcal{C}_c^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} \boldsymbol{\mathcal{A}}^{d-1}(\mathbb{R}^d)$ (*cf.* exercice 3.2.1-4) qui nous permet de nous limiter à vérifier l'assertion pour une $(d-1)$-forme différentielle de la forme $\omega = f\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d$, où f est à support compact dans U. On a :

$$d_{d-1}(\omega) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d\,,$$

et alors

$$\begin{aligned}\int_U d_{d-1}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1\right) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d\end{aligned}$$

où le terme entre parenthèses est la fonction nulle sur $\mathbb{R}^{d-1}$ puisque f a été supposée de support compact. ∎

3.4 Formes différentielles et cohomologie de de Rham sur les variétés

Dans cette section nous allons montrer comment les considérations des paragraphes précédents se généralisent au cadre des variétés différentiables. Nous aurons besoin, à la fois, de nous affranchir de l'hypothèse des "ouverts d'un espace vectoriel", et de recoller des structures algébriques de façon à généraliser le *formalisme* des formes différentielles et leur de intégration.

3.4-1. Définition : Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable de dimension d et d'atlas de définition $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$. On appelle «$m$-forme différentielle sur $\boldsymbol{M}$» la donnée d'une famille $\omega = \{\omega_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de m-formes différentielles sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant «la condition de recollement» suivante :

3.4-1.1. Condition de recollement pour les formes différentielles : *Pour chaque couple d'indices $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, tels que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, on a :*

$$\boxed{\omega_\alpha|_{\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})} = \phi^*_{\beta,\alpha}\big(\omega_\beta|_{\varphi_\beta(U_{\alpha\beta})}\big)}$$

où $\phi_{\beta,\alpha}$ est l'application de transition $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$.

On note $\Omega^m(\boldsymbol{M})$ l'ensemble des m-formes différentielles sur $\boldsymbol{M}$.

3.4.1 Caractère intrinsèque de $\boldsymbol{\Omega^*(M)}$. Dans la définition que nous venons de donner, le choix de l'atlas $\mathcal{A}$ intervient explicitement puisque la condition de recollement est "indexée" par

les cartes de $\mathcal{A}$. Notons provisoirement par $\Omega^m(\boldsymbol{M})_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des formes différentielles obtenues relativement à l'atlas $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{A}'$ un atlas de $\boldsymbol{M}$ *compatible* à $\mathcal{A}$; nous allons construire une *bijection canonique* :

$$\Omega^m(\boldsymbol{M})_{\mathcal{A}} \equiv \Omega^m(\boldsymbol{M})_{\mathcal{A}'}$$

Soient $\omega \in \Omega^m(\boldsymbol{M})_{\mathcal{A}}$ et (V, ψ) une carte de coordonnées de $\mathcal{A}'$. Notons alors $\omega_\psi \in \Omega^*(\mathbb{R}^d)$ la forme différentielle définie "point par point" de la manière suivante : Pour chaque $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, on choisit une carte de coordonnées $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de $\mathcal{A}$ telle que $U_\alpha \ni \psi^{-1}(\boldsymbol{x})$. L'application $\varphi \circ \psi^{-1}$ est alors définie sur un voisinage de $\boldsymbol{x}$, ce qui nous conduit à poser :

$$\omega_\psi =_{\text{def}} (\varphi_\alpha \circ \psi^{-1})^*(\omega_\alpha)$$

sur le voisinage de $\boldsymbol{x}$ en question. Assurons-nous maintenant de l'unicité locale de cette définition. La même procédure, à partir d'une autre carte $(U_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'})$ de $\mathcal{A}$, nous emmènera à comparer

$$(\varphi_\alpha \circ \psi^{-1})^*(\omega_\alpha) \quad \text{et} \quad (\varphi_{\alpha'} \circ \psi^{-1})^*(\omega_{\alpha'})\,,$$

ou, ce qui revient au même, à comparer :

$$\omega_\alpha \quad \text{et} \quad (\psi \circ \varphi_\alpha^{-1})^*(\varphi_{\alpha'} \circ \psi^{-1})^*(\omega_{\alpha'})\,, \tag{$\diamond$}$$

or, $(\psi \circ \varphi_\alpha^{-1})^*(\varphi_{\alpha'} \circ \psi^{-1})^* \doteq (\varphi_{\alpha'} \circ \varphi_\alpha^{-1})^*$([22]) et la condition de recollement relative à $\mathcal{A}$ nous assure que les formes différentielles ($\diamond$) coïncident sur un voisinage de $\varphi \circ \psi^{-1}(\boldsymbol{x})$.

Notre définition "point par point" de ω_ψ est donc bien indépendante du choix de cartes de $\mathcal{A}$ (elle est donc intrinsèque relativement à ψ), de plus la "cohérence locale" de différentes définitions garantit également la différentiabilité de ω_ψ.

Ceci étant si $\mathcal{A}' = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$, nous avons la famille $\{\omega_{\psi_\beta}\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ dont nous devons vérifier la condition de recollement pour nous assurer qu'elle représente bien une forme différentielle de $\Omega^m(\boldsymbol{M})_{\mathcal{A}'}$. Cela se fait, de manière élémentaire mais laborieuse, en suivant les procédures des paragraphes précédents. Nous laissons au soins du lecteur courageux de mener à bien cette vérification.

Nous aurons ainsi défini une application *canonique* :

$$\Theta_{\mathcal{A}',\mathcal{A}} : \Omega^m(\boldsymbol{M})_{\mathcal{A}} \longrightarrow \Omega^m(\boldsymbol{M})_{\mathcal{A}'}\,.$$

On vérifie alors les identités $\Theta(\mathcal{A}'', \mathcal{A}') \circ \Theta(\mathcal{A}', \mathcal{A}) = \Theta(\mathcal{A}'', \mathcal{A})$ et $\Theta(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathrm{id}$, qui prouvent le caractère intrinsèque de $\Omega^*(\boldsymbol{M})$.

3.4.1-1. Définition : Soit $\boldsymbol{M}$ une variété de dimension d et d'atlas complet $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, pour $\omega = \{\omega_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \in \Omega^m(\boldsymbol{M})$, la forme différentielle $\omega_\alpha \in \Omega^m(\mathbb{R}^d)$ est appelée «le représentant de ω dans la carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$».

3.4.1-2. Remarque : Les paragraphes précédents donnent les détails de la construction du fibré $\boldsymbol{\mathcal{A}}^*\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{M})$ des formes alternées sur la variété $\boldsymbol{M}$. Nous aurions donc fort bien pu l'introduire très

[22] Nous utiliserons la notation $f \doteq g$ pour indiquer que f et g coïncident sur un voisinage d'un point sous-entendu dans par contexte.

rapidement par la même idée de la remarque 3.2.1-5, mais nous verrons que les précisions supplémentaires données dans les descriptions locales explicites des formes différentielles, nous seront de toutes façons indispensables pour introduire et bien comprendre le concept d'orientation d'une variété et sa nécessité pour l'intégration.

3.4.2 Structure d'algèbre différentielle graduée sur $\Omega^*(\boldsymbol{M})$. Les différentes opérations sur les formes différentielles que nous avons introduites lorsque $\boldsymbol{M}$ est un ouvert d'un espace vectoriel trouvent leur pendant dans le cadre des variétés différentielles. Cela résulte du fait que les morphismes "image inverse" respectent la structure d'algèbre différentielle graduée des formes différentielles.

Voici, à titre d'illustration, comment on procède pour définir la somme de deux formes différentielles $\omega, \omega' \in \Omega^*(\boldsymbol{M})$, puis la différentielle $d(\omega)$:

Soit $\mathcal{A}$ un atlas de la structure différentiable de $\boldsymbol{M}$ indexé par un ensemble $\mathfrak{A}$. Par définition, $\omega := \{\omega_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ et $\omega' := \{\omega'_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ sont des familles de formes différentielles sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant des conditions de recollement. On considère alors la famille

$$(\omega + \omega') := \{\omega_\alpha + \omega'_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$$

et la compatibilité des "images inverses" vis-à-vis de l'addition montre que les conditions de recollement seront également satisfaites par $\omega + \omega'$, d'ou la définition de la somme de deux formes différentielles.

De même, la condition de recollement sur la famille $\{d(\omega_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ s'écrit :

$$d(\omega_\beta) = \phi^*_{\beta,\alpha}\big(d(\omega_\alpha)\big)\,,$$

pour tous $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, et la relation de commutation de la proposition 3.2.3-4 montre que la famille $\{d(\omega_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ définit bien une forme différentielle sur $\boldsymbol{M}$, on la note $d(\omega)$.

En procédant de la même manière pour toutes les autres opérations, on obtient la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel des $\Omega^m(\boldsymbol{M})$, puis la structure de $\mathbb{R}$-algèbre graduée anticommutative de $\Omega^*(\boldsymbol{M}) := \oplus_{m\in\mathbb{N}}\Omega^m(\boldsymbol{M})$, et enfin, celle d'algèbre différentielle graduée $(\Omega^*(\boldsymbol{M}), d_*)$.

3.4.3 Formes différentielles à support compact. Soit $\omega \in \Omega^m(\boldsymbol{M})$, on dit que $x \in \boldsymbol{M}$ est un «zéro de ω» lorsque la condition d'annulation suivante est vérifiée :

Il existe une carte (U, φ) de $\boldsymbol{M}$, telle que $x \in U$ et $\omega_\varphi(\varphi(x)) = 0$.

La condition de recollement montre alors que si x est un zéro de ω, la condition d'annulation sera vérifiée par toute carte dont le domaine contient x. L'ensemble des zéros d'une forme différentielle est donc intrinsèque et *son adhérence*, notée $|\omega|$, est appelée «le support de ω». On a :

3.4.3-1. Proposition : *Le sous-ensemble $\Omega^*_c(\boldsymbol{M}) \subseteq \Omega^*(\boldsymbol{M})$ des formes différentielles* à supports compacts *est une sous-algèbre différentielle graduée de $(\Omega^*(\boldsymbol{M}), d_*)$.*

3.4.3-2. Définition : Le complexe $(\Omega^*(\boldsymbol{M}), d_*)$ est appelé «le complexe de de Rham de $\boldsymbol{M}$» et sa cohomologie $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})$, «l'algèbre de cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{M}$».

Le complexe $(\Omega^*_c(\boldsymbol{M}), d_*)$ est appelé «le complexe de de Rham des formes différentielles à support compact de $\boldsymbol{M}$» et sa cohomologie $H^*_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M})$, «l'algèbre de cohomologie de de Rham à supports compacts de $\boldsymbol{M}$».

3.4.4 Image inverse des formes différentielles sur les variétés. Soit $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ un morphisme de variétés différentiables et soit $\omega \in \Omega^m(\boldsymbol{N})$. Nous allons définir la forme différentielle $f^*(\omega) \in \Omega^m(\boldsymbol{M})$, «image réciproque par f de ω». Il nous faudra pour cela choisir un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de la structure différentiable de $\boldsymbol{M}$ et associer à chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$ une m-forme différentielle sur $\mathbb{R}^{d(\boldsymbol{M})}$, puis, vérifier les conditions de recollement.

On procède alors suivant les mêmes idées qui nous ont permis de montrer le caractère intrinsèque de $\Omega^*(\boldsymbol{M})$. Pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$ et chaque point $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{d(\boldsymbol{M})}$, on choisit une carte (V, ψ) de $\boldsymbol{N}$ contenant le point $f(\varphi_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x}))$. L'application $\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est alors définie et différentiable sur un voisinage de $\boldsymbol{x}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{d(\boldsymbol{N})}$. On pose

$$\varpi_\alpha := (\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})^*(\omega_\psi)$$

où ω_ψ dénote le représentant de ω associé à la carte (V, ψ). Le caractère intrinsèque de cette définition résultera de comparer :

$$(\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})^*(\omega_\psi) \quad \text{et} \quad (\psi' \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})^*(\omega_{\psi'})$$

où (V', ψ') est une autre carte de $\boldsymbol{N}$ possible. Or, la condition de recollement sur $\boldsymbol{N}$ assure l'égalité (locale) $\omega_\psi \doteq (\psi' \circ \psi^{-1})^*(\omega_{\psi'})$, d'où

$$(\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})^*(\omega_\psi) \doteq (\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})^*(\psi' \circ \psi^{-1})^*(\omega_{\psi'}) \doteq (\psi' \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})^*(\omega_{\psi'})$$

où les égalités sont à prendre au sens local.

La forme ϖ_α est donc bien définie et différentiable pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$. Reste maintenant à vérifier la relation de recollement pour la famille $\{\varpi_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ ce que nous laissons en exercice pour le lecteur courageux. On pose alors $f^*(\omega) = \{\varpi_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

Une fois ce point fixé, on peut dégager un principe pratique de travail qui simplifie les vérifications (et surtout l'écriture). Il résulte d'observer que le choix des atlas est inessentiel pourvu que l'on reste dans la même classe d'atlas. Par exemple, si $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ est un morphisme de variétés et si $\mathcal{A}' = \{(V_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'})\}_{\alpha'\in\mathfrak{A}'}$ est un atlas de $\boldsymbol{N}$, il est avantageux de prendre pour $\boldsymbol{M}$ un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de telle sorte que le recouvrement $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ soit subordonné au recouvrement ouvert $\{f^{-1}(V_{\alpha'})\}_{\alpha'\in\mathfrak{A}'}$ (*cf.* exercice 2.1-7). Les propositions suivantes peuvent, par un tel choix d'atlas, être aisément prouvées et sont laissées en exercice.

3.4.4-1. Proposition : *Soit $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ un morphisme de variétés différentiables, le morphisme image inverse*

$$f^* : \Omega^*(\boldsymbol{N}) \to \Omega^*(\boldsymbol{M}),$$

est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres graduées (de degré 0). Il induit donc un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres graduées

$$f^* : H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{N}) \longrightarrow H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\,.$$

3.4.4-2. Proposition : *Soient $f_1 : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$ et $f_2 : \boldsymbol{M}_2 \to \boldsymbol{M}_3$ des morphismes de variétés différentiables et soient $f_i^* : \Omega^*(\boldsymbol{M}_{i+1}) \to \Omega^*(\boldsymbol{M}_i)$ les morphismes "image réciproque" induits. Alors :*

$$(f_2 \circ f_1)^* = f_1^* \circ f_2^*\,.$$

Fonctorialité du complexe de de Rham et de la cohomologie de de Rham des variétés. La correspondance de la catégorie des variétés différentiables Diff vers la catégorie des $\mathbb{R}$-algèbres différentielles graduées anticommutatives (resp. des $\mathbb{R}$-algèbres graduées anticommutatives) qui associe à une variété différentiable le complexe de de Rham $(\Omega^*(\boldsymbol{M}), d_*)$ (resp. la cohomologie de de Rham $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})$), et à un morphisme de variétés, le morphisme image inverse, est *fonctorielle et contravariante*.

———————×———————

§4. Orientabilité et intégration sur les variétés

Dans le but de généraliser l'intégration aux variétés différentiables nous aurons besoin des partitions de l'unité et de la notion d'orientation pour une variété. Nous commençons donc par un rappel rapide de ces notions.

4.1 Partition de l'unité et variétés paracompactes

Sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$, on appelle «partition de l'unité» une famille $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de fonctions continues $\rho_\alpha : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}_+$([23]), appelées des «fonctions de partition», telle que :

a) Pour tout $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, il existe un voisinage $V_{\boldsymbol{x}} \ni \boldsymbol{x}$ tel que le sous-ensemble des indices $\alpha \in \mathfrak{A}$ vérifiant $\rho_\alpha|_{V_{\boldsymbol{x}}} \neq 0$ est de cardinal **fini** (on dit que la famille des fonctions $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ est «localement finie»).

b) Lorsque la condition précédente est vérifiée l'expression $\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} \rho_\alpha$ représente une fonction continue $\boldsymbol{X} \to \mathbb{R}_+$, on demande alors que $\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} \rho_\alpha = \mathbf{1}_{\boldsymbol{X}}$ (fonction constante de valeur 1).

La notion de partition de l'unité dans la catégorie des variétés différentiables est la même à ceci près que l'on exige aux applications de partition d'être des morphismes (*i.e.* différentiables).

4.1-1. Définition : On dit qu'une variété $\boldsymbol{M}$ «admet des partitions de l'unité» lorsque pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{M}$ et pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ de U :

a) il existe une partition de l'unité $\{\rho_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ «subordonnée à $\mathcal{U}$», *i.e.* telle que le support de ρ_β est contenu dans U_β, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$.

[23] On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels t non négatifs *i.e.* tels que $t \geqslant 0$.

b) il existe une partition de l'unité $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, dont les supports des fonctions de partition sont compacts et contenus dans les ouverts de $\mathcal{U}$; plus précisément, pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$, il existe $\beta \in \mathfrak{B}$ tel que $|\rho_{alpha}| \subseteq U_\beta$.

On démontre alors le théorème suivant (*cf.* [Ber] page 118) :

4.1-2. Théorème : *Une variété séparée et séparable admet des partitions de l'unité.*

4.1-3. Avertissement : A partir de maintenant, nous supposerons les variétés séparées et séparables, sauf mention explicite du contraire.

4.1-3. Exercice : Toute sous-variété de $\mathbb{R}^d$, ainsi que toute variété quotient séparée de $\mathbb{R}^d$, admet des partitions de l'unité.

4.1-4. Exercice : Montrer que la droite réelle avec l'origine dédoublé de l'exemple 1.3-3 (variété non séparée) admet des partitions de l'unité.

4.1-5. Lemme (et exercice) : *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable admettant des partitions de l'unité. Pour toute partie fermée $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{M}$ et toute famille d'ouverts $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ recouvrant $\boldsymbol{K}$,* i.e. *telle que $\cup_{\alpha\in\mathfrak{A}} U_\alpha \supseteq \boldsymbol{K}$, il existe une famille localement finie $\{\rho_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ de fonctions de partition à support compact telle que $\sum_{\beta\in\mathfrak{B}} \rho_\beta = 1$ sur un voisinage de $\boldsymbol{K}$, et telle que, pour chaque $\beta \in \mathfrak{B}$, il existe $\alpha(\beta) \in \mathfrak{A}$ vérifiant $|\rho_\beta| \subseteq U_{\alpha(\beta)}$.*

Lorsque $\boldsymbol{K}$ est une partie compacte de $\boldsymbol{M}$, l'ensemble $\mathfrak{B}$ sera de cardinal fini.

4.1-6. Définition : La famille de fonctions de partitions $\{\rho_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ du lemme précédent sera appelée «une partition de l'unité de $\boldsymbol{M}$ d'un voisinage de $\boldsymbol{K}$ subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{K}$».

4.2 Variétés orientées

Rappelons qu'un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ est dit "orienté" ou qu'il "conserve l'orientation", si le signe de son jacobien est constant et *positif* (*cf.* définition 3.3.1-1).

4.2-1. Définition : Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable.

a) On dit qu'un atlas $\mathcal{A}$ pour $\boldsymbol{M}$ est «orienté» lorsque les applications de transition sont orientées.

b) On dit que la variété $\boldsymbol{M}$ est «orientable» si elle admet un atlas orienté.

4.2-2. Définition : Lorsqu'une variété $\boldsymbol{M}$ est orientable on dit que deux atlas orientés de la structure de $\boldsymbol{M}$ «définissent la même orientation» si leur réunion est encore un atlas orienté.

On munit de cette manière la famille d'atlas orientés de la structure de $\boldsymbol{M}$ d'une relation *d'équivalence*. Chaque classe d'équivalence d'atlas orientés est appelée «une orientation de $\boldsymbol{M}$».

Une variété orientable munie d'une orientation est appelée «variété orientée».

4.3 Intégration sur une variété orientée

Sur une variété orientable $\boldsymbol{M}$ de dimension d, le choix d'une orientation va nous permettre de donner un sens *intrinsèque* à l'intégrale d'une forme différentielle de degré d et *à support compact*. L'application, notée :

$$\int_{\boldsymbol{M}} : \Omega^d_c(\boldsymbol{M}) \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

sera alors une forme linéaire de $\Omega^d_c(\boldsymbol{M})$, *i.e.* appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega^d_c(\boldsymbol{M});\mathbb{R})$.

La définition de l'intégrale procède en deux étapes :

Int-1) **Intégrale des d-formes différentielles à support compact contenu dans un domaine de carte.**

Soit (U,φ) une carte de $\boldsymbol{M}$ et soit $\omega \in \Omega^d_c(U)$ de représentant dans la carte en question de la forme : $f(x_1,\dots,x_d)\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d$. On pose alors :

$$\int_{\boldsymbol{M}} \omega = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\dots,x_d)\,dx_1\dots dx_d\,. \qquad (\diamond)$$

Cette définition associe à la forme différentielle ω le nombre réel $\int_{\boldsymbol{M}}\omega$ qui dépend, *a priori*, de la carte (U,φ) choisie.

Soit maintenant (V,ψ) une deuxième carte de $\boldsymbol{M}$ telle que $|\omega|\subseteq V$. Soit $\phi : \psi(V)\to\phi(U)$ le difféomorphisme de transition (entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$), le représentant de ω associé à la carte (V,ψ) est, par définition, la forme différentielle

$$\phi^*(f(\vec{x})\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d) = f(\phi(\vec{x}))\,\det\Big(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\Big)\,dx_1\cdots dx_d\,,$$

de sorte que l'on aura, par la formule de changement de variables :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x})\,dx_1\cdots dx_d = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(\phi(\vec{x}))\,\Big|\det\Big(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\Big)\Big|\,dx_1\cdots dx_d$$

et donc la formule $(\diamond)$ aura bien un sens indépendant de la carte dont le domaine contient le support de ω, si et seulement si, l'application de transition ϕ préserve l'orientation.

Nous voyons donc comment la donnée d'un atlas orienté permet de donner un sens intrinsèque à l'intégrale d'une forme différentielle à support compact "assez petit". Nous avons donc bien une forme $\mathbb{R}$-linéaire intrinsèque :

$$\boxed{\int_{\boldsymbol{M}} : \Omega^d_c(U) \longrightarrow \mathbb{R}}$$

pour tout ouvert U, domaine de carte de $\boldsymbol{M}$([24]).

Int-2) **Intégrale des d-formes différentielles à support compact arbitrairement grand.**

Soit maintenant $\omega \in \Omega^d_c(\boldsymbol{M})$. D'après le lemme 4.1-5 appliqué au compact $|\omega|$, il existe une partition de l'unité *finie* d'un voisinage de $|\omega|$ subordonnée aux ouverts des cartes de $\boldsymbol{M}$; notons-la $\mathcal{P} = \{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$. Nous considérons alors la décomposition :

$$\omega = \sum_{j=1}^{r} \rho_j \, \omega \, ,$$

et posons :

$$\int_{\mathcal{P}} \omega = \sum_{j=1}^{r} \int_{\boldsymbol{M}} \rho_j \, \omega$$

où les intégrales du terme de droite sont déterminées par le procédé ((1)) ci-dessus, puisque les formes différentielles concernées sont à supports compacts contenus dans des ouverts de cartes de $\boldsymbol{M}$.

Montrons que le nombre réel $\int_{\mathcal{P}} \omega$ est indépendant de la partition $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{P}' = \{\rho'_1, \ldots, \rho'_{r'}\}$ est une autre famille (finie) de fonctions de partition dont la somme est égale à 1 sur un voisinage de $|\omega|$, on aura :

$$\sum_{j=1}^{r} \int_{\boldsymbol{M}} \rho_j \, \omega = \sum_{j=1}^{r} \int_{\boldsymbol{M}} \rho_j \Big(\sum_{k=1}^{r'} \rho'_k \, \omega \Big) = \sum_{j=1}^{r} \int_{\boldsymbol{M}} \Big(\sum_{k=1}^{r'} \rho_j \, \rho'_k \, \omega \Big) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r'} \int_{\boldsymbol{M}} \rho_j \, \rho'_k \, \omega$$

où la dernière égalité découle de la linéarité de l'intégration sur les formes à supports compacts contenus dans un même domaine de carte. Comme le dernier terme de droite est symétrique en j et en k, nous aurons l'égalité :

$$\int_{\mathcal{P}} \omega := \sum_{j=1}^{r} \int_{\boldsymbol{M}} \rho_j \, \omega = \sum_{k=1}^{r'} \int_{\boldsymbol{M}} \rho_k \, \omega =: \int_{\mathcal{P}'} \omega \, .$$

Ces procédés permettent donc d'associer à toute forme différentielle $\omega \in \Omega^d_c(\boldsymbol{M})$ un nombre réel bien déterminé, on le note $\int_{\boldsymbol{M}} \omega \in \mathbb{R}$. La vérification du fait que l'application :

$$\int_{\boldsymbol{M}} : \Omega^d_c(\boldsymbol{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire est aisée et laissée aux soins du lecteur.

4.3-1. Remarque : Un changement d'orientation de $\boldsymbol{M}$ n'aura d'autre effet, lorsque $\boldsymbol{M}$ est connexe, que d'inverser les signes des intégrales.

4.3-2. Remarque : Il est utile d'observer que ces considérations sur l'existence de l'intégration sur les variétés différentiables peuvent être condensées en un seul et unique diagramme de la manière suivante.

[24] L'aspect non trivial dans cette assertion vient du fait que des cartes différentes peuvent avoir le même domaine de définition.

Soit $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ un atlas pour $\boldsymbol{M}$. Pour deux ouverts $U_a \subseteq U_b$, notons $\iota_a^b : \Omega_c^d(U_a) \to \Omega_c^d(U_b)$ (et même ι_a lorsque U_b est $\boldsymbol{M}$) l'application qui associe à une forme différentielle à support compact dans U_a son prolongement par zéro dans U_b ; notons aussi U_{ab} l'intersection $U_a \cap U_b$. Considérons alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{\alpha\beta\in\mathfrak{A}} \Omega_c^d(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \Omega_c^d(U_\alpha) & \xrightarrow{\Sigma} & \Omega_c^d(\boldsymbol{M}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \sum_\alpha \int_\alpha \downarrow & \swarrow & \searrow \int_M & & \\ & & \mathbb{R} & & & & \end{array} \qquad (*)$$

où les opérateurs Σ et δ sont définis *par linéarité* à partir de leur action sur chaque composante des sommes directes, par :

$$\begin{cases} \Sigma(\omega_\alpha) = \iota_\alpha(\omega_\alpha), & \text{pour tout } \omega_\alpha \in \Omega_c^d(U_\alpha)\,; \\ \delta(\omega_{\alpha\beta}) = \iota_{\alpha\beta}^\beta(\omega_{\alpha\beta}) - \iota_{\alpha\beta}^\alpha(\omega_{\alpha\beta}), & \text{pour tout } \omega_{\alpha\beta} \in \Omega_c^d(U_{\alpha\beta})\,. \end{cases}$$

On a $\Sigma \circ \delta = 0$, et la première ligne de $(*)$ est un complexe (on aura reconnu l'extrémité de la suite de Mayer-Vietoris (*cf.* section 5.1) pour les formes différentielles à support compact). Ce complexe est *exact*, *i.e.* Σ est surjective et $\ker(\Sigma) = \mathrm{im}(\delta)$ (vous devriez démontrer entièrement cette assertion au moins une fois dans votre vie).

D'autre part, pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$, le groupe $\Omega_c^d(U_\alpha)$ est (par définition) l'espace vectoriel réel des d-formes différentielles (à support compact) définies sur l'ouvert $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ de $\mathbb{R}^d$. Toute forme différentielle $\omega \in \Omega_c^d(U_\alpha)$ se représente donc, *de manière canonique*, sous la forme $\omega :: f(\vec{x})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$, où $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\varphi_\alpha(U_\alpha))$. L'application $\int_\alpha$ est alors l'opérateur qui associe à ω l'intégrale de Riemann-Lebesgue de la fonction f.

Le problème de l'existence d'une intégrale sur $\boldsymbol{M}$ s'exprime alors par l'interrogation suivante :

"*Quelle condition doit satisfaire un atlas $\mathcal{A}$ pour que, dans le diagramme $(*)$, l'opérateur $\sum_\alpha \int_\alpha$ s'annule sur l'image de δ ?*"

Et la réponse est : "*L'atlas $\mathcal{A}$ doit être orienté (i.e. les jacobiens des applications de transition doivent être tous positifs).*"

4.4 L'intégration des classes de cohomologie à support compact

Supposons $\boldsymbol{M}$ orientée et admettant des partitions de l'unité. Pour tout $\omega \in \Omega_c^d(\boldsymbol{M})$, cobord d'une forme différentielle ν *également à support compact*, on a :

$$\int_{\boldsymbol{M}} \omega = \int_{\boldsymbol{M}} d\nu = \int_{\boldsymbol{M}} \sum_\alpha d(\rho_\alpha\, \nu) = \sum_\alpha \int_{\boldsymbol{M}} d(\rho_\alpha\, \nu) = 0 \qquad (\diamond)$$

où $\{\rho_\alpha\}$ désigne une partition de l'unité *finie* à supports compacts d'un voisinage de $|\nu|$ subordonnée à l'atlas orienté de $\boldsymbol{M}$, et où la dernière égalité de $(\diamond)$ résulte du théorème de Stokes faible pour les ouverts $\mathbb{R}^d$ (*cf.* proposition 3.3.3-1). L'opérateur $\int_{\boldsymbol{M}}$ induit, par conséquent, un opérateur linéaire sur la cohomologie de de Rham à support compact de degré d de $\boldsymbol{M}$:

$$\boxed{\int_{\boldsymbol{M}} : H^d_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}) \longrightarrow \mathbb{R}}$$

4.5 Morphisme de dualité

Soit $\boldsymbol{M}$ une variété orientable de dimension d admettant des partitions de l'unité. Pour chaque

$r \in \mathbb{N}$, tel que $r \leqslant d$, l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\boldsymbol{M})_r : \Omega^r(\boldsymbol{M}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega_{\mathrm{c}}^{d-r}(\boldsymbol{M}), \mathbb{R}) \\ \omega \quad &\longmapsto \quad \Big(\nu \mapsto \int_{\boldsymbol{M}} \omega \wedge \nu\Big) \end{aligned}$$

est linéaire et bien définie. Lorsque $\omega = d_{r-1}(\mu)$, on a (toujours par Stokes faible)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\boldsymbol{M})_r(d_{r-1}(\mu))(\nu) &= \int_{\boldsymbol{M}} d_{r-1}(\mu) \wedge \nu \\ &= \int_{\boldsymbol{M}} d_{d-1}(\mu \wedge \nu) - (-1)^{r-1} \int_{\boldsymbol{M}} \mu \wedge d_{d-r}(\nu) \\ &= (-1)^r \mathcal{D}(\boldsymbol{M})_{r-1}(\mu)(d_{d-r}(\nu)) \,; \end{aligned}$$

il s'ensuit que lorsque les formes différentielles ω *et* ν *sont toutes deux des cocycles*, le nombre $\mathcal{D}(\boldsymbol{M})_r(\omega)(\nu)$ ne dépend que des classes de cohomologie qu'elles définissent. L'application $\mathcal{D}(\boldsymbol{M})_r$ induit donc bien une application linéaire :

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{M})_r : H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}); \mathbb{R}) \,.$$

Le théorème de dualité de Poincaré, que l'on démontrera ultérieurement, affirme précisément que $\mathcal{D}(\boldsymbol{M})_r$ **est un isomorphisme**.

4.5.1 Naturalité du morphisme de dualité. Soient $V \subseteq U$ deux parties ouvertes de la variété orientée $\boldsymbol{M}$ et considérons-les munies de leur structure de variété orientée induite par $\boldsymbol{M}$. Notons $\iota_V^U : V \hookrightarrow U$ l'injection canonique. On dispose alors de deux morphismes d'algèbres différentielles graduées de formes différentielles.

Le premier : l'mage inverse $\iota_V^{U\,*}$, appelé également dans le cas présent «la restriction de U à V », et noté aussi ρ_V^U :

$$\rho_V^U : \Omega^*(U) \xrightarrow{\iota_V^{U\,*}} \Omega^*(V) \,.$$

On a la relation $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$, pour tous ouverts $W \subseteq V \subseteq U \subseteq \boldsymbol{M}$.

Le second : le«prolongement par zéro », noté $\iota_{V!}^U$:

$$\iota_{V!}^U : \Omega_c^*(V) \longrightarrow \Omega_c^*(U)$$

qui associe à une forme différentielle ω à support compact sur V la forme différentielle ϖ définie par $\varpi|_V = \omega$ et $\varpi(u) = 0$, lorsque $u \in U \backslash V$. Ce morphisme respecte évidemment les structures d'algèbres différentielles graduées et vérifie la relation $\iota_{W!}^U = \iota_{V!}^U \circ \iota_{W!}^V$, pour tous ouverts $W \subseteq V \subseteq U \subseteq \boldsymbol{M}$.

On aura donc, par adjonction :

$$\iota_{V!}^{U\,\vee} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega_c^*(U); \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega_c^*(V); \mathbb{R})$$

et donc $\iota_{W!}^{U\,\vee} = \iota_{W!}^{V\,\vee} \circ \iota_{V!}^{U\,\vee}$, pour tous ouverts $W \subseteq V \subseteq U \subseteq \boldsymbol{M}$.

Le lemme qui suit relève alors d'une simple vérification.

4.5.1-1. Lemme : *Soient $V \subseteq U$ des ouverts d'une variété orientée $\boldsymbol{M}$ de dimension d. Le dia-*

gramme des morphismes de dualité de Poincaré

$$\begin{array}{ccc} H^r_{\mathrm{DR}}(U) & \xrightarrow{\mathcal{D}(U)_r} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(U);\mathbb{R}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho^U_V} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \iota^{U\,\vee}_{V\,!}} \\ H^r_{\mathrm{DR}}(V) & \xrightarrow{\mathcal{D}(V)_r} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(V);\mathbb{R}) \end{array}$$

est commutatif, *quel que soit* $0 \leqslant r \leqslant d$.

4.6 Variété d'orientations d'une variété différentiable

Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable de dimension d et d'atlas complet $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$. Posons comme dans la section sur les variétés abstraites (2.8.2), $\mathcal{A}(d) := \amalg_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathbb{R}^d$ et notons $\mathcal{A}(d)_\alpha$ la composante connexe de $\mathcal{A}(d)$ correspondant à l'indice α.

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence dont le graphe est la réunion des graphes des applications de transition entre les différentes cartes, *i.e.* si $U_{\alpha\beta} \neq \varnothing$ la trace de $\mathrm{Gr}(\mathcal{R})$ sur la composante connexe $\mathcal{A}(d)_\alpha \times \mathcal{A}(d)_\beta$ est le graphe de l'application $\phi_{\beta,\alpha} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \subseteq \mathbb{R}^d \to \varphi_\beta(U_{\beta\alpha}) \subseteq \mathbb{R}^d$ définie par $\phi_{\beta,\alpha} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$. Nous avons alors un isomorphisme canonique de variétés :

$$\left.\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{A}(d) = \amalg_{\alpha\in\mathfrak{A}}\ \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \boldsymbol{M} \\ x_\alpha & \longmapsto & \varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha) \end{array}\right\} \quad \bar{\Phi} : \mathcal{A}(d)/\mathcal{R} \xrightarrow{\equiv} \boldsymbol{M}$$

Notons maintenant $\mathcal{R}_{\mathrm{or}}$ la relation dont le graphe est la réunion des parties "*orientées*" de graphes des applications de transition ; plus précisément, une application de transition $\phi_{\beta,\alpha} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta(U_{\beta\alpha})$ établit une bijection entre les composantes connexes de $\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ et celles de $\varphi_\beta(U_{\beta\alpha})$ et sur chacune d'elles, le signe du jacobien sera constant. On appellera «composante orientée de $\phi_{\beta,\alpha}$» chaque restriction de $\phi_{\beta,\alpha}$ à une composante connexe de $\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ sur laquelle le signe de son jacobien est positif. On définit $\mathcal{R}_{\mathrm{or}}$ comme la relation dont la restriction du graphe à l'ouvert $\mathcal{A}(d)_\alpha \times \mathcal{A}(d)_\beta$ est la réunion des graphes de composantes orientées de $\phi_{\beta,\alpha}$

La relation $\mathcal{R}_{\mathrm{or}}$ est une équivalence. En effet, la symétrie, réflexivité et transitivité proviennent respectivement de ce que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, et sur chaque composante connexe de l'ouvert de définition :

- $\phi_{\alpha,\alpha} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$ est orientée ;
- $\phi_{\beta,\alpha}$ est orientée, si et seulement si, $\phi_{\alpha,\beta}$ l'est ;
- si $\phi_{\gamma,\beta}$ et $\phi_{\beta,\alpha}$ sont orientées, alors la composée $\phi_{\gamma,\alpha} = \phi_{\gamma,\beta} \circ \phi_{\beta,\alpha}$, est encore orientée.

Enfin, $\mathrm{Gr}(\mathcal{R}_{\mathrm{or}})$ est une réunion de composantes connexes de $\mathrm{Gr}(\mathcal{R})$ et est, par conséquent, une sous-variété de $\mathcal{A}(d)\times\mathcal{A}(d)$ de dimension d. L'application du théorème de Godement donne alors une variété $\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\mathrm{or}}$ et un morphisme étale de variétés :

$$\Psi : \mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\mathrm{or}} \to \mathcal{A}(d)/\mathcal{R} = \boldsymbol{M}\,.$$

4.6-1. Proposition : *Sous les hypothèses en cours, la variété $\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\mathrm{or}}$ est canoniquement orientée et Ψ est un revêtement à deux feuillets de $\boldsymbol{M}$.*

Démonstration : La construction de la variété $\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}}$ repose sur des données canoniquement attachées à $\boldsymbol{M}$, en particulier son atlas de définition est canonique et les morphismes de transition (ce sont ceux dont les graphes constituent la relation $\mathcal{R}_{\text{or}}$) sont orientés par construction. L'atlas de définition de la variété $\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}}$ est donc canonique et orienté.

Avant de démontrer la deuxième partie de la proposition faisons quelques observations élémentaires sur les espaces topologiques quotients.

Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique muni d'une relation d'équivalence notée '$\sim$'. Soit $\xi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ une involution $\sim$-compatible, *i.e.*

$$\xi^2 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{X}} \quad \text{et} \quad \xi(x_1) = \xi(x_2) \text{ pour tous } x_1 \text{ et } x_2 \text{ vérifiant } x_1 \sim x_2$$

L'application ξ induit alors une involution Ξ sur $\boldsymbol{X}/\!\sim$, d'où le sous-groupe $\boldsymbol{G} := \{\mathrm{id}, \Xi\} \subseteq \text{Homéom}(\boldsymbol{X}/\!\sim)$. L'espace $(\boldsymbol{X}/\!\sim)/\boldsymbol{G}$ est alors isomorphe à l'espace $\boldsymbol{X}/\!\sim_\xi$, où la relation $\sim_\xi$ est définie par

$$x_1 \sim_\xi x_2\,, \quad \text{si et seulement si,} \quad x_1 \sim x_2 \quad \text{ou} \quad x_1 \sim \xi(x_2)$$

en particulier, si l'on note ξ_2 l'involution de $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ définie par $\xi_2(x,y) := (x, \xi(y))$, on a

$$\mathrm{Gr}(\mathcal{R}_\xi) = \mathcal{R} \cup \xi_2(\mathcal{R})\,, \tag{$\diamond$}$$

et l'on prouve aisément alors que

$$\Xi \text{ possède un point fixe, si et seulement si, } \mathcal{R} \cap \xi_2(\mathcal{R}) \neq \varnothing.$$

Appliquons ces remarques à l'espace $\mathcal{A}(d)$, la relation $\mathcal{R}_{\text{or}}$ et l'involution $\xi : \mathcal{A}(d) \to \mathcal{A}(d)$ définie de la manière suivante : Soit $\epsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ l'involution linéaire de $\mathbb{R}^m$ définie par $\epsilon(x_1, x_2, \ldots, x_d) = (-x_1, x_2, \ldots, x_d)$, et définissons l'involution ε de l'ensemble d'indices $\mathfrak{A}$, en posant, pour toute carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de $\mathcal{A}$:

$$(U_{\varepsilon(\alpha)}, \varphi_{\varepsilon(\alpha)}) := (U_\alpha, \epsilon \circ \varphi_\alpha)\,.$$

On définit $\xi = \mathcal{A}(d) \to \mathcal{A}(d)$ par ses restrictions aux composantes connexes de $\mathcal{A}(d)$. La restriction de ξ à l'ouvert $\mathcal{A}(d)_\alpha$ sera, par définition, l'application *identique* de $\mathcal{A}(d)_\alpha \to \mathcal{A}(d)_{\varepsilon(\alpha)}$. La compatibilité de ξ à $\mathcal{R}_{\text{or}}$ se lit dans l'inclusion $(\xi\times\xi)(\mathcal{R}_{\text{or}}) \subseteq \mathcal{R}_{\text{or}}$ qui est immédiate puisque $\phi_{\beta,\alpha} = \epsilon \circ \phi_{\varepsilon(\beta),\varepsilon(\alpha)} \circ \epsilon$.

La remarque fondamentale maintenant est que le graphe de $\mathcal{R}$ est partitionné en :

$$\mathrm{Gr}(\mathcal{R}) = \mathrm{Gr}(\mathcal{R}_{\text{or}}) \amalg \xi_2(\mathrm{Gr}(\mathcal{R}_{\text{or}}))\,,$$

dont on déduit que le groupe $\boldsymbol{G} = \{\mathrm{id}, \Xi\}$ opère *sans point fixe* sur la variété $\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}}$ (et donc de façon proprement discontinue) et que la projection canonique $\Psi : \mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}} \to \mathcal{A}(d)/\mathcal{R}$ est très précisément la projection quotient $\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}} \to (\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}})/\boldsymbol{G} \equiv \mathcal{A}(d)/\mathcal{R}$. ∎

4.6-2. Définition : Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable de dimension d, et considérons le fibré vectoriel de rang 1 :

$$\pi : \boldsymbol{\mathcal{A}}^d\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{M}\,. \tag{$\ddagger$}$$

On appelle «variété d'orientation de $\boldsymbol{M}$», et on la note $\mathrm{Or}(\boldsymbol{M})$, l'espace total du revêtement associé à la fibration $\boldsymbol{\mathcal{A}}^d\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{M})\backslash\sigma_0(\boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{M}$, où σ_0 désigne la section nulle du fibré ($\ddagger$).

4.6-3. Proposition : *Les revêtements $\pi : \mathrm{Or}(\boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{M}$ et $\Psi : \mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}} \to \boldsymbol{M}$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration : Reprenons les notations et objets des paragraphes précédents. Un atlas pour le fibré $\boldsymbol{\mathcal{A}}^d\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{M})$ est donné par la collection $\{\mathcal{A}(d)_\alpha\times\mathbb{R}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ où les applications de transition sont de la forme :

$$(x, \lambda) \mapsto (\phi_{\beta,\alpha}(x), J(\phi_{\beta,\alpha})(x)\,\lambda)\,.$$

Il est alors naturel de considérer l'atlas de $\boldsymbol{\mathcal{A}}^d\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{M})\backslash\sigma_0(\boldsymbol{M})$ donné par la réunion des familles $\{\mathcal{A}(d)_\alpha\times\mathbb{R}^*_+\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ et $\{\mathcal{A}(d)_\alpha\times\mathbb{R}^*_-\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ où l'inspection de l'application de transition de $\mathcal{A}(d)_\alpha\times\mathbb{R}^*_\pm$ vers $\mathcal{A}(d)_\beta\times\mathbb{R}^*_\pm$ se voit, sur la première coordonnée, comme la composante orientée de $\phi_{\beta,\alpha}$, tandis que la transition de $\mathcal{A}(d)_\alpha\times\mathbb{R}^*_\pm$ vers $\mathcal{A}(d)_\beta\times\mathbb{R}^*_\mp$ est donnée, toujours au niveau des premières coordonnées, par la composante non orientée de $\phi_{\beta,\alpha}$.

La famille de toutes les projections canoniques :

$$p_1 : \mathcal{A}(d)_\alpha\times\mathbb{R}^*_+ \to \mathcal{A}(d)_\alpha \quad \text{et} \quad p_1 : \mathcal{A}(d)_\alpha\times\mathbb{R}^*_- \to \mathcal{A}(d)_{\varepsilon(\alpha)}\,,$$

définit alors un $\boldsymbol{M}$-isomorphisme canonique de $\mathrm{Or}(\boldsymbol{M})$ vers $\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\mathrm{or}}$. ∎

4.6.1 Critères d'orientabilité.

Proposition : *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété de dimension d. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *$\boldsymbol{M}$ est orientable.*

b) *Le revêtement de $\boldsymbol{M}$ par sa variété d'orientations est trivial.*

Si de plus $\boldsymbol{M}$ admet des partitions de l'unité :

c) *Il existe une forme différentielle de degré d nulle part nulle.*

Démonstration :

(a)⇒(b). Les cartes d'un atlas orienté pour $\boldsymbol{M}$ sont trivialement des cartes de l'atlas canonique de $\mathrm{Or}(\boldsymbol{M})$; ceci définit un plongement canonique de $\boldsymbol{M}$ dans $\mathrm{Or}(\boldsymbol{M})$ qui est une section du revêtement d'orientations. Comme ce dernier est à deux feuillets, le revêtement est trivial.

(b)⇒(a). Lorsque le revêtement de la variété d'orientations est trivial, la variété $\boldsymbol{M}$ peut être plongée dans $\mathrm{Or}(\boldsymbol{M})$ par une immersion ouverte de sorte que $\boldsymbol{M}$ est difféomorphe à un ouvert de $\mathrm{Or}(\boldsymbol{M})$ qu l'on munit de l'orientation induite.

(a)⇒(c). Soit $\{(U_\beta,\varphi_\beta)\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ un atlas orienté de $\boldsymbol{M}$, et considérons une partition de l'unité $\{\rho_\gamma\}\gamma\in\mathfrak{C}$ de $\boldsymbol{M}$ à supports compacts subordonnée à $\mathcal{B}=\{U_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$. Pour chaque $\gamma\in\mathfrak{C}$, il existe donc $\beta(\gamma)\in\mathfrak{B}$ tel que $|\rho_\gamma|\subseteq U_{\beta(\gamma)}$. La forme différentielle $\omega_\gamma=\rho_\gamma\,\varphi^*_{\beta(\gamma)}\,(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d)$ étant à support compact dans l'ouvert $U_{\beta(\gamma)}$ se prolonge par zéro à $\boldsymbol{M}$ tout entier. On pose alors $\omega=\sum_\gamma\,\omega_\gamma$. Cette forme est nulle part nulle. En effet, soit $(U_{\beta_0},\varphi_{\beta_0})$ une carte de l'atlas orienté de $\boldsymbol{M}$ telle que les fonctions de partitions non identiquement nulles sur U soient en nombre fini, notons leur famille $\{\rho_{\gamma_1},\dots,\rho_{\gamma_r}\}$. Le représentant de ω pour la carte $(U_{\beta_0},\varphi_{\beta_0})$ s'écrit alors :

$$\omega_{\beta_0} := \sum_{k=1}^{r}\,\phi^*_{\beta(\gamma_k),\beta_0}\big(\rho'_{\gamma_k}\big)\,J\big(\phi_{\beta(\gamma_k),\beta_0}\big)\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d\,,$$

où ρ'_{γ_k} est la fonction de partition sur $\varphi_{\beta(\gamma_k)}(U_{\beta(\gamma_k)})^{-1}$ définie par $\rho_{\gamma_k}\circ\varphi^{-1}_{\beta(\gamma_k)}$. Comme les applications $\phi_{\beta(\gamma_k),\beta_0}$ sont orientées les coefficients de la somme sont des fonctions positives où nulles et comme les ρ_γ constituent une partition de l'unité de $\boldsymbol{M}$, le représentant ω_{β_0} est nulle part nul.

(c)⇒(b). La donnée d'une forme différentielle nulle part nulle détermine une section globale du fibré

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^d\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{M})\backslash\sigma_0(\boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{M}\,.$$

On en déduit une section globale du revêtement à deux feuillets $\mathrm{Or}(\boldsymbol{M})\to\boldsymbol{M}$; ce revêtement est donc nécessairement trivial. ∎

4.6.1-1. Exercice : Une variété (connexe et) simplement connexe est orientable. En particulier, les espaces projectifs $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ et $\mathbb{P}_m(\mathbb{H})$ sont orientables (voir exercice 2.10-4).

4.6.1-2. Exercice : Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ deux variétés orientables. Montrer que la somme amalgamée $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ est également orientable.

4.6.2 Variété d'orientations d'une variété quotient.

Proposition : *Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe agissant sur une variété connexe et orientée $\boldsymbol{P}$ de façon proprement discontinue et sans point fixe. Notons $\boldsymbol{M} := \boldsymbol{P}/\boldsymbol{G}$, alors :*

a) *L'ensemble $\boldsymbol{G}_{\text{or}} \subseteq \boldsymbol{G}$ des transformations orientées est un sous-groupe distingué de $\boldsymbol{G}$ d'indice un ou deux.*

b) *La variété $\boldsymbol{P}/\boldsymbol{G}_{\text{or}}$ est toujours canoniquement orientée.*

c) *Lorsque $[\boldsymbol{G}:\boldsymbol{G}_{\text{or}}] = 2$, le revêtement $\boldsymbol{P}/\boldsymbol{G}_{\text{or}} \to \boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}/\boldsymbol{G}$ est isomorphe au revêtement d'orientations de $\boldsymbol{M}$. En particulier, si $\boldsymbol{G}$ possède des transformations non orientées, le quotient $\boldsymbol{M}$ **n'est pas** orientable.*

Démonstration :

a) Résulte immédiatement du fait que le jacobien d'une composition est le produit des jacobiens et que le jacobien de l'inverse est l'inverse du jacobien.

b) Le point de vue de variété abstraite pour $\boldsymbol{P}/\boldsymbol{G}_{\text{or}}$ met en évidence le fait que le graphe de la relation $\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}_{\text{or}}}$ ne comporte que des graphes d'applications orientées. Ceci permet de voir que le revêtement de la variété d'orientations de $\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}_{\text{or}}}$ est trivial et donc que $\mathcal{R}_{\boldsymbol{G}_{\text{or}}}$ est orientée.

c) Évident. ∎

4.6.2-1. Exercice : Montrer que l'application antipodale $\vec{v} \mapsto -\vec{v}$ n'est pas orientable sur la sphère $\mathbb{S}^n$, si et seulement si, n est un nombre pair strictement positif.

En conclure que l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ n'est pas orientable, si et seulement si, n est pair strictement positif.

4.6.2-2. Exercice : En utilisant la description du ruban de Möbius $\boldsymbol{M}$ et de la bouteille de Klein $\boldsymbol{K}$ comme quotients de $\mathbb{R}^2$. Montrer que ces variétés ne sont pas orientables et calculer leur variétés d'orientations. ([25])

4.7 Cohomologie de de Rham de la base d'un revêtement

4.7-1. Lemme : *Soit $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ une* submersion surjective *de variétés différentiables. Le morphisme image inverse :*

$$f^* : \Omega^*(\boldsymbol{N}) \longrightarrow \Omega^*(\boldsymbol{M})$$

est une injection. L'algèbre différentielle graduée $(\Omega^*(\boldsymbol{N}), d_*)$ est donc isomorphe à une sous-algèbre différentielle graduée de $(\Omega^*(\boldsymbol{M}), d_*)$.

[25] Rep. : le cylindre $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ pour $\boldsymbol{M}$ et le tore $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ pour $\boldsymbol{K}$.

Lorsque le morphisme f est, en plus, propre *la même assertion concernant les formes différentielles à support compacte est également vérifiée.*

Démonstration : Comme f est submersive et surjective, il existe, pour chaque $y \in \boldsymbol{N}$ donné, une carte (V, ψ) de $\boldsymbol{N}$, vérifiant $y \in V$, et une carte (U, φ) de $\boldsymbol{M}$, vérifiant $f(U) = V$, telles que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^{d(\boldsymbol{M})} \equiv \mathbb{R}^{d(\boldsymbol{N})} \times \mathbb{R}^{d(\boldsymbol{M})-d(\boldsymbol{N})} \to \mathbb{R}^{d(\boldsymbol{N})} ,$$

est la projection canonique. En particulier, il existe un morphisme $\sigma : V \to U$ tel que $f \circ \sigma = \mathrm{id}_V$. Si maintenant $\omega \in \Omega^*(\boldsymbol{N})$ est telle que $f^*(\omega) = 0$, on aura

$$\omega|_U = \sigma^*(f^*(\omega|_U)) = \sigma^*(f^*(\omega))|_U = 0 ,$$

et comme le choix de $y \in \boldsymbol{N}$ est arbitraire, la forme ω est identiquement nulle. ∎

Dans cette section nous nous intéresserons plus précisément aux revêtements de variété différentiable $\pi : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{M}$. Lorsque $\boldsymbol{P}$ (et $\boldsymbol{M}$) est connexe, on démontre que chaque élément du groupe $\boldsymbol{G} := \mathrm{Iso}(\pi)$, d'isomorphismes du revêtement π, est entièrement déterminé par son action sur une fibre $\pi^{-1}(m_0)$. Cette dernière est d'autre part entièrement déterminée par un élément du groupe fondamental $\Pi_1(m_0, \boldsymbol{M})$ dont on sait qu'il agit de manière transitive sur la fibre $\pi^{-1}(m_0)$. Il s'ensuit que $\boldsymbol{G}$ agit de façon proprement discontinue et sans point fixe sur $\boldsymbol{P}$ et que ses orbites coïncident avec les fibres de π. La donné d'un revêtement de variétés est donc équivalent à la donnée d'une variété munie d'une action d'un groupe proprement discontinue et sans points fixes ; d'où l'intérêt de la prochaine section.

4.7.1 Cohomologie de Rham d'une variété d'orbites discrètes. Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable munie d'une action d'un groupe $\boldsymbol{G}$ proprement discontinue et sans points fixes. Pour chaque $g \in \boldsymbol{G}$, notons $\gamma_g : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ la transformation $\gamma_g : m \mapsto g \cdot m$. On a $\gamma_g \in \mathrm{Difféom}(\boldsymbol{M})$ et une action "induite" de $\boldsymbol{G}$ sur $\Omega^*(\boldsymbol{M})$ par les isomorphismes γ_g^* d'algèbre différentielle graduée.

Notons $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ la submersion canonique ; l'égalité $\nu = \nu \circ \gamma_g$ pour tout $g \in \boldsymbol{G}$, montre que pour chaque $\omega \in \Omega^*(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G})$, la forme différentielle $\nu^*(\omega)$ est $\boldsymbol{G}$-invariante, *i.e.* vérifie :

$$\nu^*(\omega) = \gamma_g^*(\nu^*(\omega)) \quad \text{pour tout } g \in \boldsymbol{G},$$

en particulier $\nu^* : \Omega^*(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}) \to \Omega^*(\boldsymbol{M})$ est une injection à valeurs dans la sous-ensemble $\Omega^*(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{G}}$ des formes différentielles de $\Omega^*(\boldsymbol{M})$ invariantes sous l'action de $\boldsymbol{G}$. La compatibilité des morphismes image inverse γ_g^* à la fois avec la graduation la différentielle et la structure d'algèbre anticommutative, montrent que $(\Omega^*(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{G}}, d_*)$ est un sous-algèbre différentielle graduée de $(\Omega^*(\boldsymbol{M}), d_*)$.

4.7.1-1. Proposition : *Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe agissant de manière proprement discontinue et sans points fixes sur un variété différentiable $\boldsymbol{M}$. Notons $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ la submersion canonique, le morphisme*

$$\nu^* : \Omega^*(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}) \to \Omega^*(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{G}} \subseteq \Omega^*(\boldsymbol{M})$$

établit un isomorphisme d'algèbres différentielles graduées entre $\Omega^*(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G})$ et $\Omega^*(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{G}}$.

Démonstration : D'après les préliminaires qui précèdent, seul nous reste à vérifier que toute forme $\boldsymbol{G}$-invariante $\omega \in \Omega^m(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{G}}$ est de la forme $\nu^*(\varpi)$ pour une certaine forme $\varpi \in \Omega^m(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G})$.

Nous avons déjà signalé le fait que ν est un revêtement donc un morphisme étale. Soit $U \subseteq \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ un ouvert de carte ; comme U est contractile, la restriction de ν à l'ouvert $\nu^{-1}(U)$ donne un fibré trivial, donc isomorphe à $U \times \boldsymbol{G}$. Notons alors σ_g la section de ν correspondante à la feuille indexée par $g \in \boldsymbol{G}$. On a $\sigma_{g_2 \cdot g_1} = \gamma_{g_2} \circ \sigma_{g_1}$ et donc :

$$\sigma^*_{g_2 \cdot g_1}(\omega) = \sigma^*_{g_1}(\gamma^*_{g_2}(\omega)) \,,$$

en particulier, si $\omega \in \Omega^*(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{G}}$ les formes $\sigma^*_g(\omega)$ définissent une même et unique forme différentielle sur l'ouvert U. Il s'ensuit que, en faisant varier l'ouvert U, ces formes se recollent en une forme différentielle globale sur $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ que nous allons noter ϖ. La forme $\nu^*(\varpi)$ peut maintenant être étudiée localement (par rapport à $\boldsymbol{M}$). En reprenant le même choix d'ouvert U, on aura sur la feuille $U \times \{g\}$ l'égalité

$$\nu^*(\varpi|_U) = \nu^*\big(\sigma^*_g\big(\omega|_{U \times \{g\}}\big)\big) = \omega|_{U \times \{g\}} \,,$$

d'où $\nu^*(\varpi) = \omega$. ∎

4.7.1-2. Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*_u$ l'application $t \mapsto \exp(2\pi i\, t)$. Montrer que c'est un revêtement isomorphe à $\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}$ opère sur $\mathbb{R}$ par $m \cdot t := t + m$. En déduire que :

$$\Omega^0(\mathbb{S}^1) \equiv \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad \Omega^1(\mathbb{S}^1) \equiv \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}\, dt \,,$$

où $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ est l'espace vectoriel des fonctions différentiables sur $\mathbb{R}$ périodiques de période 1.

Calculer la cohomologie de de Rham de $\mathbb{R}$, puis de $\mathbb{S}^1$. Observer que le morphisme :

$$\nu^* : H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{S}^1) \to H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}} \,,$$

induit par l'inclusion d'algèbres différentielles graduées $\nu^* : \Omega^*(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow \Omega^*(\mathbb{R})$, n'est pas bijectif.

Généraliser l'étude précédente au cas tu tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \equiv \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ (*cf.* exercice 1.5.1-4-(2)).

4.7.2 Cohomologie des invariants et invariants de la cohomologie. Lorsque un groupe $\boldsymbol{G}$ opère linéairement sur chaque terme d'un complexe différentiel gradué (C^*, d_*) de façon compatible à la différentielle d_*, son action transforme cocycle en cocycle et cobord en cobord, de sorte que si X et Y sont deux m-cocycles cohomologues, *i.e.* vérifiant $(X - Y) \in d_{m-1}(C^{m-1})$, on aura, pour tout $g \in \boldsymbol{G}$:

$$(g \cdot X - g \cdot Y) \in g \cdot d_{m-1}(C^{m-1}) = d_{m-1}(g \cdot C^{m-1}) = d_{m-1}(C^{m-1}) \,,$$

d'où une action "induite" de $\boldsymbol{G}$ sur la cohomologie $h^*(C^*, d_*)$. L'inclusion canonique de complexes $\iota_* : ((C^*)^{\boldsymbol{G}}, d_*) \hookrightarrow (C^*, d_*)$ induit un morphisme en cohomologie :

$$h(\iota)_* : h^*((C^*)^{\boldsymbol{G}}, d_*) \longrightarrow h^*(C^*, d_*) \,,$$

dont l'image est contenue dans le sous-espace $h^m(C^*, d_*)^{\boldsymbol{G}}$ des classes de cohomologie $\boldsymbol{G}$-invariantes. Nous obtenons ainsi un morphisme canonique entre la cohomologie des invariants et les invariants de la cohomologie :

$$\boxed{h^*((C^*)^{\boldsymbol{G}}, d_*) \xrightarrow{h(\iota)_*} h^*(C^*, d_*)^{\boldsymbol{G}}}$$

Reprenons maintenant les données du paragraphe précédent : $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable munie d'une action proprement discontinue et sans points fixes par un groupe $\boldsymbol{G}$, et soit $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ la projection canonique. On a les morphismes d'algèbre différentielle graduée :

$$\big(\Omega^*(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}), d_*\big) \xrightarrow[\equiv]{\nu^*} \big(\Omega^*(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{G}}, d_*\big) \xrightarrow{\subseteq} \big(\Omega^*(\boldsymbol{M}), d_*\big) \,,$$

dont on déduit par passage à la cohomologie :

$$H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}) \xrightarrow[\equiv]{\nu^*} h^*\big(\Omega^*(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{G}}, d_*\big) \longrightarrow h^*\big(\Omega^*(\boldsymbol{M}), d_*\big)^{\boldsymbol{G}} \xrightarrow{=} H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{G}} \xrightarrow{\subseteq} H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\,.$$

L'exercice 4.7.1-2 montre que le morphisme central n'est pas nécessairement bijectif. Le lemme suivant d'algèbre homologique donne une condition simple permettant de l'assurer.

4.7.2-1. Lemme : *Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe **fini** agissant sur un complexe différentiel gradué (C^*, d_*) de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels par des automorphismes de complexe différentiel gradué,* i.e. *pour chaque $m \in \mathbb{Z}$ et chaque $g \in \boldsymbol{G}$:*

$$\big(g\cdot : C^m \to C^m\big) \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(C^m) \quad \textit{et} \quad d_m(g\cdot X) = g\cdot d_m(X)\,,\ \textit{pour tout } X \in C^m.$$

Notons $\iota_* : \big((C^*)^{\boldsymbol{G}}, d_*\big) \hookrightarrow (C^*, d_*)$ l'inclusion canonique du sous-complexe des cochaînes $\boldsymbol{G}$-invariantes de (C^*, d_*). Alors, l'application induite en cohomologie :

$$h(\iota)_* : h^*\big((C^*)^{\boldsymbol{G}}, d_*\big) \to h^*(C^*, d_*)\,,$$

est injective *et son image coïncide avec l'espace des classes de cohomologie $\boldsymbol{G}$-invariantes. L'application :*

$$\boxed{h^*\big((C^*)^{\boldsymbol{G}}, d_*\big) \xrightarrow[\equiv]{h(\iota)_*} \big(h^*(C^*, d_*)\big)^{\boldsymbol{G}}}$$

*est donc un **isomorphisme** :*

Démonstration : Pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, notons $\Sigma_m : C^m \to C^m$ l'opérateur $\mathbb{R}$-linéaire :

$$X \in C^m \longmapsto \Sigma_m(X) := \frac{1}{|\boldsymbol{G}|}\sum_{g\in\boldsymbol{G}} g\cdot X\,.$$

On vérifie aisément que $\Sigma_m \circ d_m = d_m \circ \Sigma_m$ et $\Sigma_m(X) \in (C^m)^{\boldsymbol{G}}$, pour tout $X \in C^m$. La composée des morphismes de complexes différentiels :

$$\big((C^*)^{\boldsymbol{G}}, d_*\big) \xrightarrow{\iota_*} (C^*, d_*) \xrightarrow{\Sigma_*} \big((C^*)^{\boldsymbol{G}}, d_*\big)\,,$$

est alors l'identité et l'injectivité du morphisme :

$$h^*\big((C^*)^{\boldsymbol{G}}, d_*\big) \xrightarrow{\iota_*} \big(h^*(C^*, d_*)\big)^{\boldsymbol{G}} \subseteq \big(h^*(C^*, d_*)\big)$$

en découle.

Montrons la surjectivité de $h(\iota)_*$. Soit $X \in C^m$ un cocycle tel que sa classe de cohomologie soit $\boldsymbol{G}$-invariante. Ceci signifie que l'on a, pour tout $g \in \boldsymbol{G}$:

$$X - g\cdot X \in d_{m-1}(C^{m-1})\,;$$

en additionnant ces expressions suivant tous les $g \in \boldsymbol{G}$, on obtient :

$$|G|\,X - \sum_{g\in\boldsymbol{G}} g\cdot X \in d_{m-1}(C^{m-1})\,,$$

soit, $X - \Sigma_m(X) \in d_m(C^{m-1})$, ce qui montre que toute classe de cohomologie $\boldsymbol{G}$-invariante de (C^*, d_*) peut être représentée par un cocycle $\boldsymbol{G}$-invariante, ce qui termine la démonstration du lemme. ∎

4.7.2-2. Remarque : Dans l'énoncé du lemme précédent, le corps $\mathbb{R}$ peut être remplacé par un corps arbitraire k. Lorsque la caractéristique c de k sera positive, il faudra exiger que c et $|\boldsymbol{G}|$ soient relativement premiers.

4.7.2-3. Corollaire : *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable munie d'une action proprement discontinue et sans points fixes par un groupe **fini** $\boldsymbol{G}$, et soit $\nu : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}$ la projection canonique. Les morphismes d'algèbres différentielles graduées :*

$$H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}) \xrightarrow{\nu^*} \big(H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\big)^{\boldsymbol{G}} \quad \textit{et} \quad H^*_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{G}) \xrightarrow{\nu^*} \big(H^*_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M})\big)^{\boldsymbol{G}}$$

*sont des **isomorphismes**.*

———————×———————

§5. Suites exactes de Mayer-Vietoris

Nous introduisons dans cette section un instrument simple mais puissant pour "relier" des informations locales de nature cohomologique en une information globale pour une variété. L'idée de départ vient de comprendre le lien entre les complexes des formes différentielles et leurs cohomologies, pour : deux ouverts, leur réunion et de leur intersection. Ce lien est précisé par les suites exactes de Mayer-Vietoris dans les propositions 5.1-1, et 5.2.1-6.

Comme exemple d'application de ces techniques, nous proverons dans le chapitre suivant la dualité de Poincaré pour les variétés compactes orientables et montrerons que les dimensions des groupes de cohomologie pour une variété compacte sont finies.

5.1 Suites exactes courtes de Mayer-Vietoris

Pour tout couple d'ouverts $W_2 \subseteq W_1$ d'une même variété différentiable $\boldsymbol{M}$, nous avons défini les morphismes d'algèbres différentielles graduées :

$$\rho^{W_1}_{W_2} : \Omega^*(W_1) \longrightarrow \Omega^*(W_2) \qquad \text{"de restriction de } W_1 \text{ à } W_2\text{"} ;$$

$$\iota^{W_1}_{W_2!} : \Omega^*_c(W_2) \longrightarrow \Omega^*_c(W_1) \qquad \text{"de prolongement par zéro de } W_2 \text{ à } W_1\text{"}.$$

Des morphismes de ces types interviennent dans la construction des deux suites courtes, dites «de Mayer-Vietoris», associées à la donnée de deux ouverts arbitraires U_1 et U_2 de $\boldsymbol{M}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} \to \Omega^*(U_1 \cup U_2) & \xrightarrow{\rho^{U_1\cup U_2}_{U_1} \oplus \rho^{U_1\cup U_2}_{U_2}} & \Omega^*(U_1) \oplus \Omega^*(U_2) & \xrightarrow{\rho^{U_1}_{U_{12}} \ominus \rho^{U_2}_{U_{12}}} & \Omega^*(U_{12}) \to \mathbf{0} & & \\
\omega & \longmapsto & \big(\rho^{U_1\cup U_2}_{U_1}(\omega), \rho^{U_1\cup U_2}_{U_2}(\omega)\big) & & & & (\mathbf{MV}(U_1,U_2)) \\
& & (\omega_1,\omega_2) & \longmapsto & \rho^{U_1}_{U_{12}}(\omega_1) - \rho^{U_2}_{U_{12}}(\omega_2) & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} \to \Omega^*_c(U_{12}) & \xrightarrow{\iota^{U_1}_{U_{12}} \ominus \iota^{U_2}_{U_{12}}} & \Omega^*_c(U_1) \oplus \Omega^*_c(U_2) & \xrightarrow{\iota^{U_1\cup U_2}_{U_1} \oplus \iota^{U_1\cup U_2}_{U_2}} & \Omega^*_c(U_1 \cup U_2) \to \mathbf{0} & & \\
\omega & \longmapsto & \big(\iota^{U_1}_{U_{12}!}(\omega), -\iota^{U_2}_{U_{12}!}(\omega)\big) & & & & (\mathbf{MV}_{\mathrm{c}}(U_1,U_2)) \\
& & (\omega_1,\omega_2) & \longmapsto & \iota^{U_1\cup U_2}_{U_1\ \ !}(\omega_1) + \iota^{U_1\cup U_2}_{U_2\ \ !}(\omega_2) & &
\end{array}$$

5.1-1. Proposition : *Pour toute variété $\boldsymbol{M}$ et toute paire d'ouverts (U_1, U_2), les suites $\mathbf{MV}(U_1,U_2)$ et $\mathbf{MV}_{\mathrm{c}}(U_1,U_2)$ ci-dessus, sont toujours exactes à gauches, et sont exactes lorsque la variété $\boldsymbol{M}$ admet des partitions de l'unité. De plus, les morphismes sont des homomorphismes de complexes différentiels (de degré zéro).*

Démonstration : Le fait que les morphismes commutent aux différentielles découle aussitôt du fait que toute combinaison linéaire de morphismes de complexes est encore un morphisme de complexe. Prouvons maintenant l'exactitude des suites degré par degré, fixons donc un entier naturel $m \in \mathbb{N}$.

Exactitude à gauche des suites $\mathbf{MV}(U_1, U_2)$ et $\mathbf{MV}_c(U_1, U_2)$.

Soit $\omega \in \Omega^m(U_1 \cup U_2)$ telle que $\rho_{U_i}^{U_1\cup U_2}(\omega) = 0$. Comme ω est une section d'un fibré vectoriel au-dessus de $U_1 \cup U_2$, il est clair que cette application sera nulle, si et seulement si, chaque restriction $\omega|_{U_i}$ est nulle ; ceci explique l'injectivité de la flèche de gauche de $\mathbf{MV}(U_1, U_2)$.

L'injectivité de la flèche gauche dans la suite $\mathbf{MV}_c(U_1, U_2)$ est immédiate.

Soient $\omega_i \in \Omega^m$ vérifiant la relation $\omega_1|_{U_{12}} = \omega_2|_{U_{12}}$ (‡), la forme différentielle $\omega \in \Omega^m(U_1 \cup U_2)$ définie par $\omega(x) = \omega_i(x)$, si $x \in U_i$, est bien définie à cause de la condition (‡), et comme la différentiabilité sur une réunion d'ouverts équivaut à la différentiabilité des restrictions à chaque ouvert, la section ω du fibré vectoriel $\boldsymbol{\mathcal{A}}^m\boldsymbol{\mathfrak{T}}(U_1 \cup U_2)$ sera différentiable.

Soient $\omega_i \in \Omega_c^m$ vérifiant $\iota_{U_1}^{U_1\cup U_2}{}_!(\omega_1) = -\iota_{U_2}^{U_1\cup U_2}{}_!(\omega_2)$. Comme le prolongement par zéro ne change pas le support, on déduit que $|\omega_1| = |\omega_2| \subseteq U_{12}$ et donc $|\omega_i| \subseteq U_{12}$; mais alors $\omega_i = \iota_{U_{12}!}^{U_i}(\omega_1|_{U_{12}})$ et l'exactitude de la suite $\mathbf{MV}_c(U_1, U_2)$ en son terme central suit.

Exactitude à droite. Supposons maintenant que la variété $\boldsymbol{M}$ admette des partitions de l'unité, et soit $\{\rho_1, \rho_2\}$ une partition de l'unité de l'ouvert $U_1 \cup U_2$ subordonnée au recouvrement $\{U_1, U_2\}$, *i.e.* $|\rho_i| \subseteq U_i$.

Soit $\omega \in \Omega^m(U_{12})$ et considérons, pour chaque $i = 1, 2$, la section du fibré $\boldsymbol{\mathcal{A}}^m\boldsymbol{\mathfrak{T}}(U_i)$ définie par :

$$\omega_i(x) = \begin{cases} \rho_i(x)\,\omega(x)\,, & \text{si } x \in U_{12} \\ 0\,, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Observons alors que lorsque $x \in U_1\backslash U_2$, il existe un voisinage $V_x \ni x$, tel que $\rho_2(y) = 0$, pour tout $y \in V_x$; en particulier, la forme ω_2 sera identiquement nulle (donc différentiable) sur $U_1\backslash U_2$ et $\omega_2 \in \Omega^m(U_1)$. Par un argument parfaitement symétrique, on aura $\omega_1 \in \Omega^m(U_2)$, d'où :

$$\rho_{U_{12}}^{U_1}(\omega_2) + \rho_{U_{12}}^{U_2}(\omega_1) = \rho_2|_{U_{12}}\,\omega + \rho_1|_{U_{12}}\,\omega = (\rho_1 + \rho_2)|_{U_{12}}\,\omega = \omega\,.$$

Le couple $(\omega_2, -\omega_1)$ est donc bien un relèvement de $\omega \in \Omega^m(U_{12})$ dans $\Omega^m(U_1) \oplus \Omega^m(U_2)$ et la flèche de droite de $\mathbf{MV}(U_1, U_2)$ est *surjective*.

Lorsque $\omega \in \Omega_c(U_1 \cup U_2)$, on considère

$$\omega_i(x) = \begin{cases} \rho_i(x)\,\omega(x)\,, & \text{si } x \in U_i \\ 0\,, & \text{sinon.} \end{cases}$$

de sorte que le support de ω_i vérifie : $|\omega_i| \subseteq |\rho_i| \cap |\omega| \subseteq U_i$ et est compact ; en particulier, $\omega_i|_{U_i} \in \Omega_c^m(U_i)$, et $\iota_{U_i}^{U_1\cup U_2}{}_!(\omega_i|_{U_i}) = \omega_i$. On a alors :

$$\iota_{U_1}^{U_1\cup U_2}{}_!(\omega_1|_{U_1}) + \iota_{U_2}^{U_1\cup U_2}{}_!(\omega_2|_{U_2}) = \omega_1 + \omega_2 = \omega$$

et la flèche de droite de $\mathbf{MV}_c(U_1, U_2)$ est *surjective*. ∎

5.2 Suites exactes longues de Mayer-Vietoris

5.2.1 Rappel d'algèbre homologique. Dans cette section, on désigne par $\mathcal{A}$ un anneau commutatif (avec identité multiplicative). Le livre [Bou$_A$] est une excellente référence pour ce qui suit.

Catégorie de $\mathcal{A}$-modules $\mathbb{Z}$-gradués

On appelle «$\mathcal{A}$-module $\mathbb{Z}$-gradué» toute famille $\boldsymbol{A}^* = \{\boldsymbol{A}^m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{A}$-modules (on note souvent $\boldsymbol{A}^* = \oplus_{m\in\mathbb{Z}}\,\boldsymbol{A}^m$). Un «morphisme de $\mathcal{A}$-modules $\mathbb{Z}$-gradués» est alors la donnée d'une famille d'homomorphismes de $\mathcal{A}$-modules $f_* = \{f_m : \boldsymbol{A}_1^m \to \boldsymbol{A}_2^m\}_{m\in\mathbb{Z}}$. Ces données constituent une catégorie abélienne notée $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})$; son élément nul est noté $\mathbf{0}$ et est représenté par la famille dont chaque élément est le $\mathcal{A}$-module nul.

Catégorie de $\mathcal{A}$-modules différentiels $\mathbb{Z}$-gradués
Les objets de cette catégorie, que nous noterons $\mathbf{C}^*(\mathcal{A})$, sont les couples $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^*, d(\boldsymbol{A})_*)$, où $\boldsymbol{A}^*$ est un $\mathcal{A}$-module $\mathbb{Z}$-gradué, et $d(\boldsymbol{A})_*$ désigne une famille $\{d(\boldsymbol{A})_m : \boldsymbol{A}^m \to \boldsymbol{A}^{m+1}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de morphismes de $\mathcal{A}$-modules vérifiant l'égalité $d(\boldsymbol{A})_{m+1} \circ d(\boldsymbol{A})_m = 0$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

La famille $d(\boldsymbol{A})_* = \{d(\boldsymbol{A})_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ est appelée «la différentielle du $\mathcal{A}$-module différentiel $\boldsymbol{A}$». La terminologie «complexe différentiel de $\mathcal{A}$-modules» pour référer à un $\mathcal{A}$-module différentiel $\mathbb{Z}$-gradué est aussi employée dans la littérature et sera également utilisée dans ce cours.

Un «morphisme» entre les complexes différentiels $(\boldsymbol{A}^*, d(\boldsymbol{A})_*)$ et $(\boldsymbol{B}^*, d(\boldsymbol{B})_*)$ est un morphisme $f_* : \boldsymbol{A}^* \to \boldsymbol{B}^*$ de $\mathcal{A}$-modules $\mathbb{Z}$-gradués, vérifiant les relation de commutation

$$d(\boldsymbol{B})_m \circ f_m = f_{m+1} \circ d(\boldsymbol{A})_m\,, \qquad \text{pour tout } m \in \mathbb{Z}.$$

5.2.1-1. Exercice et notations : Soit $f_* : \boldsymbol{A}^* \to \boldsymbol{B}^*$ un morphisme de complexes différentiels entre $(\boldsymbol{A}^*, d(\boldsymbol{A})_*)$ et $(\boldsymbol{B}^*, d(\boldsymbol{B})_*)$. Montrer que les sous-$\mathcal{A}$-modules gradués $\{\ker(f_m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ et $\{\operatorname{coker}(f_m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ sont stables par $d(\boldsymbol{A})_*$ et $d(\boldsymbol{B})_*$ respectivement, et munis de ces différentielles ce sont des complexes différentiels notés $(\ker(f)^*, d_*)$ et $(\operatorname{coker}(f)^*, d_*)$.

Les complexes différentiels de $\mathcal{A}$-modules et leurs morphismes, constituent une catégorie **abélienne**.

Foncteur de cohomologie
De même que nous l'avons fait dans le complexe des formes différentielles, on appelle «m-cocycle d'un complexe différentiel $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^*, d_*)$», tout élément X de $\boldsymbol{A}^m$ vérifiant $d_m(X) = 0$; leur ensemble est noté $\mathfrak{Z}^m(\boldsymbol{A}^*, d_*)$ (en abrégé $\mathfrak{Z}^m(\boldsymbol{A})$) et, dû à la linéarité de d_*, c'est un sous-$\mathcal{A}$-module de $\boldsymbol{A}^m$. Les éléments du sous-$\mathcal{A}$-module $\mathfrak{B}^m(\boldsymbol{A}^*, d_*) := d_{m-1}(\boldsymbol{A}^{m-1}) \subseteq \boldsymbol{A}^m$ sont appelés (en abrégé $\mathfrak{B}^m(\boldsymbol{A})$) «les m-cobords de $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$». La relation $d_m \circ d_{m-1} = 0$ montre alors que $\mathfrak{B}^m(\boldsymbol{A}^*, d_*) \subseteq \mathfrak{Z}^m(\boldsymbol{A}^*, d_*)$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$. On définit «la cohomologie de $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$» comme le module $\mathbb{Z}$-gradué de cohomologie de $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$:

$$\boxed{h^*(\boldsymbol{A}^*, d_*) := \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \frac{\mathfrak{Z}^m(\boldsymbol{A}^*, d_*)}{\mathfrak{B}^m(\boldsymbol{A}^*, d_*)}}$$

et l'on vérifie que lorsque $f_* : (\boldsymbol{A}_1^*, d_{1,*}) \to (\boldsymbol{A}_2^*, d_{2,*})$ est un morphisme de complexes différentiels, on a, pour chaque $m \in \mathbb{Z}$:

$$f_m(\mathfrak{Z}^m(\boldsymbol{A}_1^*, d_{1,*})) \subseteq \mathfrak{Z}^m(\boldsymbol{A}_2^*, d_{2,*}) \quad \text{et} \quad f_m(\mathfrak{B}^m(\boldsymbol{A}_1^*, d_{1,*})) \subseteq \mathfrak{B}^m(\boldsymbol{A}_2^*, d_{2,*})$$

de sorte que f_* induit un morphisme $h(f)_*$ de $\mathcal{A}$-modules $\mathbb{Z}$-gradués entre les cohomologies :

$$\begin{array}{ccc} h^*(\boldsymbol{A}_1^*, d_{1,*}) := \displaystyle\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \frac{\mathfrak{Z}^m(\boldsymbol{A}_1^*, d_{1,*})}{\mathfrak{B}^m(\boldsymbol{A}_1^*, d_{1,*})} & \xrightarrow{h(f)_*} & \displaystyle\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \frac{\mathfrak{Z}^m(\boldsymbol{A}_2^*, d_{2,*})}{\mathfrak{B}^m(\boldsymbol{A}_2^*, d_{2,*})} := h^*(\boldsymbol{A}_2^*, d_{2,*}) \\ X \bmod \mathfrak{B}^m(\boldsymbol{A}_1^*, d_{1,*}) & \longmapsto & f_m(X) \bmod \mathfrak{B}^m(\boldsymbol{A}_2^*, d_{2,*}) \end{array}$$

le lemme suivant se démontre aisément.

5.2.1-2. Lemme : *La correspondance qui associe à un complexe différentiel de $\mathcal{A}$-modules $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$ le $\mathcal{A}$-module gradué $h^*(\boldsymbol{A}^*, d_*)$, et à chaque morphisme de complexes $f_* : (\boldsymbol{A}_1^*, d_{1,*}) \to (\boldsymbol{A}_2^*, d_{2,*})$ le*

morphisme de $\mathcal{A}$-modules gradués $h(f)_*$, est ***fonctorielle additive et covariante*** *de la catégorie des complexes différentiels $\mathbf{C}^*(\mathcal{A})$ vers la catégorie de $\mathcal{A}$-modules gradués* $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})$.

Catégorie des suites exactes courtes de complexes différentiels

Les objets de cette catégorie sont les "suites" de complexes différentiels de $\mathcal{A}$-modules de la forme :

$$\mathbf{0} \to (\boldsymbol{A}_1^*, d_{1,*}) \xrightarrow{f(\boldsymbol{A})_*} (\boldsymbol{A}_2^*, d_{2,*}) \xrightarrow{g(\boldsymbol{A})_*} (\boldsymbol{A}_3^*, d_{3,*}) \to \mathbf{0} \qquad (\diamond_*)$$

où $f(\boldsymbol{A})_*$ et $g(\boldsymbol{A})_*$ sont des morphismes de complexes différentiels tels que, pour chaque $m \in \mathbb{Z}$ la suite :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A}_1^m \xrightarrow{f(\boldsymbol{A})_m} \boldsymbol{A}_2^m \xrightarrow{g(\boldsymbol{A})_m} \boldsymbol{A}_3^m \to \mathbf{0} \qquad (\diamond_m)$$

de $\mathcal{A}$-modules est exacte.

Un «morphisme de suites exactes de complexes différentiels de $\mathcal{A}$-modules» est la donnée d'un triplet $(\alpha_{1,*}, \alpha_{2,*}, \alpha_{3,*})$ de morphismes de complexes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \to & (\boldsymbol{A}_1^*, d_{1,*}) & \xrightarrow{f(\boldsymbol{A})_*} & (\boldsymbol{A}_2^*, d_{2,*}) & \xrightarrow{g(\boldsymbol{A})_*} & (\boldsymbol{A}_3^*, d_{3,*}) & \to & \mathbf{0} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{1,*}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{2,*}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{3,*}} & & \\
\mathbf{0} & \to & (\boldsymbol{B}_1^*, d_{1,*}) & \xrightarrow{f(\boldsymbol{B})_*} & (\boldsymbol{B}_2^*, d_{2,*}) & \xrightarrow{g(\boldsymbol{B})_*} & (\boldsymbol{B}_3^*, d_{3,*}) & \to & \mathbf{0}
\end{array}$$

tel que les sous-diagrammes de ce diagramme sont tous commutatifs.

En appliquant le foncteur de cohomologie à $(\diamond_*)$, on obtient, pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, la suite de $\mathcal{A}$-modules :

$$h^m(\boldsymbol{A}_1^*, d_{1,*}) \xrightarrow{h(f)_m} h^m(\boldsymbol{A}_2^*, d_{2,*}) \xrightarrow{h(g)_m} h^m(\boldsymbol{A}_3^*, d_{3,*}) \qquad (\diamond\diamond_m)$$

5.2.1-3. Lemme : *Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la suite $(\diamond\diamond_m)$ est exacte et dépend fonctoriellement de la catégorie des suites exactes de complexes différentiels de $\mathcal{A}$-modules.*

Démonstration : Soit $\omega \in \mathfrak{Z}^m(\boldsymbol{A}_2^*, d_{2,*})$ et supposons que $g_m(\omega) \in \mathfrak{B}^m(\boldsymbol{A}_3^*, d_{3,*})$. Il existe alors $\mu \in \boldsymbol{A}_3^{m-1}$ tel que $g_m(\omega) = d_{3,m-1}(\mu)$, et comme g_{m-1} est surjective il existe $\omega' \in \boldsymbol{A}_2^{m-1}$ vérifiant $g_{m-1}(\omega') = \mu$. Il s'ensuit que :

$$g_m\big(d_{2,m-1}(\omega') - \omega\big) = g_m\big(d_{2,m-1}(\omega')\big) - g_m(\omega) = d_{3,m-1}(\mu) - g_m(\omega) = 0$$

et par l'exactitude centrale de $(\diamond_m)$, il existe $\nu \in \boldsymbol{A}_1^m$ vérifiant :

$$f_m(\nu) = \omega - d_{2,m-1}(\omega')\,,$$

et comme f_m est injective et que $\omega - d_{2,m-1}(\omega')$ est un m-cocycle, ν l'est également et sa classe de cohomologie $\bar{\nu}$ à comme image par $h(f)_m$ la classe de $\omega - d_{2,m-1}(\omega')$ qui est bien $\bar{\omega}$.

Enfin la dépendance fonctorielle des suites $(\diamond\diamond_m)$ est claire d'après les développements des paragraphes précédents. ∎

5.2.1-4. Remarque : La méthode de démonstration du lemme précédent qui consiste à poursuivre dans un diagramme des éléments, leurs images, relèvements et différentielles est connu sous le nom de

«chasse aux diagrammes». La démonstration en question peut être visualisée par :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \omega' & \xrightarrow{\quad g_{m-1}\quad} & \mu & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d_{2,m-1}} & & \downarrow{\scriptstyle d_{3,m-1}} & & \\
0 \to \nu \in \boldsymbol{A}_1^m & \xrightarrow{f_m} & \begin{cases} d_{2,m-1}(\omega') & \xrightarrow{\quad g_m\quad} \\ \omega & \in \boldsymbol{A}_2^m \end{cases} & & g_m(\omega) \in \boldsymbol{A}_3^m \to 0 & & \\
\downarrow{\scriptstyle d_{1,m}} & & \downarrow{\scriptstyle d_{2,m}} & & \downarrow{\scriptstyle d_{3,m}} & & \\
d_{1,m}(\nu) & \xrightarrow{\quad f_{m+1}\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad g_{m+1}\quad} & 0 & &
\end{array}$$

Le morphisme de liaison

Soit la suite exacte courte de complexes différentiels de $\mathcal{A}$-modules :

$$\mathbf{0} \to (\boldsymbol{A}_1^*, d_{1,*}) \xrightarrow{f(\boldsymbol{A})_*} (\boldsymbol{A}_2^*, d_{2,*}) \xrightarrow{g(\boldsymbol{A})_*} (\boldsymbol{A}_3^*, d_{3,*}) \to \mathbf{0}\ . \qquad (f(\boldsymbol{A}), g(\boldsymbol{A}))$$

Le but de ce paragraphe est de définir **fonctoriellement** par rapport à la catégorie des suites exactes de complexes différentiels, des familles de morphismes $\{c(f(\boldsymbol{A}), g(\boldsymbol{A}))_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$, dits «de liaison» :

$$h^m(\boldsymbol{A}_1^*) \xrightarrow{h(f)_m} h^m(\boldsymbol{A}_2^*) \xrightarrow{h(g)_m} h^m(\boldsymbol{A}_3^*) \xrightarrow{c(f(\boldsymbol{A}),g(\boldsymbol{A}))_m} h^{m+1}(\boldsymbol{A}_1^*) \xrightarrow{h(f)_{m+1}} h^{m+1}(\boldsymbol{A}_2^*) \xrightarrow{h(g)_{m+1}} h^{m+1}(\boldsymbol{A}_3^*)$$

rendant la suite longue résultante ***exacte***.

La définition la plus élémentaire procède par une chasse aux diagrammes sur une suite exacte de complexes donnée $(f(\boldsymbol{A}), g(\boldsymbol{A}))$.

L'idée à la base est la suivante : Soit $\omega \in \mathfrak{Z}^m(\boldsymbol{A}_3)$ (un représentant d'une classe de cohomologie de $h^m(\boldsymbol{A}_3^*, d(\boldsymbol{A}_3)_*)$) ; comme g_m est surjective, il existe un relèvement $\mu \in \boldsymbol{A}_2^m$ de ω. On a alors $g_{m+1}(d(\mu)) = d(g_m(\mu)) = d(\omega) = 0$ et donc $d(\mu)$ et l'image par l'injection f_{m+1} d'un unique élément $\omega' \in \boldsymbol{A}^{m+1}$ dont la différentielle sera nulle puisque $f_{m+2}(d(\omega')) = d(f_{m+1}(\omega')) = d(d(\mu)) = 0$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mu & \xrightarrow{g_m} & \omega \in \mathfrak{Z}^m(\boldsymbol{A}_3) \to \mathbf{0} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d(\boldsymbol{A}_2)_m} & & \downarrow{\scriptstyle d(\boldsymbol{A}_3)_m} \\
\omega' \in \mathfrak{Z}^{m+1}(\boldsymbol{A}_1) & \xrightarrow{f_{m+1}} & d(\mu) & \xrightarrow{g_{m+1}} & 0
\end{array} \qquad (\mathcal{D}_1)$$

On aura remarqué que dans cette procédure le seul choix non canonique concerne le relèvement μ de ω. Or, dû à l'exactitude centrale de nos suites, tout autre choix différera de μ par un élément de la forme $f(\varepsilon)$. Mais alors l'injectivité de f_{m+1} permet de voir que le cocycle de $\mathfrak{Z}^{m+1}(\boldsymbol{A}_1)$ obtenu sera $\omega' + d(\varepsilon)$.

$$\begin{array}{ccccc}
\varepsilon \in \boldsymbol{A}_1^m & \xrightarrow{f_m} & \mu + f(\varepsilon) & \xrightarrow{g_m} & \omega \in \mathfrak{Z}^m(\boldsymbol{A}_3) \to \mathbf{0} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d(\boldsymbol{A}_2)_m} & & \downarrow{\scriptstyle d(\boldsymbol{A}_3)_m} \\
\omega' + d(\varepsilon) & \xrightarrow{f_{m+1}} & d(\mu) + d(f(\varepsilon)) & \xrightarrow{g_{m+1}} & 0
\end{array} \qquad (\mathcal{D}_2)$$

Ce procédé permet donc bien de définir un homomorphisme de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$c_m : \mathfrak{Z}^{m+1}(\boldsymbol{A}_3) \longrightarrow \frac{\mathfrak{Z}^{m+1}(\boldsymbol{A}_1)}{\mathfrak{B}^{m+1}(\boldsymbol{A}_1)}$$

Montrons maintenant que c_m est nul lorsque restreint à $\mathfrak{B}^m(\boldsymbol{A}_3)$. Supposons $\omega = d(\varphi) =$, alors la surjectivité de g_{m-1} permet de relever φ en un élément $\psi \in \boldsymbol{A}_2^{m-1}$ de sorte que $\omega = f_m(d_{m-1}(\psi))$.

Nous pouvons donc prendre $\mu = d_{m-1}(\psi)$ dans le diagramme $(\mathcal{D}_1)$, auquel cas $d_m(\mu) = 0$ et $\omega' = 0$.

On note alors $c_m(f(\boldsymbol{A}), g(\boldsymbol{A}))$ l'application induite par c_m en cohomologie ; elle sera appelée «morphisme de liaison des suites de cohomologie associées à $(f(\boldsymbol{A}), g(\boldsymbol{A}))$». La correspondance :

$$\big(f(\boldsymbol{A}), g(\boldsymbol{A})\big) \rightsquigarrow \Big(h^m(\boldsymbol{A}_3^*, d_*) \xrightarrow{c_m(f(\boldsymbol{A}),g(\boldsymbol{A}))} h^{m+1}(\boldsymbol{A}_1^*, d_*)\Big)$$

dépend fonctoriellement de la catégorie des suites exactes de complexes différentiels de $\boldsymbol{A}$-modules. Ceci signifie que si $(\alpha_{1,*}, \alpha_{2,*}, \alpha_{3,*}) : (f(\boldsymbol{A}), g(\boldsymbol{A})) \to (f(\boldsymbol{B}), g(\boldsymbol{B}))$ est un morphisme de suites exactes, les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} h^m(\boldsymbol{A}_3^*, d_*) & \xrightarrow{c_m(f(\boldsymbol{A}),g(\boldsymbol{A}))} & h^{m+1}(\boldsymbol{A}_1^*, d_*) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h(\alpha_3)_m} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h(\alpha_1)_{m+1}} \\ h^m(\boldsymbol{B}_3^*, d_*) & \xrightarrow{c_m(f(\boldsymbol{B}),g(\boldsymbol{B}))} & h^{m+1}(\boldsymbol{B}_1^*, d_*) \end{array}$$

sont commutatifs, pour tout $m \in \mathbb{Z}$. C'est un fait que l'on vérifie aisément en remarquant que toute chasse aux diagrammes liée à la suite $(f(\boldsymbol{A}), g(\boldsymbol{A}))$ se transforme à l'aide des morphismes $(\alpha_{1,*}, \alpha_{2,*}, \alpha_{3,*})$ en une chasse aux diagrammes équivalente pour $(f(\boldsymbol{B}), g(\boldsymbol{B}))$.

5.2.1-5. Proposition et terminologie : *La correspondance qui associe à une suite exacte courte de complexes différentiels de $\mathcal{A}$-modules $(f(\boldsymbol{A}), g(\boldsymbol{A}))$:*

$$\mathbf{0} \to (\boldsymbol{A}_1^*, d_{1,*}) \xrightarrow{f(\boldsymbol{A})_*} (\boldsymbol{A}_2^*, d_{2,*}) \xrightarrow{g(\boldsymbol{A})_*} (\boldsymbol{A}_3^*, d_{3,*}) \to \mathbf{0}\ . \tag{$\triangle$}$$

la suite longue :

$$h^m(\boldsymbol{A}_1^*) \xrightarrow{h(f)_m} h^m(\boldsymbol{A}_2^*) \xrightarrow{h(g)_m} h^m(\boldsymbol{A}_3^*) \xrightarrow{c(f(\boldsymbol{A}),g(\boldsymbol{A}))_m} h^{m+1}(\boldsymbol{A}_1^*) \xrightarrow{h(f)_{m+1}} h^{m+1}(\boldsymbol{A}_2^*) \xrightarrow{h(g)_{m+1}} h^{m+1}(\boldsymbol{A}_3^*) \tag{$\triangle\triangle$}$$

dépend fonctoriellement des données de la catégorie des suites exactes de complexes de $\mathcal{A}$-modules. La suite $(\triangle\triangle)$ est elle-même une suite exacte ; on l'appelle «la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte $(\triangle)$».

Démonstration : D'après le lemme 5.2.1-3, il suffira de démontrer son exactitude au niveau des termes concernés par le morphisme de liaison.

Exactitude en $h^m(\boldsymbol{A}_3^*)$. Reprenons le diagramme $(\mathcal{D}_1)$ de la définition du morphisme de liaison et supposons que ω' est un cobord, *i.e.* $\omega' = d(\zeta)$ pour un certain $\zeta \in \boldsymbol{A}_1^m$. L'élément $\mu - f_m(\zeta)$ est alors également un relèvement du cocycle ω, mais c'est maintenant aussi un cocycle de $\boldsymbol{A}_2^*$ de sorte que la classe de cohomologie de ω est l'image par $h(g)_m$ de la classe de cohomologie de $\mu - f_m(\zeta)$.

$$\begin{array}{ccccc} \zeta \in \boldsymbol{A}_1^m & \xrightarrow{f_m} & \mu\ [-f_m(\zeta)] & \xrightarrow{g_m} & \omega \in \mathfrak{Z}^m(\boldsymbol{A}_3) \to \mathbf{0} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle d(\boldsymbol{A}_1)_m} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d(\boldsymbol{A}_2)_m} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d(\boldsymbol{A}_3)_m} \\ d(\zeta) = \omega' & \xrightarrow{f_{m+1}} & d(\mu)\ [-df(\zeta) = 0] & \xrightarrow{g_{m+1}} & 0 \end{array}$$

Exactitude en $h^{m+1}(\boldsymbol{A}_1^*)$. Elle est presque tautologique. En effet, soit $\omega' \in \mathfrak{Z}^{m+1}(\boldsymbol{A}_1)$ un cocycle tel que $f_{m+1}(\omega')$ est un cobord, *i.e.* $f_{m+1}(\omega') = d_m(\mu)$, pour un certain $\mu \in \boldsymbol{A}_2^m$. En posant $\omega = g_m(\mu)$, on retrouve très exactement la définition de l'action du morphisme de liaison $c(f,g)_m$ et la relation entre les classes de

cohomologie $\bar{\omega}' = c(f,g)_m(\bar{\omega})$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mu & \xmapsto{g_m} & \omega \in \mathfrak{Z}^m(\boldsymbol{A}_3) \to \mathbf{0} \\ & & \downarrow{\scriptstyle d(\boldsymbol{A}_2)_m} & & \downarrow{\scriptstyle d(\boldsymbol{A}_3)_m} \\ \omega' \in \mathfrak{Z}^{m+1}(\boldsymbol{A}_1) & \xmapsto{f_{m+1}} & d(\mu) & \xmapsto{g_{m+1}} & 0 \end{array}$$

■

5.2.1-6. Corollaire et terminologie : *Pour toute variété $\boldsymbol{M}$ et toute paire d'ouverts (U_1, U_2), les suites courtes exactes de Mayer-Vietoris* $\mathbf{MV}(U_1,U_2)$ *et* $\mathbf{MV}_{\mathrm{c}}(U_1,U_2)$ ([26]) *donnent lieu aux« suites exactes longues de Mayer-Vietoris » :*

$$\cdots \xrightarrow{c_{m-1}} H^m_{\mathrm{DR}}(U_1\cup U_2) \longrightarrow H^m_{\mathrm{DR}}(U_1)\oplus H^m_{\mathrm{DR}}(U_2) \longrightarrow H^m_{\mathrm{DR}}(U_{12}) \xrightarrow{c_m} H^{m+1}_{\mathrm{DR}}(U_1\cup U_2) \longrightarrow H^{m+1}_{\mathrm{DR}}(U_1)\oplus H^{m+1}_{\mathrm{DR}}(U_2) \longrightarrow H^{m+1}_{\mathrm{DR}}(U_{12}) \xrightarrow{c_{m+1}} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{c_{m-1}} H^m_{\mathrm{DR,c}}(U_{12}) \longrightarrow H^m_{\mathrm{DR,c}}(U_1)\oplus H^m_{\mathrm{DR,c}}(U_2) \longrightarrow H^m_{\mathrm{DR,c}}(U_1\cup U_2) \xrightarrow{c_m} H^{m+1}_{\mathrm{DR,c}}(U_{12}) \longrightarrow H^{m+1}_{\mathrm{DR,c}}(U_1)\oplus H^{m+1}_{\mathrm{DR,c}}(U_2) \longrightarrow H^{m+1}_{\mathrm{DR,c}}(U_1\cup U_2) \xrightarrow{c_{m+1}} \cdots$$

5.3 Compatibilité entre le morphisme de dualité et le morphisme de liaison

Rappelons la définition du morphisme de dualité donnée en 4.5 Pour toute variété orientable $\boldsymbol{M}$ de dimension d admettant des partitions de l'unité, on pose, pour chaque $r \in \mathbb{N}$ vérifiant $r \leqslant d$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}(\boldsymbol{M})_r : H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}),\mathbb{R}) \\ \omega & \longmapsto & \left(\nu \mapsto \displaystyle\int_{\boldsymbol{M}} \omega\wedge\nu\right) \end{array}$$

où ω et ν désignent des représentants "forme différentielle" (des cocycles) de classes de cohomologie.

Ces morphismes interviennent dans les suites exactes longues de Mayer-Vietoris de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \xrightarrow{c_{r-1}} & H^r_{\mathrm{DR}}(U_1\cup U_2) & \longrightarrow & H^r_{\mathrm{DR}}(U_1) & \oplus & H^r_{\mathrm{DR}}(U_2) & \longrightarrow & H^r_{\mathrm{DR}}(U_{12}) & \xrightarrow{c_r} & \\ & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{D}_r(U_1\cup U_2)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{D}_r(U_1)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{D}_r(U_2)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{D}_r(U_{12})} & & \\ \xrightarrow{c^\vee_{d-r}} & H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(U_1\cup U_2)^\vee & \longrightarrow & H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(U_1)^\vee & \oplus & H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(U_2)^\vee & \longrightarrow & H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(U_{12})^\vee & \xrightarrow{c^\vee_{d-r-1}} & \end{array}$$

$$(\mathbf{I}_r) \qquad (\mathbf{II}_r) \qquad (\mathbf{III}_r)$$

où nous avons noté $H^r_{\mathrm{DR,c}}(_)^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H^r_{\mathrm{DR,c}}(_),\mathbb{R})$, et, pour toute application linéaire $f : V_1 \to V_2$ entre deux espaces vectorielles, on désigne par $f^\vee : V_2^\vee \to V_1^\vee$ l'application transposée de f, *i.e.* $f^\vee(\gamma) = \gamma \circ f$, pour tout $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_2,\mathbb{R})$.

[26] Voir page 82.

Commutativité des sous-diagrammes ($\mathbf{I}_r$)
Soit ω un cocycle de $\Omega^r(U_1\cup U_2)$ et comparons les couples :

$$\Big(\mathcal{D}_r(U_1)\big(\rho_{U_1}^{U_1\cup U_2}(\omega)\big), \mathcal{D}_r(U_2)\big(\rho_{U_2}^{U_1\cup U_2}(\omega)\big)\Big) \quad \text{et} \quad \Big(\iota_{U_1}^{U_1\cup U_2}{}_!\big(\mathcal{D}_r(U_1\cup U_2)(\omega)\big)^\vee, \iota_{U_1}^{U_1\cup U_2}{}_!\big(\mathcal{D}_r(U_1\cup U_2)(\omega)\big)^\vee\Big)$$

pour tout couple (ν_1,ν_2) de cocycles de $\Omega_{\mathrm{c}}^{d-r}(U_1)\oplus\Omega_{\mathrm{c}}^{d-r}(U_2)$, on a :

$$\Big(\mathcal{D}_r(U_1)\big(\rho_{U_1}^{U_1\cup U_2}(\omega)\big)(\nu_1), \mathcal{D}_r(U_2)\big(\rho_{U_2}^{U_1\cup U_2}(\omega)\big)(\nu_2)\Big) = \Big(\int_{U_1}\rho_{U_1}^{U_1\cup U_2}(\omega)\wedge\nu_1, \int_{U_2}\rho_{U_2}^{U_1\cup U_2}(\omega)\wedge\nu_2\Big)$$

et

$$\Big(\iota_{U_1}^{U_1\cup U_2}{}_!\big(\mathcal{D}_r(U_1\cup U_2)(\omega)\big)^\vee(\nu_1), \iota_{U_1}^{U_1\cup U_2}{}_!\big(\mathcal{D}_r(U_1\cup U_2)(\omega)\big)^\vee(\nu_2)\Big) = \Big(\int_{U_1\cup U_2}\omega\wedge\iota_{U_1}^{U_1\cup U_2}{}_!(\nu_1), \int_{U_1\cup U_2}\omega\wedge\iota_{U_2}^{U_1\cup U_2}{}_!(\nu_2)\Big)$$

où les termes de droite de deux égalités précédentes coïncident d'après le lemme 4.5.1-1 et prouvent la commutativité des diagrammes ($\mathbf{I_r}$).

Commutativité des sous-diagrammes ($\mathbf{II}_r$)
Comme dans le cas précédent, soient des cocycles $\omega_i\in\Omega^r(U_i)$ et comparons :

$$\mathcal{D}_r(U_{12})\big(\rho_{U_{12}}^{U_1}(\omega_1)-\rho_{U_{12}}^{U_2}(\omega_2)\big) \quad \text{et} \quad \Big(\iota_{U_{12}!}^{U_1}\big(\mathcal{D}_r(U_1)(\omega_1)\big)^\vee - \iota_{U_{12}!}^{U_2}\big(\mathcal{D}_r(U_2)(\omega_2)\big)^\vee\Big).$$

Pour chaque $\nu\in\Omega_{\mathrm{c}}^r(U_{12})$, on aura :

$$\mathcal{D}_r(U_{12})\big(\rho_{U_{12}}^{U_1}(\omega_1)-\rho_{U_{12}}^{U_2}(\omega_2)\big)(\nu) = \int_{U_{12}}\rho_{U_{12}}^{U_1}(\omega_1)\wedge\nu - \int_{U_{12}}\rho_{U_{12}}^{U_2}(\omega_2)\wedge\nu$$

et

$$\iota_{U_{12}!}^{U_1}\big(\mathcal{D}_r(U_1)(\omega_1)\big)^\vee(\nu) - \iota_{U_{12}!}^{U_2}\big(\mathcal{D}_r(U_2)(\omega_2)\big)^\vee(\nu) = \int_{U_1}\omega_1\wedge\iota_{U_{12}!}^{U_1}(\nu) - \int_{U_2}\omega_2\wedge\iota_{U_{12}!}^{U_2}(\nu)$$

où nous retrouvons, à nouveau, égalité des termes de droite (*loc. cit.* 4.5.1-1), et donc commutativité des diagrammes ($\mathbf{II_r}$).

Commutativité des sous-diagrammes ($\mathbf{III}_r$)
Ces sous-diagrammes sont les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{DR}}^r(U_{12}) & \xrightarrow{c_r} & H_{\mathrm{DR}}^{r+1}(U_1\cup U_2) \\ {\scriptstyle\mathcal{D}_r(U_{12})}\downarrow & (\mathbf{III}_r) & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{D}_{r+1}(U_1\cup U_2)} \\ H_{\mathrm{DR,c}}^{d-r}(U_{12})^\vee & \xrightarrow{c_{d-(r+1)}^\vee} & H_{\mathrm{DR,c}}^{d-(r+1)}(U_1\cup U_2)^\vee \end{array}$$

Soit ω un cocycle de $\Omega^r(U_{12})$, la définition de l'application de liaison c_r demande à exprimer ω comme la différence de la restriction à U_{12} de deux formes différentielles $\omega_i\in\Omega^r(U_i)$ (pas forcément cocycliques) ; les formes $d(\omega_1)$ et $d(\omega_2)$ se recollent en un cocycle de $\Omega^{r+1}(U_1\cup U_2)$, c'est le cocycle $c_r(\omega)$ que nous allons noter provisoirement : $d\omega_1\veebar d\omega_2$. On a alors, pour tout cocycle $\nu\in\Omega_{\mathrm{c}}^{d-(r+1)}(U_1\cup U_2)$:

$$\mathcal{D}_{r+1}(U_1\cup U_2)(c_r(\omega))(\nu) = \int_{U_1\cup U_2}(d\omega_1\veebar d\omega_2)\wedge\nu$$

On exprime alors ν comme ***somme*** de deux formes différentielles ν_1 et ν_2 à support compacts respectivement contenus dans U_1 et U_2 (tel que procède la définition de l'application de liaison) ;

on a alors

$$\begin{aligned}\int_{U_1\cup U_2}(d\omega_1 \veebar d\omega_2)\wedge\nu &= \int_{U_1\cup U_2}(d\omega_1 \veebar d\omega_2)\wedge\nu_1 + \int_{U_1\cup U_2}(d\omega_1 \veebar d\omega_2)\wedge\nu_1\\ &=_1 \int_{U_1} d\omega_1\wedge\nu_1 + \int_{U_1} d\omega_2\wedge\nu_2\\ &\overset{\text{ST}}{=}_2 (-1)^{r+1}\int_{U_1}\omega_1\wedge d\nu_1 + (-1)^{r+1}\int_{U_2}\omega_2\wedge d\nu_2\\ &=_3 (-1)^{r+1}\Big(\int_{U_{12}}\omega_1\wedge d\nu_1 + \int_{U_{12}}\omega_2\wedge d\nu_2\Big)\\ &=_4 (-1)^{r+1}\int_{U_{12}}\big(\omega_1-\omega_2\big)\wedge d\nu_1\\ &=_5 (-1)^{r+1}\int_{U_1\cup U_2}\omega\wedge d\nu_1 = (-1)^{r+1}c_{d-(r+1)}\big(\mathcal{D}_r(\omega)\big)(\nu)\end{aligned}$$

où les égalités se justifient par :

1) puisque ν_i a son support dans U_i ;
2) application du théorème de Stokes ;
3) les cocycles $d\nu_i$ sont à support dans U_{12} ;
4) puisque $d\nu_1 = -d\nu_2$ sur U_{12} ;
5) puisque $\omega = \omega_1 - \omega_2$ et par définition du morphisme de liaison sur les formes à support compact.

Nous obtenons ainsi l'égalité :

$$\boxed{\mathcal{D}_{r+1}\circ c_r = (-1)^{r+1}c^\vee_{d-(r+1)}\circ\mathcal{D}_r}$$

Le morphisme de dualité vu comme morphisme de complexes
Les résultats des paragraphes précédents montrent que si dans la suite exacte longue de Mayer-Vietoris à supports compacts, on modifie le signe de l'application de liaison $c^\vee_r$ par un facteur $(-1)^{d-r}$, le morphisme de dualité devient un morphisme de complexes.

———————×———————

§6. Lemmes de Poincaré

Nous allons travailler simultanément sur les catégories des variétés différentiables réelles et des variétés analytiques réelles et complexes. Le mot «variété» désignera un objet de l'une ou l'autre catégorie. De même, on notera Ω^* le complexe des formes différentielles réelles Ω^*_{diff} ou celui des formes analytiques réelles $\Omega^*_{\text{ann}(\mathbb{R})}$ ou holomorphes (analytiques complexes) $\Omega^*_{\text{ann}(\mathbb{C})} = \Omega^*_{\text{hol}}$, et H_{DR} leurs cohomologies. Enfin, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant le cas.

6-1. Lemme (de base) : *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété et munissons $\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}$ de la structure de variété produit. Considérons pour chaque $z\in\mathbb{K}$, le morphisme (propre) :*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &\xrightarrow{\ \iota_z\ } \mathbb{K}\times\boldsymbol{M}\\ m &\longmapsto (z,m)\,.\end{aligned}$$

Le morphisme "image inverse" en cohomologie :

$$\iota_z^* : H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}) \longrightarrow H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \ ,$$

et dans le cas réel différentiable :

$$\iota_z^* : H^*_{\mathrm{DR,c}}(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}) \longrightarrow H^*_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}) \ ,$$

sont indépendants *de l'élément* $z \in \mathbb{K}$.

Démonstration : Commençons par rappeler que la structure de variété de $\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}$ est donnée, par définition, par l'atlas construit à partir de l'atlas complet $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de $\boldsymbol{M}$, en prenant comme cartes les paires $(\mathbb{K}\times U_\alpha, \mathrm{id}_\mathbb{K}\times\varphi_\alpha)$, pour $\alpha \in \mathfrak{A}$. Les morphismes de transition sont alors "scindés", *i.e.* de la forme $\mathrm{id}_\mathbb{K}\times(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})$. Ce scindage induit une décomposition *canonique* du complexe de de Rham $\Omega^*(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$. Pour montrer cela, supposons $\boldsymbol{M}$ de dimension n, notons $(x_1,\ldots,x_n)$ les coordonnées d'un point $\bar{x}$ de $\mathbb{K}^n$ et z un élément de $\mathbb{K}$. Considérons une forme $\omega \in \Omega^r(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$; son représentant dans une carte $(\mathbb{K}\times U_\alpha, \mathrm{id}_\mathbb{K}\times\varphi_\alpha)$ s'écrit :

$$\omega_\alpha = \sum_{I=(i_1<\ldots<i_r)} A^I_\alpha(z,\bar{x})\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r} + \Big[\sum_{J=(i_1<\ldots<i_{r-1})} B^J_\alpha(z,\bar{x})\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{r-1}}\Big]\wedge dz \,, \qquad (1)$$

où $A^I_\alpha, B^J_\alpha \in \Omega^0(\mathbb{K}\times U_\alpha)$ et I, J désignent des multi-indices $(1 \leqslant i_1 < \cdots < i_* \leqslant n)$, où $i_j = 1,\ldots,n$. Cette expression admet la forme condensée suivante :

$$\omega_\alpha = \boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(z)\wedge dz \,, \qquad (2)$$

où $\boldsymbol{\mathcal{A}}(z)$ désigne le premier terme de (1) et peut être interprété comme une famille d'éléments de $\Omega^r\big(\varphi_\alpha(U_\alpha)\big)$ paramétrée par z (et de manière analogue pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(z)$). De plus, si l'on fixe un point $\bar{x}_0 \in \mathbb{K}^n$, les correspondances $z \mapsto \boldsymbol{\mathcal{A}}(z)(\bar{x}_0) \in \boldsymbol{\mathcal{A}}^r(\mathbb{K}^n)$ et $z \mapsto \boldsymbol{\mathcal{B}}(z)(\bar{x}_0) \in \boldsymbol{\mathcal{A}}^{r-1}(\mathbb{K}^n)$ sont respectivement différentiables ou analytiques.

Ceci étant, soit $(\mathbb{K}\times U_\beta, \mathrm{id}_\mathbb{K}\times\varphi_\beta)$ une autre carte ; le représentant ω_β sera contraint de satisfaire à l'égalité :

$$\omega_\alpha = \big(\mathrm{id}_\mathbb{K}\times\phi_{\beta,\alpha}\big)^*(\omega_\beta) \,,$$

où $\phi_{\beta,\alpha} = \varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$, et, compte tenu du scindage du morphisme de transition, on aura :

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z) = \phi^*_{\beta,\alpha}(\boldsymbol{\mathcal{A}}_\beta(z)) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(z) = \phi^*_{\beta,\alpha}(\boldsymbol{\mathcal{B}}_\beta(z)) \,.$$

On en tire les conséquences suivantes :

- Les familles $\{\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ et $\{\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(z)\wedge dz\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ définissent des éléments *canoniques* de $\Omega^r(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$, respectivement notés $\omega_{\mathbf{h}}$ et $\omega_{\mathbf{v}}$, et appelés «composante horizontale» et «composante verticale» de ω. De même, la famille $\{\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(z)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ définit une forme de $\Omega^{r-1}(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$ et, enfin, pour chaque $z \in \mathbb{K}$ fixé, les familles $\{\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ et $\{\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(z)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ définissent des formes de $\Omega^r(\boldsymbol{M})$ et $\Omega^{r-1}(\boldsymbol{M})$ respectivement.

  On a donc une décomposition *directe* de $\Omega^*(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$:

$$\Omega^*(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}) = \Omega^*(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})_{\mathbf{h}} \oplus \Omega^*(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})_{\mathbf{v}} = \Omega^*(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})_{\mathbf{h}} \oplus \Omega^{*-1}(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})_{\mathbf{h}}\wedge dz \,,$$

  (la forme dz étant l'élément de $\Omega^1(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$ défini par la projection canonique $\mathbb{K}\times\boldsymbol{M} \to \mathbb{K}$, vue comme élément de $\Omega^0(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$).

  On observera que suite à la décomposition $\omega = \omega_{\mathbf{h}} \oplus \omega_{\mathbf{v}}$ on aura la relation de supports : $|\omega| = |\omega_{\mathbf{h}}| \cup |\omega_{\mathbf{v}}|$, et par conséquent, ω est à support compact, si et seulement si, $\omega_{\mathbf{h}}$ et $\omega_{\mathbf{v}}$ le sont.

  Notons $d_{\boldsymbol{M}}$ l'opérateur qui associe à $\omega \in \Omega^r(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$ l'élément $d_{\boldsymbol{M}}(\omega) := d(\omega)_{\mathbf{h}}$. L'inspection de $d_{\boldsymbol{M}}$, à l'aide de cartes, met en évidence les égalités suivantes pour $\omega = \omega_1 + \omega_2\wedge dz$, où les ω_i désignent des formes horizontales :

$$d(\omega) = d_{\boldsymbol{M}}(\omega) + (-1)^r\tfrac{\partial}{\partial z}(\omega)\wedge dz = d_{\boldsymbol{M}}(\omega_1) + \big[d_{\boldsymbol{M}}(\omega_2) + (-1)^r\tfrac{\partial}{\partial z}(\omega_1)\big]\wedge dz \,.$$

On vérifie, toujours grâce au scindage des application de transition, que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial z}$ a un sens en tant qu'opérateur sur $\Omega^*(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$ (dérivation de degré 0) et que :

$$\boxed{d(\omega)=0,\quad \text{si et seulement si,}\quad d_{\boldsymbol{M}}(\omega_1)=0\quad\text{et}\quad d_{\boldsymbol{M}}(\omega_2)=(-1)^{r-1}\tfrac{\partial}{\partial z}(\omega_1)} \tag{3}$$

▸ Pour chaque $z\in\mathbb{K}$ fixé, considérons le morphisme $\boldsymbol{M}\xrightarrow{\iota_z}\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}$, défini par $m\mapsto(z,m)$. Soit $\omega\in\Omega^r(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$; on pose $\omega=\omega_1+\omega_2\,dz$, où les ω_i sont des formes horizontales. On a alors : $\iota_z^*(\omega)=\iota_z^*(\omega_1)$.

La démonstration du lemme résultera alors de prouver que lorsque ω est un cocycle, les formes $\iota_{z_1}^*(\omega_1)$ et $\iota_{z_0}^*(\omega_1)$ son cohomologues, quels que soient $z_0,z_1\in\mathbb{K}$.

Raisonnons dans un premier temps sur une carte $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ de $\boldsymbol{M}$ avec le représentant de ω, écrit sous la forme (2) : $\boldsymbol{\mathcal{A}}(z)+\boldsymbol{\mathcal{B}}(z)\wedge dz$. Nous cherchons alors à comparer $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z_1)(\bar{x})$ et $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z_0)(\bar{x})$, pour tout $\bar{x}\in\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Or, pour chaque $\bar{x}\in\varphi(U_\alpha)$ fixe, l'application $z\mapsto\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z)(\bar{x})$ est différentiable et à valeurs dans l'espace vectoriel de dimension finie $\boldsymbol{\mathcal{A}}^r(\mathbb{K}^n)$; par conséquent, si $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ est une application différentiable telle que $\gamma(0)=z_0$ et $\gamma(1)=z_1$ (facile à construire), on aura pour ω *cocyclique* :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z_1)(\bar{x})-\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z_0)(\bar{x})&=\int_0^1\tfrac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(\gamma(t))(\bar{x})\right]dt=\int_0^1\left[\tfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(\gamma(t))\right](\bar{x})\,\gamma'(t)\,dt\\&=(-1)^r\int_0^1 d\left[\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(\gamma(t))\right](\bar{x})\,\gamma'(t)\,dt=(-1)^r d\left[\int_0^1\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\right](\bar{x}),\end{aligned}$$

d'après (3). Les théorèmes classiques de différentiabilité ou analyticité par rapport à $\bar{x}$ lors d'une intégration sur un compact par rapport à la variable t *indépendante* des x_i, peuvent être appliqués pour conclure que la forme $\int_0^1\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$ est respectivement différentiable ou analytique suivant le contexte de travail. Enfin, la même analyse sur une carte (U_β,φ_β) aurait donné :

$$\int_0^1\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt=\int_0^1\phi_{\beta,\alpha}^*\left[\boldsymbol{\mathcal{B}}_\beta(\gamma(t))\right]\gamma'(t)\,dt=\phi_{\beta,\alpha}^*\left[\int_0^1\boldsymbol{\mathcal{B}}_\beta(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\right].$$

Ces intégrales dans les images des cartes de $\boldsymbol{M}$ définissent donc une forme "globale" $\nu_{[z_1,z_0]}\in\Omega^*(\boldsymbol{M})$ telle que $\iota_{z_1}^*\omega-\iota_{z_0}^*\omega=d(\nu_{[z_1,z_0]})$.

On remarquera, pour terminer, que la forme $\nu_{[z_1,z_0]}$ est à support compact lorsque ω l'est. ∎

6.1 Lemme de Poincaré pour la cohomologie de de Rham ordinaire

6.1-1. Corollaire [Lemme d'homotopie] : *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété et munissons $\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}$ de la structure de variété produit. Considérons la suite de morphismes de variétés :*

$$\begin{array}{ccccc}\boldsymbol{M}&\longrightarrow^{\iota_z}&\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}&\longrightarrow^{h}&\boldsymbol{M}\\ m&\longmapsto&(z,m)&&\end{array}$$

où $z\in\mathbb{K}$ est arbitraire, et notons $h_z:\boldsymbol{M}\to\boldsymbol{M}$, l'application composée $h\circ\iota_z$, i.e. *$h_z(m)=h(z,m)$.*

Le morphisme en cohomologie :

$$h_z^*:H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\longrightarrow H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}),$$

est alors indépendant *de l'élément $z\in\mathbb{K}$.*

Démonstration : Le morphisme h_z^* est la composition $\iota_z^*\circ h^*$ de deux morphismes indépendants de $z\in\mathbb{K}$.∎

6.1-2. Corollaire [Lemme de Poincaré] : *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété et munissons $\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}$ de la structure de variété produit. Le morphisme :*

$$\pi^*:H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\to H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}),$$

induit par la projection canonique $\pi : \mathbb{K}\times\boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{M}$, *est un* isomorphisme d'algèbres.

En particulier, si $\pi = \mathbb{K}^m \to \{0\} = \mathbb{K}^0$, *on a :*

$$\mathbb{K}[0] \equiv H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{K}^0) \xrightarrow[\equiv]{\pi^*} H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{K}^m)\,,$$

quel que soit $m \in \mathbb{N}$ ([27]).

Démonstration : On a $\mathrm{id}_{\boldsymbol{M}} = \pi \circ \iota_0$, ce qui entraîne que $\iota_0^* \circ \pi^* = \mathrm{id}$ et, par conséquent, que π^* est *injectif*.

D'autre part $\iota_0 \circ \pi$ est le morphisme de $\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}$ donné par $(z, m) \mapsto (0, m)$, et si nous considérons $h : \mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\boldsymbol{M} \to \mathbb{K}\times\boldsymbol{M}$ défini par $(z_1, z_2, m) \mapsto (z_1\, z_2, m)$; l'application $\iota_0 \circ \pi$ s'identifie à h_0. Le lemme d'homotopie justifie alors l'égalité : $(\iota_0 \circ \pi)^* = h_0^* = h_1^* (= \mathrm{id}^*_{\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}})$, et π^* est donc également *surjectif*.

La deuxième partie de l'assertion résulte alors d'un simple argument inductif. ∎

6.2 Lemme de Poincaré pour la cohomologie de de Rham à supports compacts

Le lemme de Poincaré de la section précédente montre que le morphisme "image inverse" $\pi^* : H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \to H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$, pour la projection canonique $\pi : \mathbb{R}\times\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$, est un isomorphisme. Lorsque l'on cherche à étudier le lien établi par π entre $H^*_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M})$ et $H^*_{\mathrm{DR,c}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$, on rencontre un premier obstacle : le morphisme π **n'est pas propre** et l'image inverse d'une forme différentielle non nulle à support compact **n'est jamais à support compact**. Il existe néanmoins un morphisme de complexes différentiels appelé "image directe", et aussi "intégration sur les fibres", noté $\pi_* : \Omega^*_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M}) \to \Omega^{*-1}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M})$, induisant un morphisme d'espaces vectoriels gradués :

$$\boxed{\pi_* : H^*_{\mathrm{DR,c}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M}) \to H^{*-1}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M})}$$

qui est un *isomorphisme*. Ce résultat est connu sous le nom de «Lemme de Poincaré pour la cohomologie de de Rham à supports compacts» ; c'est le but de cette section de le prouver.

6.2.1 Intégration sur les fibres. Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable (réelle), considérons la variété produit $\mathbb{R}\times\boldsymbol{M}$ et soit $\pi : \mathbb{R}\times\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ la projection canonique. On note $\Omega^*_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$ le sous-ensemble de $\Omega^*(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$ des formes différentielles ω telles que pour chaque $m \in \boldsymbol{M}$, il existe un voisinage $V_m \ni m$ dans $\boldsymbol{M}$ et un compact $\boldsymbol{K}_m \subseteq \mathbb{R}$ de telle sorte que $|\omega| \cap \mathbb{R}\times V_m \subseteq \boldsymbol{K}_m \times V_m$. Les éléments de $\Omega^*_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$ seront appelés «des formes différentielles de $\mathbb{R}\times\boldsymbol{M}$ à support compact le long des fibres».

On montre aisément alors que $\Omega^*_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$ est stable sous les opérations d'algèbre différentielle graduée de $\Omega^*(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$ et que par conséquent cet ensemble est une sous-algèbre différentielle graduée de $\Omega^*(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$; sa cohomologie sera notée $H^*_{\mathrm{DR,cv}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$.

Nous avons montré dans les sections précédentes que toute forme différentielle $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$ admet une décomposition globale canonique sous la forme $\omega = \omega_1 \wedge dt + \omega_2$, où les formes ω_i sont horizontales et comme cette décomposition est liée à une décomposition vectorielle de l'espace des

[27] Rappelons que pour chaque $r \in \mathbb{Z}$ et tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel W, la notation $W[r]$ désigne, dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels gradués, l'espace vectoriel gradué $\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} V^m$, où $V^m = \{0\}$ pour $m + r \neq 0$, et $V^{-r} = W$. On dit alors que $W[r]$ est «concentré» en degré $-r$.

formes alternées, les formes ω_i appartiennent également à $\Omega_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$. On défini alors le morphisme «image directe» ou d'«intégration sur les fibres»:

$$\begin{aligned}\pi_* : \Omega^m_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M}) &\longrightarrow \Omega^{m-1}(\boldsymbol{M})\\ \omega_1\wedge dt+\omega_2 &\longmapsto \int_{-\infty}^{\infty}\omega_1(u,\bar{x})\,du\end{aligned}$$

où le fait que l'on puisse se limiter à intégrer sur des compacts de $\mathbb{R}$ au voisinage de chaque $\bar{x}\in\boldsymbol{M}$, permet de voir que $\pi_*(\omega)$ est bien une forme différentielle (de classe $\mathcal{C}^\infty$) de $\boldsymbol{M}$.

6.2.1-1. Lemme: *Le morphisme "image directe" π_* est un morphisme de complexes différentiels,* i.e.

$$\pi_{m+1}\circ d(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})_m = d(\boldsymbol{M})_{m-1}\circ\pi_m\,,$$

pour tout $m\in\mathbb{Z}$.

Démonstration: Soit $\omega=\omega_1\wedge dt+\omega_2\in\Omega^m_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$, avec les ω_i horizontales. En gardant les notations des sections précédentes, on a:

$$d_m(\omega)=d_{\boldsymbol{M},m-1}(\omega_1)\wedge dt+(-1)^r\tfrac{\partial}{\partial t}(\omega_2)\wedge dt+d_{\boldsymbol{M},m}(\omega_2)\,,$$

et donc:

$$\pi_{m+1}(d_m(\omega))(\bar{x})=\int_{-\infty}^{\infty}d_{\boldsymbol{M},m-1}(\omega_1)(u,\bar{x})\,du+(-1)^r\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{\partial}{\partial t}(\omega_2)(u,\bar{x})\,du$$

où la deuxième intégrale est nulle puisque ω_2 est dans $\Omega_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$; en particulier et suite à la commutation de la différentiation et de l'intégration sur des compacts:

$$\pi_{m+1}(d_m(\omega))(\bar{x})=\int_{-\infty}^{\infty}d_{\boldsymbol{M}}(\omega_1)(u,\bar{x})\,du=d(\boldsymbol{M})_{m-1}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\omega_1(u,\bar{x})\,du\Big)=d(\boldsymbol{M})_{m-1}(\pi_m(\omega))$$ ∎

Soit maintenant $\delta\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ une fonction à support compact sur la droite réelle et notons:

$$\begin{aligned}\delta_* : \Omega^m(\boldsymbol{M}) &\longrightarrow \Omega^{m+1}_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})\\ \omega &\longmapsto \omega\wedge\big(\delta(t)\,dt\big)\,.\end{aligned}$$

On observera que $\delta_*(\Omega^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}))\subseteq\Omega^{*+1}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$. Le lemme suivant est alors immédiat puisque $\delta(t)\,dt$ est un cocycle de $\Omega^*_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$.

6.2.1-2. Lemme: *L'application δ_* est un morphisme de complexes différentiels de $\Omega^*(\boldsymbol{M})$ vers $\Omega^{*+1}_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$, de degré $+1$. Et de même, par restriction, de $\Omega^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M})$ vers $\Omega^{*+1}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$.*

6.2.1-3. Proposition [Lemme de Poincaré pour la cohomologie à supports compacts]: *Le morphisme de complexes d'"intégration sur les fibres" induit un morphisme en cohomologie:*

$$\begin{aligned}h(\pi)_* :\ H^*_{\mathrm{DR,cv}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M}) &\longrightarrow H^{*-1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\\ \omega=\omega_1\wedge dt+\omega_2 &\longmapsto \Big(\bar{x}\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_1(u,\bar{x})\,du\Big)\end{aligned}$$

*qui est **bijectif**; son inverse est réalisé par les morphismes $h(\delta)_*$, quel que soit $\delta\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ vérifiant $1=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u)\,du$. En particulier, le morphisme $h(\delta)_*$ est indépendant de la fonction δ choisie.*

De manière entièrement analogue, la restriction $h(\pi)_* : H^*_{\mathrm{DR,c}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M}) \to H^{*-1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})$, est un isomorphisme d'inverse δ_*.

Démonstration : La composition $\pi_* \circ \delta_*$ est donnée par :

$$\omega \longmapsto \omega \wedge (\delta(t)\,dt) \longmapsto \Big(\bar{x} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\bar{x}) \wedge \delta(u)\,du\Big) = \omega$$

le passage en cohomologie montre donc bien l'injectivité de $h(\delta)_*$. Montrons maintenant que ce dernier morphisme est également surjectif.

Pour ceci reprenons un élément $\omega = \omega_1 \wedge dt + \omega_2 \in \Omega^r_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$, où les ω_i sont horizontales, et rappelons que ω est un cocycle, si et seulement si :

$$d_{\boldsymbol{M}}(\omega_2) = 0 \quad \text{et} \quad d_{\boldsymbol{M}}(\omega_1) = -(-1)^r \tfrac{\partial}{\partial t}(\omega_2)\,,$$

en particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\omega_2(t,\bar{x}) &= \int_{-\infty}^{t} \tfrac{\partial}{\partial t}(\omega_2)(u,\bar{x})\,du = -(-1)^r \int_{-\infty}^{t} d_{\boldsymbol{M}}(\omega_1)(u,\bar{x})\,du \\ &= -(-1)^r d_{\boldsymbol{M}}\Big(\int_{-\infty}^{t} \omega_1(u,\bar{x})\,du\Big)\,.\end{aligned}$$

Étudions maintenant la forme différentielle de $\Omega^{r-1}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$ donnée par $\varpi(t,\bar{x}) = -(-1)^r \int_{-\infty}^{t} \omega_1(u,\bar{x})\,du$. On voit bien que pour chaque $\bar{x} \in \boldsymbol{M}$, il existe un voisinage $V_{\bar{x}}$ tel que $\varpi(t,\bar{y}) = 0$, pour t assez négatif et pour tout $\bar{y} \in V_{\bar{x}}$. De manière analogue, la forme ϖ est constante pour t assez positif, *i.e* il existe une forme $\alpha \in \Omega^{r-1}(\boldsymbol{M})$ telle que $\varpi(t,\bar{y}) = \pi^*(\alpha)(t,\bar{y})$ quels que soient $t \in \mathbb{R}$ assez positif et $\bar{y} \in V_{\bar{x}}$. Ces quelques remarques montrent que la forme différentielle :

$$\tilde{\omega}(t,\bar{x}) = -(-1)^r\Big(\int_{-\infty}^{t} \omega_1(u,\bar{x})\,du\Big) - \Big(\int_{-\infty}^{t} \delta(u)\,\alpha(\bar{x})\,du\Big)$$

est bien un élément de $\Omega^r_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$ dont la différentielle est :

$$\begin{aligned}d(\tilde{\omega})(t,\bar{x}) = -(-1)^r d_{\boldsymbol{M}}\Big(\int_{-\infty}^{t} \omega_1(u,\bar{x})\,du\Big) - (-1)^r(-1)^{r-1}\tfrac{\partial}{\partial t}\Big(\int_{-\infty}^{t} \omega_1(u,\bar{x})\,du\Big) \wedge dt \\ - d_{\boldsymbol{M}}\Big(\int_{-\infty}^{t} \delta(u)\,\alpha(\bar{x})\,du\Big) - \tfrac{\partial}{\partial t}\Big(\int_{-\infty}^{t} \delta(u)\,\alpha(\bar{x})\,du\Big) \wedge dt\end{aligned}$$

En développant et compte tenu du fait que α est cocyclique, on obtient :

$$d(\tilde{\omega})(t,\bar{x}) = \omega_2(t,\bar{x}) + \omega_1(t,\bar{x}) \wedge dt - \alpha(\bar{x}) \wedge (\delta(t)\,dt) = \omega(t,\bar{x}) - \delta_*(\alpha)(t,\bar{x})\,.$$

On conclut que tout cocycle de $\Omega^*_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$ est bien cohomologue à un cocycle de l'image de δ_*, ce qui prouve le surjectivité de $h(\delta)_*$.

On laisse aux soins du lecteur de vérifier que la même démonstration prouve que $h(\pi)_*$ établit également un isomorphisme entre $H^*_{\mathrm{DR,c}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$ et $H^{*-1}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M})$. ∎

6.2.1-4. Remarque : On prendra garde du fait que contrairement au morphisme "image inverse", l'intégration sur les fibres ***ne respecte pas*** le produit extérieur des formes différentiels et donc, n'établit pas de morphisme d'algèbres en cohomologie, il s'agit uniquement d'un morphisme d'espaces vectoriels gradués (homogène de degré -1).

6.2.1-5. Corollaire : *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'itération des intégrations sur les fibrés donne un isomorphisme :*

$$h(\pi)_* : H^*_{\mathrm{DR,c}}(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\equiv} H^{*-m}_{\mathrm{DR,c}}(\mathbb{R}^0) = H^{*-m}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^0) = \mathbb{R}[-m]\,.$$

———————×———————

§7. Dualité de Poincaré et finitude des nombres de Betti

Comme annoncé précédemment, nous monterons dans ce chapitre comment utiliser les suites de Mayer-Vietoris pour obtenir des conditions de finitude pour les dimensions des groupes de cohomologie de de Rham d'une variété (les nombres de Betti) ; et, lorsque la variété est compacte et orientable, pour prouver que le morphisme de dualité donne une dualité parfaite entre les groupes de cohomologie de de Rham de dimensions complémentaires.

On remarquera que ces deux derniers résultats sont immédiats, d'après les lemmes de Poincaré, pour $\mathbb{R}^d$ (et donc pour tout domaine de carte d'une variété) bien que cette variété ne soit pas compacte. L'idée des démonstrations de cette section consiste alors dans "le recollement" de propriétés "locales" (celles des domaines de cartes) en des propriétés "globale" (celles de la variété). On procède récursivement, à partir d'une carte, en rajoutant de nouvelles cartes, mais de façon à ce que les intersections soient, elles aussi, des domaines de cartes. Les suites exactes longues de Mayer-Vietoris vont permettre alors (modulo le "lemme des cinq" pour la dualité de Poincaré) de prouver les assertions en question pour la réunion des domaines cartes du type considéré. Une telle démonstration sera donc valable pour toute variété admettant un recouvrement "fini" $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ tel que toute intersection finie :

$$U_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r} := U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \cdots \cap U_{\alpha_r} \qquad \text{où } \alpha_i \in \mathfrak{A},$$

soit difféomorphe à $\mathbb{R}^d$. Un tel recouvrement est appelé un «bon recouvrement» et les théorèmes de cette section seront valables pour les variétés admettant de bons recouvrements **finis**. En particulier, les espaces vectoriels, les variétés compactes, les fibrés vectoriels à base compacte, auront des nombres de Betti finis. Dans le cas orientable, ces variétés vérifieront également le théorème de dualité de Poincaré qui affirme que le morphisme de dualité entre $H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\big(H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}),\mathbb{R}\big)$ est un isomorphisme ([28]). Ce dernier théorème sera ultérieurement généralisé à des variétés orientables arbitraires, mais une telle généralisation sera impossible pour la dualité parfaite et pour la finitude des nombres de Betti comme on s'en convainc aisément en considérant la variété "réunion disjointe d'une infinité de copies de $\mathbb{R}^d$". En effet, en posant $\boldsymbol{M} := \amalg_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^d$, on aura :

$$H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \equiv \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \quad \text{et} \quad H^d_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}) \equiv \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$$

où l'on a bien l'égalité :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\big(H^d_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M})\big) \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\Big(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}, \mathbb{R}\Big) \equiv \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \equiv H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})$$

alors que le morphisme canonique de bidualité β, ci-dessous, est connu pour ne pas être bijectif

[28] D'où une dualité parfaite entre $H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\big(H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}),\mathbb{R}\big)$ puisque les nombres de Betti sont finis.

dans ce cas :

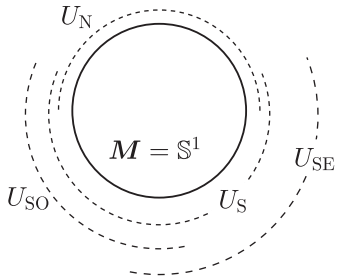
$$\begin{array}{ccc} H^d_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\big(H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}),\mathbb{R}\big) \\ \| & & \| \\ \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R} & \dashrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\Big(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R},\mathbb{R}\Big) \\ \| & & \| \\ \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R} & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\Big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\Big(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{R},\mathbb{R}\Big),\mathbb{R}\Big) \end{array}$$

7.1 Bons recouvrements

7.1-1. Définition : Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable de dimension d. Une famille d'ouverts $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ est dite une «bonne famille d'ouverts» lorsque l'intersection de toute sous-famille finie et non vide est soit vide, soit difféomorphe à $\mathbb{R}^d$.

On appelle «bon recouvrement pour $\boldsymbol{M}$» toute bonne famille d'ouverts de $\boldsymbol{M}$ qui recouvre $\boldsymbol{M}$.

7.1-2. Exemple : Dans la figure ci-dessous, la famille $\{U_{\mathrm{N}}, U_{\mathrm{S}}\}$ n'est pas bonne alors que $\{U_{\mathrm{N}}, U_{\mathrm{SE}}, U_{\mathrm{SO}}\}$ l'est.



Nous allons admettre le résultat suivant (*cf.* [B-T])

7.1-3. Proposition : *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété séparée et séparable. Pour tout recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de $\boldsymbol{M}$, il existe un bon recouvrement $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ de $\boldsymbol{M}$* subordonné à $\mathcal{U}$, i.e. *pour chaque $\beta\in\mathfrak{B}$, il existe $\alpha(\beta)\in\mathfrak{A}$ tel que $V_\beta \subseteq U_{\alpha(\beta)}$.*

7.2 Finitude des nombres de Betti

7.2-1. Théorème : *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable admettant un bon recouvrement fini. Les dimensions de ses groupes de cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{M}$ sont finies,* i.e. *:*

$$\dim_{\mathbb{R}}\big(H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\big) < \infty \quad \textit{et} \quad \dim_{\mathbb{R}}\big(H^r_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M})\big) < \infty\,,$$

pour tout $0 \leqslant r \leqslant d(\boldsymbol{M})$.

Démonstration : Nous allons prouver les deux assertions, simultanément, pour les réunions des bonnes familles d'ouverts finies et ceci par récurrence sur le cardinal des familles en question.

Lorsque la famille ne possède qu'un unique ouvert, celui-ci est difféomorphe à $\mathbb{R}^{d(\boldsymbol{M})}$ et les lemmes de Poincaré justifient l'assertion.

Supposons maintenant le théorème démontré pour toute réunion de bonne famille d'ouverts possédant au plus r-termes. Soit $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r, U_{r+1}\}$ une bonne famille d'ouverts de réunion notée U. La sous-famille $\mathcal{V} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ est également bonne, de réunion notée V. Nous savons alors, par hypothèse de récurrence, que les dimensions des groupes de cohomologie de V sont tous finis. Remarquons maintenant que $V \cap U_{r+1}$ est la réunion de la famille $\mathcal{V} \barwedge U_{r+1} := \{U_1 \cap U_{r+1}, \ldots, U_r \cap U_{r+1}\}$ qui est également bonne d'après le définition de bonne famille. Comme $\mathcal{V} \barwedge U_{r+1}$ possède r-termes, les dimensions des groupes de cohomologie de $V \cap U_{r+1}$ sont tous finis également d'après l'hypothèse de récurrence.

Ceci étant, l'inspection des suites longues de Mayer-Vietoris $\mathbf{MV}(V, U_{r+1})$ et $\mathbf{MV}_{\mathrm{c}}(V, U_{r+1})$ donne lieu aux suites exactes :

$$\begin{aligned} H^{j-1}_{\mathrm{DR}}(V \cap U_{r+1}) &\longrightarrow H^j_{\mathrm{DR}}(U) \longrightarrow H^j_{\mathrm{DR}}(V) \oplus H^j_{\mathrm{DR}}(U_{r+1}) \\ H^j_{\mathrm{DR,c}}(V) \oplus H^j_{\mathrm{DR,c}}(U_{r+1}) &\longrightarrow H^j_{\mathrm{DR,c}}(U) \longrightarrow H^{j+1}_{\mathrm{DR,c}}(V \cap U_{r+1}) \end{aligned}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. On en déduit la finitude des dimensions de $H^j_{\mathrm{DR,c}}(U)$ et $H^j_{\mathrm{DR}}(U)$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, et comme $\boldsymbol{M}$ possède un bon recouvrement **finie**, le théorème est démontré. ∎

7.3 Dualité de Poincaré

7.3-1. Théorème : *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété orientable de dimension d admettant un bon recouvrement fini. Les morphismes de dualité :*

$$\mathcal{D}_r(\boldsymbol{M}) : H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}, \mathbb{R})\right),$$

sont ***bijectifs****, pour tout $0 \leqslant r \leqslant d$.*

Démonstration : Nous allons montrer que l'assertion du théorème est vraie pour tout ouvert de $\boldsymbol{M}$ réunion d'une bonne famille finie d'ouverts de $\boldsymbol{M}$.

Soit U un ouvert de $\boldsymbol{M}$ difféomorphe à $\mathbb{R}^d$ muni de l'orientation induite par $\boldsymbol{M}$. On a :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_r(U) : H^r_{\mathrm{DR}}(U) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(U), \mathbb{R}\right) \\ \omega & \longmapsto & \left(\nu \mapsto \displaystyle\int_U \omega \wedge \nu\right) \end{array}$$

et nous savons que $H^*_{\mathrm{DR}}(U) \equiv \mathbb{R}[0]$ tandis que $H^*_{\mathrm{DR,c}}(U) \equiv \mathbb{R}[-d]$. L'assertion du théorème pour U résultera alors de montrer que $\mathcal{D}_0(U) \neq 0$, ou encore que $\mathcal{D}_0(U)(1) \neq 0$. Or, $\mathcal{D}_0(U)(1) = \left(\int_U : H^d_{\mathrm{DR,c}}(U) \to \mathbb{R}\right)$ est bien une forme linéaire non nulle.

Comme dans la démonstration de la finitude des nombres de Betti, nous supposerons le théorème démontré pour toute réunion de bonne famille d'ouverts possédant au plus r-termes. Soit $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r, U_{r+1}\}$ une bonne famille d'ouverts de réunion notée U. La sous-famille $\mathcal{V} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ étant également bonne, de réunion notée V, nous savons, par hypothèse de récurrence, que les morphisme $\mathcal{D}_r(V)$ sont tous bijectifs, et il en est de même pour la famille $\mathcal{V} \barwedge U_{r+1}$ et les morphisme $\mathcal{D}_r(V \cap U_{r+1})$.

Ceci étant reprenons les morphismes des suites longues de Mayer-Vietoris étudiés dans la section 5.3 mais pour les ouverts U, V et U_{r+1}

$$\begin{array}{ccccccccccc} \xrightarrow{c_{r-1}} & H^r_{\mathrm{DR}}(U) & \longrightarrow & H^r_{\mathrm{DR}}(V) & \oplus & H^r_{\mathrm{DR}}(U_{r+1}) & \longrightarrow & H^r_{\mathrm{DR}}(V \cap U_{r+1}) & \xrightarrow{c_r} & \\ & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{D}_r(U)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{D}_r(V)} & \equiv & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{D}_r(U_{r+1})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{D}_r(V \cap U_{r+1})} & \equiv & \\ \xrightarrow{c^\vee_{d-r}} & H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(U)^\vee & \longrightarrow & H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(V)^\vee & \oplus & H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(U_{r+1})^\vee & \longrightarrow & H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(V \cap U_{r+1})^\vee & \xrightarrow{c^\vee_{d-r-1}} & \end{array}$$

La dernière remarque de la section 5.3 justifie alors l'application du lemme des cinq qui affirme que les morphismes $\mathcal{D}_r(U)$ sont bijectifs, pour tout $r \in \mathbb{N}$. La variété $\boldsymbol{M}$ étant elle-même la réunion d'un bon recouvrement fini, le théorème est démontré. ∎

7.3-2. Remarque : Le théorème précédent montre que pour toute variété orientable $\boldsymbol{M}$ de dimension d admettant un bon recouvrement fini, l'accouplement :

$$\begin{array}{ccc} H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \oplus H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega, \nu) & \longmapsto & \displaystyle\int_{\boldsymbol{M}} \omega \wedge \nu \end{array}$$

définit une dualité *parfaite* entre des espaces vectoriels de dimension finie. C'est le sens de l'expression "Dualité de Poincaré" qui est ainsi démontrée pour toute variété compacte et orientable.

7.3-3. Corollaire : *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété* ***compacte et connexe*** *de dimension d. Alors :*

a) *La variété $\boldsymbol{M}$ est orientable, si et seulement si,* $\dim_{\mathbb{R}}\big(H^d_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\big) = 1$.

b) *La variété $\boldsymbol{M}$ est n'est pas orientable, si et seulement si,* $\dim_{\mathbb{R}}\big(H^d_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\big) = 0$.

c) *La variété $\boldsymbol{M}$ est orientable, si et seulement si, elle vérifie la dualité de Poincaré.*

Démonstration : Supposons la variété orientable. La dualité de Poincaré donne un isomorphisme entre $H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})$ et $H^d_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})$ et comme $\boldsymbol{M}$ est connexe, on a bien $\dim_{\mathbb{R}}\big(H^d_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\big) = 1$, ce qui prouve la partie "seulement si" de (a) et la partie "si" de (b).

Supposons $\boldsymbol{M}$ non orientable et notons $\mathrm{Or}(\boldsymbol{M})$ sa variété d'orientations (*cf.* section 4.6). La variété $\mathrm{Or}(\boldsymbol{M})$ est alors connexe, compacte et orientable de sorte que $\dim_{\mathbb{R}}\big(H^d_{\mathrm{DR}}(\mathrm{Or}(\boldsymbol{M}))\big) = 1$. On a d'autre part, le revêtement à deux feuillets $\pi : \mathrm{Or}(\boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{M}$ qui peut être vu comme la projection canonique de $\mathrm{Or}(\boldsymbol{M})$ vers la variété de ses $\{1, \sigma\}$-orbites, où σ désigne l'involution de "changement de feuille". On aura alors l'équivalence $H^d_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \equiv H^d_{\mathrm{DR}}(\mathrm{Or}(\boldsymbol{M}))^\sigma$ (*cf.* corollaire 4.7.2-3) et comme l'involution σ change l'orientation de $\mathrm{Or}(\boldsymbol{M})$, son action sur $H^d_{\mathrm{DR}}(\mathrm{Or}(\boldsymbol{M}))$ se voit comme la multiplication par le scalaire -1, de sorte que les σ-invariants de $H^d_{\mathrm{DR}}(\mathrm{Or}(\boldsymbol{M}))$ se réduisent à l'élément nul et donc $H^d_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) = \mathbf{0}$. Ceci termine la démonstration des assertions (a) et (b), dont décole immédiatement (c). ∎

7.3-4. Exercice : Soit $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$. Préciser quelles sont les espaces projectifs $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ pour lesquels la dualité de Poincaré sera vérifiée.

———————×———————

§8. Généralités sur les catégories

8.1 Catégories et foncteurs

Le concept de «catégorie» fut introduit dans les années 40 par Eilenberg et Mac Lane dans le but de donner un sens précis à la notion de «naturalité». Les développements de cette théorie ont introduit tout un langage commode et omniprésent dans les mathématiques actuelles qu'il convient de maîtriser sans pour autant en faire nécessairement un objet d'étude (au même titre par ailleurs que la théorie des ensembles). Une bonne partie de ces notes est destinée à résumer les concepts et terminologies de base en théorie de catégories utiles aux applications à l'algèbre homologique et plus particulièrement à la cohomologie de de Rham.

8.1-1. Définition : Une «catégorie» $\mathcal{C}$ consiste en :

1) la donnée d'une classe $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ d'«objets» (notés $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$,...) ([29]) ;
2) la donnée, pour chaque couple d'objets $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, d'un ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ (ou simplement $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$) dont on appelle les éléments les «morphismes de $\mathcal{C}$ de domaine $\boldsymbol{A}$ et codomaine $\boldsymbol{B}$» ;
3) la donnée, pour chaque triplet d'objets $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$, d'une application «composition» $(f,g)\mapsto g\circ f$ (noté également gf), de $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\times\mathrm{Mor}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ à valeurs dans $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$;

le tout astreint de satisfaire aux conditions suivantes :

C-a) (Non ambiguïté des morphismes.) Les ensembles $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ et $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$ sont disjoints lorsque les couples $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ et $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$ sont distincts.
C-b) (Associativité des compositions.) Pour $f\in\mathrm{Mor}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, $g\in\mathrm{Mor}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ et $h\in\mathrm{Mor}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$, on a $h(gf)=(hg)f$.
C-c) (Existence d'identités.) Pour chaque objet $\boldsymbol{A}$, il existe un élément $\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}\in\mathrm{Mor}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})$, appelé «morphisme identité de $\boldsymbol{A}$», tel que $f\circ\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}=f$ pour tout morphisme de f domaine $\boldsymbol{A}$, et $\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}\circ g=g$ pour tout morphisme g de codomaine $\boldsymbol{A}$.

8.1-2. Remarque et définitions :

- Pour tout objet $\boldsymbol{A}$ de $\mathcal{C}$, le triplet $(\mathrm{Mor}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}),\circ,\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}})$ est un *monoïde* ; ses éléments inversibles s'appellent les «automorphismes» de $\boldsymbol{A}$; ils constituent un *groupe* noté $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$.
- Un morphisme $f\in\mathrm{Mor}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ est dit un «isomorphisme», lorsque il existe $g\in\mathrm{Mor}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$ tel que $g\circ f=\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}$ et $f\circ g=\mathrm{id}_{\boldsymbol{B}}$; on note $\mathrm{Iso}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ l'ensemble de ces éléments.

8.1-3. Définition : Une catégorie $\mathcal{C}'$ est dite «sous-catégorie» d'une catégorie $\mathcal{C}$, si et seulement si :

- tout objet ou morphisme de $\mathcal{C}'$ est également un objet ou morphisme de $\mathcal{C}$;
- la "loi" de composition de morphismes dans $\mathcal{C}'$ est la "restriction" de celle de $\mathcal{C}$;
- pour tout objet $\boldsymbol{A}$ de $\mathcal{C}'$, le morphisme identité $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})$ est celui de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})$.

La sous-catégorie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ est dite «pleine» lorsque l'inclusion $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\subseteq\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ est une *égalité*.

8.1-4. Exemplesde catégories : Dans ce qui suit $\mathcal{A}$ désignera un anneau *arbitraire*. Les catégories auxquelles nous serons le plus souvent confrontés dans ces notes sont les suivantes.

1) **Catégorie des espaces topologiques.** Notée Top, les objets sont les espaces topologiques, les morphismes : les applications *continues*, et la loi de composition : la composition d'applications ([30]).
2) **Catégorie des variétés différentiables.** Notée Diff, les objets sont les variétés différentiables (réelles), et les morphismes : les applications *différentiables*.

[29] La notation $\boldsymbol{A}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ est souvent utilisée pour exprimer le fait que $\boldsymbol{A}$ est un objet de la classe $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

[30] Dans bien d'exemples de catégories, les objets sont des ensembles et les morphismes des applications ensemblistes, dans ces cas, et lorsque aucune précision supplémentaire n'est donnée, on sous-entendra que la loi de composition de la catégorie est la composition d'applications au sens ensembliste.

3) **Catégorie associée à un ensemble préordonné.** Les catégories dont la classe d'objets est un *ensemble* constituent ce que l'on appelle les «petites catégories», parmi celle-ci les plus simples sont celles où les ensembles non vides des morphismes sont des singletons. Soit $\mathfrak{C}$ une telle catégorie et notons $\mathcal{R}$ la relation sur l'ensemble $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ définie par $\boldsymbol{A}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{B}$, si et seulement si, $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \neq \varnothing$. Les conditions 8.1-1-C-b et 8.1-1-C-c sont alors équivalentes au fait que $\mathcal{R}$ est une relation de *préordre* (*i.e.* réflexive et transitive) sur $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$. Tout ensemble préordonné $(\mathcal{I},\prec)$ détermine donc, par cette même remarque, une catégorie, nous parlerons alors de *la* catégorie $(\mathcal{I},\prec)$.

Nous trouverons ce type de catégories essentiellement dans les deux situations suivantes :

a) dans les préfaisceaux : la catégories associée à l'ensemble des ouverts d'un espace topologique, muni de l'ordre partiel d'*inclusion* ;

b) dans la définition des systèmes inductifs ou projectifs de modules.

4) **Catégorie de $\mathcal{A}$-modules.** On note $\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont les $\mathcal{A}$-modules, et les morphismes : les homomorphismes de $\mathcal{A}$-modules, *i.e.*

$$\mathrm{Mor}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\,.$$

5) **Catégorie de $\mathcal{A}$-modules gradués.** Soit Δ un monoïde commutatif de «degrés» (p. ex. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{N}\ldots$), on notera $\mathrm{Mod}^{\Delta}(\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets, appelés des $\mathcal{A}$-modules Δ-gradués, sont les familles $\boldsymbol{A}^* = \{\boldsymbol{A}^i\}_{i\in\Delta}$ de $\mathcal{A}$-modules, et les morphismes entre $\boldsymbol{A}^*$ et$\boldsymbol{B}^*$ sont les couples $f_*^{[d]} = (\{f_i\}_{i\in\Delta}, d\in\Delta)$, où $f_i : \boldsymbol{A}^i \to \boldsymbol{B}^{i+d}$ est un morphisme de $\mathcal{A}$-modules pour chaque $i\in\Delta$ (on parle alors de «morphismes de degré d»). La composition des morphismes étant alors définie *degré par degré*. L'ensemble des morphismes est donc naturellement un $\mathcal{A}$-module gradué noté $\mathrm{Mor}^*(\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*)$. Dans ces notes nous serons essentiellement concernés par la sous-catégorie de Mod^{Δ} constituée des mêmes objets et des morphismes de degré 0.

8.1-4-(5).1. Remarque : On trouve souvent dans la littérature comme définition de $\mathcal{A}$-module gradué, la donnée d'un $\mathcal{A}$-module $\boldsymbol{A}$ **muni** d'une décomposition directe :

$$\boldsymbol{A}^* = \bigoplus_{i\in\Delta} \boldsymbol{A}^i\,,$$

où chaque $\boldsymbol{A}^i$ est un sous-$\mathcal{A}$-module de $\boldsymbol{A}$. Un morphisme $f : \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ de $\mathcal{A}$-modules Δ-gradués est alors un morphisme de $\mathcal{A}$-modules qui respecte, à un décalage fixe près, ces décompositions, *i.e.* $f(\boldsymbol{A}^i)\subseteq\boldsymbol{B}^{i+d}$, pour tout $i\in\Delta$ et un certain $d\in\Delta$.

Les deux points de vue sont bien évidemment équivalents.

6) **Catégorie de $\mathcal{A}$-modules bigradués.** C'est un cas particulier du précédent où l'on remplace Δ par le produit de deux ensembles de degrés Δ_1 et Δ_2. Il est alors commode de noter les objets par $\boldsymbol{A}^{\bullet,*} = \{\boldsymbol{A}^{i,j}\}_{i_1\in\Delta_1, i_2\in\Delta_2}$ et de manière analogue pour les morphismes.

Dans le cas où $\Delta_i = \mathbb{Z}$, on appelle «degré total» de la composante $\boldsymbol{A}^{i,j}$ de $\boldsymbol{A}^{\bullet,*}$ le nombre entier $i+j$.

7) **Catégorie de complexes différentiels gradués.** Notée $\mathbf{C}^*(\mathcal{A})$, ses objets notés $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$ sont des $\mathcal{A}$-modules $\mathbb{Z}$-gradués $\boldsymbol{A}^* = \{\boldsymbol{A}^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ **munis** d'une famille $\{d(\boldsymbol{A})_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ (qu'on note par abus $\{d_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$) de morphismes de $\mathcal{A}$-modules $d(\boldsymbol{A})_i : \boldsymbol{A}^i \to \boldsymbol{A}^{i+1}$ vérifiant l'égalité :

$$d(\boldsymbol{A})_{i+1}\circ d(\boldsymbol{A})_i = 0\,.$$

Un tel objet est noté $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$ et sera représenté par :

$$\cdots \xrightarrow{d_{i-2}} \boldsymbol{A}^{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \boldsymbol{A}^{i} \xrightarrow{d_{i}} \boldsymbol{A}^{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \cdots$$

Un élément $\mathrm{Mor}((\boldsymbol{A}^*, d_*), (\boldsymbol{B}^*, d_*))$ est la donnée d'un morphisme de $\mathcal{A}$-modules gradués $f_* \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*)$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{d_{i-2}} & \boldsymbol{A}^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & \boldsymbol{A}^{i} & \xrightarrow{d_{i}} & \boldsymbol{A}^{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{i}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{i+1}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{d_{i-2}} & \boldsymbol{B}^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & \boldsymbol{B}^{i} & \xrightarrow{d_{i}} & \boldsymbol{B}^{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & \cdots
\end{array}$$

est *commutatif*, *i.e.* on a $d_i \circ f_i = f_{i+1} \circ d_i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

8) **Catégorie de $\mathcal{A}$-algèbres différentielles graduées.** Notée $\mathrm{Adg}(\mathcal{A})$, un objet de cette catégorie est défini par la donnée d'un complexe différentiel gradué de $\mathcal{A}$-modules $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$ où $\boldsymbol{A}^k = 0$ pour $k \ll 0$, et d'une structure de $\mathcal{A}$-algèbre sur $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{A}^i$ vérifiant :
a) $\boldsymbol{A}^i \cdot \boldsymbol{A}^j \subseteq \boldsymbol{A}^{i+j}$, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$;
b) l'opérateur $d := \sum_{j\in\mathbb{N}} d_j$ définit sur $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{A}^i$ une «anti-dérivation», *i.e.*

$$d(x \cdot y) = d(x) \cdot y + (-1)^k x \cdot d(y)\,,$$

pour tous $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \boldsymbol{A}^k$ et $y \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{A}^i$.

Un morphisme dans $\mathrm{Adg}(\mathcal{A})$ sera la donnée d'un morphisme f_* de $\mathcal{A}$-modules $\mathbb{Z}$-gradués, tel que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i$ est compatible aux structures d'algèbres associées au domaine et codomaine de f_*.

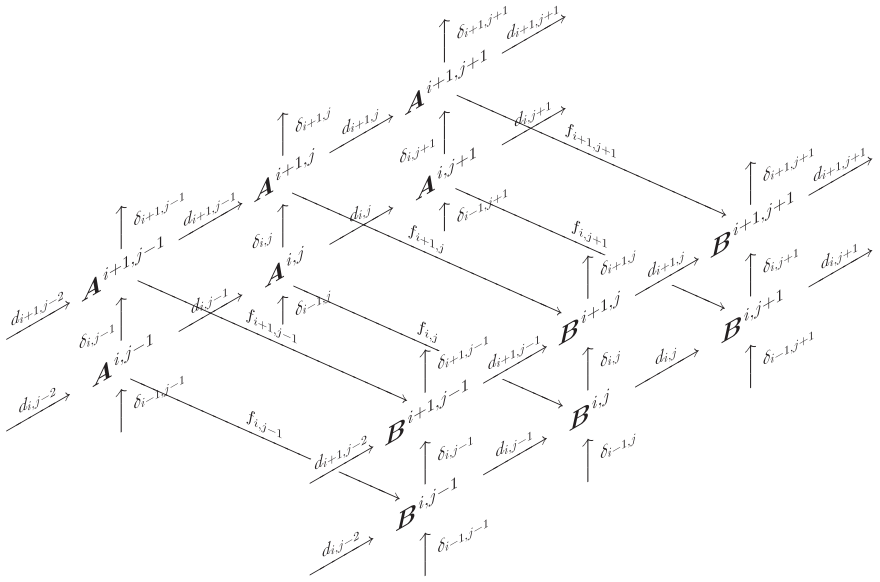
9) **Catégorie de bicomplexes différentiels gradués.** Notée $\mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{A})$, ses objets notés $(\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d_{\bullet,*}, \delta_{\bullet,*})$ sont définis par la donnée d'un $\mathcal{A}$-module $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-gradué $\boldsymbol{A}^{\bullet,*}$ et de deux familles $\{d_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ et $\{\delta_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$, de morphismes de $\mathcal{A}$-modules : $d_{i,j} : \boldsymbol{A}^{i,j} \to \boldsymbol{A}^{i,j+1}$ et $\delta_{i,j} : \boldsymbol{A}^{i,j} \to \boldsymbol{A}^{i+1,j}$, telles que :
a) pour chaque $i_0, j_0 \in \mathbb{Z}$ fixés, $(\boldsymbol{A}^{i_0,*}, d_{i_0,*})$ et $(\boldsymbol{A}^{\bullet,j_0}, \delta_{\bullet,j_0})$ sont des complexes différentiels gradués ;
b) pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\delta_{i,j+1} \circ d_{i,j} = d_{i+1,j} \circ \delta_{i,j}\,,$$

La condition (b) est, à son tour, équivalente à chacune des conditions suivantes :
b$_1$) Pour chaque $i_0 \in \mathbb{Z}$ fixé, $\delta_{i_0,*}$ est un morphisme de complexes différentiels gradués de $(\boldsymbol{A}^{i_0,*}, d_{i_0,*})$ vers $(\boldsymbol{A}^{i_0+1,*}, d_{i_0+1,*})$.
b$_2$) Pour chaque $j_0 \in \mathbb{Z}$ fixé, $d_{\bullet,j_0}$ est un morphisme de complexes différentiels gradués de $(\boldsymbol{A}^{\bullet,j_0}, \delta_{\bullet,j_0})$ vers $(\boldsymbol{A}^{\bullet,j_0+1}, \delta_{\bullet,j_0+1})$.
b$_3$) les sous-diagrammes du diagramme suivant sont tous *commutatifs* :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \delta_{i+1,j-1}} & & \uparrow{\scriptstyle \delta_{i+1,j}} & & \uparrow{\scriptstyle \delta_{i+1,j+1}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{d_{i+1,j-2}} & \boldsymbol{A}^{i+1,j-1} & \xrightarrow{d_{i+1,j-1}} & \boldsymbol{A}^{i+1,j} & \xrightarrow{d_{i+1,j}} & \boldsymbol{A}^{i+1,j+1} & \xrightarrow{d_{i+1,j+1}} & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \delta_{i,j-1}} & & \uparrow{\scriptstyle \delta_{i,j}} & & \uparrow{\scriptstyle \delta_{i,j+1}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{d_{i,j-2}} & \boldsymbol{A}^{i,j-1} & \xrightarrow{d_{i,j-1}} & \boldsymbol{A}^{i,j} & \xrightarrow{d_{i,j}} & \boldsymbol{A}^{i,j+1} & \xrightarrow{d_{i,j+1}} & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \delta_{i-1,j-1}} & & \uparrow{\scriptstyle \delta_{i-1,j}} & & \uparrow{\scriptstyle \delta_{i-1,j+1}} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Précisons maintenant les éléments de $\mathrm{Mor}((\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d, \delta), (\boldsymbol{B}^{\bullet,*}, d, \delta))$. Il s'agit des familles $\{f_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$, où $f_{i,j} : \boldsymbol{A}^{i,j} \to \boldsymbol{B}^{i,j}$ est un morphisme de $\mathcal{A}$-modules pour chaque $i, j \in \mathbb{Z}$, "commutant" aux opérateurs d et δ, *i.e.* rendant commutatifs tous les sous-diagrammes du diagramme suivant.



10) **Catégorie opposée associée à une catégorie.** Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie et posons $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ et $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) := \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$. On vérifie alors que les conditions caractérisant les catégories sont également vérifiées pour $(\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}), \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}})$, cette catégorie, notée $\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}$ est appelée la «catégorie opposée à $\mathfrak{C}$».

Lorsque la catégorie $\mathfrak{C}$ est celle associée à un ensemble préordonné, $\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}$ est la catégorie associée à la relation opposée.

8.2 Foncteurs et naturalité

8.2.1 Foncteurs covariants. Soient $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ deux catégories. Un «foncteur covariant» de $\mathfrak{C}_1$ vers $\mathfrak{C}_2$ consiste en la donnée :

F-1) d'une correspondance $\boldsymbol{A} \rightsquigarrow \mathbf{F}(\boldsymbol{A})$ de $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}_1)$ dans $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}_2)$;

F-2) et pour chaque couple d'objets $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ de $\mathfrak{C}_1$, d'une application $f \rightsquigarrow \mathbf{F}(f)$ de $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}_1}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ à valeurs dans $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}_2}(\mathbf{F}(\boldsymbol{A}), \mathbf{F}(\boldsymbol{B}))$.

On demande à ces dernières applications de satisfaire, en plus, aux conditions suivantes :

F-2a) si $f \circ g$ est défini dans $\mathfrak{C}_1$, alors $\mathbf{F}(f \circ g) = \mathbf{F}(f) \circ \mathbf{F}(g)$;

F-2b) $\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(\boldsymbol{A})}$.

8.2.2 Foncteurs contravariants. Soient $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ deux catégories. On appelle «foncteur contravariant» de $\mathfrak{C}_1$ vers $\mathfrak{C}_2$ tout foncteur *covariant* de $\mathfrak{C}_1^{\mathrm{op}}$ vers $\mathfrak{C}_2$.

8.2.2-1. Remarque : Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, trois catégories, et $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ des foncteurs de $\mathcal{C}_1$ vers $\mathcal{C}_2$ et de $\mathcal{C}_2$ vers $\mathcal{C}_3$ respectivement. La composition des correspondances, notée $\mathbf{F}_2 \circ \mathbf{F}_2$, est un foncteur de $\mathcal{C}_1$ vers $\mathcal{C}_3$.

8.2.3 Transformations naturelles entre foncteurs. Soient $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ deux foncteurs entre les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Une «transformation naturelle» η de $\mathbf{F}$ vers $\mathbf{G}$ est une correspondance qui associe à chaque objet $\boldsymbol{A}$ de $\mathcal{C}$ un morphisme $\eta(\boldsymbol{A}) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(\boldsymbol{A}), \mathbf{G}(\boldsymbol{A}))$, de telle sorte que pour tout couple $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ d'objets de $\mathcal{C}$ et tout $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}(\boldsymbol{A}) & \xrightarrow{\eta(\boldsymbol{A})} & \mathbf{G}(\boldsymbol{A}) \\ {\scriptstyle \mathbf{F}(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{G}(f)} \\ \mathbf{F}(\boldsymbol{B}) & \xrightarrow[\eta(\boldsymbol{B})]{} & \mathbf{G}(\boldsymbol{B}) \end{array} \qquad (\mathcal{N})$$

Lorsque chaque $\eta(\boldsymbol{A})$ est un isomorphisme, on dit que η est un «isomorphisme naturel» de foncteurs.

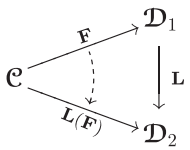
Composition de transformations naturelles. Soient $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ et $\mathbf{F}_3$ trois foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$. Soient $\eta_{21} : \mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2$ et $\eta_{32}\,\mathbf{F}_2 \to \mathbf{F}_3$ des transformations naturelles et notons $\eta_{32} \circ \eta_{21}$ la correspondance qui associe à chaque objet $\boldsymbol{A}$ de $\mathcal{C}$ le morphisme $\eta_{32}(\boldsymbol{A}) \circ \eta_{21}(\boldsymbol{A})$. Cette correspondance est une transformation naturelle de $\mathbf{F}_1$ vers $\mathbf{F}_3$.

8.2.4 Catégories de foncteurs et foncteurs induits et coinduits. Soit $\mathcal{P}$ une *petite* catégorie. La classe $\mathrm{Fonct}(\mathcal{P}, \mathcal{C})$, de tous les foncteurs *covariants* de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{C}$, admet une structure de catégorie en définissant $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Fonct}(\mathcal{P},\mathcal{C})}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ comme l'ensemble de transformations naturelles de $\mathbf{F}$ vers $\mathbf{G}$, l'application "composition" étant alors la composition de transformations naturelles.

Question : En quoi le fait que $\mathcal{P}$ soit une **petite** catégorie est-il indispensable dans la construction de $\mathrm{Fonct}(\mathcal{P}, \mathcal{C})$?

Foncteurs induits

Soit maintenant $\mathbf{L}$ un foncteur covariant de la catégorie $\mathcal{D}_1$ vers la catégorie $\mathcal{D}_2$. Fixons une petite catégorie $\mathcal{C}$ et considérons les catégories $\mathrm{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}_1)$ et $\mathrm{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}_2)$. La composition d'un objet $\mathbf{F}$ de $\mathrm{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}_1)$ avec le foncteur $\mathbf{L}$ donne un objet $\mathbf{L}(\mathbf{F}) := \mathbf{L} \circ \mathbf{F}$ de $\mathrm{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}_2)$.

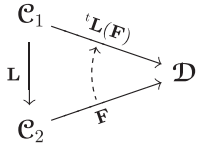


Observons d'autre part que si η est une transformation naturelle entre deux foncteurs $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}_1$, le foncteur $\mathbf{L}$ préserve la commutativité des diagrammes $(\mathcal{N})$ pour tout couple $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ d'objets de $\mathcal{C}$, *i.e.* :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & & \mathbf{F}(\boldsymbol{A}) \xrightarrow{\eta(\boldsymbol{A})} \mathbf{G}(\boldsymbol{A}) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \xrightarrow{(\mathbf{F},\mathbf{G})} & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{F}(f)} \qquad \downarrow{\scriptstyle \mathbf{G}(f)} \\ \boldsymbol{B} & & \mathbf{F}(\boldsymbol{B}) \xrightarrow[\eta(\boldsymbol{B})]{} \mathbf{G}(\boldsymbol{B}) \end{array} \xrightarrow{\mathbf{L}} \begin{array}{c} \mathbf{L}\,\mathbf{F}(\boldsymbol{A}) \xrightarrow{\mathbf{L}\,\eta(\boldsymbol{A})} \mathbf{L}\,\mathbf{G}(\boldsymbol{A}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{L}\,\mathbf{F}(f)} \qquad \downarrow{\scriptstyle \mathbf{L}\,\mathbf{G}(f)} \\ \mathbf{L}\,\mathbf{F}(\boldsymbol{B}) \xrightarrow[\mathbf{L}\,\eta(\boldsymbol{B})]{} \mathbf{L}\,\mathbf{G}(\boldsymbol{B}) \end{array}$$

de sorte que la correspondance $\mathbf{L}(\eta)$ qui associe à tout couple d'objets $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ de $\mathcal{C}$ le couple de morphismes $(\mathbf{L}\,\eta(\boldsymbol{A}),\mathbf{L}\,\eta(\boldsymbol{B}))$, est bien une transformation naturelle entre les foncteurs $\mathbf{L}\circ\mathbf{F}$ et $\mathbf{L}\circ\mathbf{G}$. Il s'ensuit donc que la correspondance qui associe à un objet $\mathbf{F}$ de $\mathrm{Fonct}(\mathcal{C},\mathcal{D}_1)$ l'objet $\mathbf{L}(\mathbf{F})$ de $\mathrm{Fonct}(\mathcal{C},\mathcal{D}_2)$, et à une transformation naturelle η la transformation naturelle $\mathbf{L}(\eta)$ est un *foncteur* de $\mathrm{Fonct}(\mathcal{C},\mathcal{D}_1)$ vers $\mathrm{Fonct}(\mathcal{C},\mathcal{D}_2)$. On l'appellera, dans ces notes, «foncteur induit» et sera noté, par abus, par le même symbole $\mathbf{L}$.

Foncteurs coinduits
Soient maintenant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux petites catégories et $\mathbf{L}$ un foncteur covariant de $\mathcal{C}_1$ vers $\mathcal{C}_2$. Pour toute catégorie $\mathcal{D}$, la composition d'un foncteur $\mathbf{F}$ de $\mathcal{C}_2$ vers $\mathcal{D}$ avec $\mathbf{L}$ donne un foncteur ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{L}(\mathbf{F}) := \mathbf{F}\circ\mathbf{L}$ de $\mathcal{C}_1$ vers $\mathcal{D}$.



De même, une application naturelle η entre deux objets $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ de $\mathrm{Fonct}(\mathcal{C}_2,\mathcal{D})$ se compose avec $\mathbf{L}$ pour donner lieu à une transformation naturelle ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{L}(\eta) := \eta\circ\mathbf{L}$ de ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{L}(\mathbf{F}_1)$ vers ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{L}(\mathbf{F}_2)$. On vérifie alors que la correspondance ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{L}$ de $\mathrm{Fonct}(\mathcal{C}_2,\mathcal{D})$ vers $\mathrm{Fonct}(\mathcal{C}_1,\mathcal{D})$ est *fonctorielle* ; on l'appelle «foncteur coinduit» et on le note ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{L}$.

Catégories de systèmes inductifs et projectifs
Soit $(\mathcal{I},\preccurlyeq)$ un *ensemble* muni d'un ordre partiel "$\preccurlyeq$". Soit $\mathcal{C}$ une catégorie ; on appelle «système inductif (resp. projectif) d'objets de $\mathcal{C}$ relatif à $(\mathcal{I},\preccurlyeq)$» tout foncteur covariant (resp. contravariant) de la catégorie associée à $(\mathcal{I},\preccurlyeq)$ vers $\mathcal{C}$.

Dans le cas où $\mathcal{C}=\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$, un système inductif de $\mathcal{A}$-modules relatif à $(\mathcal{I},\preccurlyeq)$ est donc la donnée d'une famille $\{\boldsymbol{A}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ de $\mathcal{A}$-modules, et pour chaque couple $i\preccurlyeq j\in\mathcal{I}$ d'un morphisme $f_{j,i}:\boldsymbol{A}_i\to\boldsymbol{A}_j$ de telle sorte que :
- $f_{i,i}=\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}_i}$, pour tout $i\in\mathcal{I}$;
- pour tous $i\preccurlyeq j\preccurlyeq k$ dans $\mathcal{I}$, $f_{k,i}=f_{k,j}\circ f_{j,i}$.

8.2.4-1. Exemple : Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable et pour $x\in\boldsymbol{M}$ considérons l'ensemble $\mathcal{V}_x$ de tous les voisinages ouverts de x dans $\boldsymbol{M}$, munissons $\mathcal{V}_x$ de l'ordre partiel "$\supseteq$". Le système qui fait correspondre à $U\in\mathcal{V}_x$ l'espace $\Omega^k(U)$ des k-formes différentielles sur U, et qui pour chaque inclusion $U\supseteq V$, fait correspondre le morphisme de restriction de formes différentielles de $\Omega^k(U)$ vers $\Omega^k(V)$, est *inductif*. Sa limite inductive (qu'on définira précisément dans la section 8.4) est connue sous le nom des «germes de k-formes différentielles de $\boldsymbol{M}$ au point x».

8.2.5 Transformations naturelles vues comme foncteurs. Une transformation naturelle entre foncteurs peut être vue, elle-même, comme un foncteur ; l'idée sous-jacente résulte de l'observation suivante. Etant donnée une catégorie $\mathcal{D}$, on définit la catégorie $\mathcal{D}{\to}\mathcal{D}$ dont les objets sont "les morphismes" de $\mathcal{D}$, *i.e.* les "triplets" $(\alpha,\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1)$, où $\alpha\in\mathrm{Mor}(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1)$. Un élément de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}\to\mathcal{D}}((\alpha,\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1),(\beta,\boldsymbol{B}_0,\boldsymbol{B}_1))$ est alors la donnée d'un couple de morphismes

$$(f_0,f_1)\in\mathrm{Mor}(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0){\times}\mathrm{Mor}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1)\,,$$

tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}_0 & \xrightarrow{\alpha} & \boldsymbol{A}_1 \\ {\scriptstyle f_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ \boldsymbol{B}_0 & \xrightarrow{\beta} & \boldsymbol{B}_1 \end{array} \qquad (*)$$

On vérifie que les conditions caractéristiques des catégories sont bien vérifiées. (Vous devriez reconnaître une identification immédiate entre $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ et $\mathrm{Fonct}([0\to 1],\mathfrak{D})$, où $[0\to 1]$ est la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\{0\leqslant 1\}$.)

Soit maintenant $\mathbf{F}$ un foncteur de $\mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$. Pour chaque objet $\boldsymbol{A}$ de $\mathfrak{C}$, notons $\mathbf{F}_0(\boldsymbol{A})$ et $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{A})$ respectivement le domaine et codomaine du morphisme $\mathbf{F}(\boldsymbol{A})$ de $\mathfrak{D}$. Pour tout morphisme $f\in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, notons $\mathbf{F}_0(f)$ et $\mathbf{F}_1(f)$ respectivement les composantes f_0 et f_1 de $\mathbf{F}(f)$ (reportez-vous au diagramme $(*)$). On réalise alors que $\mathbf{F}_0$ et $\mathbf{F}_1$ sont des *foncteurs* de $\mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{D}$ et que la correspondance $\boldsymbol{A}\rightsquigarrow \eta(\boldsymbol{A})=\mathbf{F}(\boldsymbol{A})$ est une *transformation naturelle* de $\mathbf{F}_0$ vers $\mathbf{F}_1$.

Réciproquement, la donnée d'une transformation naturelle entre deux foncteurs $\mathbf{F}_0$ et $\mathbf{F}_1$ de $\mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{D}$, détermine par le procédé inverse un foncteur $\mathbf{F}$ de $\mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$.

Il y a donc équivalence entre les notions de transformation naturelle de foncteurs vers une catégorie $\mathfrak{D}$ et celle de foncteur vers la catégorie $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$.

Il convient de souligner le fait que les considérations de cette section ne se limitent pas seulement à la catégorie des morphismes d'une catégorie donnée. En effet, elles restent valables, *mutatis mutandis*, pour les catégories de "diagrammes (d'une forme donnée) d'objets d'une catégorie", auquel cas le concept de "transformation naturelle" devient celui de "diagramme naturel".

En topologie algébrique (par exemple), la plupart des diagrammes que vous rencontrerez sont naturels ; il en sera de même dans ce cours.

8.2.5-1. Exemplesde foncteurs :

1) **Complexe de de Rham.** La correspondance qui associe à une variété différentiable $\boldsymbol{M}$ le complexe $\Omega^*(\boldsymbol{M})$ des formes différentielles, et à une application différentiable $f\in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Diff}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$, le morphisme image réciproque de formes différentielles :

$$f^*:\Omega^*(\boldsymbol{N})\to\Omega^*(\boldsymbol{M})$$

est un foncteur **contravariant** de la catégorie Diff vers la catégorie $\mathrm{Adg}(\mathbb{R})$ des $\mathbb{R}$-algèbres différentielles graduées.

2) **Complexe de cochaînes singulières.** Analogue au précédent mais défini de la catégorie Top des espaces topologiques vers $\mathrm{Adg}(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A}$ peut être un anneau commutatif arbitrairement choisi. On note souvent $S^*(\boldsymbol{X};\mathcal{A})$ l'algèbre des cochaînes singulières de $\boldsymbol{X}$ à coefficients dans $\mathcal{A}$.

3) **Préfaisceau des formes différentielles sur une variété.** Foncteur **contravariant** très proche du précédent, il est défini sur la catégorie associée à l'ensemble partiellement ordonné $(\mathrm{Ouv}(\boldsymbol{M}),\subseteq)$ des ouverts d'une variété $\boldsymbol{M}$ muni de la relation d'inclusion ensembliste. Le foncteur associe à l'ouvert $U\subseteq\boldsymbol{M}$ le complexe de de Rham $\Omega^*(U)$; le morphisme de $\Omega^*(U)\to\Omega^*(V)$ associé à une inclusion d'ouverts $V\subseteq U$ étant la restriction de formes différentielles.

4) **Copréfaisceau des formes différentielles à support compact sur une variété.** Foncteur **covariant** défini de $\mathrm{Ouv}(\boldsymbol{M})$ vers $\mathrm{Adg}(\mathbb{R})$; il associe à un ouvert $U\subseteq\boldsymbol{M}$ l'algèbre dif-

férentielle $\Omega_c^*(U)$ des formes différentielles définies sur U *à support compact* ; le morphisme de $\Omega_c^*(V) \to \Omega_c^*(U)$ associé à une inclusion d'ouverts $V \subseteq U$ étant le *prolongement par zéro*.

5) **Cohomologie des complexes différentiels gradués.** Foncteur **covariant** défini de la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathcal{A})$ des complexes de $\mathcal{A}$-modules différentiels gradués, vers la catégorie des $\mathcal{A}$-modules $\mathbb{Z}$-gradués ; il associe au complexe $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$ le module gradué $\{H^k(\boldsymbol{A}^*, d_*)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, où :

$$H^k(\boldsymbol{A}^*, d_*) := \frac{\ker(d_k)}{\mathrm{im}(d_{k-1})} ;$$

l'action de ce foncteur sur un morphisme $f_* \in \mathrm{Mor}((\boldsymbol{A}^*, d_*), (\boldsymbol{B}^*, d_*))$ découle des inclusions

$$f_k(\ker(d(\boldsymbol{A})_k)) \subseteq \ker(d(\boldsymbol{B})_k) \quad \text{et} \quad f_k(\mathrm{im}(d(\boldsymbol{A})_k)) \subseteq \mathrm{im}(d(\boldsymbol{B})_k) ,$$

induisant les morphismes :

$$H^k(\boldsymbol{A}^*, d(\boldsymbol{A})_*) = \frac{\ker(d(\boldsymbol{A})_k)}{\mathrm{im}(d(\boldsymbol{A})_{k-1})} \xrightarrow{H(f)_k} \frac{\ker(d(\boldsymbol{B})_k)}{\mathrm{im}(d(\boldsymbol{B})_{k-1})} = H^k(\boldsymbol{B}^*, d(\boldsymbol{B})_*) ,$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. La famille $H(f)_* := \{H^k(f)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est le morphisme associé à f_* par le foncteur de cohomologie.

8.2.5-1-(5).1. Exercice : Lorsque l'on considère, au départ, la catégorie des *algèbres* différentielles graduées, montrez que le foncteur de cohomologie aboutit naturellement dans la catégorie des algèbres graduées.

8.2.5-1-(5).2. Définition : Un complexe de $\mathcal{A}$-modules $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$ est dit «exact», lorsque $H^k(\boldsymbol{A}^*, d_*) = 0$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

8.2.5-1-(5).3. Définition : Un morphisme f_* de la catégorie des complexes différentiels gradués est dit un «quasi-isomorphisme», si et seulement si, $H(f)_*$ est un isomorphisme.

6) **Cohomologie de de Rham des variétés différentiables.** Foncteur **contravariant** obtenu en composant les foncteurs complexe-de-de Rham et cohomologie-de-complexes.

7) **Cohomologie singulière des espaces topologiques.** Foncteur **contravariant** obtenu en composant les foncteurs complexe-de-cochaînes-singulières et cohomologie-de-complexes.

8) **Troncatures bêtes de complexes.** Foncteurs **covariants** de la catégorie $\mathrm{C}^*(\mathcal{A})$ vers elle-même définis pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ de la manière suivante :

- Pour tout complexe $(\boldsymbol{A}^*, d(\boldsymbol{A})_*)$, on note $(\boldsymbol{A}^{\leqslant k}, d_*)$ le complexe $(\boldsymbol{B}^*, d(\boldsymbol{B})_*)$ où

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}^i = \boldsymbol{A}^i & \text{pour } i \leqslant k, \\ \boldsymbol{B}^i = 0 & \text{autrement} ; \end{cases}$$

puis $d(\boldsymbol{B})_i = d(\boldsymbol{A})_i$, pour tout $i \leqslant k-1$, et $d(\boldsymbol{B})_i = 0$ sinon.

• Pour tout complexe $(\boldsymbol{A}^*, d(\boldsymbol{A})_*)$, on note $(\boldsymbol{A}^{>k}, d_*)$ le complexe $(\boldsymbol{C}^*, d(\boldsymbol{C})_*)$ où

$$\begin{cases} \boldsymbol{C}^i = \boldsymbol{A}^i & \text{pour } i > k, \\ \boldsymbol{C}^i = 0 & \text{autrement}\,; \end{cases}$$

puis $d(\boldsymbol{C})_i = d(\boldsymbol{A})_i$, pour tout $i > k$, et $d(\boldsymbol{C})_i = 0$ sinon.

On peut représenter ces définitions par le diagramme :

$$\begin{array}{lccccccccccc}
(\boldsymbol{A}^{\leqslant k}) & \longrightarrow & \boldsymbol{A}^{k-2} & \xrightarrow{d_{k-2}} & \boldsymbol{A}^{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & \boldsymbol{A}^{k} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \uparrow & & \uparrow & \\
(\boldsymbol{A}^{*}) & \longrightarrow & \boldsymbol{A}^{k-2} & \xrightarrow{d_{k-2}} & \boldsymbol{A}^{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & \boldsymbol{A}^{k} & \xrightarrow{d_k} & \boldsymbol{A}^{k+1} & \xrightarrow{d_{k+1}} & \boldsymbol{A}^{k+2} & \xrightarrow{d_{k+2}} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \\
(\boldsymbol{A}^{>k}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \boldsymbol{A}^{k+1} & \xrightarrow{d_{k+1}} & \boldsymbol{A}^{k+2} & \xrightarrow{d_{k+2}}
\end{array}$$

D'où l'on conclut que :

$$\begin{cases} H^j(\boldsymbol{A}^{\leqslant k}) = H^j(\boldsymbol{A}^*) & \text{pour tout } j < k\,; \\ H^k(\boldsymbol{A}^{\leqslant k}) = \dfrac{\boldsymbol{A}^k}{\mathrm{im}(d_{k-1})}; & \\ H^j(\boldsymbol{A}^{\leqslant k}) = 0 & \text{pour tout } j > k\,; \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} H^j(\boldsymbol{A}^{>k}) = 0 & \text{pour tout } j < k+1\,; \\ H^{k+1}(\boldsymbol{A}^{>k}) = \ker(d_{k+1}); & \\ H^j(\boldsymbol{A}^{>k}) = H^j(\boldsymbol{A}^*) & \text{pour tout } j > k+1. \end{cases}$$

Ce type de troncature, qui a l'avantage de "préserver la simplicité" de termes, introduit en revanche des cohomologies, autour du degré de troncature, parfois peux contrôlables vis-à-vis des cohomologies du complexe initial.

Soit maintenant $f_* \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*)$, le morphisme $f_{\leqslant k} \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{A}^{\leqslant k}, \boldsymbol{B}^{\leqslant k})$ est défini en précisant que ses "composantes" aux degrés $\leqslant k$ sont respectivement celles de f_*, et toutes les autres étant nulles. (Le morphisme $f_{>k}$ est défini de manière analogue.)

8.2.5-1-(8).4. Remarque : Nous avons indiqué dans le diagramme ci-dessus des morphismes (verticaux) canoniques de complexes gradués. Ils définissent de *transformations naturelles* : du foncteur $\bullet \rightsquigarrow \bullet^{>k}$ vers le foncteur "identité", et de ce dernier vers $\bullet \rightsquigarrow \bullet^{\leqslant k}$. L'application des considérations de la section 8.2.5 permettent, donc, de conclure que ces diagrammes sont "fonctoriels" de la catégorie des complexes vers la catégorie des bicomplexes différentiels gradués. Ces diagrammes représentent également des suites exactes courtes *de complexes* :

$$0 \longrightarrow (\boldsymbol{A}^{\geqslant k+1}, d_*) \longrightarrow (\boldsymbol{A}^*, d_*) \longrightarrow (\boldsymbol{A}^{\leqslant k}, d_*) \longrightarrow 0$$

d'où des suites exactes longues de cohomologie où le termes "litigieux" constituent des suites exactes à quatre termes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^k(\boldsymbol{A}^*) & \longrightarrow & H^k(\boldsymbol{A}^{\leqslant k}) & \longrightarrow & H^{k+1}(\boldsymbol{A}^{>k}) & \longrightarrow & H^{k+1}(\boldsymbol{A}^*) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \dfrac{\ker d_k}{\mathrm{im} d_{k-1}} & \longrightarrow & \mathrm{coker}(d_{k-1}) & \xrightarrow{\bar{d}_k} & \ker(d_{k+1}) & \longrightarrow & \dfrac{\ker d_{k+1}}{\mathrm{im} d_k} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où $\bar{d}_k$ désigne le morphisme induit par d_k sur $\mathrm{coker}(d_{k-1}) := A^k/\mathrm{im}(d_{k-1})$.

9) **Troncatures intelligentes de complexes.** Foncteurs **covariants** de la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathcal{A})$ vers elle-même définis pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ de la manière suivante :

- Pour tout complexe $(\boldsymbol{A}^*, d(\boldsymbol{A})_*)$, on note $(\tau_{\mathrm{k}}^{\leqslant k}(\boldsymbol{A})^*, d_*)$ le complexe de termes

$$\begin{cases} \tau_{\mathrm{k}}^{\leqslant k}(\boldsymbol{A})^i = \boldsymbol{A}^i & \text{pour } i < k, \\ \tau_{\mathrm{k}}^{\leqslant k}(\boldsymbol{A})^k = \ker(d_k), & \\ \tau_{\mathrm{k}}^{\leqslant k}(\boldsymbol{A})^i = 0 & \text{pour } k < i\,; \end{cases}$$

  et de morphismes $d_i = d(\boldsymbol{A})_i$ pour tout $i < k$, et $d_i = 0$ autrement.

- Pour tout complexe $(\boldsymbol{A}^*, d(\boldsymbol{A})_*)$, on note $(\tau_{\mathrm{k}}^{>k}(\boldsymbol{A})^*, d_*)$ le complexe de termes

$$\begin{cases} \tau_{\mathrm{k}}^{>k}(\boldsymbol{A})^i = 0 & \text{pour } i < k, \\ \tau_{\mathrm{k}}^{>k}(\boldsymbol{A})^k = \mathrm{im}(d_k), & \\ \tau_{\mathrm{k}}^{>k}(\boldsymbol{A})^i = \boldsymbol{A}^i & \text{pour } k < i\,; \end{cases}$$

  et de morphismes $d_i = d(\boldsymbol{A})_i$ pour tout $k \leqslant i$, et $d_i = 0$ autrement.

Comme dans le paragraphe précédent, représentons ces définitions sur un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
(\tau_{\mathrm{k}}^{>k}(\boldsymbol{A})^*) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathrm{im}(d_k) & \longrightarrow & \boldsymbol{A}^{k+1} & \xrightarrow{d_{k+1}} & \boldsymbol{A}^{k+2} & \xrightarrow{d_{k+2}} & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & {\scriptstyle d_k}\uparrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\uparrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\uparrow & & \\
(\boldsymbol{A}^*) & \longrightarrow & \boldsymbol{A}^{k-2} & \xrightarrow{d_{k-2}} & \boldsymbol{A}^{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & \boldsymbol{A}^k & \xrightarrow{d_k} & \boldsymbol{A}^{k+1} & \xrightarrow{d_{k+1}} & \boldsymbol{A}^{k+2} & \xrightarrow{d_{k+2}} & \\
 & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\uparrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\uparrow & & {\scriptstyle inj}\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
(\tau_{\mathrm{k}}^{\leqslant k}(\boldsymbol{A})^*) & \longrightarrow & \boldsymbol{A}^{k-2} & \xrightarrow{d_{k-2}} & \boldsymbol{A}^{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & \ker(d_k) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow &
\end{array}$$

D'où l'on conclut que :

$$\begin{cases} H^j(\tau_{\mathrm{k}}^{\leqslant k}\boldsymbol{A}^*) = H^j(\boldsymbol{A}^*) & \text{pour tout } j \leqslant k\,; \\ H^j(\tau_{\mathrm{k}}^{\leqslant k}\boldsymbol{A}^*) = 0 & \text{pour tout } k < j\,; \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} H^j(\tau_{\mathrm{k}}^{>k}\boldsymbol{A}^*) = 0 & \text{pour tout } j \leqslant k\,; \\ H^j(\tau_{\mathrm{k}}^{>k}\boldsymbol{A}^*) = H^j(\boldsymbol{A}^*) & \text{pour tout } k < j. \end{cases}$$

Ce type de troncature, "préserver la simplicité" des cohomologies, mais introduit des termes nouveau dans les complexes.

8.2.5-1-(9).5. Remarque : Comme dans les troncatures bêtes, nous avons indiqué dans le diagramme précédent des morphismes de complexes (verticalement) naturels, d'où les suites exactes courtes fonctorielles :

$$0 \longrightarrow \tau_{\mathrm{k}}^{\leqslant k}(\boldsymbol{A})^* \longrightarrow \boldsymbol{A}^* \longrightarrow \tau_{\mathrm{k}}^{>k}(\boldsymbol{A})^* \longrightarrow 0\,.$$

8.2.5-1-(9).6. Exercice : Définissez le foncteur $\tau_{\mathrm{i}}^{\leqslant k}$ en remplaçant dans la définition de $\tau_{\mathrm{k}}^{\leqslant k}(\boldsymbol{A})^*$ le terme de degré k par $\mathrm{im}(d_k)$. Précisez le conoyau du morphisme de complexes "évident" $\tau_{\mathrm{i}}^{\leqslant k}(\boldsymbol{A})^* \to \boldsymbol{A}^*$ et refaites l'étude des cohomologies.

8.2.5-1-(9).7. Remarque : Il convient de souligner que la fonctorialité des troncatures garantit, non

seulement le fait qu'appliquées ligne-à-ligne (à condition de garder fixe la limite de troncature) et/ou colonne-à-colonne, à un bicomplexe différentiel gradué, on obtienne encore un bicomplexe différentiel gradué ; mais aussi que cela fournit des *foncteurs de troncature* de la catégorie des bicomplexes différentiels graduées vers elle-même.

8.3 Catégories abéliennes

Si l'on voulait résumer à outrance, on pourrait dire que les «catégories abéliennes» sont celles disposant de suffisamment de structure supplémentaire pour y transposer, *mutatis mutandis*, l'énorme majorité d'arguments d'algèbre homologique que l'on peut faire dans les catégories de modules et qui restent valables, quelle que soit la catégorie de modules choisie.

Une première question que l'on doit se poser concerne la notion de "complexe" elle-même. Que faut-t-il demander à une catégorie $\mathcal{C}$ pour pouvoir introduire la catégorie des «complexes d'objets de $\mathcal{C}$». La réponse simple est : qu'il existe un objet nul (le module nul dans les catégories de module). On appelle «objet nul» dans une catégorie $\mathcal{C}$, tout objet $\mathbf{0}$ tel que $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{A})$ et $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{A}, \mathbf{0})$ soient des singletons pour tout objet $\boldsymbol{A}$ de $\mathcal{C}$. Il s'en suit que deux objets nuls sont toujours isomorphes et, en composant $\boldsymbol{A} \to \mathbf{0} \to \boldsymbol{B}$, qu'il existe un (unique) «morphisme nul», note $\mathbf{0}_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}}$, dans chaque ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Maintenant, étant donnée une catégorie $\mathcal{C}$ *possédant un objet nul*, on peut définir la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathcal{C})$ comme la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fonct}((\mathbb{Z}, \leqslant), \mathcal{C})$ dont les objets sont les systèmes $(\mathbb{Z}, \leqslant)$-inductifs dans lesquels la composition de deux flèches consécutives donne la flèche nulle. Ceci étant, le foncteur constant $z \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbf{0}$ est trivialement un objet nul de la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathcal{C})$, nous pouvons donc itérer la démarche ci-dessus pour construire la catégorie des bicomplexes, puis des tri-complexes,... Remarquons que ces catégories de multicomplexes peuvent également être définies comme les sous-catégories pleines des catégories $\mathrm{Fonct}((\mathbb{Z}^n, \leqslant), \mathcal{C})$, où '$\leqslant$' désigne l'ordre "lexicographique" des n-uples de nombres entiers, dont les objets sont les systèmes $(\mathbb{Z}^n, \leqslant)$-inductifs dans lesquels la composition de deux flèches consécutives *et de même direction* donne la flèche nulle.

Mais, bien sur, la seule demande d'objets nuls est très en-dessous de ce dont on a besoin pour travailler (notamment pour tout ce qui concerne les homotopies *cf.* 8.3.5), et une première approximation est donnée par les catégories **additives**.

8.3-1. Définition : Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite «additive» lorsque :

Ad-1) $\mathcal{C}$ possède un objet nul.

Ad-2) Les ensembles $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ possèdent une structure (additive) de groupe abélien dont l'élément neutre est le morphisme nul $\mathbf{0}_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}}$.

Ad-3) Distributivité des compositions : $f(g_1 + g_2) = fg_1 + fg_2$ et $(g_1 + g_2)h = g_1h + g_2h$.

Ad-4) Dans $\mathcal{C}$ la somme directe d'un nombre fini d'objets est définie. Autrement dit, pour tout ensemble *fini* d'objets $\{\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n\}$, il existe un objet $\boldsymbol{A}$ et des morphismes $p_j \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_j)$ et $i_j \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{A}_j, \boldsymbol{A})$, avec $j = 1, \ldots, n$, tels que

$$p_j \circ i_j = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}_j}, \quad p_k \circ i_j = \mathbf{0}_{\boldsymbol{A}_j,\boldsymbol{A}_k} \quad \text{si } j \neq k \quad , \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} i_j \circ p_j = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}\,.$$

Ces conditions, évidentes dans les catégories de modules, sont *héréditaires* en ce sens que si $\mathcal{C}$ est additive, les catégories $\mathbf{C}^*(\mathcal{C})$ et $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$ (catégorie d'objets $\mathbb{Z}$-gradués de $\mathcal{C}$ et morphismes de degré zéro pour simplifier), seront également additives. (Il en est évidemment de même des catégories $\mathrm{Fonct}(\mathcal{P},\mathcal{C})$, où $\mathcal{P}$ désigne une petite catégorie.)

8.3.1 Foncteurs additifs entre catégories additives. Les foncteurs $\mathbf{F}$ "intéressants" entre deux catégories additives seront ceux qui respectent l'additivité des morphismes, *i.e.* tels les que les applications

$$\mathbf{F} : \big(\mathrm{Mor}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B});+;\mathbf{0}_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}}\big) \to \big(\mathrm{Mor}(\mathbf{F}(\boldsymbol{A}),\mathbf{F}(\boldsymbol{B}));+;\mathbf{0}_{\mathbf{F}(\boldsymbol{A}),\mathbf{F}(\boldsymbol{B})}\big)\,,$$

sont des *homomorphismes de groupes*. Dans ces cas, on dira que le foncteur $\mathbf{F}$ est «additif».

8.3.1-1. Remarque et exercice : Un foncteur additif $\mathbf{F}$ entre deux catégories additives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ induit (au sens du paragraphe 8.2.4) un foncteur entre les catégories des multi-complexes d'objets de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Tous ces foncteurs sont additifs.

Plus généralement,

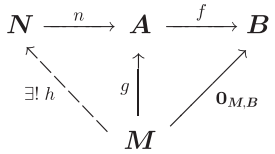
a) Si $\mathcal{P}$ est une petite catégorie, $\mathrm{Fonct}(\mathcal{P},\mathcal{C})$ et $\mathrm{Fonct}(\mathcal{P},\mathcal{D})$ sont des catégories additives et le foncteur induit par $\mathbf{F}$ est additif.

b) Si $\mathbf{F}$ est un foncteur entre deux petites catégories $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, le foncteur ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{F}$ coinduit de $\mathrm{Fonct}(\mathcal{P}_2,\mathcal{C})$ vers $\mathrm{Fonct}(\mathcal{P}_1,\mathcal{C})$, est additif.

8.3.2 Cohomologie et catégories abéliennes. Disposant de la catégorie de complexes d'une catégorie additive, nous souhaiterions pouvoir parler de cohomologie. Pour ceci il nous faut des conditions garantissant l'existence de *noyau et conoyau d'un morphisme*.

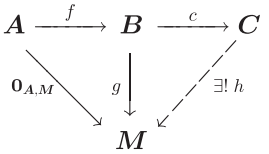
8.3.2-1. Définition : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive et soit $f \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

- On appelle «noyau» pour f la donnée *à la fois* d'un objet $\boldsymbol{N}$ et d'un morphisme $n \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{A})$ tel que tout morphisme g de codomaine $\boldsymbol{A}$ vérifiant $f \circ g = 0$, se factorise par n, *i.e.* il existe *un unique* h de codomaine $\boldsymbol{N}$ tel que $g = n \circ h$. Soit graphiquement :



  Le morphisme $f \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ est dit «injectif» lorsque $\boldsymbol{N}$ est un objet *nul*.

- On appelle «conoyau» pour f la donnée *à la fois* d'un objet $\boldsymbol{C}$ et d'un morphisme $c \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ tel que tout morphisme g de domaine $\boldsymbol{B}$ vérifiant $g \circ f = 0$, se factorise par c, *i.e.* il existe *un unique* h de domaine $\boldsymbol{C}$ tel que $g = h \circ c$.



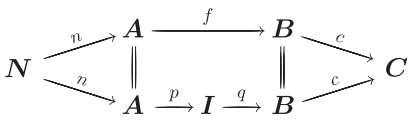
  Le morphisme $f \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ est dit «surjectif» lorsque $\boldsymbol{C}$ est un objet *nul*.

8.3.2-2. Remarque : Les conditions d'existence de noyaux et conoyaux ne suffisent pas dans une catégorie additive, à elles toutes seules, à garantir qu'un morphisme à la fois injectif et surjectif est un isomorphisme. Cette conclusion résultera de l'axiome 8.3.2-3-(2) des catégories abéliennes.

8.3.2-3. Définition : Une catégorie «abélienne» est une catégorie *additive* dans laquelle :

Ab-1) Tout morphisme possède un noyau et un conoyau.

Ab-2) Pour tout morphisme $f \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, il existe un objet $\boldsymbol{I}$ et une factorisation $f = q \circ p$ avec $p \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I})$ et $q \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{B})$ tels que dans le diagramme :



- n est un noyau pour f ;
- c est un conoyau pour f ;
- p est un conoyau pour n ;
- q est un noyau pour c.

Les couples $(p, \boldsymbol{I})$ et $(\boldsymbol{I}, q)$ sont appelés respectivement «image» et «coimage» pour le morphisme f.

8.3.2-4. Exercice : Montrez que dans une catégorie abélienne les isomorphismes sont précisément les morphismes à la fois injectifs et surjectifs.

8.3.2-5. Exercice : Montrez que si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive (resp. abélienne) la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ l'est également. (On dit que ces catégories sont autoduales.)

8.3.2-6. Exercice : Indiquez quelles catégories dans la liste 8.1-4 sont additives et possèdent des noyaux et conoyaux.

Lorsque des choix "canoniques" des noyaux et conoyaux existent pour tous les morphismes d'une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ (comme c'est le cas dans les catégories de modules), nous pouvons définir le «foncteur de cohomologie» : $H^* : \mathbf{C}(\mathcal{C}) \rightsquigarrow \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$ en posant :

$$H^j\big(\boldsymbol{A}^*, d_*\big) := \mathrm{coker}(\bar{d}_{i-1} : \boldsymbol{A}^{i-1} \to \ker(d_i))\,,$$

où $\bar{d}_{i-1}$ désigne *le* morphisme factorisant d_{i-1} à travers $\ker(d_i)$.

8.3.2-7. Remarque et exercice : Nous avons déjà signalé que l'additivité était une propriété des catégories héritée par les catégories des multi-complexes différentiels gradués d'objets. L'existence des noyaux et conoyaux (et même des choix canoniques de ces objets) l'est également. Ceci résulte de l'observation, élémentaire en catégories de modules, que lors d'un morphisme de complexes différentiels gradués, la différentielle induit une structure canonique de complexe différentiel gradué sur la suite des noyaux et conoyaux calculés terme-à-terme ; les objets ainsi construits, munis des morphismes d'injection canonique et de projection canonique, sont alors des noyau et conoyau (canoniques) dans la catégorie de complexes différentiels gradués.

8.3.3 Exactitude des foncteurs additifs sur les catégories (de complexes) de modules. [31] Considérons un foncteur *additif* $\mathbf{F}$ entre deux catégories de complexes de modules $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$. Comme $\mathbf{F}$ induit des foncteurs sur $\mathbf{C}^*(\mathfrak{C})$ et $\mathfrak{C}^{\mathbb{Z}}$ et que le foncteur cohomologie est bien défini, on obtient un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^*(\mathfrak{C}) & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathbf{C}^*(\mathfrak{D}) \\ {\scriptstyle H^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H^*} \\ \mathfrak{C}^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathfrak{D}^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

8.3.3-1. Définition : Le foncteur additif $\mathbf{F}$ est dit «exact» si le diagramme précédent est commutatif *à isomorphisme naturel près*, *i.e.* s'il existe un isomorphisme naturel reliant les foncteurs $H^*\circ\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}\circ H^*$.

8.3.3-2. Définition : Un complexe d'objets d'une catégorie abélienne est dit «exact» si toutes ses cohomologies sont nulles.

Un complexe exact de la forme $\cdots\to\mathbf{0}\to\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}\to\mathbf{0}\cdots$ est dit une «suite exacte courte».

8.3.3-3. Proposition : *Les conditions suivantes sont équivalentes pour un foncteur additif* $\mathbf{F}$ *entre catégories abéliennes.*

- $\mathbf{F}$ *est exact.*
- $\mathbf{F}$ *transforme un complexe exact en un complexe exact.*
- $\mathbf{F}$ *transforme une suite exacte courte en une suite exacte courte.*

Sa démonstration résulte des considérations suivantes que bien que nous exposions dans le cadre d'une catégorie de modules, se transposent à toute catégorie abélienne.

Soit $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$ un complexe de $\mathcal{A}$-modules, et considérons pour chaque $j\in\mathbb{Z}$, le diagramme commutatif suivant, où les lignes et colonnes sont des complexes :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \\ & & 0\to I^j & \xrightarrow{p_j} & K^j & \xrightarrow{q_j} H^j\to 0 & I^{j+1} & & \\ & & {\scriptstyle\beta_{j-1}}\uparrow & & {\scriptstyle\alpha_j}\downarrow & & {\scriptstyle\beta_{j+1}}\uparrow & & \\ \cdots & \xrightarrow{d_{j-2}} & \boldsymbol{A}^{j-1} & \xrightarrow{d_{j-1}} & \boldsymbol{A}^j & \xrightarrow{d_j} & \boldsymbol{A}^{j+1} & \xrightarrow{d_{j+1}} & \cdots \\ & & {\scriptstyle\alpha_{j-1}}\uparrow & & {\scriptstyle\beta_j}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_{j+1}}\uparrow & & \\ & & K^{j-1} & & 0\to I^{j+1} & \xrightarrow{p_{j+1}} & K^{j+1} & \xrightarrow{q_{j+1}} H^{j+1}\to 0 & \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array} \qquad (\ddagger)$$

[31] Toutes les considération de ce paragraphe sont valables pour les catégories abéliennes en général. Une difficulté essentielle dans les catégories abéliennes vient du manque de la notion d'*élément d'un objet* fort commode pour étudier le comportement des morphismes.

8.3.3-4. Définition : Une suite "courte" de modules (la composition de deux morphismes successifs étant nulle) :

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0\,,$$

est dite «exacte à gauche» lorsque sa cohomologie aux termes $1, 2$ est nulle, «exacte à droite» lorsque c'est le cas aux termes $2, 3$.

Ceci étant, on repère cinq suites courtes dans le diagramme (‡), deux horizontales et trois verticales. Nous allons introduire des morphismes *naturels* entre H^* et $H^*(\boldsymbol{A}^*, d_*)$

Lorsque les suites courtes de (‡) *sont toutes exactes à* ***droite***. On construit un morphisme fonctoriel sur la catégorie des diagrammes de la forme (‡) entre :

$$H^j \longrightarrow H^j(\boldsymbol{A}^*, d_*)\,.$$

Voici comment : la surjectivité de q_j permet de relever tout élément de H^j. Soit $h \in H^j$ et posons $q_j(k) = h$. L'élément $\alpha_j(k)$ est alors un cocycle car $d_j \circ \alpha_j(k) = \alpha_{j+1} \circ p_{j+1} \circ \beta_j \circ \alpha_j(k) = 0$, puisque $\beta_j \circ \alpha_j = 0$. D'autre part si k' est un autre relèvement de h, l'exactitude en K^j de la suite exacte courte horizontale garantit que la différence $k - k'$ appartient à l'image de p_j, et même à l'image de $p_j \circ \beta_{j-1}$, puisque β_{j-1} est surjective. Il s'ensuit que l'élément $\alpha_j(k - k')$ appartient à l'image de $\alpha_j \circ p_j \circ \beta_{j-1} = d_{j-1}$. Par conséquent, l'élément que nous associons à $h \in H^j$ dans $H^j(\boldsymbol{A}^*)$ était bien défini.

8.3.3-5. Exercice :

- Etudiez le problème de la naturalité de cette construction.
- Faites le cas où toutes les suites courtes sont exactes à gauche pour définir un morphisme naturel $H^j(\boldsymbol{A}^*) \to H^j$.
- Montrez, pour terminer, que ces morphismes sont inverses l'un de l'autre lorsque toutes les suites courtes sont *exactes*.

8.3.3-6. Exercice : Définissez les suites courtes de (‡) de manière à ce que $K^* = \ker(d_*)$, $I^* = \mathrm{im}(d_{*-1})$ et $H^* = H^*(\boldsymbol{A}^*, d_*)$. Donnez la démonstration de la proposition 8.3.3-3.

8.3.3-7. Remarque et définitions : Un foncteur covariant $\mathbf{F}$ entre deux catégories abéliennes est dit «exact à droite» lorsqu'il transforme toute suite exacte courte en une suite exacte à droite. Il est dit «exact à gauche» s'il transforme toute suite exacte courte en une suite exacte à gauche.

Les remarques qui précèdent montrent que pour tout foncteur $\mathbf{F}$ exact à droite, il existe une transformation naturelle entre les foncteurs

$$\mathbf{F} \circ H^* \to H^* \circ \mathbf{F}\,,$$

et *vice-versa* lorsque le foncteur est exact à gauche.

8.3.3-8. Exercice : Indiquez dans la liste des foncteurs 8.2.5-1, ceux qui sont additifs, puis exacts.

8.3.3-9. Exercice : Le foncteur de cohomologie est un foncteur additif de $\mathbf{C}^*(\mathrm{Mod}(\mathcal{A}))$ vers $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})$. Est-il exact ?

8.3.4 Exactitude des foncteurs additifs dans les catégories d'espaces vectoriels. Soit k un corps abstrait et notons $\mathrm{Vec}(k)$ la catégorie des espaces vectoriels sur k, où les morphismes sont les applications k-linéaires.

8.3.4-1. Proposition : *Un foncteur additif de* $\mathrm{Vec}(k)$ *vers une catégorie abélienne quelconque est toujours* exact.

Démonstration : Commençons par quelques rappels généraux. Soit $\mathcal{A}$ un anneau arbitraire. Une suite exacte courte de $\mathcal{A}$-modules :

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{A} \xrightarrow{p} \boldsymbol{B} \xrightarrow{q} \boldsymbol{C} \longrightarrow 0\,,$$

est dite «scindée» s'il existe un morphisme de $\mathcal{A}$-modules $\sigma : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$ tel que $\sigma \circ q = \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}$; un tel morphisme est appelé une «section» de q. Dans ce cas, le morphisme $b \in \boldsymbol{B} \mapsto b - \sigma \circ q(b)$ est a valeurs dans $\mathrm{im}(p)$ et définit donc un morphisme $\pi_\sigma : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ vérifiant $\pi_\sigma \circ p = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}$. Un tel morphisme est appelé une «rétraction» de p. L'existence de rétractions et de sections sont des phénomènes équivalents, et lorsqu'ils ont lieu les morphismes $p + \sigma : \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$ et $\pi_\sigma \oplus q : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C}$ sont inverses l'un de l'autre.

Ceci étant, démontrez qu'un foncteur *additif* transforme toujours une suite exacte scindée en suite scindée (donc exacte).

Or, dans la catégorie des espaces vectoriels, le théorème d'existence de bases garantit que toute suite exacte courte *est scindée*. Tout foncteur additif sur $\mathrm{Vec}(k)$ préservera, par conséquent, l'exactitude des suites exactes courtes, et sera, d'après 8.3.3-3, *exact*. ∎

8.3.4-2. Remarque : Cette dernière proposition est également vraie si l'on remplace $\mathrm{Vec}(k)$ par la catégorie $\mathrm{Vec}^{\Delta}(k)$ d'espaces vectoriels Δ-gradués (morphismes de degré 0 pour simplifier). Par contre, il faut bien prendre garde du fait qu'elle est **fausse** lorsque l'on remplace $\mathrm{Vec}(k)$ par la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathrm{Vec}(k))$ des complexes d'espaces vectoriels. La raison étant que si toute suite exacte courte de complexes admet un scindage *en tant que suite exacte courte espaces vectoriels gradués*, il n'existe pas toujours de scindage commutant aux différentielles, *i.e.* de scindage *dans* la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathrm{Vec}(k))$.

8.3.4-2.1. Exercice : Voici un exemple illustrant cette difficulté : Pour tout k-espace vectoriel $\boldsymbol{V}$, la suite de complexes (verticaux) suivante est exacte dans la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathrm{Vec}(k))$:

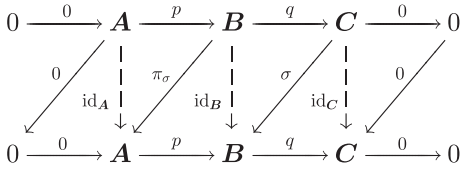
$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \boldsymbol{V} & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{V}}} & \boldsymbol{V} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\boldsymbol{V}}} & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \boldsymbol{V} & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{V}}} & \boldsymbol{V} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
\hline
\mathbf{0} & \longrightarrow & \boldsymbol{A}^* & \xrightarrow{p_*} & \boldsymbol{B}^* & \xrightarrow{q_*} & \boldsymbol{C}^* & \longrightarrow & \mathbf{0}
\end{array}$$

Montrez que pour peu que $\dim_k(\boldsymbol{V}) > 0$, il n'existe pas de section σ_* pour le morphisme de complexes q_*, commutant aux différentielles (flèches verticales).

8.3.5 Homotopies. Revenons sur la notion de "suite courte de $\mathcal{A}$-modules *scindée*" introduite dans le paragraphe précédent. La donnée :

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{A} \underset{\pi_\sigma}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{B} \underset{\sigma}{\overset{q}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{C} \longrightarrow 0\,,$$

se représente classiquement sous la forme suivante de diagramme :



où l'on constate les égalités :

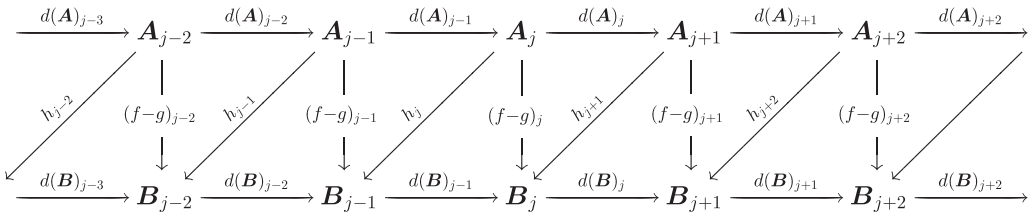
$$\begin{cases} 0 \circ 0 \;+ \pi_\sigma \circ p = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}\,; \\ p \circ \pi_\sigma + \;\sigma \circ q \;= \mathrm{id}_{\boldsymbol{B}}\,; \\ q \circ \sigma \;+\; 0 \circ 0 \;= \mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}\,. \end{cases}$$

Ce type de données constitue ce que l'on appelle une *homotopie*.

8.3.5-1. Définition : Soient $\mathcal{C}$ une catégorie *additive*, et $(\boldsymbol{A}^*, d(\boldsymbol{A})_*)$ et $(\boldsymbol{B}^*, d(\boldsymbol{B})_*)$ deux complexes d'objets de $\mathcal{C}$ (*i.e.* deux objets de $\mathbf{C}^*(\mathcal{C})$). On dit de deux morphismes de complexes f_* et g_* de $(\boldsymbol{A}^*, d(\boldsymbol{A})_*)$ vers $(\boldsymbol{B}^*, d(\boldsymbol{B})_*)$ qu'ils sont «homotopes», lorsqu'il existe une famille de morphismes $h_j \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{A}_j, \boldsymbol{B}_{j-1})$, où $j \in \mathbb{Z}$, telle que :

$$d(\boldsymbol{B})_{j-1} \circ h_j + h_{j+1} \circ d(\boldsymbol{A})_j = f_j - g_j\,, \qquad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z}. \tag{h}$$

On a donc un diagramme de la forme :



L'un des intérêts le plus remarquables des homotopies vient du résultat suivant (vrai sur les catégories abéliennes en général).

8.3.5-2. Proposition : *Soient $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$ et $(\boldsymbol{B}^*, d_*)$ deux complexes de $\mathcal{A}$-modules. Deux morphismes de complexes f_* et g_* $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$ et $(\boldsymbol{B}^*, d_*)$ homotopes, induisent* le même *morphisme en cohomologie,* i.e. *les morphismes :*

$$H(f)_* : H^*(\boldsymbol{A}^*, d_*) \to H^*(\boldsymbol{B}^*, d_*) \quad \textit{et} \quad H(g)_* : H^*(\boldsymbol{A}^*, d_*) \to H^*(\boldsymbol{B}^*, d_*)\,,$$

sont identiques.

Démonstration : En effet, pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, l'égalité $(f-g)_j = d(\boldsymbol{B})_{j-1} \circ h_j + h_{j+1} \circ d(\boldsymbol{A})_j$ appliquée à un j-cocycle ξ de $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$ montre que $(f-g)_j(\xi)$ est un j-cobord de $(\boldsymbol{B}^*, d_*)$; il s'ensuit que $0 = H(f-g)_j = H(f)_j - H(g)_j$. ∎

8.3.5-3. Définition : Un complexe de modules est dit «homotope à zéro» lorsque le morphisme "identité" est homotope au "morphisme nul".

La cohomologie d'un complexe de modules homotope à zéro est donc nulle en tous degrés et un tel complexe est nécessairement *exact*. L'équivalence entre "complexes homotopes à zéro" et "complexes exacts" est **fausse en générale**, pourtant l'exemple du scindage d'une suite exacte courte d'espaces vectoriels se généralise, dans un premier temps, de façon inductive à tout complexe d'espaces vectoriels bornée à droite ou à gauche ; puis à un complexe arbitraire. La question (a) de l'exercice suivant révèle un phénomène d'extrême importance en catégories *dérivées*, la première partie en rapport avec les objets *injectifs* et la seconde avec les objets *projectifs*. Il s'avère que les objets de $\mathrm{Vec}(k)$ sont précisément de ces deux types simultanément.

8.3.5-4. Exercice : Soit $(\boldsymbol{V}_*, d_*)$ un complexe *exact* de k-espaces vectoriels.
a) Montrer que le deux complexes suivants sont homotopes à zéro :

$$0 \longrightarrow \ker(d_0) \longrightarrow \boldsymbol{V}_0 \xrightarrow{d_0} \boldsymbol{V}_1 \xrightarrow{d_1} \boldsymbol{V}_2 \xrightarrow{d_2} \boldsymbol{V}_3 \xrightarrow{d_3} \cdots,$$
$$\cdots \longrightarrow \boldsymbol{V}_{-4} \xrightarrow{d_{-4}} \boldsymbol{V}_{-3} \xrightarrow{d_{-3}} \boldsymbol{V}_{-2} \xrightarrow{d_{-2}} \boldsymbol{V}_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \ker(d_0) \longrightarrow 0\,.$$

b) Reliez les homotopies de (a) en une homotopie pour $(\boldsymbol{V}_*, d_*)$.

Revenons encore sur la notion d'homotopie en observant attentivement les catégories qui entrent en jeu dans sa définition.

Les complexes $(\boldsymbol{A}^*, d(\boldsymbol{A})_*)$ et $(\boldsymbol{B}^*, d(\boldsymbol{B})_*)$ sont des objets de $\mathbf{C}^*(\mathcal{C})$, et lorsque l'on oublie leurs différentielles, $\boldsymbol{A}^*$ et $\boldsymbol{B}^*$ sont des objets de $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$, auquel cas $d(\boldsymbol{A}) \in \mathrm{Mor}^{[1]}_{\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}}(\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{A}^*)$ et *mutatis mutandis* pour $\boldsymbol{B}^*$. D'autre part, f_* et g_* définissent des éléments de $\mathrm{Mor}^{[0]}_{\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}}(\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*)$. On demande alors à la famille $\{h_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *seulement* d'être un morphisme $h \in \mathrm{Mor}^{[-1]}_{\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}}(\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*)$. La condition d'homotopie (h) est donc une condition *dans la catégorie* $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$ donnée par :

$$h \circ d(\boldsymbol{A}) + d(\boldsymbol{B}) \circ h = f - g\,. \tag{h'}$$

Soit maintenant $\mathbf{F}$ un foncteur *additif* de la catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{D}$ (additive). Nous avons déjà remarqué que ce foncteur induit deux autres foncteurs, également additifs, $\mathbf{F} : \mathbf{C}^*(\mathcal{C}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathcal{C})$ et $\mathbf{F} : \mathcal{C}^{\mathbb{Z}} \rightsquigarrow \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$. Or, l'*additivité* est précisément l'ingrédient nécessaire pour la conservation de la relation d'homotopie (h'), *i.e.* :

$$\mathbf{F}[h \circ d(\boldsymbol{A}) + d(\boldsymbol{B}) \circ h] = \mathbf{F}[f - g]\,, \quad \text{soit} \quad \mathbf{F}\,h \circ d(\mathbf{F}\,\boldsymbol{A}) + d(\mathbf{F}\,\boldsymbol{B}) \circ \mathbf{F}\,h = \mathbf{F}\,f - \mathbf{F}\,g\,.$$

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant qui relève l'importance, à la fois de la notion d'homotopie et des catégories et foncteurs additifs :

8.3.5-5. Lemme : *Les foncteurs* additifs *définis sur une catégorie additive* $\mathcal{C}$*, transforment des morphismes homotopes de la catégorie* $\mathbf{C}^*(\mathcal{C})$ *en des morphismes homotopes.*

De tels foncteurs transforment, en particulier, des complexes homotopes à zéro en des complexes homotopes à zéro.

8.3.5-6. Remarque : La définition d'homotopie et le lemme précédent peuvent être généralisés de façon évidente au contexte suivant. Soit $\mathbf{F}$ un foncteur additif entre deux catégories additives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Pour toute petite catégorie $\mathcal{P}$, notons $\mathcal{P}^\circ$ la sous-catégorie de $\mathcal{P}$ comportant les mêmes objets mais ne comportant aucun autre morphisme que les identités de $\mathcal{P}$ (la catégorie $\mathcal{P}^\circ$ est donc équivalente à l'ensemble d'objets de $\mathcal{P}$). Etant donné maintenant un complexe $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$ d'objets de $\mathrm{Fonct}(\mathcal{P}, \mathcal{C})$, il suffira de demander des homotopies *au niveau de chaque objet* de $\mathcal{P}$ (la définition d'homotopie à donc lieu dans la catégorie $\mathrm{Fonct}(\mathcal{P}^\circ, \mathcal{C})$) pour pouvoir conclure que le complexe $\mathbf{F}(\boldsymbol{A}^*, d_*)$ dans $\mathbf{C}^*(\mathrm{Fonct}(\mathcal{P}, \mathcal{D}))$ est lui aussi homotope à zéro.

Une manière d'illustrer cette remarque est la suivante : Un complexe exact de multicomplexes d'espaces vectoriels est, d'après l'exercice 8.3.5-4, scindé *au niveau de chaque multidegré*. L'application d'un foncteur additif quelconque, *induit à partir d'un foncteur additif de la catégorie* $\mathrm{Vec}(k)$, transformera le complexe en question en un complexe exact.

Réciproquement, si le complexe obtenu en appliquant un foncteur additif, n'est pas exact, cela signifie nécessairement que ce foncteur ne dépend pas seulement des objets du multicomplexe, mais fait intervenir également ses différentielles. Le foncteur qui associe à un complexe sa cohomologie est l'exemple typique de cette situation, mais là la dépendance est claire.

Bien entendu, lorsque les catégories considérées sont abéliennes la notion d'homotopie donne des conditions très efficaces pour garantir la nullité des cohomologies non seulement d'un complexe mais aussi des complexes obtenus en lui appliquant un foncteur additif *arbitraire*.

8.4 Limites

8.4.1 Systèmes inductifs et projectifs.

8.4.1-1. Définition : Soient $\mathcal{A}\mathbf{b}$ une catégorie abélienne et $\mathcal{I}$ une petite catégorie ([32]). On appellera «système inductif de $\mathcal{A}\mathbf{b}$» (resp. «système projectif») la donnée d'un foncteur **covariant** (resp. **contravariant**) $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightsquigarrow \mathcal{A}\mathbf{b}$. On référera aux objets de $\mathcal{I}$ comme étant les «indices» du système inductif (resp. projectif).

Plus généralement, on appellera «catégorie de systèmes inductifs de $\mathcal{A}\mathbf{b}$ indexés par la catégorie $\mathcal{I}$», la catégorie $\mathrm{Fonct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}\mathbf{b})$ des foncteurs covariants de $\mathcal{I}$ vers $\mathcal{A}\mathbf{b}$. On notera cette catégorie de préférence : $\mathrm{Ind}(\mathcal{I}, \mathcal{A}\mathbf{b})$.

On définit *mutatis mutandis* la catégorie $\mathrm{Prj}(\mathcal{I}, \mathcal{A}\mathbf{b})$ de «systèmes projectifs de $\mathcal{A}\mathbf{b}$ indexés par la catégorie $\mathcal{I}$».

8.4.1-2. Remarque : Lorsque la catégorie $\mathcal{I}$ est la catégorie associée à un ensemble partiellement ordonné $(\mathfrak{A}, \preccurlyeq)$ on retrouve les notions habituelles de systèmes inductifs et projectifs (*cf.* 8.2.4 page 105).

8.4.1-3. Exercice : Montrer que la catégorie des systèmes inductifs de $\mathcal{A}\mathbf{b}$ (resp. projectifs) indexés par la petite catégorie $\mathcal{I}$ est une catégorie abélienne.

[32] Une définition où $\mathcal{A}\mathbf{b}$ et $\mathcal{I}$ sont des catégories quelconques est bien entendu possible, mais une telle généralité sera inutile pour ce cours.

Systèmes inductifs et projectifs constants

Pour tout objet $\boldsymbol{M}$ de $\mathcal{Ab}$, le «foncteur constant $\mathcal{K}_{\boldsymbol{M}}$» qui fait correspondre à tout indice $\alpha \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{I})$ l'objet $\boldsymbol{M}$ et à tout morphisme d'indices le morphisme $\mathrm{id}_{\boldsymbol{M}}$, définit à la fois un système inductif et projectif. La correspondance qui associe $\boldsymbol{M} \rightsquigarrow \mathcal{K}_{\boldsymbol{M}}$ et qui fait correspondre à $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{Ab}}(\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2)$ la transformation naturelle $\mathcal{K}_\varphi : \alpha \rightsquigarrow \big(\varphi : \mathcal{K}_{\boldsymbol{M}_1}(\alpha) \to \mathcal{K}_{\boldsymbol{M}_2}(\alpha)\big)$ est alors un foncteur covariant et une ***équivalence de catégories*** de $\mathcal{Ab}$ vers la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ind}(\mathfrak{I};\mathcal{Ab})$ (resp. de $\mathrm{Prj}(\mathfrak{I};\mathcal{Ab})$) des foncteurs constants. Dans la suite, nous noterons de manière indistincte les objets et morphismes de cette sous-catégorie et ceux de $\mathcal{Ab}$; les notations '$\mathcal{K}_{\boldsymbol{M}}$' et '$\mathcal{K}_\varphi$' seront donc remplacées par '$\boldsymbol{M}$' et 'φ' lorsque le contexte ne pourra induire à confusion.

8.4.1-4. Définition : Pour tout système inductif $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ind}(\mathfrak{I};\mathcal{Ab}))$, on appelle «limite» de $\mathcal{F}$, la donnée d'un objet $\varinjlim(\mathcal{F}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{Ab})$ **et** d'une transformation naturelle de foncteurs $\Theta(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{K}_{\varinjlim(\mathcal{F})}$ vérifiant la propriété universelle suivante :

- *Pour tout objet $\boldsymbol{N} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{Ab})$ et toute transformation naturelle $\Phi : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{K}_{\boldsymbol{N}}$, il existe un, et un seul, morphisme $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{Ab}}\big(\varinjlim(\mathcal{F}), \boldsymbol{N}\big)$ tel que $\Phi = \varphi \circ \Theta(\mathcal{F})$.*

En dualisant, on obtient la notion de limite d'un système projectif :

Pour tout système projectif $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Prj}(\mathfrak{I};\mathcal{Ab}))$, on appelle «limite» de $\mathcal{F}$, la donnée d'un objet $\varprojlim(\mathcal{F}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{Ab})$ **et** d'une transformation naturelle de foncteurs $\Theta(\mathcal{F}) : \mathcal{K}_{\varprojlim(\mathcal{F})} \rightsquigarrow \mathcal{F}$ vérifiant la propriété universelle suivante :

- *Pour tout objet $\boldsymbol{N} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{Ab})$ et toute transformation naturelle $\Phi : \mathcal{K}_{\boldsymbol{N}} \rightsquigarrow \mathcal{F}$, il existe un, et un seul, morphisme $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{Ab}}\big(\boldsymbol{N}, \varprojlim(\mathcal{F})\big)$ tel que $\Phi = \Theta(\mathcal{F}) \circ \varphi$.*

Le lemme suivant est alors facile à prouver et est laissé en exercice.

8.4.1-5. Lemme : *Un système inductif de $\mathrm{Ind}(\mathfrak{I};\mathcal{Ab})$ (resp. projectif de $\mathrm{Prj}(\mathfrak{I};\mathcal{Ab})$) admet au plus une limite (à isomorphisme près).*

8.4.1-6. Définition : On dit qu'une catégorie abélienne $\mathcal{Ab}$ «possède des limites inductives» lorsque ***quelle que soit*** la petite catégorie $\mathfrak{I}$, tout système inductif de $\mathrm{Ind}(\mathfrak{I};\mathcal{Ab})$ admet une limite.

De manière analogue, on dit que la catégorie $\mathcal{Ab}$ «possède des limites projectives» lorsque ***quelle que soit*** la petite catégorie $\mathfrak{I}$, tout système projectif de $\mathrm{Prj}(\mathfrak{I};\mathcal{Ab})$ admet une limite.

Enfin, on dira que $\mathcal{Ab}$ «possède des limites» lorsqu'elle possède, à la fois, des limites inductives et projectives.

Étude générale de la limite inductive

Supposons que $\mathcal{Ab}$ possède des limites inductives. Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ind}(\mathfrak{I}, \mathcal{Ab}))$ deux systèmes inductifs et soit $\mu : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{G}$ une transformation naturelle. On a alors une transformation naturelle composée :

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\mu} \mathcal{G} \xrightarrow{\Theta(\mathcal{G})} \mathcal{K}_{\varinjlim(\mathcal{G})}$$

d'où une transformation naturelle canonique $\varinjlim(\mu) : \mathcal{K}_{\varinjlim(\mathcal{F})} \rightsquigarrow \mathcal{K}_{\varinjlim(\mathcal{G})}$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\quad\mu\quad} & \mathcal{G} \\ {\scriptstyle\Theta(\mathcal{F})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Theta(\mathcal{G})} \\ \varinjlim(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\varinjlim(\mu)} & \varinjlim(\mathcal{G}) \end{array}$$

8.4.1-7. Proposition : *Soit $\mathcal{A}\mathbf{b}$ une catégorie de modules (plus généralement de multicomplexes de modules).*

a) *La catégorie $\mathcal{A}\mathbf{b}$ admet des limites inductives.*

b) *Pour tout système inductif $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ind}(\mathfrak{I};\mathcal{A}\mathbf{b}))$, il existe un choix canonique pour $\varinjlim(\mathcal{F})$ et pour la transformation naturelle $\Theta(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{K}_{\varinjlim(\mathcal{F})}$.*

c) *Pour toute transformation naturelle de systèmes inductifs $\mu : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{G}$, il existe un choix canonique pour le morphisme $\varinjlim(\mu) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}\mathbf{b}}(\varinjlim(\mathcal{F}), \varinjlim(\mathcal{G}))$.*

d) *La correspondance $\varinjlim : \mathrm{Ind}(\mathfrak{I};\mathcal{A}\mathbf{b}) \rightsquigarrow \mathcal{A}\mathbf{b}$ qui fait correspondre $\mathcal{F} \rightsquigarrow \varinjlim(\mathcal{F})$ et $\mu \rightsquigarrow \varinjlim(\mu)$ est fonctorielle additive et exacte **à droite**.*

Démonstration : L'assertion (a) sera conséquence du fait que les catégories de modules (et plus généralement les catégories de multicomplexes de modules) possèdent des sommes directes de familles arbitrairement indexées (*cf.* exercice 8.4.1-8 pour l'équivalence). L'idée de la construction est la suivante.

Donnons nous une petite catégorie $\mathfrak{I}$ d'ensemble d'objets (indices) noté $\mathfrak{A}$. Soit $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ind}(\mathfrak{I}, \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})))$. On considère le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{A}^2}\Big(\bigoplus_{\theta\in\mathrm{Mor}_{\mathfrak{I}}(\alpha,\beta)}\mathcal{F}(\alpha)\Big) & \xrightarrow{\Pi(\mathcal{F})} & \displaystyle\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}}\mathcal{F}(\alpha) & \xrightarrow{\nu(\mathcal{F})} & \mathrm{coker}(\Pi(\mathcal{F})) \to \mathbf{0} \\ x_{\alpha;\beta,\theta} & \longmapsto & \big(x_\alpha, -\mathcal{F}(\theta)(x_\alpha)\big) \in \mathcal{F}(\alpha)\oplus\mathcal{F}(\beta) & & \end{array}$$

et l'on vérifie que la correspondance $\alpha \rightsquigarrow \big(\nu(\mathcal{F})|_{\mathcal{F}(\alpha)} : \mathcal{F}(\alpha) \to \mathrm{coker}(\Pi(\mathcal{F}))\big)$ définit une transformation naturelle $\Theta : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{K}_{\mathrm{coker}(\Pi(\mathcal{F}))}$.

Ceci étant, pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$, la donnée d'une transformation naturelle $\Xi : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{K}_{\boldsymbol{M}}$ équivaut à :

$$\begin{cases} \text{a) se donner une famille d'homomorphismes } \mathcal{X} = \{\psi_\alpha : \boldsymbol{M}_\alpha \to \boldsymbol{M}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \\ \text{b) telle que pour tout } \beta \in \mathfrak{A} \text{ et tout } \theta \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{I}}(\alpha,\beta), \text{ on a } \psi_\alpha = \psi_\beta \circ \mathcal{F}(\theta). \end{cases}$$

Or, la famille $\mathcal{X}$ définit le morphisme $\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}}\psi_\alpha : \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{M}_\alpha \to \boldsymbol{M}$, et l'on voit bien que les relations (b) assurent que $\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}}\psi_\alpha$ s'annule sur l'image de $\Pi(\mathcal{F})$. Il s'ensuit qu'il existe un unique homomorphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\xi : \mathrm{coker}(\Pi(\mathcal{F})) \to \boldsymbol{M}$ tel que $\Xi = \xi \circ \Theta$. Les assertions (a) et (b) de la proposition sont ainsi démontrées en posant :

$$\boxed{\varinjlim(\mathcal{F}) := \mathrm{coker}(\Pi(\mathcal{F})) \quad \text{et} \quad \Theta(\mathcal{F}) := \Theta} \qquad (*)$$

On retiendra l'existence d'une surjection canonique (naturelle) :

$$\boxed{\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}}\mathcal{F}(\alpha) \xrightarrow{\nu(\mathcal{F})} \varinjlim(\mathcal{F})} \qquad (\ddagger)$$

Pour (c), la donnée d'une transformation naturelle de systèmes inductifs $\mu : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, donne lieu à un

diagramme de $\boldsymbol{A}$-modules commutatif et **canonique** :

$$\begin{array}{ccccc}
\bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{A}^2}\Big(\bigoplus_{\theta\in\mathrm{Mor}_{\mathfrak{I}}(\alpha,\beta)}\mathcal{F}(\alpha)\Big) & \xrightarrow{\Pi(\mathcal{F})} & \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}}\mathcal{F}(\alpha) & \xrightarrow{\nu(\mathcal{F})} & \varinjlim(\mathcal{F})\to\mathbf{0}\\
\downarrow{\scriptstyle\sum\sum\mu(\alpha)} & \bigoplus & \downarrow{\scriptstyle\sum\mu(\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle\varinjlim(\mu)}\\
\bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{A}^2}\Big(\bigoplus_{\theta\in\mathrm{Mor}_{\mathfrak{J}}(\alpha,\beta)}\mathcal{G}(\alpha)\Big) & \xrightarrow{\Pi(\mathcal{G})} & \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}}\mathcal{G}(\alpha) & \xrightarrow{\nu(\mathcal{G})} & \varinjlim(\mathcal{G})\to\mathbf{0}
\end{array}$$

où le morphisme $\varinjlim(\mu)$ est celui induit par les morphismes verticaux des deux premières colonnes.

La démonstration de l'additivité du foncteur $\varinjlim$ est facile mais laborieuse à écrire ; nous la laissons aux soins du lecteur courageux. L'exactitude à droite est par contre plus intéressante.

On commence par remarquer que les correspondances de $\mathrm{Ind}(\mathfrak{I};\mathcal{A}\mathbf{b})$ vers $\mathcal{A}\mathbf{b}$:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{F}\rightsquigarrow\bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{A}^2}\Big(\bigoplus_{\theta\in\mathrm{Mor}_{\mathfrak{I}}(\alpha,\beta)}\mathcal{F}(\alpha)\Big) & \text{et} & \mu\rightsquigarrow\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{A}^2}\Big(\sum_{\theta\in\mathrm{Mor}_{\mathfrak{I}}(\alpha,\beta)}\mu(\alpha)\Big)\\
\mathcal{F}\rightsquigarrow\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}}\mathcal{F}(\alpha) & \text{et} & \mu\rightsquigarrow\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}}\mu(\alpha)
\end{array}$$

sont fonctorielles **additives et exactes**.

Soit maintenant $\mathbf{0}\to\mathcal{F}\to\mathcal{G}\to\mathcal{H}\to\mathbf{0}$ une suite exacte de systèmes inductifs. On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{A}^2}\Big(\bigoplus_{\theta\in\mathrm{Mor}_{\mathfrak{I}}(\alpha,\beta)}\mathcal{F}(\alpha)\Big) & \xrightarrow{\Pi(\mathcal{F})} & \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}}\mathcal{F}(\alpha) & \xrightarrow{\nu(\mathcal{F})} & \varinjlim(\mathcal{F})\to\mathbf{0}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{A}^2}\Big(\bigoplus_{\theta\in\mathrm{Mor}_{\mathfrak{I}}(\alpha,\beta)}\mathcal{G}(\alpha)\Big) & \xrightarrow{\Pi(\mathcal{G})} & \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}}\mathcal{G}(\alpha) & \xrightarrow{\nu(\mathcal{G})} & \varinjlim(\mathcal{G})\to\mathbf{0}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{A}^2}\Big(\bigoplus_{\theta\in\mathrm{Mor}_{\mathfrak{I}}(\alpha,\beta)}\mathcal{H}(\alpha)\Big) & \xrightarrow{\Pi(\mathcal{H})} & \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}}\mathcal{H}(\alpha) & \xrightarrow{\nu(\mathcal{H})} & \varinjlim(\mathcal{H})\to\mathbf{0}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
\end{array}$$

où les trois lignes et deux premières colonnes sont exactes. La vérification de l'exactitude "à droite" de la colonne de droite se fait alors aisément par une chasse aux diagrammes que nous laissons en exercice. ∎

8.4.1-8. Exercice : Soit $\mathfrak{A}$ un ensemble non vide et notons $(\mathcal{P}_f(\mathfrak{A});\subseteq)$ l'ensemble des parties **non vides et finies** de $\mathfrak{A}$ muni de l'ordre partiel d'inclusion. Pour chaque $\alpha\in\mathfrak{A}$, soit $\boldsymbol{M}_\alpha$ un objet d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}\mathbf{b}$. Soit le système inductif $\mathcal{F}$ de $\mathrm{Ind}((\mathfrak{A},\subseteq);\mathcal{A}\mathbf{b})$ défini par $\mathcal{F}(F):=\bigoplus_{\alpha\in F}\boldsymbol{M}_\alpha$, pour chaque partie finie $\boldsymbol{F}\subseteq\mathfrak{A}$; puis si $\iota:F_1\hookrightarrow F_2$ est l'inclusion canonique, $\mathcal{F}(\iota):\bigoplus_{\alpha\in F_1}\boldsymbol{M}_\alpha\hookrightarrow\bigoplus_{\alpha\in F_2}\boldsymbol{M}_\alpha$ désigne le morphisme d'inclusion canonique des sommes directes.

Montrer que si $\mathcal{A}\mathbf{b}$ admet des limites inductives la paire $(\varinjlim(\mathcal{F}),\Theta(\mathcal{F}))$ définit une somme directe pour la famille $\{\boldsymbol{M}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

Nous voyons donc que pour une catégorie abélienne, il y a équivalence entre les faits de posséder des somme directes de familles arbitraires et le fait de posséder des limites inductives.

Avertissement. **Dans la suite de ce cours, à chaque fois que l'on considérera des catégories abéliennes abstraites, on supposera tacitement qu'elles possèdent des limites.**

Étude générale de la limite projective

Résulte de dualiser le cas des limites projectives.

Supposons que $\mathcal{Ab}$ possède des limites projectives. Soient $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathrm{Ob}(\mathrm{Prj}(\mathcal{I},\mathcal{Ab}))$ deux systèmes projectifs et soit $\mu:\mathcal{F}\rightsquigarrow\mathcal{G}$ une transformation naturelle. On a alors une transformation naturelle composée :

$$\mathcal{K}_{\varprojlim(\mathcal{F})}\xrightarrow{\Theta(\mathcal{F})}\mathcal{F}\xrightarrow{\mu}\mathcal{G}$$

d'où une transformation naturelle canonique $\varprojlim(\mu):\mathcal{K}_{\varprojlim(\mathcal{F})}\rightsquigarrow\mathcal{K}_{\varprojlim(\mathcal{G})}$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc}\varprojlim(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\varprojlim(\mu)} & \varprojlim(\mathcal{G})\\ {\scriptstyle\Theta(\mathcal{F})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Theta(\mathcal{G})}\\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G}\end{array}$$

8.4.1-9. Proposition : *Soit $\mathcal{Ab}$ une catégorie de modules (plus généralement de multicomplexes de modules).*

a) *La catégorie $\mathcal{Ab}$ admet des limites projectives.*

b) *Pour tout système projectif $\mathcal{F}\in\mathrm{Ob}(\mathrm{Prj}(\mathcal{I};\mathcal{Ab}))$, il existe un choix canonique pour $\varprojlim(\mathcal{F})$ et pour la transformation naturelle $\Theta(\mathcal{F}):\mathcal{K}_{\varprojlim(\mathcal{F})}\rightsquigarrow\mathcal{F}$.*

c) *Pour toute transformation naturelle de systèmes projectifs $\mu:\mathcal{F}\rightsquigarrow\mathcal{G}$, il existe un choix canonique pour le morphisme $\varprojlim(\mu)\in\mathrm{Mor}_{\mathcal{Ab}}(\varprojlim(\mathcal{F}),\varprojlim(\mathcal{G}))$.*

d) *La correspondance $\varprojlim:\mathrm{Prj}(\mathcal{I};\mathcal{Ab})\rightsquigarrow\mathcal{Ab}$ qui fait correspondre $\mathcal{F}\rightsquigarrow\varprojlim(\mathcal{F})$ et $\mu\rightsquigarrow\varprojlim(\mu)$ est fonctorielle additive et exacte* ***à gauche****.*

Indication : La démonstration est la même que pour la proposition 8.4.1-7 à ceci près que l'on doit renverser les flèches pour les systèmes projectifs et remplacer les sommes directes par des produits directs. ∎

8.4.2 Exactitude du foncteur limite inductive.

8.4.2-1. Définition : Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite «filtrante» ([33]) lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

a) Pour chaque paire $(\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2)$ d'objets de $\mathcal{C}$, il existe un objet $\boldsymbol{N}$ tel que $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{N})\neq\varnothing$.

b) Pour toute paire d'objets $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ de $\mathcal{C}$ et tout couple (θ_1,θ_2) de morphismes $\theta_i\in\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{N})$, il existe un objet $\boldsymbol{I}$ et un morphisme $\nu\in\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{I})$ vérifiant $\nu\circ\theta_1=\nu\circ\theta_2$

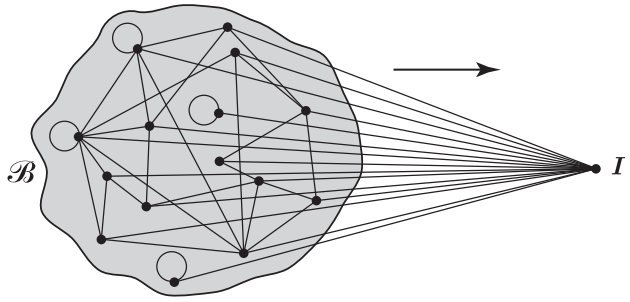
8.4.2-2. Exercice : Montrer que la catégorie associée à un ensemble partiellement ordonné $(\mathfrak{A};\preccurlyeq)$ est filtrante, si et seulement si, pour tout couple d'éléments $(a,b)\in\mathfrak{A}^2$ il existe un élément c vérifiant $a\preccurlyeq c$ et $b\preccurlyeq c$.

[33] On dira parfois «filtrante supérieurement» pour insister sur le sens de la filtration.

8.4.2-3. Exercice : Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie filtrante. Soient $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}_1$ et $\boldsymbol{N}_2$ trois objets de $\mathfrak{C}$. Montrer que pour chaque donnée de deux morphismes $\theta_i \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}_i)$ il existe un objet $\boldsymbol{I}$ et de morphismes $\mu_i \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{I})$ tels que l'on ait $\mu_1 \circ \theta_1 = \mu_2 \circ \theta_2$.

8.4.2-4. Lemme (technique) : *Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie filtrante. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble **fini** de morphismes de $\mathfrak{C}$. Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble (fini) de domaines et codomaines des morphismes de $\mathcal{A}$. Il existe alors un objet $\boldsymbol{I} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ et pour chaque $\boldsymbol{P} \in \mathcal{B}$ un morphisme $\pi_{\boldsymbol{P}} \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{I})$ tels que l'on ait $\pi_{\mathrm{Dom}(\theta)} = \pi_{\mathrm{Codom}(\theta)} \circ \theta$, pour tout $\theta \in \mathcal{A}$.*

Soit graphiquement :



*où les points désignent des objets de $\mathfrak{C}$, les traits à l'intérieur de la zone grisée désignent des morphismes (ou des ensembles finis de morphismes), dans un sens ou l'autre, et les traits menant à $\boldsymbol{I}$ désignent des morphismes de $\mathfrak{C}$ de codomaine $\boldsymbol{I}$. Le lemme affirme l'existence des flèches menant à $\boldsymbol{I}$ de telle sorte que **tous** les sous-diagrammes "triangulaires" de sommet $\boldsymbol{I}$ soient commutatifs.*

Démonstration : Remarquons dans un premier temps que le problème d'existence posé par ce lemme est équivalent à celui où l'on supposerait que $\mathcal{A}$ contient les morphismes identiques pour tous les objets de $\mathcal{B}$. Nous allons admettre dans le suite cette hypothèse et raisonnerons par induction sur le cardinal du sous-ensemble $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ des morphismes *non identiques*.

Cardinal de $\mathcal{A}'$ nul. Dans ce cas une itération facile, à l'aide uniquement de la condition (a) des catégories filtrantes, suffit à prouver le lemme.

Cardinal de $\mathcal{A}'$ strictement positif. On enlève un morphisme non identique θ_0 de $\mathcal{A}$. Comme on a supposé que les morphismes identiques des domaines et codomaines des morphismes de $\mathcal{A}$ sont dans $\mathcal{A}$, l'ensemble $\mathcal{B}$ n'est pas perturbé par le retrait de θ_0. Nous pouvons supposer maintenant, par hypothèse inductive, l'existence d'un objet $\boldsymbol{I}_2$ et d'une famille de morphismes $\{\pi''_{\boldsymbol{P}} \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{I}_2)\}_{\boldsymbol{P}\in\mathcal{B}}$ satisfaisant les demandes du lemme pour tout morphisme de $\mathcal{A}$ à l'exception près (éventuelle) de θ_0. L'application du résultat de l'exercice 8.4.2-3 donne un objet $\boldsymbol{I}_1$ et une paire de morphismes $\lambda \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{I}_1)$ et $\xi_{\mathrm{Codom}(\theta_0)} \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathrm{Codom}(\theta_0), \boldsymbol{I}_1)$ tels que :

$$\xi_{\mathrm{Codom}(\theta_0)} \circ \theta_0 = \lambda \circ \pi''_{\mathrm{Dom}(\theta_0)} .$$

Ceci étant, la famille de morphismes $\{\pi'_{\boldsymbol{P}} := \lambda \circ \pi''_{\boldsymbol{P}} \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{I}_1)\}_{\boldsymbol{P}\in\mathcal{B}}$ continue de satisfaire les demandes du lemme pour tout morphisme de $\mathcal{A}$ à exception près (éventuellement) de θ_0. Sur l'objet $\mathrm{Codom}(\theta_0)$ nous avons à présent deux morphismes de codomaine $\boldsymbol{I}_1$, à savoir $\pi'_{\mathrm{Codom}(\theta_0)}$ et $\xi_{\mathrm{Codom}(\theta_0)}$; l'application de la condition (b) des catégories filtrantes, donne alors un objet $\boldsymbol{I}$ et un morphisme $\mu \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I})$ vérifiant :

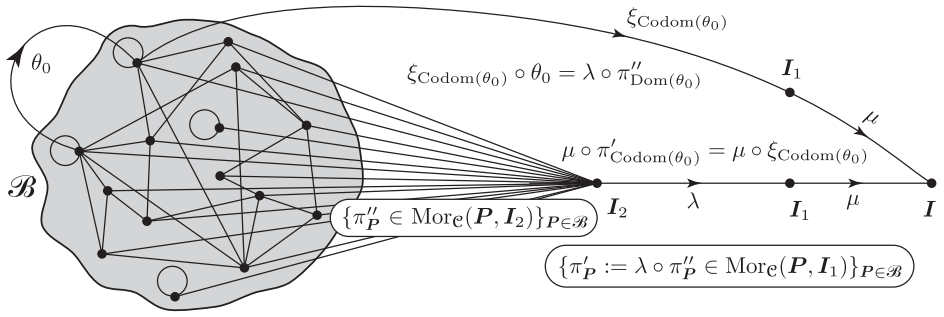
$$\mu \circ \pi'_{\mathrm{Codom}(\theta_0)} = \mu \circ \xi_{\mathrm{Codom}(\theta_0)}$$

On pose alors $\pi_{\boldsymbol{P}} = \mu \circ \pi'_{\boldsymbol{P}}$, pour chaque $\boldsymbol{P} \in \mathcal{B}$. La famille $\{\pi_{\boldsymbol{P}}\}_{\boldsymbol{P}\in\mathcal{B}}$ continue de satisfaire les demandes du lemme pour tout morphisme de $\mathcal{A}\backslash\{\theta_0\}$. Pour θ_0, on a

$$\pi_{\mathrm{Codom}(\theta_0)} \circ \theta_0 = \mu \circ \pi'_{\mathrm{Codom}(\theta_0)} \circ \theta_0 = \mu \circ \xi_{\mathrm{Codom}(\theta_0)} \circ \theta_0 = \mu \circ \lambda \circ \pi''_{\mathrm{Dom}(\theta_0)} = \pi_{\mathrm{Dom}(\theta_0)} ,$$

ce qui prouve le lemme pour l'ensemble $\mathcal{A}$. ∎

Illustration de la démonstration du lemme :



8.4.2-5. Remarque : Le lemme technique précédent, dans le cas où la catégorie $\mathfrak{C}$ est la catégorie associée à un ensemble partiellement ordonné, admet une démonstration quasiment immédiate. L'exercice 8.4.2-2 montre que dans ce cas, il suffit que l'objet $\boldsymbol{I}$ majore tout élément de $\mathcal{B}$.

8.4.2-6. Théorème : *Soient $\mathfrak{I}$ une petite catégorie filtrante et $\mathcal{Ab}$ une catégorie de modules (plus généralement de complexes de modules). Notons $\mathfrak{A}$ l'ensemble d'objets de $\mathfrak{I}$ (des indices).*

a) *Soit $\mathcal{F}$ un système inductif de $\mathrm{Ind}(\mathfrak{I}; \mathcal{Ab})$. Notons $\nu(\mathcal{F}) : \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}(\alpha) \to \varinjlim(\mathcal{F})$ la surjection canonique (‡) de la démonstration de la proposition 8.4.1-7.*

1) *Pour chaque $\omega \in \varinjlim(\mathcal{F})$, il existe un indice $\beta \in \mathfrak{A}$ et un élément $\varpi \in \mathcal{F}(\beta)$ tels que $\nu(\mathcal{F})(\varpi) = \omega$.*

2) *Pour chaque élément $\omega \in \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}(\alpha)$, notons $\omega = \sum_{i=1}^{i=r} x_{\alpha_i}$ sa décomposition canonique avec $x_{\alpha_i} \in \mathcal{F}(\alpha_i)$. Un élément $\omega = \sum_{i=1}^{i=r} x_{\alpha_i}$ appartient au noyau de $\nu(\mathcal{F})$, si et seulement si, il existe $\beta \in \mathfrak{A}$ et des morphismes $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{I}}(\alpha_i, \beta)$, tels que :*

$$\sum_{i=1}^{i=r} \mathcal{F}(\theta_i)(x_{\alpha_i}) = 0 \in \mathcal{F}(\beta)\,.$$

b) *Le foncteur $\varinjlim : \mathrm{Ind}(\mathfrak{I}; \mathcal{Ab}) \rightsquigarrow \mathcal{Ab}$ est **exact**.*

Démonstration :

a-1) Comme $\nu(\mathcal{F})$ est surjective, il existe un relèvement $\varpi_1 := \sum_{i=1}^{i=r} x_{\alpha_i}$ de ω. La propriété (a) des catégories filtrantes donne un indice β et des morphismes d'indices $\theta_i \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{I}}(\alpha_i, \beta)$, pour $i = 1, \ldots, r$. L'élément ϖ_1 est alors équivalent, modulo l'image du morphisme $\Pi(\mathcal{F})$ (*cf.* démonstration de la proposition 8.4.1-7), à l'élément $\varpi =:= \sum_{i=1}^{i=r} \mathcal{F}(\theta_i)(x_{\alpha_i})$, et on a $\varpi \in \mathcal{F}(\beta)$.

a-2) Dire que $\omega = \sum_{i=1}^{i=r} x_{\alpha_i}$ appartient au noyau de $\nu(\mathcal{F})$ signifie qu'il existe des morphismes $\theta_1, \ldots, \theta_s$ et des éléments $y_{\mathrm{Dom}(\theta_i)}$, pour $i = 1, \ldots, s$ tels que :

$$\sum_{j=1}^{j=s} y_{\mathrm{Dom}(\theta_j)} - \mathcal{F}(\theta_i)(y_{\mathrm{Dom}(\theta_j)}) = \sum_{i=1}^{i=r} x_{\alpha_i}\,. \qquad (*)$$

L'application du lemme technique à la famille des morphismes $\mathcal{A} = \{\theta_j\}$ fournit alors un indice β et une famille de morphismes d'indices de codomaine β qui, appliqués à chaque coordonnée des deux membres de $(*)$, annule le membre de gauche et prouve l'assertion.

b) Compte tenu de l'exactitude à droite établie dans la proposition 8.4.1-7, il suffira de montrer que si $\mu : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{G}$ est une transformation naturelle de systèmes inductifs telle que pour chaque $\alpha \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{I})$, le

morphisme $\mu(\alpha) : \mathcal{F}(\alpha) \to \mathcal{G}(\alpha)$ est **injectif**, alors $\varinjlim(\mu)$ est nécessairement injectif. On considère alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}(\alpha) & \xrightarrow{\oplus_{\alpha\in\mathfrak{A}}\mu(\alpha)} & \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{G}(\alpha) \\ \downarrow{\scriptstyle \nu(\mathcal{F})} & & \downarrow{\scriptstyle \nu(\mathcal{G})} \\ \varinjlim(\mathcal{F}) & \xrightarrow[\varinjlim(\mu)]{} & \varinjlim(\mathcal{G}) \end{array}$$

où les flèches verticales sont surjectives. Soit ω un relèvement dans $\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}(\alpha)$ d'un élément ϖ du noyau de $\varinjlim(\mu)$; son image par $\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mu(\alpha)$ appartient alors au noyau de $\nu(\mathcal{G})$. L'application de l'assertion (a) de cette proposition permet alors de trouver un indice β et un représentant ω' de ϖ dans $\mathcal{F}(\beta)$ dont l'image dans $\mathcal{G}(\beta)$ est nulle ; mais comme $\mu(\beta)$ est supposée injective, ω' est nul et donc $\varinjlim(\mu)$ est nécessairement injective. ∎

8.4.3 Cohomologie d'une limite inductive de complexes. Dans cette section nous allons nous intéresser aux systèmes inductifs à valeurs dans la catégorie (abélienne) $\mathbf{C}^*(\mathcal{Ab})$ des complexes d'objets d'une catégorie abélienne $\mathcal{Ab}$ possédant des limites inductives ([34]). Soit $\mathfrak{I}$ une (petite) catégorie, la catégorie $\mathrm{Ind}(\mathfrak{I}; \mathbf{C}^*(\mathcal{Ab}))$ des systèmes inductifs indexés par $\mathfrak{I}$ est alors abélienne. Des arguments assez généraux et presque tautologiques montrent que l'on peut interpréter $\mathrm{Ind}(\mathfrak{I}; \mathbf{C}^*(\mathcal{Ab}))$ comme la catégorie des complexes d'objets de $\mathrm{Ind}(\mathfrak{I}; \mathcal{Ab})$; autrement dit, un système inductif de complexes est (tautologiquement) un complexe de systèmes inductifs. On a donc une équivalence de catégories (abéliennes) :

$$\boxed{\mathrm{Ind}\left(\mathfrak{I}; \mathbf{C}^*(\mathcal{Ab})\right) \equiv \mathbf{C}^*\left(\mathrm{Ind}(\mathfrak{I}; \mathcal{Ab})\right)}$$

Soit maintenant $\mathcal{F}^* \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}^*\left(\mathrm{Ind}(\mathfrak{I}; \mathcal{Ab})\right))$, pour chaque $r \in \mathbb{Z}$, on dispose alors du système inductif $h^r(\mathcal{F}^*)$ qui associe à chaque $\alpha \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{I})$ le r-ième objet de cohomologie du complexe $\mathcal{F}^*(\alpha)$ d'objets de $\mathcal{Ab}$. Lorsque la catégorie d'indices $\mathfrak{I}$ ***est filtrante*** l'exactitude du foncteur $\varinjlim$ donne une équivalence canonique entre la r-ième cohomologie du complexe limite inductive de $\mathcal{F}^*$ et la limite inductive du système $h^r(\mathcal{F}^*)$. Énonçons ce résultat en clair.

8.4.3-1. Théorème : *Soit $\mathcal{Ab}$ une catégorie abélienne possédant des limites inductives. Soit $\mathfrak{I}$ une petite catégorie filtrante. Pour tout système inductif $\mathcal{F}^* \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ind}(\mathfrak{I}; \mathbf{C}^*(\mathcal{Ab})))$ de complexes de $\mathcal{Ab}$ et pour chaque $r \in \mathfrak{Z}$, il existe un isomorphisme canonique entre :*

$$\boxed{\varinjlim\left(h^r(\mathcal{F}^*)\right) \equiv h^r\left(\varinjlim(\mathcal{F}^*)\right)}$$

En particulier, la limite inductive d'un système inductif et filtrant de complexes acycliques est acyclique.

8.4.4 Commentaire sur l'exactitude de la limite projective. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, la limite projective comporte des subtilités qui font que l'on ne dispose pas de

[34] On pourra se limiter au cas des catégories de modules ou des complexes de modules

conditions aussi générales que pour la limite inductive garantissant son exactitude. Une condition connue sous le nom de «condition de Mittag-Leffler» est souvent utilisée mais nous n'en aurons pas besoin dans ce cours (*cf.* [Har] page 191).

———————×———————

§9. Cohomologie des bicomplexes de modules

9.1 Complexe simple associé à un bicomplexe

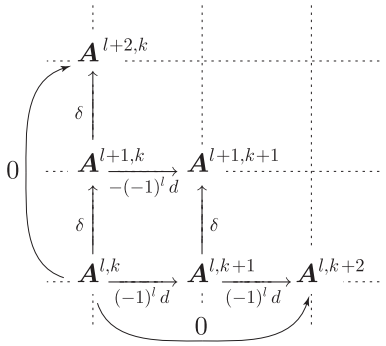
Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modules. Notons Σ le foncteur de $\mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C})$ vers $\mathbf{C}^{*}(\mathcal{C})$ qui associe au bicomplexe $(\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d_{\bullet,*}, \delta_{\bullet,*})$, le complexe (dit simple) $(\boldsymbol{A}^{*}, D(\boldsymbol{A})_{*})$ (noté aussi $(\boldsymbol{A}^{*}, D_{*})$), où :

$$\boldsymbol{A}^{d} = \bigoplus_{l+k=d} \boldsymbol{A}^{l,k}\,, \qquad \text{pour chaque } d \in \mathbb{Z}\,, \tag{$\diamond$}$$

et où $D_d : \boldsymbol{A}^d \to \boldsymbol{A}^{d+1}$ est défini, en chaque $x \in \boldsymbol{A}^{l,k}$, tel que $l+k=d$, par :

$$D_d(x) = \delta_{l,k}(x) \oplus (-1)^l d_{l,k}(x) \in \boldsymbol{A}^{l+1,k} \oplus \boldsymbol{A}^{l,k+1}\,. \tag{$\star$}$$

Le diagramme suivant illustre l'égalité $D_{d+1} \circ D_d = 0$. Le couple $(\boldsymbol{A}^{*}, D_{*})$ est donc un complexe de modules.



Soit maintenant la donnée d'un morphisme de bicomplexes $f_{\bullet,*} : \boldsymbol{A}^{\bullet,*} \to \boldsymbol{B}^{\bullet,*}$. En conservant son action sur chaque facteur direct de $(\diamond)$, on obtient bien une application $f_* : \boldsymbol{A}^{*} \to \boldsymbol{B}^{*}$ vérifiant $f_{d+1} \circ D(\boldsymbol{A})_d = D(\boldsymbol{B})_d \circ f_d$, pour chaque $d \in \mathbb{Z}$.

La correspondance $\Sigma : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^{*}(\mathcal{C})$ ainsi définie est *fonctorielle*.

9.1-1. Exercice : Vérifiez que $\Sigma : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^{*}(\mathcal{C})$ est un foncteur additif et *exact*.

9.1-2. Remarque et exercice : Dans la définition de la différentielle du complexe simple associé, la définition de la différentielle totale D n'est pas symétrique relativement aux lignes et colonnes, et nous aurions tout aussi bien poser :

$$D'_d(x) = (-1)^k \delta_{l,k}(x) \oplus d_{l,k}(x) \in \boldsymbol{A}^{l+1,k} \oplus \boldsymbol{A}^{l,k+1}\,. \tag{$\star'$}$$

Montrer que l'isomorphisme de modules gradués $\phi_* : \boldsymbol{A}^{*} \to \boldsymbol{A}^{*}$ qui fait correspondre à $x \in \boldsymbol{A}^{l,k}$ l'élément $(-1)^{lk}x$, définit un *isomorphisme* des complexes différentiels $(\boldsymbol{A}^{*}, D_{*})$ et $(\boldsymbol{A}^{*}, D'_{*})$.

9.2 Cohomologies sur un bicomplexe

9.2.1 Cohomologies verticale et horizontale. Comme la catégorie des bicomplexes est également une catégorie de complexes (de complexes de modules), *i.e.* $\mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C}) = \mathbf{C}^*(\mathbf{C}^*(\mathcal{C}))$, et ceci de deux manières différentes, on dispose de deux foncteurs de cohomologie, notés respectivement :

$$H^*_\delta : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}) \quad \text{et} \quad H^*_d : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C}) \rightsquigarrow (\mathbf{C}^*(\mathcal{C}))^{\mathbb{Z}},$$
$$(\delta\text{-cohomologie}) \qquad\qquad (d\text{-cohomologie})$$

que l'on peut illustrer de la manière suivante :

$$\mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C}) \ni \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \to \boldsymbol{A}^{l+1,k-1} \to & \boldsymbol{A}^{l+1,k} \to & \boldsymbol{A}^{l+1,k+1} \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \to \boldsymbol{A}^{l,k-1} \to & \boldsymbol{A}^{l,k} \to & \boldsymbol{A}^{l,k+1} \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \to \boldsymbol{A}^{l-1,k-1} \to & \boldsymbol{A}^{l-1,k} \to & \boldsymbol{A}^{l-1,k+1} \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{pmatrix} \overset{H_\delta}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \to H_\delta^{l+1,k-1} \to & H_\delta^{l+1,k} \to & H_\delta^{l+1,k+1} \to \\ \to H_\delta^{l,k-1} \to & H_\delta^{l,k} \to & H_\delta^{l,k+1} \to \\ \to H_\delta^{l-1,k-1} \to & H_\delta^{l-1,k} \to & H_\delta^{l-1,k+1} \to \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^*(\mathcal{C}^{\mathbb{Z}})$$

et

$$\mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C}) \ni \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \to \boldsymbol{A}^{l+1,k-1} \to & \boldsymbol{A}^{l+1,k} \to & \boldsymbol{A}^{l+1,k+1} \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \to \boldsymbol{A}^{l,k-1} \to & \boldsymbol{A}^{l,k} \to & \boldsymbol{A}^{l,k+1} \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \to \boldsymbol{A}^{l-1,k-1} \to & \boldsymbol{A}^{l-1,k} \to & \boldsymbol{A}^{l-1,k+1} \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{pmatrix} \overset{H_d}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ H_d^{l+1,k-1} & H_d^{l+1,k} & H_d^{l+1,k+1} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ H_d^{l,k-1} & H_d^{l,k} & H_d^{l,k+1} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ H_d^{l-1,k-1} & H_d^{l-1,k} & H_d^{l-1,k+1} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{pmatrix} \in (\mathbf{C}^*(\mathcal{C}))^{\mathbb{Z}}$$

9.2.1-1. Remarque : Deux autres foncteurs, dont on parlera ultérieurement, peuvent être obtenus en calculant une seconde fois des cohomologies, ce sont : $H_{\delta,d} := H_\delta \circ H_d$ et $H_{d,\delta} := H_d \circ H_\delta$, tous les deux à valeurs dans $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.

9.2.1-2. Définition : On appelle «cohomologie d'un bicomplexe $(\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d_{\bullet,*}, \delta_{\bullet,*})$» la cohomologie du complexe simple associé : $(\boldsymbol{A}^*, D(\boldsymbol{A})_*)$.

9.3 Quelques propositions d'algèbre homologique à retenir

Nous allons nous intéresser dans cette section à la sous-catégorie pleine $\mathbf{C}^{+,+}(\mathcal{C})$ de $\mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C})$ des bicomplexes $(\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d, \delta)$ «du premier quadrant», *i.e.* tels que $\boldsymbol{A}^{l,k} = 0$, si $(l,k) \notin \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

9.3-1. Proposition : *Soit $(\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d, \delta)$ un bicomplexe de modules du premier quadrant. Supposons que sa cohomologie horizontale (ou verticale) est nulle. Alors le complexe simple associé $(\boldsymbol{A}^*, D_*)$ est* exact.

Démonstration : Supposons que la cohomologie horizontale est nulle (l'autre cas résultera de raisonnements parfaitement analogues). Notons $(\boldsymbol{A}^{\geqslant 1,*}, d, \delta)$ le sous-bicomplexe de $(\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d, \delta)$ obtenu en tronquant bêtement

la ligne d'indice 0. Nous avons alors une suite exacte courte de bicomplexes :

$$0 \longrightarrow (\boldsymbol{A}^{\geqslant 1,*}, d, \delta) \longrightarrow (\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d, \delta) \longrightarrow \frac{(\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d, \delta)}{(\boldsymbol{A}^{\geqslant 1,*}, d, \delta)} \longrightarrow 0\,. \qquad (\diamond\diamond)$$

Soit graphiquement :

$$0 \to \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \boldsymbol{A}^{3,0} & \to & \boldsymbol{A}^{3,1} & \to & \boldsymbol{A}^{3,2} & \to \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \boldsymbol{A}^{2,0} & \to & \boldsymbol{A}^{2,1} & \to & \boldsymbol{A}^{2,2} & \to \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \boldsymbol{A}^{1,0} & \to & \boldsymbol{A}^{1,1} & \to & \boldsymbol{A}^{1,2} & \to \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 & \to & 0 & \to & 0 & \to \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \boldsymbol{A}^{3,0} & \to & \boldsymbol{A}^{3,1} & \to & \boldsymbol{A}^{3,2} & \to \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \boldsymbol{A}^{2,0} & \to & \boldsymbol{A}^{2,1} & \to & \boldsymbol{A}^{2,2} & \to \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \boldsymbol{A}^{1,0} & \to & \boldsymbol{A}^{1,1} & \to & \boldsymbol{A}^{1,2} & \to \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \boldsymbol{A}^{0,0} & \to & \boldsymbol{A}^{0,1} & \to & \boldsymbol{A}^{0,2} & \to \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 & \to & 0 & \to & 0 & \to \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 & \to & 0 & \to & 0 & \to \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 & \to & 0 & \to & 0 & \to \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \boldsymbol{A}^{0,1} & \to & \boldsymbol{A}^{0,1} & \to & \boldsymbol{A}^{0,2} & \to \end{pmatrix} \to 0$$

On remarque alors que le complexe simple associé au terme de droite s'identifie canoniquement au complexe "ligne" $(\boldsymbol{A}^{0,*}, d_{0,*})$. L'application du foncteur exact Σ à la suite $(\diamond\diamond)$ fournit alors la suite exacte courte de complexes :

$$0 \longrightarrow \Sigma(\boldsymbol{A}^{\geqslant 1,*}, d, \delta) \longrightarrow (\boldsymbol{A}^*, D_*) \longrightarrow (\boldsymbol{A}^{0,*}, d_{0,*}) \longrightarrow 0\,, \qquad (\star\star)$$

dont on déduit (à l'aide de la suite exacte longue de cohomologie), les égalités :

$$\begin{cases} H^0(\boldsymbol{A}^*, D_*) = 0; \\ H^k(\boldsymbol{A}^*, D_*) \equiv H^k\big(\Sigma(\boldsymbol{A}^{\geqslant 1,*}, d, \delta)\big); \quad \text{pour tout } k \geqslant 1, \end{cases}$$

puisque le complexe simple $\Sigma(\boldsymbol{A}^{\geqslant 1,*}, d, \delta)$ ne possède aucun terme en degrés $\leqslant 0$ (et donc sa cohomologie sera nulle en de tels degrés), et que, par hypothèse le complexe $(\boldsymbol{A}^{0,*}, d_*)$ est exact.

Cela étant, les lignes de $(\boldsymbol{A}^{\geqslant 1,*}, d, \delta)$ sont des lignes du bicomplexe de départ et l'hypothèse d'exactitude horizontale pourra leur être également appliquée. L'itération des raisonnements précédents est alors possible (indéfiniment par ailleurs), pour prouver :

$$\begin{cases} H^n(\boldsymbol{A}^*, D_*) = 0, & \text{pour tout } n < N\,; \\ H^k(\boldsymbol{A}^*, D_*) \equiv H^k\big(\Sigma(\boldsymbol{A}^{\geqslant N,*}, d, \delta)\big), & \text{pour tout } k \geqslant N\,; \end{cases}$$

pour chaque $N \in \mathbb{N}$. Le complexe $(\boldsymbol{A}^*, D_*)$ est donc bien exact en chacun de ses termes. ∎

9.3-2. Corollaire : *Soient $(\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d, \delta)$ un bicomplexe du premier quadrant, et $(\boldsymbol{B}^{\bullet,*}, d(\boldsymbol{B}), \delta(\boldsymbol{B}))$ le bicomplexe du premier quadrant défini par :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}^{l,k} = \boldsymbol{A}^{l+1,k}\,; \\ d(\boldsymbol{B})_{l,k} = d_{l+1,k}\,; \\ \delta(\boldsymbol{B})_{l,k} = \delta_{l+1,k}\,; \end{cases}$$

pour tout $l, k \in \mathbb{N}$. Notons $(\boldsymbol{B}^*, D(\boldsymbol{B})_*)$ le complexe simple associé à $(\boldsymbol{B}^{\bullet,*}, d(\boldsymbol{B}), \delta(\boldsymbol{B}))$. Alors :

a) *Les applications $\delta_{0,k} : \boldsymbol{A}^{0,k} \to \boldsymbol{B}^k$ définissent un morphisme de complexes $\delta_{0,*}$ entre $(\boldsymbol{A}^{0,*}, d_{0,*})$ et $(\boldsymbol{B}^*, D(\boldsymbol{B})_*)$.*

b) *La cohomologie du bicomplexe $(\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d, \delta)$ est nulle, si et seulement si, le morphisme $\delta_{0,*}$ est un quasi-isomorphisme.*

9.3-3. Remarque : Voici une illustration de cette assertion.

$$\Sigma\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \boldsymbol{A}^{3,0} & \boldsymbol{A}^{3,1} & \boldsymbol{A}^{3,2} & \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \boldsymbol{A}^{2,0} & \boldsymbol{A}^{2,1} & \boldsymbol{A}^{2,2} & \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \boldsymbol{A}^{1,0} & \boldsymbol{A}^{1,1} & \boldsymbol{A}^{1,2} & \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \boldsymbol{A}^{0,0} & \boldsymbol{A}^{0,1} & \boldsymbol{A}^{0,2} & \to \end{pmatrix} \qquad \Sigma\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \boldsymbol{A}^{3,0} & \boldsymbol{A}^{3,1} & \boldsymbol{A}^{3,2} & \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \boldsymbol{A}^{2,0} & \boldsymbol{A}^{2,1} & \boldsymbol{A}^{2,2} & \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \boldsymbol{A}^{1,0} & \boldsymbol{A}^{1,1} & \boldsymbol{A}^{1,2} & \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ (\,\boldsymbol{A}^{0,0} & \boldsymbol{A}^{0,1} & \boldsymbol{A}^{0,2} & \to\,) \end{pmatrix}$$

exact $\iff$ quasi-isomorphisme

Démonstration du corollaire 9.3-2 :

a) Soit $x \in \boldsymbol{A}^{0,k}$. Alors $\delta_{0,k}(x) \in \boldsymbol{A}^{1,k} = \boldsymbol{B}^{0,k} \subseteq \boldsymbol{B}^k$, ce qui montre que $\delta_{0,*}$ est bien défini à valeurs dans le module gradué $\{\boldsymbol{B}^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. D'autre part :

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{B})_k(\delta_{0,k}(x)) &= \delta(\boldsymbol{B})_{0,k}(\delta_{0,k}(x)) + d(\boldsymbol{B})_{0,k}(\delta_{0,k}(x)) \\ &= d_{1,k}(\delta_{0,k}(x)) = \delta_{0,k+1}(d_{0,k}(x))\,. \end{aligned}$$

b) Reprenons maintenant la suite exacte courte $(\star\star)$ pour les différentielles totales D' :

$$0 \longrightarrow \Sigma'\big(\boldsymbol{A}^{\geqslant 1,*}, d, \delta\big) \longrightarrow (\boldsymbol{A}^*, D'_*) \longrightarrow (\boldsymbol{A}^{0,*}, d_{0,*}) \longrightarrow 0\,. \qquad (\star\star')$$

Supposons la cohomologie du terme central de $(\star\star')$ nulle. La suite exacte longue associée à $(\star\star')$ donne alors immédiatement l'isomorphisme de liaison $H(\delta_{0,*})$:

$$H^k(\boldsymbol{A}^{0,*}, d_{0,*}) \xrightarrow[\equiv]{H(\delta_{0,*})} H^{k+1}\big(\Sigma'(\boldsymbol{A}^{\geqslant 1,*}, d, \delta)\big) \equiv H^k(\boldsymbol{B}^*, D'(\boldsymbol{B})_*)\,,$$

où l'équivalence de droite résulte du fait que le signe qui intervient dans la définition de $D'(\boldsymbol{B})$ ne concerne que les indices colonnes qui, eux, n'ont pas changé pour $\boldsymbol{A}^{\geqslant 1,*}$ et $\boldsymbol{B}^{\bullet,*}$.

Ceci étant, l'isomorphisme des complexes de la remarque du 9.1-2 nous permet de faire aboutir la suite d'équivalences ci-dessus sur $H^k(\boldsymbol{B}^*, D(\boldsymbol{B})_*)$. On constate alors que leur composée est précisément le morphisme en cohomologie associé au morphisme de complexes de (**a**).

La réciproque découle également de la suite exacte longue associée à $(\star\star)$ et est laissée comme exercice.∎

9.3-4. Proposition : *Soit $f_{\bullet,*} : (\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d, \delta) \to (\boldsymbol{B}^{\bullet,*}, d, \delta)$ un morphisme de bicomplexes tel que le morphisme $H_d(f)_{\bullet,*} : H_d^*(\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d, \delta) \to H_d^*(\boldsymbol{B}^{\bullet,*}, d, \delta)$ est un* isomorphisme. *Alors le morphisme $f_* : (\boldsymbol{A}^*, D(\boldsymbol{A})_*) \to (\boldsymbol{B}^*, D(\boldsymbol{B})_*)$ est un* quasi-isomorphisme.

Démonstration : La démonstration de ce résultat utilise des troncatures verticales. La fonctorialité des suites exactes courtes $(\star\star)$ donne dans ce cas :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Sigma\big(\boldsymbol{A}^{\bullet,\geqslant 1}, d, \delta\big) & \longrightarrow & (\boldsymbol{A}^*, D_*) & \longrightarrow & \big(\boldsymbol{A}^{\bullet,0}, \delta_{\bullet,0}\big) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_*^{\geqslant 1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\bullet,0}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma\big(\boldsymbol{B}^{\bullet,\geqslant 1}, d, \delta\big) & \longrightarrow & (\boldsymbol{B}^*, D_*) & \longrightarrow & \big(\boldsymbol{B}^{\bullet,0}, \delta_{\bullet,0}\big) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où le troisième morphisme est un quasi-isomorphisme. L'inspection du morphisme des suites exactes longues associées, et l'application du "lemme des cinq", *possible puisque les complexes de cohomologie sont bornés à gauche*, permet de conclure que f_* est un quasi-isomorphisme, si et seulement si, $f_*^{\geqslant 1}$ l'est.

L'itération de cette procédure démontre, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, que f_* est un quasi-isomorphisme, si et seulement si, $f_*^{\geqslant N}$ l'est. Il s'ensuit que si le bicomplexe $(\boldsymbol{A}^{\bullet,*})$ est *borné à droite*, *i.e.* s'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\boldsymbol{A}^{\bullet,k} = 0$ pour tout $k \geqslant N_0$, et de même pour $\boldsymbol{B}^{\bullet,*}$, le morphisme $f_*^{\geqslant N_0}$ est trivialement un isomorphisme (entre les objets nuls) et la proposition est démontrée.

Dans le cas général, on montre que f_* est un quasi-isomorphisme autour de chaque degré. Soit donc $d \in \mathbb{N}$ et appliquons le foncteur de troncature intelligente $\tau_{\mathrm{k}}^{\leqslant d}$ à chaque *ligne* des bicomplexes $(\boldsymbol{A}^{\bullet,*})$ et $(\boldsymbol{B}^{\bullet,*})$ en le notant $\tau^{\bullet,\leqslant d}$. On obtient alors

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Sigma\big(\tau^{\bullet,\leqslant d}(\boldsymbol{A}^{\bullet,*},d,\delta)\big) & \longrightarrow & (\boldsymbol{A}^*,D_*) & \longrightarrow & \Sigma\big(\tau^{\bullet,>d}(\boldsymbol{A}^{\bullet,*},d,\delta)\big) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma(\tau^{\bullet,\leqslant d}(f))_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma(\tau^{\bullet,>d}(f))_*} & & \\
0 & \longrightarrow & \Sigma\big(\tau^{\bullet,\leqslant d}(\boldsymbol{B}^{\bullet,*},d,\delta)\big) & \longrightarrow & (\boldsymbol{B}^*,D_*) & \longrightarrow & \Sigma\big(\tau^{\bullet,>d}(\boldsymbol{B}^{\bullet,*},d,\delta)\big) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Or, les complexes de la forme $\Sigma(\tau^{\bullet,>d}(_))$ n'ayant pas de cohomologie en degrés $\leqslant d$, on en conclut que f_i est un quasi-isomorphisme pour tout $i \leqslant d$, si et seulement si, il en est autant pour $\Sigma(\tau^{\bullet,\leqslant d}(f))_i$. On termine la démonstration en remarquant que les cohomologies *horizontales* des complexes $\Sigma(\tau^{\bullet,\leqslant d}(_))$ sont, soit nulles, soit précisément celles des bicomplexes de départ. L'hypothèse concernant l'action de f sur la cohomologie des lignes est donc toujours vérifiée pour les complexes $\tau^{\bullet,\leqslant d}(_)$ qui se trouvent être, en plus, bornés à droite. Notre conclusion du paragraphe précédent peut donc leur être appliquée. ∎

9.3.1 Application à la génération de la suite exacte de Mayer-Vietoris. Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable, pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{M}$, on note $\Omega^k(U)$ l'espace des k-formes différentiables sur U. Les suites :

$$0 \to \Omega^k(U_1 \cup U_2) \to \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) \xrightarrow{\delta} \Omega^k(U_{12}) \to 0 \qquad (\mathbf{MV_2})$$

où U_1 et U_2 sont des ouverts, et où $U_{12} := U_1 \cap U_2$, sont *a priori exactes à gauche*. Dans le cas des variétés différentiables, l'existence de partitions de l'unité garanti la surjectivité des morphismes $\Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) \xrightarrow{\delta} \Omega^k(U_{12})$ et donc $(\mathbf{MV_2})$ est *exacte* pour les variétés différentiables.

Cela étant rappelé, remplaçons U_2 par $U_2 \cup U_3$ dans $(\mathbf{MV_2})$ et appliquons Mayer-Vietoris verticalement pour fabriquer le bicomplexe à colonnes exactes.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \oplus & \Omega^k(U_{23}) & \longrightarrow & \Omega^k(U_{123}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \Omega^k(U_1 \cup U_2 \cup U_3) & \to & \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) \oplus \Omega^k(U_3) & & & \to & \Omega^k(U_{12}) \oplus \Omega^k(U_{13}) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \Omega^k(U_1 \cup (U_2 \cup U_3)) & \to & \Omega^k(U_1) & \oplus & \Omega^k(U_2 \cup U_3) & \to & \Omega^k(U_{12} \cup U_{13}) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

La proposition 9.3-1 garanti alors que la cohomologie du bicomplexe est nulle et sa première ligne sera, d'après 9.3-2, quasi-isomorphe au complexe simple associé au bicomplexe obtenu en tronquant cette ligne. Or, la première ligne étant exacte, on obtient la *suite exacte de Mayer-Vietoris pour trois ouverts* :

$$0 \to \Omega^k(U_1 \cup U_2 \cup U_3) \to \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) \oplus \Omega^k(U_3) \to \Omega^k(U_{12}) \oplus \Omega^k(U_{13}) \oplus \Omega^k(U_{23}) \to \Omega^k(U_{123}) \to 0 \qquad (\mathbf{MV_3})$$

Il est clair que nous pouvons recommencer maintenant en remplaçant U_3 par une réunion de deux autres ouverts. L'itération de ces idées permettrait de construire de proche en proche la suite exacte de Mayer-Vietoris pour un nombre *fini* et arbitraire d'ouverts de la variété $\boldsymbol{M}$.

9.3.1-1. Remarque : Il convient de souligner le fait que dans la construction itérative des suites de

Mayer-Vietoris, l'exactitude de la suite courte intervient uniquement pour garantir celle des suites longues. En fait, les ingrédients essentiels qui permettent d'itérer indéfiniment la construction sont :

a) Le morphisme de complexes canonique de la première ligne d'un bicomplexe dans le complexe simple associé au bicomplexe tronqué de cette ligne (*cf.* 9.3-2).

b) La correspondance $U \rightsquigarrow \Omega^k(U)$ est *fonctorielle et contravariante* de la catégorie associée à l'ensemble préordonné $(\mathrm{Ouv}(\boldsymbol{M}), \subseteq)$ vers une catégorie de groupes abéliens.

Comme (**a**) est toujours satisfaite, toute donnée astreinte à vérifier (**b**) donnera lieu automatiquement aux suites de Mayer-Vietoris.

———————×———————

§10. Cohomologie de Čech relative à un recouvrement dénombrable

10.1 Préfaisceaux de groupes abéliens

Soit $\boldsymbol{Y}$ un espace topologique et notons $(\mathrm{Ouv}(\boldsymbol{Y}), \subseteq)$ l'ensemble des ouverts de $\boldsymbol{Y}$ muni de l'ordre partiel d'inclusion.

10.1-1. Définition : Dans ce cours, un «préfaisceau sur $\boldsymbol{Y}$» sera la donnée d'un foncteur $\mathcal{P}$ contravariant de $(\mathrm{Ouv}(\boldsymbol{Y}), \subseteq)$ vers une catégorie de groupes abéliens et tel que $\mathcal{P}(\varnothing) = \mathbf{0}$. On appellera «morphisme de préfaisceaux» toute transformation naturelle entre préfaisceaux.

10.1-2. Remarque : Les préfaisceaux peuvent évidemment posséder des structures plus riches que les groupes abéliens, par exemple : de complexe différentiel gradué, d'algèbre, etc ; en ce sens il serait plus approprié de parler de *catégories de préfaisceaux* qui seraient des catégories de la forme $\mathrm{Préf}(\boldsymbol{Y}; \mathbf{Ab}) := \mathrm{Fonct}\big((\mathrm{Ouv}(\boldsymbol{Y}), \supseteq), \mathbf{Ab}\big)$, où $\mathbf{Ab}$ désigne une catégorie abélienne. Signalons enfin que la construction du complexe de Čech exigera que l'on dispose de produits et coproduits arbitraires dans la catégorie $\mathbf{Ab}$, celle-ci n'étant pas automatique dans une catégorie additive (où seuls les produits et coproduits *finis* sont dans leur axiomatique), leur existence sera alors sous-entendue.

Foncteur «sections au-dessus d'un ouvert»
Un ouvert U de $\boldsymbol{Y}$ constitue, à lui tout seul, une sous catégorie de $\mathrm{Ouv}(\boldsymbol{Y}; \subseteq)$. On a donc un foncteur coinduit de $\mathrm{Préf}(\boldsymbol{Y}; \mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathrm{Fonct}(U; \mathbf{Ab}) \equiv \mathbf{Ab}$, qui sera, en tant que tel, covariant et exact ; on l'appelle «sections au-dessus de U» et on le note $\Gamma(U; _) : \mathrm{Préf}(\boldsymbol{Y}; \mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{Ab}$. Lorsque $\mathbf{Ab}$ est une catégorie de groupes abéliens, les éléments de $\Gamma(U; \mathcal{P})$ sont appelés «les sections de $\mathcal{P}$ au-dessus de l'ouvert U».

10.1.1 Images directe et inverse de préfaisceaux. Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ une application continue. La correspondance $f^{-1} : \mathrm{Ouv}(\boldsymbol{Y}) \to \mathrm{Ouv}(\boldsymbol{X})$ est compatible aux inclusions d'ouverts ([35]) et la composition d'un préfaisceau $\mathcal{P}$ sur $\boldsymbol{X}$ avec f^{-1} définit un préfaisceau sur $\boldsymbol{Y}$, noté $f_*\mathcal{P}$ et appelé le «préfaisceau image directe de $\mathcal{P}$ par f». Le préfaisceau $f_*\mathcal{P}$ fait donc correspondre à l'ouvert $U \subseteq \boldsymbol{Y}$ l'objet $\mathcal{P}(f^{-1}(U))$.

[35] Correspondance fonctorielle de $(\mathrm{Ouv}(\boldsymbol{Y}), \supseteq)$ vers $(\mathrm{Ouv}(\boldsymbol{X}), \supseteq)$.

On aura reconnu dans la correspondance $\mathcal{P} \rightsquigarrow f_*(\mathcal{P})$ le foncteur coinduit par $f^{-1} : (\mathrm{Ouv}(\boldsymbol{X}), \supseteq) \rightsquigarrow (\mathrm{Ouv}(\boldsymbol{Y}), \supseteq)$; il s'agit donc d'un foncteur à la fois *additif et exact*.

Cas des applications ouvertes
Supposons maintenant l'application $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *ouverte*. L'application qui associe à chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ l'ouvert $f(U) \subseteq \boldsymbol{Y}$ est fonctorielle de $(\mathrm{Ouv}(\boldsymbol{X}), \subseteq)$ vers $(\mathrm{Ouv}(\boldsymbol{Y}), \subseteq)$. On a donc un foncteur *coinduit*, note f^{-1}, de $\mathrm{Préf}(\boldsymbol{Y}; \mathbf{Ab})$ vers $\mathrm{Préf}(\boldsymbol{X}; \mathbf{Ab})$ qu'on appelle «image inverse» ; il est *additif et exact*. On a donc pour tout préfaisceau $\mathcal{P}$ sur $\boldsymbol{Y}$ et chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$:

$$f^{-1}\mathcal{P}(U) = \mathcal{P}(f(U))\,.$$

10.1.1-1. Notation : Lorsque $\boldsymbol{X}$ est une partie ouverte U de $\boldsymbol{Y}$ est que f est l'inclusion canonique de U dans $\boldsymbol{Y}$, il est classique de noter $f^{-1}\mathcal{P}$ également par $\mathcal{P}|_U$. Le préfaisceau $\mathcal{P}|_U$ est alors appelé «la restriction de $\mathcal{P}$ à l'ouvert U ».

A remarquer, toujours dans le cas où f est ouverte, l'existence d'un morhisme de préfaisceaux sur $\boldsymbol{Y}$

$$\boxed{\mathcal{P} \longrightarrow f_* f^{-1}\mathcal{P}} \qquad (*)$$

qui sur chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{Y}$ est réalisé par l'application de restriction $\mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(f\, f^{-1}(U))$. Le morphisme $(*)$ provient d'une transformation naturelle entre les foncteurs id et $f_* \circ f^{-1}$ définis sur la catégorie $\mathrm{Préf}(\boldsymbol{Y})$.

10.2 Complexe de Čech relatif à un recouvrement dénombrable

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement dénombrable de $\boldsymbol{Y}$, on note $U_{i_0\dots i_p} := U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$. Le diagramme suivant décrit la multiplicité d'injections canoniques dans la famille des intersections finies d'ouverts de $\mathcal{U}$.

$$\boldsymbol{Y} \longleftarrow \prod_{i_0} U_{i_0} \;\substack{\longleftarrow\\ \longleftarrow}\; \prod_{i_0<i_1} U_{i_0 i_1} \;\substack{\longleftarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow}\; \prod_{i_0<i_1<i_2} U_{i_0 i_1 i_2} \;\substack{\longleftarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow}\; \prod_{i_0<i_1<i_2<i_3} U_{i_0 i_1 i_2 i_3} \;\substack{\longleftarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow}\; \prod_{i_0<i_1<i_2<i_3<i_4} U_{i_0 i_1 i_2 i_3 i_4}$$

qui fait référence au fait qu'un ouvert $U_{i_0 i_1 i_2 \cdots i_p}$ est, *a priori*, contenu dans les $p+1$ ouverts $U_{i_0 i_1 i_2 \cdots \hat{i}_k \cdots i_p}$, où $0 \leqslant k \leqslant p$.

Soit maintenant $\mathcal{P}$ un préfaisceau sur $\boldsymbol{Y}$.

10.2-1. Définition : On appelle groupe de «p-cochaînes (ordonnées) de Čech relatives au recouvrement $\mathcal{U}$ et à valeurs dans le préfaisceau $\mathcal{P}$» le groupe :

$$\mathrm{C}^p(\mathcal{U}; \mathcal{P}) := \prod_{i_0<\cdots<i_p} \mathcal{P}(U_{i_0\cdots i_p})\,.$$

Une p-cochaîne de Čech à valeurs dans le préfaisceau $\mathcal{P}$ est donc un choix ω d'un élément $\omega_{i_0\cdots i_p}$ pour chaque groupe $\mathcal{P}(U_{i_0\cdots i_p})$.

Ceci étant, la fonctorialité de $\mathcal{P}$ fournira pour chaque inclusion $U_{i_0 i_1 i_2 \cdots i_p} \subseteq U_{i_0 i_1 i_2 \cdots \hat{i}_k \cdots i_p}$, un morphisme de "restriction" que nous désignerons très abusivement par ρ_k^p. On définit alors l'«opérateur cobord» :

$$d_p : \mathrm{C}^p(\mathcal{U};\mathcal{P}) \longrightarrow \mathrm{C}^{p+1}(\mathcal{U};\mathcal{P}) \,,$$

en indiquant son action sur une p-cochaîne ω :

$$d_p(\omega)_{i_0 \cdots i_{p+1}} := \sum_{k=0,\ldots,p} (-1)^k \rho_k^p(\omega_{i_0 \cdots \hat{i}_k \cdots i_{p+1}}).$$

On vérifie alors que $d_{p+1} \circ d_p = 0$.

10.2-2. Définition : Le complexe différentiel gradué $(\mathrm{C}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}), d_*)$ est «le complexe des cochaînes de Čech relatif au recouvrement $\mathcal{U}$ et à valeurs dans le préfaisceau $\mathcal{P}$». Sa cohomologie, notée $H^*(\mathcal{U};\mathcal{P})$ est appelée «la cohomologie de Čech relativement au recouvrement $\mathcal{U}$ et à valeurs dans le préfaisceau $\mathcal{P}$».

10.2-3. Remarque : Un morphisme de préfaisceaux $\eta : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ donne pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{Y}$ un morphisme $\eta(U) : \mathcal{P}_1(U) \to \mathcal{P}_2(U)$ qui commute aux restrictions. En posant, pour chaque $p \in \mathbb{N}$ et chaque composante $\mathcal{P}_1(U_{i_0 \ldots i_p})$ de $\mathrm{C}^p(\mathcal{U};\mathcal{P}_1)$

$$\eta_p(\omega_{i_0 \ldots i_p}) = \eta(U_{i_0 \ldots i_p})(\omega_{i_0 \ldots i_p}) \in \mathcal{P}_2(U_{i_0 \ldots i_p}) \,,$$

on obtient (canoniquement) un morphisme de *complexes différentiels gradués* :

$$\eta_* : (\mathrm{C}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}_1), d_*) \longrightarrow (\mathrm{C}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}_2), d_*) \,,$$

induisant un morphisme en cohomologie de Čech :

$$H(\eta)_* : H^*(\mathcal{U};\mathcal{P}_1) \longrightarrow H^*(\mathcal{U};\mathcal{P}_2) \,.$$

10.3 Complexe de Čech-de Rham d'une variété différentiable

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement dénombrable de une variété différentiable $\boldsymbol{M}$. Le «complexe de Čech-de Rham» relatif au recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{M}$ est *par définition* le complexe de Čech relatif au recouvrement $\mathcal{U}$ et à valeurs dans le préfaisceau d'algèbres différentielles graduées $U \rightsquigarrow \Omega^\bullet(U)$, où les morphismes de restriction sont donnés par les restrictions des formes différentielles ; on le note $\mathrm{C}^*(\mathcal{U};\Omega^\bullet)$, c'est un *bicomplexe différentiel gradué* muni du morphisme (injectif) canonique $\Omega^\bullet(\boldsymbol{M}) \to \mathrm{C}^*(\mathcal{U};\Omega^\bullet)$ donnant lieu à un bicomplexe où toutes les colonnes (indexées par $\bullet$) sont *exactes* d'après l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris pour une famille d'ouverts (*cf.* [B-T] proposition 8.5 page 94).

La proposition 9.3-2 prouve alors

10.3-1. Théorème : *La cohomologie du complexe de Čech-de Rham pour un recouvrement* dénombrable *de la variété différentiable* $\boldsymbol{M}$ *est canoniquement isomorphe à la cohomologie de de Rham de* $\boldsymbol{M}$, i.e.

$$H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \equiv H^*(\mathcal{U};\Omega^\bullet) \,.$$

Ceci étant, une ligne $p \in \mathbb{N}$ du bicomplexe de Čech-de Rham est de la forme :

$$0 \to \prod_{i_0<\cdots<i_p} \Omega^0(U_{i_0,\ldots,i_p}) \to \prod_{i_0<\cdots<i_p} \Omega^1(U_{i_0,\ldots,i_p}) \to \prod_{i_0<\cdots<i_p} \Omega^2(U_{i_0,\ldots,i_p}) \to \cdots \qquad (\ddagger)$$

Un recouvrement $\mathcal{U}$ est dit «de Rham-acyclique» lorsque les cohomologies des complexes des formes différentielles de toutes les intersections des ouverts de $\mathcal{U}$ sont concentrées en degré 0 (c'est le cas pour les bons recouvrements). Dans un tel cas comme la cohomologie d'un produit de complexes est également le produit de leurs cohomologies, nous pouvons augmenter les complexes (‡) pour en faire des complexes exacts, ce qui fait apparaître naturellement les cochaînes de Čech à valeurs dans le préfaisceau $U \rightsquigarrow H^0_{\mathrm{DR}}(U)$:

$$0 \to C^p(\mathcal{U}; H^0_{\mathrm{DR}}) = \prod_{i_0<\cdots<i_p} H^0_{\mathrm{DR}}(U_{i_0,\ldots,i_p}) \to \prod_{i_0<\cdots<i_p} \Omega^0(U_{i_0,\ldots,i_p}) \to \prod_{i_0<\cdots<i_p} \Omega^1(U_{i_0,\ldots,i_p}) \to \cdots$$

L'application de la proposition 9.3-1 et de son corollaire, démontre :

10.3-2. Théorème : *Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement* de Rham-acyclique *d'une variété différentiable $\boldsymbol{M}$. On a un isomorphisme canonique :*

$$H^*(\mathcal{U}; H^0_{\mathrm{DR}}) \equiv H^*(\mathcal{U}; \Omega^\bullet)\,.$$

10.3-3. Exercice : Justifier les corollaires suivants.

10.3-4. Corollaire (I) : *Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement* de Rham-acyclique et dénombrable *d'une variété différentiable $\boldsymbol{M}$. On a un isomorphisme canonique :*

$$H^*(\mathcal{U}; H^0_{\mathrm{DR}}) \equiv H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\,.$$

10.3-5. Corollaire (II) : *La cohomologie de de Rham d'une variété différentiable admettant un bon recouvrement* fini *est de dimension finie.*

10.3-6. Exercice : Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable compacte et orientable. Prouver qu'un bon recouvrement pour $\boldsymbol{M}$ contient *au moins* $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M}) + 1$ ouverts.

10.3-7. Corollaire (III) : *Soient $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ deux recouvrements* de Rham-acycliques et dénombrables *d'une variété différentiable $\boldsymbol{M}$. On a un isomorphisme canonique :*

$$H^*(\mathcal{U}_1; H^0_{\mathrm{DR}}) \equiv H^*(\mathcal{U}_2; H^0_{\mathrm{DR}})\,.$$

La cohomologie de Čech du préfaisceau des fonctions localement constantes est indépendante *du recouvrement* de Rham-acyclique et dénombrable *choisi.*

———————×———————

§11. Applications du complexe de Čech

11.1 Dualité de Poincaré revue par Čech

Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable de dimension m, *compacte et orientée*.

La correspondance : $U \rightsquigarrow \Omega_c^*(U)$, qui fait correspondre à une inclusion d'ouverts $U_1 \subseteq U_2$ l'application de *prolongement par zéro* des formes différentielles à support compact : $\Omega_c^*(U_1) \to \Omega_c^*(U_2)$, est un foncteur *covariant* vers la catégorie $\mathrm{Adg}(\mathbb{R})$. Si nous le composons avec foncteur contravariant de "$\mathbb{R}$-dualité", $\bullet \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\bullet, \mathbb{R})$, on obtient un préfaisceau $\mathcal{P}$ sur $\boldsymbol{M}$:

$$U \rightsquigarrow \mathcal{P}(U) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\big(\Omega_c^*(U), \mathbb{R}\big)\,.$$

qui associe à l'ouvert U le «complexe différentiel gradué dual» de $\Omega_c^*(U)$. Rappelons brièvement la définition de ce nouvel objet de la catégorie des complexes.

11.1-1. Définition : Soit $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$ un complexe différentiel gradué de $\mathcal{A}$-modules. Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, on note :

$$\mathrm{Hom}^{-k}\big((\boldsymbol{A}^*, d_*); \mathcal{A}\big) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{A}^k; \mathcal{A})\,.$$

(Hom^{-k} représente donc le groupe des formes linéaires homogènes de degrés $-k$ du module gradué $\{\boldsymbol{A}^*\}_{*\in\mathbb{Z}}$.) Nous obtenons de cette manière le module gradué $\mathrm{Hom}^\bullet\big((\boldsymbol{A}^*, d_*); \mathcal{A}\big)$ sur lequel on définit

$$\begin{aligned} D_{-k} : \mathrm{Hom}^{-k}\big((\boldsymbol{A}^*, d_*); \mathcal{A}\big) &\longrightarrow \mathrm{Hom}^{-k+1}\big((\boldsymbol{A}^*, d_*); \mathcal{A}\big) \\ f &\longmapsto (-1)^{-k+1} f \circ d_{k-1} \end{aligned}$$

Autrement dit, $D_{-k} = (-1)^{-k+1}\, {}^t d_{k-1}$, et l'on vérifie que $D^2 = 0$. Le complexe

$$\Big(\mathrm{Hom}^\bullet\big((\boldsymbol{A}^*, d_*); \mathcal{A}\big), D_\bullet\Big)\,,$$

est appelé le «complexe différentiel gradué dual de $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$».

Notons, pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{M}$, $\mathcal{P}^k(U) := \mathrm{Hom}^{k-m}(\Omega_c^*(U), \mathbb{R})$. La correspondance

$$U \rightsquigarrow \mathcal{P}^\bullet(U)\,,$$

définit alors un préfaisceau sur $\boldsymbol{M}$ à valeurs dans la catégorie des complexes différentiels gradués *positifs*.

Nous allons définir maintenant un morphisme de préfaisceaux de complexes différentiels gradués $\mathcal{D}_\bullet$ (pour dualité) entre $\Omega^\bullet$ et $\mathcal{P}^\bullet$. Nous aurons alors, pour chaque $U \subseteq \boldsymbol{M}$:

$$U \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \Omega^\bullet(U) & : & 0 \to \Omega^0(U) & \xrightarrow{d_0} & \Omega^1(U) & \xrightarrow{d_1} & \Omega^2(U) & \cdots \xrightarrow{d_{m-1}} & \Omega^m(U) \to 0 \\ \big\downarrow \mathcal{D}_\bullet(U) & & \big\downarrow \mathcal{D}_0(U) & & \big\downarrow \mathcal{D}_1(U) & & \big\downarrow \mathcal{D}_2(U) & & \big\downarrow \mathcal{D}_m(U) \\ \mathcal{P}^\bullet(U) & : & 0 \to \tilde\Omega_c^m(U) & \xrightarrow{(-1)^{m-1}\,{}^t d_{m-1}} & \tilde\Omega_c^{m-1}(U) & \xrightarrow{(-1)^{m-2}\,{}^t d_{m-2}} & \tilde\Omega_c^{m-2}(U) & \cdots \xrightarrow{{}^t d_0} & \tilde\Omega_c^0(U) \to 0 \end{array} \right.$$

où $\tilde{\Omega}^k_c(U)$ simplifie dans ce diagramme la notation $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega^k_c(U),\mathbb{R})$.

Posons, pour chaque $k\in\mathbb{N}$ et chaque $\omega\in\Omega^k(U)$:

$$\mathcal{D}_k(U)(\omega):=(-1)^k\Big(\nu\mapsto\int_U\nu\wedge\omega\Big)\,.$$

On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{k+1}(U)\circ d_k(\omega)=&(-1)^{k+1}\Big(\nu\mapsto\int_U\nu\wedge d_k(\omega)\Big)\\=&(-1)^{k+1}(-1)^{m-k}\Big(\nu\mapsto\int_U d_{m-k-1}(\nu)\wedge\omega\Big)\\=&(-1)^{m-k-1}\,{}^{\mathrm{t}}d_{m-k-1}\circ\mathcal{D}_k(U)\end{aligned}$$

à cause de la formule de Stokes qui donne les égalités :

$$0=\int_U d(\nu\wedge\omega)=\int_U d(\nu)\wedge\omega+\int_U(-1)^{m-k-1}\nu\wedge d(\omega)\,.$$

Par conséquent, $\mathcal{D}_\bullet(U)$ est bien un morphisme de complexes différentiels gradués.

Pour terminer la preuve de la naturalité de $\mathcal{D}_\bullet$ il reste seulement à vérifier la compatibilité de toutes ces constructions avec les morphismes de restriction d'ouverts, mais cela est simple et laissé aux soins du lecteur.

La transformation naturelle $\mathcal{D}_\bullet$ définit maintenant, pour chaque recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{M}$ donné, un morphisme de complexes de Čech :

$$\mathcal{D}_{*,\bullet}:\mathfrak{C}^*(\mathcal{U};\Omega^\bullet)\longrightarrow\mathfrak{C}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}^\bullet)\,,$$

qui devient, après avoir calculé les d-cohomologies,

$$H_d(\mathcal{D}_{*,\bullet}):\mathfrak{C}^*(\mathcal{U};H^\bullet)\longrightarrow\mathfrak{C}^*(\mathcal{U};H^{m-\bullet}_c)\,.$$

Or, si nous prenons un *bon recouvrement* pour $\boldsymbol{M}$, le morphisme $H_d(\mathcal{D}_{*,\bullet})$ sera un isomorphisme suite à la dualité de Poincaré sur les ouverts contractiles de $\mathbb{R}^m$, et comme les colonnes des bi-complexes $\mathfrak{C}^*(\mathcal{U};\Omega^\bullet)$ et $\mathfrak{C}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}^\bullet)$ sont exactes lorsque elles sont augmentées respectivement par $\Omega^\bullet(\boldsymbol{M})$ et $\mathrm{Hom}^{\bullet-m}(\Omega^*_c(\boldsymbol{M}),\mathbb{R})$ (dans le second cas c'est une conséquence de l'exactitude des suites de Mayer-Vietoris à support compact que l'on dualise), l'application des propositions 9.3-2 et 9.3-4 implique que le morphisme

$$\mathcal{D}_k(\boldsymbol{M}):\Omega^k(\boldsymbol{M})\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\big(\Omega^{m-k}_c(\boldsymbol{M});\mathbb{R}\big)\,,$$

est un *quasi-isomorphisme* ; ce qu'affirme le théorème de dualité de Poincaré 7.3-1.

11.2 Formule de Künneth

Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{F}$ deux variétés différentiables et considérons la structure de variété produit sur $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{F}$. On a les deux les projections canoniques :

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{F}&\xrightarrow{\pi}&\boldsymbol{F}\\ {\scriptstyle p}\big\downarrow&&\\ \boldsymbol{M}&&\end{array}$$

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert dénombrable de $\boldsymbol{M}$ et notons $p^{-1}\mathcal{U} := \{p^{-1}U_i\}$ le recouvrement de $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{F}$ "image inverse de $\mathcal{U}$". Nous allons nous intéresser au préfaisceau de complexes différentiels gradués $\mathcal{P}^\bullet$ sur $\boldsymbol{M}$ qui fait correspondre à un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{M}$ le complexe :

$$U \rightsquigarrow \mathcal{P}^\bullet(U) := \Big(\big(\Omega^*(U)\otimes_{\mathbb{R}} H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F})\big)^\bullet, D_\bullet\Big)\,.$$

où l'on pose, pour chaque $k\in\mathbb{Z}$:

$$\big(\Omega^*(U)\otimes_{\mathbb{R}} H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F})\big)^k := \bigoplus_{a+b=k} \Omega^a(U)\otimes_{\mathbb{R}} H^b_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F})\,;$$
$$D_k\big(\omega^{[a]}\otimes x^{[b]}\big) := d_a\big(\omega^{[a]}\big)\otimes x^{[b]}\,.$$

L'exactitude des foncteurs $\bullet \rightsquigarrow \bullet\otimes H^b_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F})$ implique alors que la cohomologie de $\mathcal{P}^\bullet(U)$ est précisément $\big(H^*_{\mathrm{DR}}(U)\otimes H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F})\big)^\bullet$. Enfin, les morphismes de restriction pour $\mathcal{P}^\bullet$ sont ceux induits par les morphismes de restriction du préfaisceau Ω^*.

Notons $p^{-1}(\Omega)^\bullet$ le préfaisceau d'algèbres différentielles graduées sur $\boldsymbol{M}$ défini par :

$$U \rightsquigarrow p^{-1}(\Omega)^\bullet(U) := \Omega^\bullet\big(p^{-1}(U)\big) = \Omega^\bullet\big(U\times\boldsymbol{F}\big)\,,$$

avec les morphismes de restriction habituels.

Nous allons introduire maintenant une transformation naturelle $\tau_\bullet : \mathcal{P}^\bullet \to p^{-1}(\Omega)^\bullet$. Fixons pour cela une famille $\mathcal{F} = \{\xi_j^{[*]}\}$ de cocycles de $\Omega^*(\boldsymbol{F})$ donnant une base pour la cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{F}$. On pose alors pour chaque $U\subseteq\boldsymbol{M}$ et chaque $k\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rccc}\tau_k(U) : & \displaystyle\bigoplus_{a+b=k}\Omega^a(U)\otimes_{\mathbb{R}} H^b_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F}) & \longrightarrow & \Omega^k(U\times\boldsymbol{F}) \\ & \omega^{[a]}\otimes\big[\xi^{[b]}\big] & \longmapsto & p^*\big(\omega^{[a]}\big)\wedge\pi^*\big(\xi^{[b]}\big)\end{array}$$

Une vérification aisée montre que $\tau_\bullet$ est bien un morphisme de complexes différentiels graduées qui dépend fonctoriellement des ouverts de $\boldsymbol{M}$.

La transformation $\tau_\bullet$ induit, par conséquent un morphisme de complexes de Čech :

$$\tau_{*,\bullet} : \mathfrak{C}^*\big(\mathcal{U};\mathcal{P}^\bullet\big) \longrightarrow \mathfrak{C}^*\big(\mathcal{U};p^{-1}(\Omega)^\bullet\big) \qquad (\diamond)\,.$$

Son action en d-cohomologie est donnée par les morphismes :

$$H_d(\tau_{*,\bullet}) : \big(H^*_{\mathrm{DR}}(U)\otimes H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F})\big)^\bullet \xrightarrow{p^*\wedge\pi^*} H^\bullet_{\mathrm{DR}}(U\times\boldsymbol{F})\,,$$

dont on sait qu'ils sont des *isomorphismes* lorsque U est un ouvert difféomorphe à $\mathbb{R}^{\dim\boldsymbol{M}}$ (lemme de Poincaré). Nous en concluons que le morphisme de complexes de Čech $(\diamond)$ induira un *quasi-isomorphisme* des complexes simples associés aux bicomplexes de Čech lorsque $\mathcal{U}$ est un bon recouvrement.

Or, l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris associée au recouvrement $p^{-1}\mathcal{U}$ permet d'augmenter le bicomplexe $\mathfrak{C}^*(\mathcal{U};p^{-1}\big(\Omega^\bullet\big))$ de la ligne $p^{-1}(\Omega^\bullet)(\boldsymbol{M}) = \Omega^\bullet(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{F})$ pour avoir un bicomplexe de colonnes exactes. Lorsque l'on veut en faire autant sur le bicomplexe $\mathfrak{C}^*\big(\mathcal{U};\mathcal{P}^\bullet\big)$ on remarque que ses termes vérifient :

$$\mathfrak{C}^p\big(\mathcal{U};\mathcal{P}^k\big) = \sum_{a+b=k}\left(\prod_{i_0<\cdots<i_p}\Big(\Omega^a(U_{i_0\cdots i_p})\otimes H^b_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F})\Big)\right) \xleftarrow{\equiv} \sum_{a+b=k}\left(\left(\prod_{i_0<\cdots<i_p}\Omega^a(U_{i_0\cdots i_p})\right)\otimes H^b_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F})\right)$$

dans essentiellement deux cas :

- lorsque les espaces vectoriels $H^b_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F})$ sont tous *de dimension finie* ;
- lorsque le recouvrement $\mathcal{U}$ est *fini*.

Dans ces cas, les colonnes du bicomplexe $\mathcal{C}^*\big(\mathcal{U};\mathcal{P}^\bullet\big)$ pourront être augmentées, *grâce à l'exactitude des produits tensoriels*, par la ligne $\big(\Omega^*(\boldsymbol{M})\otimes H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F})\big)^\bullet$, et l'application du corollaire 9.3-2, permettra de conclure que le morphisme

$$\tau_\bullet(\boldsymbol{M}) : \big(\Omega^*(\boldsymbol{M})\otimes H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F})\big)^\bullet \longrightarrow \Omega^\bullet(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{F})\,,$$

est un *quasi-isomorphisme*. En passant aux cohomologies, le morphisme induit :

$$H(\tau(\boldsymbol{M}))_\bullet : \big(H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\otimes H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F})\big)^\bullet \longrightarrow H^\bullet_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{F})\,,$$

sera un *isomorphisme* ; c'est bien ce qu'affirme le théorème de Künneth.

11.2-1. Exercice : Montrez que le morphisme $H(\tau(\boldsymbol{M}))_\bullet$ est $p^*\wedge\pi^*$; il est donc indépendant de la famille de cocycles $\mathcal{F}$ choisie.

§ 12. Cohomologie de Čech des préfaisceaux

12.1 Complexe de cochaînes singulières de Čech relatives à un recouvrement

Dans le paragraphe 10.2 nous avons introduit le complexe de Čech à valeurs dans un préfaisceau, pour un recouvrement dénombrable dont l'ensemble d'indices est muni d'un ordre total. Nous allons expliquer dans cette section pourquoi ni la dénombrabilité ni l'ordre ne sont nécessaires. On donnera alors une définition générale du complexe de Čech pour un recouvrement *arbitraire*.

12.1.1 Catégorie des recouvrements d'un espace topologique. Soit $\boldsymbol{Y}$ un espace topologique. Dans ces notes, on entendra par «recouvrement ouvert» (et même "recouvrement" lorsque aucune ambiguïté ne sera à craindre), toute *famille d'ouverts* dont la réunion est l'espace $\boldsymbol{Y}$ tout entier.

Soient $\mathcal{U}_1=\big\{U_\alpha\big\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ et $\mathcal{U}_2=\big\{U_\beta\big\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ deux recouvrements de $\boldsymbol{Y}$. On dit que $\mathcal{U}_2$ «raffine» $\mathcal{U}_1$, lorsqu'il existe une application, appelée «raffinement», $\phi:\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$, telle que $U_{\phi(\beta)}\supseteq U_\beta$, pour tout $\beta\in\mathfrak{B}$. Lorsque de telles applications existent, elles constituent un ensemble noté $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Rec}(\boldsymbol{Y})}(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2)$. La relation "raffine" est clairement réflexive et transitive, et la composition de raffinements est encore un raffinement ; nous pouvons donc parler de «la catégorie des recouvrements de l'espace $\boldsymbol{Y}$», elle sera notée $\mathfrak{Rec}(\boldsymbol{Y})$.

12.1.1-1. Exercice : Soient $\mathcal{U}_1=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ et $\mathcal{U}_2=\{U_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ deux recouvrements de $\boldsymbol{Y}$. Notons

$$\mathcal{U}_{12}=\{U_{\alpha,\beta}\}_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}\,,$$

la famille d'ouverts de la forme $U_{\alpha,\beta}=U_\alpha\cap U_\beta$.

- Montrez que $\mathcal{U}_{12}$ est un recouvrement pour $\boldsymbol{Y}$ et que $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Rec}(\boldsymbol{Y})}(\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_{12})$ est non vide pour $i=1,2$.
- Montrez que $\mathfrak{Rec}(\boldsymbol{Y})$ n'est généralement pas une catégorie filtrante supérieurement.

Recouvrements pointés
Soit $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ un recouvrement de $\boldsymbol{Y}$. Lorsque l'ensemble d'indices $\mathfrak{A}$ est l'ensemble $\boldsymbol{Y}$ lui-même et que la condition $U_y \ni y$ est satisfaite pour tout $y \in \boldsymbol{Y}$, on dit que $\mathcal{U}$ est un «recouvrement pointé de $\boldsymbol{Y}$».

La sous-catégorie $\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{Y})$ de $\mathfrak{Rec}(\boldsymbol{Y})$ est celle où les objets sont les recouvrements pointés de $\boldsymbol{Y}$ et où $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Rec}_{*(\boldsymbol{Y})}}(\{U_y\}_{y\in\boldsymbol{Y}}, \{V_y\}_{y\in\boldsymbol{Y}})$ et un singleton ou l'ensemble vide, suivant que l'application identique $\mathrm{id} : \boldsymbol{Y}$ soit un raffinement, ou non. Plus simplement :

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Rec}_{*(\boldsymbol{Y})}}(\{U_y\}_{y\in\boldsymbol{Y}}, \{V_y\}_{y\in\boldsymbol{Y}}) \neq \varnothing, \quad \text{si et seulement si,} \quad U_y \supseteq V_y, \qquad \text{pour tout } y \in \boldsymbol{Y}.$$

La catégorie $\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{Y})$ est une petite catégorie équivalente à un ensemble partiellement ordonné *filtrant supérieurement*, en effet :

12.1.1-2. Exercice : Soient $\mathcal{U}_1 = \{U_y\}_{y\in\boldsymbol{Y}}$ et $\mathcal{U}_2 = \{V_y\}_{y\in\boldsymbol{Y}}$ deux recouvrements de $\boldsymbol{Y}$. Notons

$$\mathcal{U}_{12} = \{U_y \cap V_y\}_{y\in\boldsymbol{Y}},$$

Vérifiez que $\mathcal{U}_{12}$ est un recouvrement pour $\boldsymbol{Y}$ et que $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Rec}(\boldsymbol{Y})}(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_{12})$ est non vide pour $i = 1, 2$.

12.1.2 Différents types de cochaînes de Čech relatives à un recouvrement. Nous allons rappeler, puis comparer, trois définitions courantes de complexes de cochaînes de Čech.

Fixons un préfaisceau $\mathcal{P}$ sur $\boldsymbol{Y}$ et un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathfrak{A}}$ de $\boldsymbol{Y}$, munissons $\mathfrak{A}$ d'un ordre total noté '$\leqslant$'. On définit alors pour chaque $p \in \mathbb{N}$, trois groupes de p-cochaînes de Čech relatives à $\mathcal{U}$ et à valeurs dans $\mathcal{P}$, respectivement appelées «ordonnées», «alternées» et «singulières» :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{C}^p_<(\mathcal{U};\mathcal{P}) & \xrightarrow{P_p} & \mathrm{C}^p_\varepsilon(\mathcal{U};\mathcal{P}) & \xrightarrow{Q_p} & \mathrm{C}^p(\mathcal{U};\mathcal{P}) \\
\| & & \| & & \| \\
\displaystyle\prod_{i_0<\cdots<i_p} \mathcal{P}\big(U_{i_0\ldots i_p}\big) & \longrightarrow & \left[\displaystyle\prod_{i_0,\ldots,i_p} \mathcal{P}\big(U_{i_0\ldots i_p}\big)\right]^{\varepsilon} & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{\sigma\in\mathfrak{A}^{\Delta_p}} \mathcal{P}\big(\mathcal{U}(\sigma)\big)
\end{array}$$

Précisons les notations : On désigne par $\mathfrak{A}^{\Delta_p}$ l'ensemble de *toutes* les applications du "p-simplexe standard" $\Delta_p := \{0, \ldots, p\}$ à valeurs dans $\mathfrak{A}$, et pour chaque $\sigma \in \mathfrak{A}^{\Delta_p}$, on note $\mathcal{U}(\sigma)$ l'ouvert $U_{\sigma(0)\ldots\sigma(p)}$. On a donc *identification* entre $\prod_{i_0,\cdots,i_p} \mathcal{P}\big(U_{i_0\ldots i_p}\big)$ et $\prod_{\sigma\in\mathfrak{A}^{\Delta_p}} \mathcal{P}\big(\mathcal{U}(\sigma)\big)$. Notons $\mathfrak{A}^{\Delta_p}_<$ le sous-ensemble des application strictement croissantes $\mathfrak{A}^{\Delta_p}$,le groupe $\prod_{i_0<\cdots<i_p} \mathcal{P}\big(U_{i_0\ldots i_p}\big)$ ([36]), s'identifie alors à $\prod_{\sigma\in\mathfrak{A}^{\Delta_p}_<} \mathcal{P}\big(\mathcal{U}(\sigma)\big)$.

12.1.2-1. Définition : Le groupe des «p-cochaînes singulières» relatives à un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ et à valeurs dans un préfaisceau $\mathcal{P}$, est le groupe :

$$\boxed{\mathrm{C}^p(\mathcal{U};\mathcal{P}) := \prod_{\sigma\in\mathfrak{A}^{\Delta_p}} \mathcal{P}\big(\mathcal{U}(\sigma)\big)}$$

[36] Déjà introduit dans 10.2 pour $(\mathfrak{A}, \leqslant) = (\mathbb{N}, \leqslant)$.

12.1.2-2. Définition : Le groupe des «p-cochaînes ordonnées» relatives à un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathfrak{A}}$ dont l'ensemble d'indices est muni d'un ordre total et à valeurs dans un préfaisceau $\mathcal{P}$, est le groupe :

$$\boxed{\mathrm{C}^p_<(\mathcal{U};\mathcal{P}) := \prod\nolimits_{\sigma\in\mathfrak{A}^{\Delta_p}_<} \mathcal{P}\big(\mathcal{U}(\sigma)\big)}$$

Faisons agir le groupe $\mathfrak{G}_{p+1}$ des bijections de Δ_p sur $\mathfrak{A}^{\Delta_p}$ par la formule :

$$\gamma\cdot\sigma(k) = \sigma(\gamma^{-1}(k))\,, \qquad \text{pour tout } k = 0,\dots,p\,.$$

Il en découle une action sur $\prod_{i_0,\cdots,i_p} \mathcal{P}\big(U_{i_0\dots i_p}\big)$ donnée par la formule :

$$(\gamma\cdot\omega)_{i_0,\dots,i_p} = \omega_{i_{\gamma(0)},\dots,i_{\gamma(p)}}\,, \qquad \text{pour tous } \gamma\in\mathfrak{S}_{p+1} \text{ et } \omega\in\textstyle\prod_{i_0,\cdots,i_p}\mathcal{P}\big(U_{i_0\dots i_p}\big).$$

12.1.2-3. Définition : Le groupe des «p-cochaînes alternées» relatives à un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ à valeurs dans un préfaisceau $\mathcal{P}$, noté $\mathrm{C}^p_\varepsilon(\mathcal{U};\mathcal{P})$, est le sous-groupe des p-cochaînes singulières de $\omega\in\mathrm{C}^p(\mathcal{U};\mathcal{P})$ vérifiant ([37]) :

$$\begin{cases} \gamma\cdot\omega = \varepsilon(\gamma)\,\omega\,, & \text{où } \varepsilon(\gamma) \text{ désigne la signature de la permutation } \gamma.\\ \omega_\sigma = 0\,, & \text{lorsque } \sigma\in\mathfrak{A}^{\Delta_p} \text{ n'est pas injective.}\end{cases}$$

12.1.2-4. Remarque : Une p-cochaîne singulière $\omega\in\mathrm{C}^p(\mathcal{U};\mathcal{P})$ est alternée, si et seulement si,

$$\begin{cases} \omega_{i_0,\dots,i_j,\dots,i_k,\dots,i_p} = -\omega_{i_0,\dots,i_k,\dots,i_j,\dots,i_p}\,; & \text{pour tous } 0\leqslant j<k\leqslant p,\\ \omega_{i_0,\dots,i,\dots,i,\dots,i_p} = 0\,;\end{cases}$$

Les groupes des p-cochaînes sont reliés par les homomorphismes Q_p et P_p. Le premier est l'inclusion canonique des cochaînes alternées dans les cochaînes singulières et le second est défini de la manière suivante : Pour toute suite strictement croissante des entiers naturels $i_0<\cdots<i_p$ et chaque bijection $\sigma\in\mathfrak{G}_{p+1}$, on pose :

$$P_p(\omega)_{i_{\sigma(0)},\dots,i_{\sigma(p)}} := \varepsilon(\sigma)\,\omega_{i_0,\dots,i_p}\,,$$

la p-cochaîne ainsi obtenue est alors trivialement alternée.

12.1.2-4. Exercice : L'application $P_p : \mathrm{C}^p_<(\mathcal{U};\mathcal{P}) \to \mathrm{C}^p_\varepsilon(\mathcal{U};\mathcal{P})$ est un *isomorphisme*.

12.1.3 Complexes de cochaînes de Čech.

Cobord des cochaînes singulières

Pour $p\in\mathbb{N}$ et chaque $i=0,\dots,p$, on appelle «i-ème opérateur face» de Δ_p dans Δ_{p+1}, l'application :

$$f^i_p : j\mapsto f^i_p(j) = \begin{cases} j & \text{pour } j<i\,;\\ j+1 & \text{pour } i\leqslant j.\end{cases}$$

[37] La seconde condition est uniquement nécessaire pour éviter des problèmes de 2-torsion. En particulier, l'affirmation de l'exercice 12.1.2-4 aurait été fausse en toute généralité.

Pour tout ensemble $\mathfrak{A}$, on dispose alors d'applications (adjointes) :

$$\begin{array}{rcl} f_i^p : \mathfrak{A}^{\Delta_{p+1}} & \longrightarrow & \mathfrak{A}^{\Delta_p} \\ \sigma & \longmapsto & \sigma\, f_p^i := \sigma \circ f_p^i \end{array}$$

qui interviennent dans la définition du morphisme «cobord» des p-cochaînes singulières :

$$d_p : \mathrm{C}^p(\mathcal{U};\mathcal{P}) \longrightarrow \mathrm{C}^{p+1}(\mathcal{U};\mathcal{P})\,,$$

dans l'égalité :

$$\boxed{d_p(\omega)_\sigma := \sum\nolimits_{k=0,\dots,p} (-1)^k\, \omega_{\sigma\, f_p^k}\,, \qquad \text{pour tout } \sigma \in \mathfrak{A}^{\Delta_{p+1}}.}$$

12.1.3-1. Exercice :

- Vérifiez l'égalité suivante pour les morphismes face : $f_{p+1}^i \circ f_p^j = f_{p+1}^j \circ f_p^{i-1}$.
- En déduire l'égalité $d_{p+1} \circ d_p = 0$.
- Montrer que si $\omega \in \mathrm{C}^p(\mathcal{U};\mathcal{P})$ est alternée, il en est de même de $d_p(\omega)$.

12.1.3-2. Définition :

- On appelle «complexe des cochaînes singulières de Čech relatives à un recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{Y}$ est à valeurs dans un préfaisceau $\mathcal{P}$», le complexe $\big(\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}), d_\bullet\big)$. La cohomologie de ce complexe est notée $H^*(\mathcal{U};\mathcal{P})$.
- On appelle «complexe des cochaînes alternées de Čech relatives à un recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{Y}$ est à valeurs dans un préfaisceau $\mathcal{P}$», le complexe $\big(\mathrm{C}^\bullet_\varepsilon(\mathcal{U};\mathcal{P}), d_\bullet\big)$. La cohomologie de ce complexe est notée $H^*_\varepsilon(\mathcal{U};\mathcal{P})$.

12.1.3-3. Remarque et exercice : Montrer que l'action de l'opérateur sur les p-cochaînes ordonnées défini en transportant d_p à l'aide des isomorphismes P_p est bien donnée par la formule :

$$d_p(\omega)_{i_0,\dots,i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k\, \omega_{i_0,\dots,\widehat{i_k},\dots,i_{p+1}}\,.$$

La cohomologie du complexe des cochaînes ordonnées $\big(\mathrm{C}^\bullet((\mathcal{U},\leqslant);\mathcal{P}), d_\bullet\big)$ est notée $H^*_<(\mathcal{U};\mathcal{P})$.

On voit donc apparaître dans ce formalisme les différents complexes de cochaînes de Čech que l'on rencontre dans la littérature sur le sujet. Il découle clairement de l'exercice 12.1.3-3 que le complexe des cochaînes ordonnées est isomorphe à celui des cochaînes alternées. Le lecteur observera l'avantage du second par rapport au premier : l'ordre sur l'ensemble d'indices n'intervient plus ([38]). Cet avantage est sensible lorsque l'on considère des morphismes de complexes de Čech provenant de raffinements de recouvrements arbitraires où l'introduction de relations d'ordre sur les ensembles d'indices complique beaucoup leur analyse. Enfin, le fait qu'il existe des raffinements non injectifs introduit un nouvel obstacle, mais il est réglé par le résultat suivant démontré dans [God$_2$] (*cf.* **3.8** pages 58–59).

[38] Quel que soit l'ordre total de l'ensemble d'indices, les complexes de Čech obtenus sont *canoniquement* isomorphes.

12.1.3-3. Proposition : *Le morphisme de complexes* $Q_\bullet : \mathrm{C}^\bullet_\varepsilon(\mathcal{U};\mathcal{P}) \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P})$ *est une* équivalence d'homotopie.

12.1.3-4. Remarque : En particulier, les morphismes en cohomologie induits par les applications $P_\bullet$ et $Q_\bullet$:

$$H^*_<(\mathcal{U};\mathcal{P}) \xrightarrow[\equiv]{H(P)_*} H^*_\varepsilon(\mathcal{U};\mathcal{P}) \xrightarrow[\equiv]{H(Q)_*} H^*(\mathcal{U};\mathcal{P})$$

sont des isomorphismes *canoniques*. On comprend ainsi que pour les besoins de la cohomologie de Čech, on pourra prendre indifféremment l'un ou l'autre des complexes de Čech.

Dans la suite, on entendra par *complexe des cochaînes de Čech* le complexe des cochaînes *singulières*. A remarquer l'existence d'un*augmentation* canonique :

$$\boxed{\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{P}(\boldsymbol{Y}) \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{P})} \mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P})}$$

qui associe à une section $\omega \in \mathcal{P}(\boldsymbol{Y})$ la 0-cochaîne de Čech $\varepsilon(\omega)$ dont le coefficient sur l'ouvert $U_\alpha \in \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ est donné par $\rho^{\boldsymbol{Y}}_{U_\alpha}(\omega)$.

12.1.3-4. Exercice : Vérifiez que le complexe de Čech augmenté est encore un complexe.

12.2 Fonctorialités des complexes de Čech relatifs aux recouvrements

Un complexe de Čech dépend de la donnée d'un recouvrement d'un espace topologique $\boldsymbol{Y}$ et d'un préfaisceau $\mathcal{P}$ sur $\boldsymbol{Y}$ à valeurs dans une catégorie abélienne $\mathbf{Ab}$, c'est-à-dire, de la donnée d'objets des catégories $\mathfrak{Rec}(\boldsymbol{Y})$ et $\mathrm{Préf}(\boldsymbol{Y};\mathbf{Ab})$.

12.2.1 Fonctorialité par rapport aux préfaisceaux. Fixons un recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{Y}$. Pour chaque morphisme de préfaisceaux $\pi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ et chaque $p \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{C}_p(\mathcal{U};\pi)$ le morphisme de groupes abéliens de $\mathrm{C}^p(\mathcal{U};\mathcal{P}_1)$ vers $\mathrm{C}^p(\mathcal{U};\mathcal{P}_2)$ défini par :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\sigma\in\mathfrak{A}^{\Delta_p}} \mathcal{P}_1(\mathcal{U}(\sigma)) & \xrightarrow{\mathrm{C}_p(\mathcal{U};\pi)} & \prod_{\sigma\in\mathfrak{A}^{\Delta_p}} \mathcal{P}_2(\mathcal{U}(\sigma)) \\ [\omega_\sigma]_{\sigma\in\mathfrak{A}^{\Delta_p}} & \longmapsto & \big[\pi\big(\mathcal{U}(\sigma)\big)(\omega_\sigma)\big]_{\sigma\in\mathfrak{A}^{\Delta_p}} \end{array}$$

La famille $\{\mathrm{C}_p(\mathcal{U};\pi)\}_{p\in\mathbb{N}}$ définit alors un *morphisme de complexes de Čech* entre $(\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}_1), d_\bullet)$ et $(\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}_2), d_\bullet)$. La correspondance $\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U},_)$, qui associe

$$\mathcal{P} \rightsquigarrow (\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}), d_\bullet) \quad \text{et} \quad \pi \rightsquigarrow \mathrm{C}_\bullet(\mathcal{U};\pi)\,,$$

est un *foncteur additif et exact* de la catégorie $\mathrm{Préf}(\boldsymbol{Y})$ vers la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$.

12.2.1-1. Rappel : Une suite courte de préfaisceaux sur $\boldsymbol{Y}$ à valeurs dans une catégorie $\mathbf{Ab}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{P}_2 \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{P}_3 \longrightarrow 0\,,$$

est exacte, si et seulement si, la suite de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_1(U) \xrightarrow{\pi_1(U)} \mathcal{P}_2(U) \xrightarrow{\pi_2(U)} \mathcal{P}_3(U) \longrightarrow 0\,,$$

est exacte, pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{Y}$. Il s'ensuit que pour chaque recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de $\boldsymbol{Y}$ et chaque $\sigma \in \mathfrak{A}^{\Delta_p}$, les suites :

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathcal{U}(\sigma)) \xrightarrow{\pi_1(\mathcal{U}(\sigma))} \mathcal{P}_2(\mathcal{U}(\sigma)) \xrightarrow{\pi_2(\mathcal{U}(\sigma))} \mathcal{P}_3(\mathcal{U}(\sigma)) \longrightarrow 0\,,$$

sont exactes. En particulier, la suite :

$$0 \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}_1) \xrightarrow{\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\pi_1)} \mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}_2) \xrightarrow{\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\pi_1)} \mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}_3) \longrightarrow 0\,,$$

est exacte dans la catégorie $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$ et donc la suite :

$$0 \longrightarrow \big(\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}_1), d_\bullet\big) \xrightarrow{\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\pi_1)} \big(\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}_2), d_\bullet\big) \xrightarrow{\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\pi_1)} \big(\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}_3), d_\bullet\big) \longrightarrow 0\,,$$

est exacte dans la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$.

12.2.1-1. Exercice : Vérifiez que la famille $\{\mathrm{C}_p(\mathcal{U};\pi)\}_{p\in\mathbb{N}}$ définit bien un morphisme de complexes de Čech entre $(\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}_1), d_\bullet)$ et $(\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}_2), d_\bullet)$.

12.2.1-2. Exercice : Posons $\mathrm{C}_{-1}(\mathcal{U},\pi) = \pi(\boldsymbol{Y})$. Montrez que la correspondance

$$\mathcal{P} \rightsquigarrow [\mathbf{0} \to \mathcal{P}(\boldsymbol{Y}) \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{P})} \mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P})] \quad \text{et} \quad \pi \rightsquigarrow \mathrm{C}_\bullet(\mathcal{U};\pi)\,,$$

est un *foncteur additif et exact* de $\mathrm{Préf}(\boldsymbol{Y})$ vers la catégorie $\mathbf{Ab}{\to}\mathbf{C}^{0\leqslant *}(\mathbf{Ab})$ des complexes avec augmentation.

12.2.2 Fonctorialité par rapport aux recouvrements. Fixons maintenant le préfaisceau $\mathcal{P}$ sur $\boldsymbol{Y}$ à valeurs dans une catégorie abélienne $\mathbf{Ab}$. La correspondance $\mathcal{U} \rightsquigarrow \mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P})$ associe à chaque objet de $\mathfrak{Rec}(\boldsymbol{Y})$ un objet de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$. Nous allons faire correspondre à chaque morphisme de recouvrements un morphisme de complexes de sorte à ce que nous obtenions une correspondance *fonctorielle*, notée $\mathrm{C}(_,\mathcal{P})$, de $\mathfrak{Rec}(\boldsymbol{Y})$ vers $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$.

Soient $\mathcal{U}_1 = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ et $\mathcal{U}_2 = \{V_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ deux recouvrements de $\boldsymbol{Y}$. Soit $\phi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ un raffinement de $\mathcal{U}_1$ par $\mathcal{U}_2$. Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on a l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{B}^{\Delta_p} & \longrightarrow & \mathfrak{A}^{\Delta_p} \\ \sigma & \longmapsto & \phi\,\sigma\ (= \phi\circ\sigma) \end{array}$$

qui, compte tenu du fait que $U_{\phi(\beta)} \supseteq V_\beta$ pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$, vérifie

$$\mathcal{U}_1(\phi\,\sigma) := U_{\phi\,\sigma(0)} \cap \cdots \cap U_{\phi\,\sigma(p)} \supseteq V_{\sigma(0)} \cap \cdots \cap V_{\sigma(p)} =: \mathcal{U}_2(\sigma)\,,$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{B}^{\Delta_p}$. Les morphismes de restriction du préfaisceau $\mathcal{P}$ interviennent alors pour définir le morphisme $\mathrm{C}_p(\phi,\mathcal{P}) : \mathrm{C}^p(\mathcal{U}_1,\mathcal{P}) \to \mathrm{C}^p(\mathcal{U}_2,\mathcal{P})$ suivant la formule :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\tau\in\mathfrak{A}^{\Delta_p}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_1(\tau)) & \xrightarrow{\mathrm{C}_p(\phi,\mathcal{P})} & \prod_{\sigma\in\mathfrak{B}^{\Delta_p}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_2(\sigma)) \\ \omega & \longmapsto & [\mathrm{C}_p(\phi,\mathcal{P})(\omega)]_\sigma := \rho(\mathcal{P})^{\mathcal{U}_1(\phi\,\sigma)}_{\mathcal{U}_2(\sigma)}\,[\omega]_{\phi\,\sigma} \end{array}$$

12.2.2-1. Remarque et exercice : Pour chaque $p \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P} \in \text{Préf}(\boldsymbol{Y}; \mathbf{Ab})$, la correspondance $\mathcal{U} \rightsquigarrow \mathrm{C}^p(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ et $\phi \rightsquigarrow \mathrm{C}_p(\phi; \mathcal{P})$ est *fonctorielle* de $\mathfrak{Rec}(\boldsymbol{Y})$ vers $\mathbf{Ab}$.

12.2.2-1. Lemme : *Soient $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ deux recouvrement de $\boldsymbol{Y}$.*

- *Pour chaque $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Rec}(\boldsymbol{Y})}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$, la famille des morphismes :*
$$\mathrm{C}_p(\phi; \mathcal{P}) : \mathrm{C}^p(\mathcal{U}_1, \mathcal{P}) \to \mathrm{C}^p(\mathcal{U}_2; \mathcal{P}), \qquad \text{pour tout } p \in \mathbb{N},$$
est un morphisme de complexes de Čech.
- *Pour tous $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Rec}(\boldsymbol{Y})}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$, il existe une homotopie $h(\phi_1, \phi_2)$ entre morphismes de complexes de Čech $\mathrm{C}_\bullet(\phi_1; \mathcal{P})$ et $\mathrm{C}_\bullet(\phi_2; \mathcal{P})$. De plus, la correspondance $(\phi_1, \phi_2) \rightsquigarrow h(\phi_1, \phi_2)$ est* naturelle *par rapport aux ϕ_i.*

Démonstration : La première assertion résulte d'une simple vérification d'écritures. Soit $\omega \in \mathrm{C}^p(\mathcal{U}_1; \mathcal{P})$, notons $\mathfrak{B}$ l'ensemble d'indices du recouvrement $\mathcal{U}_2$ et soit $\sigma \in \mathfrak{B}^{\Delta_{p+1}}$. Alors
$$\begin{aligned}
\big[d_p\big(\mathrm{C}_p(\phi; \mathcal{P})(\omega)\big)\big]_\sigma &= \sum_{k=0,\dots,p+1} (-1)^k \, [\mathrm{C}_p(\phi; \mathcal{P})(\omega)]_{\sigma f_p^k} = \sum_{k=0,\dots,p+1} (-1)^k \, \rho^{\mathcal{U}_1(\phi\,\sigma f_p^k)}_{\mathcal{U}_2(\sigma f_p^k)} [\omega]_{\phi\,\sigma f_p^k} \\
[\mathrm{C}_{p+1}(\phi; \mathcal{P})(d_p\,\omega)]_\sigma &= \rho^{\mathcal{U}_1(\phi\,\sigma)}_{\mathcal{U}_2(\sigma)} [d_p\,\omega]_{\phi\,\sigma} = \rho^{\mathcal{U}_1(\phi\,\sigma)}_{\mathcal{U}_2(\sigma)} \sum_{k=0,\dots,p+1} (-1)^k \, \rho^{\mathcal{U}_1(\phi\,\sigma f_p^k)}_{\mathcal{U}_1(\phi\,\sigma)} [\omega]_{\phi\,\sigma f_p^k} .
\end{aligned}$$

Pour l'assertion concernant l'homotopie, plutôt que de retranscrire la démonstration classique, nous préférons donner une référence ; voir par exemple [B-T] (lemme 10.4.2 page 111). ∎

Le foncteur $\mathrm{C}(_; \mathcal{P})$ de $\mathfrak{Rec}(\boldsymbol{Y})$ vers $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est donc bien défini. La propriété d'homotopie énoncée par le lemme précédent va nous permettre maintenant de donner une définition intrinsèque, *i.e.* indépendante des recouvrements, de la cohomologie de Čech d'un espace topologique $\boldsymbol{Y}$.

12.3 Cohomologie de Čech d'un espace topologique

Vus les résultats de la section précédente, on est tenté de définir la cohomologie de Čech en prenant la limite inductive des cohomologies relatives aux recouvrements. Cependant une obstruction apparaît très rapidement : les recouvrements constituent une *classe* et non pas un *ensemble*, or les limites inductives (comme bien d'autres opérations) n'ont de sens que lorsque l'on se restreint à des familles d'objets. Plus précisément, lorsque des indices existent, ceux-ci doivent constituer un ensemble ; les complexes de Čech associés à des recouvrements sont indexés par les recouvrements eux-mêmes, d'où l'obstruction.

Petite catégorie des recouvrements tautologiques

Un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ sera appelé «tautologique» lorsque l'ensemble d'indices $\mathfrak{A}$ est une partie de $\mathrm{Ouv}(\boldsymbol{Y})$ et que l'on a : $U_\alpha = \alpha$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$. Il y a bien évidemment équivalence entre la donnée d'un recouvrement tautologique et la donnée d'un élément de l'ensemble $\mathrm{Parties}(\mathrm{Ouv}(\boldsymbol{Y}))$ dont la réunion est $\boldsymbol{Y}$ tout entier. Notons $\mathfrak{Rec}_{\mathrm{taut}}(\boldsymbol{Y})$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{Rec}(\boldsymbol{Y})$ dont les objets sont les recouvrements tautologiques ; c'est une *petite catégorie, mais elle n'est pas filtrante supérieurement en général* bien que pour deux recouvrements arbitrairement choisis, il existe toujours un troisième qui les raffine.

Remarquons maintenant que tout recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ détermine un recouvrement tautologique. En effet, l'ensemble $E(\mathcal{U}) := \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ est un élément bien défini de Parties(Ouv($\boldsymbol{Y}$)) et nous pouvons associer à $\mathcal{U}$ le recouvrement tautologique $\mathcal{U}' = \{U\}_{U\in E(\mathcal{U})}$. Ceci étant, les recouvrements $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ se raffinent mutuellement. En effet, l'application $\alpha \mapsto U_\alpha$ est un raffinement de $\mathcal{U}'$ par $\mathcal{U}$, et l'axiome du choix permet de construire des applications $\phi : E(\mathcal{U}) \to \mathfrak{A}$ telles que $U_{\phi(V)} = V$ pour tout $V \in E(\mathcal{U})$. En particulier, les cohomologies de Čech associées à ces recouvrements sont canoniquement isomorphes d'après le lemme 12.2.2-1.

Nous pouvons maintenant définir la cohomologie de Čech en remarquant que pour $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2 \in \mathfrak{Rec}_{\text{taut}}(\boldsymbol{Y})$, tels que $\phi \in \text{Mor}_{\mathfrak{Rec}(\boldsymbol{Y})}(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2) \neq \varnothing$, l'homomorphisme $H(\phi)_* : H^*(\mathcal{U}_1,\mathcal{P}) \to H^*(\mathcal{U}_2,\mathcal{P})$ est *indépendant* de ϕ. Ceci entraîne comme conséquence le fait que le système

$$\Big\{H^*(\mathcal{U},\mathcal{P}); H_*(\phi)\ \Big|\ \phi \in \text{Mor}(\mathcal{U},\mathcal{V})\,;\ \mathcal{V},\mathcal{U} \in \text{Ob}(\mathfrak{Rec}_{\text{taut}}(\boldsymbol{Y}))\Big\} \qquad (\diamond)$$

est un système *inductif et filtrant supérieurement* de la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$. Nous pouvons donc légitimement définir «la cohomologie de Čech de $\boldsymbol{Y}$ à valeurs dans le préfaisceau $\mathcal{P}$» par :

$$\boxed{\check{\text{H}}^*(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) := \varinjlim_{\mathcal{U}\in\text{Ob}(\mathfrak{Rec}_{\text{taut}}(\boldsymbol{Y}))} H^*(\mathcal{U};\mathcal{P})}$$

12.3-1. Cohomologie de Čech d'une variété différentiable : Sur une variété différentiable $\boldsymbol{M}$, la sous-catégorie de $\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{M})$ de **bons** recouvrements pointés *est cofinale*. Notons $\mathbb{R}$ le préfaisceau constant qui associe à tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{M}$ le corps des nombres réels et dans lequel les morphismes de restriction sont donnés par $\text{id}_{\mathbb{R}}$. Les résultats de la section 10.3 (page 133) prouvent alors que la cohomologie de Čech de $\boldsymbol{M}$ à valeurs dans le préfaisceau $\mathbb{R}$, est canoniquement isomorphe à la cohomologie de de Rham :

$$\boxed{\check{\text{H}}^*(\boldsymbol{M};\mathbb{R}) \equiv H^*_{\text{DR}}(\boldsymbol{M})}$$

12.4 Complexes de Čech d'un espace topologique

Dans le même ordre d'idées du paragraphe précédent, nous pouvons chercher à définir le complexe de Čech pour un espace topologique de manière intrinsèque. Mais pour cela la catégorie $\mathfrak{Rec}_{\text{taut}}(\boldsymbol{Y})$ ne peut nous être d'utilité puisque le système des complexes qu'elle fournit n'est pas filtrant (à cause de la multitude de morphismes reliant deux complexes donnés) ; c'est alors que la catégorie des recouvrements pointés $\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{Y})$ intervient. En effet, on prouve assez trivialement que le système

$$\Big\{H^*(\mathcal{U},\mathcal{P}); H_*(\phi)\ \Big|\ \phi \in \text{Mor}_{\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{Y})}(\mathcal{U},\mathcal{V})\,;\ \mathcal{V},\mathcal{U} \in \text{Ob}(\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{Y}))\Big\}$$

est *cofinal* dans $(\diamond)$, de sorte que sa limite inductive calculera également la cohomologie de Čech. Mais mieux encore, le système

$$\Big\{\text{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{P}); \text{C}_\bullet(\phi)\ \Big|\ \in \text{Mor}_{\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{Y})}(\mathcal{U},\mathcal{V})\,;\ \mathcal{V},\mathcal{U} \in \text{Ob}(\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{Y}))\Big\}$$

est, lui aussi filtrant supérieurement ; nous pouvons donc définir «le complexe de Čech de $\boldsymbol{Y}$ à valeurs dans le préfaisceau $\mathcal{P}$» par :

$$\boxed{\big(\check{\text{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}), d_\bullet\big) := \varinjlim_{\mathcal{U}\in\text{Ob}(\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{Y}))} \big(\text{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}), d_\bullet\big)}$$

On aura alors :

$$\boxed{\check{\text{H}}^*(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) = H^*\big(\check{\text{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}), d_\bullet\big)}$$

Les augmentations $\varepsilon(\mathcal{P}) : \mathcal{P}(\boldsymbol{Y}) \to \mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P})$ passent également aux limites inductives induisant une augmentation et un morphisme canoniques :

$$\boxed{\mathbf{0} \to \mathcal{P}(\boldsymbol{Y}) \to \check{\mathrm{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\boldsymbol{Y}) \to \check{\mathrm{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})}$$

12.5 Fonctorialités du complexe et de la cohomologie de Čech

12.5.1 Fonctorialité par rapport aux préfaisceaux. Suite à nos remarques de la section 12.2.1, nous pouvons affirmer que le foncteur

$$\check{\mathrm{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y},_) : \mathrm{Préf}(\boldsymbol{Y}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})\,,$$

étant limite inductive de foncteurs exacts, est *additif et exact* ; en particulier, associée à toute suite exacte courte de préfaisceaux sur $\boldsymbol{Y}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_3 \longrightarrow 0\,,$$

on a une la suite exacte de complexes de Čech :

$$\boxed{0 \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}_1) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}_2) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}_3) \longrightarrow 0}$$

et une suite exacte longue de cohomologies de Čech :

$$\boxed{\longrightarrow \check{\mathrm{H}}^k(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}_1) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^k(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}_2) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^k(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}_3) \xrightarrow{[+1]}}$$

12.5.1-1. Remarque : On a le même type de dépendance fonctorielle pour les complexes de Čech augmentés.

12.5.2 Fonctorialité par rapport à l'espace topologique. Soit maintenant $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ une application continue. L'application $f^{-1} : \mathrm{Ouv}(\boldsymbol{Y}) \to \mathrm{Ouv}(\boldsymbol{X})$ respecte l'ordre d'inclusion, les intersections d'ouverts, et transforme tout recouvrement (resp. tautologique) de $\boldsymbol{Y}$ en un recouvrement (resp. tautologique) de $\boldsymbol{X}$. On définit maintenant le foncteur $f^{-1} : \mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{Y}) \rightsquigarrow \mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{X})$ de la manière suivante. Pour chaque recouvrement pointé $\mathcal{U} = \big\{U_x\big\}_{x\in\boldsymbol{Y}}$ de $\boldsymbol{Y}$, on pose $f^{-1}\mathcal{U} = \big\{f^{-1}\big(U_{f(x)}\big)_x\big\}_{x\in\boldsymbol{X}}$. De plus, nous avons remarqué que la donnée de $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Rec}_*}(\boldsymbol{Y})(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2)$ équivaut au fait que pour chaque $y \in \boldsymbol{Y}$, l'ouvert de $\mathcal{U}_1$ indexé par y contient l'ouvert de $\mathcal{U}_2$ indexé par ce même élément ; il est immédiat alors de constater que cette condition sera également satisfaite par les recouvrements pointés $f^{-1}\mathcal{U}_1$ et $f^{-1}\mathcal{U}_2$. Ainsi définie, la correspondance f^{-1} est fonctorielle entre les catégories des recouvrements pointés.

Ceci étant, on a un morphisme canonique

$$\begin{array}{ccc} \check{\mathrm{C}}^\bullet(\mathcal{U};f_*\mathcal{P}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^\bullet(f^{-1}\mathcal{U};\mathcal{P}) \\ \omega & \longmapsto & \overline{\omega} \end{array} \qquad (**)$$

pour tout recouvrement pointé $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{Y}$ et tout préfaisceau $\mathcal{P}$ sur $\boldsymbol{X}$ ([39]).

[39] On note $f_*\mathcal{P}$ et $f^{-1}\mathcal{P}$ les préfaisceaux *image directe* et *image inverse* introduits dans la section 10.1.1, en page 131.

12.5.2-1. Précision : Le morphisme (∗∗) est défini de la manière suivante : Posons $\mathcal{U} = \{U_y\}_{y\in \boldsymbol{Y}}$ et $f^{-1}\mathcal{U} = \{V_x\}_{x\in \boldsymbol{X}}$, où $V_x = f^{-1}(U_{f(x)})$. Une p-cochaîne $\omega \in \check{\mathrm{C}}^p(\mathcal{U}; f_*\mathcal{P})$ associe alors à chaque $p+1$-uplet $(y_0,\dots,y_p) \in \boldsymbol{Y}$, un élément $\omega_{y_0,\dots,y_p} \in \mathcal{P}(f^{-1}(U_{y_0,\dots,y_p}))$. Or, lorsque $y_j = f(x_j)$, on a l'égalité

$$f^{-1}(U_{y_0,\dots,y_p}) = f^{-1}\big(U_{f(x_0)}\big) \cap \dots \cap f^{-1}\big(U_{f(x_p)}\big) = V_{x_0,\dots,y_p}\,,$$

et la p-cochaîne $\overline{\omega}$ de $\check{\mathrm{C}}^p(f^{-1}\mathcal{U};\mathcal{P})$ qui associe au $p+1$-uplet $(x_0,\dots,x_p) \in \boldsymbol{X}$, l'élément $\omega_{f\,x_0,\dots,f\,x_p} \in \mathcal{P}(V_{x_0,\dots,y_p})$ est bien définie.

Et lorsque $\mathcal{U}$ parcourt les objets de la petite catégorie $\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{Y})$, les recouvrements $f^{-1}\mathcal{U}$ parcourent une partie de $\mathrm{Ob}(\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{X}))$ ([40]). On a donc une famille inductive de morphismes paramétrée par la catégorie $\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{Y})$:

$$\mathrm{C}^\bullet(f^{-1}\mathcal{U};\mathcal{P}) \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{V}\in\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{X})} \mathrm{C}^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{P}) = \check{\mathrm{C}}^\bullet(\boldsymbol{X};\mathcal{P})\,,$$

qui composée à la famille de morphismes (∗∗) ([41]) donne lieu à un morphisme canonique :

$$\boxed{\check{\mathrm{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y}; f_*\mathcal{P}) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^\bullet(\boldsymbol{X};\mathcal{P})} \qquad \text{pour tout } \mathcal{P}\in \mathrm{Préf}(\boldsymbol{X})\,, \tag{$\diamond$}$$

fonctoriel sur la catégorie des préfaisceau sur $\boldsymbol{X}$. En passant aux cohomologies, on a donc

$$\boxed{\check{\mathrm{H}}^*(\boldsymbol{Y}; f_*\mathcal{P}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}*(\boldsymbol{X};\mathcal{P})} \qquad \text{pour tout } \mathcal{P}\in \mathrm{Préf}(\boldsymbol{X})\,, \tag{$\diamond\diamond$}$$

Supposons maintenant $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *ouverte*. Nous avons montré dans la section 10.1.1, l'existence d'un morphisme de préfaisceaux sur $\boldsymbol{Y}$ entre $\mathcal{P} \to f_*f^{-1}\mathcal{P}$, et nous avons signalé dans le premier paragraphe de cette section la fonctorialité du complexe de Čech vis-à-vis des préfaisceaux ; il en découle l'existence de morphismes canoniques de complexes de Čech :

$$\check{\mathrm{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y}; f_*f^{-1}\mathcal{P}) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^\bullet(\boldsymbol{X}; f^{-1}\mathcal{P})\,,$$

(le deuxième d'après ($\diamond$)) donnant lieu aux morphismes analogues de ($\diamond$) et ($\diamond\diamond$) :

$$\boxed{\begin{array}{l}\check{\mathrm{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^\bullet(\boldsymbol{X}; f^{-1}\mathcal{P})\\ \check{\mathrm{H}}^*(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^*(\boldsymbol{X}; f^{-1}\mathcal{P})\end{array}} \qquad \text{pour tout } \mathcal{P}\in \mathrm{Préf}(\boldsymbol{Y})\,. \tag{$\diamond\diamond'$}$$

Si maintenant on fait parcourir à f les inclusions des ouverts de $\boldsymbol{Y}$, nous obtenons un préfaisceau sur $\boldsymbol{Y}$ (!) ; mais cela constitue le sujet de la section suivante.

12.6 Préfaisceau de complexes de Čech et faisceaux

Soit $\mathcal{P}$ un préfaisceau sur l'espace topologique $\boldsymbol{Y}$. Nous venons de voir le caractère fonctoriel des correspondances qui associent aux ouverts $V \subseteq \boldsymbol{Y}$, à la fois, les complexes avec augmentation $\mathbf{0} \to \mathcal{P}(V) \to \check{\mathrm{C}}^\bullet(V;\mathcal{P}|_V)$, les cohomologues de Čech $\check{\mathrm{H}}^k(V;\mathcal{P}|_V)$, et les morphismes $\mathcal{P}(V) \to \check{\mathrm{H}}^0(V;\mathcal{P}|_V)$.

[40] Lorsque $\boldsymbol{X}$ est une partie ouverte V de $\boldsymbol{Y}$ et que f est l'injection canonique, les recouvrements $f^{-1}\mathcal{U}$ parcourent, en fait, *la totalité* d'objets de $\mathfrak{Rec}_*(V)$.

[41] Egalement paramétrée par $\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{Y})$.

Ce comportement fonctoriel se retrouve également, pour un recouvrement (non nécessairement pointé) donné $\mathcal{U}$ et pour l'injection canonique $j : V \hookrightarrow \boldsymbol{Y}$, dans les morphismes

$$\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}) \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet\left(\mathcal{U}; j_*(\mathcal{P}|_V)\right) \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U}\cap V;\mathcal{P}|_V)\,,$$

où $\mathcal{U}\cap V$ désigne le recouvrement $j^{-1}\mathcal{U}$ dont les ouverts sont, par conséquent, les *traces* des ouverts de $\mathcal{U}$ sur V.

Nous allons donc pouvoir «préfaisceautiser» la section précédente en définissant :

$$\begin{cases} \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}) & : \text{le préfaisceau } V \rightsquigarrow \mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U}\cap V;\mathcal{P}|_V)\ ; \\ \check{\mathcal{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) & : \text{le préfaisceau } V \rightsquigarrow \check{\mathrm{C}}^\bullet(V;\mathcal{P}|_V)\ ; \\ \check{\mathcal{H}}^{\,k}(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) & : \text{le préfaisceau } V \rightsquigarrow \check{\mathrm{H}}^k(V;\mathcal{P}|_V)\,. \end{cases}$$

12.6-1. Remarque :

- Pour chaque ouvert $V \subseteq \boldsymbol{Y}$, le foncteur $\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{Y}) \rightsquigarrow \mathfrak{Rec}_*(V)$ qui fait correspondre $\mathcal{U} \rightsquigarrow \mathcal{U}\cap V$ est "surjectif" ; tout recouvrement pointé de V de même que tout raffinement dans $\mathfrak{Rec}_*(V)$ proviennent de $\mathfrak{Rec}_*(\boldsymbol{Y})$. Il s'ensuit que la restriction du préfaisceau $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})$ à V, donne le préfaisceau $\check{\mathcal{C}}^\bullet(V;\mathcal{P}|_V)$:
$$\check{\mathcal{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})|_V = \check{\mathcal{C}}^\bullet(V;\mathcal{P}|_V)\,.$$
- D'autre part, la catégorie $\mathrm{Préf}(\boldsymbol{Y})$, étant abélienne, la notion de préfaisceau de cohomologie pour un complexe de préfaisceaux est bien définie. Notons $h^k(\mathcal{P}^\bullet, d_\bullet)$ le k-ième préfaisceau de cohomologie d'un complexe de préfaisceaux $(\mathcal{P}^\bullet, d_\bullet)$, on a alors :
$$h^k\left(\check{\mathcal{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})\right) \equiv \check{\mathcal{H}}^{\,k}(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})\,,$$
pour tout préfaisceau $\mathcal{P}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ (isomorphisme naturel).
- La naturalité de ces constructions par rapport à la donnée du préfaisceau $\mathcal{P}$, donne des foncteurs dans la catégorie $\mathrm{Préf}(\boldsymbol{Y})$ vers elle même (ou celle de ses complexes). Notons-les :
$$\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U};_), \quad \check{\mathcal{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y};_) \quad \text{et} \quad \check{\mathcal{H}}^\bullet(\boldsymbol{Y};_)\,.$$
Les deux premiers sont *exacts* et le dernier, appliqué à une suite exacte courte de préfaisceaux :
$$\mathbf{0} \to \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_3 \to \mathbf{0}\,,$$
donne lieu à une suite exacte longue :
$$\mathbf{0}\to \check{\mathcal{H}}^{\,0}(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}_1)\to \check{\mathcal{H}}^{\,0}(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}_2)\to \check{\mathcal{H}}^{\,0}(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}_3)\to \check{\mathcal{H}}^{\,1}(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}_1)\to \check{\mathcal{H}}^{\,1}(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}_2)\to \check{\mathcal{H}}^{\,1}(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}_3)\to \cdots\,.$$
En particulier, **le foncteur $\check{\mathcal{H}}^{\,0}(\boldsymbol{Y};_)$ est exact à gauche**.
- A remarquer aussi que la naturalité de l'augmentation donne des morphismes de préfaisceaux canoniques :
$$\begin{cases} \mathbf{0} \to \mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{U},\mathcal{P})} \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{P}) \\ \mathbf{0} \to \mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})} \check{\mathcal{C}}^\bullet(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) \\ \mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{P})} \check{\mathcal{H}}^{\,0}(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) \end{cases}$$

12.6-1. Définition : Un préfaisceau $\mathcal{P}$ sur $\boldsymbol{Y}$ est appelé «faisceau» lorsque le morphisme :

$$\mathcal{P} \xrightarrow[\equiv]{\varepsilon(\mathcal{P})} \check{\mathcal{H}}^{\,0}(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})\,,$$

est un *isomorphisme*.

12.6-2. Proposition : *Les assertions suivantes sont équivalentes pour un préfaisceau $\mathcal{P}$ sur $\boldsymbol{Y}$:*

1) *$\mathcal{P}$ est un faisceau ;*

2) *Pour tout ouvert $V \subseteq \boldsymbol{Y}$ et tout recouvrement $\mathcal{V}$ de V, la suite :*

$$\mathbf{0} \to \mathcal{P}(V) \to \mathrm{C}^0(\mathcal{V};\mathcal{P}|_V) \to \mathrm{C}^1(\mathcal{V};\mathcal{P}|_V)\,.$$

est exacte.

12.6-3. Remarque : La lecture de la condition ((2)) en termes de sections de préfaisceaux permet de retrouver la définition habituelle :

On dit qu'un préfaisceau $\mathcal{P}$ sur $\boldsymbol{Y}$ est un «faisceau», s'il satisfait aux deux conditions :

F-a) **Unicité ou non trivialité locale.** *Une section σ de $\mathcal{P}$ au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{Y}$ est nulle, s'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de U, tel que les restrictions $\sigma|_{V_\alpha}$ soient toutes nulles.*

F-b) **Existence de recollements de sections.** *Pour toute famille d'ouverts $\mathcal{U} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ et toute famille de sections $\{\sigma_\alpha \in \mathcal{P}(V_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, telle que pour tous $\alpha,\beta \in \mathfrak{A}$ on ait*

$$\sigma_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = \sigma_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}\,,$$

il existe une section σ de $\mathcal{P}$ au-dessus de l'ouvert $U = \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} V_\alpha$, telle que $\sigma|_{V_\alpha} = \sigma_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$.

La condition (**F-**a) équivaut à l'injectivité de l'augmentation dans la suite de ((2)), et la condition (**F-**b) équivaut à l'exactitude au niveau du terme central de la même suite.

Démonstration de 12.6-2 : [1 ⇒ 2] Soit $\mathcal{P}$ un faisceau et supposons l'application $\mathcal{P}(V) \to \mathrm{C}^0(\mathcal{U};\mathcal{P}|_V)$ non injective pour un V donné et un certain recouvrement (pointé) $\mathcal{V}$ de V. On vérifie alors que la sous-catégorie des recouvrements pointés de V, qui raffinent $\mathcal{V}$, est cofinale dans la catégorie $\mathfrak{Rec}_*(V)$. Le passage à la limite inductive suivant cette famille donne le morphisme $\mathcal{P}(V) \to \check{\mathrm{C}}^0(V;\mathcal{P})$ dont le noyau restera nécessairement non trivial, et le préfaisceau $\mathcal{P}$ ne s'injecte pas dans $\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})$ ce qui est contradictoire. On est donc forcé d'admettre que $\mathcal{P}(V) \to \mathrm{C}^0(\mathcal{U};\mathcal{P}|_V)$ est **toujours injective**.

Supposons maintenant que la suite de **2** ne soit pas exacte au terme milieu. On a alors un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{0} \to \mathcal{P}(V) & \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{V})} & \mathrm{C}^0(\mathcal{V};\mathcal{P}|_V) & \xrightarrow{d_0(\mathcal{V})} & \mathrm{C}^1(\mathcal{V};\mathcal{P}|_V) \\
\| & & \downarrow \lim & & \downarrow \lim \\
\mathbf{0} \to \mathcal{P}(V) & \xrightarrow{\varepsilon(V)} & \check{\mathrm{C}}^0(V;\mathcal{P}|_V) & \xrightarrow{d_0(V)} & \check{\mathrm{C}}^1(V;\mathcal{P}|_V)
\end{array}$$

et comme $\mathcal{P}(V) \equiv \check{\mathrm{H}}^0(V;\mathcal{P}|_V)$, la deuxième ligne est exacte. Soit $\xi \in \ker d_0(\mathcal{V})\backslash \mathrm{im}\varepsilon(\mathcal{V})$, notons $\bar{\xi}$ son image dans $\check{\mathrm{C}}^0(V;\mathcal{P}|_V)$; elle appartient au noyau de $d_0(V)$ et provient donc d'un certain $\zeta \in \mathcal{P}(V)$. L'élément $\tilde{\xi} = \xi - \varepsilon(\mathcal{V})(\zeta)$ est alors annulé par le morphisme vertical central de passage à la limite suivant les recouvrements de V. Comme nous travaillons avec des recouvrements pointés et que $\tilde{\xi} \neq 0$, on aura $0 \neq \tilde{\xi}_v \in V_v$ pour un certain $v \in V$ (V_v est alors l'ouvert de $\mathcal{V}$ indexé par v). Ceci étant, on vérifie aisément que la catégorie des recouvrements $\mathcal{W} = \{W_w\}_{w\in V}$ vérifiant la relation $W_w \subseteq V_v$ pour tout $w \in V_v$, est *cofinale*. Il existe donc un raffinement $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ de cette forme dans lequel l'image de $\tilde{\xi}$ est nulle. En particulier l'application

$$\mathcal{P}(V_v) \to \mathrm{C}^0(\mathcal{V}' \cap V_v;\mathcal{P}|_{V_v})$$

annule $\tilde{\xi}_v$ et est donc non injective, ce qui est de nouveau contradictoire. La suite dans (**2**) est donc nécessairement exacte lorsque $\mathcal{P}$ est un faisceau.

[2 ⇒ 1] L'exactitude des suites étant préservée par les limites inductives, la suite de préfaisceaux :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{P} \longrightarrow \check{\mathcal{C}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) \longrightarrow \check{\mathcal{C}}^1(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})\,,$$

est exacte ; cela signifie très précisément que $\mathcal{P}$ est un faisceau. ∎

12.7 Etude locale du préfaisceau des complexe de Čech

Chaque point $y \in \boldsymbol{Y}$ détermine un foncteur «germe» de la catégorie $\mathrm{Préf}(\boldsymbol{Y};\mathbf{Ab})$ vers la catégorie

Ab. Pour tout préfaisceau $\mathcal{P}$, on note $\mathcal{P}_{(y)}$ le germe de $\mathcal{P}$ en y, on a :

$$\mathcal{P}_{(y)} = \varinjlim_{U \ni y} \mathcal{P}(U)\,,$$

où U parcourt la catégorie des voisinages ouverts de y. De même, si $\varphi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ est un morphisme de préfaisceaux, la limite inductive de la famille de morphismes $\varphi(U) : \mathcal{P}_1(U) \to \mathcal{P}_2(U)$ suivant la catégorie des voisinages de y est également définie, cette limite notée $\varphi_{(y)}$ est appelée «le germe de φ en y». Le foncteur ainsi obtenu est *additif et exact*.

Le résultat suivant joue un rôle fondamental en théorie de faisceaux. Dans ce contexte, on verra que le préfaisceau de complexes de Čech augmentés associés à un faisceau $\mathcal{F}$, est un complexe de *faisceaux*. La proposition suivante affirme alors que ce complexe est une *résolution* canonique (dans la catégorie des faisceaux) de $\mathcal{F}$.

12.7-1. Théorème : *Soit $\mathcal{P}$ un préfaisceaux sur $\boldsymbol{Y}$. Pour tout point $y \in \boldsymbol{Y}$, le complexe de germes en y du préfaisceau des complexes de Čech augmentés :*

$$\mathbf{0} \to \mathcal{P} \to \check{\mathcal{C}}^{\bullet}(\boldsymbol{Y}; \mathcal{P})\,,$$

est exact.

Démonstration : ([42]) Fixons un point $y \in \boldsymbol{Y}$. Nous devons prouver que le complexe :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{P}_{(y)} \xrightarrow{\varepsilon_{(y)}} \check{\mathcal{C}}^0(\boldsymbol{Y}; \mathcal{P})_{(y)} \xrightarrow{d_{0\,(y)}} \check{\mathcal{C}}^1(\boldsymbol{Y}; \mathcal{P})_{(y)} \xrightarrow{d_{1\,(y)}} \check{\mathcal{C}}^2(\boldsymbol{Y}; \mathcal{P})_{(y)} \xrightarrow{d_{2\,(y)}} \cdots$$

est exact.

▸ **Exactitude aux termes supérieurs.** Soit $\tilde{\xi} \in \check{\mathcal{C}}^p(\boldsymbol{Y}; \mathcal{P})_{(y)}$, tel que $d_p\,\tilde{\xi} = 0$. Il existe alors un voisinage $V \ni y$ et un représentant ξ de $\tilde{\xi}$ dans $\check{\mathrm{C}}^p(V; \mathcal{P}|_V)$, tel que $d_p\,\xi = 0$. Comme d'autre part

$$\check{\mathrm{C}}^p\left(V; \mathcal{P}|_V\right) = \varinjlim_{\mathcal{U} \in \mathfrak{Rec}_*(V)} \mathrm{C}^p\left(\mathcal{U}; \mathcal{P}|_V\right),$$

il existe un recouvrement $\mathcal{W} = \left\{W_v\right\}_{v \in V}$ de V et un représentant $\omega \in \mathrm{C}^p\left(\mathcal{W}; \mathcal{P}|_V\right)$ de ξ, vérifiant également $d_p\,\omega = 0$. Nous pouvons maintenant restreindre nos considérations au voisinage ouvert W_y de y et regarder le complexe de Čech restreint $\mathrm{C}^{\bullet}\left(\mathcal{W}'; \mathcal{P}|_{W_y}\right)$, où $\mathcal{W}' := \mathcal{W} \cap W_y$. On remarquera une propriété essentielle du recouvrement $\mathcal{W}'$, à savoir,

$$W_y \text{ est l'ouvert de } \mathcal{W} \text{ indéxé par } y, \text{ et } W_y \supseteq W_w, \text{ quel que soit } w \in W_y. \tag{P}$$

L'image ω' de ω dans ce nouveau complexe continue de représenter le germe $\tilde{\xi}$ de départ et de vérifier la relation $d_p\,\omega' = 0$.

Soit $h(y) : \mathrm{C}^p\left(\mathcal{W}'; \mathcal{P}|_{W_y}\right) \to \mathrm{C}^{p-1}\left(\mathcal{W}'; \mathcal{P}|_{W_y}\right)$ définie par :

$$[h(y)(\nu)]_{w_1,\ldots,w_p} = \nu_{y,w_1,\ldots,w_p} \in W_y \cap W_{w_1} \cap \cdots \cap W_{w_p} = W_{w_1} \cap \cdots \cap W_{w_p}\,,$$

pour toute p-cochaîne $\nu \in \prod_{w \in W_y} \mathcal{P}(W_w)$, où l'égalité de droite résulte de la propriété (P). On a alors pour la cochaîne ω' :

$$\begin{aligned} \left[d_{p-1}\left(h(y)(\omega')\right)\right]_{w_0,w_1,\ldots,w_p} &= \sum_{k=0,\ldots,p} (-1)^k \left[h(y)(\omega')\right]_{w_0,\ldots,\widehat{w_k},\ldots,w_p} \\ &= \sum_{k=0,\ldots,p} (-1)^k \left[\omega'\right]_{y,w_0,\ldots,\widehat{w_k},\ldots,w_p} \end{aligned} \tag{1}$$

[42] Vous retrouverez cette démonstration dans le cadre de la théorie des faisceaux dans [God$_2$] ; théorème **5.2.1** page 206.

Or, la condition de cocyclicité $d_p\,\omega'$, lue sur la coordonnée $y, w_0, \dots, w_p$, donne :

$$0 = \Big[d_p\,\omega'\Big]_{y,w_0,\dots,w_p} = \Big[\omega'\Big]_{w_0,\dots,w_k,\dots,w_p} - \sum_{k=0,\dots,p} (-1)^k \Big[\omega'\Big]_{y,w_0,\dots,\widehat{w_k},\dots,w_p}\,, \tag{2}$$

ce qui reporté dans (1) montre l'égalité $d_{p-1}\,(h(y)(\omega')) = \omega'$.

On conclut ainsi que le germe de cocycle $\tilde{\omega}$ est le cobord du germe en y déterminé par le $(p-1)$-cocycle $h(y)(\omega')$.

▸ **Injectivité de $\varepsilon_{(y)}$.** Les mêmes choix de voisinages que dans le cas des termes supérieurs donnent, à la place de l'égalité (2), l'égalité :

$$\Big[\varepsilon(\omega')\Big]_y = \omega'\,,$$

d'où l'injectivité. ∎

12.7-2. Exercice : Indiquez quelles (légères) modifications doivent être apportés aux arguments de la démonstration précédente pour prouver l'exactitude au niveau des 0-cochaînes.

12.7-3. Remarque : Il importe de bien remarquer que dans la démonstration de 12.7-1, la définition de l'opérateur $h(y)$ dépend *aussi* de la donnée du germe $\tilde{\xi}$. Les différents choix de voisinages intervenant dans les arguments sont intimement liés à $\tilde{\xi}$; en particulier, il n'existe pas, *a priori*, des choix universels, et il n'y a pas d'homotopie pour le complexe de germes.

Lorsque l'espace $\boldsymbol{Y}$ est une variété différentiable, nous avons pourtant donné **pour chaque recouvrement $\mathcal{U}$ donné**, des homotopies du complexe augmenté $\mathbf{0} \to \underline{\Omega}^p \to \mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U}; \underline{\Omega}^p)$, où $\underline{\Omega}^p$ désigne le faisceau des p-formes différentielles sur $\boldsymbol{Y}$. Cela a été possible essentiellement pour deux raisons :

a) $\boldsymbol{Y}$ admet des partitions de l'unité dont les éléments appartiennent au faisceau des fonctions $\underline{\Omega}^0(\boldsymbol{Y})$.

b) Les faisceau $\underline{\Omega}^p(\boldsymbol{Y})$ sont des $\underline{\Omega}^0(\boldsymbol{Y})$-modules.

A remarquer que (a) est une propriété *très spécifique* des espaces paracompacts et n'a pas d'analogue pour les variétés analytiques ou algébriques.

12.7.1 Préfaisceaux localement nuls.

12.7.1-1. Définition : Deux préfaisceaux $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sur $\boldsymbol{Y}$ sont dits «localement isomorphes» lorsqu'il existe un morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ dont les germes sont tous des isomorphismes, *i.e.* :

$$\varphi_{(y)} : \mathcal{P}_{1(y)} \to \mathcal{P}_{2(y)} \qquad \text{est bijectif pour tout } y \in \boldsymbol{Y}.$$

Un tel morphisme de préfaisceau est alors appelé «un isomorphisme local de préfaisceau».

Un préfaisceau $\mathcal{P}$ est dit «localement nul» lorsque le morphisme $\mathbf{0} \to \mathcal{P}$ est un isomorphisme local, *i.e.* lorsque tous les germes $\mathcal{P}_{(y)}$ sont nuls.

12.7.1-2. Corollaire à 12.7-1 : *Soit $\mathcal{P}$ un préfaisceau sur $\boldsymbol{Y}$.*

1) *Le morphisme canonique $\mathcal{P} \to \check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y}; \mathcal{P})$ est un isomorphisme local.*

2) *Les préfaisceaux $\check{\mathcal{H}}^k(\boldsymbol{Y}; \mathcal{P})$ sont localement nuls pour $k \geqslant 1$.*

Le résultat d'annulation suivant jouera un rôle important dans la suite :

12.7.1-3. Lemme : *Si $\mathcal{P}$ est un préfaisceau* localement nul, *on a* $\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) = 0$.

Démonstration : En effet, pour tout $\mathcal{P}$, on a une injection canonique (et naturelle) $\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) \hookrightarrow \check{\mathcal{C}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})$. Une section σ au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{Y}$ de $\check{\mathcal{C}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})$ est donnée par un élément de

$$\check{\mathrm{C}}^0(U;\mathcal{P}|_U) = \varinjlim_{\mathcal{U}\in\mathfrak{Rec}_*(U)} \mathrm{C}^0(\mathcal{U};\mathcal{P}|_U)\,,$$

de sorte que notre section sera représentée par une famille de sections $\{\sigma_y \in \mathcal{P}(U_y)\}_{y\in U}$, où les U_y constituent un recouvrement pointé de U. La nullité locale de $\mathcal{P}$, permet alors d'associer à chaque $y \in U$ un ouvert $W_y \subseteq U_y$ tel que $\sigma_y|_{W_y} = 0$. La famille $\mathcal{W} = \{W_y\}_{y\in U}$ est alors un recouvrement pointé de U qui raffine $\mathcal{U}$ et qui représente σ par l'élément nul. Le préfaisceau $\check{\mathcal{C}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})$, et donc aussi $\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})$, est nul. ∎

12.7.2 Faisceau associé à un préfaisceau. Les résultats qui précèdent montrent que la donnée d'un préfaisceau $\mathcal{P}$ génère une suite *a priori* infinie de préfaisceaux localement isomorphes. Il s'agit de la suite dont les premiers termes sont :

$$\mathcal{P} \longrightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) \longrightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})) \longrightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}))) \longrightarrow \cdots$$

Nous allons voir que cette suite stationne (*i.e.* les isomorphismes locaux deviennent des isomorphismes de préfaisceaux) à partir du troisième terme. Ceci signifie, en particulier, que :

$\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}))$ est un *faisceau*, pour tout préfaisceau $\mathcal{P}$.

12.7.2-1. Proposition : *Pour tout préfaisceau $\mathcal{P}$ sur $\boldsymbol{Y}$, on a :*

1) *Le préfaisceau $\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}))$ est un* faisceau.
2) *Pour tout morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ est un faisceau, il existe un unique morphisme $\psi(\varphi) : \check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})) \to \mathcal{F}$, tel que $\varphi = \psi(\varphi)\circ\nu(\mathcal{P})$, où $\nu(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \to \check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}))$ est le morphisme canonique donné par les augmentations.*
3) *Le morphisme canonique $\nu(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \to \check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}))$ est un isomorphisme local.*

Démonstration :

▸ **1)** Nous avons déjà remarqué que l'augmentation $\varepsilon(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \to \check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})$ est un isomorphisme local (*cf.* 12.7.1-2). Notons $\ker(\varepsilon)$, $\mathrm{im}(\varepsilon)$, $\mathrm{coker}(\varepsilon)$ respectivement les préfaisceaux noyau, image et conoyau de $\varepsilon(\mathcal{P})$. On a alors les deux suites exactes courtes suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \to \ker(\varepsilon) & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathrm{im}(\varepsilon) & \to \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \to \mathrm{im}(\varepsilon) & \to & \check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) & \to & \mathrm{coker}(\varepsilon) & \to \mathbf{0} \end{array}$$

Or, le préfaisceaux $\ker(\varepsilon)$ et $\mathrm{coker}(\varepsilon)$, étant localement nuls, seront annulés par le foncteur $\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y},_)$. On obtient alors, grâce à l'exactitude à gauche de ce foncteur (voir remarque 12.6-1) :

$$\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) \xhookrightarrow{(=)} \check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathrm{im}(\varepsilon)) \xrightarrow{\equiv} \check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}))$$

où l'injection de préfaisceaux de gauche est un isomorphisme local. Le morphisme composé $\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) \hookrightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}))$ est donc une injection de conoyau localement nul que l'application de $\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y},_)$ transformera en un *isomorphisme*. Le préfaisceau $\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}))$ est donc bien un faisceau.

▸ **2**) Soit maintenant $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$ un morphisme de préfaisceaux où $\mathcal{F}$ est un faisceau. On notera $\widehat{\mathcal{Q}}$ le préfaisceau $\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y}, \mathcal{Q})$ associé à un préfaisceau $\mathcal{Q}$. L'application itérée du foncteur $\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y}, _)$ donne alors :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P} & \xrightarrow[(\equiv)]{(\mathcal{P})} & \widehat{\mathcal{P}} & \xrightarrow[(\equiv)]{\varepsilon(\widehat{\mathcal{P}})} & \widehat{\widehat{\mathcal{P}}} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\varphi}} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\widehat{\varphi}}} \\ \mathcal{F} & \xrightarrow[\equiv]{\varepsilon(\mathcal{F})} & \widehat{\mathcal{F}} & \xrightarrow[\equiv]{\varepsilon(\widehat{\mathcal{F}})} & \widehat{\widehat{\mathcal{F}}} \end{array}$$

où las morphismes de la deuxième ligne sont des isomorphismes de préfaisceaux. La composition $\psi(\varphi) := \varepsilon(\mathcal{F})^{-1} \circ \varepsilon(\widehat{\mathcal{F}})^{-1} \circ \widehat{\widehat{\varphi}}$ vérifie alors (**2**). Ceci étant, les morphismes horizontaux du diagramme précédent étant des isomorphismes locaux, tout autre morphisme ψ' satisfaisant aux conditions demandées, aura les mêmes germes que $\psi(\mathcal{P})$; leur différence définit alors un morphisme $(\psi(\varphi) - \psi') : \widehat{\widehat{\mathcal{P}}} \to \mathcal{F}$ dont les germes sont nuls, mais $\mathcal{F}$ est un *faisceau* et $(\psi(\varphi) - \psi')$ sera nécessairement nul. ∎

12.7.2-2. Définition : Le faisceau $\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y}; \mathcal{P}))$ sera appelé «faisceau associé à un préfaisceau $\mathcal{P}$» ; on le notera $\widetilde{\mathcal{P}}$.

12.7.2-3. Remarque et exercice : La correspondance $\mathcal{P} \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{P}}$ **à valeurs dans la catégorie de préfaisceaux** est (*a priori*) uniquement exacte à gauche. Montrez que pour toute suite exacte courte de préfaisceaux :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_3 \to \mathbf{0}$$

on à une suite exacte :

$$\mathbf{0} \to \widetilde{\mathcal{P}}_1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}_2 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}_3 \longrightarrow \check{\mathcal{H}}^1(\boldsymbol{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y}; \mathcal{P}_1)) \longrightarrow \check{\mathcal{H}}^1(\boldsymbol{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y}; \mathcal{P}_2)),$$

le préfaisceau conoyau de $\widetilde{\mathcal{P}}_2 \to \widetilde{\mathcal{P}}_3$ est donc généralement localement nul mais pas forcément nul. Nous verrons plus tard que la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Préf}(\boldsymbol{Y})$ dont les objets sont les *faisceaux*, **est abélienne** ; la suite

$$\mathbf{0} \to \widetilde{\mathcal{P}}_1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}_2 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}_3 \to \mathbf{0},$$

y sera alors exacte et le foncteur $\mathcal{P} \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{P}}$ **à valeurs dans la catégorie de *faisceaux*** sera exact.

12.8 Théorèmes d'annulation pour la cohomologie de Čech

Nous avons vu dans la section précédente (voir 12.7.1-3) que le foncteur $\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y}; _)$ annule les préfaisceaux localement nuls et une inspection de la démonstration de la proposition 12.7.2-1 montre que s'il en était de même pour $\check{\mathcal{H}}^1(\boldsymbol{Y}; _)$, le préfaisceau $\check{\mathcal{H}}^0(\boldsymbol{Y}; \mathcal{P})$ aurait été un faisceau et donc la cohomologie de Čech en degré zéro de $\mathcal{P}$ aurait été isomorphe à celle du faisceau associé $\widetilde{\mathcal{P}}$. Plus généralement, si les foncteurs $\check{\mathcal{H}}^k(\boldsymbol{Y}; _)$, pour $0 \leqslant k \leqslant N$, annulent les préfaisceaux localement nuls alors :

$$\check{\mathcal{H}}^k(\boldsymbol{Y}, \mathcal{P}) \equiv \check{\mathcal{H}}^k(\boldsymbol{Y}, \widetilde{\mathcal{P}}), \quad \text{et donc} \quad \check{\mathrm{H}}^k(\boldsymbol{Y}, \mathcal{P}) \equiv \check{\mathrm{H}}^k(\boldsymbol{Y}, \widetilde{\mathcal{P}}), \qquad \text{pour } 0 \leqslant k < N.$$

Sur les espaces paracompacts on démontre, à l'aide des partitions de l'unité, le résultat suivant.

12.8-1. Théorème : *Soit $\boldsymbol{Y}$ un espace topologique séparé et paracompact. La cohomologie de Čech d'un préfaisceau $\mathcal{P}$* localement nul, *est nulle en tous degrés :*

$$\check{\mathrm{H}}^k(\boldsymbol{Y}; \mathcal{P}) = \mathbf{0}, \qquad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Démonstration : (Voir [God$_2$] théorème **5.10.2** page 228, ou [Spa] théorème **6.8.16** page 328.) ∎

12.8-2. Remarque : Vous avez sans doute observé que l'énoncé fait référence à la cohomologie de Čech *globale*. En effet, le même résultat pour le préfaisceau $\check{\mathcal{H}}^k(\boldsymbol{Y};\mathcal{P})$ aurait exigé l'existence de bases d'ouverts paracompacts pour la topologie de $\boldsymbol{Y}$. Or, la paracompacité d'un espace n'entraîne pas forcément celle de ses ouverts. Par contre, un espace métrique et séparable est toujours paracompact ; ses ouverts, étant également métriques et séparables, seront donc paracompacts. Dans un tel cas le théorème précédent est vrai pour les préfaisceaux de cohomologie de Čech.

Vous devriez être maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant

12.8-2. Théorème :

1) *Sur un espace séparé et paracompact* $\boldsymbol{Y}$*, le morphisme canonique* $\check{\mathrm{H}}^k(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) \to \check{\mathrm{H}}^k(\boldsymbol{Y};\widetilde{\mathcal{P}})$ *est un* isomorphisme*, pour tout* $k \in \mathbb{N}$.
2) *Sur un espace métrique* $\boldsymbol{Y}$*, le morphisme canonique* $\check{\mathcal{H}}^k(\boldsymbol{Y};\mathcal{P}) \to \check{\mathcal{H}}^k(\boldsymbol{Y};\widetilde{\mathcal{P}})$ *est un* isomorphisme *de faisceaux, pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

———————×———————

§13. Cohomologie de faisceaux

Dans ce chapitre, on désignera par $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif avec identité multiplicative, et par $\boldsymbol{X}$ un espace topologique arbitraire, *i.e.* un ensemble muni d'une topologie.

13.1 Catégorie abélienne des préfaisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules

Notons $\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) := \mathrm{Préf}(\boldsymbol{X};\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}))$ la catégorie dont les objets sont les préfaisceaux $\mathcal{P}$ sur $\boldsymbol{X}$ "à valeurs" dans la catégorie des $\boldsymbol{A}$-modules (à gauche) et tels que $\mathcal{P}(\varnothing) = \mathbf{0}$. On appellera un tel préfaisceaux «un préfaisceau de $\boldsymbol{A}$-modules».

On retiendra que les morphismes de restriction d'un préfaisceau de $\boldsymbol{A}$-modules sont des homomorphismes de $\boldsymbol{A}$-modules. De même, les morphismes de la catégorie $\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ seront les morphismes de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ tels que, pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, l'application $\varphi(U) : \mathcal{P}_1(U) \to \mathcal{P}_2(U)$ est $\boldsymbol{A}$-linéaire. Il convient, par ailleurs, de remarquer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathrm{Préf}}(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2) & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{U\subseteq\boldsymbol{X}} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}\big(\mathcal{P}_1(U),\mathcal{P}_2(U)\big) \\ \varphi & \longmapsto & \big(U \mapsto \varphi(U)\big) \end{array}$$

est injective et réalise $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Préf}}(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$ comme un sous-$\boldsymbol{A}$-module de $\prod_{U\subseteq\boldsymbol{X}} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{P}_1(U),\mathcal{P}_2(U))$, d'où une structure canonique de groupe abélien sur l'ensemble de morphismes en question. En définissant le «préfaisceau nul» comme le préfaisceau constant qui fait correspondre à tout ouvert de $\boldsymbol{X}$ le module nul, les axiomes Ad-1, Ad-2, Ad-3 des catégories additives (*cf.* page 110) sont vérifiés.

Soit $\{\mathcal{P}_1,\dots,\mathcal{P}_s\}$ une famille finie de préfaisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules. La correspondance :

$$\bigoplus_{i=1,\dots,s} \mathcal{P}_i : U \rightsquigarrow \bigoplus_{i=1,\dots,s} \mathcal{P}_i(U)\,,$$

est un préfaisceau de $\boldsymbol{A}$-modules et $i_k : \mathcal{P}_k \to \bigoplus_{i=1,\dots,s} \mathcal{P}_i$ et $p_k : \bigoplus_{i=1,\dots,s} \mathcal{P}_i \to \mathcal{P}_k$, définies par :

$$U \rightsquigarrow i_k(U) : \mathcal{P}_k(U) \to \bigoplus_{i=1,\dots,s} \mathcal{P}_i(U)\,, \quad \text{et} \quad U \rightsquigarrow p_k(U) : \bigoplus_{i=1,\dots,s} \mathcal{P}_i(U) \to \mathcal{P}_k(U)\,,$$

où $i_k(U)$ et $p_k(U)$ désignent respectivement l'injection et la projection canoniques des somme directes de modules, sont des morphismes de préfaisceaux qui font de l'objet $\bigoplus_{i=1,\dots,s} \mathcal{P}_i$ une somme directe dans la catégorie $\text{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$. La catégorie $\text{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ est donc **additive**.

Un élément de la catégorie $\text{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ s'interprète comme un foncteur *contravariant* de la petite catégorie $\text{Ouv}(\boldsymbol{X})$ associée à l'ensemble des ouverts de la topologie de $\boldsymbol{X}$ partiellement ordonné par la relation d'inclusion d'ensembles, vers la catégorie $\text{Mod}(\boldsymbol{A})$ des $\boldsymbol{A}$-modules à gauche. Un morphisme de préfaisceaux est alors une transformation naturelle entre de tels foncteurs. Ainsi la catégorie $\text{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ s'identifie à la catégorie des foncteurs contravariants de $\text{Ouv}(\boldsymbol{X})$ vers $\text{Mod}(\boldsymbol{A})$. Ceci étant, la catégorie $\text{Mod}(\boldsymbol{A})$ est abélienne et les propriétés universelles de «noyau», «conoyau», «image» et «coimage» dans $\text{Mod}(\boldsymbol{A})$ montrent que pour tout morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, les correspondances qui associent à un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ les modules :

$$U \rightsquigarrow \underline{\ker}(\varphi)(U)\,, \quad U \rightsquigarrow \underline{\text{coker}}(\varphi)(U)\,, \quad U \rightsquigarrow \underline{\text{im}}(\varphi)(U)\,, \quad U \rightsquigarrow \underline{\text{coim}}(\varphi)(U)\,,$$

où l'on pose par définition :

- $\underline{\ker}(\varphi)(U) := \ker(\varphi(U))$; le module «noyau» de $\varphi(U)$;
  sous-$\boldsymbol{A}$-module de $\mathcal{P}_1(U)$ dont on note $\kappa(U) : \underline{\ker}(\varphi)(U) \to \mathcal{P}_1(U)$ l'inclusion canonique ;
- $\underline{\text{im}}(\varphi)(U) := \text{im}(\varphi(U))$; le module «image» de $\varphi(U)$;
  $\boldsymbol{A}$-module quotient de $\mathcal{P}_1(U)$, canoniquement isomorphe à $\mathcal{P}_1(U)/\ker(\varphi(U))$; notons $p(U) : \mathcal{P}_1(U) \to \underline{\text{im}}(\varphi)(U)$ la projection canonique, "restriction" de $\varphi(U)$ à son module image ;
- $\underline{\text{coker}}(\varphi)(U) := \text{coker}(\varphi(U))$; le module «conoyau» de $\varphi(U)$;
  $\boldsymbol{A}$-module quotient de $\mathcal{P}_2(U)$, canoniquement isomorphe à $\mathcal{P}_2(U)/\text{im}(\varphi(U))$; notons $\tilde{\kappa}(U) : \mathcal{P}_2(U) \to \underline{\text{coker}}(\varphi)(U)$ la projection canonique ;
- $\underline{\text{coim}}(\varphi)(U) := \text{coim}(\varphi(U))$; le module «coimage» de $\varphi(U)$;
  sous-$\boldsymbol{A}$-module de $\mathcal{P}_2(U)$, canoniquement isomorphe au noyau de la projection canonique $\mathcal{P}_2(U) \to \text{coker}(\varphi(U))$; notons $q(U) : \underline{\text{coim}}(\varphi)(U) \to \mathcal{P}_2(U)$ l'injection canonique ;

sont des préfaisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules. De même, les correspondances :

$$U \rightsquigarrow \kappa(U) : \underline{\ker}(\varphi)(U) \to \mathcal{P}_1(U)\,, \quad U \rightsquigarrow \tilde{\kappa}(U) : \mathcal{P}_2(U) \to \underline{\text{coker}}(\varphi)(U)\,,$$
$$U \rightsquigarrow p(U) : \mathcal{P}_1(U) \to \underline{\text{im}}(\varphi)(U)\,, \quad U \rightsquigarrow q(U) : \underline{\text{coim}}(\varphi)(U) \to \mathcal{P}_2(U)\,,$$

définissent des morphismes de préfaisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules et sont respectivement des «noyau», «conoyau», «image» et «coimage» de la catégorie $\text{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ qui est **abélienne** puisque le morphisme canonique $\underline{\text{im}}(\varphi) \to \underline{\text{coim}}(\varphi)$ est (tautologiquement) un isomorphisme.

13.1-1. Exercice : Vérifier les assertions des paragraphes précédents.

13.1-2. Exercice : Montrer qu'une suite courte de préfaisceaux :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{P}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{P}_2 \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}_3 \to \mathbf{0}\,,$$

est exacte, si et seulement si, la suite de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{P}_1(U) \xrightarrow{\alpha(U)} \mathcal{P}_2(U) \xrightarrow{\beta(U)} \mathcal{P}_3(U) \to \mathbf{0}\,,$$

est exacte, quel que soit l'ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$.

13.1.1 Foncteurs "sections" et "germes" dans la catégorie des préfaisceaux.

• Foncteur "sections au-dessus d'un ouvert"
Soit U une partie ouverte de $\boldsymbol{X}$, le foncteur «sections au-dessus de U», noté $\Gamma(U;_)$, est la correspondance de $\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ vers $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ qui associe à un préfaisceau $\mathcal{P}$, le $\boldsymbol{A}$-module $\Gamma(U;\mathcal{P}) := \mathcal{P}(U)$, et à un morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\varphi(U) : \mathcal{P}_1(U) \to \mathcal{P}_2(U)$ que l'on note également $\Gamma(U;\varphi) := \varphi(U)$. Cette correspondance est fonctorielle **covariante additive et exacte** de $\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ vers $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ (*cf.* exercice 13.1-2).

• Foncteur "germes en un point"
Soit $x \in \boldsymbol{X}$, le système $(\mathcal{V}(x), \subseteq)$ des voisinages de x dans $\boldsymbol{X}$, muni de l'ordre partiel d'inclusion est un système filtrant inférieurement ([43]). Pour tout préfaisceau de $\boldsymbol{A}$-modules $\mathcal{P}$, le système de $\boldsymbol{A}$-modules $\{\rho_V^U : \Gamma(U;\mathcal{P}) \to \Gamma(V;\mathcal{P})\}$, où $U \supseteq V$ sont des éléments de $\mathcal{V}(x)$ est alors inductif filtrant et comme les foncteurs sections sont exacts et que la catégorie des $\boldsymbol{A}$-modules possède des limites, il en découle que la correspondance $(_)_{(x)}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})) \quad &\rightsquigarrow \mathcal{P}_{(x)} := \varinjlim_{U\in\mathcal{V}(x)} \mathcal{P}(U) \\ \varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})}(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2) &\rightsquigarrow \varphi_{(x)} := \varinjlim_{U\in\mathcal{V}(x)} \varphi(U)\,, \end{aligned}$$

est bien définie, fonctorielle **covariante additive et exacte**.

13.1.1-1. Exercice : Montrer que le foncteur "produit des foncteur germes" $\prod_{x\in\boldsymbol{X}} (_)_{(x)}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})) \quad &\rightsquigarrow \prod_{x\in\boldsymbol{X}} \mathcal{P}_{(x)} \\ \varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})}(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2) &\rightsquigarrow \prod_{x\in\boldsymbol{X}} \varphi_{(x)}\,, \end{aligned}$$

est **covariant additif et exact** de la catégorie $\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ vers $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$.

Supposons à partir de maintenant que $\boldsymbol{X} \neq \varnothing$. Montrer que la correspondance $\mathcal{Q}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}$ et $\mathcal{Q}(U) = \mathbf{0}$, où les morphismes de restrictions (strictes) sont tous nuls, est bien un préfaisceau.

A l'aide du préfaisceau $\mathcal{Q}$ montrer que le foncteur "produit des foncteur germes" n'est pas fidèle, *i.e.* que le morphisme défini par ce foncteur :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})}(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}\Big(\prod_{x\in\boldsymbol{X}} \mathcal{P}_{1(x)}, \prod_{x\in\boldsymbol{X}} \mathcal{P}_{2(x)}\Big) \\ \varphi &\longmapsto \prod_{x\in\boldsymbol{X}} \varphi_{(x)} \end{aligned}$$

peut ne pas être injectif.

[43] Rappelons qu'un ensemble partiellement ordonné $(\boldsymbol{S}, \leqslant)$ est dit «filtrant inférieurement» lorsque pour tous $s_1, s_2 \in \boldsymbol{S}$, il existe s_3 vérifiant $s_3 \leqslant s_1$ et $s_3 \leqslant s_2$.

13.1.1-2. Exercice : Montrer qu'un foncteur $\mathcal{F}$ entre deux catégories abéliennes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui est additif, n'est pas fidèle, s'il existe un objet non nul $\mathcal{P}$ de $\mathcal{C}_1$ dont l'objet image $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ est un objet nul de $\mathcal{C}_2$.

Prouver la réciproque de la dernière assertion lorsque le foncteur $\mathcal{F}$ est en plus *exact*.

Refaire la dernière partie de l'exercice précédent en montrant que l'image par le foncteur "produit de germes" de l'objet $\mathcal{Q}$ est bien un $\boldsymbol{A}$-module nul.

13.2 Catégorie abélienne des faisceaux de A-modules

Rappelons que d'après la proposition 12.6-2 et la remarque 12.6-3, on appelle «faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules» tout objet $\mathcal{F}$ de $\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$, tel que pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de U, la suite de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\prod_\alpha \rho^U_{U_\alpha}} \prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}(U_\alpha) \xrightarrow{\prod_\alpha \left(\prod_\beta \rho^{U_\alpha}_{U_{\alpha\beta}} - \rho^{U_\alpha}_{U_{\beta\alpha}}\right)} \prod_{\alpha,\beta\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}(U_{\alpha\beta})\,,$$

est **exacte**.

On note $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ dont les objets sont des faisceaux. On appelle «morphisme de faisceaux» tout morphisme de préfaisceaux entre deux faisceaux.

13.2-1. Proposition :

a) *la catégorie* $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ *est* ***additive****.*

b) *Le préfaisceau noyau d'un morphisme de préfaisceaux* $\varphi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$*, où* $\mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ *sont des faisceaux,* ***est un faisceau****. La catégorie des faisceaux possède des noyaux.*

Démonstration :

a) L'additivité de la catégorie $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ résulte d'une part de ce qu'elle est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$, ce qui signifie que $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$, et donc les axiomes Ad-1, Ad-2 et Ad-3 sont automatiquement vérifiés. L'existence des sommes directes (finies) de faisceaux résulte de la simple vérification que la somme directe préfaisceautique de faisceaux est un faisceau, ce qui est élémentaire.

b) Soit σ une section de $\underline{\ker}(\varphi)$ localement nulle, comme nous avons une injection de préfaisceaux $\underline{\ker}(\varphi)(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_1(U)$ pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, la section φ s'identifie canoniquement à une section du faisceau $\mathcal{F}_1$ localement nulle, elle est donc nécessairement nulle. Soit maintenant $U \subseteq \boldsymbol{X}$ un ouvert et $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de U ; donnons-nous pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$, une section $\sigma_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \underline{\ker}(\sigma))$ et supposons que $\rho^{U_\alpha}_{U_{\alpha\beta}}(\sigma_\alpha) = \rho^{U_\beta}_{U_{\alpha\beta}}(\sigma_\beta)$ pour tous $\alpha,\beta \in \mathfrak{A}$. L'injectivité de l'inclusion $\underline{\ker}(\varphi)(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_1(U)$ montre que la famille de sections $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ s'identifie à une famille de sections de $\mathcal{F}_1$ qui se recolle en une section $\sigma \in \mathcal{F}_1(U)$. L'image $\tau := \varphi(\sigma)$ est trivialement la section nulle puisque localement nulle d'après les égalités $\varphi(\sigma_\alpha) = 0$ et comme $\mathcal{F}_2$ est un faisceau, il s'ensuit que $\sigma \in \underline{\ker}(\varphi)(U)$. ∎

13.2-2. Notation : Pour tout morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$, on notera par $\kappa(\varphi) : \underline{\ker}(\varphi) \to \mathcal{F}_1$ le morphisme «noyau». Il s'agit bien évidemment d'une notation superflue dans la mesure où la démonstration précédente montre que $\underline{\ker}(\varphi) = \underline{\ker}(\varphi)$; elle se justifiera dans les sections suivantes par un besoin de cohérence notationnelle où l'on notera $\underline{\mathrm{coker}}(\varphi)$ «le faisceau conoyau» qui sera, lui, généralement différent du préfaisceau conoyau $\underline{\mathrm{coker}}(\varphi)$.

13.2-3. Remarque : Contrairement aux préfaisceau noyau, le préfaisceau conoyau d'un morphisme de faisceaux peut ne pas être un faisceau. En effet, soit $\boldsymbol{X} = \mathbb{S}^1$ muni de la structure standard de variété différentiable et notons $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}$ le faisceau des sections localement constantes définies sur les ouverts de $\boldsymbol{X}$ (vérifier que c'est bien un faisceau). Le faisceau $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}$ est naturellement un sous-faisceau du faisceau $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur les ouverts de $\boldsymbol{X}$. Le préfaisceau conoyau de l'injection canonique $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}} \hookrightarrow \underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}}$, que nous noterons $\mathcal{Q}$, est le préfaisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ modulo les fonctions localement constantes. D'autre part, le revêtement universel $\exp\left(\sqrt{-1}\cdot _\right) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_u \equiv \boldsymbol{X}$ n'admet pas de sections globales, mais admet des sections sur l'ouvert complémentaire d'un point de $\boldsymbol{X}$ puisque un tel ouvert est simplement connexe (contractile en fait). Soient $x_1 \neq x_2 \in \boldsymbol{X}$ et notons, pour $j = 1, 2$, $U_j = \boldsymbol{X}\backslash\{x_j\}$ et $\sigma_j : U_j \to \mathbb{R}$ une section de $\exp\left(\sqrt{-1}\cdot _\right)$, on a $\sigma_j \in \Gamma(U_j; \underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}})$; notons τ_j la section de $\mathcal{Q}$ définie par σ_j. On vérifie aisément que sur l'ouvert intersection U_{12}, la section $\sigma_1 - \sigma_2$ est localement constante et son image $\tau_1 - \tau_2$ dans $\mathcal{Q}$ sera nulle. Supposons maintenant que $\mathcal{Q}$ est un faisceau. Il existe alors une section globale $\tau \in \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{Q})$ recollant τ_1 et τ_2. Or, les sections globales du *préfaisceau quotient* $\mathcal{Q}$ proviennent de sections globales de $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}}$ de sorte qu'il existe une section globale $\sigma \in \Gamma(\boldsymbol{X}; \underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}})$ et deux constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ telles que $\sigma|_{U_1} = \sigma_1 + c_1$ et $\sigma|_{U_2} = \sigma_2 + c_2$. Quitte à remplacer σ par $\sigma - c_1$, nous pouvons supposer $c_1 = 0$ et donc $\sigma_1 = \sigma_2 + c_2$ sur U_{12}, dont on déduit $\exp\left(\sqrt{-1}\cdot c_2\right) = 1$. Il s'ensuit que $\exp\left(\sqrt{-1}\cdot\sigma(x)\right) = x$, quel que soit $x \in \boldsymbol{X}$, ce qui est impossible. Le préfaisceau $\mathcal{Q}$ n'est donc pas un faisceau.

13.2.1 Le foncteur "faisceau associé". Rappelons que nous avons montré dans 12.7.2-1 comment associer *fonctoriellement* à tout préfaisceau de $\boldsymbol{A}$-modules $\mathcal{P}$, un morphisme de préfaisceaux $\nu_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \to \widetilde{\mathcal{P}}$, où $\widetilde{\mathcal{P}}$ est le «faisceau associé à $\mathcal{P}$» et où $\nu_{\mathcal{P}}$ est un *isomorphisme local* ([44]), vérifiant la propriété universelle suivante :

"*Pour tout morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ est un faisceau, il existe* ***un et un seul*** *morphisme de faisceaux $\tilde{\varphi} : \widetilde{\mathcal{P}} \to \mathcal{G}$ tel que $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \nu_{\mathcal{P}}$.*"

13.2.1-1. Exercice : Notons $\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$ le préfaisceau "constant" qui associe à chaque ouvert non vide $U \subseteq \boldsymbol{X}$ l'anneau $\boldsymbol{A}$, et tel que les morphismes de restriction entre deux ouverts non vides est l'identité. Notons $\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$ le préfaisceau des fonctions localement constantes définies sur les ouverts de $\boldsymbol{X}$ et à valeurs dans $\boldsymbol{A}$, les morphismes de restriction étant alors les restrictions des fonctions. Pour tout $U \subseteq \boldsymbol{X}$ soit $\nu(U) : \underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}(U) \to \underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}(U)$ l'application qui associe à un élément $a \in \boldsymbol{A}$ l'application constante de U dans $\boldsymbol{A}$ de valeur a.

a) Montrer que les morphismes $\nu(U)$ définissent un morphisme de préfaisceaux $\nu : \underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}} \to \underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$ qui est un *isomorphisme local*.

b) Montrer que $\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$ est un faisceau et que le morphisme ν est le morphisme canonique entre le préfaisceaux $\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$ et son faisceau associé $\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$.

13.2.1-2. Lemme : *Soit $\varphi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ un morphisme de faisceaux et notons $\underline{\operatorname{coker}}(\varphi)$ le faisceau associé au préfaisceau conoyau $\underline{\operatorname{coker}}(\varphi)$, et soit $\nu : \underline{\operatorname{coker}}(\varphi) \to \underline{\operatorname{coker}}(\varphi)$ le morphisme canonique. La composition des morphismes de préfaisceaux :*

$$\mathcal{P}_2 \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varphi)} \underline{\operatorname{coker}}(\varphi) \xrightarrow{\nu} \underline{\operatorname{coker}}(\varphi)\,,$$

est un conoyau pour φ dans la catégorie des faisceaux.

[44] Rappelons qu'un morphisme de préfaisceaux est dit un «isomorphisme local» lorsque les morphismes qu'il induit sur les germes en un point sont des isomorphismes, et ceci quel que soit le point en considération. La notation $\varphi : \mathcal{P}_1 \xrightarrow{(\equiv)} \mathcal{P}_2$ indique que le morphisme de préfaisceaux φ est un isomorphisme local.

Démonstration : Soit $\psi : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux tel que $\psi \circ \varphi = 0$. On a la factorisation unique de ψ dans la catégorie de préfaisceaux :

$$\mathcal{P}_2 \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varphi)} \underline{\operatorname{coker}}(\varphi) \xrightarrow{\bar{\psi}} \mathcal{G}\,,$$

dont on déduit d'après la propriété universelle du faisceau associé, la factorisation unique de $\bar{\psi}$:

$$\mathcal{P}_2 \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varphi)} \underline{\operatorname{coker}}(\varphi) \xrightarrow{\nu} \underline{\underline{\operatorname{coker}}}(\varphi) \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{G}\,.$$

Soit maintenant :

$$\mathcal{P}_2 \xrightarrow{\nu\circ\bar{\kappa}(\varphi)} \underline{\operatorname{coker}}(\varphi) \xrightarrow{\lambda} \mathcal{G}\,.$$

une autre factorisation de ψ. On a donc $\psi = \lambda \circ \nu \circ \bar{\kappa}(\varphi) = \tilde{\psi} \circ \nu \circ \bar{\kappa}(\varphi)$, et la propriété universelle de $\bar{\kappa}(\varphi)$ dans la catégorie abélienne $\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ permet de conclure à l'égalité $\lambda \circ \nu = \tilde{\psi} \circ \nu : \underline{\operatorname{coker}}(\varphi) \to \mathcal{G}$, où la propriété universelle du faisceau associé à un préfaisceau exige que $\lambda = \tilde{\psi}$. Le morphisme de faisceaux $\nu \circ \bar{\kappa}(\varphi) : \mathcal{P}_2 \to \underline{\operatorname{coker}}(\varphi)$ est donc bien un conoyau dans la catégorie $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$. ∎

13.2.1-3. Notation : Le morphisme "conoyau dans la catégorie de faisceaux" $\nu \circ \bar{\kappa}(\varphi) : \mathcal{P}_2 \to \underline{\operatorname{coker}}(\varphi)$ du lemme précédent, sera noté $\tilde{\kappa}(\varphi)$.

13.2.1-4. Proposition : *La catégorie* $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ *est abélienne.*

a) *Pour chaque* $x \in \boldsymbol{X}$, *le foncteur "germes en* x", $(_)_{(x)} : \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$, *est* ***additif et exact****.*

b) *Le foncteur "produit de foncteurs germes",* $\prod_{x\in\boldsymbol{X}} (_)_{(x)} : \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$, *est* ***additif, exact et fidèle****.*

c) *Un complexe de faisceaux* $(\mathcal{F}^*, d_*)$ *est acyclique, si et seulement si, le complexe de* $\boldsymbol{A}$*-modules* $\big(\mathcal{F}^*{}_{(x)}, d_{*(x)}\big)$, *est acyclique, quel que soit* $x \in \boldsymbol{X}$.

d) *Le foncteur "faisceau associé"* $\widetilde{(_)} : \mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ *est* ***additif et exact****.*

Démonstration : Nous avons déjà montré l'existence de noyaux et conoyaux dans $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$, il ne nous reste donc qu'à montrer que le morphisme canonique de l'image d'un morphisme dans sa coimage est un isomorphisme.

Soit $\varphi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ un morphisme de faisceaux. Nous avons dans la catégorie des préfaisceaux :

$$\mathbf{0} \to \underline{\ker}(\varphi) \xrightarrow{\kappa(\varphi)} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{p(\varphi)} \underline{\mathrm{im}}(\varphi) \equiv \underline{\mathrm{coim}}(\varphi) \xrightarrow{q(\varphi)} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varphi)} \underline{\operatorname{coker}}(\varphi) \to \mathbf{0} \qquad (*)$$

où $p(\varphi)$ est un conoyau pour $\kappa(\varphi)$ et $q(\varphi)$ est un noyau pour $\bar{\kappa}(\varphi)$. Appliquons le foncteur "faisceau associé" à la suite $(*)$, on obtient alors le diagramme commutatif de morphismes verticaux : les isomorphismes locaux canoniques :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathbf{0} & \to & \underline{\ker}(\varphi) & \xrightarrow{\kappa(\varphi)} & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{p(\varphi)} & \underline{\mathrm{im}}(\varphi) \equiv \underline{\mathrm{coim}}(\varphi) & \xrightarrow{q(\varphi)} & \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varphi)} & \underline{\operatorname{coker}}(\varphi) & \to & \mathbf{0} \\
 & & \equiv\downarrow & & \equiv\downarrow & & (\equiv)\downarrow \quad (\equiv)\downarrow & & \equiv\downarrow & & (\equiv)\downarrow & & \\
\mathbf{0} & \to & \underline{\ker}(\varphi) & \xrightarrow{\kappa(\varphi)} & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{\tilde{p}(\varphi)} & \underline{\mathrm{im}}(\varphi) \equiv \underline{\mathrm{coim}}(\varphi) & \xrightarrow{\tilde{q}(\varphi)} & \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{\tilde{\kappa}(\varphi)} & \underline{\operatorname{coker}}(\varphi) & \to & \mathbf{0}
\end{array}$$

où nous avons seulement à vérifier que $\tilde{q}(\varphi)$ est bien un noyau pour $\tilde{\kappa}(\varphi)$. Or, les morphismes verticaux étant des isomorphismes locaux le morphisme $\tilde{q}(\varphi)$ est *localement* injectif. Ceci signifie que si l'image par $\tilde{q}(\varphi)$ d'une section de $\underline{\mathrm{coim}}(\varphi)$ est nulle, ses germes sont nuls et s'agissant d'une section d'un faisceau, la section est nulle. Le morphisme $\tilde{q}(\varphi)$ est donc bien injectif et $\tilde{\kappa}(\varphi) \circ \tilde{q}(\varphi) = 0$. Montrons pour terminer que le faisceau noyau de $\tilde{\kappa}(\varphi)$ est bien l'image de $\tilde{q}(\varphi)$. Le fait que les morphismes verticaux soient des isomorphismes locaux assure que pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$ le morphisme $\tilde{q}(\varphi)_{(x)}$ est un noyau pour $\tilde{\kappa}(\varphi)_{(x)}$ de sorte que si $\sigma \in \Gamma(U; \mathcal{F}_2)$ est annulée par $\tilde{\kappa}(\varphi)$, les germes $\sigma_{(x)}$ proviennent tous de germes de sections de $\underline{\mathrm{coim}}(\varphi)$. Il existe donc un recouvrement

$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ et des sections $\tau_\alpha \in \Gamma(U_\alpha; \underline{\text{coim}}(\varphi))$ dont les images par $\tilde{q}(\varphi)$ sont les restrictions de σ aux ouverts U_α. L'injectivité de $\tilde{q}(\varphi)$ montre alors que la famille $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ vérifie les conditions de recollement et comme $\underline{\text{coim}}(\varphi)$ est un faisceau, il existe bien une section $\tau \in \Gamma(U; \underline{\text{coim}}(\varphi))$ recollant les τ_α ; son image par $\tilde{q}(\varphi)$ est alors nécessairement la section σ. La catégorie $\text{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ est donc bien **abélienne**.

a) L'additivité des foncteurs "germes" sur la catégorie des faisceaux est conséquence de la même propriété sur la catégorie des préfaisceaux. Soit maintenant une suite exacte courte de la catégorie de faisceaux :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}_3 \to \mathbf{0}\,;$$

le morphisme φ est un noyau pour ψ, et ψ un conoyau pour φ, dans la catégorie des *faisceaux*. Cette suite, vue dans la catégorie des préfaisceaux, se factorise en :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varphi)} \underline{\text{coker}}(\varphi) \xrightarrow[(\equiv)]{\nu} \underline{\underline{\text{coker}}}(\varphi) \equiv \mathcal{F}_3 \to \mathbf{0}\,.$$

et comme, pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$, le foncteur "germe en x" est exact sur la catégorie de préfaisceaux et que ν est un isomorphisme local, la suite de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{F}_{1(x)} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_{2(x)} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}_{3(x)} \to \mathbf{0}\,,$$

est nécessairement exacte.

b) L'exactitude du foncteur "produit de germes" découle évidemment de l'exactitude de chaque foncteur $(_)_{(x)}$. La fidélité résulte immédiatement après la remarque de l'exercice 13.1.1-2 puisque un *faisceau* est nul, si et seulement si, tous ses germes sont nuls.

c) Une suite de faisceaux :

$$\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}_3\,, \tag{$*$}$$

est exacte, si et seulement si, le morphisme canonique $\underline{\text{im}}(\varphi) \to \underline{\ker}(\psi)$ est un isomorphisme de faisceaux.

Compte tenu des résultats déjà prouvés, nous avons uniquement à montrer que si, pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$, le morphisme canonique $\underline{\text{im}}(\varphi)_{(x)} \to \underline{\ker}(\psi)_{(x)}$ est un isomorphisme, alors le morphisme de faisceaux $\underline{\text{im}}(\varphi) \to \underline{\ker}(\psi)$ est un isomorphisme.

Soit plus généralement $\xi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ un morphisme de faisceaux tel que pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, le morphisme $\xi_{(x)}$ est un isomorphisme. Montrons que ξ est un isomorphisme de faisceaux. Fixons une partie ouverte U de $\boldsymbol{X}$. Soit $\sigma \in \Gamma(U; \mathcal{G}_1)$ une section telle que $0 = \xi(\sigma) \in \Gamma(U; \mathcal{G}_2)$. Alors, quel que soit $u \in U$, on aura $0 = \xi(\sigma)_{(u)} = \xi_{(u)}(\sigma_{(u)})$ et donc $\sigma_{(u)} = 0$, pour tout $u \in U$; comme $\mathcal{G}_1$ est un *faisceau* la nullité de σ en découle. Le morphisme $\xi(U)$ est donc *injectif*. Soit maintenant $\tau \in \Gamma(U; \mathcal{G}_2)$, la surjectivité des morphismes $\xi_{(u)}$, pour tout $u \in U$, permet de fixer un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ et des sections $\sigma_\alpha \in \Gamma(U_\alpha; \mathcal{G}_1)$ telles que $\xi(U_\alpha)(\sigma_\alpha) = \tau|_{U_\alpha}$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$. L'injectivité des morphismes $\xi(V)$ (vraie quel que soit $V \subseteq \boldsymbol{X}$) montre que la famille $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ vérifie la condition de recollement et comme $\mathcal{G}_1$ est un faisceau, il existe une section $\sigma \in \Gamma(U; \mathcal{G}_1)$ recollant les σ_α. Les sections $\xi(U)(\sigma)$ et τ de $\mathcal{G}_2$ au-dessus de U ont les mêmes germes ; le fait que $\mathcal{G}_2$ est un faisceau garantit alors que $\xi(U)(\sigma) = \tau$, et la surjectivité de $\xi(U)$ est prouvée.

d) Soit une suite exacte de préfaisceau :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{P}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{P}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{P}_3 \to \mathbf{0}\,,$$

et appliquons-lui le foncteur "faisceau associé", on obtient le diagramme commutatif de morphismes verticaux des isomorphismes locaux :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} & \to & \mathcal{P}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{P}_2 & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{P}_3 \to \mathbf{0} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle (\equiv)} & & \downarrow{\scriptstyle (\equiv)} & & \downarrow{\scriptstyle (\equiv)} \\
\mathbf{0} & \to & \widetilde{\mathcal{P}}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \widetilde{\mathcal{P}}_2 & \xrightarrow{\psi} & \widetilde{\mathcal{P}}_3 \to \mathbf{0}
\end{array}$$

L'exactitude des morphismes germes sur la catégorie des préfaisceaux montre que, pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$, la suite :

$$\mathbf{0} \to \widetilde{\mathcal{P}}_{1(x)} \xrightarrow{\varphi} \widetilde{\mathcal{P}}_{2(x)} \xrightarrow{\psi} \widetilde{\mathcal{P}}_{3(x)} \to \mathbf{0}\,,$$

est exacte ; la question (c) affirme alors que la suite de faisceaux :

$$\mathbf{0} \to \widetilde{\mathcal{P}}_1 \xrightarrow{\varphi} \widetilde{\mathcal{P}}_2 \xrightarrow{\psi} \widetilde{\mathcal{P}}_3 \to \mathbf{0}\,,$$

est exacte dans la catégorie des faisceaux. ∎

13.2.1-5. Corollaire : *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable n-dimensionnelle et notons, pour $0 \leqslant r \leqslant n$, $\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}}$ le faisceau des r-formes différentielles définies sur les ouverts de $\boldsymbol{M}$. Le complexe de faisceaux :*

$$\mathbf{0} \to \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{M}} \xrightarrow{d_0} \underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{M}} \xrightarrow{d_1} \cdots\cdots \xrightarrow{d_{n-2}} \underline{\Omega}^{n-1}_{\boldsymbol{M}} \xrightarrow{d_{n-1}} \underline{\Omega}^n_{\boldsymbol{M}} \to \mathbf{0}$$

où $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$ désigne le faisceau des fonctions localement constantes et ε est l'injection canonique qui associe à une fonction localement constante la fonction $\mathcal{C}^\infty$ qu'elle définit, est ***exact*** *dans la catégorie des faisceaux de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels sur $\boldsymbol{M}$.*

Démonstration : D'après la proposition précédente, il suffit de prouver l'exactitude du complexe des germes des faisceaux en question. Soit donc $x \in \boldsymbol{M}$ et ϖ un germe de r-forme différentielle en x tel que $d_{r(x)}(\varpi) = 0 \in \underline{\Omega}^{r+1}_{\boldsymbol{M}(x)}$. Il existe alors un représentant local ω de ϖ que l'on peut supposer défini sur un ouvert de carte V contenant x, vérifiant $d_r(\omega) = 0$. Le lemme de Poincaré sur $\mathbb{R}^n$ prouve précisément qu'il existe une forme différentielle $\nu \in \Gamma(V, \underline{\Omega}^{r-1}_{\boldsymbol{M}})$ telle que $d_{r-1}(\nu) = \omega$ et donc, telle que $d_{r-1(x)}(\nu_{(x)}) = \varpi$. Par un raisonnement parfaitement analogue, on démontre l'exactitude autour de $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{M}(x)}$. Comme ε est trivialement injective, la démonstration du corollaire est terminée. ∎

13.2.1-6. Exercice : Soit $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ une famille arbitraire de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$. Rappelons que la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ possède des sommes et des produits directs pour des familles de modules arbitrairement indexées. Faisons correspondre à chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ les $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha\Big)(U) := \Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha(U)\Big) \quad \text{et} \quad \Big(\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha\Big)(U) := \Big(\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha(U)\Big)$$

et définissons pour $V \subseteq U$, les morphismes de restriction $\rho^U_V : \big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha\big)(U) \to \big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha\big)(V)$ et $\rho^U_V : \big(\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha\big)(U) \to \big(\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha\big)(V)$ respectivement comme la somme et le produit directs des morphismes de restriction $(\rho_\alpha)^U_V : \mathcal{F}_\alpha(U) \to \mathcal{F}_\alpha(V)$. Ces données définissent trivialement des préfaisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$ notés respectivement $\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha$ et $\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha$. ([45])

a) Montrer que le préfaisceaux $\big(\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha\big)$ est toujours un **faisceau**.

b) Notons $\big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha\big)^\sim$ le faisceau associé au préfaisceau $\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha$. Montrer que le morphisme canonique de préfaisceaux :
$$\nu : \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha \longrightarrow \Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha\Big)^\sim \qquad (*)$$
est toujours **injectif**.

c) Fixons un élément $x \in \boldsymbol{X}$. Pour tout voisinage ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ de x, on dispose du morphisme canonique de $\boldsymbol{A}$-modules :
$$\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha(U) \xrightarrow{\Sigma(U;x)} \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} (\mathcal{F}_\alpha)_{(x)}$$
donné par la somme directe d'applications "germes en x". Montrer que ces morphismes sont compatibles aux applications de restriction entre des voisinages de x. En déduire une application canonique :
$$\Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha\Big)_{(x)} \xrightarrow{\Sigma(x;x)} \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} (\mathcal{F}_\alpha)_{(x)}\,.$$
Montrer que l'application $\Sigma(x,x)$ est toujours un **isomorphisme**.

d) Soit $\boldsymbol{X} = \mathbb{N}$ muni de la topologie discrète.

1) Montrer que le foncteur qui associe à un faisceau $\mathcal{F}$ de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\mathbb{N}$ le $\boldsymbol{A}$-module $\prod_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{(m)}$, est additif et défini une équivalence de catégories entre la catégorie $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\mathbb{N})$ et la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})^{\mathbb{N}}$ des $\boldsymbol{A}$-modules de la forme $\mathfrak{M} = \prod_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{M}_m$, où chaque $\boldsymbol{M}_m$ est un $\boldsymbol{A}$-module et où les morphismes entre deux objets $\mathfrak{M} = \prod_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{M}_m$ et $\mathfrak{N} = \prod_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{N}_m$ sont les produits des morphismes de $\boldsymbol{A}$-modules $\varphi_m : \boldsymbol{M}_m \to \boldsymbol{N}_m$.

[45] Lorsque $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ est une famille de préfaisceaux sur $\boldsymbol{X}$, les préfaisceaux $\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha$ et $\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha$ sont de manière naturelle une somme et un produit directs pour la famille $\{\mathcal{F}_\alpha\}$, dans la catégorie $\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$.

2) Soit $\mathcal{M} = \big\{\mathfrak{M}_\alpha = \prod_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{M}_{\alpha;m}\big\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ une famille d'objets de $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})^{\mathbb{N}}$. Montrer que les objets :

$$\prod_{m\in\mathbb{N}} \Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \boldsymbol{M}_{\alpha;m}\Big) \quad \text{et} \quad \prod_{m\in\mathbb{N}} \Big(\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \boldsymbol{M}_{\alpha;m}\Big)$$

sont respectivement une somme et un produit directs dans $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})^{\mathbb{N}}$ pour la famille $\mathcal{M}$. La catégorie $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\mathbb{N})$ possède donc des sommes et des produits directs pour des familles de faisceaux arbitrairement indexées.

3) Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, notons $\underline{\boldsymbol{A}}(m)$ le faisceau sur $\mathbb{N}$ dont les germes en $n \neq m$ sont nuls et dont l'ensemble des germes en m est l'anneau $\boldsymbol{A}$ lui-même. Montrer, à l'aide de la question précédente que, dans $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\mathbb{N})$, la somme et le produit directs des faisceaux $\underline{\boldsymbol{A}}(m)$ coïncident avec le "faisceau constant" $\underline{\boldsymbol{A}}_{\mathbb{N}}$. En conclure que le morphisme canonique $(*)$ n'est pas surjectif en général.

Plus généralement, soit $\mathcal{M}$ la famille de faisceaux sur $\mathbb{N}$ correspondante à la famille d'objets de $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})^{\mathbb{N}}$ définie par : $\mathcal{M} = \{\prod_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{M}_{\alpha,m}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$. Remarquer que le morphisme $(*)$ correspond alors à l'inclusion canonique de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \Big(\prod_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{M}_{\alpha,m}\Big) \lhook\joinrel\longrightarrow \prod_{m\in\mathbb{N}} \Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \boldsymbol{M}_{\alpha,m}\Big)$$

qui est bijective en toute généralité, si et seulement si, $\mathfrak{A}$ est de cardinal fini.

e) Revenons aux donnés générales des premières questions. Pour chaque $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, posons

$$\iota_{\alpha_0} : \mathcal{F}_{\alpha_0} \longrightarrow \Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha\Big)^\sim \quad \text{et} \quad \pi_{\alpha_0} : \Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha\Big)^\sim \longrightarrow \mathcal{F}_{\alpha_0}$$

et

$$\iota_{\alpha_0} : \mathcal{F}_{\alpha_0} \longrightarrow \prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha \quad \text{et} \quad \pi_{\alpha_0} : \prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha \longrightarrow \mathcal{F}_{\alpha_0}$$

les morphismes de faisceaux définis au niveaux des sections au-dessus des ouverts des préfaisceaux somme et produit directs, respectivement comme les inclusions et projections associées à la somme et le produit directs de $\boldsymbol{A}$-modules.

Montrer alors que la catégorie $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ possède des sommes et produits directs pour des familles de faisceaux arbitrairement indexées.

f) Déduire de la question précédente que la catégorie $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ possède des limites pour des systèmes inductifs et projectifs arbitraires.

Indication : Utiliser le fait que dans une catégorie abélienne possédant des sommes et des produits directs pour des familles d'objets arbitrairement indexées, les limites des systèmes inductifs (resp. projectifs) d'objets, sont obtenues comme ***conoyau*** *(resp.* ***noyau****) d'un morphisme entre deux sommes directes (resp. deux produits directs) (cf. exercice 8.4.1-8 en page 121 et sujets annexes).* ([46])

13.2.1-7. Exercice : Plaçons nous dans la catégorie $\mathrm{Fais}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{X})$ des faisceaux de groupes abéliens sur $\boldsymbol{X}$. On appelle «faisceaux d'anneaux sur $\boldsymbol{X}$» la donnée d'un faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ de $\mathrm{Fais}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{X})$, tel que pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, le groupe commutatif $\big(\Gamma(U;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}), 0, +\big)$ est le groupe additif sous-jacent à une structure d'anneau avec identité multiplicative ([47]), et tel que les morphismes de restriction $\rho^U_V : \Gamma(U;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \to \Gamma(V;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ sont des homomorphismes d'anneaux (avec identité multiplicative), quels que soient $V \subseteq U \subseteq \boldsymbol{X}$. On définit alors un «$\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module» comme la donnée d'un faisceau $\mathcal{M}$ de

[46] Vous pouvez également consulter les exercices 15 et 16 du chapitre I (page 55) de "Algebra" de S. Lang ; Addison-Wesley, sixième édition (1974).

[47] On remarquera que le groupe réduit à un élément : $(\{0\}, 0, +)$ est bien un anneau avec identité.

$\mathrm{Fais}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{X})$ et, pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, d'une structure de $\Gamma(U;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$-module sur $\Gamma(U;\mathcal{M})$ "compatible" aux morphismes de restriction, *i.e.* tels que pour tous $V \subseteq U$, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\times\Gamma(U;\mathcal{M}) & \xrightarrow{\mu(U)} & \Gamma(U;\mathcal{M}) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})^U_V} \times \downarrow{\scriptstyle \rho(\mathcal{M})^U_V} & & \downarrow{\scriptstyle \rho(\mathcal{M})^U_V} \\ \Gamma(V;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\times\Gamma(V;\mathcal{M}) & \xrightarrow{\mu(V)} & \Gamma(V;\mathcal{M}) \end{array}$$

où $\mu(_)$ désigne le morphisme de multiplication des structures de modules, est *commutatif*.

Étant donnés deux $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, on dit qu'un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ est un «morphisme de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules», si le morphisme $\Gamma(U;\varphi) : \Gamma(U;\mathcal{M}_1) \to \Gamma(U;\mathcal{M}_2)$ est un morphisme de $\Gamma(U;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$-modules, quel que soit l'ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$.

On note $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ la catégorie dont les objets sont des $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules et où les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules. Le foncteur "oubli" de la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ vers la catégorie $\mathrm{Fais}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{X})$ qui fait correspondre à un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module le faisceau de $\mathbb{Z}$-modules sous-jacent est *fidèle*.

a) Soit $\varphi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ un morphisme de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules. Notons $(\underline{\ker}(\varphi), \kappa)$ et $(\underline{\mathrm{coker}}(\varphi), \tilde{\kappa})$ respectivement le noyau et conoyau de φ *dans la catégorie abélienne* $\mathrm{Fais}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{X})$. Montrer que $\underline{\ker}(\varphi)$ et $\underline{\mathrm{coker}}(\varphi)$ sont naturellement des $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules ; puis que κ et $\tilde{\kappa}$ sont des morphismes de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules.

b) Déduire de la question précédente que $(\underline{\ker}(\varphi), \kappa)$ et $(\underline{\mathrm{coker}}(\varphi), \tilde{\kappa})$ sont respectivement un noyau et un conoyau pour φ ***dans la catégorie*** $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$.

c) Montrer que $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est une catégorie abélienne. Elle possède des sommes et des produits directs pour des familles de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules arbitrairement indexées. De même, les limites pour des systèmes inductifs et projectifs arbitraires existent.

d) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ et notons $\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$ le faisceau associé au préfaisceau constant $U \rightsquigarrow \boldsymbol{A}$. Rappelons que les sections de $\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$ s'identifient aux applications *localement constantes* définies sur les ouverts de $\boldsymbol{X}$ et à valeurs dans $\boldsymbol{A}$ (*cf.* exercice 13.2.1-1).

Pour toute partie ouverte $U \subseteq \boldsymbol{X}$, soient $\lambda \in \Gamma(U;\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}})$ et $\sigma \in \Gamma(U;\mathcal{F})$. Nous allons définir la section $\lambda \cdot \sigma$.

1) Pour chaque recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de U tel que les restrictions $\lambda|_{V_\alpha}$ sont constantes, de valeurs respectivement notées $a_\alpha \in \boldsymbol{A}$, montrer que la famille $\{a_\alpha \cdot \sigma|_{V_\alpha}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ est une famille de sections de $\mathcal{F}$ vérifiant la condition de recollement des sections. Il existe donc une, et une seule, section $\tau(\mathcal{U}) \in \Gamma(U;\mathcal{F})$ telle que $\tau(\mathcal{U})|_{V_\alpha} = a_\alpha \cdot \sigma|_{V_\alpha}$.

2) Montrer que les sections $\tau(\mathcal{U}) \in \Gamma(U;\mathcal{F})$, obtenues par ce procédé, définissent une même section de $\mathcal{F}$ au-dessus de U indépendamment du recouvrement $\mathcal{U}$ vérifiant les conditions de la question précédente ; elle sera notée $\lambda \cdot \sigma$.

3) Montrer que les opérations $\cdot : \Gamma(U;\underline{\boldsymbol{A}}) \oplus \Gamma(U;\mathcal{F}) \to \Gamma(U;\mathcal{F})$ définissent une structure de $\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$-module sur $\mathcal{F}$.

4) Montrer que cette manière de faire correspondre à chaque $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}))$ un $\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$-module, définit une équivalence de catégories entre $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ et la catégorie $\mathrm{Mod}(\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}})$.

13.2.2 Foncteurs "sections" dans la catégorie des faisceaux. Une des différences fondamentales entre les catégories abéliennes $\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ et $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ vient de ce que, compte tenu de la différence avec la notion de conoyau, les foncteurs des sections au-dessus des ouverts, exacts sur la catégorie $\mathrm{Préf}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$, ne sont plus qu'exacts à gauche en catégorie des faisceaux.

En effet, soit

$$\mathbf{0} \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}_3 \to \mathbf{0}$$

une suite exacte de faisceaux. Le morphisme φ est un noyau *dans la catégorie des préfaisceaux* du morphisme ψ, par contre ψ *n'est pas nécessairement* un conoyau pour φ *dans la catégorie des préfaisceaux*. On a la suite de préfaisceaux :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varphi)} \underline{\mathrm{coker}}(\varphi) \xrightarrow[(\equiv)]{\nu} \underline{\mathrm{coker}}(\varphi) \equiv \mathcal{F}_3 \to \mathbf{0}$$

et pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, on a :

$$\mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\Gamma(U;\varphi)} \Gamma(U;\mathcal{F}_2) \xrightarrow{\Gamma(U;\bar{\kappa}(\varphi))} \Gamma(U;\underline{\operatorname{coker}}(\varphi)) \xrightarrow{\Gamma(U;\nu)} \Gamma(U;\underline{\operatorname{coker}}(\varphi)) \equiv \Gamma(U;\mathcal{F}_3) \to \mathbf{0} \tag{‡}$$

où le morphisme $\Gamma(U;\nu)$ est *injectif*. En effet, soit $\sigma \in \Gamma(U;\underline{\operatorname{coker}}(\varphi))$ une section dont l'image par $\Gamma(U;\nu)$ est nulle, notons $\tau \in \Gamma(U;\mathcal{F}_2)$ un relèvement de σ (possible puisque $\Gamma(U;\bar{\kappa}(\varphi))$ est surjective). Comme ν est un isomorphisme local tous les germes de σ sont nuls ; ceci signifie que τ peut être relevée localement en des sections de $\mathcal{F}_1$ et comme φ est injectif et que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des faisceaux, la section τ est effectivement dans l'image de $\Gamma(U;\varphi)$ et $\sigma = 0$.

L'injectivité de $\Gamma(U;\nu)$ suffit alors a prouver, à partir de l'exactitude du foncteur $\Gamma(U;_)$ dans la catégorie de préfaisceaux et par la suite (‡), l'exactitude à gauche du foncteur $\Gamma(U;_) : \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$. Énonçons ce résultat sous la forme de lemme.

13.2.2-1. Lemme : *Pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, le foncteur additif "sections au-dessus de U"*

$$\Gamma(U;_) : \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}),$$

est ***exact à gauche****.*

13.2.2-2. Remarque : Reprenons l'exemple de la remarque 13.2-3 pour montrer que le foncteur "sections" n'est pas nécessairement exact dans la catégorie des faisceaux. Nous y considérions la variété différentiable $\boldsymbol{X} = \mathbb{S}^1$ et avions montré que dans la suite exacte de préfaisceaux :

$$\mathbf{0} \to \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}} \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varepsilon)} \underline{\operatorname{coker}}(\varepsilon) =: \mathcal{Q} \to \mathbf{0},$$

le préfaisceau $\mathcal{Q}$ *n'est pas un faisceau*. Le corollaire 13.2.1-5 montre, d'autre part, que la suite de faisceaux :

$$\mathbf{0} \to \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}} \xrightarrow{d_0} \underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}} \to \mathbf{0},$$

est *exacte*. Il en découle un morphisme canonique $\nu : \underline{\operatorname{coker}}(\varepsilon) \to \underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{M}}$ factorisant d_0 en $d_0 = \nu \circ \bar{\kappa}(\varepsilon)$. Ce morphisme est clairement un isomorphisme local et $\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}}$ s'identifie par conséquent au faisceau associé à $\underline{\operatorname{coker}}(\varepsilon)$, et le morphisme ν est nécessairement injectif mais pas forcément surjectif. Dans le cas présent, la non surjectivité est donnée par la 1-forme différentielle globale sur le cercle unité notée habituellement $d\theta$ dont on sait qu'elle n'est pas exacte malgré une notation des plus trompeuses.

13.3 Cohomologie des faisceaux

La dernière section 13.2.2 montre que pour toute suite exacte courte de la catégorie $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$:

$$\mathbf{0} \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}_3 \to \mathbf{0},$$

et pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, la suite de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\Gamma(U;\varphi)} \Gamma(U;\mathcal{F}_2) \xrightarrow{\Gamma(U;\psi)} \Gamma(U;\mathcal{F}_3),$$

est, en général, uniquement exacte à gauche.

Une problématique fondamentale dans le contexte des catégories abéliennes et des foncteurs exacts à gauche est l'analyse fine du défaut d'exactitude ; c'est le but de la « théorie des foncteurs dérivées (à droite) » d'y apporter une réponse aussi générale que possible. Dans le cas qui nous

intéressera dans ce cours, *i.e.* catégorie des faisceaux et foncteurs "sections au-dessus d'un ouvert" la théorie des foncteurs dérivées peut être remarquablement simplifiée par le point de vue de Godement et sa construction fonctorielle (et exacte) de ce que l'on appelle «les résolutions flasques canoniques de Godement» que nous allons introduire dans les sections suivantes. Signalons, pour terminer, que les foncteurs dérivés (à droite) des foncteurs de "sections au-dessus des ouverts" constituent très précisément ce que l'on appelle également les «foncteurs de cohomologie de faisceaux».

13.3.1 L'idée de base des foncteurs dérivés (à droite). Plaçons-nous dans le contexte général où l'on se donne un foncteur additif et ***exact à gauche*** entre deux catégories abéliennes $\mathcal{F} : \mathcal{C}_1 \rightsquigarrow \mathcal{C}_2$.

Soit une suite exacte de $\mathcal{C}_1$:

$$\mathbf{0} \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}_3 \to \mathbf{0}\,, \tag{$*$}$$

et ***supposons qu'il existe une suite exacte de complexes acycliques*** de $\mathcal{C}_1$ dont la première ligne est précisément la suite $(*)$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{F}_1)} & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{F}_2)} & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{F}_3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{I}_1^1 & \longrightarrow & \mathcal{I}_2^1 & \longrightarrow & \mathcal{I}_3^1 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{F}_1)} & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{F}_2)} & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{F}_3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{I}_1^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_2^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_3^0 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{F}_1)} & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{F}_2)} & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{F}_3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{F}_3 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & &
\end{array}$$

Et supposons, en plus, que les suites de $\mathcal{C}_2$:

$$\mathbf{0} \to \mathcal{F}(\mathcal{I}_1^r) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{I}_2^r) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{I}_3^r) \to \mathbf{0}$$

sont exactes, quel que soit $r \in \mathbb{N}$.

Si nous appliquons maintenant le foncteur $\mathcal{F}$ au bicomplexe $\mathcal{I}_*^\bullet$, on obtient la suite exacte de complexes de $\mathcal{C}_2$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{I}_1^2) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{I}_2^2) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{I}_3^2) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{I}_1^1) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{I}_2^1) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{I}_3^1) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{I}_1^0) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{I}_2^0) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{I}_3^0) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & &
\end{array}$$

d'où la suite exacte longue de cohomologie :

$$\cdots \longrightarrow h^r(\mathcal{F}(\mathcal{I}_1^\bullet)) \longrightarrow h^r(\mathcal{F}(\mathcal{I}_2^\bullet)) \longrightarrow h^r(\mathcal{F}(\mathcal{I}_3^\bullet)) \longrightarrow \cdots$$

et comme le foncteur $\mathfrak{F}$ est supposé exact à gauche, on a $h^0(\mathfrak{F}(\mathcal{I}_j^\bullet)) \equiv \mathfrak{F}(\mathcal{F}_j)$, pour $j = 1, 2, 3$, ce qui donne la suite exacte longue de $\mathfrak{C}_2$:

$$\boxed{\mathbf{0} \to \mathfrak{F}(\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\varphi)} \mathfrak{F}(\mathcal{F}_2) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\psi)} \mathfrak{F}(\mathcal{F}_3) \longrightarrow h^1(\mathfrak{F}(\mathcal{I}_1^\bullet)) \longrightarrow h^1(\mathfrak{F}(\mathcal{I}_2^\bullet)) \longrightarrow h^1(\mathfrak{F}(\mathcal{I}_3^\bullet)) \longrightarrow \cdots}$$

où l'on voit la suite exacte *à gauche* $\mathbf{0} \to \mathfrak{F}(\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\varphi)} \mathfrak{F}(\mathcal{F}_2) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\psi)} \mathfrak{F}(\mathcal{F}_3)$, prendre place dans une suite exacte longue "de cohomologie".

La théorie des foncteurs dérivés (à droite) donne des conditions suffisantes très générales (*i.e.* indépendantes du foncteur additif exact à gauche $\mathfrak{F}$ considéré), pour garantir, à la fois, l'existence des bicomplexes $\mathcal{I}_*^\bullet$, l'exactitude des suites "lignes" : $\mathbf{0} \to \mathfrak{F}(\mathcal{I}_1^r) \to \mathfrak{F}(\mathcal{I}_2^r) \to \mathfrak{F}(\mathcal{I}_3^r) \to \mathbf{0}$, et le caractère "intrinsèque" des objets de cohomologie $h^r(\mathfrak{F}(\mathcal{I}_j^\bullet))$. Cela se fait à l'aide de la notion d'objets «injectif d'une catégorie abélienne» moyennant un certain nombre de résultats techniques.

En théorie de faisceaux de modules, et lorsque l'on s'intéresse aux foncteurs de sections au-dessus d'ouverts, une construction *canonique* des bicomplexes $\mathcal{I}_*^\bullet$, satisfaisant aux conditions requises et due à Godement, se substitue très avantageusement à la théorie générale. Cette construction est connue sous le nom de «résolution flasque canonique de Godement» ; nous abordons dans les sections suivantes sa description.

13.3.2 Faisceaux flasques.

13.3.2-1. Définition : Un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules $\mathcal{F}$ est dit «flasque» lorsque les morphismes de restriction $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ sont *surjectifs*, quels que soient les ouverts $V \subseteq U$; ou, ce qui revient au même, lorsque les morphismes de restriction $\rho_V^{\boldsymbol{X}} : \mathcal{F}(\boldsymbol{X}) \to \mathcal{F}(V)$ sont *surjectifs*, quel que soit $V \subseteq \boldsymbol{X}$.

Existence des faisceaux flasques et foncteur $\mathcal{C}^0$ de Godement
Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules et posons, pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$,

$$\mathcal{C}^0(\mathcal{G})(U) := \prod_{u \in U} \mathcal{G}_{(u)}\,,$$

et, pour deux ouverts $U \supseteq V$, soit $\rho_V^U : \mathcal{C}^0(\mathcal{G})(U) \to \mathcal{C}^0(\mathcal{G})(V)$ l'homomorphisme de $\boldsymbol{A}$-modules qui associe à la famille $\{\sigma_u \in \mathcal{G}_{(u)}\}_{u \in U}$ la sous-famille $\{\sigma_v \in \mathcal{G}_{(u)}\}_{v \in V}$. Ces données font de $\mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ un *faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules* (le vérifier) et comme les morphismes de restriction sont trivialement surjectifs $\mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ est bien un faisceau ***flasque***. Plus important encore, on a un morphisme ***canonique*** de faisceaux :

$$\boxed{\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}^0(\mathcal{G})}$$

défini sur un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ par :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathcal{G})(U) : \mathcal{G}(U) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{G})(U) \\ \sigma &\longmapsto \prod_{u \in U} \sigma_{(u)} \end{aligned}$$

où la fidélité du produit de germes montre que $\varepsilon(\mathcal{G})$ est un morphisme ***injectif*** dans la catégorie $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$.

Soit maintenant $\varphi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ un morphisme de faisceaux. Pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{G}_1(U) & \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G}_1)(U)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_1)(U) = \prod_{u\in U} \mathcal{G}_{1(u)} \ni \prod_{u\in U} \sigma_{(u)} \\
{\scriptstyle \varphi(U)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{C}^0(\varphi)(U)} \qquad \downarrow{\scriptstyle \prod_{u\in U}\ \varphi_{(u)}} \\
\mathcal{G}_2(U) & \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G}_2)(U)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_2)(U) = \prod_{u\in U} \mathcal{G}_{2(u)} \ni \prod_{u\in U} \varphi_{(u)}(\sigma_{(u)})
\end{array}$$

compatible aux morphismes de restriction d'ouverts. Le diagramme de morphismes de faisceaux :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{0} \to \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G}_1)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_1) \\
{\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{C}^0(\varphi)} \\
\mathbf{0} \to \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G}_2)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_2)
\end{array}$$

est donc **commutatif**.

13.3.2-2. Proposition : *La correspondance définie sur la catégorie* $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ *qui associe à un faisceau de* $\boldsymbol{A}$*-modules* $\mathcal{G}$*, le morphisme de faisceaux injectif :*

$$\boxed{\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}^0(\mathcal{G})}$$

est ***fonctorielle et exacte****.*

Démonstration : La fonctorialité de la correspondance résulte immédiatement des commentaires préliminaires à la proposition. Pour l'exactitude, il convient tout d'abord d'en préciser le sens. Soit

$$\mathbf{0} \to \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}_3 \to \mathbf{0}\,, \tag{‡}$$

une suite exacte de faisceaux. On a par fonctorialité le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbf{0} \to & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{G}_3 & \to \mathbf{0} \\
 & {\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}_1)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}_2)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}_3)}\downarrow & \\
\mathbf{0} \to & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(\varphi)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(\psi)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_3) & \to \mathbf{0}
\end{array}$$

et l'exactitude dont il est question dans l'énoncé de la proposition concerne l'exactitude de sa dernière ligne :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_1) \xrightarrow{\mathcal{C}^0(\varphi)} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_2) \xrightarrow{\mathcal{C}^0(\psi)} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_3) \to \mathbf{0}\,. \tag{$*$}$$

Celle-ci résulte de l'exactitude des suites des sections de $(*)$ au-dessus des ouverts $U \subseteq \boldsymbol{X}$:

$$\mathbf{0} \to \prod_{u\in U} \mathcal{G}_{1(u)} \xrightarrow{\prod_{u\in U}\ \varphi_{(u)}} \prod_{u\in U} \mathcal{G}_{2(u)} \xrightarrow{\prod_{u\in U}\ \psi_{(u)}} \prod_{u\in U} \mathcal{G}_{3(u)} \to \mathbf{0}\,,$$

que l'on établit aisément à partir de l'exactitude des suites des germes :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{G}_{1(x)} \xrightarrow{\varphi_{(x)}} \mathcal{G}_{2(x)} \xrightarrow{\psi_{(x)}} \mathcal{G}_{3(x)} \to \mathbf{0}\,,$$

quel que soit $x \in \boldsymbol{X}$, résultant de l'exactitude de (‡) (*cf.* proposition 13.2.1-4-(c)). ∎

13.3.2-3. Exercice : (Suite de l'exercice 13.2.1-7.) Soit $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ un faisceaux d'anneaux sur $\boldsymbol{X}$.

a) Montrer que $\mathcal{C}^0(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est naturellement un faisceau d'anneaux et que le morphisme canonique $\varepsilon(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est alors un morphisme de faisceaux d'anneaux ; *i.e.* tel que pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, le morphisme $\Gamma(U;\varepsilon(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}))$ est un homomorphisme d'anneaux avec identité multiplicative.

b) Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module. Montrer que $\mathcal{C}^0(\mathcal{M})$ est naturellement un $\mathcal{C}^0(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$-module, et donc un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module *via* le morphisme de faisceaux d'anneaux $\varepsilon(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$.

c) Le foncteur $\mathcal{C}^0$ de Godement est défini sur la catégorie abélienne $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ et y est *additif et exact*.

13.3.3 Trois résultats fondamentaux sur les faisceaux flasques.

13.3.3-1. Proposition : *Pour toute suite exacte de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules :*

$$\mathbf{0} \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}_2 \to \mathbf{0}\,,$$

où $\mathcal{F}$ est un faisceau ***flasque****, la suite de $\boldsymbol{A}$-modules :*

$$\mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(U;\varphi)} \Gamma(U;\mathcal{G}_1) \xrightarrow{\Gamma(U;\psi)} \Gamma(U;\mathcal{G}_2) \to \mathbf{0}\,,$$

est ***exacte****, quel que soit l'ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$.*

Démonstration : Nous savons déjà que la suite des sections au-dessus de U est exacte à gauche (*cf.* lemme 13.2.2-1) et nous devons uniquement vérifier la surjectivité du morphisme $\Gamma(U,\psi)$.

Soit $\sigma \in \Gamma(U;\mathcal{G}_2)$. L'exactitude de la suite de faisceaux implique que les morphismes "germes" $\psi_{(x)} : \mathcal{G}_{1(x)} \to \mathcal{G}_{2(x)}$ sont *surjectifs*, quel que soit $x \in \boldsymbol{X}$; il existe donc un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de U et des sections $\tau_\alpha \in \Gamma(U_\alpha;\mathcal{G}_1)$, vérifiant l'égalité :

$$\psi(U_\alpha)(\tau_\alpha) = \sigma|_{U_\alpha}\,,$$

pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$. Toute la difficulté de la question vient de ce que la famille $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ peut ne pas vérifier la condition de recollement de sections.

Supposons que le recouvrement $\mathcal{U}$ possède uniquement deux éléments : $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$. Si nous considérons la section "différence" $\rho^{U_1}_{U_{12}}(\tau_1) - \rho^{U_2}_{U_{12}}(\tau_2)$, son image par $\Gamma(U_{12};\psi)$ est évidemment nulle. Il existe alors une section $\mu_{12} \in \Gamma(U_{12};\mathcal{F})$ dont l'image par $\Gamma(U_{12};\varphi)$ est précisément cette différence. Maintenant, **comme $\mathcal{F}$ est flasque, la section μ_{12} se prolonge à une section $\mu_2 \in \Gamma(U_2,\mathcal{F})$** ; on a donc $\rho^{U_2}_{U_{12}}(\mu_2) = \mu_{12}$. Les sections $\tau_1 \in \Gamma(U_1,\mathcal{G}_1)$ et $\tau_2 + \Gamma(U_2;\varphi)(\mu_2) \in \Gamma(U_2;\mathcal{G}_1)$ donnent toujours les sections $\sigma|_{U_1}$ et $\sigma|_{U_2}$ par les morphismes $\Gamma(U_i,\psi)$, mais maintenant elles vérifient en plus la condition de recollement puisque :

$$\begin{aligned}\rho^{U_1}_{U_{12}}(\tau_1) - \rho^{U_2}_{U_{12}}\big(\tau_2 + \Gamma(U_2;\varphi)(\mu_2)\big) &= \Big(\rho^{U_1}_{U_{12}}(\tau_1) - \rho^{U_2}_{U_{12}}(\tau_2)\Big) - \rho^{U_2}_{U_{12}}\big(\Gamma(U_2;\varphi)(\mu_2)\big)\\ &= \Gamma(U_2;\varphi)(\mu_{12}) - \rho^{U_2}_{U_{12}}\big(\Gamma(U_2;\varphi)(\mu_2)\big) = 0\end{aligned}$$

Il existe donc bien une section de $\mathcal{G}_1$ au-dessus de l'ouvert U qui relève la section $\sigma \in \Gamma(U;\mathcal{G}_2)$ donnée. Il importe de remarquer que dans ces raisonnements, on ne modifie que l'un des deux relèvements locaux τ_1, τ_2 pour obtenir des relèvements pouvant être recollés.

Reprenons maintenant la situation générale où l'on se donne une section arbitraire $\sigma \in \Gamma(U;\mathcal{G}_2)$, et notons $\mathcal{L}(\sigma)$ la famille des relèvements locaux de σ, *i.e.* la famille de tous les couples (V,τ_V), où $V \subseteq U$ et $\tau_V \in \Gamma(V;\mathcal{G}_1)$ vérifie $\Gamma(V;\psi)(\tau) = \sigma|_V$. Munissons la famille $\mathcal{L}(\sigma)$ de la relation d'ordre partiel '$\preccurlyeq$' définie par : $(V_1,\tau_1) \preccurlyeq (V_2,\tau_2)$, si et seulement si, $V_1 \subseteq V_2$ et $\tau_2|_{V_1} = \tau_1$. La famille $\mathcal{L}(\sigma)$ est alors *inductive*. En effet, soit $\{(V_\beta,\tau_\beta)\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ un sous-ensemble totalement ordonné de $(\mathcal{L}(\sigma),\preccurlyeq)$ et posons $W = \cup_{\beta\in\mathfrak{B}} V_\beta$, les sections τ_β vérifient trivialement la condition de recollement de sections, et comme $\mathcal{G}_1$ est un faisceau, il existe une section $\tau \in \Gamma(W,\mathcal{G}_1)$ recollant les τ_β ; son image par $\Gamma(W;\psi)$ coïncide localement avec $\sigma|_W$ et comme $\mathcal{G}_2$ est également un faisceau, on a $\Gamma(W;\psi)(\tau) = \sigma|_W$. Par le lemme de Zorn, il existe un élément maximal (W,τ_W)

dans $(\mathcal{L}(\sigma), \preccurlyeq)$. Supposons $W \subsetneq U$ et soit $u \in U\backslash W$; fixons un relèvement local τ_{V_u} de σ sur un voisinage V_u de u. Posons $W' = W \cup V_u$. Les considérations sur les recouvrements à deux ouverts du paragraphe précédent s'appliquent, et la section τ_{V_u} peut être modifiée pour vérifier la condition de recollement de sections avec τ_W. Or, ceci contredit la maximalité de (W, τ_W) ; ce qui signifie que nécessairement $W = U$ et la proposition est démontrée. ∎

13.3.3-2. Proposition : *Soit r un entier naturel et considérons une suite exacte de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules :*

$$\mathbf{0} \to \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_r \longrightarrow \mathcal{G} \to \mathbf{0}\,,$$

où les faisceaux $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots, \mathcal{F}_r$ sont flasques. Le faisceau $\mathcal{G}$ est alors nécessairement ***flasque****.*

Démonstration : Par induction sur r. Lorsque $r = 1$ on a un isomorphisme entre $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{G}$ et rien n'est a démontrer.

Cas $r = 2$. Soit $U \subseteq \boldsymbol{X}$ un ouvert, on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} & \to & \Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{F}_1) & \xrightarrow{\Gamma(\boldsymbol{X};\varphi)} & \Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{F}_2) & \xrightarrow{\Gamma(\boldsymbol{X};\psi)} & \Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{G}) \to \mathbf{0} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \rho_U^{\boldsymbol{X}}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_U^{\boldsymbol{X}}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_U^{\boldsymbol{X}}} \\
\mathbf{0} & \to & \Gamma(U;\mathcal{F}_1) & \xrightarrow{\Gamma(U;\varphi)} & \Gamma(U;\mathcal{F}_2) & \xrightarrow{\Gamma(U;\psi)} & \Gamma(U;\mathcal{G}) \to \mathbf{0}
\end{array}$$

La proposition 13.3.3-1 montre que les lignes dans ce diagramme sont exactes et comme $\rho_U^{\boldsymbol{X}} \circ \Gamma(\boldsymbol{X};\psi) = \Gamma(U;\psi) \circ \rho_U^{\boldsymbol{X}}$, et que $\Gamma(U;\psi)$ et $\rho_U^{\boldsymbol{X}}$ sont toutes deux surjectives puisque $\mathcal{F}_2$ est flasque, on conclut à la surjectivité de $\rho_U^{\boldsymbol{X}} : \Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{G}) \to \Gamma(U;\mathcal{G})$ qui prouve la première assertion de la proposition.

Cas général. Supposons la proposition démontrée pour $r-1$, la suite

$$\mathbf{0} \to \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d_{r-2}} \mathcal{F}_{r-1} \longrightarrow \mathcal{F}_r \longrightarrow \mathcal{G} \to \mathbf{0}\,,$$

peut être scindée en deux suites exactes de faisceaux :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \to & \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 & \longrightarrow & \mathcal{F}_3 & \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d_{r-2}} & \mathcal{F}_{r-1} \xrightarrow{\tilde{\kappa}(d_{r-2})} \underline{\operatorname{coker}}(d_{r-2}) \to \mathbf{0} \\
 & & & & & & & & \kappa(d_r)\downarrow \\
 & & & & & & & & \mathcal{F}_r \\
 & & & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & & & \mathcal{G} \\
 & & & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & & & \mathbf{0}
\end{array}$$

où $\kappa(d_r) \circ \tilde{\kappa}(d_{r-2}) = d_{r-1}$ pour des raisons d'exactitude. L'hypothèse de récurrence implique que le faisceau $\underline{\operatorname{coker}}(d_{r-2})$ est flasque et les hypothèses de la proposition pour $r = 2$ sont alors satisfaites pour la suite exacte verticale ; il en découle que $\mathcal{G}$ est *flasque* et la démonstration de la proposition est terminée. ∎

13.3.3-3. Proposition : *Pour toute suite exacte de faisceaux flasques de $\boldsymbol{A}$-modules :*

$$\mathbf{0} \to \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_r \longrightarrow \cdots$$

et tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, la suite de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathcal{F}_0) \longrightarrow \Gamma(U;\mathcal{F}_1) \longrightarrow \Gamma(U;\mathcal{F}_2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Gamma(U;\mathcal{F}_r) \longrightarrow \cdots$$

est ***exacte****.*

Démonstration : Montrons l'exactitude de la suite des sections par induction sur le degré $r \in \mathbb{N}$.

Cas $r = 0, 1$. Résulte de l'exactitude à gauche du foncteur sections au-dessus de U.

Cas général. Supposons l'exactitude prouvée jusqu'au degré $r-1$ avec $r \geqslant 2$, on a alors le scindage :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & & & & & & & \mathbf{0} \\ & & & & & & & & & & & & \downarrow \\ \mathbf{0} \to \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 & \longrightarrow & \mathcal{F}_3 & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{d_{r-2}} & \mathcal{F}_{r-1} & \xrightarrow{\tilde{\kappa}(d_{r-2})} & \underline{\operatorname{coker}}(d_{r-2}) & \to \mathbf{0} \\ & & & & & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \kappa(d_r)} & & \\ & & & & & & & & & & \mathcal{F}_r & & \\ & & & & & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & & & & & \mathcal{F}_{r+1} & & \\ & & & & & & & & & & \downarrow & & \end{array}$$

où $\kappa(d_r) \circ \tilde{\kappa}(d_{r-2}) = d_{r-1}$ pour des raisons d'exactitude. La ligne est exacte et ne comporte que des faisceaux flasques d'après la proposition 13.3.3-2, nous pourrons donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence. On obtient alors, suite à l'application du foncteur $\Gamma(U;_)$, le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & & & & & & & \mathbf{0} \\ & & & & & & & & & & & & \downarrow \\ \mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathcal{F}_1) & \longrightarrow & \Gamma(U;\mathcal{F}_2) & \longrightarrow & \Gamma(U;\mathcal{F}_3) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \Gamma(U;\mathcal{F}_{r-1}) & \longrightarrow & \Gamma\big(U;\underline{\operatorname{coker}}(d_{r-2})\big) & \to \mathbf{0} \\ & & & & & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & & & & & \Gamma(U;\mathcal{F}_r) & & \\ & & & & & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & & & & & \Gamma(U;\mathcal{F}_{r+1}) & & \\ & & & & & & & & & & \downarrow & & \end{array}$$

où la ligne et la colonne sont exactes par hypothèse de récurrence. L'égalité $\Gamma(U;\kappa(d_r)) \circ \Gamma(U;\tilde{\kappa}(d_{r-2})) = \Gamma(U;d_{r-1})$ dit alors très précisément que la cohomologie du complexe des sections au-dessus de U en degré r est nulle. La démonstration de la proposition est ainsi achevée. ∎

13.3.4 Résolution flasque canonique de Godement.

13.3.4-1. Définition : Soit $\mathcal{G}$ un faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$. On appelle « résolution de $\mathcal{G}$ (à droite) » la donnée d'un complexe de faisceaux :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{r-1}} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_r} \cdots ,$$

muni d'une augmentation $\varepsilon : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^0$ ([48]) telle que le complexe augmenté :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{r-1}} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_r} \cdots ,$$

est **exact**.

13.3.4-2. Remarque : Le corollaire 13.2.1-5 montre que le complexe de faisceaux des formes différentielles sur une variété différentiable $\boldsymbol{X}$ (possédant ou non des partitions de l'unité) constitue une résolution du faisceaux des fonctions localement constantes $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}$.

[48] Rappelons que le terme « augmentation » signifie dans le cas présent que $d_0 \circ \varepsilon(\mathcal{G}) = 0$, de sorte que la suite "augmentée" : $\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{d_1} \cdots$, est un complexe.

Nous allons maintenant expliquer comment l'on construit des résolutions flasques canoniques à l'aide du foncteur $\mathcal{C}^0$ de Godement pour chaque objet de $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$. Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules et montrons, par récurrence sur $r \in \mathbb{N}$, l'existence d'une suite *exacte* de faisceaux :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{r-1}} \mathcal{F}^r \xrightarrow{d_r} \cdots$$

où les $\mathcal{F}^j$ sont tous *flasques*.

Cas $r = 0$. Il résulte de considérer le foncteur $\mathcal{C}^0$ de Godement et de poser $\mathcal{F}^0 := \mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ (*cf.* 13.3.2-2).

Cas $r = 1$. On a déjà la suite exacte de faisceau : $\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}^0(\mathcal{G})$. Complétons-la en une suite exacte de faisceaux en lui adjoignant le conoyau de $\varepsilon(\mathcal{G})$ et injectons celui-ci dans son faisceau flasque de Godement :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{\tilde{\kappa}(\varepsilon(\mathcal{G}))} \underline{\mathrm{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G})) \xrightarrow{\varepsilon(\underline{\mathrm{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G})))} \mathcal{C}^0(\underline{\mathrm{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}))) .$$

Posons maintenant :

$$\boxed{\mathcal{C}^1(\mathcal{G}) := \mathcal{C}^0(\underline{\mathrm{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G})))} \quad \text{et} \quad \boxed{d_0(\mathcal{G}) := \varepsilon(\underline{\mathrm{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}))) \circ \tilde{\kappa}(\varepsilon(\mathcal{G}))}$$

Une analyse simple, à l'aide des germes si nécessaire, montre alors que la suite :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_0(\mathcal{G})} \mathcal{C}^1(\mathcal{G}) ,$$

est **exacte**.

Cas général. Supposons avoir ainsi défini la suite exacte de faisceaux :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_0(\mathcal{G})} \mathcal{C}^1(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_1(\mathcal{G})} \cdots \xrightarrow{d_{r-1}(\mathcal{G})} \mathcal{C}^r(\mathcal{G}) ,$$

On définit alors, tel que nous l'avons fait pour $r = 1$,

$$\boxed{\mathcal{C}^{r+1}(\mathcal{G}) := \mathcal{C}^0(\underline{\mathrm{coker}}(d_{r-1}(\mathcal{G})))} \quad \text{et} \quad \boxed{d_r(\mathcal{G}) := \varepsilon(\underline{\mathrm{coker}}(d_{r-1}(\mathcal{G}))) \circ \tilde{\kappa}(d_{r-1}(\mathcal{G}))}$$

La suite :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_0(\mathcal{G})} \mathcal{C}^1(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_1(\mathcal{G})} \cdots \xrightarrow{d_{r-1}(\mathcal{G})} \mathcal{C}^r(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_r(\mathcal{G})} \mathcal{C}^{r+1}(\mathcal{G}) ,$$

est alors **exacte**.

Résumons dans une proposition le résultat complet sous-jacent à cette construction.

13.3.4-3. Théorème : *Il existe une et une seule correspondance* ***fonctorielle*** *associant à un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules $\mathcal{G}$ la résolution $\big(\mathcal{C}^*(\mathcal{G}), d_*(\mathcal{G})\big)$ qui soit "compatible" au foncteur "faisceau flasque associé de Godement". Cette correspondance est en plus* ***additive et exacte****.*

Démonstration : Soit $\varphi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ un morphisme de faisceaux. On a par définition même de conoyaux, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} \to \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G}_1)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\tilde{\kappa}(\varepsilon(\mathcal{G}_1))} & \underline{\mathrm{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}_1)) & \xrightarrow{\varepsilon(\underline{\mathrm{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}_1)))} & \mathcal{C}^0(\underline{\mathrm{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}_1))) \equiv \mathcal{C}^1(\mathcal{G}_1) \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{C}^0(\varphi)} & & \downarrow{\scriptstyle \nu(\varphi)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{C}^0(\nu(\varphi))} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{C}^1(\varphi)} \\
\mathbf{0} \to \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G}_2)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\tilde{\kappa}(\varepsilon(\mathcal{G}_2))} & \underline{\mathrm{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}_2)) & \xrightarrow{\varepsilon(\underline{\mathrm{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}_2)))} & \mathcal{C}^0(\underline{\mathrm{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}_2))) \equiv \mathcal{C}^2(\mathcal{G}_1)
\end{array}$$

où nous avons noté $\nu(\varphi)$ le morphisme canonique naturel entre les conoyaux concernés. La propriété universelle vérifiée par les conoyaux et le caractère fonctoriel de la correspondance $\mathcal{C}^0$, suffisent donc à prouver la

fonctorialité et additivité de $\mathcal{C}^1$. En itérant indéfiniment ce procédé, on définit de même les morphismes $\mathcal{C}^r(\varphi)$ et l'on prouve la fonctorialité et additivité non seulement de chaque $\mathcal{C}^r$, mais aussi de la correspondance qui associe à un faisceau $\mathcal{G}$ la résolution $\big(\mathcal{C}^*(\mathcal{G}), d_*(\mathcal{G})\big)$.

Considérons maintenant une suite exacte de faisceaux :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_3 \to \mathbf{0}\,,$$

La fonctorialité de la résolution canonique de Godement donne lieu au bicomplexe :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}_1)} & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}_2)} & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}_3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(\varphi)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(\psi)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}_3) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{G}_1)} & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{G}_2)} & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{G}_3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(\varphi)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(\psi)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_3) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}_1)} & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}_2)} & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}_3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{G}_3 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & &
\end{array}$$

où l'exactitude énoncée dans le théorème se réfère à l'exactitude de chaque ligne. Nous avons déjà prouvé l'exactitude du foncteur $\mathcal{C}^0$ et nous allons montrer maintenant celle de chaque foncteur $\mathcal{C}^r$ en procédant inductivement par rapport à $r \geqslant 1$. Supposons donc avoir prouvé l'exactitude de $\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1, \ldots, \mathcal{C}^{r-1}$ et considérons le bicomplexe :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \to & \underline{\operatorname{coker}}(d_{r-2}(\mathcal{G}_1)) & \longrightarrow & \underline{\operatorname{coker}}(d_{r-2}(\mathcal{G}_2)) & \longrightarrow & \underline{\operatorname{coker}}(d_{r-2}(\mathcal{G}_3)) & \to & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{\kappa}(d_{r-2}(\mathcal{G}_1))} & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{\kappa}(d_{r-2}(\mathcal{G}_2))} & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{\kappa}(d_{r-2}(\mathcal{G}_3))} & & \\
\mathbf{0} & \to & \mathcal{C}^{r-1}(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^{r-1}(\varphi)} & \mathcal{C}^{r-1}(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^{r-1}(\psi)} & \mathcal{C}^{r-1}(\mathcal{G}_3) & \to & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_{r-2}(\mathcal{G}_1)} & & \uparrow{\scriptstyle d_{r-2}(\mathcal{G}_2)} & & \uparrow{\scriptstyle d_{r-2}(\mathcal{G}_3)} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}_1)} & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}_2)} & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}_3)} & & \\
\mathbf{0} & \to & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(\varphi)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(\psi)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}_3) & \to & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{G}_1)} & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{G}_2)} & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{G}_3)} & & \\
\mathbf{0} & \to & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(\varphi)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(\psi)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_3) & \to & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}_1)} & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}_2)} & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}_3)} & & \\
\mathbf{0} & \to & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{G}_3 & \to & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & &
\end{array}$$

où les colonnes et toutes les lignes, sauf éventuellement celle concernant les conoyaux, sont exactes dans la catégorie des faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules. La suite des raisonnements peut se faire directement dans la catégorie $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ puisqu'ils sont valables dans toute catégorie abélienne, le lecteur pourra, s'il le désire, se ramener à une catégorie de modules en considérant les bicomplexes issus de l'application des foncteurs "germes", puis en revenant à la catégorie des faisceaux à l'aide de la proposition 13.2.1-4-(c).

Nous allons utiliser la proposition 9.3-1 et son corollaire 9.3-2. L'exactitude des colonnes du bicomplexe ci-dessus implique l'annulation de la cohomologie de son complexe simple associé. Par conséquent, la cohomologie de la ligne des conoyaux est isomorphe à celle du bicomplexe obtenu en tronquant cette première ligne ; or, dans ce nouveau bicomplexe les lignes sont exactes et donc sa cohomologie est nulle. La suite des conoyau est donc exacte et l'application du foncteur exact $\mathcal{C}^0$ à celle-ci, fournira la suite également **exacte** :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{C}^r(\mathcal{G}_1) \xrightarrow{\mathcal{C}^r(\varphi)} \mathcal{C}^r(\mathcal{G}_2) \xrightarrow{\mathcal{C}^r(\psi)} \mathcal{C}^r(\mathcal{G}_3) \longrightarrow \mathbf{0}\,;$$

ce qui termine la démonstration du théorème. ∎

13.3.4-4. Exercice : (Suite de l'exercice 13.3.2-3.) Montrer que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module, les faisceaux $\mathcal{C}^p(\mathcal{M})$ sont des $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules et que le complexe $(\mathcal{C}^*(\mathcal{M}), d_*(\mathcal{M}))$ est un complexe de la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$.

En particulier, le théorème 13.3.4-3 reste vrai si l'on remplace la catégorie $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ par $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$.

13.3.5 Définition de la cohomologie des faisceaux.

13.3.5-1. Définition : Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules et considérons sa résolution canonique flasque de Godement

$$\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \big(\mathcal{C}^*(\mathcal{G}), d_*(\mathcal{G})\big)\,.$$

Pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, on a le complexe de $\boldsymbol{A}$-modules $\big(\Gamma(U;\mathcal{C}^*(\mathcal{G})), \Gamma(U; d_*(\mathcal{G}))\big)$:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \Gamma(U;\mathcal{C}^0(\mathcal{G})) \xrightarrow{\Gamma(U;\boldsymbol{d}_0(\mathcal{G}))} \Gamma(U;\mathcal{C}^1(\mathcal{G})) \xrightarrow{\Gamma(U;\boldsymbol{d}_1(\mathcal{G}))} \Gamma(U;\mathcal{C}^2(\mathcal{G})) \xrightarrow{\Gamma(U;\boldsymbol{d}_2(\mathcal{G}))} \cdots\,. \qquad (*)$$

On appelle «groupes de cohomologie de faisceaux de $\mathcal{G}$ sur U» les groupes de cohomologie du complexe $(*)$, ils sont notés $H^r(U;\mathcal{G})$, pour $r \in \mathbb{N}$. Lorsque $U = \boldsymbol{X}$, les groupes en question sont appelés «groupes de cohomologie de faisceaux de $\mathcal{G}$» et sont notés indifféremment par $H^r(\boldsymbol{X};\mathcal{G})$ ou $H^r(\mathcal{G})$, pour $r \in \mathbb{N}$.

13.3.5-2. Proposition : *Soit U une partie ouverte de $\boldsymbol{X}$.*

a) *Pour chaque $r \in \mathbb{N}$, la correspondance qui associe à un faisceau $\mathcal{G} \in \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ son r-ième groupe de cohomologie sur U, est de nature* ***fonctorielle et additive****.*

b) *L'augmentation canonique $\varepsilon(\mathcal{G}) : \mathcal{G} \to \big(\mathcal{C}^*(\mathcal{G}), d_*(\mathcal{G})\big)$ induit un* ***isomorphisme canonique***

$$\Gamma(U;\varepsilon(\mathcal{G})) : \Gamma(U;\mathcal{G}) \xrightarrow{\equiv} H^0(U;\mathcal{G})\,.$$

c) *Toute suite exacte courte de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules :*

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}_3 \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

donne lieu à une «suite exacte longue de cohomologie de faisceaux» :

$$\mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathcal{G}_1) \xrightarrow{\Gamma(U;\varphi)} \Gamma(U;\mathcal{G}_2) \xrightarrow{\Gamma(U;\psi)} \Gamma(U;\mathcal{G}_3) \to H^1(U;\mathcal{G}_1) \xrightarrow{H^1(U;\varphi)} H^1(U;\mathcal{G}_2) \xrightarrow{H^1(U;\psi)} H^1(U;\mathcal{G}_3) \to \cdots$$

d) *La correspondance qui associe à une suite exacte courte de faisceaux sa suite exacte longue de cohomologie de faisceaux est de nature* ***fonctorielle et additive****.*

Démonstration :

a) L'assertion résulte presque immédiatement de la nature fonctorielle et additive du foncteur "résolution flasque canonique de Godement" et du foncteur de cohomologie en degré r sur la catégorie (également abélienne) des complexes de $\boldsymbol{A}$-modules.

b) Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules. L'augmentation de la résolution flasque canonique est, par définition, un complexe exact de faisceaux :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_0(\mathcal{G})} \mathcal{C}^1(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_1(\mathcal{G})} \mathcal{C}^2(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_2(\mathcal{G})} \cdots,$$

et comme le foncteur $\Gamma(U;_)$ est exact à gauche, la suite de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \Gamma(U;\mathcal{G}) \xrightarrow{\Gamma(U;\varepsilon(\mathcal{G}))} \Gamma(U;\mathcal{C}^0(\mathcal{G})) \xrightarrow{\Gamma(U;d_0(\mathcal{G}))} \Gamma(U;\mathcal{C}^1(\mathcal{G})) \xrightarrow{\Gamma(U;d_1(\mathcal{G}))} \Gamma(U;\mathcal{C}^2(\mathcal{G})) \xrightarrow{\Gamma(U;d_2(\mathcal{G}))} \cdots,$$

est exacte à gauche. L'assertion de la proposition résulte alors immédiatement.

c) Soit une suite exacte courte de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}_3 \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Le caractère fonctoriel exact du foncteur "résolution flasque canonique de Godement" donne le bicomplexe de lignes **exactes de faisceaux flasques** :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \uparrow{\scriptstyle d_4(\mathcal{G}_1)} & & \uparrow{\scriptstyle d_4(\mathcal{G}_2)} & & \uparrow{\scriptstyle d_4(\mathcal{G}_3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^4(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^4(\varphi)} & \mathcal{C}^4(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^4(\psi)} & \mathcal{C}^4(\mathcal{G}_3) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_3(\mathcal{G}_1)} & & \uparrow{\scriptstyle d_3(\mathcal{G}_2)} & & \uparrow{\scriptstyle d_3(\mathcal{G}_3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^3(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^3(\varphi)} & \mathcal{C}^3(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^3(\psi)} & \mathcal{C}^3(\mathcal{G}_3) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_2(\mathcal{G}_1)} & & \uparrow{\scriptstyle d_2(\mathcal{G}_2)} & & \uparrow{\scriptstyle d_2(\mathcal{G}_3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^2(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^2(\varphi)} & \mathcal{C}^2(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^2(\psi)} & \mathcal{C}^2(\mathcal{G}_3) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}_1)} & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}_2)} & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}_3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(\varphi)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(\psi)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}_3) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{G}_1)} & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{G}_2)} & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{G}_3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(\varphi)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(\psi)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_3) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & &
\end{array}$$

et, suite à la proposition 13.3.3-1, l'application du foncteur $\Gamma(U;_)$ donnera un bicomplexe de $\boldsymbol{A}$-modules où les lignes sont des **suites exactes courtes**, *i.e.* une suite exacte courte de complexes. D'après le théorème fondamental de l'algèbre homologique, une suite exacte longue de cohomologie en résulte et, tel que nous l'avons expliqué dans la section 13.3.1, l'exactitude à gauche du foncteur $\Gamma(U;_)$ intervient pour terminer la démonstration de cette assertion.

d) Le caractère *additif et fonctoriel* de la correspondance en question découle immédiatement de la même propriété satisfaite par le foncteur *exact* des "résolutions canoniques de Godement". La fin de la démonstration est alors conséquence de la fonctorialité et additivité de la correspondance, définie sur la catégorie des suites exactes courtes d'une catégorie abélienne, donnant la suite exacte longue de cohomologie (*cf.* 5.2.1). ∎

13.3.6 Cohomologie de faisceaux et cohomologie des sections d'une résolution. Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$ et considérons une résolution arbitraire $(\mathcal{G}^*, d_*)$ de $\mathcal{G}$, notons $\varepsilon : \mathcal{G} \to (\mathcal{G}^*, d_*)$ le morphisme d'augmentation. On a la suite exacte longue de faisceaux :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{d_2} \cdots$$

En appliquant le foncteur "résolution flasque canonique de Godement", on obtient le bicomplexe

de faisceaux :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & d_1(\mathcal{G})\uparrow & & d_1(\mathcal{G}^0)\uparrow & & d_1(\mathcal{G}^1)\uparrow & & d_1(\mathcal{G}^2)\uparrow \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(\varepsilon)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(d_0)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(d_1)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}^2) \xrightarrow{\mathcal{C}^1(d_1)} \cdots \\
 & & d_0(\mathcal{G})\uparrow & & d_0(\mathcal{G}^0)\uparrow & & d_0(\mathcal{G}^1)\uparrow & & d_0(\mathcal{G}^2)\uparrow \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(\varepsilon)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(d_0)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(d_1)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^2) \xrightarrow{\mathcal{C}^0(d_1)} \cdots \\
 & & \varepsilon(\mathcal{G})\uparrow & & \varepsilon(\mathcal{G}^0)\uparrow & & \varepsilon(\mathcal{G}^1)\uparrow & & \varepsilon(\mathcal{G}^2)\uparrow \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathcal{G}^0 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{G}^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{G}^2 \xrightarrow{d_1} \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
\end{array} \qquad (\mathcal{B})$$

l'exactitude des foncteurs $\mathcal{C}^r$ assure que les lignes supérieures de ce bicomplexe sont des suites exactes longues de faisceaux flasques. En appliquant le foncteur $\Gamma(U;_)$ et, suite à la proposition 13.3.3-3, on peut affirmer que le morphisme canonique entre le groupe de cohomologie de faisceaux $H^r(U;\mathcal{G})$ et le groupe de cohomologie de même degré du complexe simple associé au bicomplexe $\Gamma\big(U;\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}^*)\big)$, est un **isomorphisme**.

En considérant maintenant le morphisme canonique entre le groupe $h^r\big(\Gamma(U;\mathcal{G}^*)\big)$ et le groupe de cohomologie en degré r du complexe simple associé au bicomplexe $\Gamma\big(U;\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}^*)\big)$, on déduit les morphismes canoniques :

$$H^r\big(U;\mathcal{G}\big) \xrightarrow{\equiv} h^r\big(\Gamma(U;\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}^*))\big) \longleftarrow h^r\big(\Gamma(U;\mathcal{G}^*)\big) \qquad (\diamond)$$

pour chaque $r \in \mathbb{N}$. En inversant l'isomorphisme de gauche, on déduit les morphismes canoniques :

$$\boxed{\Xi_r : h^r\big(\Gamma(U;\mathcal{G}^*)\big) \longrightarrow H^r(U;\mathcal{G})}$$

pour tout entier $r \geqslant 0$.

13.3.6-1. Théorème : *Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules et $\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon} (\mathcal{G}^*, d_*)$ une résolution de faisceaux de $\mathcal{G}$. Soit U une partie ouverte de $\boldsymbol{X}$.*

Pour que les morphismes canoniques :

$$\Xi_r : h^r\big(\Gamma(U;\mathcal{G}^*)\big) \longrightarrow H^r(U;\mathcal{G})\,,$$

*soient des **isomorphismes**, quel que soit $r \geqslant 0$, il suffit que les groupes de cohomologie de faisceaux au-dessus de U pour chacun des faisceaux $\mathcal{G}^k$ de la résolution soient nuls **en degrés positifs**,* i.e. *:*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} H^j(U,\mathcal{G}^k) = 0,\ \textit{pour chaque} \\ k \geqslant 0\ \textit{et tout}\ j > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \Xi_r : h^r\big(\Gamma(U;\mathcal{G}^*)\big) \longrightarrow H^r(U;\mathcal{G})\,,\ \textit{est} \\ \textit{un isomorphisme pour tout}\ r \geqslant 0 \end{array}\right\}}$$

Démonstration : Dire que les groupes de cohomologie de faisceaux supérieurs sont nuls signifie très exactement que les colonnes supérieures du bicomplexe $(\mathcal{B})$ restent exactes après application du foncteur $\Gamma(U;_)$ mais alors le morphisme de droite dans $(\diamond)$ est un ***isomorphisme*** et le théorème est démontré. ∎

13.3.6-2. Remarque : Les exercices 13.2.1-7, 13.3.2-3 et 13.3.4-4, montrent que toutes les considérations de ce chapitre restent valables si l'on remplace la catégorie $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ par la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$.

13.3.6-3. Remarque : La dernière proposition révèle un phénomène d'extrême importance. Il montre que les résolutions flasques peuvent être contournées pour le calcul de la cohomologie de faisceaux. C'est en particulier ce qui arrive avec la résolution du faisceau des fonctions localement constantes $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}$ par le complexe des faisceaux des formes différentielles sur une variété différentiable $\boldsymbol{X}$ (*cf.* corollaire 13.2.1-5) lorsque la variété $\boldsymbol{X}$ possède des partitions de l'unité. La section suivante traitera de ce cas en détail.

13.3.7 Faisceaux $\Gamma(\boldsymbol{U};_)$-acycliques.

13.3.7-1. Définition : Soit U un ouvert de $\boldsymbol{X}$. Un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules $\mathcal{G}$ est dit «$\Gamma(U;_)$-acyclique» lorsque l'on a :

$$H^r(U;\mathcal{G}) = 0\,, \qquad \text{pour tout } r > 0\,.$$

Un faisceau $\Gamma(U;_)$-acyclique pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ sera dit «Γ-acyclique».

13.3.7-2. Définition : Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules. Une résolution $\mathbf{0} \to \mathcal{G} \to (\mathcal{G}^*, d_*)$ de $\mathcal{G}$ sera dite «$\Gamma(U;_)$-acyclique» (resp. «Γ-acyclique») lorsque chacun des termes $\mathcal{G}^r$ l'est.

13.3.7-3. Remarque : Le théorème 13.3.6-1 dit par conséquent que les résolutions $\Gamma(U;_)$-acycliques d'un faisceau $\mathcal{G}$ calculent les groupes de cohomologie de faisceaux $H^*(U;\mathcal{G})$.

13.3.7-4. Proposition : *Un faisceau* ***flasque*** *de* $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ *est* Γ*-acyclique.*

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la proposition 13.3.3-3 appliquée à la résolution canonique flasque de Godement d'un faisceau lui-même flasque. ∎

13.3.7-5. Théorème : *Soit* $\boldsymbol{M}$ *une variété différentiable* ***admettant des partitions de l'unité****.*

a) *Le faisceau des* r*-formes différentielles* $\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}}$ *est* Γ*-acyclique, quel que soit* $r \geqslant 0$*.*

b) *Le complexe de de Rham de* $\boldsymbol{M}$ *calcule la cohomologie de faisceaux du faisceau des fonctions localement constantes* $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$*.*

c) *La cohomologie de de Rham d'une variété différentiable est un invariant* ***topologique****. Autrement dit, deux variétés différentiables homéomorphes, mais* ***pas forcément difféomorphes****, ont des groupes de cohomologie de de Rham isomorphes.*

Démonstration :

a) Fixons un entier $r \geqslant 0$ et considérons une suite exacte courte de faisceaux :

$$\mathbf{0} \to \underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{Q} \to \mathbf{0}\,. \tag{$*$}$$

où $\mathcal{F}$ est un $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{M}}$-module.

Montrons alors que, quel que soit l'ouvert $U \subseteq \boldsymbol{M}$, la suite :

$$\mathbf{0} \to \Gamma(U;\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}}) \xrightarrow{\Gamma(U;\varphi)} \Gamma(U;\mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(U;\psi)} \Gamma(U;\mathcal{Q}) \to \mathbf{0}\,,$$

est exacte.

Nous allons procéder de manière analogue à la démonstration de la proposition 13.3.3-1. Donnons-nous une section $\sigma \in \Gamma(U;\mathcal{Q})$ et notons $\mathcal{L}(\sigma)$ la famille d'ouverts $V \subseteq U$ sur lesquels il existe des relèvements de σ, *i.e.* tels qu'il existe $\tau_V \in \Gamma(V;\mathcal{F})$ vérifiant $\Gamma(V;\psi)(\tau_V) = \sigma|_V$. Munissons $\mathcal{L}(\sigma)$ de l'ordre partiel d'inclusion '$\subseteq$' ([49]). L'ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{L}(\sigma), \subseteq)$ contient des voisinages ouverts de chaque point de U et est **inductif**.

Il contient des voisinages ouverts de chaque point de U puisque σ admet des relèvements locaux, c'est une conséquence directe de l'exactitude à droite de $(*)$ en catégorie de faisceaux de modules. Montrons maintenant qu'il est également inductif. Soit $\{V_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ un sous-ensemble *totalement ordonné* de $(\mathcal{L}(\sigma), \subseteq)$ et posons $W = \cup_{\beta\in\mathfrak{B}} V_\beta$. La variété $\boldsymbol{M}$ ayant été supposée posséder des partitions de l'unité, soit $\{\rho_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{V_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ de W. Maintenant, comme $\mathcal{F}$ est un $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{M}}$-module, pour toute section $\tau_\beta \in \Gamma(V_\beta;\mathcal{F})$, la section $\rho_\beta\,\tau_\beta \in \Gamma(V_\beta;\mathcal{F})$ est bien définie et se prolonge (par zéro) en une section de $\Gamma(\boldsymbol{M};\mathcal{F})$. Posons alors $\tau = \sum_{\beta\in\mathfrak{B}} \rho_\beta\,\tau_\beta$, où $\tau_\beta \in \Gamma(V_\beta;\mathcal{F})$ est un relèvement de $\sigma|_{V_\beta}$; comme cette somme est localement finie, elle définit bien une section de $\Gamma(W;\mathcal{F})$. Ceci étant, l'image de τ par $\Gamma(W,\psi)$ donne une section de $\Gamma(W,\mathcal{Q})$ qui coïncide avec σ (on peut s'en convaincre par une analyse locale ne rencontrant qu'un nombre fini de supports de fonctions partition). L'ouvert W appartient donc à $\mathcal{L}(\sigma)$, ce qui prouve que $(\mathcal{L}(\sigma), \subseteq)$ est bien inductif.

Ceci étant, soient W un élément maximal de $\big(\mathcal{L}(\sigma), \subseteq\big)$ et $\tau \in \Gamma(W;\mathcal{F})$ un relèvement de $\sigma|_W$. Supposons $W \subsetneq U$ et soit $u \in U\backslash W$; il existe alors un voisinage ouvert V_u de u et un relèvement $\tau_u \in \Gamma(V_u;\mathcal{F})$ de $\sigma|_{V_u}$. La section différence $\delta := \tau|_{W\cap V_u} - \tau_u|_{W\cap V_u}$ appartient clairement au noyau de ψ et représente une r-forme différentielle de l'ouvert $W \cap V_u$. L'existence de partitions de l'unité sur $\boldsymbol{M}$ intervient une nouvelle fois pour garantir, telle que cela s'est fait dans la démonstration de l'exactitude de la suite courte de Mayer-Vietoris (*cf.* proposition 5.1-1), l'existence de deux r-formes différentielles $\omega_W \in \Omega^r(W)$ et $\omega_u \in \Omega^r(V_u)$ telles que leur différence sur $W \cap V_u$ est précisément la section δ. Ceci signifie que les sections

$$\tau - \omega_W \in \Gamma(W;\mathcal{F}) \quad \text{et} \quad \tau_u - \omega_u \in \Gamma(V_u;\mathcal{F})\,, \tag{$\dagger$}$$

vérifient la condition de recollement puisque leur différence sur $W \cap V_u$ est précisément

$$\delta - \big(\omega_W|_{W\cap V_u} - \omega_u|_{W\cap V_u}\big) = 0\,.$$

Comme les sections $(\dagger)$ sont des relèvements locaux de σ, leur recollement définit un relèvement de σ au-dessus de $W \cup V_u$, ce qui contredit la maximalité de W. L'ouvert maximal W doit donc être nécessairement égal à U.

Supposons maintenant que le faisceau $\mathcal{F}$ dans (*) est un faisceau **flasque** ([50]). Le faisceau $\mathcal{Q}$ est alors également **flasque**.

En effet, pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{M}$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{M};\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}}) & \xrightarrow{\Gamma(\boldsymbol{M};\varphi)} & \Gamma(\boldsymbol{M};\mathcal{F}) & \xrightarrow{\Gamma(\boldsymbol{M};\psi)} & \Gamma(\boldsymbol{M};\mathcal{Q}) \to \mathbf{0} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \rho^{\boldsymbol{M}}_U} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho^{\boldsymbol{M}}_U} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho^{\boldsymbol{M}}_U} \\
\mathbf{0} \to \Gamma(U;\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}}) & \xrightarrow{\Gamma(U;\varphi)} & \Gamma(U;\mathcal{F}) & \xrightarrow{\Gamma(U;\psi)} & \Gamma(U;\mathcal{Q}) \to \mathbf{0}
\end{array}$$

[49] Remarquer la différence par rapport à l'ensemble $(\mathcal{L}(\sigma), \preccurlyeq)$ considéré dans la démonstration de la proposition 13.3.3-1.

[50] On pourrait prendre $\mathcal{F} = \mathcal{C}^0(\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}})$ et φ l'injection canonique $\varepsilon(\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}})$; puis $\mathcal{Q}$ le faisceau conoyau de $\varepsilon(\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}})$.

dont nous avons montré l'exactitude des lignes. En particulier, l'égalité $\rho_U^{\boldsymbol{M}} \circ \Gamma(\boldsymbol{M};\psi) = \Gamma(U;\psi) \circ \rho_U^{\boldsymbol{M}}$, où les morphismes du membre de droite sont tous deux surjectifs, entraîne la surjectivité du morphisme de restriction $\rho_U^{\boldsymbol{M}}$ en dernière colonne. Le faisceau $\mathcal{Q}$ est donc bien flasque.

Sous les hypothèses en cours, appliquons le foncteur $\Gamma(U;_)$ à la suite exacte courte $(*)$. On obtient la suite exacte longue de cohomologie de faisceau (*cf.* proposition 13.3.5-2) :

$$\mathbf{0} \to \Gamma(U;\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}}) \xrightarrow{\Gamma(U;\varphi)} \Gamma(U;\mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(U;\psi)} \Gamma(U;\mathcal{Q}) \longrightarrow H^1(U;\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}}) \xrightarrow{H^1(U;\varphi)} H^1(U;\mathcal{F}) \xrightarrow{H^1(U;\psi)} H^1(U;\mathcal{Q}) \longrightarrow$$

où les $H^k(U;\mathcal{F})$ et $H^k(U;\mathcal{Q})$ sont nuls pour tout $k > 0$, d'après la proposition 13.3.7-4 ; et comme d'autre part $\Gamma(U;\psi)$ est surjective, il s'ensuit que $H^k(U;\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}}) = 0$, pour tout $k > 0$. Le faisceau $\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}}$ est donc $\Gamma(U;_)$-acyclique et comme notre analyse est indépendante de l'ouvert U, le faisceau $\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}}$ est Γ-acyclique.

b) Découle du corollaire 13.2.1-5, du théorème 13.3.6-1 et de (a).

c) La question précédente montre que la cohomologie du complexe de de Rham calcule la cohomologie de faisceaux du faisceau $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$. Ce faisceau ne fait intervenir dans sa définition que la topologie de $\boldsymbol{M}$, il est donc de nature topologique. En particulier, il est fixé par tout homéomorphisme de $\boldsymbol{M}$. La définition des groupes de cohomologie a procédé à l'aide de la résolution flasque canonique de Godement qui fait uniquement intervenir le faisceau $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$ et la topologie de $\boldsymbol{M}$; les groupes de cohomologie $H^r(\boldsymbol{M};\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}})$ dépendent donc uniquement de la topologie de $\boldsymbol{M}$. ∎

13.3.8 Acyclicité des $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{M}}$-modules. La démonstration du dernier théorème (13.3.7-5) a mis un évidence un phénomène qu'il convient d'isoler dans une proposition.

13.3.8-1. Proposition : *Sur une variété différentiable* $\boldsymbol{M}$ ***possédant des partitions de l'unité*** *tout* $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{M}}$*-module est* Γ*-acyclique.*

Démonstration : Elle suit les raisonnements de la partie préliminaire de la démonstration de 13.3.7-5, où l'on remplacera systématiquement le faisceau $\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}}$ par un $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{M}}$-module. On remarquera que la seule propriété de $\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{M}}$ intervenant dans cette démonstration est l'exactitude à droite des suites de Mayer-Vietoris ; or, cette exactitude est partagée, plus généralement par tout $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{M}}$-module comme le montre l'inspection de la démonstration de la proposition 5.1-1 (page 82). ∎

Ce résultat permettra de montrer l'existence d'isomorphismes canoniques entre les cohomologies «singulière», «simpliciale», «de de Rham» et «de Čech» et «de faisceaux» pour le faisceau des fonctions localement constantes¿ pour une variété différentiable possédant des partitions de l'unité (*cf.* section 15.4, page 196).

———————×———————

§14. Hyper-cohomologie des complexes de faisceaux

Comme dans le chapitre précédent, on désignera par $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif avec identité multiplicative ; par $\boldsymbol{X}$ un espace topologique arbitraire, *i.e.* un ensemble muni d'une topologie ; et par $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ la catégorie (abélienne) des faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$.

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la catégorie $\mathbf{C}^*\big(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})\big)$ dont les objets sont les «faisceaux différentiels gradués», *i.e.* les complexes de faisceaux :

$$\cdots \xrightarrow{d_{m-2}} \mathcal{G}^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \mathcal{G}^m \xrightarrow{d_m} \mathcal{G}^{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \mathcal{G}^{m+2} \xrightarrow{d_{m+2}} \cdots ,$$

et où les morphismes sont les morphismes de complexes de faisceaux. Comme nous l'avons déjà signalé, la catégorie $\mathbf{C}^*\big(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})\big)$ est abélienne puisque $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ l'est, et le foncteur de $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ vers $\mathbf{C}^*\big(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})\big)$ qui fait correspondre à un faisceau $\mathcal{G}$ le complexe de faisceaux, noté $\mathcal{G}[0]$, défini par :

$$\mathcal{G}[0]^j := \begin{cases} \mathcal{G} & \text{pour } j = 0\,; \\ \mathbf{0} & \text{sinon}\,; \end{cases} \qquad i.e. \qquad \cdots \xrightarrow{d_{-2}} \mathbf{0} \xrightarrow{d_{-1}} \mathcal{G} \xrightarrow{d_0} \mathbf{0} \xrightarrow{d_1} \cdots\,,$$

où la différentielle est nulle, et qui fait correspondre au morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$, le morphisme de complexes $\varphi[0]$, défini par :

$$\varphi[0]_j := \begin{cases} \varphi & \text{pour } j = 0\,; \\ 0 & \text{sinon}\,; \end{cases} \qquad i.e. \qquad \begin{array}{ccccccccc} \cdots & \xrightarrow{d_{-2}} & \mathbf{0} & \xrightarrow{d_{-1}} & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{d_0} & \mathbf{0} & \xrightarrow{d_1} & \cdots \\ & & {\scriptstyle 0}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & {\scriptstyle 0}\downarrow & & \\ \cdots & \xrightarrow{d_{-2}} & \mathbf{0} & \xrightarrow{d_{-1}} & \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{d_0} & \mathbf{0} & \xrightarrow{d_1} & \cdots \end{array}$$

est un foncteur **additif, exact et pleinement fidèle**.

14-1. Définition : Un complexe de faisceaux $(\mathcal{G}^*, d_*)$ sera dit «concentré en degré r» lorsque $\mathcal{G}^k = \mathbf{0}$, pour tout $k \neq r$; dans un tel cas la différentielle du complexe est nécessairement nulle. Les objets de l'image du foncteur $(_)[0]$ sont donc tous les complexes de faisceaux concentrés en degré 0.

Pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, le foncteur des sections au-dessus de U, noté $\Gamma(U;_)$ et que nous avons défini sur la catégorie $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ vers la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$, s'étend de manière évidente à un foncteur additif :

$$\Gamma(U;_) : \mathbf{C}^*\big(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})\big) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*\big(\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})\big)$$

de sorte que le diagramme de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{[0]} & \mathbf{C}^*\big(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})\big) \\ {\scriptstyle \Gamma(U;_)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma(U;_)} \\ \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) & \xrightarrow{[0]} & \mathbf{C}^*\big(\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})\big) \end{array}$$

est commutatif. Le foncteur $\Gamma(U;_) : \mathbf{C}^*\big(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})\big) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*\big(\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})\big)$ est alors également exact à gauche.

Dans le chapitre précédent nous avons introduit la cohomologie de faisceaux dans le but de "mesurer" le défaut d'exactitude du foncteur $\Gamma(U;_)$ sur $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$: la donnée d'une suite exacte courte de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}_3 \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

donne alors lieu à une «suite exacte longue de cohomologie de faisceaux» :

$$\mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathcal{G}_1) \xrightarrow{\Gamma(U;\varphi)} \Gamma(U;\mathcal{G}_2) \xrightarrow{\Gamma(U;\psi)} \Gamma(U;\mathcal{G}_3) \to H^1(U;\mathcal{G}_1) \xrightarrow{H^1(U;\varphi)} H^1(U;\mathcal{G}_2) \xrightarrow{H^1(U;\psi)} H^1(U;\mathcal{G}_3) \to \cdots$$

Le but de l'«hyper-cohomologie» peut être motivé essentiellement par la même interrogation. Étant donnée une suite exacte courte de **complexes de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules** :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{G}_1^* \xrightarrow{\varphi_*} \mathcal{G}_2^* \xrightarrow{\psi_*} \mathcal{G}_3^* \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

l'action du foncteur $\Gamma(U;_)$ donne, *a priori*, seulement une suite exacte à gauche de complexes de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \Gamma(U;\mathcal{G}_1^*) \xrightarrow{\Gamma(U;\varphi_*)} \Gamma(U;\mathcal{G}_2^*) \xrightarrow{\Gamma(U;\psi_*)} \Gamma(U;\mathcal{G}_3^*)\,.$$

l'hyper-cohomologie des complexes de faisceaux va alors donner lieu à une «suite exacte longue d'***hyper-cohomologie de complexes de faisceaux***»:

$$\begin{array}{l}\cdots\to \mathbb{H}^{-1}(U;\mathscr{G}_1^*)\xrightarrow{\mathbb{H}^{-1}(U;\varphi_*)}\mathbb{H}^{-1}(U;\mathscr{G}_2^*)\xrightarrow{\mathbb{H}^{-1}(U;\psi_*)}\mathbb{H}^{-1}(U;\mathscr{G}_3^*)\longrightarrow\\ \longrightarrow\ \mathbb{H}^{0}(U;\mathscr{G}_1^*)\xrightarrow{\mathbb{H}^{0}(U;\varphi_*)}\mathbb{H}^{0}(U;\mathscr{G}_2^*)\xrightarrow{\mathbb{H}^{0}(U;\psi_*)}\mathbb{H}^{0}(U;\mathscr{G}_3^*)\longrightarrow\\ \longrightarrow\ \mathbb{H}^{1}(U;\mathscr{G}_1^*)\xrightarrow{\mathbb{H}^{1}(U;\varphi_*)}\mathbb{H}^{1}(U;\mathscr{G}_2^*)\xrightarrow{\mathbb{H}^{1}(U;\psi_*)}\mathbb{H}^{1}(U;\mathscr{G}_3^*)\longrightarrow\\ \longrightarrow\ \mathbb{H}^{2}(U;\mathscr{G}_1^*)\xrightarrow{\mathbb{H}^{2}(U;\varphi_*)}\mathbb{H}^{2}(U;\mathscr{G}_2^*)\xrightarrow{\mathbb{H}^{2}(U;\psi_*)}\mathbb{H}^{2}(U;\mathscr{G}_3^*)\to\cdots\end{array}\qquad(*)$$

qui prolonge la définition de la cohomologie des faisceaux, *i.e.* lorsque les complexes de faisceaux $\mathcal{G}_i^*$ seront concentrés en degré 0, donc de la forme $\mathcal{G}_i^* = \mathcal{G}_i[0]$, on aura:

$$\boxed{\mathbb{H}^r(U;\mathcal{G}_i[0]) = H^r(U;\mathcal{G}_i)\,,\qquad \text{pour tout } r\in\mathbb{N}.}$$

Et lorsque $\mathcal{G}_i^r = \mathbf{0}$, pour tout entier relatif $r<0$ et pour $i=1,2,3$, la suite longue $(*)$ sera "tronquée" en degrés négatifs, *i.e.* de la forme:

$$\begin{array}{l}\mathbf{0}\to\ \mathbb{H}^{0}(U;\mathscr{G}_1^*)\xrightarrow{\mathbb{H}^{0}(U;\varphi_*)}\mathbb{H}^{0}(U;\mathscr{G}_2^*)\xrightarrow{\mathbb{H}^{0}(U;\psi_*)}\mathbb{H}^{0}(U;\mathscr{G}_3^*)\longrightarrow\\ \longrightarrow\ \mathbb{H}^{1}(U;\mathscr{G}_1^*)\xrightarrow{\mathbb{H}^{1}(U;\varphi_*)}\mathbb{H}^{1}(U;\mathscr{G}_2^*)\xrightarrow{\mathbb{H}^{1}(U;\psi_*)}\mathbb{H}^{1}(U;\mathscr{G}_3^*)\longrightarrow\\ \longrightarrow\ \mathbb{H}^{2}(U;\mathscr{G}_1^*)\xrightarrow{\mathbb{H}^{2}(U;\varphi_*)}\mathbb{H}^{2}(U;\mathscr{G}_2^*)\xrightarrow{\mathbb{H}^{2}(U;\psi_*)}\mathbb{H}^{2}(U;\mathscr{G}_3^*)\to\cdots\end{array}$$

avec, en plus:

$$\boxed{\mathbb{H}^0(U;\mathcal{G}_i^*) = h^0\big(\Gamma(U;\mathcal{G}_i^*)\big)}$$

14-2. Remarque: On prendra soin, par contre, de bien remarquer que s'il existe des morphismes canoniques:

$$h^r\big(\Gamma(U;\mathcal{G}^*)\big)\xrightarrow{\Xi_r(U;\mathcal{G})}\mathbb{H}^r(U;\mathcal{G}^*)\,,\qquad\text{pour tout } r\in\mathbb{Z}\,,$$

ces morphismes n'ont en général, *a priori*, aucune raison d'être des isomorphismes (*cf.* 14.2.1-4).

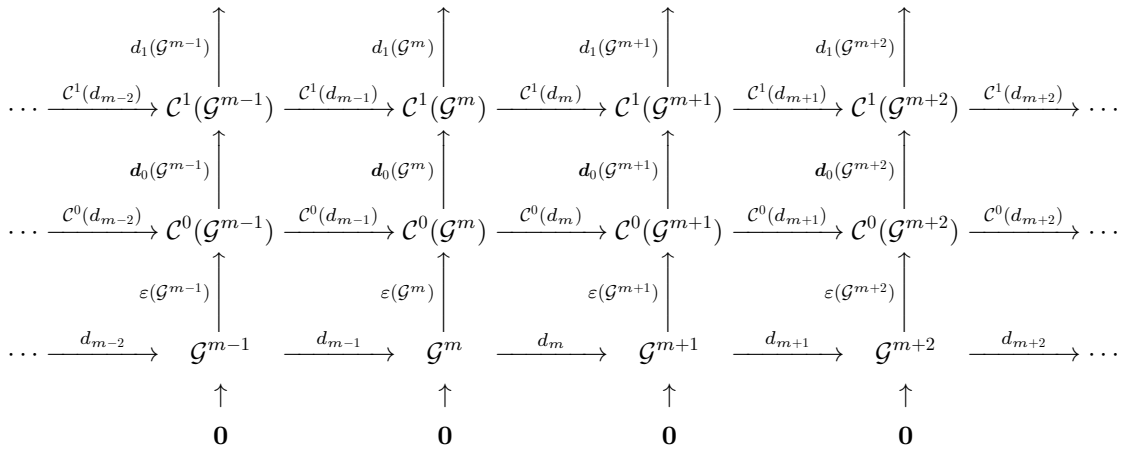
14.1 Définition de l'hyper-cohomologie d'un complexe de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules

Soit U une partie ouverte de l'espace topologique $\boldsymbol{X}$. Pour tout complexe de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$:

$$\cdots\xrightarrow{d_{m-2}}\mathcal{G}^{m-1}\xrightarrow{d_{m-1}}\mathcal{G}^{m}\xrightarrow{d_{m}}\mathcal{G}^{m+1}\xrightarrow{d_{m+1}}\mathcal{G}^{m+2}\xrightarrow{d_{m+2}}\cdots\,,$$

l'application, terme à terme, du foncteur "résolution flasque canonique de Godement" donne le

bicomplexe de colonnes exactes :



On définit alors, pour chaque entier relatif $r \in \mathbb{Z}$, «l'hypercohomologie du complexe $(\mathcal{G}^*, d_*)$ en degré r», et on la note $\mathbb{H}^r\big(U;(\mathcal{G}^*,d_*)\big)$ (et même $\mathbb{H}^r(U;\mathcal{G}^*)$ lorsque la différentielle d_* est sous-entendue), la cohomologie en degré r du complexe simple associé au bicomplexe de $\boldsymbol{A}$-modules $\big(\Gamma(U;\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}^*))\big)$, *i.e.* :

$$\boxed{\mathbb{H}^r\big(U;(\mathcal{G}^*,d_*)\big) := h^r\big(\Gamma(U;\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}^*))\big)} \qquad \text{pour chaque } r \in \mathbb{Z}.$$

14.2 Propriétés élémentaires de l'hyper-cohomologie

La proposition suivante donne des propriétés de l'hyper-cohomologie qui sont conséquences immédiates de la définition ; nous laissons les démonstrations aux soins du lecteur.

14.2-1. Proposition : *Soit U une partie ouverte de $\boldsymbol{X}$ et soit $(\mathcal{G}^*, d_*)$ un complexe de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$.*

a) *Pour chaque $r \in \mathbb{Z}$, la correspondance :*

$$(\mathcal{G}^*, d_*) \rightsquigarrow \mathbb{H}^r(U;(\mathcal{G}^*,d_*))\,,$$

*est **fonctorielle covariante et additive** de la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}))$ vers la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$.*

b) *Si les termes du complexe $(\mathcal{G}^*, d_*)$ sont nuls en degrés inférieurs ou égaux $r_0 \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\mathbb{H}^r\big(U;(\mathcal{G}^*,d_*)\big) = \mathbf{0}\,, \qquad \textit{pour tout } r \leqslant r_0.$$

c) *Si le complexe $(\mathcal{G}^*, d_*)$ est concentré en degré 0,* i.e. *si $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}[0]$, pour un certain $\mathcal{G} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}))$, on a :*

$$\mathbb{H}^r\big(U;(\mathcal{G}^*,d_*)\big) = H^r(U;\mathcal{G})\,, \qquad \textit{pour tout } r \in \mathbb{N}.$$

où le terme de droite désigne le r-ième groupe de cohomologie de faisceaux du faisceau $\mathcal{G}$.

14.2-2. Proposition : *Soit U une partie ouverte de $\boldsymbol{X}$ et soit $(\mathcal{G}^*, d_*)$ un complexe de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$.*

Il existe une correspondance canonique ***fonctorielle et additive*** *associant à chaque suite exacte de* ***complexes de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules*** *:*

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{G}_1^* \xrightarrow{\varphi_*} \mathcal{G}_2^* \xrightarrow{\psi_*} \mathcal{G}_3^* \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

une suite exacte longue d'hyper-cohomologie de complexes de faisceaux :

$$\begin{array}{l}
\cdots \longrightarrow I\!H^{-1}(U;\mathcal{G}_1^*) \xrightarrow{I\!H^{-1}(U;\varphi_*)} I\!H^{-1}(U;\mathcal{G}_2^*) \xrightarrow{I\!H^{-1}(U;\psi_*)} I\!H^{-1}(U;\mathcal{G}_3^*) \longrightarrow \\
\longrightarrow I\!H^{0}(U;\mathcal{G}_1^*) \xrightarrow{I\!H^{0}(U;\varphi_*)} I\!H^{0}(U;\mathcal{G}_2^*) \xrightarrow{I\!H^{0}(U;\psi_*)} I\!H^{0}(U;\mathcal{G}_3^*) \longrightarrow \\
\longrightarrow I\!H^{1}(U;\mathcal{G}_1^*) \xrightarrow{I\!H^{1}(U;\varphi_*)} I\!H^{1}(U;\mathcal{G}_2^*) \xrightarrow{I\!H^{1}(U;\psi_*)} I\!H^{1}(U;\mathcal{G}_3^*) \longrightarrow \\
\longrightarrow I\!H^{2}(U;\mathcal{G}_1^*) \xrightarrow{I\!H^{2}(U;\varphi_*)} I\!H^{2}(U;\mathcal{G}_2^*) \xrightarrow{I\!H^{2}(U;\psi_*)} I\!H^{2}(U;\mathcal{G}_3^*) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Démonstration : La démonstration résulte de la définition même de l'hyper-cohomologie. L'application du foncteur de résolution flasque canonique de Godement (exact), donne la suite exacte de **bicomplexes de faisceaux *flasques*** :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_1^*) \xrightarrow{\mathcal{C}^\bullet(\varphi_*)} \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_2^*) \xrightarrow{\mathcal{C}^\bullet(\psi_*)} \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_3^*) \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

d'où la suite exacte de bicomplexes de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \Gamma(U;\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_1^*)) \xrightarrow{\Gamma(U;\mathcal{C}^\bullet(\varphi_*))} \Gamma(U;\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_2^*)) \xrightarrow{\Gamma(U;\mathcal{C}^\bullet(\psi_*))} \Gamma(U;\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_3^*)) \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

qui donnera lieu à une suite exacte courte de complexes simples associés ; puis à la suite exacte longue de cohomologie de l'énoncé de la proposition. ∎

14.2.1 Deux résultats d'algèbre homologique. Les deux propositions suivantes admettent des démonstrations élémentaires, mais dans le but de familiariser le lecteur avec les techniques des suites spectrales, nous avons préféré les démontrer à l'aide de ces dernières. Ces assertions généralisent la proposition 9.3-1 et son corollaire 9.3-2 au cas des bicomplexes du "demi-plan supérieur".

14.2.1-1. Proposition : *Soit $(\boldsymbol{C}^{\bullet,*}, d, \delta)$ un bicomplexe de modules du "demi-plan supérieur",* i.e. *tel que $\boldsymbol{C}^{l,k} = 0$, pour tout $l < 0$. Supposons que sa cohomologie verticale est nulle. Alors le complexe simple associé $(\boldsymbol{C}^*, D_*)$ est* exact.

Démonstration : L'idée est celle classique qui consiste à filtrer le complexe simple $(\boldsymbol{C}^*, D_*)$ en posant :

$$C_p^* := \bigoplus\nolimits_{k \geqslant p} C^{*,k}\,.$$

La filtration est évidemment régulière et l'hypothèse sur la cohomologie de colonnes dit que l'on a pour les termes de la suite spectrale associée : $I\!E_1^{p,q} = \mathbf{0}$, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$. L'annulation de la cohomologie du complexe en question s'ensuit. ∎

14.2.1-2. Corollaire : *Soient $(\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d, \delta)$ un bicomplexe du demi-plan supérieur et $(\boldsymbol{B}^{\bullet,*}, d(\boldsymbol{B}), \delta(\boldsymbol{B}))$*

le bicomplexe du demi-plan supérieur défini par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}^{l,k} = \boldsymbol{A}^{l+1,k} ; \\ d(\boldsymbol{B})_{l,k} = d_{l+1,k} ; \\ \delta(\boldsymbol{B})_{l,k} = \delta_{l+1,k} ; \end{cases}$$

pour tout $(l,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$. *Notons* $(\boldsymbol{B}^*, D(\boldsymbol{B})_*)$ *le complexe simple associé à* $(\boldsymbol{B}^{\bullet,*}, d(\boldsymbol{B}), \delta(\boldsymbol{B}))$. *Alors :*

a) *Les applications* $\delta_{0,k} : \boldsymbol{A}^{0,k} \to \boldsymbol{B}^k$ *définissent un morphisme de complexes* $\delta_{0,*}$ *entre* $(\boldsymbol{A}^{0,*}, d_{0,*})$ *et* $(\boldsymbol{B}^*, D(\boldsymbol{B})_*)$.

b) *La cohomologie du bicomplexe* $(\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d, \delta)$ *est nulle, si et seulement si, le morphisme* $\delta_{0,*}$ *est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration : La démonstration est rigoureusement la même que celle du corollaire 9.3-2 moyennant la généralisation 14.2.1-1 de la proposition 9.3-1. ∎

14.2.1-3. Remarque : Voici une illustration de ce dernier corollaire.

$$\Sigma\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \to \boldsymbol{A}^{3,0} & \to \boldsymbol{A}^{3,1} & \to \boldsymbol{A}^{3,2} & \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \to \boldsymbol{A}^{2,0} & \to \boldsymbol{A}^{2,1} & \to \boldsymbol{A}^{2,2} & \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \to \boldsymbol{A}^{1,0} & \to \boldsymbol{A}^{1,1} & \to \boldsymbol{A}^{1,2} & \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \to \boldsymbol{A}^{0,0} & \to \boldsymbol{A}^{0,1} & \to \boldsymbol{A}^{0,2} & \to \end{pmatrix} \qquad \Sigma\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \to \boldsymbol{A}^{3,0} & \to \boldsymbol{A}^{3,1} & \to \boldsymbol{A}^{3,2} & \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \to \boldsymbol{A}^{2,0} & \to \boldsymbol{A}^{2,1} & \to \boldsymbol{A}^{2,2} & \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \to \boldsymbol{A}^{1,0} & \to \boldsymbol{A}^{1,1} & \to \boldsymbol{A}^{1,2} & \to \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ (\to \boldsymbol{A}^{0,0} & \to \boldsymbol{A}^{0,1} & \to \boldsymbol{A}^{0,2} & \to) \end{pmatrix}$$

exact $\iff$ quasi-isomorphisme

Ces deux résultats interviennent dans la démonstration du théorème suivant.

14.2.1-4. Théorème : *Soit* U *une partie ouverte de* $\boldsymbol{X}$ *et soit* $(\mathcal{G}^*, d_*)$ *un complexe de faisceaux de* $\boldsymbol{A}$*-modules sur* $\boldsymbol{X}$.

a) *Il existe des morphismes canoniques :*

$$\Xi_r(U;\mathcal{G}^*) : h^r\big(\Gamma(U;(\mathcal{G}^*,d_*))\big) \longrightarrow I\!H^r\big(U;(\mathcal{G}^*,d_*)\big), \quad \textit{pour chaque } r\in\mathbb{Z} ;$$

et lorsque $\mathcal{G}^k = \mathbf{0}$, *pour tout* $k<0$, *le morphisme* $\Xi_0(U;\mathcal{G}^*)$ *est un* ***isomorphisme****.*

b) *Les morphismes* $\Xi_r(U;\mathcal{G}^*)$ *sont des isomorphismes, quel que soit* $r\in\mathbb{Z}$, *lorsque chaque terme* $\mathcal{G}^m$ *du complexe* $(\mathcal{G}^*, d_*)$ *est* $\Gamma(U;_)$*-acyclique.*

Démonstration :

a) La définition de l'hyper-cohomologie du complexe $(\mathcal{G}^*, d_*)$ passe par la résolution flasque canonique de Godement :

$$(\mathcal{G}^*, d_*) \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G}^*)} \Sigma\big(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}^*)\big),$$

où Σ désigne le foncteur "complexe simple associé", le morphisme canonique $\Xi_*(\mathcal{G}^*)$ est celui défini par le morphisme de complexes $\varepsilon(\mathcal{G}^*)$.

Supposons maintenant que $\mathcal{G}^k = \mathbf{0}$, pour tout $k < 0$; on a le bicomplexe de faisceaux de colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}^0)} & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}^1)} & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}^2)} & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}^3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(d_0)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(d_1)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}^2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(d_2)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}^3) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(d_3)} & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{G}^0)} & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{G}^1)} & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{G}^2)} & & \uparrow{\scriptstyle d_0(\mathcal{G}^3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(d_0)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(d_1)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(d_2)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^3) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(d_3)} & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}^0)} & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}^1)} & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}^2)} & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}^3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{G}^0 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{G}^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{G}^2 & \xrightarrow{d_2} & \mathcal{G}^3 & \xrightarrow{d_3} & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & &
\end{array}$$

et $h^0(U;\mathcal{G}^*) = \ker(\Gamma(U;d_0)) \subseteq \Gamma(U;\mathcal{G}^0)$. D'autre part $\mathbb{H}^0(U;\mathcal{G}^*)$ est donné par l'ensemble des $y \in \Gamma(U;\mathcal{C}^0(\mathcal{G}^0))$ vérifiant les deux relations d'annulation :

$$y \in \ker\big(\Gamma(U;d_0(\mathcal{G}^0))\big) \subseteq \Gamma(U;\mathcal{C}^0(\mathcal{G}^0))\,, \quad \text{et} \quad \Gamma(U;\mathcal{C}^0(d_0))(y) = 0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^1)\,;$$

or, l'exactitude à gauche de $\Gamma(U;_)$ donne l'**isomorphisme** de complexes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \longrightarrow & \ker\big(\Gamma(U;d_0(\mathcal{G}^0))\big) & \xrightarrow{\Gamma(U;\mathcal{C}^0(d_0))} & \ker\big(\Gamma(U;d_0(\mathcal{G}^1))\big) & \xrightarrow{\Gamma(U;\mathcal{C}^0(d_1))} & \ker\big(\Gamma(U;d_0(\mathcal{G}^2))\big) & \xrightarrow{\Gamma(U;\mathcal{C}^0(d_2))} & \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}^0)} \equiv & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}^1)} \equiv & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}^2)} \equiv & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \Gamma(U;\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\Gamma(U;d_0)} & \Gamma(U;\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\Gamma(U;d_1)} & \Gamma(U;\mathcal{G}^2) & \xrightarrow{\Gamma(U;d_2)} &
\end{array}$$

et l'application canonique $\Xi_0(U;\mathcal{G}^*) : h^0\Gamma(U;\mathcal{G}^0) \to \mathbb{H}^0(U;\mathcal{G}^*)$ est bien **bijective**.

b) Lorsque chaque $\mathcal{G}^m$ est $\Gamma(U;_)$-acyclique, les colonnes du bicomplexe $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}^*)$ augmentées de la ligne $\mathcal{G}^*$ restent exactes après application du foncteur $\Gamma(U;_)$; la cohomologie du complexe simple associé à ce bicomplexe augmenté est donc nulle d'après la proposition 14.2.1-1 ; son corollaire 14.2.1-2 entraîne alors l'assertion (b). ∎

14.3 Sous-catégorie de complexes de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules bornés à gauche

14.3-1. Définition : Un complexe de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules $(\mathcal{G}^*, d_*)$ est dit «borné à gauche» lorsque il existe $N \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{G}^k = \mathbf{0}$, pour tout $k \leqslant N$. On note $\mathbf{C}^{b_g}(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}))$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}^*(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}))$ dont les objets sont les complexes bornés à gauche. La catégorie $\mathbf{C}^{b_g}(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}))$ est ***abélienne***.

14.3.1 Suites spectrales pour l'hyper-cohomologie de complexes de faisceaux bornées à gauche. Soit $(\mathcal{G}^*, d_*)$ un complexe de $\mathbf{C}^{b_g}(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}))$, nous allons supposer dans la suite qu'il s'agit d'un complexe nul en degrés négatifs, cette hypothèse de travail n'invalidera nullement la généralité de nos arguments qui s'appliqueront à des complexes bornés quelconques.

Les premiers termes de la résolution flasque canonique de Godement sont :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}^0)} & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}^1)} & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}^2)} & & \uparrow{\scriptstyle d_1(\mathcal{G}^3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(d_0)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(d_1)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}^2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(d_2)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}^3) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(d_3)} & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \boldsymbol{d}_0(\mathcal{G}^0)} & & \uparrow{\scriptstyle \boldsymbol{d}_0(\mathcal{G}^1)} & & \uparrow{\scriptstyle \boldsymbol{d}_0(\mathcal{G}^2)} & & \uparrow{\scriptstyle \boldsymbol{d}_0(\mathcal{G}^3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(d_0)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(d_1)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(d_2)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^3) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(d_3)} & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}^0)} & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}^1)} & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}^2)} & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathcal{G}^3)} & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{G}^0 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{G}^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{G}^2 & \xrightarrow{d_2} & \mathcal{G}^3 & \xrightarrow{d_3} & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & &
\end{array}$$

et lorsque nous lui appliquons le foncteur $\Gamma(U;_)$ nous sommes face à un bicomplexe du premier quadrant (en général borné à gauche). Les filtrations "horizontale" et "verticale" sont donc **toutes deux** régulières. Il s'ensuit l'existence de deux suites spectrales convergeant vers la cohomologie du complexe simple associé, *i.e.* vers l'hyper-cohomologie de $(\mathcal{G}^*, d_*)$.

• ***Filtration par les colonnes.*** Dans ce cas, déjà considéré pour les complexes illimités, on obtient :

$$\boxed{I\!E_1^{p,q} = H^{p+q}(U;\mathcal{G}^p) \Longrightarrow I\!H^q(U;\mathcal{G}^*)}$$

et l'on déduit immédiatement que si les $\mathcal{G}^p$ sont tous $\Gamma(U;_)$-acycliques, on a $I\!E_1^{p,q} = \mathbf{0}$, pour tout $q > 0$, et $I\!E_1^{p,0} \equiv \mathcal{G}^p$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$. En particulier, $d_1 \equiv d_*$ sur $I\!E_1^{*,0} \equiv \mathcal{G}^*$ et alors :

$$I\!E_2^{p,0} \equiv h^p(\Gamma(U;\mathcal{G}^*))\,;\; I\!E_2^{p,q} = \mathbf{0}, \text{ pour tout } q > 0\,; \text{ et } d_r = 0 \text{ pour tout } r \geqslant 2,$$

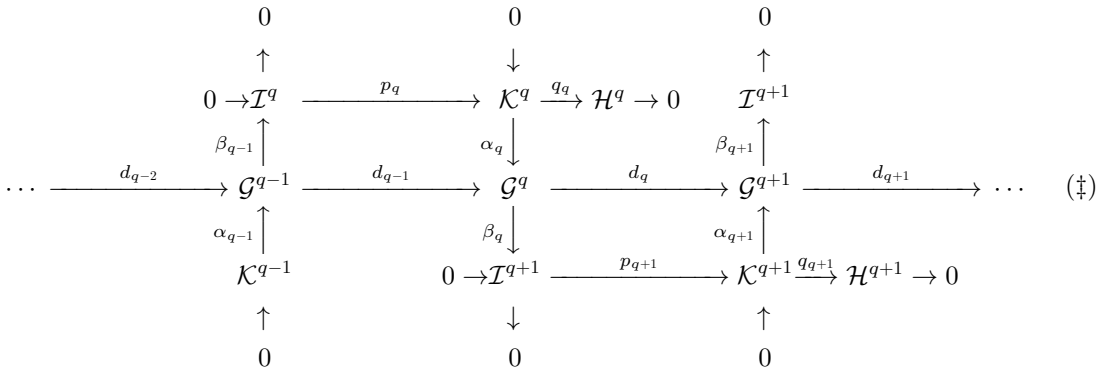
il s'ensuit que $h^p(\Gamma(U;\mathcal{G}^*)) \equiv I\!E_2^{p,0} \equiv I\!E_\infty^{p,0}$ et $I\!E_\infty^{p,q} = \mathbf{0}$, pour tout $q > 0$, d'où un isomorphisme canonique entre $h^*(\Gamma(U;\mathcal{G}^*)) \to I\!H(U;\mathcal{G}^*)$ (*cf.* la démonstration de la proposition 14.2.1-4).

• ***Filtration par les lignes.*** Regardons maintenant les premiers termes de la suite spectrale associée à la filtration par les lignes. Le terme $I\!E_1^{p,q}$ est donné par la cohomologie au terme r du complexe :

$$\mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathcal{C}^p(\mathcal{G}^0)) \xrightarrow{\Gamma(U;\mathcal{C}^p(d_0))} \Gamma(U;\mathcal{C}^p(\mathcal{G}^1)) \xrightarrow{\Gamma(U;\mathcal{C}^p(d_1))} \cdots \xrightarrow{\mathcal{C}^p(\Gamma(U;d_{q-1}))} \Gamma(U;\mathcal{C}^p(\mathcal{G}^q)) \xrightarrow{\Gamma(U;\mathcal{C}^p(d_q))} \cdots .$$

Rappelons maintenant dans le contexte de la théorie des faisceaux les développements de la section 8.3.3, principalement pour ce qui est du diagramme en "serpent" (‡) en page 113. On a le

diagramme de faisceaux :



(‡)

où les suites à trois termes sont toutes exactes, et où l'on désigne par $\mathcal{I}^m$: le faisceau image de d_{m-1}, puis par $\mathcal{K}^m$: le faisceaux noyau de d_m, et enfin par $\mathcal{H}^m$, qu'on notera également $\mathcal{H}^m(\mathcal{G}^*)$: le faisceau de cohomologie en degré m du complexe $(\mathcal{G}^*, d_*)$.

Si nous appliquons maintenant au diagramme (‡) le foncteur de Godement $\mathcal{C}^p$ (resp. le foncteur "résolution canonique flasque de Godement"), on obtient également un diagramme où toutes les suites à trois termes sont exactes, mais maintenant tous les faisceaux seront en plus ***flasques***. En particulier, l'application ultérieure du foncteur $\Gamma(U;_)$ préservera l'exactitude des suites à trois termes, et par conséquent, et suite aux remarques de la section 8.3.3, on obtient un isomorphisme **canonique** entre :

$$\boxed{h^p\big(\Gamma(U;\mathcal{C}^p(\mathcal{G}^*))\big) \xrightarrow{\equiv} \Gamma(U;\mathcal{C}^p\big(\mathcal{H}^q(\mathcal{G}^*)\big))}$$

Nous avons donc $I\!E_1^{p,q} \equiv \Gamma(U;\mathcal{C}^p\big(\mathcal{H}^q(\mathcal{G}^*)\big))$ et une analyse rapide montre que la différentielle $d_1 : I\!E_1^{p,q} \to I\!E_1^{p+1,q}$ est précisément le morphisme $\Gamma(U; d_p(\mathcal{H}^q))$ provenant de la résolution flasque canonique de Godement appliquée au faisceau $\mathcal{H}^q(\mathcal{G}^*)$. En conclusion, on a :

$$\boxed{I\!E_2^{p,q} = H^p(U;\mathcal{H}^q(\mathcal{G}^*))}$$

où le terme de droite désigne le p-ième groupe de cohomologie de faisceaux de $\mathcal{H}^q(\mathcal{G}^*)$. Le théorème 14.4-1 qui débute la section suivante, connu sous le nom de «théorème principal de la théorie de faisceaux», se trouve ainsi démontré.

14.4 Théorèmes fondamentaux de la cohomologie de faisceaux

14.4-1. Théorème principal de la théorie de faisceaux (Leray) : *Soit U un ouvert de $\boldsymbol{X}$. Pour chaque complexe de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules $(\mathcal{G}^*, d_*)$ borné à gauche sur $\boldsymbol{X}$, il existe une suite spectrale convergeant vers son hyper-cohomologie :*

$$I\!E_2^{p,q} \equiv H^p(U;\mathcal{H}^q(\mathcal{G}^*)) \Longrightarrow I\!H^{p+q}(U;\mathcal{G}^*)$$

14.4-2. Corollaire 1 : *Soit U une partie ouverte de $\boldsymbol{X}$. Soit $\varphi_* : (\mathcal{G}_1^*, d_{1,*}) \to (\mathcal{G}_2^*, d_{2,*})$ un **quasi-isomorphisme** de complexes de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules ([51]) **bornés à gauche**. Les morphismes*

[51] Ceci signifie que les morphismes de faisceaux induits $\mathcal{H}^q(\varphi_*) : \mathcal{H}^q(\mathcal{G}_1^*) \to \mathcal{H}^q(\mathcal{G}_2^*)$ sont des isomorphismes,

induits en hyper-cohomologie :

$$\mathbb{H}^r(U;\varphi) : \mathbb{H}^r(U;(\mathcal{G}_1^*, d_{1,*})) \longrightarrow \mathbb{H}^r(U;(\mathcal{G}_2^*, d_{2,*}))\,,$$

sont des ***isomorphismes****, pour tout* $r \in \mathbb{Z}$.

Démonstration : Résulte immédiatement du fait que le morphisme de complexes φ_* induit un morphisme des suites spectrales associées aux filtrations par les lignes des bicomplexes intervenant dans la définition de l'hyper-cohomologie. Le morphisme reliant les termes $\mathbb{E}_{i,2}^{p,q} \equiv H^p(U;\mathcal{H}^q(\mathcal{G}_i^*))$ est alors celui induit par l'isomorphisme $\mathcal{H}^*(\varphi) : \mathcal{H}^*(\mathcal{G}_1^*) \to \mathcal{H}^*(\mathcal{G}_2^*)$ et est donc un isomorphisme. L'isomorphisme annoncé dans ce corollaire est alors conséquence de la théorie générale des suites spectrales. ∎

14.4-3. Remarque : Ce corollaire est très important dans la théorie de faisceaux. Il affirme que sur la catégorie des complexes de faisceaux **bornés à gauche**, l'hyper-cohomologie est un invariant des classes d'équivalences des complexes quasi-isomorphes. En particulier, l'hyper-cohomologie d'un complexe de faisceaux borné à gauche et ***exact*** est **nulle**.

14.4-4. Définition : Soit $(\mathcal{G}^*, d_*)$ un complexe de faisceaux borné à gauche. On appelle «résolution de $(\mathcal{G}^*, d_*)$» la donnée d'un complexe de faisceaux borné à gauche $(\mathcal{R}^*, d_*)$ est d'un morphisme de complexes de faisceaux : $\varepsilon_* : (\mathcal{G}^*, d_*) \to (\mathcal{R}^*, d_*)$ qui soit un ***quasi-isomorphisme***.

La résolution est dite : «flasque», «$\Gamma(U;_)$-acyclique», «Γ-acyclique» si chacun des termes $\mathcal{R}^m$ l'est.

14.4-5. Remarque et exercice : Rappelons qu'on appelle «résolution d'un faisceau $\mathcal{G}$» la donnée d'un complexe de faisceaux $(\mathcal{G}^*, d_*)$ muni d'une augmentation $\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} (\mathcal{G}^*, d_*)$ tel que le complexe augmenté est exact. Si nous considérons maintenant le point de vue de la catégorie $\mathbf{C}^{b_g}(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}))$, le morphisme d'augmentation $\varepsilon(\mathcal{G})$ s'"intègre" dans un morphisme de complexes $\varepsilon(\mathcal{G})_* : \mathcal{G}[0] \to (\mathcal{G}^*, d_*)$ en posant $\varepsilon(\mathcal{G})_0 := \varepsilon(\mathcal{G})$ et $\varepsilon(\mathcal{G})_r = 0$, pour tout $r > 0$. Montrer que le morphisme $\varepsilon(\mathcal{G})_*$ fait alors du complexe $(\mathcal{G}^*, d_*)$ une résolution de $\mathcal{G}[0]$. Imaginez l'énoncé réciproque et démontrez-le.

14.4-6. Corollaire 2 : *Soit* U *une partie ouverte de* $\boldsymbol{X}$. *Soit* $\varepsilon_* : (\mathcal{G}^*, d_*) \to (\mathcal{R}^*, d_*)$ *une résolution* $\Gamma(U;_)$*-acyclique de* $(\mathcal{G}^*, d_*)$ *dans la catégorie* $\mathbf{C}^{b_g}(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}))$. *Les groupes d'hyper-cohomologie de* $(\mathcal{G}^*, d_*)$ *sont alors canoniquement isomorphes aux groupes* $h^q(\Gamma(U;\mathcal{R}^*))$.

Démonstration : Le corollaire 14.4-2 prouve déjà que le morphisme :

$$\mathbb{H}^*(U;\varepsilon_*) : \mathbb{H}^*(U;\mathcal{G}^*) \to \mathbb{H}^*(U;\mathcal{R}^*)\,,$$

est un isomorphisme canonique. Le théorème 14.2.1-4 montre d'autre part que le morphisme canonique :

$$\Xi_*(U;\mathcal{R}^*) : h^*(\Gamma(U;\mathcal{R}^*)) \to \mathbb{H}^*(U;\mathcal{R}^*)\,,$$

quel que soit $q \in \mathbb{Z}$. Le point de vue de "germes" peut être également invoqué pour introduire cette notion : on demande alors que les morphismes de complexes de $\boldsymbol{A}$-modules $\varphi_{(x)} : (\mathcal{G}_{1\,(x)}^*, d_{1,*(x)}) \to (\mathcal{G}_{2\,(x)}^*, d_{2,*(x)})$ soient des quasi-isomorphismes, quel que soit $x \in \boldsymbol{X}$.

est lui aussi un isomorphisme. L'assertion du corollaire résulte alors en considérant la composée :

$$\big(\Xi_*(U;\mathcal{R}^*)\big)^{-1}\circ I\!H^*(U;\varepsilon_*)\,.$$ ∎

14.4-7. Remarque : Les résultats cette dernière section ne peuvent être étendus, en toute généralité, à la catégorie de tous les complexes de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules. Une condition de finitude connue sous le nom de «dimension cohomologique finie de $\boldsymbol{X}$» et qui affirme qu'il existe un entier positif N (dépendant uniquement de $\boldsymbol{X}$) tel que pour **tout** faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules $\mathcal{G}$ ses groupes de cohomologie de faisceaux en degrés supérieurs à N sont nuls, suffit pour une telle extension.

Voici comment on procède lorsque une telle condition de finitude est présente. Soit :

$$\cdots\xrightarrow{d_{m-2}}\mathcal{F}^{m-1}\xrightarrow{d_{m-1}}\mathcal{F}^{m}\xrightarrow{d_{m}}\mathcal{F}^{m+1}\xrightarrow{d_{m+1}}\mathcal{F}^{m+2}\xrightarrow{d_{m+2}}\cdots\,,$$

un complexe **acyclique** de faisceaux ***flasques***. Pour chaque $m\in\mathbb{Z}$ et tout $r\in\mathbb{N}$, on a les suites exactes de faisceaux :

$$\mathbf{0}\to\underline{\ker}(d_{m-r})\hookrightarrow\mathcal{F}^{m-r}\xrightarrow{d_{m-r}}\mathcal{F}^{m-r+1}\cdots\cdots\xrightarrow{d_{m-2}}\mathcal{F}^{m-1}\xrightarrow{d_{m-1}}\mathcal{F}^{m}\xrightarrow{d_{m}}\cdots\,,$$

(c'est une résolution flasque du faisceau $\underline{\ker}(d_{m-r})$) qui donnent, d'après le théorème 13.3.6-1, les égalités :

$$h^m(\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{F}^*))\equiv H^r(\boldsymbol{X};\underline{\ker}(d_{m-r}))\,,$$

pour tout $r\in\mathbb{N}$. En particulier, pour peu que l'on prenne $r>N$, on aura $h^m(\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{F}^*))=0$, et comme ceci est indépendant de $m\in\mathbb{Z}$, le complexe de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\cdots\xrightarrow{\Gamma(\boldsymbol{X};d_{m-2})}\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{F}^{m-1})\xrightarrow{\Gamma(\boldsymbol{X};d_{m-1})}\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{F}^{m})\xrightarrow{\Gamma(\boldsymbol{X};d_{m})}\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{F}^{m+1})\xrightarrow{\Gamma(\boldsymbol{X};d_{m+1})}\cdots\,,$$

est **exact**.

Nous voyons ainsi que la généralisation de la proposition 13.3.3-3 au cas des complexes de faisceaux flasques illimités est également vraie moyennant l'hypothèse de finitude de la dimension cohomologique des ouverts de $\boldsymbol{X}$. Ce résultat suffit alors pour démontrer le corollaires 14.4-2 et 14.4-6 sur la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}))$; mais auparavant démontrons le résultat suivant d'algèbre homologique.

14.4-7.1. Proposition : *Soit un morphisme de complexes de $\boldsymbol{A}$-modules*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \boldsymbol{C}^{1,m-1} & \longrightarrow & \boldsymbol{C}^{1,m} & \longrightarrow & \boldsymbol{C}^{1,m+1} & \longrightarrow & \boldsymbol{C}^{1,m+2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \nu_{m-1}} & & \uparrow{\scriptstyle \nu_{m}} & & \uparrow{\scriptstyle \nu_{m+1}} & & \uparrow{\scriptstyle \nu_{m+2}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & \boldsymbol{C}^{0,m-1} & \longrightarrow & \boldsymbol{C}^{0,m} & \longrightarrow & \boldsymbol{C}^{0,m+1} & \longrightarrow & \boldsymbol{C}^{0,m+2} & \longrightarrow & \cdots\,,
\end{array}\qquad(*)$$

Le morphisme ν_* est un ***quasi-isomorphisme****, si et seulement si, la cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe obtenu à partir du diagramme $(*)$ en le complétant par des termes nuls, est nulle.*

Démonstration : En filtrant le bicomplexe en question par les lignes (filtration régulière), *i.e.* en posant :

$$C_p^*:=\bigoplus\nolimits_{k\geqslant p}C^{k,*}\,,$$

on voit que ν_* est un **quasi-isomorphisme**, si et seulement si, les termes de la suite spectrale associée vérifient :

$$I\!E_2^{p,q}=\mathbf{0}\,,\qquad\text{pour tous } p,q\in\mathbb{Z}\,.$$

D'autre part, comme le bicomplexe en question ne possède que deux lignes *a priori* non triviales, on a :

$$d_r=0\,,\qquad\text{pour tout } r\geqslant 2,$$

de sorte que $I\!E_2^{p,q}=I\!E_\infty^{p,q}$, pour tous $p,q\in\mathbb{Z}$, et comme d'autre part la cohomologie du complexe en question est nulle, si et seulement si, $I\!E_\infty^{p,q}=\mathbf{0}$, pour tous $p,q\in\mathbb{Z}$; le résultat en découle. ∎

14.4-7.2. Corollaire 1 : *Soit U une partie ouverte de l'espace topologique $\boldsymbol{X}$, supposée de dimension cohomologique finie.*

*Soit $\varphi_* : (\mathcal{G}_1^*, d_{1,*}) \to (\mathcal{G}_2^*, d_{2,*})$ un **quasi-isomorphisme** de complexes de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules. Les morphismes induits en hyper-cohomologie :*

$$\mathbb{H}^r(U;\varphi) : \mathbb{H}^r(U;(\mathcal{G}_1^*, d_{1,*})) \longrightarrow \mathbb{H}^r(U;(\mathcal{G}_2^*, d_{2,*}))\,,$$

*sont des **isomorphismes**, pour tout $r \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration : S'agissant d'un résultat non utilisé dans la suite de ce cours nous allons nous limiter à en esquisser la démonstration.

Le morphisme $\mathcal{C}^\bullet(\varphi_*)$ entre les résolutions flasques canoniques $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_1^*)$ et $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_2^*)$ induit également un quasi-isomorphisme entre les complexes simples associés aux bicomplexes des résolutions puisque ces complexes simples sont quasi-isomorphes aux complexes qu'ils résolvent est que la relation de quasi-isomorphie est transitive. En particulier, ce quasi-isomorphisme entre les deux complexes simples de faisceaux flasques s'intègre dans un bicomplexe comme nous l'avons fait dans la proposition 14.4-7.1 dont le complexe simple associé sera, d'après cette même proposition 14.4-7.1 et en raisonnant si besoin en termes de germes, un complexe acyclique de faisceaux flasques. L'application du foncteur $\Gamma(U;_)$ à ce dernier complexe, donne un complexe acyclique de $\boldsymbol{A}$-modules d'après notre remarque préliminaire ; mais alors en appliquant à nouveau la proposition 14.4-7.1, il s'ensuit bien que les morphismes $\mathbb{H}^r(U;\varphi)$ sont des quasi-isomorphismes, ce qui termine la démonstration. ∎

14.4-7.3. Corollaire 2 : *Soit U une partie ouverte de $\boldsymbol{X}$. Soit $\varepsilon_* : (\mathcal{G}^*, d_*) \to (\mathcal{R}^*, d_*)$ une résolution $\Gamma(U;_)$-acyclique de $(\mathcal{G}^*, d_*)$ dans la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}))$. Les groupes d'hyper-cohomologie de $(\mathcal{G}^*, d_*)$ sont alors canoniquement isomorphes aux groupes $h^q(\Gamma(U;\mathcal{R}^*))$.*

Démonstration : La preuve suit de près celle du corollaire 14.4-6. ∎

14.4-7.4. Remarque : Signalons pour terminer que les variétés différentiables admettant des partitions de l'unité et les variétés algébriques sont de dimension cohomologique finie.

———————×———————

§15. Cohomologie de Čech de faisceaux

Comme dans les chapitres précédents, on désignera par $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif avec identité multiplicative, et par $\boldsymbol{X}$ un espace topologique arbitraire, *i.e.* un ensemble muni d'une topologie.

15.1 Compléments sur les faisceaux flasques et les foncteurs $\mathcal{C}^p$ de Godement

Les propositions de cette section relèvent pour l'essentiel d'une simple vérification que nous laissons aux soins du lecteur.

15.1.1 Foncteurs "image direct" et "image inverse" pour un plongement ouvert. Pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, notons $\jmath_U : U \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ l'inclusion canonique ; c'est un plongement ouvert

(réciproquement, tout plongement ouvert est de cette forme là). On définit alors les foncteurs $\jmath_{U;*}$: "image directe de faisceaux" et $\jmath_U^{-1}$ "image inverse de faisceaux" :

$$\jmath_{U;*} : \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(U) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) \quad \text{et} \quad \jmath_U^{-1} : \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(U)\,.$$

Foncteur "image directe" pour un plongement ouvert
Pour $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(U))$, on pose pour chaque ouvert $V \subseteq \boldsymbol{X}$:

$$\big(\jmath_{U;*}(\mathcal{F})\big)(V) := \mathcal{F}(V \cap U)\,.$$

Puis, lorsque l'on a deux ouverts $W \subseteq V \subseteq \boldsymbol{X}$, on définit le morphisme de restriction :

$$\rho_W^V : \big(\jmath_{U;*}(\mathcal{F})\big)(V) \longrightarrow \big(\jmath_{U;*}(\mathcal{F})\big)(W)\,,$$

comme étant le morphisme $\rho(\mathcal{F})_{W\cap U}^{V\cap U}$. Enfin, si $\varphi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ est un morphisme de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules sur U, on pose :

$$\jmath_{U;*}(\varphi) : \jmath_{U;*}(\mathcal{F}_1) \longrightarrow \jmath_{U;*}(\mathcal{F}_2)\,,$$

défini sur un ouvert $V \subseteq \boldsymbol{X}$ par l'égalité $\Gamma\big(V; \jmath_{U,*}(\varphi)\big) = \varphi(V \cap U)$.

15.1.1-1. Proposition : *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules sur une partie ouverte $U \subseteq \boldsymbol{X}$.*

a) *Le préfaisceau $\jmath_{U;*}(\mathcal{F})$ est un* ***faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$.***

b) *La correspondance définie dans les préliminaires de ce paragraphe :*

$$\boxed{\jmath_{U,*} : \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(U) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})}$$

est ***fonctorielle additive et exacte à gauche.***

c) *Si $\mathcal{F}$ est flasque, le faisceau $\jmath_{U;*}(\mathcal{F})$ l'est également.*

Foncteur "image inverse" pour un plongement ouvert
Pour $\mathcal{G} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}))$, on pose pour chaque ouvert $V \subseteq U$:

$$\big(\jmath_U^{-1}(\mathcal{G})\big)(V) := \mathcal{G}(V)\,.$$

Les morphismes de restriction sur $\jmath_U^{-1}(\mathcal{G})$ sont alors ceux de $\mathcal{G}$ pour les ouverts contenus dans U. De manière analogue, si $\varphi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ est un morphisme de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$, on définit $\jmath_U^{-1}(\varphi)$ par l'égalité : $\Gamma(V; \jmath_U^{-1}(\varphi)) = \varphi(V)$, pour tout $V \subseteq U$.

15.1.1-2. Proposition : *Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$. Pour toute partie ouverte $U \subseteq \boldsymbol{X}$:*

a) *Le préfaisceau $\jmath_U^{-1}(\mathcal{G})$ est* ***un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules sur*** *U.*

b) *La correspondance définie dans le préliminaire de ce paragraphe :*

$$\boxed{\jmath_U^{-1} : \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(U)}$$

est ***fonctorielle additive et exacte.*** ([52])

[52] Le faisceaux $\jmath_U^{-1}(\mathcal{G})$ est couramment appelé «la restriction de $\mathcal{G}$ à U» et on le note également $\mathcal{G}|_U$. De même, le foncteur $\jmath_U^{-1}$ est appelé «le foncteur de restriction à l'ouvert U».

c) *Si $\mathcal{G}$ est flasque, le faisceau $\jmath_U^{-1}(\mathcal{G})$ l'est également.*

d) *Les foncteurs $\jmath_U^{-1}$ commutent aux foncteurs $\mathcal{C}^p$ de Godement ;* i.e. *pour tout $\mathcal{G} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}))$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme naturel $\jmath_U^{-1}\big(\mathcal{C}^p(\mathcal{G})\big) \equiv \mathcal{C}^p\big(\jmath_U^{-1}(\mathcal{G})\big)$.*

15.1.1-3. Proposition : *Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$. Pour toute partie ouverte $U \subseteq \boldsymbol{X}$:*

a) *Le foncteur composé $\jmath_{U,*} \circ \jmath_U^{-1} : \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ est additif et exact à gauche.*

b) *Pour toute partie ouverte $V \subseteq \boldsymbol{X}$, on a $(\jmath_{U,*} \circ \jmath_U^{-1})(\mathcal{G})(V) = \mathcal{G}(V \cap U)$.*

c) *Si $\mathcal{G}$ est flasque, le faisceau $(\jmath_{U,*} \circ \jmath_U^{-1})(\mathcal{G})$ l'est également.*

Produit de faisceaux flasques et foncteurs $\mathcal{C}^p$ de Godement

15.1.1-4. Proposition : *Soit $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ une famille de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$.*

a) *Si chaque $\mathcal{F}_\alpha$ est un faisceau flasque, le faisceau produit direct $\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha$ l'est également.*

b) *Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme canonique naturel entre $\mathcal{C}^p\big(\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha\big)$ et $\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \big(\mathcal{C}^p(\mathcal{F}_\alpha)\big)$*

Indication : Reportez-vous à l'exercice 13.2.1-6. ∎

15.2 Faisceau de p-cochaînes de Čech d'un faisceau de A-modules relatives à un recouvrement

Soit $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de l'espace topologique $\boldsymbol{X}$. Pour tout ouvert $V \subseteq \boldsymbol{X}$, on notera $\mathcal{U} \Cap V = \{U_\alpha \cap V\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ le recouvrement ouvert de V «restriction de $\mathcal{U}$ à V ».

Pour chaque **pré**faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules $\mathcal{F}$, considérons la correspondance qui associe à l'ouvert $V \subseteq \boldsymbol{X}$ le $\boldsymbol{A}$-module des p-cochaînes de Čech de V à valeurs dans $\mathcal{F}|_V$ et relatives au recouvrement $\mathcal{U} \Cap V$, noté $\check{\mathrm{C}}^p(\mathcal{U} \Cap V; \mathcal{F}|_V)$; il s'agit du $\boldsymbol{A}$-module des "applications" ω de $\mathfrak{A}^{p+1}$ à valeurs dans les sections de $\mathcal{F}$ vérifiant :

$$\omega(\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_p}) \in \mathcal{F}\big(U_{\alpha_{i_0}\cdots\alpha_{i_p}} \cap V\big)$$

où la notation $U_{\alpha_{i_0}\cdots\alpha_{i_p}}$ désigne comme d'habitude l'intersection $U_{\alpha_{i_0}} \cap \cdots \cap U_{\alpha_{i_p}}$.

Lorsque $W \subseteq V$ sont deux ouverts de $\boldsymbol{X}$, on pose :

$$\begin{aligned} \rho_W^V : \check{\mathrm{C}}^p(\mathcal{U} \Cap V; \mathcal{F}|_V) &\longrightarrow \check{\mathrm{C}}^p(\mathcal{U} \Cap W; \mathcal{F}|_W) \\ \omega &\longmapsto \Big((\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_p}) \mapsto \omega(\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_p})|_{U_{\alpha_{i_0}\cdots\alpha_{i_p}} \cap W}\Big) \end{aligned}$$

La donnée de la famille des $\boldsymbol{A}$-modules $\check{\mathrm{C}}^p(\mathcal{U} \Cap V; \mathcal{F}|_V)$ et de la famille des morphismes (de $\boldsymbol{A}$-modules) ρ_W^V constitue alors un préfaisceau de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$ que nous noterons $\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.

15.2-1. Proposition : *Soit $\mathcal{F}$ est un **faisceau** de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$.*

a) *Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, le préfaisceau $\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ **est un faisceau**. En particulier, pour chaque ouvert*

$U \subseteq \boldsymbol{X}$, on a :

$$\boxed{\Gamma\big(U;\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U};\mathcal{F})\big) = \check{\mathrm{C}}^p\left(\mathcal{U} \Cap U;\mathcal{F}|_U\right)}$$

b) *Lorsque $\mathcal{F}$ est un faisceau* ***flasque****, le faisceau $\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U};\mathcal{F})$ est* ***flasque****, quel que soit $p \in \mathbb{N}$.*

Démonstration :

a) Considérons le foncteur composé $\jmath_{U,*} \circ \jmath_U^{-1} : \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$. C'est un foncteur additif et exact à gauche, et, pour tout $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}))$ et tout ouvert $V \subseteq \boldsymbol{X}$, on a :

$$\Gamma\big(V;(\jmath_{U,*} \circ \jmath_U^{-1})(\mathcal{F})\big) = \mathcal{F}(V \cap U)\,.$$

En particulier, lorsque $U = U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$, on aura :

$$\mathcal{F}(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \cap V) = \Gamma\big(V;(\jmath_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p},*} \circ \jmath^{-1}_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}})(\mathcal{F})\big)\,,$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}\check{\mathrm{C}}^p(\mathcal{U} \Cap V;\mathcal{F}|_V) &= \prod_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p} \Gamma\big(V;(\jmath_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p},*} \circ \jmath^{-1}_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}})(\mathcal{F})\big)\\ &= \Gamma\Big(V;\prod_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p} (\jmath_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p},*} \circ \jmath^{-1}_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}})(\mathcal{F})\Big)\end{aligned}$$

où la deuxième égalité fait intervenir la notion de produit direct de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules (*cf.* exercice 13.2.1-6). On en déduit l'égalité :

$$\boxed{\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U};\mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p} (\jmath_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p},*} \circ \jmath^{-1}_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}})(\mathcal{F})}$$

qui montre bien que le préfaisceaux des cochaînes de Čech à valeurs dans le faisceau $\mathcal{F}$ et relatives au recouvrement $\mathcal{U}$ est un produit direct, dans la catégorie des préfaisceaux, d'une famille de faisceaux, c'est donc bien un faisceau (*cf.* exercice 13.2.1-6) .

b) Lorsque $\mathcal{F}$ est flasque, chaque faisceaux $(\jmath_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p},*} \circ \jmath^{-1}_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}})(\mathcal{F})$ est flasque et donc leur produit l'est également d'après la proposition 15.1.1-4. ∎

15.3 Complexe de faisceaux des cochaînes de Čech à valeurs dans un faisceau et relatives à un recouvrement ouvert

Soient $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$ et $\mathcal{F}$ un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$. La section précédente a introduit, pour chaque $p \in \mathbb{N}$, le faisceau $\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ dont les sections sur un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ constituent le $\boldsymbol{A}$-module des p-cochaînes de Čech sur U, à valeurs dans le faisceaux $\mathcal{F}|_U$ et relatives au recouvrement $\mathcal{U} \Cap U$; ce que nous avons noté $\check{\mathrm{C}}^p(\mathcal{U} \Cap U;\mathcal{F}|_U)$.

Considérons maintenant, pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, le complexe de Čech $\big(\check{\mathrm{C}}^*(\mathcal{U}\Cap U;\mathcal{F}|_U),\delta(U)_*\big)$. Une vérification simple montre que, pour chaque $r \in \mathbb{N}$, la famille (indexée par les ouverts de $\boldsymbol{X}$) des différentielles $\delta(U)_r : \check{\mathrm{C}}^r(\mathcal{U} \Cap U;\mathcal{F}|_U),\delta(U)_* \to \check{\mathrm{C}}^{r+1}(\mathcal{U} \Cap U;\mathcal{F}|_U),\delta(U)_*$ définit un morphisme de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\delta(\mathcal{U};\mathcal{F})_r : \check{\mathcal{C}}^r(\mathcal{U};\mathcal{F}) \longrightarrow \check{\mathcal{C}}^{r+1}(\mathcal{U};\mathcal{F})\,.$$

On a clairement $\delta_{r+1} \circ \delta_r = 0$, d'où «le faisceau différentiel gradué des cochaînes de Čech à valeurs dans $\mathcal{F}$ et relatives au recouvrement $\mathcal{U}$», noté $\big(\check{\mathcal{C}}^*(\mathcal{U};\mathcal{F}),\delta(\mathcal{U};\mathcal{F})_*\big)$.

On définit de manière analogue le morphisme d'augmentation $\varepsilon(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \to \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U};\mathcal{F})$ qui est un morphisme de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules trivialement injectif.

La proposition suivante est fondamentale.

15.3-1. Proposition : *Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$ et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{X}$, le complexe des faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules :*

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{F})} \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U};\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta(\mathcal{U};\mathcal{F})_0} \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U};\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta(\mathcal{U};\mathcal{F})_1} \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U};\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta(\mathcal{U};\mathcal{F})_2} \cdots$$

est ***exact****.*

Démonstration : Nous allons montrer l'exactitude au niveau des germes en chaque point $x \in \boldsymbol{X}$.

Soit $x \in \boldsymbol{X}$ et posons $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$. Pour chaque germe ϖ de section de $\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U};\mathcal{F})$ en x vérifiant $\delta_{p(x)}(\varpi) = 0$, notons ω un représentant de ϖ défini sur un voisinage ouvert V de x que l'on peut supposer suffisamment petit pour que $\delta(V)_p(\omega) = 0$. On a donc, pour tout $(\alpha_0,\dots,\alpha_{p+1}) \in \mathfrak{A}^{p+2}$:

$$\delta(V)_p(\omega)(\alpha_0,\dots,\alpha_{p+1}) = \sum_{j=0,\dots,p+1} (-1)^j\, \omega(\alpha_0,\dots,\widehat{\alpha_j},\dots,\alpha_{p+1})|_{U_{\alpha_0\dots\alpha_{p+1}}\cap V} = 0\,,$$

en particulier :

$$\omega(\alpha_1,\dots,\alpha_{p+1})|_{U_{\alpha_0\dots\alpha_{p+1}}\cap V} = -\sum_{j=1,\dots,p+1} (-1)^j\, \omega(\alpha_0,\dots,\widehat{\alpha_j},\dots,\alpha_{p+1})|_{U_{\alpha_0\dots\alpha_{p+1}}\cap V}\,, \qquad (*)$$

pour tout $(\alpha_0,\dots,\alpha_{p+1}) \in \mathfrak{A}^{p+2}$.

Or, comme $\omega \in \check{\mathrm{C}}^p(\mathcal{U} \Cap V, \mathcal{F}|_V)$ et que V est un voisinage arbitrairement petit de $x \in \boldsymbol{X}$, nous pouvons choisir α_0 tel que l'on ait $x \in V \subseteq U_{\alpha_0}$ ($\mathcal{U} \Cap V$ est un *recouvrement* de V). Dans un tel cas, on aura :

$$U_{\alpha_0,\alpha_1\dots\alpha_{p+1}} \cap V = U_{\alpha_1\dots\alpha_{p+1}} \cap V\,. \qquad (\ddagger)$$

Considérons alors la $(p-1)$-cochaîne $\nu \in \check{\mathrm{C}}^{p-1}(\mathcal{U} \Cap V; \mathcal{F}|_V)$ définie par :

$$\nu(\alpha_1,\dots,\alpha_p) := \omega(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_p)\,,$$

où l'on remarquera que la définition a un sens puisque le domaine de définition de $\omega(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ est, d'après ($\ddagger$), le domaine naturel sur lequel la $(p-1)$-cochaîne $\nu(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ doit être définie.

On a alors :

$$\delta(V)_{p-1}(\nu)(\alpha_1,\dots,\alpha_{p+1}) = \sum_{j=1,\dots,p+1} (-1)^j\, \omega(\alpha_0,\dots,\widehat{\alpha_j},\dots,\alpha_{p+1})|_{U_{\alpha_1\dots\alpha_{p+1}}\cap V}\,,$$

ce qui, d'après ($\ddagger$) à nouveau, montre bien que ω est un cobord.

On laisse aux soins du lecteur d'adapter la démonstration précédente pour vérifier l'exactitude en degré 0. ∎

15.3-2. Remarque et définition : La proposition précédente montre que pour tout faisceaux $\mathcal{F}$ de $\boldsymbol{A}$-modules, le complexe des faisceaux de cochaînes de Čech $(\check{\mathcal{C}}^*(\mathcal{U};\mathcal{F}))$ muni de l'augmentation $\varepsilon(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \to (\check{\mathcal{C}}^*(\mathcal{U};\mathcal{F}), d(\mathcal{U};\mathcal{F})_*)$, est une ***résolution*** du faisceau $\mathcal{F}$, et ceci ***quel que soit le recouvrement $\mathcal{U}$ considéré***. On appelle parfois cette résolution «la résolution de $\mathcal{F}$ par le recouvrement (ouvert) $\mathcal{U}$».

15.3.1 Cohomologie de Čech de faisceaux relative à un recouvrement et cohomologie de faisceaux. Dans la section 13.3.6 du chapitre précédent nous avons montré l'existence d'un

morphisme canonique, noté Ξ, entre la cohomologie des sections d'une résolution d'un faisceau $\mathcal{F}$ de $\boldsymbol{A}$-modules, et sa cohomologie de faisceaux. Le théorème 13.3.6-1 donnait une condition garantissant la bijectivité de Ξ (l'acyclicité des termes de la résolution). Dans le cas de la résolution par un recouvrement, le morphisme Ξ relie la cohomologie de Čech de $\boldsymbol{X}$ a valeurs dans $\mathcal{F}$ relative au recouvrement considéré, à la cohomologie de faisceaux sur $\boldsymbol{X}$ du faisceau $\mathcal{F}$; le théorème suivant donne une condition permettant de garantir la bijectivité de Ξ dans ce cas.

15.3.1-1. Théorème [Leray] : *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$. Soit $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$ et $\varepsilon(\mathcal{F}):\mathcal{F}\to\big(\check{\mathcal{C}}^*(\mathcal{U};\mathcal{F}),d(\mathcal{U};\mathcal{F})_*\big)$ la résolution de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{U}$. Le morphisme canonique reliant la cohomologie de Čech de $\mathcal{F}$ à sa cohomologie de faisceaux :*

$$\Xi_*:\check{\mathrm{H}}^*(\mathcal{U};\mathcal{F})\longrightarrow H^*(\boldsymbol{X};\mathcal{F})\,,$$

*est un **isomorphisme** lorsque le faisceau $\mathcal{F}$ est $\Gamma(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p},_)$-acyclique, pour tout $p\in\mathbb{N}$ et tout $(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)\in\mathfrak{A}^{p+1}$.*

Démonstration : Considérons la résolution flasque canonique de Godement de $\mathcal{F}$:

$$\mathbf{0}\to\mathcal{F}\xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{F})}\mathcal{C}^0(\mathcal{F})\xrightarrow{d_0(\mathcal{F})}\mathcal{C}^1(\mathcal{F})\xrightarrow{d_1(\mathcal{F})}\mathcal{C}^2(\mathcal{F})\xrightarrow{d_2(\mathcal{F})}\cdots\,,$$

et appliquons le foncteur résolution par $\mathcal{U}$ à chacun de ses termes. On obtient alors le bicomplexe de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-modules de colonnes exactes (d'après le théorème 15.3-1) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0}\to & \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U};\mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U};\mathcal{C}^0(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U};\mathcal{C}^1(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U};\mathcal{C}^2(\mathcal{F})) & \to\cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0}\to & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U};\mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U};\mathcal{C}^0(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U};\mathcal{C}^1(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U};\mathcal{C}^2(\mathcal{F})) & \to\cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0}\to & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U};\mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U};\mathcal{C}^0(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U};\mathcal{C}^1(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U};\mathcal{C}^2(\mathcal{F})) & \to\cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0}\to & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^2(\mathcal{F}) & \to\cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Comme les colonnes au-dessus des faisceaux flasques de Godement sont des résolutions ***flasques*** des faisceaux $\mathcal{C}^p(\mathcal{F})$, l'application du foncteur des sections globales : $\Gamma(\boldsymbol{X};_)$ fournira des colonnes exactes. Il s'ensuit que la cohomologie du bicomplexe $\Gamma(\boldsymbol{X};\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{C}^*(\mathcal{F})))$ est ***canoniquement isomorphe*** à la cohomologie de faisceaux de $\mathcal{F}$.

Considérons maintenant chaque ligne $\mathbf{0}\to\Gamma(\boldsymbol{X};\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U};\mathcal{F}))\to\Gamma(\boldsymbol{X};\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U};\mathcal{C}^*(\mathcal{F})))$. On a, par définition :

$$\Gamma\big(\boldsymbol{X};\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U};\mathcal{C}^*(\mathcal{F}))\big)=\prod_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p}\Gamma\big(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p};\mathcal{C}^*(\mathcal{F})\big)$$

et la cohomologie de ces lignes est précisément le produit des cohomologies de faisceaux : $H^*(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p};\mathcal{F})$. On voit donc bien que si $\mathcal{F}$ est $\Gamma(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p},_)$-acyclique, pour tout $p\in\mathbb{N}$ et tout $(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)\in\mathfrak{A}^{p+1}$, la cohomologie des sections globales de la première colonne, *i.e.* la cohomologie de Čech de $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\mathcal{F}$ et relative à $\mathcal{U}$, sera canoniquement isomorphe à la cohomologie du bicomplexe $\Gamma\big(\boldsymbol{X};\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{C}^*(\mathcal{F}))\big)$, ce qui termine la démonstration du théorème. ∎

15.3.1-2. Définition : Un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{X}$ est dit «acyclique» pour le faisceau $\mathcal{F}$ lorsque les conditions d'acyclicité énoncées par le théorème précédent sont satisfaites.

15.3.2 Cohomologie de Čech de faisceaux et cohomologie de faisceaux.

Préfaisceau de cohomologie de faisceaux associé à un faisceau

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules. Nous avons défini sa cohomologie de faisceaux au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ comme la cohomologie du complexe de $\boldsymbol{A}$-modules : $\Gamma\big(U;\big(\mathcal{C}^*(\mathcal{F}),d(\mathcal{F})_*\big)\big)$, il en découle pour toute paire emboîtée d'ouverts $V \subseteq U$, un morphisme de complexes «de restriction» $\rho_V^U : \Gamma\big(U;\big(\mathcal{C}^*(\mathcal{F}),d(\mathcal{F})_*\big)\big) \to \Gamma\big(V;\big(\mathcal{C}^*(\mathcal{F}),d(\mathcal{F})_*\big)\big)$ d'où un morphisme de restriction de cohomologie de faisceaux :

$$H^*(\rho_V^U) : H^*(U;\mathcal{F}) \to H^*(V;\mathcal{F})\,.$$

Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, la correspondance $U \rightsquigarrow H^p(U;\mathcal{F})$, jointe aux morphismes $H^p(\rho_V^U)$ définit un **pré**faisceau sur $\boldsymbol{X}$ que nous noterons $\mathcal{H}^p(\mathcal{F})$.

Les considérations qui précèdent s'appliquent également à l'augmentation $\varepsilon : \mathcal{F} \to \big(\mathcal{C}^*(\mathcal{F}),d(\mathcal{F})\big)$ d'où un morphisme canonique de préfaisceaux $\mathcal{F} \to \mathcal{H}^0(\mathcal{F})$ qui est un ***isomorphisme*** en raison de l'exactitude à gauche des foncteurs de sections au-dessus des ouverts.

15.3.2-1. Proposition : *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules.*

a) *Le préfaisceau $\mathcal{H}^0(\mathcal{F})$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{F}$.*

b) *Pour chaque entier naturel positif p, le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{H}^p(\mathcal{F})$ est le faisceau nul.*

Démonstration : L'assertion (a) est claire et (*b*) résulte de montrer que les germes des préfaisceaux $\mathcal{H}^q(\mathcal{F})$ sont nuls, ce qui est équivalent à l'exactitude, dans la catégorie de faisceaux, de la résolution canonique de Godement. ∎

Reprenons maintenant les arguments de la démonstration du théorème 15.3.1-1. Rappelons que $\mathcal{F}$ désigne un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules et que $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$. Dans cette démonstration, nous avons remarqué l'existence d'un isomorphisme canonique entre la cohomologie du bicomplexe $\Gamma(\boldsymbol{X};\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{C}^*(\mathcal{F})))$ et la cohomologie de faisceaux de $\mathcal{F}$. Si nous filtrons le bicomplexe $\Gamma(\boldsymbol{X};\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{C}^*(\mathcal{F})))$ par ses lignes, on obtient une suite spectrale dont les termes $I\!E_1^{*,q}$ constituent précisément le complexe ce cochaînes de Čech à valeurs dans le préfaisceau $\mathcal{H}^q(\mathcal{F})$ et relatives au recouvrement $\mathcal{U}$, on a par conséquent :

$$I\!E_2^{p,q} \equiv \check{\mathrm{H}}^p\left(\mathcal{U};\mathcal{H}^q(\mathcal{F})\right),$$

et comme le bicomplexe est borné à gauche, cette suite spectrale converge vers la cohomologie du bicomplexe, donc vers la cohomologie de faisceaux de $\mathcal{F}$.

On vérifie également que si $\mathcal{U}'$ est un raffinement de $\mathcal{U}$, le morphisme de raffinement entre les différentes colonnes des bicomplexes $\Gamma(\boldsymbol{X};\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{C}^*(\mathcal{F})))$ et $\Gamma(\boldsymbol{X};\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}';\mathcal{C}^*(\mathcal{F})))$ est un morphisme de ***bicomplexes*** et induit un isomorphisme (canonique) entre les termes $I\!E_2^{p,q}$ des suites spectrales associées. En particulier, le passage à la limite inductive (suivant les recouvrements) des morphismes au niveau des termes $I\!E_2$ donne lieu à une suite spectrale :

$$\boxed{I\!E_2^{p,q} = \check{\mathrm{H}}^p\left(\boldsymbol{X};\mathcal{H}^q(\mathcal{F})\right) \Longrightarrow H^{p+q}(\boldsymbol{X};\mathcal{F})}$$

le théorème suivant se trouve ainsi démontré.

15.3.2-2. Théorème [Leray] : *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$.*

a) *Pour tout recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{X}$, il existe une suite spectrale convergeant vers la cohomologie de faisceaux au-dessus de $\boldsymbol{X}$ de $\mathcal{F}$:*

$$\mathbb{E}_2^{p,q} \equiv \check{\mathrm{H}}^p\left(\mathcal{U};\mathfrak{H}^q(\mathcal{F})\right) \Longrightarrow H^{p+q}(\boldsymbol{X};\mathcal{F})\,.$$

b) *Il existe une suite spectrale convergeant vers la cohomologie de faisceaux au-dessus de $\boldsymbol{X}$ de $\mathcal{F}$*

$$\mathbb{E}_2^{p,q} \equiv \check{\mathrm{H}}^p\left(\boldsymbol{X};\mathfrak{H}^q(\mathcal{F})\right) \Longrightarrow H^{p+q}(\boldsymbol{X};\mathcal{F})\,.$$

15.3.2-3. Corollaire : *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique séparé et paracompact. La cohomologie de Čech d'un faisceau $\mathcal{F}$ de $\boldsymbol{A}$-modules est canoniquement isomorphe à la cohomologie de faisceaux de $\mathcal{F}$ au-dessus de $\boldsymbol{X}$.*

Démonstration : Le théorème d'annulation de la cohomologie de Čech pour les préfaisceaux localement nuls (*cf.* 12.8-1) appliqué aux préfaisceaux $\mathfrak{H}^p(\mathcal{F})$, pour $p > 0$ (*cf.* 15.3.2-1) montre que les termes $\mathbb{E}_2^{p,q}$ du théorème 15.3.2-2-(b) sont nuls pour tout $q > 0$. Il s'ensuit un isomorphisme (degré par degré) entre $\check{\mathrm{H}}^p\left(\boldsymbol{X};\mathfrak{H}^0(\mathcal{F})\right)$ et $H^p(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$ et comme $\mathcal{F} \equiv \mathfrak{H}^0(\mathcal{F})$ (d'après 15.3.2-1), le corollaire résulte. ∎

15.3.2-4. Corollaire : *Sur une variété différentiable séparée et paracompacte, la cohomologie de Čech et la cohomologie de faisceaux sont canoniquement isomorphes.*

15.3.2-5. Remarque : Dans le cas d'une variété différentiable $\boldsymbol{M}$ la cohomologie de faisceaux du faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$ sur un domaine de carte est concentrée en degré nul. Ceci signifie que tout bon recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{M}$ est acyclique pour le faisceau $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}$ et, suite au théorème 15.3.1-1, que la cohomologie de Čech de $\boldsymbol{M}$ à valeurs dans $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$ et relative à $\mathcal{U}$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie de faisceaux sur $\boldsymbol{M}$ de $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$ et ceci **indépendamment du fait que $\boldsymbol{M}$ possède ou non des partitions de l'unité**. Comme les bons recouvrements constituent une famille cofinale dans la famille de tous les recouvrements tautologiques de $\boldsymbol{M}$ (*cf.* section 12.3), on a :

$$\boxed{\check{\mathrm{H}}^*(\boldsymbol{M};\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}) \equiv H^*(\boldsymbol{M};\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}})}$$

Lorsque $\boldsymbol{M}$ possède des partitions de l'unité, l'isomorphisme ci-dessus est plus généralement vrai pour n'importe quel faisceau de modules et pas uniquement pour $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$. D'autre part, le théorème 13.3.7-5 montre que la cohomologie du complexe des formes différentielles (globales) sur $\boldsymbol{M}$ calcule la cohomologie de faisceaux de $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$. Il en découle, dans ce cas, un isomorphisme canonique entre les cohomologies de Čech du faisceau $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}$, et la cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{M}$ (pour sa définition naïve).

Dans le cas où $\boldsymbol{M}$ ne possède pas de partitions de l'unité, seule l'hypercohomologie du complexe des faisceaux des formes différentielles sur $\boldsymbol{M}$ sera, *a priori*, isomorphe à la cohomologie de faisceaux de $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$ et donc à la cohomologie de Čech du faisceau $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$ relativement à un bon recouvrement de $\boldsymbol{M}$.

15.4 Cohomologie singulière d'une variété différentiable

Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, notons Δ_p l'enveloppe convexe des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$ munie de la topologie induite ; on l'appelle «le p-simplexe standard».

Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique et soit $\boldsymbol{A}$ un anneau. On notera $S_p(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$ le $\boldsymbol{A}$-module libre ayant comme base les «p-simplexes singuliers de $\boldsymbol{X}$», *i.e.* les applications continues $\sigma : \Delta_p \to \boldsymbol{X}$. On défini alors un morphisme «bord» $\delta(\boldsymbol{X})_p : S_p(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}) \to S_{p-1}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$, en posant, pour chaque p-simplexe singulier σ

$$\delta(\boldsymbol{X})_p(\sigma) = \sum_{k=0,\dots,p} (-1)^k \, \sigma \circ f_p^k \,,$$

où $f_{p-1}^k : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$ est l'application «face» que nous avons déjà définie dans 12.1.3, mais interprétée maintenant comme application continue entre simplexes standard. On a $\delta_{p-1} \circ \delta_p = 0$, d'où «le complexe $(S_\bullet(\boldsymbol{X}), \delta_\bullet)$ des chaînes singulières à coefficients dans $\boldsymbol{A}$». Le complexe dual $\big(S^\bullet(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}), d(\boldsymbol{X})_\bullet\big) := \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}\big((S_\bullet(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}), \delta(\boldsymbol{X})_\bullet); \boldsymbol{A}\big)$ est «le complexe de cochaînes singulières de $\boldsymbol{X}$ à coefficients dans $\boldsymbol{A}$». La cohomologie de ce dernier est «la cohomologie singulière de $\boldsymbol{X}$ à coefficients dans $\boldsymbol{A}$».

Lorsque l'on se donne deux parties ouvertes $V \subseteq U \subseteq \boldsymbol{X}$, tout p-simplexe singulier de V est également une application continue à valeurs dans U et définit donc un p-simplexe singulier de U. Nous avons donc un morphisme canonique (et injectif) $S_p(V;\boldsymbol{A}) \hookrightarrow S_p(U;\boldsymbol{A})$, pour chaque $p \in \mathbb{N}$. On vérifie aisément que le bord d'une chaîne singulière sur V est également le bord de la même chaîne vue dans U ; la famille de morphismes $S_p(V;\boldsymbol{A}) \hookrightarrow S_p(U;\boldsymbol{A})$, pour $p \in \mathbb{N}$, défini donc un morphisme de complexes $(S_*(V;\boldsymbol{A}), \delta(V)_*) \hookrightarrow (S_*(U;\boldsymbol{A}), \delta(U)_*)$. En dualisant on obtient un morphisme de complexes de cochaînes singulières dit «de restriction» $(S^*(U;\boldsymbol{A}), d(U)_*) \to (S^*(V;\boldsymbol{A}), d(V)_*)$. La correspondance :

$$(U \subseteq \boldsymbol{X}) \rightsquigarrow (S^*(U;\boldsymbol{A}), d(U)_*)$$

jointe aux morphismes de restriction, définit un préfaisceau de complexes de $\boldsymbol{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$, noté $(\underline{S}^*_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}}, \underline{d}_*)$.

Ceci étant, une 0-chaîne σ sur une partie ouverte U est une somme formelle de points de U avec des coefficients dans $\boldsymbol{A}$, *i.e.* $\sigma = \sum_{i=1}^{i=r} a_i \, x_i$, où $a_i \in \boldsymbol{A}$ et $x_i \in U$; on a : $S_0(U) = \bigoplus_{x\in U} \boldsymbol{A}$ et donc

$$S^0(U;\boldsymbol{A}) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}\Big(\bigoplus\nolimits_{x\in U} \boldsymbol{A}; \boldsymbol{A}\Big) \equiv \prod_{x\in U} \boldsymbol{A}\,; = \Gamma\big(U; \mathcal{C}^0(\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}})\big)$$

de sorte que le préfaisceau $\underline{S}^0_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}}$ est le faisceau flasque de Godement associé au faisceaux des fonctions localement constantes $\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$.

Une forme linéaire $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(S_0(U;\boldsymbol{A});\boldsymbol{A})$ est un 0-cocycle lorsque l'on a $\lambda(\delta_1(\sigma)) = 0$ pour toute 1-chaîne singulière. Or, come la forme linéaire λ est déterminée par ses valeurs sur la base des 0-simplexes singuliers $\{x\}_{x\in U}$, elle devra donc satisfaire à l'égalité :

$$\lambda(\delta_1(\sigma)) = \sum_{i=1,\dots,r} a_i \, \big[\lambda\big(\sigma_i(E_0)\big) - \big(\sigma_i(E_1)\big)\big],$$

où Σ désigne une 1-chaine singulière $\Sigma = \sum_{i=1}^{i=r} a_i \, \sigma_i$, et où E_0 et E_1 désignent les sommets de Δ_1. On vérifie alors que si deux points $x, y \in U$ se trouvent sur la même composante connexe par arcs de U et si l'on note $\gamma : \Delta_1 \to U$ un chemin reliant x à y, on aura $\delta_1(\gamma) = y - x$ et donc le cocycle λ est contraint de vérifier $\lambda(x) = \lambda(y)$. Un 0-cocycle sur U s'identifie donc à une fonction constante sur chaque composante connexe par arcs de U. Supposons, a partir de maintenant que $\boldsymbol{X}$ est ***localement connexe***. Les 0-cocycles sur un ouvert U s'identifient alors aux fonctions localement constantes ; on en déduit que le préfaisceau noyau du morphisme $d_0 : \underline{S}^0_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}} \to \underline{S}^1_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}}$ est le

faisceau $\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$. Le complexe des préfaisceaux sur $\boldsymbol{X}$ des cochaînes singulières à coefficients dans $\boldsymbol{A}$ se trouve ainsi muni d'une augmentation canonique :

$$\boxed{\mathbf{0} \to \underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}} \xrightarrow{\underline{\varepsilon}} \left(\underline{S}^*_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}}, \underline{d}_*\right)}$$

Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, notons $\underline{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}}$ le faisceau associé au préfaisceau $\underline{S}^p_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}}$. Le caractère fonctoriel de l'opération de faisceautisation appliquée aux considérations des paragraphes précédents, donne lieu au complexe **de faisceaux** $\left(\underline{S}^*_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}}, \underline{d}_*\right)$ et à l'augmentation :

$$\boxed{\mathbf{0} \to \underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}} \xrightarrow{\underline{\varepsilon}} \left(\underline{S}^*_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}}, \underline{d}_*\right)}$$

15.4-1. Proposition : *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique localement contractile (une variété topologique par exemple).*

a) *Le complexe de faisceaux $\left(\underline{S}^*_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}}, \underline{d}_*\right)$ muni de l'augmentation $\underline{\varepsilon}$ est une résolution du faisceau $\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$.*

b) *Lorsque $\boldsymbol{X}$ est une variété différentiable **admettant des partitions de l'unité**, chaque faisceau $\underline{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X};\mathbb{R}}$ est Γ-acyclique. En particulier, la cohomologie de faisceaux de $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe des sections globales de $\left(\underline{S}^*_{\boldsymbol{X};\mathbb{R}}, \underline{d}_*\right)$.*

Démonstration :

a) Se démontre comme le corollaire 13.2.1-5 en faisant une étude au niveau des germes. Comme les germes des faisceaux $\underline{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}}$ sont ceux des préfaisceaux $\underline{S}^p_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}}$, un germe de p-cocycle en un point $x \in \boldsymbol{X}$ est représenté par un p-cocycle de $S^p(U;\boldsymbol{A})$, où U désigne un voisinage ouvert de x. Comme $\boldsymbol{X}$ est supposé localement contractile, on peut prendre l'ouvert U contractile, la trivialité de la cohomologie singulière des espaces contractiles assure alors que le germe de cocycle en question est un germe de cobord.

b) D'après la proposition 13.3.8-1, il suffira de munir les faisceaux $\underline{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X};\mathbb{R}}$ d'une structure de $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}}$-module.

Le faisceau $\underline{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{0}}_{\boldsymbol{X};\mathbb{R}}$. Nous avons déjà remarqué que le faisceau $\underline{S}^0_{\boldsymbol{X};\mathbb{R}}$ est le faisceau flasque de Godement $\mathcal{C}^0(\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}})$. Les sections de ce faisceau au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ s'identifient aux applications de U à valeurs dans $\mathbb{R}$ (sans aucune condition de continuité). D'autre part, $\mathcal{C}^0(\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}})$ est un faisceau d'anneaux et l'inclusion $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}} \subseteq \underline{S}^0_{\boldsymbol{X};\mathbb{R}}$ est alors un morphisme de faisceaux d'anneaux. En particulier, $\underline{S}^0_{\boldsymbol{X};\mathbb{R}}$ est bien un $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}}$-module.

Les faisceaux $\underline{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X};\mathbb{R}}$, pour $\boldsymbol{p > 0}$. La structure de $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}}$-module sera définie dans un premier temps sur le **pré**faisceau $\underline{S}^p_{\boldsymbol{X};\mathbb{R}}$, le procédé de faisceautisation induira alors une structure de $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}}$-module sur $\underline{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X};\mathbb{R}}$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\boldsymbol{X}$. Une p-cochaîne singulière est une forme linéaire λ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $S_p(U;\mathbb{R})$, elle est donc déterminée par les scalaires $\lambda(\sigma)$ où σ est une application continue $\sigma : \Delta_p \to \boldsymbol{X}$. Notons E_0 le premier sommet de Δ_p (par rapport à l'ordre naturel de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$) ; on définit alors $f \cdot \lambda$ comme la cochaîne singulière vérifiant :

$$(f \cdot \lambda)(\sigma) = f(\sigma(E_0))\, \lambda(\sigma)\,,$$

et l'on vérifie aisément que ce procédé donne bien une structure de $\Omega^0(U)$-module pour $S^p(U;\mathbb{R})$, pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, qui est compatible aux morphismes de restriction d'ouverts. ∎

A partir de maintenant $\boldsymbol{M}$ désignera une variété différentiable. Nous avons montré dans 15.3.2-4 que lorsque $\boldsymbol{M}$ ***admet des partitions de l'unité*** la cohomologie de faisceaux sur $\boldsymbol{M}$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie de Čech. Par conséquent, et suite à la proposition précédente,

la cohomologie de Čech des faisceaux $\underline{S}^p_{M;\mathbb{R}}$ sera nulle en degrés positifs. Le théorème 12.8-2 montre alors que la cohomologie de Čech des **pré**faisceaux $\underline{S}^p_{M;\mathbb{R}}$ est également nulle en degrés positifs.

Soit $\mathcal{U}$ un bon recouvrement pour $\boldsymbol{M}$ et considérons le bicomplexe de cochaînes de Čech :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathbf{0} \to & \check{\mathrm{C}}^2(\mathcal{U};\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^2(\mathcal{U};\underline{S}^0_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^2(\mathcal{U};\underline{S}^1_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^2(\mathcal{U};\underline{S}^2_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) \to \cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathbf{0} \to & \check{\mathrm{C}}^1(\mathcal{U};\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^1(\mathcal{U};\underline{S}^0_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^1(\mathcal{U};\underline{S}^1_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^1(\mathcal{U};\underline{S}^2_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) \to \cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathbf{0} \to & \check{\mathrm{C}}^0(\mathcal{U};\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^0_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^1_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^2_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) \to \cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

Chaque ligne est un produit de complexes (augmentés) de cochaînes singulières d'ouverts contractiles de $\boldsymbol{M}$, elle est donc exacte et la cohomologie du bicomplexe est nulle. En particulier, la cohomologie de la première colonne est isomorphe à la cohomologie du bicomplexe $(\check{\mathrm{C}}^\bullet(\mathcal{U};S^*_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}))$. Mais la cohomologie de la première colonne est indépendante du bon recouvrement $\mathcal{U}$ considéré, c'est la cohomologie de faisceaux (et donc de Čech) de $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$ (*cf.* 15.3.1-1, 15.3.2-4) et c'est également la cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{M}$ (*cf.* 13.3.7-5). Nous pouvons par conséquent considérer la limite des bicomplexes $(\check{\mathrm{C}}^\bullet(\mathcal{U};S^*_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}))$ suivant la catégorie des recouvrements pointés pour obtenir le bicomplexe de cochaînes de Čech de $\boldsymbol{M}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathbf{0} \to & \check{\mathrm{C}}^2(\boldsymbol{M};\underline{S}^0_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^2(\boldsymbol{M};\underline{S}^1_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^2(\boldsymbol{M};\underline{S}^2_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^2(\boldsymbol{M};\underline{S}^3_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) \to \cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathbf{0} \to & \check{\mathrm{C}}^1(\boldsymbol{M};\underline{S}^0_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^1(\boldsymbol{M};\underline{S}^1_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^1(\boldsymbol{M};\underline{S}^2_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^1(\boldsymbol{M};\underline{S}^3_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) \to \cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathbf{0} \to & \check{\mathrm{C}}^0(\boldsymbol{M};\underline{S}^0_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^0(\boldsymbol{M};\underline{S}^1_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^0(\boldsymbol{M};\underline{S}^2_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^0(\boldsymbol{M};\underline{S}^3_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) \to \cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

dont la cohomologie est canoniquement isomorphe à la cohomologie de faisceaux de $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$ sur $\boldsymbol{M}$.

En filtrant ce bicomplexe par les lignes, on obtient une suite spectrale vérifiant $I\!E_1^{p,q} \equiv \check{\mathrm{H}}^p(\underline{S}^q_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}})$, en particulier $I\!E_1^{p,q} = \mathbf{0}$ pour tout $p > 0$. Les différentielles d_r de la suite spectrale seront alors nulles pour tout $r \geqslant 2$ et $I\!E_2 \equiv I\!E_\infty$. Il s'ensuit que la cohomologie du bicomplexe, est canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe défini par $(I\!E_1^{0,*}, d_1)$, *i.e.* le complexe :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(\boldsymbol{M};\underline{S}^0_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(\boldsymbol{M};\underline{S}^1_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(\boldsymbol{M};\underline{S}^2_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(\boldsymbol{M};\underline{S}^3_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) \longrightarrow$$

qui n'est autre que le complexe limite des complexes :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^0_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^1_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^2_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^3_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) \longrightarrow$$

où $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{M}$.

Observons maintenant que pour chaque recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{M}$, on a un morphisme de complexes

(lié aux augmentations des complexes de Čech) :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{0} & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^0_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^1_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^2_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^3_{\boldsymbol{M};\mathbb{R}}) & \longrightarrow \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \underline{S}^0(\boldsymbol{M};\mathbb{R}) & \longrightarrow & \underline{S}^1(\boldsymbol{M};\mathbb{R}) & \longrightarrow & \underline{S}^2(\boldsymbol{M};\mathbb{R}) & \longrightarrow & \underline{S}^3(\boldsymbol{M};\mathbb{R}) & \longrightarrow &
\end{array} \qquad (\ddagger)$$

L'équivalence entre la cohomologie singulière à coefficients dans $\mathbb{R}$ d'une variété différentiable et sa cohomologie de de Rham découle du fait que les morphismes de complexes (‡) ***sont des quasi-isomorphismes***. Plus généralement, on a :

15.4-2. Théorème : *Pour tout espace topologique $\boldsymbol{X}$, tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{X}$, et tout anneau $\boldsymbol{A}$, le morphisme de complexes :*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{0} & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^0_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^1_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^2_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^3_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}}) & \longrightarrow \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \underline{S}^0(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}) & \longrightarrow & \underline{S}^1(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}) & \longrightarrow & \underline{S}^2(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}) & \longrightarrow & \underline{S}^3(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}) & \longrightarrow &
\end{array}$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration : Nous allons seulement esquisser l'idée de la démonstration ; le lecteur désireux de plus de précisions pourra se reporter au chapitre **4** de [Spa], notamment le théorème **4.4.14** (page 178).

Notons $S_p(\mathcal{U};\boldsymbol{A})$ le $\boldsymbol{A}$-module libre admettant comme base l'ensemble des p-simplexes singuliers $\sigma : \Delta_p \to \boldsymbol{X}$ vérifiant $\sigma(\Delta_p) \subseteq U$ pour un certain $U \in \mathcal{U}$. On a trivialement $S_p(\mathcal{U};\boldsymbol{A}) \subseteq S_p(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$ et il est clair que le bord d'une chaîne singulière $\sigma \in S_p(\mathcal{U};\boldsymbol{A})$ appartient à $S_{p-1}(\mathcal{U};\boldsymbol{A})$. On note alors $(S_*(\mathcal{U};\boldsymbol{A}),\delta_*)$ le sous-complexe de $(S_*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}),\delta_*)$ ainsi obtenu.

Posons $(S^*(\mathcal{U};\boldsymbol{A}),d_*)$ le complexe dual de $(S_*(\mathcal{U};\boldsymbol{A}),\delta_*)$. On a (en dualisant l'inclusion des complexes de chaînes) une surjection de complexes $\Xi : (S^*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}),d_*) \to (S^*(\mathcal{U};\boldsymbol{A}),d_*)$.

Remarque 1. Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, le $\boldsymbol{A}$-module $S^p(\mathcal{U};\boldsymbol{A})$ s'identifie canoniquement à $\check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^*_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}})$ et, sous cette identification, le morphisme de complexes Ξ s'identifie à (‡).

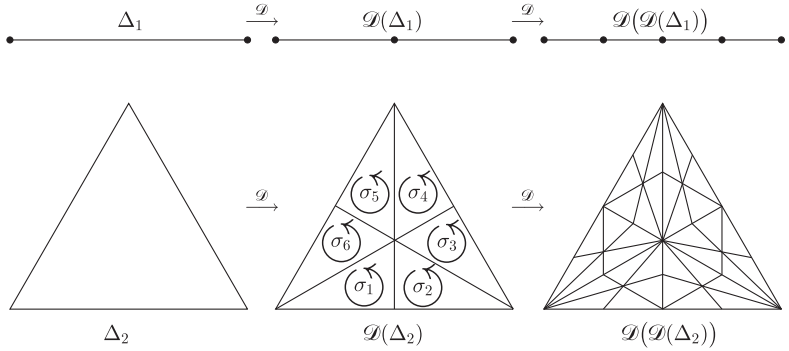
En effet, posons $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$. Un élément de $\check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U};\underline{S}^p_{\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}})$ est une famille $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de formes linéaires $\lambda_\alpha \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(S_p(U_\alpha;\boldsymbol{A});\boldsymbol{A})$ telle que, pour toute paire d'indices $(\alpha,\beta) \in \mathfrak{A}^2$, les formes λ_α et λ_β prennent les mêmes valeurs sur les simplexes singuliers de $U_{\alpha\beta}$. Or, ceci équivaut très précisément à se donner une forme linéaire sur $S_p(\mathcal{U};\boldsymbol{A})$. L'identification des complexes est laissée aux soins du lecteur.

Remarque 2. Le fait que Ξ est un quasi-isomorphisme est conséquence du fait que l'inclusion de complexes de chaînes $(S_*(\mathcal{U};\boldsymbol{A}),\delta_*) \subseteq (S_*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}),\delta_*)$ est déjà un quasi-isomorphisme ([53]). Ceci résulte de ce que, pour chaque $p \in \mathbb{N}$, tout **simplexe** singulier $S_p(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$ est homologue, dans $(S_*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}),\delta_*)$, à une **chaîne** singulière de $S_p(\mathcal{U};\boldsymbol{A})$. La vérification de cette dernière assertion passe par deux observations.

1) **La division barycentrique des simplexes standard.** (*loc. cit.* pages 123–124.) Il s'agit de l'opération $\mathcal{D}$ qui subdivise un p-simplexe standard en réunion de p-simplexes standard plus petits. Plutôt que de donner la définition précise, pour tout p, nous indiquons dans une illustration l'effet de l'opération en question sur

[53] Le faits que les $\boldsymbol{A}$-modules $(S_*(\mathcal{U};\boldsymbol{A}),\delta_*)$ et $(S_*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}),\delta_*)$ soient ***libres*** et que les complexes soient bornés à gauche, garantissent la validité de cette affirmation.

les 1-simplexes et 2-simplexes.



La propriété de compacité de Δ_p intervient alors pour assurer que pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de Δ_p il existe un entier r (suffisamment grand) tel que chaque simplexe de $\mathcal{D}^r(\Delta_p)$ est contenu dans au moins l'un des ouverts du recouvrement $\mathcal{V}$, et ceci en raison du fait que le diamètre des simplexes de $\mathcal{D}^r(\Delta_p)$ converge ***uniformément*** vers zéro lorsque r tend vers l'infini.

2) Les chaînes singulières définies par division barycentrique sont homologues au simplexe standard de départ. Par exemple, dans le cas de Δ_2, on a :

$$\Delta_2 \sim \mathcal{D}(\Delta_2) := \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 \,,$$

en particulier, si $f : \Delta_2 \to \boldsymbol{X}$ est une application continue, le simplexe singulier défini par f sera homologue à la chaîne singulière $\sum_{j=1}^{j=6} f \circ \sigma_j$.

Reprenons maintenant l'inclusion de complexes de chaînes : $(S_*(\mathcal{U};\boldsymbol{A}),\delta_*) \subseteq (S_*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}),\delta_*)$. Soit $f : \Delta_p \to \boldsymbol{X}$ un p-**simplexe** singulier de $\boldsymbol{X}$ et notons $f^{-1}(\mathcal{U})$ le recouvrement de Δ_p obtenu et considérant les images inverses par f des ouverts de $\mathcal{U}$. D'après la remarque (1) ci-dessus, il existe $r \in \mathbb{N}$ assez grand tel que les simplexes de la subdivision $\mathcal{D}^r(\Delta_p)$ sont contenus dans des ouverts de $f^{-1}(\mathcal{U})$. La relation d'homologie rappelée dans (2) nous dit alors que $\Delta_p \sim \sum_{\mathcal{D}^r(\Delta_p)} \sigma$ de sorte que $f \sim \sum_{\mathcal{D}^r(\Delta_p)} f \circ \sigma$ et bien évidemment $f \circ \sigma \in S_p(\mathcal{U};\boldsymbol{A})$ pour chaque $\sigma \in \mathcal{D}^r(\Delta_p)$. Il s'ensuit que comme une **chaîne** singulière ω de $S_p(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$ est une somme (finie) de **simplexes** singuliers, les homologies entre les simplexes de ω et des chaînes de $S_p(\mathcal{U};\boldsymbol{A})$ donnent une homologie entre ω et une chaîne de $S_p(\mathcal{U};\boldsymbol{A})$. ∎

15.4-3. Corollaire : *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable admettant de partitions de l'unité. Il existe des isomorphismes canoniques entre la cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{M}$, la cohomologie singulière de $\boldsymbol{M}$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, la cohomologie de Čech du faisceaux des fonctions localement constantes $\underline{\mathbb{R}}_M$ et la cohomologie de faisceaux de $\underline{\mathbb{R}}_M$.*

———————×———————

§16. Schémas affines et variétés algébriques affines

Le but de ce chapitre est l'introduction des concepts de *schéma affine associé à un anneau commutatif* et de *variété algébrique affine*. Il s'agira d'*espaces topologiques annelés*, *i.e.* des espaces topologiques munis d'un faisceaux d'anneaux : leur *faisceaux structural*. Nous rappellerons les définitions classiques de manière comparative, à la fois pour montrer leur différences, mais aussi leurs similitudes en particulier dans le cas des algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos. Enfin, nous introduirons la catégorie des (faisceaux de) modules quasi-cohérents et démontrerons le théorème d'acyclicité de Serre qui affirme qu'un module quasi-cohérent sur un schéma nœthérien

affine ou sur une variété algébrique affine est acyclique pour le foncteur des sections globales sur la *catégorie des faisceaux de groupes abéliens*.

16.1 Espaces topologiques nœthériens

Un espace topologique $\boldsymbol{Y}$ est dit «nœthérien» lorsque toute suite décroissante de fermés est stationnaire, *i.e.* pour tout suite de fermés de $\boldsymbol{Y}$: $\boldsymbol{Z}_1 \supseteq \boldsymbol{Z}_2 \supseteq \boldsymbol{Z}_3 \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{Z}_n \supseteq \cdots$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\boldsymbol{Z}_N = \boldsymbol{Z}_{N+h}$, pour tout $h \in \mathbb{N}$.

16.1-1. Remarque : De manière duale : un espace topologique est nœthérien, si et seulement si, toute suite croissante d'ouverts est stationnaire.

Tout sous-ensemble d'un espace nœthérien (muni de la topologie induite) est également nœthérien.

16.1-2. Exercice et définition : Démontrer que sur un espace topologique nœthérien $\boldsymbol{Y}$, de tout recouvrement ouvert de $\boldsymbol{Y}$, on peut extraire un sous-recouvrement *fini*. Les espaces topologiques vérifiant cette propriété sont appelés «quasi-compacts».

Prouver que $\boldsymbol{Y}$ est nœthérien, si et seulement si, tout ouvert de $\boldsymbol{Y}$ est quasi-compact.

16.1-3. Définition : Un fermé $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{Y}$ est dit «réductible» lorsqu'il est réunion d'un nombre **fini** de fermés différents de $\boldsymbol{Z}$ lui-même, *i.e.* s'il existe $\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, \ldots, \boldsymbol{Z}_r \subsetneq \boldsymbol{Z}$ tels que $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_1 \cup \boldsymbol{Z}_2 \cup \cdots \cup \boldsymbol{Z}_r$. Le fermé $\boldsymbol{Z}$ est dit «irréductible» dans le cas contraire.

16.1-4. Remarque : L'adhérence d'un point est toujours un fermé irréductible. On retiendra dans la définition 16.1-3 que ce qui est essentiel, c'est le fait que l'on s'y intéresse aux recouvrements fermés «finis» ; autrement tout fermé est réunion des adhérences des points qu'il contient.

16.1-5. Exercice : Montrer qu'un fermé $\boldsymbol{Z}$ est irréductible, si et seulement si, une inclusion de la forme :

$$\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{Z}_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{Z}_r \,,$$

où les $\boldsymbol{Z}_i$ sont fermés, n'est possible que si $\boldsymbol{Z}$ est contenu dans au moins l'un des $\boldsymbol{Z}_i$.

16.1-6. Définition : On appelle «décomposition fermée (resp. irréductible)» d'un espace nœthérien $\boldsymbol{Y}$, toute famille finie $\{\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_r\}$ de fermés (resp. irréductibles) de $\boldsymbol{Y}$ telle que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{Z}_r \,; \text{ et} \\ \boldsymbol{Z}_i \subseteq \boldsymbol{Z}_j, \quad \text{si et seulement si,} \quad i = j. \end{cases}$$

16.1-7. Lemme (et définition) : *Tout espace topologique nœthérien* $\boldsymbol{Y}$ *admet une décomposition irréductible, et une seule à indexation près. Les fermés irréductibles ainsi déterminés sont appelés «les composantes irréductibles de* $\boldsymbol{Y}$ *».*

Démonstration :

- **Existence de décompositions irréductibles.** Commençons par observer que un fermé $\boldsymbol{Z}$ de $\boldsymbol{Y}$, *n'admettant pas de décomposition irréductible*, est nécessairement *réductible*, mais aussi, que dans toute décomposition $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_1 \cup \boldsymbol{Z}_2$, où $\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2 \subsetneq \boldsymbol{Z}$, l'un au moins des $\boldsymbol{Z}_i$ n'admettra pas non plus de décomposition irréductible (faute de quoi des décompositions irréductibles des $\boldsymbol{Z}_i$ donneraient une telle décomposition pour $\boldsymbol{Z}$). Par conséquent, si $\boldsymbol{Y} =: \boldsymbol{Z}_0$ n'admettait pas de décomposition irréductible, l'application de cette remarque permettrait de construire une suite *infinie et strictement décroissante* de fermés de $\boldsymbol{Y}$ n'admettant pas de décompositions irréductibles :
$$\boldsymbol{Z}_0 \supsetneq \boldsymbol{Z}_1 \supsetneq \boldsymbol{Z}_2 \supsetneq \cdots \supsetneq \boldsymbol{Z}_n \supsetneq \cdots ;$$
et ceci serait contraire à la nœthérianité de $\boldsymbol{Y}$.
- **Unicité des décompositions irréductibles.** Considérons maintenant deux décompositions irréductibles :
$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{Z}_r \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}'_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{Z}'_{r'} .$$
L'application de l'exercice 16.1-5 montre que $\boldsymbol{Z}_1$ est contenu (après réindexation) dans $\boldsymbol{Z}'_1$; mais aussi que $\boldsymbol{Z}'_1 \subseteq \boldsymbol{Z}_a$ pour un certain $a = 1, \ldots, r$. Or, l'inclusion $\boldsymbol{Z}_1 \subseteq \boldsymbol{Z}'_1 \subseteq \boldsymbol{Z}_a$ n'est possible (dans une *décomposition*) que si $a = 1$ et donc $\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{Z}'_1$. Un raisonnement inductif immédiat permet alors de conclure que $r = r'$ et que les deux décompositions sont (à l'indexation près) identiques. ∎

Espaces topologiques nœthériens irréductibles

Les assertions du lemme suivant sont vraies sur un espace topologique nœthérien irréductible $\boldsymbol{Y}$.

16.1-8. Lemme (et exercice) :

a) *Deux ouverts non vides de* $\boldsymbol{Y}$ *ont toujours une intersection non triviale.*

b) *Un ouvert non vide de* $\boldsymbol{Y}$ *est partout dense.*

c) $\boldsymbol{Y}$ *est un espace topologique connexe.*

16.1-9. Exercice : Montrer qu'un espace topologique nœthérien est séparé, si et seulement si, c'est un ensemble fini muni de la topologie discrète.

16.1.1 Dimension d'un espace topologique nœthérien. Soit $\boldsymbol{Y}$ un espace topologique, appelons «longueur» d'une suite *strictement décroissante* de fermés $\boldsymbol{Z}_0 \supsetneq \boldsymbol{Z}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \boldsymbol{Z}_r$, le nombre r. On appelle «dimension topologique» de $\boldsymbol{Y}$, et on note $\dim \boldsymbol{Y}$, la borne supérieure des longueurs des suites strictement décroissantes de fermés *irréductibles*.

16.1.1-1. Exercice :

a) Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert fini de $\boldsymbol{Y}$. Montrer que $\dim \boldsymbol{Y} = \sup_i \{\dim U_i\}$.

b) Soit $\boldsymbol{F}$ un fermé de $\boldsymbol{Y}$, montrer que $\dim \boldsymbol{F} \leqslant \dim \boldsymbol{Y}$. Supposons $\boldsymbol{Y}$ irréductible de dimension finie. Montrer que tout fermé différent de $\boldsymbol{Y}$, est de dimension strictement plus petite que $\dim \boldsymbol{Y}$.

c) Soit $\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie dont les fermés sont les réunions finies de sous-espaces vectoriels de dimension finie. Vérifiez que l'on a bien une topologie d'espace nœthérien sur $\boldsymbol{Y}$. Montrer que le fermés irréductibles de $\boldsymbol{Y}$ sont les sous-espaces vectoriels ; puis que $\boldsymbol{Y}$ est de dimension topologique infinie.

16.2 Spectres associés à un anneau commutatif arbitraire

Dans cette section nous associons à un anneau commutatif (avec identité multiplicative)([54]), noté $\boldsymbol{A}$, deux espaces topologiques : $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$. Les espaces associés à un anneau nœthérien seront nœthériens.

16.2.1 Les espaces topologiques Spec($\boldsymbol{A}$) et Spm($\boldsymbol{A}$). Nous allons noter les idéaux d'un anneau $\boldsymbol{A}$ par des lettres gothiques majuscules. Pour des idéaux $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, on notera $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, respectivement l'idéal "produit" et "somme" de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$.

16.2.1-1. Définition : On appelle «radical»([55]) d'un idéal $\mathfrak{A}$, noté $\mathfrak{Rad}(\mathfrak{A})$, l'intersection des idéaux *maximaux* de $\boldsymbol{A}$ contenant $\mathfrak{A}$:

$$\boxed{\mathfrak{Rad}(\mathfrak{A}) := \bigcap_{\mathfrak{M}\supseteq\mathfrak{A}} \mathfrak{M}} \text{ où } \mathfrak{M} \text{ désigne un idéal } \textit{maximal} \text{ de } \boldsymbol{A}.$$

On appelle «radical de l'anneau $\boldsymbol{A}$» le radical de l'idéal $\mathbf{0}$.

On appelle «radical nilpotent» de $\mathfrak{A}$, noté $\sqrt{\mathfrak{A}}$, l'ensemble (l'idéal) des éléments $a \in \boldsymbol{A}$ pour lesquels il existe $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ (dépendant de a), tel que $a^m \in \mathfrak{A}$. *Le radical nilpotent d'un idéal est l'intersection des idéaux premiers qui le contiennent* ;

$$\boxed{\sqrt{\mathfrak{A}} := \bigcap_{\mathfrak{P}\supseteq\mathfrak{A}} \mathfrak{P}} \quad \text{où } \mathfrak{P} \text{ désigne un idéal } \textit{premier} \text{ de } \boldsymbol{A}.$$

On appelle «radical de nilpotence de l'anneau $\boldsymbol{A}$», l'idéal $\sqrt{\mathbf{0}}$. Un anneau $\boldsymbol{A}$ est dit «réduit» lorsque son radical de nilpotence est nul, *i.e.* lorsque $\boldsymbol{A}$ ne possède pas d'élément nilpotent non nul.

Pour tout idéal $\mathfrak{A}$, on a trivialement :

$$\mathfrak{A} \subseteq \sqrt{\mathfrak{A}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{A}}} \subseteq \mathfrak{Rad}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{Rad}(\mathfrak{Rad}(\mathfrak{A}))$$

Un idéal $\mathfrak{A}$ sera dit «radical», resp. «nil-radical», lorsque $\mathfrak{A} = \mathfrak{Rad}(\mathfrak{A})$, resp. $\mathfrak{A} = \sqrt{\mathfrak{A}}$. ([56]) ([57])

Rappelons les résultats élémentaires suivants dont la démonstration est laissée en exercice :

[54] Dans la suite, tous les anneaux considérés seront commutatifs et posséderont une identité multiplicative. Il est important de **ne pas exclure** dans la définition d'anneau, l'anneau nul, *i.e.* l'anneau vérifiant $1 = 0$!

[55] Appelé également «radical de Jacobson».

[56] En particulier l'anneau $\boldsymbol{A}$ est un idéal radical (et nil-radical) puisque la famille des idéaux maximaux le contenant est vide. On apprend en théorie des ensembles que l'intersection d'une famille vide de sous ensembles d'un ensemble A donné, est l'ensemble A lui-même.

[57] Nous verrons que dans le cas des algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos, l'inclusion $\sqrt{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{Rad}(\mathfrak{A})$ est une égalité. Les notions d'idéal radical et de nil-radical y seront donc confondues.

16.2.1-2. Lemme : *Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire. Pour toute partie (vide ou non) $A \subseteq \boldsymbol{A}$, notons $V_{\mathfrak{m}}(A)$ (resp. $V_{\mathfrak{p}}(A)$) l'ensemble des idéaux maximaux (resp. premiers) qui* contiennent *A. Alors :*

Z-1) *Si $A \subseteq B$, alors $V_{\mathfrak{m}}(A) \supseteq V_{\mathfrak{m}}(B)$ et $V_{\mathfrak{p}}(A) \supseteq V_{\mathfrak{p}}(B)$.*

Z-2) *$V_{\mathfrak{m}}(\mathbf{0})$ (resp. $V_{\mathfrak{p}}(\mathbf{0})$) est l'ensemble des idéaux maximaux (resp. premiers) de $\boldsymbol{A}$, et l'on a $V_*(\{1\}) = \varnothing$.*

Z-3) *$V_{\mathfrak{m}}(A) = V_{\mathfrak{m}}(\langle A\rangle) = V_{\mathfrak{m}}\big(\mathfrak{Rad}(\langle A\rangle)\big)$ et $V_{\mathfrak{p}}(A) = V_{\mathfrak{p}}(\langle A\rangle) = V_{\mathfrak{p}}\big(\sqrt{\langle A\rangle}\big)$.*

Z-4) *$V_*(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}) = V_*(\mathfrak{A}) \cup V_*(\mathfrak{B})$.*

Z-5) *$V_*\big(\sum_i \mathfrak{A}_i\big) = \bigcap_i V_*\big(\mathfrak{A}_i\big)$, où $\sum_i \mathfrak{A}_i$ désigne la somme d'une famille arbitraire $\{\mathfrak{A}_i\}$ d'idéaux.*

où V_* désigne indifféremment $V_{\mathfrak{m}}$ et $V_{\mathfrak{p}}$ et la notation $\langle A\rangle$ réfère à l'idéal de $\boldsymbol{A}$ engendré par A.

16.2.1-3. Remarque et définition : En particulier les parties $V_{\mathfrak{p}}(A)$ constituent les fermés pour une certaine topologie sur $V_{\mathfrak{p}}(\mathbf{0})$; c'est la « topologie spectrale (souvent appelée de Zariski) » de $V_{\mathfrak{p}}(\mathbf{0})$. (Mutatis mutandis pour $V_{\mathfrak{m}}$.)

L'inclusion ensembliste $V_{\mathfrak{m}}(\mathbf{0}) \subseteq V_{\mathfrak{p}}(\mathbf{0})$ sera alors un plongement d'espaces topologiques.

16.2.1-4. Définition : On appelle « spectre premier » ou plus simplement « spectre » (resp. « spectre maximal ») d'un anneau commutatif $\boldsymbol{A}$, l'ensemble $V_{\mathfrak{p}}(\mathbf{0})$ (resp. $V_{\mathfrak{m}}(\mathbf{0})$) de ses idéaux *premiers* (resp. *maximaux*) ; on le notera $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ (resp. $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$) et sera muni de la topologie spectrale.

16.2.1-5. Exercice : Montrer que le spectre premier d'un produit direct de deux anneaux est la réunion disjointe de leurs spectres, *i.e.* : $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2) = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}_1) \amalg \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}_2)$.

16.2.1-6. Définition : Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau, on appelle « dimension de Krull » ou plus simplement « dimension » de $\boldsymbol{A}$, la dimension de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$.

16.2.1-7. Remarque et exercice : Pour toute partie $\boldsymbol{F}$ de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ (resp. $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$), notons $\mathfrak{I}(\boldsymbol{F})$ l'idéal intersection des idéaux de $\boldsymbol{A}$ appartenant à $\boldsymbol{F}$; L'idéal $\mathcal{I}(\boldsymbol{F})$ est donc nil-radical (resp. radical). (On a $\mathcal{I}(\varnothing) = \boldsymbol{A}$.) Notons aussi $\overline{\boldsymbol{F}}$ l'adhérence de $\boldsymbol{F}$ pour la topologie spectrale, et $V_* = V_{\mathfrak{p}}$ (resp. $V_{\mathfrak{m}}$).

Montrer que les correspondances :

$$\{\text{fermés de } \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})\} \xrightarrow{\mathfrak{I}} \{\text{idéaux nil-radicaux (resp. radicaux) de } \boldsymbol{A}\}$$
$$\{\text{idéaux de } \boldsymbol{A}\} \xrightarrow{V_*} \{\text{fermés de } \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})\}$$

vérifient :

1) $\mathfrak{I}(\boldsymbol{F})$ est un idéal nil-radical (resp. radical), $\mathfrak{I}(\boldsymbol{F}) = \mathfrak{I}(\overline{\boldsymbol{F}})$ et $V_*(\mathfrak{I}(\boldsymbol{F})) = \overline{\boldsymbol{F}}$.

2) $V_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A}) = V_{\mathfrak{p}}\big(\sqrt{\mathfrak{A}}\big)$ et $\mathfrak{I}(V_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})) = \sqrt{\mathfrak{A}}$ (resp. $V_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{A}) = V_{\mathfrak{m}}\big(\mathfrak{Rad}(\mathfrak{A})\big)$ et $\mathfrak{I}(V_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{A})) = \mathfrak{Rad}(\mathfrak{A})$).

3) $V_*\circ\mathfrak{I}\circ V_* = V_*$ et $\mathfrak{I}\circ V_*\circ\mathfrak{I} = \mathfrak{I}$. En particulier, $\mathfrak{I}$ établit une *bijection* entre les parties fermées de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ (resp. $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$) et les idéaux nil-radicaux (resp. radicaux) $\boldsymbol{A}$.

16.2.2 Fermés irréductibles de Spec($\boldsymbol{A}$) et Spm($\boldsymbol{A}$). Toute partie fermée $\boldsymbol{F}$ de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est de la forme $V_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{I}(\boldsymbol{F}))$. Lorsque $\boldsymbol{F} = V_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{B})\cup V_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{C})$, on a $\mathfrak{I}(\boldsymbol{F}) \supseteq \sqrt{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}} \supseteq \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}$. En particulier, si $\mathfrak{I}(\boldsymbol{F})$ est un idéal premier, $\mathfrak{I}(\boldsymbol{F}) \supseteq \mathfrak{B}$, ou bien $\mathfrak{I}(\boldsymbol{F}) \supseteq \mathfrak{C}$; et $\boldsymbol{F}$ est irréductible. Réciproquement, si $\mathfrak{I}(\boldsymbol{F})$ n'est pas premier, il existe $a_1, a_2 \in \boldsymbol{A}\backslash\mathfrak{I}(\boldsymbol{F})$ tels que $a_1a_2 \in \mathfrak{I}(\boldsymbol{F})$ et clairement pour tout idéal premier $\mathfrak{P} \in \boldsymbol{F}$: ou bien $\mathfrak{P} \supseteq \langle a_1\rangle$, ou bien $\mathfrak{P} \supseteq \langle a_2\rangle$. Par conséquent,

$$\boldsymbol{F} = \big[\boldsymbol{F}\cap V_{\mathfrak{p}}(a_1)\big]\cup\big[\boldsymbol{F}\cap V_{\mathfrak{p}}(a_2)\big] = \big[V_{\mathfrak{p}}\big(\mathfrak{I}(\boldsymbol{F})+\langle a_1\rangle\big)\big]\cup\big[V_{\mathfrak{p}}\big(\mathfrak{I}(\boldsymbol{F})+\langle a_2\rangle\big)\big]\,,$$

et nécessairement $\boldsymbol{F} \supsetneq V_{\mathfrak{p}}\big(\mathfrak{I}(\boldsymbol{F})+\langle a_i\rangle\big)$ car autrement $a_i \in \mathfrak{I}(\boldsymbol{F})$. (Cette remarque est également vraie dans le cas de $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ et pour $V_{\mathfrak{m}}$.)

Le lemme suivant est donc démontré :

16.2.2-1. Lemme : *Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire.*

1) *La correspondance qui associe à un fermé $\boldsymbol{F} \subseteq \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ (resp.* $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$*), l'idéal $\mathfrak{I}(\boldsymbol{F})$, est* bijective *entre les fermés irréductibles et les idéaux premiers de $\boldsymbol{A}$ appartenant à l'image de $\mathfrak{I}$.*

2) *L'espace* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ *est irréductible, si et seulement si, son radical nilpotent $\sqrt{\mathbf{0}}$ est premier ; en particulier, si et seulement si, l'anneau réduit* $\mathrm{Red}(\boldsymbol{A}) := \boldsymbol{A}/\sqrt{\mathbf{0}}$ *est intègre*

3) *L'espace* $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ *est irréductible, si et seulement si, son radical (de Jacobson) $\mathfrak{Rad}(\mathbf{0})$ est premier.*

16.2.2-2. Remarque et définition : La propriété ((1)) équivaut au fait que les fermés irréductibles du spectre *premier* d'un anneau contiennent un point «générique», *i.e.* un point partout dense dans le fermé en question. Pour tout $x \in \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$, le fermé $\bar{x}$ est irréductible et l'application $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}) \to \{\text{fermés irréductibles}\}$ définie par $x \mapsto \bar{x}$ est une bijection. L'ensemble des points génériques d'un espace topologique est donné par l'intersection de ses ouverts non vides ; pour un fermé d'un spectre *premier* d'un anneau, cette intersection contient *au plus* un élément.

16.2.2-3. Exercice : Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes pour un anneau commutatif $\boldsymbol{A}$:

a) $\boldsymbol{A}$ est nœthérien ;

b) les espaces $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ sont nœthériens.

16.2.2-4. Remarque : On prendra garde du fait que la nœthérianité de $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ **n'entraîne pas** celle de $\boldsymbol{A}$. Le spectre maximal d'un anneau local, nœthérien ou non, est toujours réduit à un point.

16.2.2-5. Exemples :

a) Lorsque $\boldsymbol{A}$ est un corps, on a $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A}) = \{\mathbf{0}\}$. Sa dimension est nulle.

b) Lorsque $\boldsymbol{A} = \mathbb{Z}$, l'espace $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ s'identifie à l'ensemble des nombres premiers plus 0. L'idéal nul est partout dense dans $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et comme tout autre idéal premier est maximal, $\mathrm{Spm}(\mathbb{Z}) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})\backslash\mathbf{0}$. En particulier, $\dim(\mathbb{Z}) = 1$. (Cette remarque est également vraie pour tout domaine principal.)

16.2.2-6. Exercice : Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^r$ *compacte* et de dimension d. Posons $\boldsymbol{A} = \mathcal{C}^r(\boldsymbol{M})$.

1) **Non Irréductibilité de Spec($\boldsymbol{A}$).** Montrer que $\boldsymbol{A}$ n'est pas intègre, puis que son radical nilpotent est l'idéal nul. En déduire que $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ n'est pas irréductible.

2) **Idéaux Maximaux.** Tout point $m \in \boldsymbol{M}$ détermine un homomorphisme surjectif d'anneaux $v(m) : \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ en posant $v(m)(f) := f(m)$, pour tout $f \in \boldsymbol{A}$. L'ensemble des fonctions s'annulant en m est donc un idéal maximal de $\boldsymbol{A}$, noté $\mathfrak{M}_m$.

   a) Soit $\mathfrak{A}$ un idéal de $\boldsymbol{A}$ tel que, pour tout $m \in \boldsymbol{M}$, il existe $f_m \in \mathfrak{A}$ vérifiant $f_m(m) \neq 0$. Montrer alors, à l'aide de fonctions plateaux de support arbitrairement petit, que pour tout $m \in \boldsymbol{M}$, il existe $g_m \in \mathfrak{A}$, positive ou nulle, et telle que $g_m(m) > 0$; puis, à l'aide de partitions de l'unité, qu'il existe $g \in \mathfrak{A}$ nulle part nulle. Conclure que $\mathfrak{A} = \boldsymbol{A}$.

   b) En déduire que si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $\boldsymbol{A}$, il est de la forme $\mathfrak{M}_m$ pour un certain $m \in \boldsymbol{M}$. Ainsi, l'ensemble $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ s'identifie naturellement à $\boldsymbol{M}$.

3) **Non Irréductibilité de Spm($\boldsymbol{A}$).** Déduire de la question précédente que $\mathfrak{Rad}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ et donc que $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ n'est pas irréductible.

4) **Idéaux Premiers.** Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\boldsymbol{A}$. Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique $m_{\mathfrak{P}} \in \boldsymbol{M}$, tel que $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{M}_{m_{\mathfrak{P}}}$. Puis, toujours à l'aide de fonctions plateaux, que $\mathfrak{P}$ contient l'idéal des fonctions dont le germe en m est nul. En particulier, si $\boldsymbol{A}_{(m)}$ désigne l'anneau des germes de fonctions $\mathcal{C}^r$ en m et si $\gamma_m : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_{(m)}$ est le morphisme canonique, conclure que $\mathfrak{P}$ est l'image inverse d'un idéal premier de $\boldsymbol{A}_{(m)}$.

5) **Non Nœthérianité-I.** Montrer que tout fermé irréductible de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ rencontre $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ en un unique point. En conclure que $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ ne sont pas nœthériens. (*Indication* : Autrement, ils seraient réunion d'un nombre *fini* de composantes irréductibles...)

6) **Quasi-compacité.** Montrer que l'application $\psi : m \mapsto \mathfrak{M}_m$ de la variété $\boldsymbol{M}$ vers l'espace $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est continue. En déduire que $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ sont quasi-compacts.

7) **Non Nœthérianité-II.** Pour tout $f \in \boldsymbol{A}$, notons $\boldsymbol{Z}(f)$ l'ensemble des points de $\boldsymbol{M}$ où f s'annule. Prouver l'égalité :
$$\boldsymbol{Z}(f) = \psi^{-1}\Big(\overline{\psi(\boldsymbol{Z}(f))} \cap \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})\Big).$$
Redémontrer alors que $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ n'est pas un espace topologique nœthérien en montrant qu'il existe des suites strictement décroissantes de fermés, de longueur infinie.

8) **Dimension.** Pour chaque $m \in \boldsymbol{M}$, l'anneau $\mathcal{C}^r(\boldsymbol{M})_{(m)}$ est intègre, *local* et isomorphe à $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^d)_{(0)}$.

   a) Soit $\iota : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ l'application $t \mapsto (t, 0, \ldots, 0)$. Pour toute $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^d)$, on a $f \circ \iota \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R})$ et si le germe de f en 0 est nul, il en est de même pour la fonction $f \circ \iota$, d'où l'application $\iota_{(0)} : \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^d)_{(0)} \to \mathcal{C}^r(\mathbb{R})_{(0)}$ induite sur les anneaux des germes de fonction $\mathcal{C}^r$. Montrer que $\iota_{(0)}$ est surjective et donc que $\mathrm{Spec}(\mathcal{C}^r(\boldsymbol{M}))$ est de dimension infinie, s'il existe des suites infinies strictement décroissantes d'idéaux premiers dans $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})_{(0)}$.

   b) Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ constituées des points des suites de nombres réels positifs convergeant vers 0. Pour $\boldsymbol{S} \in \mathcal{D}$, on note $\mathfrak{P}_{\boldsymbol{S}}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})$ telles que $f^{-1}(0) \cap \boldsymbol{S}$ est de cardinal infini.

      ▸ Montrer que pour tout $\boldsymbol{S} \in \mathcal{D}$, l'ensemble $\mathfrak{P}_{\boldsymbol{S}}$ est un idéal premier de $\boldsymbol{A}$.

- Munissons $\mathcal{D}$ du préordre défini par $\boldsymbol{S}_1 \preccurlyeq \boldsymbol{S}_2$, si et seulement si, il existe un voisinage U de $0 \in \mathbb{R}$, tel que $\boldsymbol{S}_1 \cap U \subseteq \boldsymbol{S}_2 \cap U$. Montrer que :
$$\mathfrak{P}_{\boldsymbol{S}_1} \subseteq \mathfrak{P}_{\boldsymbol{S}_2}\,, \quad \text{si et seulement si,} \quad \boldsymbol{S}_1 \succcurlyeq \boldsymbol{S}_2\,.$$
- Montrer que pour tous $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2 \in \mathcal{D}$, on a $\mathfrak{P}_{\boldsymbol{S}_1} = \mathfrak{P}_{\boldsymbol{S}_2}$, si et seulement si, $\boldsymbol{S}_1$ et $\boldsymbol{S}_2$ définissent le même "germe d'ensemble" en 0.
- Notons $\mathcal{D}_{(0)}$ l'ensemble des germes en zéro des éléments de $\mathcal{D}$. Muni de la relation induite par $\preccurlyeq$, on a un ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{D}_{(0)}; \leqslant)$. Construire une suite infinie strictement décroissante d'éléments de $\mathcal{D}_{(0)}$. En déduire que $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est de dimension infinie pour $\boldsymbol{A} = \mathcal{C}^r(\boldsymbol{M})$ où $r \in \mathbb{N}$ et où $\boldsymbol{M}$ est une variété de classe $\mathcal{C}^r$ de dimension supérieure ou égale à un.

16.3 Spectres associés aux algèbres de type fini sur un corps

16.3.1 Le cas des algèbres de polynômes. Soit k un corps *arbitraire*, et considérons la k-algèbre $\boldsymbol{A} = k[X_1, \ldots, X_n]$ des polynômes à n variables, à coefficients dans k. L'espace $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est nœthérien et comme $\boldsymbol{A}$ est intègre, $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est un espace irréductible.

Notons $\mathbb{A}_n(k)$ le k-espace affine k^n. Les éléments de l'algèbre $\boldsymbol{A}$ définissent alors des *fonctions* sur $\mathbb{A}_n(k)$, *i.e.* des applications de $\mathbb{A}_n(k)$ à valeurs dans k. En effet, pour tout polynôme $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ et tout $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_n(k)$, on pose $P(\boldsymbol{a}) := P(a_1, \ldots, a_n) \in k$. La correspondance ainsi définie $\boldsymbol{A} \to \mathrm{Fonctions}(\mathbb{A}_n(k); k)$ est alors un homomorphisme d'anneaux (qui est injectif, si et seulement si, le corps k est de cardinal infini).

Pour tout $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_n(k)$ le morphisme $v(\boldsymbol{a}) : \boldsymbol{A} \to k$, défini par $P \mapsto P(\boldsymbol{a})$, est un homomorphisme surjectif d'anneaux. Son noyau est donc un idéal *maximal* $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{a}}$ de $\boldsymbol{A}$. Nous avons ainsi une application *injective* :
$$\begin{aligned} \Xi_{\boldsymbol{A}} : \mathbb{A}_n(k) &\longrightarrow \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A}) \\ \boldsymbol{a} &\longmapsto \mathfrak{M}_{\boldsymbol{a}} \end{aligned}$$

Ensembles algébriques et topologie de Zariski sur $\mathbb{A}_n(k)$

16.3.1-1. Définition : Soit A un sous-ensemble de $\boldsymbol{A} = k[X_1, \ldots, X_n]$. On appelle «ensemble des zéros de A» le sous-ensemble $\boldsymbol{Z}(A)$ de $\mathbb{A}_n(k)$ constitué des points $\boldsymbol{a}$ tels que $P(\boldsymbol{a}) = 0$ pour tout $P \in A$. On appelle «ensemble algébrique» où «fermé de Zariski» de $\mathbb{A}_n(k)$ toute partie de la forme $\boldsymbol{Z}(A)$.

Le lemme 16.2.1-2 est vrai en remplaçant $V_{\mathfrak{p}}$ par $\boldsymbol{Z}$. En particulier, les ensembles algébriques de $\mathbb{A}_n(k)$ définissent les fermés d'une topologie sur $\mathbb{A}_n(k)$, c'est sa «topologie de Zariski».

16.3.1-2. Lemme : *L'application $\Xi_{\boldsymbol{A}} : \mathbb{A}_n(k) \to \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ est un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration : En effet, on a tautologiquement $\Xi_{\boldsymbol{A}}^{-1}(V_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{A})) = \boldsymbol{Z}(\mathfrak{A})$. ∎

16.3.1-3. Remarque : Pour toute partie $\boldsymbol{F} \subseteq \mathbb{A}_n(k)$, notons $\mathcal{I}(\boldsymbol{F})$ le sous-ensemble (idéal) de $\boldsymbol{A} = k[X_1, \ldots, X_n]$ des polynômes s'annulant en tout point $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{F}$, soit :
$$\mathcal{I}(\boldsymbol{F}) = \bigcap\nolimits_{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{F}} \mathfrak{M}_{\boldsymbol{a}}\,,$$

et $\mathcal{I}(\boldsymbol{F})$ est trivialement un idéal radical (et nil-radical). On a $\boldsymbol{Z}(\mathcal{I}(\boldsymbol{F})) \supseteq \boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{Z}(\mathcal{I}(\boldsymbol{F}))$ s'identifie à l'adhérence $\overline{\boldsymbol{F}}$ de $\boldsymbol{F}$ pour la topologie de Zariski de $\mathbb{A}_n(k)$.

Les correspondances :

$$\begin{aligned}\{\text{fermés de Zariski de } \mathbb{A}_n(k)\} &\xrightarrow{\ \mathfrak{I}\ } \{\text{idéaux radicaux de } \boldsymbol{A}\}\\ \{\text{idéaux de } \boldsymbol{A}\} &\xrightarrow{\ \boldsymbol{Z}\ } \{\text{fermés de Zariski de } \mathbb{A}_n(k)\}\end{aligned}$$

vérifient donc les propriétés suivantes :

1) $\mathfrak{I}(\boldsymbol{F})$ est un idéal radical (et nil-radical), $\mathfrak{I}(\boldsymbol{F}) = \mathfrak{I}(\overline{\boldsymbol{F}})$ et $\boldsymbol{Z}(\mathfrak{I}(\boldsymbol{F})) = \overline{\boldsymbol{F}}$.

2) $\boldsymbol{Z}(\mathfrak{A}) = \boldsymbol{Z}\big(\mathfrak{Rad}(\mathfrak{A})\big) = \boldsymbol{Z}\big(\sqrt{\mathfrak{A}}\big)$ et $\mathfrak{I}(\boldsymbol{Z}(\mathfrak{A})) = \mathfrak{Rad}(\mathfrak{A})$.

3) $\boldsymbol{Z} \circ \mathfrak{I} \circ \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}$ et $\mathfrak{I} \circ \boldsymbol{Z} \circ \mathfrak{I} = \mathfrak{I}$. En particulier, $\mathfrak{I}$ établit une *bijection* entre les parties fermées de $\mathbb{A}_n(k)$ et les idéaux de l'image de $\mathcal{I}$.

On prendra garde du fait qu'il est faux en général que l'image de $\mathcal{I}$ soit l'ensemble des idéaux radicaux de $\boldsymbol{A}$. Lorsque $\boldsymbol{A} = \mathbb{R}[X]$, l'idéal $\mathfrak{A} = \langle X^2 + 1\rangle$ est maximal mais $\boldsymbol{Z}(\mathfrak{A}) = \varnothing$ et donc $\mathfrak{A}$ n'appartient pas à l'image de $\mathcal{I}$.

Algèbres de polynômes à coefficients dans un corps algébriquement clos

Lorsque le corps k de coefficients est algébriquement clos, des simplifications considérables de la théorie ont lieu grâce au "Théorème des zéros de Hilbert" (le NullStellenSatz)([58]). Il affirme que, pour tout idéal $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A} = k[X_1, \dots, X_n]$, on a :

$$\boxed{\begin{array}{c}\boldsymbol{Z}(\mathfrak{A}) = \varnothing, \quad \text{si et seulement si,} \quad \mathfrak{A} = \boldsymbol{A}\\ \text{dont on déduit : } \mathfrak{Rad}(\mathfrak{A}) = \mathcal{I}(\boldsymbol{Z}(\mathfrak{A})) = \sqrt{\mathfrak{A}}\end{array}}$$

Les propositions suivantes en découlent :

16.3.1-4. Proposition : *Soit $\boldsymbol{A} = k[X_1, \dots, X_n]$, où k est un corps algébriquement clos. L'application $\Xi_{\boldsymbol{A}} : \mathbb{A}_n(k) \to \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ est un homéomorphisme sur $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$.*

Démonstration : D'après le théorème des zéros de Hilbert, tout idéal propre de $\boldsymbol{A}$ possède au moins un zéro dans $\mathbb{A}_n(k)$, ceci signifie précisément qu'il est contenu dans un idéal maximal de la forme $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{a}}$. En particulier, tout idéal maximal de $\boldsymbol{A}$ est de la forme $\Xi_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})$. ∎

16.3.1-5. Théorème : *Soit $\boldsymbol{A} = k[X_1, \dots, X_n]$, où k est un corps algébriquement clos. Alors :*

a) *Les applications :*

$$\begin{aligned}\{\textit{fermés de } \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})\} &\longrightarrow \{\textit{fermés de } \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})\}\\ \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}} &\longmapsto \boldsymbol{F}_{\mathfrak{m}} := \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}} \cap \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})\\ \{\textit{ouverts de } \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})\} &\longrightarrow \{\textit{ouverts de } \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})\}\\ U_{\mathfrak{p}} &\longmapsto U_{\mathfrak{m}} := U_{\mathfrak{p}} \cap \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})\end{aligned}$$

*où les indices $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{m}$ font référence respectivement aux spectres $\mathfrak{p}$remier et $\mathfrak{m}$aximal, **sont bijectives**.*

En particulier, pour tout ouvert $U_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$, l'intersection des ouverts V de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$

[58] On pourra consulter [Ful] pages 20–22, pour une démonstration très simple des théorèmes de Hilbert.

vérifiant $U_{\mathfrak{m}} \subseteq V$, *est un ouvert de* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$, *à savoir : l'ouvert* $U_{\mathfrak{p}}$ ([59]).

b) $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ *est* partout dense *dans* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$.

c) *Les composantes irréductibles d'un fermé* $\boldsymbol{F}$ *de* $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ *sont les "traces" des composantes irréductibles de l'adhérence de* $\boldsymbol{F}$ *dans* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$

d) $\dim(\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})) = \dim(\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A}))$.

e) $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ *est irréductible.*

Démonstration :

a) La correspondance $\boldsymbol{F} \mapsto \boldsymbol{F} \cap \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ et clairement surjective. Soit maintenant $\boldsymbol{F}$ une partie fermée de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$, on a $\boldsymbol{F} = V_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{A})$ et $\boldsymbol{F} \cap \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ est l'ensemble des idéaux *maximaux* de $\boldsymbol{A}$ contenant $\mathfrak{A}$. L'adhérence de cet ensemble dans $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est l'ensemble des idéaux premiers de $\boldsymbol{A}$ contenant $\mathfrak{Rad}(\mathfrak{A})$, soit, d'après le théorème des zéros de Hilbert : $V_{\mathfrak{p}}(\sqrt{\mathfrak{A}})$, et cet ensemble est précisément $\boldsymbol{F}$; la correspondance $\boldsymbol{F} \mapsto \boldsymbol{F} \cap \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ admet donc un inverse à gauche (l'adhérence dans $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$), ce qui entraîne son injectivité.

L'assertion concernant les ouverts en découle par "passage aux complémentaires".

b) Immédiat d'après (a).

c) Il suffit de montrer que si $\boldsymbol{F}$ est irréductible dans $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$, son adhérence $\overline{\boldsymbol{F}}$ dans $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ l'est également. Or si $\overline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}_1 \cup \boldsymbol{F}_2$, on aura $\boldsymbol{F} = \big(\boldsymbol{F}_1 \cap \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})\big) \cup \big(\boldsymbol{F}_1 \cap \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})\big)$ et par exemple $\boldsymbol{F} = \big(\boldsymbol{F}_1 \cap \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})\big)$, auquel cas $\overline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}_1$ d'après (a).

d,e) Immédiats d'après (c). ∎

16.3.1-6. Remarque sur le foncteur "image inverse de faisceaux" : Soit $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ une application continue entre deux espaces topologiques. Notons $\mathrm{Fais}(\boldsymbol{Y})$ et $\mathrm{Fais}(\boldsymbol{X})$ les catégories (abéliennes) des faisceaux de groupes abéliens sur $\boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{X}$ respectivement.

Foncteur image inverse pour les catégories de faisceaux. Pour tout $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Fais}(\boldsymbol{X}))$, la correspondance :

$$U \text{ (ouvert de } \boldsymbol{Y}) \quad \rightsquigarrow \quad \big(\tilde{f}^{-1}\mathcal{F}\big)(U) := \varinjlim_{f(U)\subseteq V} \mathcal{F}(V)\,, \quad (V \text{ ouvert de } \boldsymbol{X}),$$

est un préfaisceau sur $\boldsymbol{Y}$ mais n'est généralement pas un faisceau. On définit alors $f^{-1}(\mathcal{F})$ comme étant "le faisceau associé" au préfaisceau $\tilde{f}^{-1}\mathcal{F}$.

Il résulte immédiatement de cette définition que pour tout $y \in \boldsymbol{Y}$, on a un isomorphisme pour les germes : $(f^{-1}\mathcal{F})_{(y)} \equiv \mathcal{F}_{(f(y))}$, et le foncteur $f^{-1} : \mathrm{Fais}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}(\boldsymbol{Y})$ est additif et *exact*.

Restriction de faisceaux. Dans le cas particulier où $\boldsymbol{Y}$ est un sous-ensemble de $\boldsymbol{X}$ muni de la topologie induite et que $\iota : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ est l'application canonique d'inclusion, on définit «la restriction d'un faisceau $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Fais}(\boldsymbol{X}))$ à $\boldsymbol{Y}$» comme étant le faisceau $\iota^{-1}\mathcal{F}$, noté également $\mathcal{F}|_{\boldsymbol{Y}}$.

Signalons que le préfaisceau :

$$U \text{ (ouvert de } \boldsymbol{Y}) \quad \rightsquigarrow \quad \big(\tilde{\iota}^{-1}\mathcal{F}\big)(U) = \varinjlim_{U\subseteq V} \mathcal{F}(V)\,, \ (V \text{ ouvert de } \boldsymbol{X}),$$

n'est pas non plus, en toute généralité, un faisceau. C'est cependant le cas dans bien de situations, par exemple :

1) Lorsque $\boldsymbol{Y}$ admet une base de voisinages paracompacts (*cf.* [God$_2$] §**3.3** page 151).

2) Dans le cas où $\boldsymbol{Y} = \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A}) \subseteq \boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et $\boldsymbol{A}$ est une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos.

[59] Cette remarque sera particulièrement utile dans l'étude du foncteur de "restriction de faisceaux" (*cf.* encadré 16.3.1-6, page 210).

Où seule la situation ((2)) nous concerne directement dans ce chapitre. Elle est conséquence immédiate de l'assertion (a) du théorème 16.3.1-5, qui montre que pour tout faisceau $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Fais}(\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})))$ et tout ouvert $U_{\mathfrak{m}} \in \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$, on a :

$$\mathcal{F}(U_{\mathfrak{p}}) = \varinjlim_{U_{\mathfrak{m}} \subseteq V} \mathcal{F}(V) = \big(\tilde{\iota}^{-1}\mathcal{F}\big)(U_{\mathfrak{m}})\,, \quad \text{soit,} \quad \Gamma(U_{\mathfrak{m}}; \tilde{\iota}^{-1}\mathcal{F}) = \Gamma(U_{\mathfrak{p}}; \mathcal{F})\,. \tag{‡‡}$$

Ce qui entraîne aussitôt l'exactitude de la suite :

$$\mathbf{0} \to \big(\tilde{\iota}^{-1}\mathcal{F}\big)(U_{\mathfrak{m}}) \to \prod_{i \in \mathfrak{I}} \big(\tilde{\iota}^{-1}\mathcal{F}\big)(U_{\mathfrak{m};i}) \to \prod_{i,j \in \mathfrak{I}} \big(\tilde{\iota}^{-1}\mathcal{F}\big)(U_{\mathfrak{m};ij})\,,$$

pour tout ouvert $U_{\mathfrak{m}}$ de $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ et tout recouvrement ouvert $\{U_{\mathfrak{m};i}\}_{i\in\mathfrak{I}}$ de $U_{\mathfrak{m}}$. Par conséquent, $\iota^{-1} = \tilde{\iota}^{-1}$

Cohomologie de faisceaux de l'image inverse d'un faisceaux. Si nous composons maintenant le foncteur image inverse avec le foncteur "image directe" f_*, (déjà introduit dans ces notes et rappelé dans l'encadré 16.5-4 page 217), on obtient, pour tout $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Fais}(\boldsymbol{X}))$, un morphisme de faisceaux :

$$\mathcal{F} \longrightarrow f_* f^{-1}\mathcal{F}\,,$$

dont un déduit un morphisme canonique entre les cohomologies de faisceaux :

$$H^*(\boldsymbol{X}; \mathcal{F}) \longrightarrow H^*(\boldsymbol{Y}; f^{-1}\mathcal{F})\,.$$

Ce morphisme n'est pas un isomorphisme en général, mais dans le cas particulier de spectres, on a :

16.3.1-6.1. Proposition : *Soit $\boldsymbol{A}$ une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos, notons $\boldsymbol{Y} = \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et $\iota : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ l'injection canonique. Alors, pour tout faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ sur $\boldsymbol{X}$, le morphisme canonique :*

$$H^*(\boldsymbol{X}; \mathcal{F}) \longrightarrow H^*(\boldsymbol{Y}; \iota^{-1}\mathcal{F})\,.$$

est un isomorphisme.

Démonstration : En effet, l'égalité $\Gamma(U_{\mathfrak{m}}; \iota^{-1}\mathcal{G}) = \Gamma(U_{\mathfrak{p}}; \mathcal{G})$, vérifiée pour tout $\mathcal{G} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Fais}(\boldsymbol{X}))$ et tout ouvert $U_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$, entraîne que la restriction d'un faisceau flasque sur $\boldsymbol{X}$ sera également flasque sur $\boldsymbol{Y}$, et comme d'autre part le foncteur ι^{-1} est exact, la restriction d'une résolution flasque de $\mathcal{F}$ sur $\boldsymbol{X}$ sera une résolution flasque de $\iota^{-1}\mathcal{F}$ sur $\boldsymbol{Y}$.

L'égalité $\Gamma(\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A}); \iota^{-1}\mathcal{G}) = \Gamma(\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}); \mathcal{G})$, vérifiée pour tout $\mathcal{G} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Fais}(\boldsymbol{X}))$, termine la démonstration de cette proposition. ∎

Equivalence de catégories de faisceaux. Plaçons-nous dans le cas où $\boldsymbol{A}$ est une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos et $\boldsymbol{Y} = \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$ et $\boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$, notons $\iota : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ l'inclusion canonique. Les remarques précédentes montrent le théorème suivant :

16.3.1-6.1. Théorème : *Les foncteurs additifs :*

$$\iota_* : \mathrm{Fais}(\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}(\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})) \quad \textit{et} \quad \iota^{-1} : \mathrm{Fais}(\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}(\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A}))\,,$$

sont inverses l'un de l'autre, *il établissent donc des équivalences de catégories.*

Avertissement. On prendra garde du fait que la définition du foncteur "image inverse de faisceaux", valable pour les faisceaux de groupes abéliens, est inadaptée dans la catégorie d'espaces annelés. En effet, si $f : (\boldsymbol{Y}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}) \to (\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est un morphisme d'espaces annelés, et si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module, le faisceau $f^{-1}\mathcal{M}$ n'a pas de structure canonique de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$-module ; on définit alors l'«image inverse du $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module $\mathcal{M}$» par :

$$f^*\mathcal{M} := \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}} f^{-1}\mathcal{M}\,.$$

Nous reviendrons sur cette notion ultérieurement.

Dimension de $k[\boldsymbol{X_1}, \ldots, \boldsymbol{X_n}]$

Nous avons déjà remarqué dans les exemples 16.2.2-5 que $\dim(k) = 0$ et $\dim(k[X]) = 1$. On a plus généralement :

16.3.1-6. Proposition : *Soit k un corps arbitraire, alors* $\dim(k[X_1,\dots,X_n]) = n$.

16.3.1-7. Rappel sur les anneaux de fractions-I : Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire.

On appelle «système multiplicatif» tout ensemble $S \subseteq \boldsymbol{A}$ vérifiant : $1 \in S$, et $st \in S$, pour tous $s,t \in S$. (Les complémentaires des idéaux premiers sont des exemples importants de systèmes multiplicatifs.)

Soit S un système multiplicatif de $\boldsymbol{A}$ et considérons l'ensemble $\boldsymbol{A}\times S$, muni de la relation *d'équivalence* :

$$(a,s)\ \mathcal{R}\ (b,t), \quad \text{si et seulement si, il existe } u \in S \text{ tel que } \quad u(at-bs) = 0\,.$$

Notons $S^{-1}\boldsymbol{A}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\boldsymbol{A}\times S$; et $\frac{a}{s}$ ou a/s la classe d'équivalence du couple (a,s). Les expressions suivantes définissent deux opérations binaires : une "addition $(+)$", et une "multiplication $(\cdot)$", sur $S^{-1}\boldsymbol{A}$:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at+bs}{st}; \quad \text{et} \quad \frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t} := \frac{ab}{st}\,; \tag{‡}$$

et $(S^{-1}\boldsymbol{A}, +, \cdot, \frac{0}{1}, \frac{1}{1})$ est un *anneau*. Posons $0 := \frac{0}{1}$ et $1 := \frac{1}{1}$, on a $0 \neq 1$, si et seulement si, $0 \notin S$.

Les anneaux $\boldsymbol{A}$ et $S^{-1}\boldsymbol{A}$ sont reliés par l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} \nu_S : \boldsymbol{A} &\longrightarrow S^{-1}\boldsymbol{A} \\ a &\longmapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

dont le noyau est la réunion des annulateurs dans $\boldsymbol{A}$ des éléments de S ; en particulier : si $\boldsymbol{A}$ est intègre ν_S est *injectif*.

16.3.1-7.1. Lemme (et exercice) : *Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif et $S \subseteq \boldsymbol{A}$ un système multiplicatif.*

a) *Montrer que l'anneau $S^{-1}\boldsymbol{A}$ est caractérisé par la propriété universelle suivante :*

*"Pour **tout** anneau $\boldsymbol{B}$ et tout homomorphisme d'anneaux $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, tel que : pour tout $s \in S$, $\alpha(s)$ est inversible dans $\boldsymbol{B}$, il existe un, et un seul, homomorphisme d'anneaux $\alpha' : S^{-1}\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ vérifiant $\alpha = \alpha' \circ \nu_S$."*

b) *Soit $\{s_1,\dots,s_r\} \subseteq \boldsymbol{A}$ un ensemble* fini, *et notons S le système multiplicatif de $\boldsymbol{A}$ consistant en tous les éléments de la forme $s_1^{m_1}\cdots s_r^{m_r}$, pour $m_i \in \mathbb{N}$. Déduire de (16.3.1-7.1-a) que l'homomorphisme déterminé par :*

$$\begin{aligned} A[X_1,\dots,X_r]/\langle s_1X_1-1,\dots,s_rX_r-1\rangle &\longrightarrow S^{-1}\boldsymbol{A} \\ [X_i] &\longmapsto \frac{1}{s_i}\,, \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

En déduire que si S admet un système fini de générateurs, l'anneau $S^{-1}\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{A}$-algèbre de type fini.

c) *Pour tout homomorphisme d'anneaux $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ notons $\alpha(S)$ le système multiplicatif image par α de S. Il existe alors un, et un seul, homomorphisme $\nu_{\alpha,S} : S^{-1}\boldsymbol{A} \to \alpha(S)^{-1}\boldsymbol{B}$ qui commute aux morphismes ν_S et $\nu_{\alpha(S)}$.*

16.3.1-7.1. Exercice : Soient $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif, et $S \subseteq T \subseteq \boldsymbol{A}$ deux systèmes multiplicatifs de $\boldsymbol{A}$.

1) Montrer qu'il existe un, et un seul, homomorphisme d'anneaux $\nu_{S,T} : S^{-1}\boldsymbol{A} \to T^{-1}\boldsymbol{A}$, tel que l'on ait : $\nu_T = \nu_{S,T} \circ \nu_S$.

2) Montrer que $\nu_S(T)$ est un système multiplicatif de l'anneau $S^{-1}\boldsymbol{A}$, et que l'application canonique $T^{-1}\boldsymbol{A} \to (\nu_S(T))^{-1}(S^{-1}\boldsymbol{A})$ donnée par le lemme 16.3.1-7.1, est un isomorphisme d'anneaux.

3) Pour tout système multiplicatif $S \subseteq \boldsymbol{A}$, notons $\overline{S}$ l'ensemble des $t \in \boldsymbol{A}$ pour lesquels il existe $u \in \boldsymbol{A}$ et $s \in S$ tels que $stu \in S$; on a $\overline{S} \supseteq S$. Montrer que le morphisme canonique $\nu_{S,\overline{S}} : S^{-1}\boldsymbol{A} \to \overline{S}^{-1}\boldsymbol{A}$ est un isomorphisme d'anneaux.

Réciproquement, montrer que si T est un système multiplicatif de $\boldsymbol{A}$ vérifiant : $S \subseteq T$ et le morphisme canonique $\nu_{S,T} : S^{-1}\boldsymbol{A} \to T^{-1}\boldsymbol{A}$, est un isomorphisme, alors $S \subseteq T \subseteq \overline{S}$.

16.3.1-7.1. Définition : Soit $\mathfrak{A}$ un idéal de $\boldsymbol{A}$, on note $S^{-1}\mathfrak{A}$ l'idéal de $S^{-1}\boldsymbol{A}$ *engendré* par $\nu_S(\mathfrak{A})$. Les éléments de $S^{-1}\mathfrak{A}$ sont alors les fractions de la forme $\frac{a}{s}$ où $a \in \mathfrak{A}$ et $s \in S$.

16.3.1-7.1. Lemme : *Le notations étant comme ci-dessus, on a :*

1) *Pour tout idéal* $\mathfrak{B} \in S^{-1}\boldsymbol{A}$, *on a* $S^{-1}(\nu_S^{-1}(\mathfrak{B})) = \mathfrak{B}$, *en particulier* $\mathrm{Spec}(\nu_S)$ *est injective et* $S^{-1}\boldsymbol{A}$ *est nœthérien si* $\boldsymbol{A}$ *l'est.*

2) *Pour tout idéal* $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}$, *on a* $S^{-1}\mathfrak{A} = S^{-1}\boldsymbol{A}$, *si et seulement si,* $\mathfrak{A} \cap S \neq \varnothing$.

3) *Lorsque* $\mathfrak{P}$ *est un idéal premier de* $\boldsymbol{A}$ *disjoint de* S, *l'idéal* $S^{-1}\mathfrak{P}$ *est premier dans* $S^{-1}\boldsymbol{A}$ *et*
$$\nu_S^{-1}(S^{-1}\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\,.$$

4) *L'application* $\mathrm{Spec}(\nu_S) : \mathrm{Spec}(S^{-1}\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ *établit une* bijection *entre les idéaux premiers (resp. maximaux) de* $S^{-1}\boldsymbol{A}$ *et ceux de* $\boldsymbol{A}$ disjoints de S.

En particulier, pour $f \in \boldsymbol{A}$, *notons* $S(f)$ *le système multiplicatif* $\{1, f, f^2, \ldots, f^r, \ldots\}$. *L'anneau* $S(f)^{-1}\boldsymbol{A}$, *noté généralement* $\boldsymbol{A}_f$, *est tel que* $\mathrm{Spec}(\nu_{S(f)}) : \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}_f) \to \mathrm{Spec}\boldsymbol{A}$ *est un homéomorphisme d'image : l'ouvert* $D(f)$ *complémentaire dans* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ *de* $V(\langle f\rangle)$.

5) *Si* $\boldsymbol{A}$ *est réduit,* $S^{-1}\boldsymbol{A}$ *l'est également.*

Démonstration :

1) L'inclusion $S^{-1}(\nu_S^{-1}\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{B}$ étant évidente ; soit $b = \frac{a}{s} \in \mathfrak{B}$, l'élément $\frac{a}{1} = \frac{s}{1}\frac{a}{s}$ appartient alors à $\nu_S(\boldsymbol{A}) \cap \mathfrak{B}$ et donc $\frac{a}{1} \in \nu_S(\nu_S^{-1}\mathfrak{B})$ et comme $b = \frac{1}{s}\frac{a}{1}$, on a bien $b \in S^{-1}(\nu_S^{-1}\mathfrak{B})$.

2) Si $\frac{1}{1} = \frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{A}$, il existe $t \in S$ tel que $0 = t(s-a) = ts - ta$, et $ts \in \mathfrak{A} \cap S$. La réciproque est triviale.

3) En effet, supposons $\frac{a}{s}\frac{b}{t} \in S^{-1}(\mathfrak{P})$. Il existe alors $p \in \mathfrak{P}$ et $u \in S$ tels que $\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{p}{u}$. Par conséquent $0 = v(uab - stp)$ et $vuab \in \mathfrak{P}$, mais comme $vu \notin \mathfrak{P}$ et que $\mathfrak{P}$ est premier, on a $a \in \mathfrak{P}$ ou $b \in \mathfrak{P}$ et donc $\frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{P}$ ou $\frac{b}{t} \in S^{-1}\mathfrak{P}$. L'idéal $S^{-1}\mathfrak{P}$ est donc bien premier.

Les éléments de $\nu_S^{-1}(S^{-1}\mathfrak{P})$ sont les $x \in \boldsymbol{A}$ pour lesquels il existe $a \in \mathfrak{A}$ et $s \in S$ vérifiant $\frac{x}{1} = \frac{a}{s}$. Par conséquent, $t(sx - a) = 0$ pour un certain $t \in S$, et comme $ts \notin \mathfrak{P}$, on a nécessairement $x \in \mathfrak{P}$ et $\nu_S^{-1}(S^{-1}\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$.

4,5) Résultent immédiatement des assertions précédentes. ∎

La localisation des algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos

Lorsque l'anneau $\boldsymbol{A}$ est un quotient de $k[X_1, \ldots, X_n]$, le localisé $\boldsymbol{A}_f$, étant canoniquement isomorphe à l'algèbre $\boldsymbol{A}[Y]/\langle fY - 1\rangle$ (*cf.* lemme 16.3.1-7.1 (b)), est également une algèbre de type fini sur k.

Remarquons aussi que pour tout idéal maximal $\mathfrak{M} \in \boldsymbol{A}_f$, le corps résiduel de l'anneau local $(\boldsymbol{A}_f)_{\mathfrak{M}}$, que nous noterons $k(\mathfrak{M})$, est canoniquement isomorphe à k. On peut comprendre ceci par le fait que l'idéal $\mathfrak{M}$ "provient" d'un idéal maximal $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{a}}$ de $k[X_1, \ldots, X_n]$ et que l'isomorphisme canonique $(\boldsymbol{A}_f)_{\mathfrak{M}} \to k$ est précisément l'évaluation en $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_n(k)$. L'ensemble de ces applications d'évaluation donne une application canonique $\psi : \boldsymbol{A}_f \to \prod_{\mathfrak{M} \subseteq \boldsymbol{A}_f} k$. On a alors :

16.3.1-7.1. Proposition : *Sous les hypothèses ci-dessus :*

a) *Pour tout idéal* $\mathfrak{A} \subseteq \boldsymbol{A}_f$, *on a* $\mathfrak{Rad}(\mathfrak{A}) = \sqrt{\mathfrak{A}}$.

b) *Lorsque* $\boldsymbol{A}$ *est une algèbre* réduite *l'application* $\psi : \boldsymbol{A}_f \to \prod_{\mathfrak{M} \subseteq \boldsymbol{A}_f} k(\mathfrak{M})$ *est* injective.

Démonstration :

a) Le théorème de zéros de Hilbert s'applique à $\boldsymbol{A}_f$ puisque c'est une k-algèbre de type fini.

b) Le noyau de ψ est le radical (de Jacobson) de $\boldsymbol{A}$. D'après la question précédente, c'est le radical de nilpotence de $\boldsymbol{A}_f$, nul puisque $\boldsymbol{A}$ a été supposée réduite. ∎

Démonstration de la proposition 16.3.1-6 **:** Nous allons procéder par induction sur le nombre n de variables. Pour $n = 0, 1$, le résultat à déjà été justifié ; supposons-le démontré pour $n-1$ variables.

Notons $\boldsymbol{A}$ l'anneau $k[X_1, \ldots, X_n]$. La suite des idéaux premiers

$$\langle X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n\rangle \supsetneq \langle X_2, X_3, \ldots, X_n\rangle \supsetneq \langle X_3, \ldots, X_n\rangle \supsetneq \cdots \supsetneq \langle X_n\rangle \supsetneq \mathbf{0}$$

étant de longueur n, on a $\dim(\boldsymbol{A}) \geqslant n$.

Supposons maintenant l'existence d'une suite strictement décroissante d'idéaux premiers de $\boldsymbol{A}$ de longueur $n+1$:

$$\mathfrak{P}_0 \supsetneq \mathfrak{P}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{P}_n \supsetneq \mathfrak{P}_{n+1} = \mathbf{0}\,; \tag{$*$}$$

et telle que $\mathfrak{P}_0$ est l'idéal $\mathfrak{M}_{\mathbf{0}} := \langle X_1, \ldots, X_n\rangle$.

Pour chaque $j = 1, \ldots, n$, notons $\boldsymbol{A}_j := k[X_j]$ le sous-anneau de $\boldsymbol{A}$ des polynômes uniquement en la variable X_j. Les ensembles $S_j := \boldsymbol{A}_j\backslash\{0\}$ sont alors des systèmes multiplicatifs de $\boldsymbol{A}$, et l'anneau $S_j^{-1}\boldsymbol{A}$ s'identifie canoniquement à l'anneau des polynômes en $X_1, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_n$, à coefficients dans le corps de fractions $k(X_j)$ de $k[X_j]$, *i.e.* :

$$S_j^{-1}\boldsymbol{A} \equiv k(X_j)[X_1, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_n]\,.$$

En particulier, $\dim(S_j^{-1}\boldsymbol{A}) = n-1$ par hypothèse de récurrence.

On remarque alors que si $\mathfrak{P}_1$ rencontre S_j, on a nécessairement $X_j \in \mathfrak{P}_1$. En effet, soit

$$P(X_j) = X_j^r(1 - X_jQ(X_j)) \in \mathfrak{P}_1\,,$$

et supposons que $X_j \notin \mathfrak{P}_1$; la primalité de $\mathfrak{P}_j$ impliquerait alors que $1 + X_jQ(X_j) \in \mathfrak{P}_1 \subseteq \mathfrak{P}_0 \ni X_j$, mais ceci est impossible. Ceci étant, si $\mathfrak{P}_1$ rencontre S_j, pour tout $j = 1, \ldots, n$, on devrait avoir $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{M}_{\mathbf{0}}$, et ce serait contraire aux données initiales. Il existe donc j_0 tel que $S_{j_0} \cap \mathfrak{P}_1 = \varnothing$. Le rappel sur les anneaux de fractions montre alors que l'on a une suite strictement décroissante d'idéaux premiers de $S_{j_0}^{-1}\boldsymbol{A}$:

$$S_{j_0}^{-1}\mathfrak{P}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq S_{j_0}^{-1}\mathfrak{P}_n \supsetneq S_{j_0}^{-1}\mathfrak{P}_{n+1} = \mathbf{0}\,;$$

de longueur n, ce qui est impossible puisque $S_{j_0}^{-1}\boldsymbol{A}$ est de dimension $n-1$.

Les suites $(*)$ ne peuvent donc pas exister avec $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{M}_{\mathbf{0}}$.

Or, si k est un corps algébriquement clos, l'idéal $\mathfrak{P}_0$, que nous pouvons toujours supposer maximal, sera de la forme $\langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n\rangle$ et l'homomorphisme d'anneaux $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ déterminé par $X_j \mapsto X_j + a_j$, qui est un automorphisme, transformera la suite $(*)$ en une suite de même longueur où le premier terme sera l'idéal $\mathfrak{M}_{\mathbf{0}}$, et ceci nous emmène de nouveau à une contradiction. On conclut donc que lorsque k est algébriquement clos, l'anneau $k[X_1, \ldots, X_n]$ est de dimension n.

Lorsque k n'est pas algébriquement clos, on considère une clôture algébrique $\bar{k}$ de k. L'extension d'anneaux $\boldsymbol{A} := k[X_1, \ldots, X_l] \subseteq \overline{\boldsymbol{A}} := \bar{k}[X_1, \ldots, X_l]$ est alors *entière* et l'on démontre en théorie d'extension d'anneaux que dans ce cas : pour tout idéal premier (resp. maximal) $\mathfrak{P} \subseteq \boldsymbol{A}$, il existe un idéal premier (resp. maximal) $\mathfrak{Q}$ de $\overline{\boldsymbol{A}}$, tel que $\mathfrak{Q} \cap \boldsymbol{A} = \mathfrak{P}$. Par conséquent, $\dim(\boldsymbol{A}) \leqslant \dim\overline{\boldsymbol{A}} = n$, ce qui termine la démonstration. ∎

16.3.1-7. Remarque : La proposition 16.3.1-6 est un cas particulier du résultat qui affirme que si $\boldsymbol{A}$ est un anneau nœthérien, on a $\dim(\boldsymbol{A}[X]) = \dim(\boldsymbol{A}) + 1$. (*Cf.* [Mat] §**14** page 83.)

16.3.2 Le cas des algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos. Soient k un corps algébriquement clos et $\boldsymbol{B}$ une k-algèbre de type fini engendrée par des éléments $b_1, \ldots, b_n$. Le homomorphisme d'anneaux $\varphi : \boldsymbol{A} := k[X_1, \ldots, X_n] \to \boldsymbol{B}$, déterminé par $X_i \mapsto b_i$, est alors *surjectif* ; notons $\mathfrak{B}$ son noyau. La surjectivité de φ entraîne l'injectivité de l'application

$\varphi^{-1} : \mathrm{Parties}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Parties}(\boldsymbol{A})$, en particulier on a le diagramme([60]) :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Spec}(\boldsymbol{B}) & \xrightarrow[\equiv]{\varphi^{-1}} & V_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{B}) & \subseteq & \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}) \\
\subseteq\uparrow & & \subseteq\uparrow & & \subseteq\uparrow \\
\mathrm{Spm}(\boldsymbol{B}) & \xrightarrow[\equiv]{\varphi^{-1}} & V_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{B}) & \subseteq & \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A}) \\
 & & \equiv\uparrow \Xi_{\boldsymbol{A}} & & \equiv\uparrow \Xi_{\boldsymbol{A}} \\
 & & \boldsymbol{Z}\big(\sqrt{\mathfrak{B}}\big) = \boldsymbol{Z}(\mathfrak{B}) & \subseteq & k^n
\end{array}$$

qui montre que l'espace $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{B})$ s'identifie (topologiquement) à l'ensemble algébrique $V(\mathfrak{B})$. La proposition 16.3.1-4 et le théorème 16.3.1-5 sont donc également vérifiées pour l'algèbre $\boldsymbol{B}$.

16.3.2-1. Remarque : On observera dans ce qui précède que le spectre d'une algèbre de type fini $\boldsymbol{B}$ sur un corps algébriquement clos s'identifie à un ensemble algébrique "plongé" dans un espace affine k^n pour n suffisamment grand. L'espace topologique ainsi obtenu est indépendant du $n \gg 0$ mais aussi du radical de $\boldsymbol{B}$. En particulier l'application canonique $\mathrm{Spec}\big(\mathrm{Red}(\boldsymbol{B}) := \boldsymbol{B}/\sqrt{\boldsymbol{0}}\big) \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{B})$ est un *homéomorphisme* (de même pour Spm). Les constructions de cette section sont donc insuffisamment riches pour distinguer les anneaux. La notion de "schéma affine" comblera ce défaut. (*Cf.* le théorème 16.6.3-2)

16.4 Le foncteur "Spec" vers la catégorie d'espaces topologiques

16.4.1 Applications continues associées aux homomorphismes d'anneaux. Soit $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un homomorphisme d'anneaux. L'application $\alpha^{-1} : \mathrm{Parties}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Parties}(\boldsymbol{A})$ associe à tout idéal (resp. premier) de $\boldsymbol{B}$, un idéal (resp. premier) de $\boldsymbol{A}$; mais il est faux en général que l'image inverse d'un idéal maximal soit également un idéal maximal ([61]). L'application α^{-1} définit en tout cas une application, notée $\mathrm{Spec}(\alpha)$, de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{B})$ à valeurs dans $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$.

16.4.1-1. Lemme : *L'application* $\mathrm{Spec}(\alpha) : \mathrm{Spec}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ *est continue.*

Démonstration : Il suffira de montrer que l'image inverse par $\mathrm{Spec}(\alpha)$ d'une partie fermée $V_{\mathfrak{p}}(A)$ de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est fermée dans $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{B})$. Or, un idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\boldsymbol{B}$ appartient à l'image inverse par $\mathrm{Spec}(\alpha)$ de $V_{\mathfrak{p}}(A)$, si et seulement si, $\alpha^{-1}(\mathfrak{B}) \supseteq A$; et ceci équivaut à dire que $\mathfrak{P} \supseteq \alpha(A)$. Par conséquent, $\mathrm{Spec}(\alpha)^{-1}(V_{\mathfrak{p}}(A)) = V_{\mathfrak{p}}(\alpha(A))$. ∎

Fonctorialité

La correspondance qui associe à un anneau $\boldsymbol{A}$ son spectre $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et à un homomorphisme d'anneaux $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ l'application $\mathrm{Spec}(\alpha) : \mathrm{Spec}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Spec}(A)$ est fonctorielle *contravariante* de la catégorie des anneaux vers la catégorie des espaces topologiques.

De plus, tout fermé $\boldsymbol{F} \subseteq \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ étant de la forme $V_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})$, où $\mathfrak{A}$ est un idéal de $\boldsymbol{A}$, on a une identification canonique entre l'espace topologique $\boldsymbol{F}$ et $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}/\mathfrak{A})$. En effet, les idéaux premiers

[60] Les deux lignes supérieures ont lieu en toute généralité, elle reposent uniquement sur le fait que φ est *surjectif*.

[61] Un contre-exemple évident est donné par l'inclusion canonique $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. L'image inverse d'un idéal maximal est toujours maximal lorsque α est surjective et aussi lorsque $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des k-algèbres de type fini et que α est un homomorphisme de k-algèbres ; nous y reviendrons dans la section 16.4.2.

de $\boldsymbol{A}$ contenant $\mathfrak{A}$ *sont* les images réciproques par la projection canonique $\nu : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}/\mathfrak{A}$, des idéaux premiers de $\boldsymbol{A}/\mathfrak{A}$; le plongement $\boldsymbol{F} \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ donné par l'inclusion, s'identifie alors à $\mathrm{Spec}(\nu)$.

16.4.2 Le foncteur "Spm". Le fait que l'image inverse par un homomorphisme d'anneaux d'un idéal maximal puisse ne pas être maximal, introduit un obstacle à la définition d'un foncteur de la catégorie des anneaux vers la catégorie des espaces topologiques dont tous les points sont fermés. Le but de cette section est de montrer que lorsque l'on se restreint aux catégories d'algèbres sur un corps algébriquement clos, cet obstacle disparaît et le foncteur Spm existe, de même qu'un plongement *naturel* $\mathrm{Spm} \subseteq \mathrm{Spec}$.

Les foncteurs Spec et Spm sur la catégorie des k-algèbres de type fini
Soit $\alpha : \boldsymbol{A} = k[X_1, \ldots, X_n] \to \boldsymbol{B} = k[Y_1, \ldots, Y_m]$ un homomorphisme de k-algèbres où n et m sont arbitraires. Notons $P_i(\mathbf{Y}) := \alpha(X_i)$, pour $i = 1, \ldots, n$. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}_{\mathbf{b}} \in \boldsymbol{B}$, où $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$, l'anneau quotient $\boldsymbol{B}/\mathfrak{M}_{\mathbf{b}}$ s'identifie au corps k et la composée :

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\alpha} \boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{B}/\mathfrak{M}_{\mathbf{b}} \equiv k\,,$$

est *surjective* ; l'idéal $\alpha^{-1}(\mathfrak{M}_{\mathbf{b}})$ est donc maximal dans $\boldsymbol{A}$ et s'identifie à un certain $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$. On vérifie que $\mathbf{a} = (P_1(\mathbf{b}), \ldots, P_n(\mathbf{b}))$ et l'application $\mathrm{Spec}(\alpha) : \mathrm{Spec}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ se restreint en une application de $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{B})$ à valeurs dans $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$, qui, modulo les homéomorphismes $\Xi_{\boldsymbol{B}}$ et $\Xi_{\boldsymbol{A}}$ de la section 16.3.1, est donnée par $\tilde{\alpha} : \mathbf{b} \mapsto \mathbf{a}$. On a donc :

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{B} & \xleftarrow{\ \alpha\ } & \boldsymbol{A} \\
{\scriptstyle \mathrm{Spec}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Spec}} \\
\mathrm{Spec}(\boldsymbol{B}) & \xrightarrow{\ \mathrm{Spec}(\alpha)\ } & \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}), \qquad \text{où} \quad \mathfrak{P} \longmapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{P}) \\
{\scriptstyle \subseteq}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \subseteq} \\
\mathrm{Spm}(\boldsymbol{B}) & \xrightarrow{\ \mathrm{Spec}(\alpha)\ } & \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A}), \qquad \text{où} \quad \mathfrak{M}_{\mathbf{b}} \xrightarrow{\ \mathrm{Spec}(\alpha)\ } \alpha^{-1}(\mathfrak{M}_{\mathbf{b}}) = \mathfrak{M}_{\mathbf{a}} \\
{\scriptstyle \Xi_{\boldsymbol{B}}}\uparrow \equiv & & \equiv \uparrow{\scriptstyle \Xi_{\boldsymbol{A}}} \qquad\qquad\qquad\qquad {\scriptstyle \Xi_{\boldsymbol{B}}}\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow{\scriptstyle \Xi_{\boldsymbol{A}}} \\
k^m & \xrightarrow{\ \tilde{\alpha}\ } & k^n, \qquad \text{où} \quad \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m) \xmapsto{\ \tilde{\alpha}\ } (P_1(\mathbf{b}), \ldots, P_n(\mathbf{b})) = \mathbf{a}
\end{array} \tag{$\mathcal{D}$}$$

Lorsque, dans ce qui précède, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des k-algèbres de type fini, il existe des entiers $n, m \in \mathbb{N}$, des surjections de k-algèbres $\nu : k[X_1, \ldots, X_n] \to \boldsymbol{A}$ et $\mu : k[Y_1, \ldots, Y_m] \to \boldsymbol{B}$, et un homomorphisme d'anneaux $\alpha' : k[X_1, \ldots, X_n] \to k[Y_1, \ldots, Y_m]$, tels que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
k[X_1, \ldots, X_n] & \xrightarrow{\ \alpha'\ } & k[Y_1, \ldots, Y_m] \\
{\scriptstyle \nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\
\boldsymbol{A} & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \boldsymbol{B}
\end{array} \qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Spec}(k[X_1, \ldots, X_n]) & \xleftarrow{\ \mathrm{Spec}(\alpha')\ } & \mathrm{Spec}(k[Y_1, \ldots, Y_m]) \\
{\scriptstyle \mathrm{Spec}(\nu)}\uparrow{\scriptstyle \subseteq} & & {\scriptstyle \subseteq}\uparrow{\scriptstyle \mathrm{Spec}(\mu)} \\
\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}) & \xleftarrow{\ \mathrm{Spec}(\alpha)\ } & \mathrm{Spec}(\boldsymbol{B})
\end{array}$$

L'application $\mathrm{Spec}(\alpha) : \mathrm{Spec}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est donc restriction de $\mathrm{Spec}(\alpha')$ et par conséquent $\mathrm{Spec}(\alpha)(\mathrm{Spm}(\boldsymbol{B})) \subseteq \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$. Le diagramme $(\mathcal{D})$ est donc valable en toute généralité si l'on remplace k^n et k^m par les ensembles des zéros des idéaux noyaux de ν et μ respectivement.

16.5 Catégorie des espaces (localement) annelés

16.5-1. Définitions :

a) Soit $\boldsymbol{Y}$ un espace topologique. Un faisceau $\underline{\boldsymbol{A}}$ sur $\boldsymbol{Y}$ est dit «faisceau d'anneaux», si pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{Y}$, le groupe $\underline{\boldsymbol{A}}(U)$ est muni d'une structure d'anneau (avec identité multiplicative) ; de sorte que les morphismes de restriction $\rho_V^U : \underline{\boldsymbol{A}}(U) \to \underline{\boldsymbol{A}}(V)$, sont des homomorphismes d'anneaux.

b) Soient $\underline{\boldsymbol{A}}$ et $\underline{\boldsymbol{B}}$ deux faisceaux d'anneaux sur $\boldsymbol{Y}$. On appelle «morphisme de faisceaux d'anneaux de $\underline{\boldsymbol{A}}$ vers $\underline{\boldsymbol{B}}$», la donnée d'un morphisme de faisceaux $\alpha : \underline{\boldsymbol{A}} \to \underline{\boldsymbol{B}}$ tel que pour tout $U \in \boldsymbol{Y}$, l'application $\alpha(U) : \underline{\boldsymbol{A}}(U) \to \underline{\boldsymbol{B}}(U)$, est un homomorphisme d'anneaux.

16.5-2. Exercice : De manière analogue, on peut définir la notion de «préfaisceau d'anneaux».

a) Montrer que le faisceau associé à un préfaisceau d'anneau est un faisceau d'anneaux.

b) Montrer qu'un faisceau d'anneau (non nul) possède des sections globales non nulles.

16.5-3. Définitions :

a) On appelle «espace annelé», la donnée d'un couple $(\boldsymbol{Y}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ constitué d'un espace topologique $\boldsymbol{Y}$ et d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$ sur $\boldsymbol{Y}$, que l'on appelle «le faisceau structural de l'espace annelé».

b) On appelle «espace localement annelé», la donnée d'un espace annelé $(\boldsymbol{Y}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ tel que pour tout $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$, l'anneau $(\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})_{(\boldsymbol{y})}$ des germes des sections de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$ en $\boldsymbol{y}$, soit un *anneau local*.

c) Soient $(\boldsymbol{X}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ et $(\boldsymbol{Y}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ deux espaces annelés. On appelle «morphisme d'espaces annelés de $(\boldsymbol{X}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ à valeurs dans $(\boldsymbol{Y}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$», la donnée d'un couple $(f; f^{\#})$, où $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est une application continue et où $f^{\#} : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to f_* \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux.

d) Un morphisme d'espaces annelés $(f; f^{\#})$ entre deux espaces *localement annelés* : $(\boldsymbol{X}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ et $(\boldsymbol{Y}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$, est dit «localement annelé», lorsque les homomorphismes d'anneaux induits sur les germes $(\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})_{(f(\boldsymbol{x}))} \to (\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})_{(\boldsymbol{x})}$ sont des homomorphismes *locaux*([62]), pour tout $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$.

16.5-4. Remarque et rappel : Pour toute application continue $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ et tout faisceau $\mathcal{F}$ sur $\boldsymbol{X}$, on note $f_* \mathcal{F}$ le préfaisceau sur $\boldsymbol{Y}$ «image directe par f», défini par : $U \rightsquigarrow \mathcal{F}(f^{-1}(U))$, pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{Y}$. Le préfaisceau $f_* \mathcal{F}$ est un faisceau. De même, si $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux sur $\boldsymbol{X}$, la correspondance qui associe

$$U \rightsquigarrow \alpha(f^{-1}(U)) : \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \to \mathcal{G}(f^{-1}(U)) ,$$

est un morphisme de faisceaux, noté $f_* \alpha$, de $f_* \mathcal{F}$ vers $f_* \mathcal{G}$.

Notons $\mathrm{Fais}(\boldsymbol{X})$ la catégorie des faisceaux sur $\boldsymbol{X}$. La correspondance $f_* : \mathrm{Fais}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}(\boldsymbol{Y})$, qui associe $\mathcal{F} \rightsquigarrow f_* \mathcal{F}$ et $\alpha \rightsquigarrow f_* \alpha$, est un foncteur *additif* de $\mathrm{Fais}(\boldsymbol{X})$ vers $\mathrm{Fais}(\boldsymbol{Y})$; elle transforme la sous-catégorie de $\mathrm{Fais}(\boldsymbol{X})$ des faisceaux d'anneaux sur $\boldsymbol{X}$ (où les morphismes sont les morphismes de faisceaux d'anneaux), vers la sous-catégorie de $\mathrm{Fais}(\boldsymbol{Y})$ des faisceaux d'anneaux.

Soient $(\boldsymbol{X}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ un espace annelé et $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ une application continue. Le couple $(\boldsymbol{Y}; f_* \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est alors un espace annelé, et $(f, \mathrm{id}_{f_* \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}})$ est un morphisme d'espaces annelés de $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ vers $(\boldsymbol{Y}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$.

[62] Un homomorphisme d'anneaux $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ entre deux anneaux locaux est dit «local» lorsque $\alpha^{-1}(\mathfrak{M}_{\boldsymbol{B}}) = \mathfrak{M}_{\boldsymbol{A}}$.

Soient $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$, $(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ et $(\boldsymbol{Z};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}})$ trois espaces annelés et

$$(f;f^{\#}):(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\to(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})\quad\text{et}\quad(g;g^{\#}):(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})\to(\boldsymbol{Z};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}})\,,$$

des morphismes d'espaces annelés. La composée $g\circ f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Z}$ est continue et l'on a des morphisme de faisceaux d'algèbres :

$$g^{\#}:\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}\to g_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}\quad\text{et}\quad f^{\#}:\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}\to f_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\,,$$

et comme $g_*:\mathrm{Fais}(\boldsymbol{Y})\rightsquigarrow\mathrm{Fais}(\boldsymbol{Z})$ est fonctorielle, l'image directe $g_*(f^{\#})$ du morphisme d'anneaux $f^{\#}$, est un morphisme d'anneaux $g_*(f^{\#}):g_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}\to g_*f_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$, où $g_*\circ f_*=(g\circ f)_*$. On définit alors la composée de $(g;g^{\#})$ par $(f;f^{\#})$ par :

$$\boxed{(g;g^{\#})\circ(f;f^{\#}):=(g\circ f;g_*(f^{\#})\circ g^{\#})}$$

16.5-5. Définition : Les espaces (localement) annelés et les morphismes (localement) annelés munis de cette lois de composition, constituent la «catégorie des espaces (localement) annelés».

16.6 Schéma affine associé à un anneau commutatif

Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau arbitraire et notons $\boldsymbol{X}=\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$. Nous allons munir l'espace topologique $\boldsymbol{X}$ d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$.

Ouverts principaux

La topologie spectrale admet une base d'ouverts qui jouera un rôle fondamental dans le développement de la théorie, c'est l'ensemble des «ouverts principaux».

16.6-1. Définition : On appelle «ouvert principal» de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ le complémentaire d'un fermé de la forme $V_{\mathfrak{p}}(\langle a\rangle)$, où a désigne un élément arbitraire de $\boldsymbol{A}$; on note $D(a):=V_{\mathfrak{p}}(\langle a\rangle)^{\mathrm{c}}$.

16.6-2. Lemme : *Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire.*

1) *L'ensemble des ouverts principaux de* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ *constitue une base pour la topologie spectrale de* $\mathrm{Spec}(A)$.

2) *Lorsque $\boldsymbol{A}$ est nœthérien, tout ouvert est réunion* finie *d'ouverts principaux.*

Démonstration :

1) En effet, soit U un ouvert de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ de complémentaire, le fermé $\boldsymbol{F}$. On a $\boldsymbol{F}=V_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})$ pour un certain idéal $\mathfrak{A}$ de $\boldsymbol{A}$. Notons $\mathfrak{A}=\langle f_i\rangle_{i\in I}$, alors $V_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})=\bigcap_{i\in I}V_{\mathfrak{p}}(\langle f_i\rangle)$ et $U=\bigcup_{i\in I}D(f_i)$.

2) Lorsque $\boldsymbol{A}$ est nœthérien, il existe un ensemble *fini* $\{a_1,\dots,a_r\}$ d'éléments de $\boldsymbol{A}$ tel que :

$$\mathfrak{A}=\langle a_1,\dots,a_r\rangle=\langle a_1\rangle+\cdots+\langle a_r\rangle\,,$$

d'où $U=D(a_1)\cup\cdots\cup D(a_r)$. ∎

16.6-3. Exercice :

a) Montrer que la famille des ouverts principaux est stable par intersection finie.

b) Monter que l'intersection des ouverts $D(f)$ et $D(g)$ est vide, si et seulement si, fg est nilpotent.

c) Monter que $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}) = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_r)$, si et seulement si, $1 \in \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$.

16.6.1 Faisceau d'anneaux sur Spec($\boldsymbol{A}$). Nous allons définir maintenant la structure d'«espace localement annelé» de $\boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$; le couple $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ sera alors appelé «le schéma affine associé à $\boldsymbol{A}$».

16.6.1-1. Rappel sur les anneaux de fractions-II : (Suite du rappel 16.3.1-7, page 212.)

Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire.

16.6.1-1.1. Définition et remarque : Lorsque le système multiplicatif S est le complémentaire d'un idéal premier $\mathfrak{P} \subseteq \boldsymbol{A}$, l'anneau $S^{-1}\boldsymbol{A}$ se note $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$; il est appelé : «le localisé de $\boldsymbol{A}$ en $\mathfrak{P}$». L'application canonique $\nu_S : \boldsymbol{A} \to S^{-1}\boldsymbol{A}$ sera notée $\nu_{\mathfrak{P}}$.

Le lemme 16.3.1-7.1 dans le rappel 16.3.1-7 (page 212), montre que $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$ possède un unique idéal maximal, à savoir $S^{-1}\mathfrak{P}$, il s'agit donc d'un anneau *local*.

La localisation comme foncteur

Considérons un $\boldsymbol{A}$-module M. Soit S un système multiplicatif de $\boldsymbol{A}$ et définissons, comme dans le cas des anneaux, la relation $\mathcal{R}_M$ sur $M \times S$ par

$$(m, s)\ \mathcal{R}_M\ (n, t), \quad \text{si et seulement si, il existe } u \in S \text{ tel que } \quad u(tm - sn) = 0\,.$$

La relation $\mathcal{R}_M$ est une équivalence et l'on note $S^{-1}M$ l'ensemble quotient et $\frac{m}{s}$ ou m/s la classe du couple (m, s) ; tout élément de $S^{-1}M$ admet une représentation sous la forme $\frac{m}{s}$. Les expressions analogues à (‡)(dans le rappel 16.3.1-7), munissent alors $S^{-1}M$ d'une structure de $S^{-1}\boldsymbol{A}$-module et l'application

$$\begin{array}{rcl} \nu(M)_S : M & \longrightarrow & S^{-1}M \\ m & \longmapsto & \dfrac{m}{1} \end{array}$$

notée également $\nu(M)_{\mathfrak{P}}$ lorsque $S = \boldsymbol{A}\backslash\mathfrak{P}$, est un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules dont le noyau est donné par l'ensemble des $m \in M$ dont l'annulateur dans $\boldsymbol{A}$ rencontre S.

Soit $\alpha : M_1 \to M_2$ un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules. L'application $\alpha \times \mathrm{id}_S : M_1 \times S \to M_2 \times S$ est compatible aux relations $\mathcal{R}_{M_1}$ et $\mathcal{R}_{M_2}$ et induit une application $S^{-1}\alpha : S^{-1}M_1 \to S^{-1}M_2$. On a :

$$S^{-1}\alpha(\tfrac{m}{s}) = \tfrac{\alpha(m)}{s}\,.$$

L'application $S^{-1}\alpha$ est un morphisme de $S^{-1}\boldsymbol{A}$-modules et $S^{-1}(\alpha \circ \beta) = S^{-1}\alpha \circ S^{-1}\beta$. La correspondance $M \rightsquigarrow S^{-1}M$, $\alpha \rightsquigarrow S^{-1}\alpha$ est donc un fonctorielle (et additive) de $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ vers $\mathrm{Mod}(S^{-1}\boldsymbol{A})$.

16.6.1-1.1. Exercice : Soient $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif, $S \subseteq \boldsymbol{A}$ un système multiplicatif et M un $\boldsymbol{A}$-module. Chaque élément $s \in S$ définit un endomorphisme de $\boldsymbol{A}$-module : $\mu(s) \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(M)$, par $\mu(s)(m) = sm$; notons $\mu(S) \subseteq \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(M)$ l'ensemble de ces endomorphismes. Prouver les assertions suivantes :

a) Si $\mu(S) \subseteq \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{A}}(M)$, l'application canonique $M \to S^{-1}M$ est *bijective*.

b) Tout $S^{-1}\boldsymbol{A}$-module $\mathcal{N}$ étant naturellement un $\boldsymbol{A}$-module, on peut calculer $S^{-1}\mathcal{N}$. Déduire de la question précédente que l'application canonique $\mathcal{N} \to S^{-1}\mathcal{N}$ est bijective.

c) Si $0 \in \mu(S)$, on a $S^{-1}M = \mathbf{0}$.

16.6.1-1.1. Proposition :

1) *Le foncteur* $S^{-1} : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(S^{-1}\boldsymbol{A})$ *est* exact.

2) *L'application* $S^{-1}\boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{A}} M \to S^{-1}M$, *définie par* $\frac{a}{s}\otimes m \mapsto \frac{am}{s}$, *est un isomorphisme de* $S^{-1}\boldsymbol{A}$*-modules.*

Démonstration :

1) Pour toute suite exacte de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathbf{0} \to M_1 \xrightarrow{\ \alpha\ } M_2 \xrightarrow{\ \beta\ } M_3 \to \mathbf{0}\,, \qquad (*)$$

on doit montrer l'exactitude de la suite :

$$\mathbf{0} \to S^{-1}M_1 \xrightarrow{\ S^{-1}\alpha\ } S^{-1}M_2 \xrightarrow{\ S^{-1}\beta\ } S^{-1}M_3 \to \mathbf{0}\,.$$

Surjectivité de $S^{-1}\beta$. Evidente, puisque tout élément de $S^{-1}M_3$ est de la forme $(\frac{m_3}{s})$, et comme $m_3 = \beta(m_2)$ pour un certain $m_2 \in M_2$, on a $S^{-1}\beta(\frac{m_2}{s}) = \frac{m_3}{s}$.

Exactitude en $S^{-2}M_2$. Soit $\frac{m_2}{s} \in \ker(S^{-1}\beta)$. On a alors $\frac{\beta(m_2)}{s} = 0$, de sorte qu'il existe $u \in S$, tel que $0 = u\beta(m_2) = \beta(sm_2)$, et comme $(*)$ est exacte, on aura $um_2 = \alpha(m_1)$, pour un certain $m_1 \in M_1$. Par conséquent, $\frac{um_2}{1} \in \mathrm{im}(S^{-1}\alpha)$ et donc $\frac{m_2}{s} = \frac{1}{us}\frac{um_2}{1} \in \mathrm{im}(S^{-1}\alpha)$.

Injectivité de $S^{-1}\alpha$. Lorsque $0 = S^{-1}\alpha(\frac{m_1}{s}) = \frac{\alpha(m_1)}{s}$, il existe $u \in S$ tel que $0 = u\alpha(m_1) = \alpha(sm_1)$, et comme α est injective dans $(*)$, on déduit que $sm_1 = 0$ et donc $\frac{m_1}{s} = \frac{1}{s}\frac{m_1}{1} = 0$.

2) Tout élément de $S^{-1}M$ est de la forme $\frac{m}{s}$, et l'application $S^{-1}\boldsymbol{A}\otimes M \to S^{-1}M$ est bien *surjective*. D'autre part, le morphisme canonique $\nu_S : \boldsymbol{A} \to S^{-1}\boldsymbol{A}$, vu comme morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules, donne lieu, après application du foncteur $\bullet \rightsquigarrow \bullet \otimes_{\boldsymbol{A}} M$, à un morphisme (de $\boldsymbol{A}$-modules) $M \to S^{-1}\boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{A}} M$ qui fait correspondre $m \mapsto \frac{1}{1}\otimes m$. La localisation par S, donne alors (*cf.* exercice 16.6.1-1.1 (b)) un morphisme :

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}M & \longrightarrow & S^{-1}\boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{A}} M \\ \frac{m}{s} & \longmapsto & \frac{1}{s}\otimes m \end{array}$$

La composition de $S^{-1}\boldsymbol{A}\otimes M \to S^{-1}M$ avec $S^{-1}M \to S^{-1}\boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{A}} M$, est alors l'identité sur $S^{-1}\boldsymbol{A}\otimes M$, ce qui entraîne l'injectivité de $S^{-1}\boldsymbol{A}\otimes M \to S^{-1}M$. ∎

16.6.1-1. Lemme (technique et exercice) : *Soient* $\boldsymbol{A}$ *un anneau commutatif et* $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$.

a) *Montrer que* $s \notin \mathfrak{P}$, *si et seulement si,* $D(s) \ni \mathfrak{P}$.

b) *Soit* $a \in \boldsymbol{A}$ *tel que* $\nu_{\mathfrak{P}}(a) = 0$. *Montrer qu'il existe un voisinage principal* $D(f)$ *de* $\mathfrak{P}$ *tel que, pour tout* $\mathfrak{Q} \in D(f)$, *on a* $\nu_{\mathfrak{Q}}(a) = 0$.

c) *Soit* $a \in \boldsymbol{A}$ *tel que* $\nu_{\mathfrak{P}}(a)$ *est inversible dans* $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$. *Montrer qu'il existe un voisinage principal* $D(f)$ *de* $\mathfrak{P}$ *tel que, pour tout* $\mathfrak{Q} \in D(f)$, *l'élément* $\nu_{\mathfrak{Q}}(a) \in \boldsymbol{A}_{\mathfrak{Q}}$ *est inversible.*

Démonstration de (c) : Soit $\nu_{\mathfrak{P}}(a) = \frac{a}{1}$ inversible dans $S^{-1}\boldsymbol{A}$. Il existe alors $b \in \boldsymbol{A}$ et $s \in \boldsymbol{A}\backslash\mathfrak{P}$ tels que $\frac{a}{1}\frac{b}{s} = \frac{1}{1}$, et donc, $u(ab - s) = 0$ $(*)$, pour un certain $u \in S$. La question (b) montre alors que sur le voisinage $W = D(u)\cap D(s) = D(su)$, la relation $(*)$ continuera d'être vérifiée avec $us \notin \mathfrak{Q} \in W$; l'élément $\nu_{\mathfrak{Q}}(a)$ sera donc inversible dans $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{Q}}$, pour tout $\mathfrak{Q} \in W$. ∎

Espace étalé au-dessus de Spec($\boldsymbol{A}$)

Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire et notons $\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}_{\boldsymbol{A}} := \amalg_{\mathfrak{P}\in\boldsymbol{X}}\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$ et la projection ensembliste $\pi : \mathcal{E} \to \boldsymbol{X}$ qui associe à chaque élément de $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$ le point $\mathfrak{P} \in \boldsymbol{X}$. Chaque élément $a \in \boldsymbol{A}$ définit alors une section $\Sigma(a)$ de π par $\Sigma(a)(\mathfrak{P}) := \nu_{\mathfrak{P}}(a)$.

16.6.1-2. Exercice : Montrer que la section $\Sigma(a)$ est nulle, si et seulement si, $a = 0$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir le faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$. Pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, on note $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U)$: l'ensemble des sections σ de π au-dessus de U, telles que pour tout $\mathfrak{P} \in U$, il existe un voisinage ouvert $\mathfrak{P} \in V_{\mathfrak{P}} \subseteq U$ et des éléments $a, b \in \boldsymbol{A}$, où $\nu_{\mathfrak{Q}}(y)$ est *inversible* dans $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{Q}}$, pour tout $\mathfrak{Q} \in V_{\mathfrak{P}}$, tels que

$$\boxed{\sigma(\mathfrak{Q}) = \frac{\nu_{\mathfrak{Q}}(a)}{\nu_{\mathfrak{Q}}(b)} \in \boldsymbol{A}_{\mathfrak{Q}}} \qquad \text{pour tout } \mathfrak{Q} \in V_{\mathfrak{P}}.$$

On remarquera maintenant que le fait que la famille de toutes les sections (locales) de $\pi : \mathcal{E} \to \boldsymbol{X}$ constituent un *faisceau*, fait que notre définition des sections $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U)$, étant de nature locale, fait automatiquement de la correspondance $U \rightsquigarrow \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U)$ un *faisceau*.

Etant données deux sections arbitraires de $\pi : \mathcal{E} \to \boldsymbol{X}$, au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, on définit leur somme $\sigma + \tau$ et leur produit $\sigma \cdot \tau$, point par point, par :

$$(\sigma + \tau)(\mathfrak{P}) := \sigma(\mathfrak{P}) + \tau(\mathfrak{P}) \in \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \quad \text{et} \quad (\sigma \cdot \tau)(\mathfrak{P}) := \sigma(\mathfrak{P})\tau(\mathfrak{P}) \in \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}\,,$$

pour tout $\mathfrak{P} \in U$.

16.6.1-3. Lemme (et exercice) :

a) *Pour toutes $\sigma, \tau \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U)$, les sections $\sigma + \tau$ et $\sigma \cdot \tau$ appartiennent à $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U)$. En particulier, $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U)$ est un anneau et $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est un faisceau d'anneaux sur $\boldsymbol{X}$.*

b) *Pour tout $\mathfrak{P} \in \boldsymbol{X}$, l'anneau des germes de sections $(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})_{(\mathfrak{P})}$ s'identifie à l'anneau local $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$.*

Démonstration de (b) : Soit $\mathfrak{P} \in \boldsymbol{X}$. Pour tout voisinage ouvert U de $\mathfrak{P}$ et toute section $\sigma \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U)$, l'élément $\sigma(\mathfrak{P})$ appartient, par définition, à l'anneau $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$, d'où une application bien définie, d'évaluation en $\mathfrak{P}$: $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U) \to \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$. Cette application étant clairement compatible aux opérations d'addition et produit, est un homomorphisme d'anneaux, compatible également aux restrictions d'ouverts. La limite inductive de ces applications :

$$\xi_{\mathfrak{P}} : \varinjlim_{U \ni \mathfrak{P}} \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U) \to \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}\,,$$

est donc canoniquement définie.

Injectivité de $\xi_{\mathfrak{P}}$. Comme la famille des voisinages ouverts de $\mathfrak{P}$ est filtrante supérieurement, tout germe de section de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ dont l'image dans $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$ est nulle, admettra une représentation de la forme $\frac{a}{s}$, où $a \in \boldsymbol{A}$, $s \notin \mathfrak{P}$ et $\frac{s}{1}$ inversible dans $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$. Lorsque $\frac{a}{s} = 0 \in \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$, il existe $u \notin \mathfrak{P}$ tel que $ua = 0$. Alors $\nu_{\mathfrak{Q}}(a) = 0$ sur le voisinage $D(u)$ de $\mathfrak{P}$ et donc la restriction de $\frac{a}{s}$ à l'ouvert $U \cap D(u)$ sera nulle. Le germe $\xi_{\mathfrak{P}}$ est donc nul.

Surjectivité de $\xi_{\mathfrak{P}}$. Les éléments de $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$ sont de la forme $\frac{a}{s}$, où $s \notin \mathfrak{P}$; en particulier $\frac{s}{1}$ est inversible dans $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$. Or le lemme 16.6.1-1 (c) prouve bien l'existence d'un voisinage ouvert W de $\mathfrak{P}$ sur lequel $\frac{s}{1}$ est inversible en chaque $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{Q}}$, pour tout $\mathfrak{Q} \in W$, d'où la surjectivité de $\xi_{\mathfrak{P}}$. ∎

16.6.1-4. Définition : Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire et $\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$. L'espace topologique localement annelé $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est appelé «le schéma affine associé à $\boldsymbol{A}$».

On appellera «schéma affine nœthérien» tout schéma affine associé à un anneau nœthérien.

16.6.2 Sections du faisceau structural sur un schéma nœthérien. Dans toute cette section $\boldsymbol{A}$ désignera un anneau ***nœthérien*** et l'on notera $\boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$.

Sections du faisceau structural au-dessus des ouverts principaux
Pour tout $f \in \boldsymbol{A}$, les idéaux premiers $\mathfrak{P} \in D(f)$ sont ceux vérifiant $f \notin \mathfrak{P}$. Chaque élément a/f^m de $\boldsymbol{A}_f$ définit alors une section $\xi_f\big(a/f^m\big) \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(D(f))$ par $\mathfrak{Q} \mapsto \nu_{\mathfrak{Q}}(a)/\nu_{\mathfrak{Q}}(f)^m$. L'application :

$$\xi_f : \boldsymbol{A}_f \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(D(f))\,,$$

ainsi définie est clairement un homomorphisme d'anneaux.

16.6.2-1. Proposition : *Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau **nœthérien** et $\boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$.*

a) *Pour tout $f \in \boldsymbol{A}$, l'application canonique $\xi_f : \boldsymbol{A}_f \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(D(f))$ est un* isomorphisme *d'anneaux.*

b) *En particulier, $\Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \equiv \boldsymbol{A}$.*

Démonstration :

a) Injectivité de ξ_f. Soit $a/f^m \in \boldsymbol{A}_f$ tel que pour tout $\mathfrak{P} \not\ni f$, on ait $a/f^m = 0$ dans $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$. Notons $\mathfrak{A} := \mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(a)$ et supposons que $\mathfrak{A} \cap S(f) = \varnothing$, où $S(f) := \{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$. La famille $\mathcal{F}(f)$ des idéaux de $\boldsymbol{A}$ qui ne rencontrent pas $S(f)$ est *inductive*, il existe donc un idéal $\mathfrak{B}$ *maximal dans la famille* $\mathcal{F}(f)$ contenant $\mathfrak{A}$. On montre que $\mathfrak{B}$ est *premier* ; mais alors $\mathfrak{B} \in D(f)$ et $a/f^m \neq 0$ dans $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{B}}$. Ceci est contradictoire et nécessairement $\mathfrak{A} \cap S(f) \neq \varnothing$, on a donc $a/f^m = 0$ dans $\boldsymbol{A}_f$.

a) Surjectivité de ξ_f. Soit $\sigma \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(D(f))$. Par définition, pour chaque $\mathfrak{P} \not\ni f$, il existe $a_{\mathfrak{P}} \in \boldsymbol{A}$ et $s_{\mathfrak{P}} \notin \mathfrak{P}$ tels que :

$$\sigma(\mathfrak{Q}) = \nu_{\mathfrak{Q}}(a_{\mathfrak{P}})/\nu_{\mathfrak{Q}}(s_{\mathfrak{P}})\,,$$

pour tout $\mathfrak{Q}$ appartenant au voisinage $D(f) \cap D(s_{\mathfrak{P}})$ de $\mathfrak{P}$. Comme $\boldsymbol{X}$ est un espace nœthérien nous pouvons recouvrir $D(f)$ par un nombre fini des ouverts $D(s_{\mathfrak{P}})$, notons les $\{D(s_1), D(s_2), \cdots, D(s_r)\}$. La condition de compatibilité pour chaque couple $a_i/s_i \in \boldsymbol{A}_{s_i}$ et $a_j/s_j \in \boldsymbol{A}_{s_j}$ se lit sur l'ouvert $D(s_is_j)$ et, suite à la question précédente, il existera des entiers $n(i,j) \in \mathbb{N}$, tels que l'on ait les égalités suivantes dans $\boldsymbol{A}$:

$$a_i s_j (s_i s_j)^{n(i,j)} = a_j s_i (s_i s_j)^{n(i,j)}\,, \quad \text{soit,} \quad \big(a_i s_i^{n(i,j)}\big) s_j^{n(i,j)+1} = \big(a_j s_j^{n(i,j)}\big) s_i^{n(i,j)+1}\,.$$

Remarquons maintenant que ces égalités sont toujours valables si l'on remplace les entiers $n(i,j)$ par un seul et unique entier $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. Posons alors pour chaque $i = 1, \ldots, r$:

$$A_i := a_i s_i^N \quad \text{et} \quad S_i := s_i^{N+1}\,,$$

de sorte que $A_i/S_i = a_i/s_i$ dans $\boldsymbol{A}_{s_i}$, $D(S_i) = D(s_i)$ et $\boxed{A_iS_j = A_jS_i}$ pour tous $i, j = 1, \ldots, r$.

Ceci étant, la condition $D(f) \subseteq D(s_1) \cup D(s_2) \cup \cdots \cup D(s_r)$, équivaut à $f \in \sqrt{\langle S_1, \ldots, S_r\rangle}$; il existe donc un entier $M \in \mathbb{N}$ et des éléments $B_i \in \boldsymbol{A}$, tels que : $\boxed{f^M = \sum_{i=1}^r B_iS_i}$. Posons : $\boxed{C = \sum_{i=1}^r B_iA_i}$; alors, pour chaque $j = 1, \ldots, r$, on a :

$$CS_j = \sum_{i=1}^r B_iA_iS_j = \sum_{i=1}^r B_iS_iA_j = f^MA_j\,,$$

et ceci signifie très précisément que la section de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(D(f))$ définie par $C/f^M \in \boldsymbol{A}_f$, lorsque restreinte à $D(fs_i)$, s'identifie à la section définie par a_i/s_i. Ce qui termine la démonstration de la question (a).

b) Comme $\boldsymbol{X} = D(1)$, on a bien $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}$. ∎

16.6.2-2. Exercice : Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau tel que $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ possède deux composantes connexes : C_1 et C_2.

a) Justifiez, à l'aide de la proposition 16.6.2-1, le fait qu'il existe un élément $e \in \boldsymbol{A}$ tel que :

$$\begin{cases} \nu_{\mathfrak{Q}}(e) = 1\,, & \text{si } \mathfrak{Q} \in C_1\,; \\ \nu_{\mathfrak{Q}}(e) = 0\,, & \text{autrement.} \end{cases}$$

b) Montrer qu'un tel élément est nécessairement *idempotent*, *i.e.*, $e^2 = e$. En déduire que $\boldsymbol{A}$ est isomorphe au produit de deux anneaux (non triviaux). (*Cf.* exercice 16.2.1-5.)

16.6.3 Le foncteur "Spec" vers la catégorie d'espaces topologiques annelés. Pour faire de la correspondance "Spec" un foncteur de la catégorie d'anneaux vers la catégorie d'espaces annelés nous devons encore définir, pour tout homomorphisme d'anneaux $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, le morphisme *d'espaces annelés* $\mathrm{Spec}(\alpha) : (\mathrm{Spec}(\boldsymbol{B}); \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{B})}) \to (\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}); \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})})$. Dans la section 16.4.1 (page 215) nous avons défini $\mathrm{Spec}(\alpha) : \mathrm{Spec}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et montré sa continuité dans le lemme 16.4.1-1, il ne nous reste donc qu'à définir le morphisme de faisceaux

$$\mathrm{Spec}(\alpha)^{\#} : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\alpha)_*\big(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{B})}\big)\,.$$

16.6.3-1. Rappel sur les localisations-III : (Suite des rappels 16.3.1-7, page 212 et 16.6.1-1, page 219.)

Soit $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un homomorphisme d'anneaux. Pour tout idéal premier $\mathfrak{R} \subseteq \boldsymbol{B}$, notons $S(\mathfrak{R}) := \boldsymbol{B}\backslash\mathfrak{R}$. On a $\alpha^{-1}(S(\mathfrak{R})) = S(\alpha^{-1}(\mathfrak{R}))$ et par conséquent $\alpha\big(S(\alpha^{-1}(\mathfrak{R}))\big) \subseteq S(\mathfrak{R})$; en particulier, le lemme 16.3.1-7.1 montre que α induit un homomorphisme canonique :

$$\boxed{\alpha_{\mathfrak{R}} : \boldsymbol{A}_{\alpha^{-1}(\mathfrak{R})} \longrightarrow \boldsymbol{B}_{\mathfrak{R}}}$$

Soit U un ouvert de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$, les sections de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})}(U)$ sont, par définition, les sections σ de $\mathcal{E}_{\boldsymbol{A}}$ (*cf.* 16.6.1 page 220), telles qu'en tout point $\mathfrak{P} \in U$, il existe $a, b \in \boldsymbol{A}$, où $\nu_{\mathfrak{P}}(b)$ est inversible dans $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$ et $\sigma(\mathfrak{Q}) = \nu_{\mathfrak{Q}}(a)/\nu_{\mathfrak{Q}}(b)$, pour tout $\mathfrak{Q}$ dans un voisinage de $\mathfrak{P}$.

D'autre part, les sections de $\mathrm{Spec}(\alpha)_*\big(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{B})}\big)$ au-dessus de U sont des sections de $\mathcal{E}_{\boldsymbol{B}}$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(\alpha)^{-1}(U)$, et $\mathfrak{R} \in \mathrm{Spec}(\alpha)^{-1}(U)$, si et seulement si, $\alpha^{-1}(\mathfrak{R}) \in U$. Nous pouvons donc associer, à toute section $\sigma \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})}(U)$, une section $\mathrm{Spec}(\alpha)^{\#}(\sigma)$ de $\mathcal{E}_{\boldsymbol{B}}$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(\alpha)^{-1}(U)$, en posant, pour $\mathfrak{R} \in \mathrm{Spec}(\alpha)^{-1}(U)$:

$$\boxed{\Big(\mathrm{Spec}(\alpha)^{\#}(\sigma)\Big)(\mathfrak{R}) := \alpha_{\mathfrak{R}}\Big(\sigma\big(\alpha^{-1}(\mathfrak{R})\big)\Big) \in \boldsymbol{B}_{\mathfrak{R}}}$$

16.6.3-1. Exercice :

a) Montrer que pour tout $\sigma \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})}(U)$, on a $\mathrm{Spec}(\alpha)^{\#}(\sigma) \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{B})}\big(\mathrm{Spec}(\alpha)^{-1}(U)\big)$. Puis, que le couple $(\mathrm{Spec}(\alpha), \mathrm{Spec}(\alpha)^{\#})$ est un morphisme d'espaces *localement* annelés de $\big(\mathrm{Spec}(\boldsymbol{B}); \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{B})}\big)$ vers $\big(\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}); \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})}\big)$.

b) Soient $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ et $\beta : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ deux homomorphismes d'anneaux. Prouver l'égalité :

$$\mathrm{Spec}(\beta)_*\big(\mathrm{Spec}(\alpha)^{\#}\big) \circ \mathrm{Spec}(\beta)^{\#} = \mathrm{Spec}(\beta \circ \alpha)^{\#}\,.$$

Le foncteur "Spec" vers la catégorie d'espaces localement annelés

La correspondance "Spec" qui associe :

$$\begin{cases} \bullet\ \text{à un anneau } \boldsymbol{A}\text{, l'espace topologique localement annelé } \big(\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}); \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})}\big)\,; \\ \bullet\ \text{à un homomorphisme d'anneaux } \alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}\text{, le morphisme d'espaces d'espaces localement annelés : } \big(\mathrm{Spec}(\alpha), \mathrm{Spec}(\alpha)^{\#}\big)\,; \end{cases}$$

est fonctorielle (contravariante) de la catégorie des anneaux vers la catégorie des espaces localement annelés.

Le résultat suivant affirme que tout morphisme d'espace localement annelé de $\big(\mathrm{Spec}(\boldsymbol{B});\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{B})}\big)$ vers $\big(\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A});\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})}\big)$ provient d'un homomorphisme d'anneaux de $\boldsymbol{A}$ vers $\boldsymbol{B}$ (il ne sera pas utilisé dans la suite).

16.6.3-2. Proposition : *Le foncteur qui fait correspondre à un anneau commutatif le schéma affine associé, est pleinement fidèle.*

Démonstration : [Har] proposition **2.3** page 73. ∎

16.7 Variétés algébriques affines

Soit k un corps algébriquement clos, et notons $\mathbb{A}_n(k)$ l'espace affine k^n.

16.7-1. Définition : On appelle «hypersurface» de l'espace affine $\mathbb{A}_n(k)$, l'ensemble des zéros d'un polynôme $P \in k[X_1,\dots,X_n]$, elle sera notée $\boldsymbol{Z}(P)$. Tout fermé de Zariski $\mathbb{A}_n(k)$ est alors intersection d'un nombre fini d'hypersurfaces.

On appelle «ouvert principal» de $\mathbb{A}_n(k)$ le complémentaire d'une hypersurface $\boldsymbol{Z}(P)$, il sera noté $D(P)$. Les ouverts principaux constituent une base d'ouverts pour la topologie de Zariski de $\mathbb{A}_n(k)$, et de même pour leurs traces sur un fermé de Zariski $\boldsymbol{Z} \subseteq \mathbb{A}_n(k)$.

16.7-2. Remarque et exercice : La notation des ouverts principaux est délibérément ambiguë. En effet, notons pour chaque $f \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z})$, par $D_{\mathfrak{p}}(f)$ l'ouvert principal de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}))$ des idéaux premiers ne contenant pas f. Prouver que, sous les hypothèses en cours, on a $D_{\mathfrak{p}}(f) \cap \boldsymbol{Z} = D(f) =$ le complémentaire de l'hypersurface $\boldsymbol{Z}(f)$ dans $\boldsymbol{Z}$.

16.7.1 Fonctions régulières sur $\boldsymbol{Z} \subseteq \mathbb{A}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{k})$. Une «fonction régulière» sur $\boldsymbol{Z}$ est toute application définie sur $\boldsymbol{Z}$ et à valeurs dans k, obtenue en évaluant un polynôme de $k[X_1,\dots,X_n]$ aux différents points de $\boldsymbol{Z}$. L'application de $k[X_1,\dots,X_n] \to \mathrm{Appl}(\boldsymbol{Z};k)$ ainsi définie est un homomorphisme d'anneaux de noyau : l'idéal $\mathcal{I}(\boldsymbol{Z})$ des polynômes s'annulant sur $\boldsymbol{Z}$; cet idéal est toujours *radical* et l'anneau des «fonctions régulières sur $\boldsymbol{Z}$» s'identifie à la k-algèbre *réduite* : $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}) = k[X_1,\dots,X_n]/\mathcal{I}(\boldsymbol{Z})$.

16.7.2 Le faisceau des fonctions régulières sur un un fermé de Zariski $\boldsymbol{Z} \subseteq \mathbb{A}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{k})$. Pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{Z}$, notons $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}(U)$ l'ensemble des applications $\sigma : U \to k$ telles que pour tout $\boldsymbol{x} \in U$ il existe un voisinage $\boldsymbol{x} \in V_{\boldsymbol{x}} \subseteq U$ et des polynômes $P, Q \in k[X_1,\dots,X_n]$ vérifiant $Q(\boldsymbol{y}) \neq 0$ et $\sigma(\boldsymbol{y}) = \frac{\mathcal{P}(\boldsymbol{y})}{Q(\boldsymbol{y})}$, pour tout $\boldsymbol{y} \in V_{\boldsymbol{x}}$.

Les sections ainsi définies appartiennent *a priori* au faisceau de *toutes* les applications des ouverts de $\boldsymbol{Z}$ à valeurs dans k. La définition des sections de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}(U)$ étant elle-même de nature locale, la correspondance $U \rightsquigarrow \mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}(U)$ *est faisceautique*. Le couple $(\boldsymbol{Z};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}})$ est donc un espace annelé.

16.7.2-1. Définition : L'espace annelé $(\boldsymbol{Z};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}})$ est appelé «variété algébrique affine».

16.7.3 Liens entre les variétés algébriques affines et les schémas affines. Gardons les notations des sections précédentes et considérons le schéma affine associé à l'algèbre $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z})$ que nous allons noter $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$, où $\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}))$. Rappelons que l'application qui associe à chaque point $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}$ l'idéal maximal $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z})$ est un homéomorphisme sur $\mathrm{Spm}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}))$. Dans ce qui suit nous allons identifier $\boldsymbol{Z}$ au spectre maximal de $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z})$ et considérer donc $\boldsymbol{Z}$ plongé (topologiquement) dans $\boldsymbol{X}$; notons $\iota : \boldsymbol{Z} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ ce plongement.

La notation $U_{\mathfrak{p}}$ désignera une partie ouverte de $\boldsymbol{X}$ et $U_{\mathfrak{m}} := U_{\mathfrak{p}} \cap \boldsymbol{Z}$. Nous avons déjà montré que l'application $U_{\mathfrak{p}} \mapsto U_{\mathfrak{m}}$ est *bijective* entre les ouverts de $\boldsymbol{X}$ et ceux de $\boldsymbol{Z}$ (*cf.* 16.3.1-5 et, pour ce qui suit, la remarque encadrée 16.3.1-6, page 210).

Etudions maintenant le lien entre les faisceaux d'anneaux : $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}$ et $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}|_{\boldsymbol{Z}}$. Soit $U_{\mathfrak{p}}$ une partie ouverte de $\boldsymbol{X}$. Une section $\sigma \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U_{\mathfrak{p}})$ se représente, au voisinage d'un point $\boldsymbol{z} \in U_{\mathfrak{m}}$ (l'idéal maximal $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{z}} \in \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}))$), à l'aide de deux éléments p, q de $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z})$ tels que le *localisé* de q en $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{z}}$ est *inversible* (‡). Or, les éléments p, q ont des relèvements polynomiaux $P, Q \in k[X_1, \ldots, X_n]$ et la condition (‡) dit précisément que $Q(\boldsymbol{z}) \neq 0$. L'*évaluation* de σ sur un voisinage de $\boldsymbol{z}$ dans $\boldsymbol{Z}$, a donc un sens et définit une fonction régulière (qui ne dépend pas des choix de p et q). Nous avons donc bien une application :

$$\iota^{\#}(U_{\mathfrak{p}}) : \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U_{\mathfrak{p}}) \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}(U_{\mathfrak{m}}) = \big(\iota_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}\big)(U_{\mathfrak{p}})\,.$$

qui est un morphisme de faisceaux d'anneaux.

16.7.3-1. Théorème : *Le morphisme de faisceaux d'anneaux $\iota^{\#} : \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \to \iota_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}$ est un* isomorphisme de faisceaux.

Démonstration : Pour tout $f \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z})$ non nul, la composée des morphismes :

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z})_f \xrightarrow{\equiv} \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(D(f)) \xrightarrow{\iota^{\#}(D(f))} \mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}(D(f))$$

est *injective*. En effet, tout élément de $q \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z})_f$ admet une représentation sous la forme P/F^m d'un quotient de polynômes de $k[X_1, \ldots, X_n]$ (où F est un représentant de f). Supposons que pour tout $\boldsymbol{u} \in D(F)$, on ait $P(\boldsymbol{u})/F(\boldsymbol{u})^m = 0$. Alors nécessairement $P \in \mathcal{I}(\boldsymbol{Z}) \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ et $q = 0$.

Il s'ensuit, par passage aux germes, que $\iota^{\#}$ est un morphisme *injectif* de faisceaux sur $\boldsymbol{X}$.

Pour montrer la surjectivité de $\iota^{\#}$ *il suffira d'étudier ses germes en* $\boldsymbol{X}$, puisque $\iota^{\#}$ est injective ; et même seulement **ses germes en** $\boldsymbol{Y}$ grâce aux équivalences de catégories

$$\mathrm{Fais}(\boldsymbol{X}) \underset{\iota_*}{\overset{\iota^{-1}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Fais}(\boldsymbol{Y})\,,$$

établies dans l'encadré 16.3.1-6 de la page 210. Or, sur un point fermé $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}$, la définition même de fonction régulière montre que $(\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}})_{(\boldsymbol{z})} \equiv \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z})_{\mathfrak{M}_{\boldsymbol{z}}}$, ce qui prouve bien $(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})_{(\mathfrak{M}_{\boldsymbol{z}})} \equiv (\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}})_{(\boldsymbol{z})}$. ∎

16.7.3-2. Corollaire : *Soient* $(\boldsymbol{Z}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}})$ *une variété affine et* $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z})$ *son anneau de fonctions régulières.*

a) *Pour tout* $f \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z})$, *l'application canonique* $\xi_f : \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z})_f \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}(D(f))$ *est un* isomorphisme *d'anneaux.*

b) *En particulier,* $\Gamma(\boldsymbol{Z}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}) \equiv \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z})$.

16.7.3-3. Exercice : Montrer que pour tout idéal premier $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}))$, le germe du faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ en $\mathfrak{P}$ s'identifie à l'aide de $\iota^{\#}$, avec les sections globales de la restriction du faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}$ à la sous-variété irréductible $\boldsymbol{Z}(\mathfrak{P})$.

Par restriction à $\boldsymbol{Z}$ du morphisme de faisceaux d'anneaux $\iota^{\#}$, on a aussi :

16.7.3-4. Corollaire : *Le morphisme de faisceaux* $\iota^{-1}(\iota^{\#}) : \iota^{-1}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}$ *est un* isomorphisme *de faisceaux*

Le cas des algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos
Soit $\boldsymbol{A}$ une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos k et réalisons-la comme quotient d'une algèbre de polynômes $k[X_1, \ldots, X_n]$ par un certain idéal (pas forcément radical) $\mathfrak{I}$. Notons $\mathbb{A}_n(k)$ l'espace affine k^n. Rappelons que la proposition 16.3.1-4 donne un homéomorphisme

$$\Xi_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{Z}(\mathfrak{I}) \subseteq \mathbb{A}_n(k) \to \mathrm{Spm}(\boldsymbol{A})$$

qui "réalise" le spectre maximal de $\boldsymbol{A}$ comme sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}_n(k)$.

Notons $\mathrm{Red}(\boldsymbol{A})$ l'algèbre réduite $\boldsymbol{A}/\sqrt{\boldsymbol{0}}$. Les analyses précédentes suffisent à montrer la proposition suivante :

16.7.3-5. Proposition : *Le faisceau des fonctions régulières sur* $\boldsymbol{Z}(\mathfrak{I})$ *s'identifie canoniquement à la restriction du faisceau structural du schéma affine associé à* $\mathrm{Red}(\boldsymbol{A})$.

16.8 Catégorie des $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules quasi-cohérents

A partir de cette section, tous les anneaux que nous considérerons seront nœthériens. Soit donc $\boldsymbol{A}$ un anneaux nœthérien et notons $\boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ le faisceaux structural de $\boldsymbol{X}$.

Catégories de $\boldsymbol{A}$-modules et de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules
Notons $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ la catégorie des $\boldsymbol{A}$-modules et $\mathrm{Mod}_{\mathrm{t.f.}}(\boldsymbol{A})$ la sous-catégorie (pleine) de $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ dont les objets sont les $\boldsymbol{A}$-modules de *type fini*.

16.8-1. Définition : Un « $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module sur $\boldsymbol{X}$ » est la donnée d'un faisceau de groupes abéliens $\mathcal{M}$ sur $\boldsymbol{X}$ et, pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, d'une structure de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U)$-module sur $\mathcal{M}(U)$. Ces structures doivent être telles que les morphismes de restriction $\rho(\mathcal{M})_V^U$ soient des morphismes de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U)$-modules.

Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules. Un morphisme de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est un morphisme de faisceaux de groupes abéliens, tel que pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, le morphisme $\varphi(U) : \mathcal{M}(U) \to \mathcal{N}(U)$ est un morphisme de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U)$-modules.

La composée de deux morphismes de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules est un morphisme de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules.

16.8-2. Remarque et définitions : La famille des $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules et des morphismes de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules constitue une catégorie abélienne, notée $\mathscr{M}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$.

16.8-2.1. Définition : Un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module $\mathcal{M}$ est dit «quasi-cohérent» s'il admet *des présentations locales*, *i.e.* si pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, il existe un voisinage $U_x \ni x$, des ensembles (d'indices) $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ et des morphismes ν_x, μ_x de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}|_{U_x}$-modules, tels que :

$$\bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}|_{U_x} \xrightarrow{\mu_x} \bigoplus_{j\in\mathfrak{J}} \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}|_{U_x} \xrightarrow{\nu_x} \mathcal{M}|_{U_x} \longrightarrow \mathbf{0}\,, \qquad (*)$$

est une suite exacte de faisceaux.

Le $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module $\mathcal{M}$ est dit «cohérent» lorsque les ensembles $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ sont *finis*. Dans ce cas, la présentation $(*)$ est dite «une présentation finie».

La sous catégorie pleine de $\mathscr{M}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ dont les objets sont les $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules quasi-cohérent, resp. cohérents, est notée $\mathscr{M}_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$, resp. $\mathscr{M}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$. Il s'agit de catégories *abéliennes*.

On remarquera que ces définitions généralisent les notions de *modules* et de *modules de type fini* pour les anneaux nœthériens. Elles sont plus généralement valables pour tout espace annelé, en particulier pour les variétés algébriques affines.

16.8-2. Equivalence de Catégories : Le théorème 16.7.3-1, la proposition 16.7.3-4 et l'équivalence de catégories de faisceaux entre $\mathrm{Fais}(\boldsymbol{Z})$ est $\mathrm{Fais}(\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z})))$ (*cf.* encadré 16.3.1-6, page 210), montrent que dans le cas d'une variété algébrique affine $(\boldsymbol{Z};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}})$ d'anneau de fonctions régulières $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z})$, les deux foncteurs additifs induits par l'injection $\iota : \boldsymbol{Z} \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}))$, à savoir

$$\iota_* : \mathscr{M}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}) \rightsquigarrow \mathscr{M}\left(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}))}\right) \quad \text{et} \quad \iota^{-1} : \mathscr{M}\left(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}))}\right) \rightsquigarrow \mathscr{M}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}})\,,$$

sont des équivalences de catégories inverses l'un de l'autre !

Cette remarque nous permettra, dans ce qui suit, de négliger le point de vue des variétés affines.

Le foncteur de localisation

Soient $V \subseteq U$ deux ouverts de $\boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et notons $\rho(\boldsymbol{A})^U_V : \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U) \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(V)$ le morphisme d'anneaux de restriction, pour des ouverts $V \subseteq U \subseteq \boldsymbol{X}$.

Pour tout $\boldsymbol{A}$-module M, les correspondances :

$$\begin{array}{ccc} U & \rightsquigarrow & \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U) \otimes_{\boldsymbol{A}} M \\ \subseteq\uparrow & & \downarrow \rho(\boldsymbol{A})^U_V \otimes \mathrm{id}_M \\ V & \rightsquigarrow & \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(V) \otimes_{\boldsymbol{A}} M \end{array}$$

définissent un préfaisceaux de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules, noté $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \otimes M$. On note $\widetilde{M}$ *le faisceau associé à* $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \otimes M$; c'est un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module.

16.8-2. Proposition : *Soit M un $\boldsymbol{A}$-module.*

a) *Pour tout $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$, l'application $m \mapsto \frac{m}{1}$ de M vers le module $\big(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \otimes M\big)_{(\mathfrak{P})}$, des germes de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \otimes M$ en $\mathfrak{P}$, induit un isomorphisme entre $M_{\mathfrak{P}}$ et $\big(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \otimes M\big)_{(\mathfrak{P})}$.*

b) *Pour tout $f \in \boldsymbol{A}$, on a $\Gamma\big(D(f); \widetilde{M}\big) = \boldsymbol{A}_f \otimes_{\boldsymbol{A}} M = M_f$.*

Démonstration :

a) Découle du fait que la limite inductive commute au produit tensoriel et que $M_{\mathfrak{P}} \equiv \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \otimes_{\boldsymbol{A}} M$ (*cf.* 16.6.1-1.1).

b) La question précédente montre que les sections du faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \otimes M$ sont, localement au voisinage de chaque $\mathfrak{P} \in \boldsymbol{X}$, de la forme $\frac{\nu(M)_{\mathfrak{Q}}(m)}{\nu_{\mathfrak{Q}}(b)}$, où $\nu(M)_{\mathfrak{Q}} : M \to M_{\mathfrak{Q}}$ est l'application canonique du rappel 16.6.1-1, et où $m \in M$, $b \in \boldsymbol{A}$ et $\nu_{\mathfrak{P}}(b)$ est inversible dans $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$. A partir de là, la démonstration de l'assertion (a) de la proposition 16.6.2-1 s'adapte pour démontrer cette question. ∎

Soit maintenant $\varphi : M \to N$ un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules. Pour tout ouvert U dans $\boldsymbol{X}$, on note $(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \otimes \varphi)(U) : \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U) \otimes M \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U) \otimes N$ le morphisme de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U)$-modules $\varphi(U) := \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U)} \otimes \varphi$. La correspondance $U \mapsto (\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \otimes \varphi)(U)$ est un morphisme de préfaisceaux de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \otimes M$ vers $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \otimes N$ noté $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \otimes \varphi$; il induit un morphisme de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules noté $\widetilde{\varphi} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$.

16.8-3. Lemme : *Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau nœthérien et*

$$\mathbf{0} \to M_1 \xrightarrow{\ \alpha\ } M_2 \xrightarrow{\ \beta\ } M_3 \to \mathbf{0}\,,$$

une suite exacte de $\boldsymbol{A}$-modules. La suite de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules :

$$\mathbf{0} \to \widetilde{M}_1 \xrightarrow{\ \tilde{\alpha}\ } \widetilde{M}_2 \xrightarrow{\ \tilde{\beta}\ } \widetilde{M}_3 \to \mathbf{0}\,, \qquad (**)$$

est exacte dans la catégories de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules.

Démonstration : Il suffit de regarder les suites de germes en chaque point de $\boldsymbol{X}$, induites par $(**)$. La proposition 16.8-2 montre que l'opération de "passage aux germes" est équivalente à celle *exacte* (*cf.* 16.6.1-1.1) de localisation ; les suites des germes de $(**)$ sont donc toutes exactes et $(**)$ est exacte dans la catégorie des faisceaux. ∎

16.8-4. Proposition : *Soir M un $\boldsymbol{A}$-module. Le $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module $\widetilde{M}$ est quasi-cohérent. Il est cohérent lorsque M est un $\boldsymbol{A}$-module de type fini.*

Démonstration : L'exactitude du foncteur $M \rightsquigarrow \widetilde{M}$, prouvée dans le lemme 16.8-3, assure que pour toute présentation d'un $\boldsymbol{A}$-module M :

$$\bigoplus_{\mathfrak{I}} \boldsymbol{A} \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{J}} \boldsymbol{A} \longrightarrow M \to \mathbf{0}\,,$$

la suite :

$$\bigoplus_{\mathfrak{I}} \widetilde{\boldsymbol{A}} \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{J}} \widetilde{\boldsymbol{A}} \longrightarrow \widetilde{M} \to \mathbf{0}\,,$$

sera exacte. Or, on a $\widetilde{\boldsymbol{A}} \equiv \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ par définition.

Lorsque le module M est de type fini, il admet des présentations finies puisque $\boldsymbol{A}$ est nœthérien. Par conséquent $\widetilde{M}$ sera cohérent. ∎

16.8-5. Remarque : On observera que les modules $\widetilde{M}$ possèdent, en fait, des présentations *globales*.

La correspondance qui associe à tout $\boldsymbol{A}$-module M le $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module $\widetilde{M}$, et à tout morphisme φ, le morphisme $\widetilde{\varphi}$, est un foncteur additif *exact* de la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ vers la catégorie $\mathscr{M}_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$. Sa restriction à la sous-catégorie pleine $\mathrm{Mod}_{\text{t.f.}}(\boldsymbol{A})$ est "à valeurs" dans $\mathscr{M}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$.

16.8.1 Equivalence de catégories. Notons $\Gamma(\boldsymbol{X};_) : \mathscr{M}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$, le foncteur «sections globales».

16.8.1-1. Théorème : *Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau nœthérien et notons $\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$. Les foncteurs*

$$(\widetilde{\ }) : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathscr{M}_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \quad \textit{et} \quad \Gamma(\boldsymbol{X};_) : \mathscr{M}_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}),$$

sont inverses l'un de l'autre. En particulier, les foncteurs :

$$\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) \underset{\Gamma(\boldsymbol{X};_)}{\overset{(\widetilde{\ })}{\rightleftarrows}} \mathscr{M}_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Mod}_{\text{t.f.}}(\boldsymbol{A}) \underset{\Gamma(\boldsymbol{X};_)}{\overset{(\widetilde{\ })}{\rightleftarrows}} \mathscr{M}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}),$$

sont des équivalences de catégories.

Démonstration : Commençons par remarquer l'existence d'une transformation naturelle de foncteurs de $\mathrm{id}_{\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})}$ vers $\Gamma(\boldsymbol{X};(\widetilde{\ }))$. Elle provient de la définition même de $\widetilde{M}$ comme faisceau engendré par le préfaisceau $U \rightsquigarrow \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U) \otimes_{\boldsymbol{A}} M$; l'application $M \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \otimes_{\boldsymbol{A}} M$, donnée par $m \mapsto 1 \otimes m$, induit un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules de $M \to \Gamma(\boldsymbol{X};\widetilde{M})$ *naturel par rapport à* M.

La proposition 16.8-2 montre alors que pour tout $\boldsymbol{A}$-module M, le morphisme : $M \longrightarrow \Gamma(\boldsymbol{X};\widetilde{M})$, est un isomorphisme.

De manière analogue, pour tout $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module $\mathcal{M}$, on a un morphisme de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules $\Xi_{\mathcal{M}} : \Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{M})\,\widetilde{\ } \to \mathcal{M}$, *naturel par rapport à* $\mathcal{M}$. Nous allons montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme de faisceaux lorsque $\mathcal{M}$ est quasi-cohérent. Ce pour quoi, il suffira d'étudier l'action de $\Xi_{\mathcal{M}}$ au niveaux des germes de chaque point $\mathfrak{P} \in \boldsymbol{X}$.

Lorsque $\mathcal{M}$ est de la forme $\widetilde{M}$, le morphisme $(\Xi_{\mathcal{M}})_{(\mathfrak{P})}$ est bien un isomorphisme d'après 16.8-2. Le cas général résultera de montrer que tout $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module quasi-cohérent sur $\boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$, est bien de la forme $\widetilde{M}$ pour un certain $\boldsymbol{A}$-module M.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module quasi-cohérent. Les présentations locales $(*)$ de la remarque 16.8-2 (définition 16.8-2.1) :

$$\bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}|_{U_x} \xrightarrow{\mu_x} \bigoplus_{j\in\mathfrak{J}} \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}|_{U_x} \xrightarrow{\nu_x} \mathcal{M}|_{U_x} \longrightarrow \mathbf{0},$$

s'écrivent également :

$$\Big(\bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} \boldsymbol{A}\Big)\,\widetilde{\ }\,\Big|_{U_x} \xrightarrow{\tilde{\mu}_x(\boldsymbol{X})} \Big(\bigoplus_{j\in\mathfrak{J}} \boldsymbol{A}\Big)\,\widetilde{\ }\,\Big|_{U_x} \xrightarrow{\tilde{\nu}_x(\boldsymbol{X})} \mathcal{M}|_{U_x} \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Comme l'anneau $\boldsymbol{A}$ est supposé nœthérien, les ouverts U_x peuvent être de la forme $D(f_i)$ pour une famille *finie* $\{f_1,\dots,f_r\}$ d'éléments de $\boldsymbol{A}$. Remplaçons les indices 'x' par 'f_j'. En posant $M_j = \mathrm{coker}\mu_{f_j}(D(f_j))$, on a $\mathcal{M}|_{U_{f_j}} \equiv \widetilde{M}_j$ et le $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module $\mathcal{M}$ est le *recollement* des faisceaux $\widetilde{M}_j \in \mathscr{M}_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}_j})$, où $\boldsymbol{X}_j = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}_{f_j})$. On remarque, d'autre part, que le morphisme canonique du localisé vers les germes : $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{M})_{\mathfrak{P}} \to \mathcal{M}_{(\mathfrak{P})}$, est un *isomorphisme*.

Le passage du "local" au "global" utilise le résultat suivant, dont la preuve sera donnée à la fin cette démonstration.

16.8.1-2. Proposition : *Soient $\boldsymbol{A}$ un anneau nœthérien, $\boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module quasi-cohérent.*

a) *Pour tout $f \in \boldsymbol{A}$ et toute section $\sigma \in \Gamma(D(f);\mathcal{M})$, il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n\sigma$ se prolonge en une section de $\mathcal{M}$ sur $\boldsymbol{X}$.*

b) *Pour tout $f \in \boldsymbol{A}$ et toute section $\sigma \in \Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{M})$ telle que la restriction de σ à $D(f)$ soit nulle, il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n\sigma = 0$.*

Ceci étant, pour chaque $\mathfrak{P} \in \boldsymbol{X}$, il existe f_j tel que $\mathfrak{P} \in D(f_j)$; on considère alors la factorisation du morphisme canonique $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{M})_{\mathfrak{P}} \to \mathcal{M}_{(\mathfrak{P})}$, du localisé des sections globales vers les germes des sections de $\mathcal{M}$ en $\mathfrak{P} \in \boldsymbol{X}$, donné par :

$$\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{M})_{\mathfrak{P}} \equiv \big(\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{M})\,\widetilde{\ }\big)_{(\mathfrak{P})} \longrightarrow \Gamma\Big(D(f_j);\mathcal{M}|_{D(f_j)}\Big)_{\mathfrak{P}} \xrightarrow{\equiv} \mathcal{M}_{(\mathfrak{P})}\,.$$

La proposition 16.8.1-2 montre que cette composition est un isomorphisme.

Par conséquent, les morphismes $\big(\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{M})\,\widetilde{\ }\big)_{(\mathfrak{P})} \to \mathcal{M}_{(\mathfrak{P})}$ sont des isomorphismes, pour tout $\mathfrak{P} \in \boldsymbol{X}$ et le morphisme de faisceaux $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{M})\,\widetilde{\ } \to \mathcal{M}$ est un *isomorphisme* de faisceaux. ∎

16.8.1-3. Démonstration de la proposition 16.8.1-2 : (*Cf.* aussi [EGA] théorème **1.4.1** page 205.)

a) La quasi-cohérence de $\mathcal{M}$ et la nœthérianité de $\boldsymbol{A}$, permettent de recouvrir $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ par un nombre fini d'ouverts principaux $D(s_1),\dots,D(s_r)$, tels que, pour chaque $i = 1,\dots,r$, la restriction de faisceau de $\mathcal{M}$ à $D(s_i)$ est isomorphe en tant que $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}|_{D(s_i)}$-module à la restriction d'un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module de la forme $\widetilde{M}_i$, où M_i est un $\boldsymbol{A}$-module. En particulier, on a :

$$\Gamma(D(s_i);\mathcal{M}) \equiv M_{s_i} \equiv A_{s_i} \otimes_{\boldsymbol{A}} M_i\,,$$

mais aussi, pour tout $h \in \boldsymbol{A}$, le morphisme canonique :

$$\Gamma(D(s_i),\mathcal{M})_h \equiv \Gamma(D(s_i),\mathcal{M}) \otimes_{\boldsymbol{A}_{s_i}} (\boldsymbol{A}_{s_i})_h \longrightarrow \Gamma(D(hs_i);\mathcal{M})\,, \qquad (*)$$

est un *isomorphisme* d'après la proposition 16.8-2.

Soit $f \in \boldsymbol{A}$ et considérons une section $\sigma \in \Gamma(D(f);\mathcal{M})$. Pour chaque $i = 1,\dots,r$, la restriction $\sigma|_{D(fs_i)}$ appartient au module des fractions en f de $\Gamma(D(s_i);\mathcal{M})$, il existe donc $m_i \in \mathbb{N}$, tel que $f^{m_i}\sigma$ se prolonge de $D(fs_i)$ à $D(s_i)$. On voit donc que, quitte à prendre $m \geqslant \sup_i\{m_i\}$, la section $f^m\sigma$ admet, dans chaque $D(s_i)$ (séparément), un prolongement que nous noterons $\Sigma_i \in \Gamma(D(s_i);\mathcal{M})$.

Ceci étant, lorsque l'on regarde pour chaque couple $i,j \in \{1,\dots,r\}$, la différence :

$$\Sigma_i|_{D(s_is_j)} - \Sigma_j|_{D(s_is_j)} \in \Gamma(D(s_is_j);\mathcal{M})\,, \qquad (\dagger)$$

et que l'on remarque :

- que la restriction de $(\dagger)$ à $D(fs_is_j)$ est nulle ;
- et que $\Gamma(D(fs_is_j);\mathcal{M}) \equiv \Gamma(D(s_is_j);\mathcal{M})_f$, d'après $(*)$;

on conclut qu'il existe un entier $m_{i,j} \in \mathbb{N}$, pour chaque couple $i,j \in \{1,\dots,r\}$, vérifiant :

$$f^{m_{i,j}}\Big(\Sigma_i|_{D(s_is_j)} - \Sigma_j|_{D(s_is_j)}\Big) = 0\,, \quad \text{i.e.,} \quad f^{m_{i,j}}\Sigma_i|_{D(s_is_j)} = f^{m_{i,j}}\Sigma_j|_{D(s_is_j)}\,.$$

En prenant, $M \geqslant \sup_{i,j}\{m_{i,j}\}$, on voit donc bien que la famille $\{f^M\Sigma_i \in \Gamma(D(s_i);\mathcal{M})\}_{i=1,\dots,r}$ de sections locales du faisceau $\mathcal{M}$, satisfait à la condition de recollement sur un recouvrement de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$. Notons $\widetilde{\Sigma}$ la section globale déterminée par cette famille, on a : $\widetilde{\Sigma}|_{D(f)} = f^{M+m}\sigma$; ce qu'il fallait démontrer.

b) Soit $\sigma \in \Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{M})$ telle que $\sigma|_{D(f)} = 0$, et reprenons les notations des arguments précédents.

En raisonnant en termes d'anneaux de fractions, on a aussitôt le fait que si Σ_i est une section de $\Gamma(D(s_i);\mathcal{M})$, de restriction nulle sur $D(fs_i)$, il existe une entier $\ell \in \mathbb{N}$, tel que $f^\ell\Sigma_i = 0$. Dans le cas particulier qui nous intéresse, nous aurons, pour chaque $i = 1,\dots,r$, un entier ℓ_i tel que $f^{\ell_i}\sigma|_{D(s_i)} = 0$.

Par conséquent, si $N \geqslant \sup_i\{\ell_i\}$, on aura bien $f^N\sigma = 0$, car ses restrictions sur les ouverts du recouvrement $\mathcal{U} = \{D(s_i)\}$ sont toutes nulles.

16.9 Cohomologie de faisceaux des $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents

16.9.1 Modules injectifs. Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif ([63]) *arbitraire* et $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ la catégorie des $\boldsymbol{A}$-modules.

Le foncteur $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\bullet, \boldsymbol{M})$

Etant donnés deux $\boldsymbol{A}$-modules $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{M}$; considérons le groupe $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{M})$ muni de sa structure canonique de $\boldsymbol{A}$-module. Pour tout morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\alpha : \boldsymbol{N}_1 \to \boldsymbol{N}_2$, notons $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\alpha, \boldsymbol{M})$ le morphisme (de $\boldsymbol{A}$-modules) de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{M})$ vers $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{M})$ dont l'action est définie par $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\alpha, \boldsymbol{M}) : \beta \mapsto \beta \circ \alpha$. La correspondance qui associe : $\boldsymbol{N} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{M})$ et $\alpha \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\alpha, \boldsymbol{M})$ est alors fonctorielle (contravariante et additive) de la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ vers elle-même, on la notera $\bullet \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\bullet, \boldsymbol{M})$.

16.9.1-1. Lemme : *Pour tout $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}))$, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(_, \boldsymbol{M})$ est exact à gauche.*

Démonstration : Soit une suite exacte courte de $\boldsymbol{A}$-modules

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{N}_1 \xrightarrow{\alpha} \boldsymbol{N}_2 \xrightarrow{\beta} \boldsymbol{N}_3 \to \mathbf{0}\,,$$

nous devons montrer que la suite :

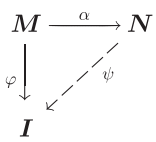
$$\mathbf{0} \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N}_3, \boldsymbol{M}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\beta, \boldsymbol{M})} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{M}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\alpha, \boldsymbol{M})} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{M})\,,$$

est *exacte*.

L'injectivité de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\beta, \boldsymbol{M})$ résulte de la surjectivité de β ; puis si $\varphi : \boldsymbol{N}_2 \to \boldsymbol{M}$ est tel que $\varphi \circ \alpha = 0$, l'application φ induit une application de $\psi : \boldsymbol{N}_3 \equiv \mathrm{coker}(\alpha) \to \boldsymbol{M}$, telle que $\varphi = \psi \circ \beta = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\beta, \boldsymbol{M})(\psi)$. ∎

16.9.1-2. Définition : Un $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{I}$ est dit «injectif», si et seulement si, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(_, \boldsymbol{I})$ est *exact*.

16.9.1-3. Exercice : Montrer qu'un $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{I}$ est injectif, si et seulement si, pour tout injection de $\boldsymbol{A}$-modules $\alpha : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ et tout morphisme $\varphi : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{I}$, il existe un morphisme $\psi : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{I}$, tel que $\psi \circ \alpha = \varphi$.



En particulier, si $\boldsymbol{I}$ est un $\boldsymbol{A}$-module injectif et si $\mathfrak{A}$ est un idéal de $\boldsymbol{A}$ (vu comme $\boldsymbol{A}$-module), tout morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\alpha : \mathfrak{A} \to \boldsymbol{I}$ se prolonge à $\boldsymbol{A}$ tout entier, *i.e.* il existe $x_\alpha \in \boldsymbol{I}$ tel que $\alpha(a) = a x_\alpha$, pour tout $a \in \mathfrak{A}$.

[63] Cette sous-section s'inspire des exposés de [God$_2$] et [Har] ; l'hypothèse de commutativité pour les anneaux n'est pas indispensable mais nous permet de simplifier notre exposition.

16.9.1-4. Exercice : Soient $\mathfrak{A}$ un idéal de $\boldsymbol{A}$, et $\boldsymbol{I}$ un $\boldsymbol{A}$-module tel que tout morphisme $\alpha : \mathfrak{A} \to \boldsymbol{I}$ se prolonge à $\boldsymbol{A}$ tout entier.

a) Soient $\boldsymbol{M} = \langle m \rangle$ un $\boldsymbol{A}$-module *cyclique*, et $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{M}$ un sous-module. Montrer que tout morphisme $\alpha : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{I}$ admet un prolongement à $\boldsymbol{M}$.

b) Soient $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}$-module arbitraire, $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{M}$ un sous-module, et $\alpha : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{I}$ un morphisme. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ des couples $(\boldsymbol{L}, \alpha_{\boldsymbol{L}})$, où $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{L} \subseteq \boldsymbol{M}$, et où $\alpha_{\boldsymbol{L}} : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{I}$ prolonge α, munie de l'ordre partiel :

$$(\boldsymbol{L}_1, \alpha_{\boldsymbol{L}_1}) \preccurlyeq (\boldsymbol{L}_2, \alpha_{\boldsymbol{L}_2}), \quad \text{si et seulement si,} \quad \boldsymbol{L}_1 \subseteq \boldsymbol{L}_2 \quad \text{et} \quad \alpha_{\boldsymbol{L}_1} = \alpha_{\boldsymbol{L}_2}|_{\boldsymbol{L}_1},$$

est une famille *inductive*. Conclure, en utilisant (a) et le lemme de Zorn, que α admet des prolongements globaux et donc que $\boldsymbol{I}$ est un $\boldsymbol{A}$-module injectif.

16.9.1-5. Remarque et définition : Les deux derniers exercices montrent que *sur un anneau commutatif arbitraire*, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- Un $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{I}$ est injectif,
- Les morphismes de $\mathfrak{A} \to \boldsymbol{I}$, où $\mathfrak{A}$ désigne un idéal de $\boldsymbol{A}$, se prolongent à $\boldsymbol{A}$ tout entier.

La deuxième condition donne un critère commode pour vérifier qu'un $\boldsymbol{A}$-module est injectif. Dans la suite nous y référerons par le nom de «critère d'injectivité par les idéaux de $\boldsymbol{A}$».

Lorsque $\boldsymbol{A}$ est un anneau *intègre et principal*, il y a équivalence donc entre :

- Un $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{I}$ est injectif,
- $a\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$, pour tout $a \neq 0$.

Un $\boldsymbol{A}$-module vérifiant la deuxième condition est dit «divisible».

Dans la catégorie des $\mathbb{Z}$-modules, le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, mais aussi $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, sont divisibles, donc, *injectifs* dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$.

16.9.1-6. Lemme (et exercice) :

a) *Soit $\{\boldsymbol{I}_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$ une famille arbitraire de $\boldsymbol{A}$-modules injectifs. Prouver que le module produit $\prod_{j\in\mathfrak{J}} \boldsymbol{I}_j$ est un $\boldsymbol{A}$-module injectif.*

b) *Montrer que si $\boldsymbol{A}$ est nœthérien, toute limite inductive de modules injectifs est un module injectif. (Utiliser le critère par les idéaux de $\boldsymbol{A}$.)*

16.9.1-7. Lemme (et exercice) : *Pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$, on appelle «facteur direct» tout sous-$\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{N}$ tel qu'il existe un sous-$\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{M}$, vérifiant : $\boldsymbol{N} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$.*

a) *Soit $\boldsymbol{I}$ un sous-module d'un $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$. Montrer que si $\boldsymbol{I}$ est un $\boldsymbol{A}$-module* injectif, *il est facteur direct de $\boldsymbol{M}$.*

b) *Montrer que tout facteur direct d'un $\boldsymbol{A}$-module injectif est lui-même injectif.*

Existence d'assez d'injectifs

La notion de module injectif à un sens pour toute catégorie *abélienne*. En effet, dans une telle catégorie $\mathcal{C}$, les ensembles $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2)$ sont munis de structures de groupes abéliens, et donc

tout objet $\boldsymbol{M}$ définit un foncteur (additif) $\bullet \rightsquigarrow \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\bullet, \boldsymbol{M})$, de $\mathfrak{C}$ vers $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ (dont l'action sur les morphismes découle également des axiomes de catégories abéliennes). L'analogue du lemme 16.9.1-1 est alors vrai.

On appelle «objet injectif de la catégorie $\mathfrak{C}$» tout objet $\boldsymbol{I}$, tel que le foncteur $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\bullet, \boldsymbol{I})$ de $\mathfrak{C}$ vers $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ est *exact*.

16.9.1-8. Définition : Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie abélienne. On dit que $\mathfrak{C}$ «possède assez d'injectifs» lorsque, pour tout objet $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, il existe un objet injectif $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{M})$ et un élément de $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{I}(\boldsymbol{M}))$ qui soit un *morphisme injectif*.

16.9.1-9. Proposition : *Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau (commutatif) arbitraire* ([64]) *; il existe un foncteur covariant additif et* exact $\mathcal{I} : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$, *et une transformation naturelle* $\Xi : \mathrm{id} \rightsquigarrow \mathcal{I}$ *tels que :*

a) *Pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$, le $\boldsymbol{A}$-module $\mathcal{I}(\boldsymbol{M})$ est* injectif.

b) *Pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$, le morphisme $\Xi(\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M} \to \mathcal{I}(\boldsymbol{M})$ est* injectif.

Démonstration : Tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ étant naturellement un $\mathbb{Z}$-module, on considère $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{M}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ muni de la structure de $\boldsymbol{A}$-module définie par $(a\varphi)(m) := \varphi(am)$. Pour tout morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\alpha : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$ le morphisme induit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{M}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{M}_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, donné par $\psi \mapsto \psi \circ \alpha$, est alors un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules. On a donc bien un foncteur additif de la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ vers elle même, noté $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(_, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Rappelons que les applications :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{N}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) & \xrightarrow{\equiv} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{M} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{N}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \alpha & \longmapsto & m \otimes n \mapsto \alpha(m)(n) \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{M} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{N}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\equiv} & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{N}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \\ \varphi & \longmapsto & m \mapsto \big(n \mapsto \varphi(m \otimes n)\big) \end{array} \qquad (*)$$

sont des *isomorphismes* de $\boldsymbol{A}$-modules, inverses l'un de l'autre.

Prouvons maintenant que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un $\boldsymbol{A}$-module injectif à l'aide du critère par les idéaux injectifs de $\boldsymbol{A}$ de l'encadré 16.9.1-5 (page 232) :

Pour tout idéal $\mathfrak{A} \subseteq \boldsymbol{A}$, nous devons montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{A}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \\ \alpha & \longrightarrow & \alpha|_{\mathfrak{A}} \end{array}$$

est *surjective*. Or, les isomorphismes $(*)$ donnent les équivalences :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{A}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \\ \equiv\downarrow & & \downarrow\equiv \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{A} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \equiv\uparrow & & \uparrow\equiv \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{array}$$

[64] La démonstration que donnons s'adapte sans difficulté au cas des anneaux non commutatifs en introduisant les catégories Mod-$\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}$-Mod des $\boldsymbol{A}$-modules respectivement à gauche et a droite.

où la surjectivité de la dernière ligne résulte du fait que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif dans la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$.

Ceci étant, soit $\boldsymbol{R}$ un $\boldsymbol{A}$-module et considérons la surjection de $\boldsymbol{A}$-modules

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{R}) := \bigoplus_{m\in\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A} & \xrightarrow{\pi(\boldsymbol{R})} & \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{0} \\ \mathbf{1}_m & \longmapsto & m \end{array} \qquad (**)$$

(On remarquera que la correspondance $\bullet \rightsquigarrow \boldsymbol{L}(\bullet)$ est fonctorielle, covariante, additive et exacte de $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ vers elle-même.)

D'après l'exactitude à gauche du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bullet, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, on a une *injection* :

$$\boldsymbol{0} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{R}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\pi, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\,,$$

où $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \equiv \prod_{\boldsymbol{R}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, est un $\boldsymbol{A}$-module injectif (*cf.* lemme 16.9.1-6).

Voici, pour terminer, la définition du foncteur $\mathcal{I}$: On pose, pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$:

$$\boxed{\Big(\Xi(\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M} \to \mathcal{I}(\boldsymbol{M})\Big) := \Big(\boldsymbol{M} \xrightarrow{\Xi(\boldsymbol{M})} \mathcal{I}(\boldsymbol{M}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\boldsymbol{L}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{M}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big)\Big)}$$

où le morphisme $\Xi(\boldsymbol{M})$ est obtenu en composant l'application canonique $\boldsymbol{M} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{M}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ qui associe $m \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(m))$, à l'application $(**)$ pour $\boldsymbol{R} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{M}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Le $\boldsymbol{A}$-module $\mathcal{I}(\boldsymbol{M})$ est bien injectif, et $\mathcal{I}$ étant défini à l'aide de foncteurs additifs exacts, sera lui-même un foncteur additif (covariant) exact. Enfin, la transformation Ξ est naturelle et il ne reste qu'a vérifier l'injectivité des morphismes $\Xi(\boldsymbol{M})$.

Soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}$-module et $m \in \boldsymbol{M}$ non nul. Nous devons montrer qu'il existe un morphisme $\psi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{M}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tel que $\psi(m) \neq 0$ (ce qui concerne uniquement des structures de $\mathbb{Z}$-modules). On observe alors que puisque $\mathrm{Annul}_{\mathbb{Z}}(m) = (r)$, pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$, l'application $\psi_m : \langle m \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, qui associe $m \mapsto \frac{1}{r} \in \mathbb{Q} \pmod{\mathbb{Z}}$, est bien définie et est non nulle. Comme $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module injectif, l'application ψ_m admet un prolongement à $\boldsymbol{M}$ tout entier ; ce qui termine la démonstration de la proposition. ∎

16.9.1-10. Corollaire : *Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire.*

Il existe un foncteur additif et exact $\mathcal{I}^\bullet : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^{\geqslant 0}(\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}))$ et une augmentation $\varepsilon(_) : (_) \to \mathcal{I}^\bullet(_)$ (naturelle), tels que, pour tout $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}))$, le complexe :

$$\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{M} \xrightarrow{\varepsilon(\boldsymbol{M})} \mathcal{I}^0(\boldsymbol{M}) \xrightarrow{d(\boldsymbol{M})_0} \mathcal{I}^1(\boldsymbol{M}) \xrightarrow{d(\boldsymbol{M})_1} \cdots$$

est exact. *En particulier, tout $\boldsymbol{A}$-module admet une résolution injective.*

Démonstration : En effet, soit $\boldsymbol{M} =: \boldsymbol{M}_0$ un $\boldsymbol{A}$-module ; la suite de morphismes :

$$\begin{array}{ccccccc}
\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{M}_0 & \xrightarrow[\Xi(\boldsymbol{M}_0)]{\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)} & \mathcal{I}(\boldsymbol{M}_0) =: \mathcal{I}^0(\boldsymbol{M}) & \xrightarrow{\nu(\varepsilon(\boldsymbol{M}_0))} & \mathrm{coker}(\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)) =: \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{0} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d(\boldsymbol{M})_0} & & \\
\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{M}_1 & \xrightarrow[\Xi(\boldsymbol{M}_1)]{\varepsilon(\boldsymbol{M}_1)} & \mathcal{I}(\boldsymbol{M}_1) =: \mathcal{I}^1(\boldsymbol{M}) & \xrightarrow{\nu(\varepsilon(\boldsymbol{M}_1))} & \mathrm{coker}(\varepsilon(\boldsymbol{M}_1)) =: \boldsymbol{M}_2 \to \boldsymbol{0} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d(\boldsymbol{M})_1} & & \\
\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{M}_2 & \xrightarrow[\Xi(\boldsymbol{M}_2)]{\varepsilon(\boldsymbol{M}_2)} & \mathcal{I}(\boldsymbol{M}_2) =: \mathcal{I}^2(\boldsymbol{M}) & \xrightarrow{\nu(\varepsilon(\boldsymbol{M}_2))} & \mathrm{coker}(\varepsilon(\boldsymbol{M}_2)) =: \boldsymbol{M}_3 \to \boldsymbol{0} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d(\boldsymbol{M})_2} & &
\end{array}$$

où $d(\boldsymbol{M})_j := \varepsilon(\boldsymbol{M}_{j+1}) \circ \nu(\varepsilon(\boldsymbol{M}_j))$, vérifie les propriétés du corollaire.

On laisse en exercice la preuve du fait que $\mathcal{I}^\bullet$ est exact. Une démarche simple consiste à montrer que la correspondance $\boldsymbol{M} \rightsquigarrow \mathrm{coker}(\Xi(\boldsymbol{M}))$ fait partie d'un foncteur additif exact, ce qui découle du fait plus général qui affirme que le conoyau (resp. noyau) d'une transformation naturelle entre deux foncteurs additifs exacts, est également exact. ∎

Supports et modules injectifs

Soient $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}$-module. Tout élément $m \in \boldsymbol{M}$ détermine une section globale du $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module quasi-cohérent $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ défini sur le spectre premier de $\boldsymbol{A}$.

16.9.1-11. Définition : On appelle support d'un élément m d'un $\boldsymbol{A}$-module, et on le note $|m|$, l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{P}$ de $\boldsymbol{A}$, pour lesquels $\nu_{\mathfrak{P}}(m) \in \boldsymbol{M}_{\mathfrak{P}}$ est *non nul*, où $\nu_{\mathfrak{P}} : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}_{\mathfrak{P}}$ désigne le morphisme canonique de localisation.

Le support de $m \in \boldsymbol{M}$ s'identifie donc aux support de la section globale qu'il détermine sur le faisceaux $\widetilde{\boldsymbol{M}}$. On a :

$$\boxed{|m| = V(\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(m))}$$

16.9.1-12. Exercice : Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire et $\boldsymbol{Z} \subseteq \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ un fermé de Zariski.

a) Montrer que l'ensemble des éléments d'un $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ dont le support est contenu dans $\boldsymbol{Z}$, est un sous-$\boldsymbol{A}$-module de $\boldsymbol{M}$.

b) Montrer que pour tout morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\alpha : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$, on a $|\alpha(m)| \subseteq |m|$, pour tout $m \in \boldsymbol{M}$.

16.9.1-13. Définition et notation : Soit $\boldsymbol{Z}$ un fermé de Zariski dans $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$. Pour tout $\boldsymbol{A}$ module $\boldsymbol{M}$, on note $\Gamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{M})$ le sous-module des éléments de $\boldsymbol{M}$ dont le support est contenu dans $\boldsymbol{Z}$.

La correspondance $\boldsymbol{M} \to \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{M})$ est fonctorielle additive, on l'appelle «sections à support dans $\boldsymbol{Z}$».

16.9.1-14. Proposition : *Soient $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif nœthérien, $\boldsymbol{Z} = V(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ un fermé de Zariski et $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}$-module*

a) *$m \in \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{M})$, si et seulement si, $V(\mathfrak{A}) \supseteq V(\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(m))$, si et seulement si, $\mathfrak{A} \subseteq \sqrt{\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(m)}$.*

En particulier, lorsque $\boldsymbol{A}$ est nœthérien :

$$\boxed{m \in \Gamma_{V(\mathfrak{A})}(\boldsymbol{M}),\ \textit{si et seulement si},\ \mathfrak{A}^r \subseteq \mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(m),\ \textit{pour } r \in \mathbb{N} \textit{ et } r \gg 0} \qquad (\ddagger)$$

b) *Supposons $\boldsymbol{A}$ nœthérien et considérons le système* projectif *:*

$$\cdots \to \tfrac{\boldsymbol{A}}{\mathfrak{A}^r} \to \cdots \to \tfrac{\boldsymbol{A}}{\mathfrak{A}^2} \to \tfrac{\boldsymbol{A}}{\mathfrak{A}} \to \boldsymbol{A}\,,$$

où les morphismes sont les projections canoniques. Le système

$$\boldsymbol{M} \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}\Big(\tfrac{\boldsymbol{A}}{\mathfrak{A}}, \boldsymbol{M}\Big) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}\Big(\tfrac{\boldsymbol{A}}{\mathfrak{A}^2}, \boldsymbol{M}\Big) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}\Big(\tfrac{\boldsymbol{A}}{\mathfrak{A}^r}, \boldsymbol{M}\Big) \to$$

est alors inductif et le morphisme induit par passage à la limite :

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_{r\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}\Big(\tfrac{\boldsymbol{A}}{\mathfrak{A}^r}, \boldsymbol{M}\Big) & \longrightarrow & \boldsymbol{M} \\ \alpha & \longmapsto & \alpha(1) \end{array}$$

est un isomorphisme sur $\Gamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{M})$.

Démonstration :

a) Un élément $m \in \boldsymbol{M}$ est à support dans $\boldsymbol{Z}$, si et seulement si, $\boldsymbol{A}\backslash\mathfrak{P}$ rencontre $\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(m)$ pour tout $\mathfrak{P} \not\supseteq \mathfrak{A}$; condition tautologiquement équivalente à : si $\mathfrak{P} \supseteq \mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(m)$, alors $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{A}$. On a donc :

$$m \in \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{M}), \text{ si et seulement si, } V(\mathfrak{A}) \supseteq V(\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(m)), \text{ si et seulement si, } \mathfrak{A} \subseteq \sqrt{\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(m)}\,.$$

Lorsque $\boldsymbol{A}$ est supposé en plus nœthérien, l'inclusion $\mathfrak{A}^r \subseteq \mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(m)$ sera satisfaite pour $r \in \mathbb{N}$ suffisamment grand.

b) Remarquons, pour commencer, que les idéaux premiers $\mathfrak{P}$ du complémentaire de $\boldsymbol{Z} = V(\mathfrak{A})$ sont ceux vérifiant $\mathfrak{P} \not\supseteq \mathfrak{A}$, et donc aussi $\mathfrak{P} \not\supseteq \mathfrak{A}^r$, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$. Il s'ensuit que $\left(\frac{\boldsymbol{A}}{\mathfrak{A}^r}\right)_{\mathfrak{P}} = \boldsymbol{0}$ et également : $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}\left(\frac{\boldsymbol{A}}{\mathfrak{A}^r}, \boldsymbol{M}\right)_{\mathfrak{P}} = \boldsymbol{0}$, pour tout $\mathfrak{P} \not\supseteq \mathfrak{A}$. Ainsi, pour chaque $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}\left(\frac{\boldsymbol{A}}{\mathfrak{A}^r}, \boldsymbol{M}\right)$, l'élément $\varphi(1) \in \boldsymbol{M}$ vérifiera $|\varphi(1)| \subseteq \boldsymbol{Z}$.

Réciproquement, la remarque pour les anneaux nœthériens de la question précédente montre que pour chaque $m \in \Gamma_{\boldsymbol{Z}}$ et tout $r \gg 0$, il existe un morphisme $\varphi_m : \frac{\boldsymbol{A}}{\mathfrak{A}^r} \to \boldsymbol{M}$ vérifiant $\varphi_m(1) = m$, ce qui termine la preuve de cette proposition. ∎

16.9.1-15. Exercice : Montrer que le foncteur des sections à support dans un fermé est exact à gauche.

16.9.1-16. Proposition : *Soient $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif et nœthérien et $\boldsymbol{Z} \subseteq \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ un fermé de Zariski. Pour tout $\boldsymbol{A}$-module injectif $\boldsymbol{I}$:*

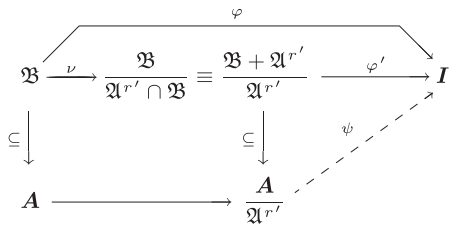
a) *le sous-module $\Gamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{I})$ est* injectif.

b) *le sous-module $\Gamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{I})$ admet des supplémentaires dans $\boldsymbol{I}$; ceux-ci sont tous des $\boldsymbol{A}$-modules injectifs.*

Démonstration :

a) Nous allons appliquer le critère d'injectivité par les idéaux de $\boldsymbol{A}$ de l'encadré 16.9.1-5 (page 232). Posons $\boldsymbol{Z} = V(\mathfrak{A})$. Soit $\mathfrak{B}$ un idéal de $\boldsymbol{A}$ et $\varphi : \mathfrak{B} \to \boldsymbol{I}$ un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules. Pour chaque $b \in \mathfrak{B}$, il existe, d'après la proposition 16.9.1-14, un entier $r(b) \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{A}^{r(b)} \subseteq \mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(\varphi(b))$ et comme $\mathfrak{B}$ est de type fini, il existera $r \in \mathbb{N}$, suffisamment grand, vérifiant : $\mathfrak{A}^r \subseteq \mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(\varphi(\mathfrak{B}))$. En particulier $\varphi(\mathfrak{A}^r\mathfrak{B}) = \boldsymbol{0}$.

Le théorème d'Artin-Rees (*cf.* [Mat] §**11** page 67) affirme alors qu'il existe $r' \gg r$ tel que $\mathfrak{A}^{r'} \cap \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}^r\mathfrak{B}$. On en déduit une factorisation du morphisme φ en $\varphi' \circ \nu$:



et le morphisme φ' admet un prolongement en un morphisme ψ puisque $\boldsymbol{I}$ est injectif. Le morphisme ψ composé à la projection canonique $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}/\mathfrak{A}^{r'}$ fournit alors un prolongement de φ dont l'image (celle de ψ) est clairement dans $\Gamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{I})$.

b) Résulte immédiatement de (a) et du lemme 16.9.1-7. ∎

Localisation de modules injectifs

Supposons l'anneau $\boldsymbol{A}$ commutatif et nœthérien.

16.9.1-17. Proposition : *Soit $\boldsymbol{I}$ un $\boldsymbol{A}$-module injectif.*

a) *Pour tout système multiplicatif S de $\boldsymbol{A}$, le morphisme canonique :*

$$\boldsymbol{I} \xrightarrow{\nu_S} S^{-1}\boldsymbol{I}\,,$$

est surjectif.

b) *Pour tout idéal premier $\mathfrak{P} \subseteq \boldsymbol{A}$, le $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{I}_{\mathfrak{P}}$ est injectif.*

Démonstration :

a) Tout élément de $S^{-1}\boldsymbol{I}$ étant de la forme $\frac{x}{s}$ pour $x \in \boldsymbol{I}$ et $s \in S$, on cherche $y \in \boldsymbol{I}$ tel que $\frac{y}{1} = \frac{x}{s}$, *i.e.*, tel qu'il existe $t \in S$ vérifiant :

$$tsy = tx. \qquad (*)$$

Considérons la suite :

$$\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(s) \subseteq \mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(s^2) \subseteq \mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(s^3) \subseteq \cdots$$

Comme $\boldsymbol{A}$ est supposé nœthérien, cette suite stationne ; il existe donc $r \in \mathbb{N}$, tel que $\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(s^r) = \mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(s^{r+1})$. On considère alors l'application de l'idéal $\langle s\rangle^{r+1} \subseteq \boldsymbol{A}$ vers $\boldsymbol{I}$, définie par $\varphi : s^{r+1} \mapsto s^r x$. L'application φ est bien définie puisque

$$\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(s^{r+1}) = \mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(s^r) \subseteq \mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(s^r x)\,.$$

D'autre part, le fait que le module $\boldsymbol{I}$ est injectif entraîne l'existence d'un prolongement $\psi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{I}$ de φ. Notons $y := \psi(1)$, alors :

$$s^{r+1}y = s^r x\,.$$

Or, cette égalité est précisément $(*)$ pour $t = s^r$.

b) Cette question résultera de montrer que le noyau du morphisme canonique $\nu_{\mathfrak{P}} : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}_{\mathfrak{P}}$ est un $\boldsymbol{A}$-module injectif (*cf.* 16.9.1-7), ce pour quoi on appliquera le critère des idéaux.

On remarque pour cela que $x \in \ker(\nu_{\mathfrak{P}})$, si et seulement si, $|x| \not\ni \mathfrak{P}$; en particulier :

$$x \in \ker(\nu_{\mathfrak{P}})\,, \quad \text{si et seulement si,} \quad x \in \bigcup_{\mathfrak{P} \notin \boldsymbol{Z}} \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{I})\,. \qquad (**)$$

Soit maintenant $\varphi : \mathfrak{B} \to \ker(\nu_{\mathfrak{P}})$ un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules. Pour chaque $b \in \mathfrak{B}$, l'équivalence $(**)$ montre qu'il existe $\boldsymbol{Z}_b$ tel que $\varphi(b) \in \Gamma_{\boldsymbol{Z}_b}(\boldsymbol{I})$. La nœthérianité de $\boldsymbol{A}$ entraîne alors l'existence d'un nombre fini de fermés de Zariski $\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_r$, tels que $\varphi(\mathfrak{B}) \subseteq \Gamma_{\boldsymbol{Z}_1}(\boldsymbol{I}) \cup \cdots \cup \Gamma_{\boldsymbol{Z}_r}(\boldsymbol{I})$. Par conséquent, en notant $\boldsymbol{Z} = \bigcup_{j=1}^{r} \boldsymbol{Z}_i$, on a $\varphi(\mathfrak{B}) \subseteq \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{I})$ et la proposition 16.9.1-16 assure l'existence d'un prolongement de φ à $\boldsymbol{A}$ tout entier, à valeurs dans $\Gamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{I})$ donc dans $\ker(\nu_{\mathfrak{P}})$. ∎

16.9.1-18. Proposition : *Soient $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif nœthérien, $\boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et $\boldsymbol{I}$ un $\boldsymbol{A}$-module injectif. Le faisceau de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules $\widetilde{\boldsymbol{I}}$ est* flasque.

Démonstration : Nous devons montrer que les morphismes $\boldsymbol{I} \to \widetilde{\boldsymbol{I}}(U)$ sont surjectifs pour tout ouvert $U \subseteq \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$.

Pour les ouverts principaux. Soit $f \in \boldsymbol{A}$ et $U = D(f)$. La morphisme $\boldsymbol{I} \to \widetilde{\boldsymbol{I}}(U)$ n'est autre que le morphisme de localisation $\boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}_f$ dont la surjectivité est donnée par la la proposition 16.9.1-17.

Pour les ouverts arbitraires. Soit $\sigma_0 \in \widetilde{\boldsymbol{I}}(U)$ et notons $|\sigma_0|$ son support dans U, *i.e.* l'ensemble des $\mathfrak{P} \in U$ tels que $(\sigma_0)_{\mathfrak{P}} \neq 0$; c'est un fermé de Zariski de U dont on notera $\boldsymbol{Z}_0$ l'adhérence dans $\boldsymbol{X}$. La proposition 16.9.1-16 donne une factorisation $\boldsymbol{I} = \Gamma_{\boldsymbol{Z}_0}(\boldsymbol{I}) \oplus \boldsymbol{Q}$ et l'additivité du foncteur de localisation entraîne alors l'égalité : $\widetilde{\boldsymbol{I}}(U) = \widetilde{\Gamma_{\boldsymbol{Z}_0}(\boldsymbol{I})}\,(U) \oplus \widetilde{\boldsymbol{Q}}(U)$. En particulier $\sigma_0 \in \widetilde{\Gamma_{\boldsymbol{Z}_0}(\boldsymbol{I})}\,(U)$.

Soient maintenant $x \in |\sigma_0|$ et $f_0 \in \boldsymbol{A}$ tels que $x \in D(f) \subseteq U$. La restriction $\sigma|_{D(f_0)}$ provient d'une section globale $\Sigma_0 \in \Gamma_{\boldsymbol{Z}_0}(\boldsymbol{I})$ d'après la remarque précédente ; notons $\sigma_1 = \sigma_0 - \Sigma_0|_U$. Alors $|\sigma_1| \subseteq \boldsymbol{Z}_1 \subsetneq \boldsymbol{Z}_0 \cap V(f)$, où $\boldsymbol{Z}_1$ est l'adhérence de Zariski de $|\sigma_1|$ dans $\boldsymbol{X}$.

Les raisonnements du paragraphe précédent montrent alors que $\sigma_1 \in \Gamma_{\boldsymbol{Z}_1}(\boldsymbol{I})\tilde{}\,(U)$.

En itérant ce procédé, on obtient une suite de sections non nulles et équivalentes modulo les sections globales :

$$\sigma_0 \in \Gamma_{\boldsymbol{Z}_0}(\boldsymbol{I})\tilde{}\,(U)\,,\quad \sigma_1 \in \Gamma_{\boldsymbol{Z}_1}(\boldsymbol{I})\tilde{}\,(U)\,,\quad \sigma_2 \in \Gamma_{\boldsymbol{Z}_2}(\boldsymbol{I})\tilde{}\,(U)\,,\quad \cdots \quad ,\sigma_l \in \Gamma_{\boldsymbol{Z}_l}(\boldsymbol{I})\tilde{}\,(U)\,,\quad \cdots$$

On a $\boldsymbol{Z}_0 \supsetneq \boldsymbol{Z}_1 \supsetneq \boldsymbol{Z}_2 \supsetneq \cdots \supsetneq \boldsymbol{Z}_l \cdots$, et comme $\boldsymbol{A}$ est supposé nœthérien, cette suite stationne ; mais ceci n'est possible que si $\sigma_l = 0$ pour $l \gg 0$, ce qui termine la démonstration de la proposition. ∎

16.9.2 Acyclicité des modules quasi-cohérents.

16.9.2-1. Théorème [d'acyclicité de Serre] : *Soit $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ un schéma nœthérien affine ou une variété algébrique affine. Tout $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ est acyclique pour le foncteur de sections globales et la cohomologie de faisceaux sur $\boldsymbol{X}$,* i.e. *:*

$$H^j(\boldsymbol{X},\mathcal{M}) = \boldsymbol{0}\,,\quad \textit{pour tout } j > 0.$$

Démonstration :

Dans le cas du schéma affine associé à un anneau nœthérien $\boldsymbol{A}$. Soit $\mathcal{M} = \widetilde{\boldsymbol{M}}$. D'après le corollaire 16.9.1-10, il existe une résolution injective de $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{0} \longrightarrow \boldsymbol{M} \xrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{I}^0 \xrightarrow{d_0} \boldsymbol{I}^1 \xrightarrow{d_1} \boldsymbol{I}^2 \xrightarrow{d_2} \cdots \qquad (*)$$

et l'application du foncteur (exact) de localisation $(\tilde{})$ donnera la résolution de faisceaux :

$$\boldsymbol{0} \longrightarrow \mathcal{M} = \widetilde{\boldsymbol{M}} \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} \widetilde{\boldsymbol{I}}^0 \xrightarrow{\tilde{d}_0} \widetilde{\boldsymbol{I}}^1 \xrightarrow{\tilde{d}_1} \widetilde{\boldsymbol{I}}^2 \xrightarrow{\tilde{d}_2} \cdots \qquad (**)$$

dont la proposition 16.9.1-18 a montré que les $\widetilde{\boldsymbol{I}}^j$ sont flasques. La résolution $(**)$ est donc une résolution acyclique pour le foncteur des sections globales sur la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur $\boldsymbol{X}$. Il s'ensuit que :

$$H^j(\boldsymbol{X},\mathcal{M}) = h^j\big(\Gamma(\boldsymbol{X},\widetilde{\boldsymbol{I}}^*),\tilde{d}_*\big)\,,$$

et le théorème résulte du fait que $\Gamma(\boldsymbol{X},\bullet)$ inverse le foncteur $(\tilde{})$ et nous ramène à calculer la cohomologie de la suite exacte $(*)$.

Dans le cas d'une variété algébrique affine. On se ramène au cas précédent à l'aide l'équivalence de catégories entre $\mathscr{M}_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ et $\mathscr{M}_{\text{q-coh}}\big(\mathcal{O}_{\text{Spec}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}))}\big)$ (*cf.* l'encadré 16.8-2, page 227). Ceci permet de conclure que le $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ sur la variété affine est restriction (de faisceaux) d'un module quasi-cohérent du schéma affine associé à l'anneau $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})$ des fonctions régulières sur $\boldsymbol{X}$. On applique alors l'équivalence de catégories entre $\text{Fais}(\boldsymbol{X})$ et $\text{Fais}(\text{Spec}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})))$, en particulier la proposition 16.3.1-6.1, qui montre que l'opération de restriction de $\text{Spec}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}))$ à $\boldsymbol{X}$ ne change pas la cohomologie de faisceaux. ∎

§17. Bibliographie

(non exhaustive)

[A-M-R] R. Abraham & J.E. Marsden & T. Ratiu. "*Manifolds, tensor analysis, and applications*" ; Second edition. Springer Verlag ; Appied Mathematical Sciences **75** (1988).

[Ber] M. Berger. "*Géométrie différentielle*" ; Collection U. Armand Collin (1972).

[B-T] R. Bott & L. Tu. "*Differential forms in algebraic tolopogie*" ; Springer-Verlag (1982).

[Bou$_A$] N. Bourbaki. "*Algèbre. Chapitre 10. Algèbre homologique*" ; Masson (1980).

[Bou$_T$] N. Bourbaki. "*Eléments de mathématique. Topologie générale, Chapitres 1–4*" ; Hermann (1971). Princeton Univerity Press (1956).

[Car] H. Cartan. "*Cours de calcul différentiel*" ; Collection méthodes. Hermann (1977). Presses universitaires de France. Collection SUP : Le Mathématicien **10, 11** (1974).

[Die] J. A. Dieudonné. "*Eléments d'analyse 3*" ; Gauthier-Villars. Cahiers scientifiques, fascicule 33, deuxième édition (1974).

[Ful] W. Fulton. "*Algebraic curves*" ; Benjamin. Mathematics lecture notes series (1969).

[God$_1$] R. Godement. "*Introduction à la théorie des groupes de Lie. Tome 1*" ; Publications mathématiques de l'université Paris VII, **11** (1982).

[God$_2$] R. Godement. "*Théorie des faisceaux*" ; Hermann (1973). Springer-Verlag. Grundlehren der Mathematischen **236** (1979). Tôhoku Math. Journal **9**, 119–221 (1957). IHES. Publications Mathématiques, **29** (extrait), 351–359 (1966).

[EGA] A. Grothendieck & J.A. Dieudonné. "*Eléments de géométrie algébrique I*" ; Grundlehren der Mathematischen ; band **166**. Springer-Verlag (1970)

[Har] R. Hartshorne. "*Algebraic Geometry*" ; Springer. Graduate texts in mathematices, **52** (1983).

[Mat] H. Matsumara. "*Commutative Algebra*" ; Benjamin (1970). Springer-Verlag (1975).

[Mil] J. Milnor. "*Topology from the differential viewpoint*" ; University of Virginia Press, Charlottesville, Va. (1965).

[Pha] Pham Mau Quan. "*Introduction à la géométrie des variétés différentiables*" ; Monographies universitaires de mathématiques. Dunod (1969). Ann. of Math. **61**, 197–278 (1955). J. de Maths. Pures et Appl. **36**, 1–16 (1957).

[Spa] E.H. Spanier. "*Algebraic topology*" ; Springer-Verlag (1966).

Index Terminologique

Γ-acyclique, 176, 187
$\Gamma(U;_)$-acyclique, 176, 187
i-ème opérateur face, 140
m-cocycle d'un complexe différentiel $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^*, d_*)$, 84
m-cocycles, 61
m-forme alternée, 52
m-forme différentielle sur $\boldsymbol{M}$, 65
n-ième nombre de Betti de $\boldsymbol{M}$, 62
p-cochaînes (ordonnées) de Čech relatives au recouvrement $\mathcal{U}$ et à valeurs dans le préfaisceau $\mathcal{P}$, 132
p-cochaînes alternées, 140
p-cochaînes ordonnées, 140
p-cochaînes singulières, 139
p-simplexes singuliers de $\boldsymbol{X}$, 197
$\boldsymbol{B}$-morphisme, 38
$\boldsymbol{B}$-morphisme de fibrés vectoriels, 45
$\mathcal{A}$-module $\mathbb{Z}$-gradué, 83
$\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module sur $\boldsymbol{X}$, 226
$\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module, 162
$\mathcal{R}$-saturée, 5
$\mathcal{R}$-saturation d'une partie $A \subseteq \boldsymbol{X}$, 5
à support compact, 58

abélienne, 112
action de $\boldsymbol{G}$ sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$, 9
action linéaire, 52
acyclique, 194
additif, 46, 111
additive, 110
admet des partitions de l'unité, 69
algèbre différentielle graduée, 60
alternées, 139
anti-commutative, 53
anti-dérivation, 102
antidérivation, 60
application de recollement, 14
applications différentiables entre les ouverts $U \subseteq E$ et $V \subseteq F$, 57
atlas m-dimensionnel (et de classe $\mathcal{C}^\infty$) pour $\boldsymbol{M}$, 17
atlas complet de la structure, 18
augmentation, 170
automorphismes, 100

bon recouvrement, 96
bon recouvrement pour $\boldsymbol{M}$, 97
bonne famille d'ouverts, 97
bord, 197
borné à gauche, 184

caractère, 52
carte de coordonnées locales, 17
catégorie, 99, 100
catégorie de systèmes inductifs de $\mathcal{A}\mathbf{b}$ indexés par la catégorie $\mathfrak{J}$, 118
catégorie des espaces (localement) annelés, 218
catégorie opposée à $\mathfrak{C}$, 103
catégories abéliennes, 110
champs de vecteurs (tangents) au-dessus de U, 47
chasse aux diagrammes, 86
cobord, 141
cobords sur U, 61
cocycles sur U, 61
cohérent, 227
cohomologie d'un bicomplexe $(\boldsymbol{A}^{\bullet,*}, d_{\bullet,*}, \delta_{\bullet,*})$, 127
cohomologues, 61
coimage, 112, 155
complexe de de Rham (resp. à supports compacts) sur U, 61
complexe de Čech-de Rham, 133
complexe des cochaînes alternées de Čech relatives à un recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{Y}$ est à valeurs dans un préfaisceau $\mathcal{P}$, 141
complexe des cochaînes singulières de Čech relatives à un recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{Y}$ est à valeurs dans un préfaisceau $\mathcal{P}$, 141
complexe des formes différentielles (resp. à supports compacts) sur U, 61
complexe différentiel de $\mathcal{A}$-modules, 84
complexe différentiel gradué dual, 135
complexe différentiel gradué dual de $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$, 135
complexes d'objets de $\mathfrak{C}$, 110
composition, 100
composante horizontale, 91
composante orientée de $\phi_{\beta,\alpha}$, 75
composante verticale, 91
concentré, 93
concentré en degré r, 179
condition de Mittag-Leffler, 126
conoyau, 111, 155
critère d'injectivité par les idéaux de $\boldsymbol{A}$, 232

décomposition fermée (resp. irréductible), 202
définissent la même orientation, 71
définissent la même structure différentiable, 18
dérivé, 52
de de Rham, 178
de faisceaux, 178
de liaison, 86
de Mayer-Vietoris, 82

de restriction, 195, 197
de Rham-acyclique, 134
de transition, 17
de Čech, 178
degré total, 101
degrés, 101
des formes différentielles de $\mathbb{R}\times\boldsymbol{M}$ à support compact le long des fibres, 93
difféomorphisme de transition, 63
dimension, 205
dimension cohomologique finie de $\boldsymbol{X}$, 188
dimension de Krull, 205
dimension topologique, 203
divisible, 232
du premier quadrant, 127

ensemble algébrique, 208
ensemble des zéros de A, 208
espace annelé, 217
espace des $\boldsymbol{G}$-orbites, 10
espace euclidien, 12
espace localement annelé, 217, 219
espace topologique quotient de $\boldsymbol{X}$ par $\mathcal{R}$, 5
exact, 107, 113
exact à droite, 114
exact à gauche, 114
exacte à droite, 114
exacte à gauche, 114

face, 197
facteur direct, 232
faisceau, 148, 149
faisceau associé à $\mathcal{P}$, 158
faisceau associé à un préfaisceau $\mathcal{P}$, 153
faisceau d'anneaux, 217
faisceau de $\boldsymbol{A}$-modules, 157
faisceaux d'anneaux sur $\boldsymbol{X}$, 162
faisceaux différentiels gradués, 178
fermé de Zariski, 208
fermée, 5
fibré image inverse par f, 38
fibré vectoriel de base $\boldsymbol{B}$ et fibre E, 43
fibration, 37
fibration localement triviale, 37
fibration localement triviale de fibre l'espace topologique $\boldsymbol{F}$, 37
fibration localement triviale de variétés, 37
filtrant inférieurement, 156
filtrante, 122
filtrante supérieurement, 122
finis, 202
flasque, 166, 187
foncteur coinduit, 105
foncteur constant $\mathcal{K}_{\boldsymbol{M}}$, 119
foncteur contravariant, 103
foncteur covariant, 103
foncteur de cohomologie, 112
foncteur induit, 105
foncteurs de cohomologie de faisceaux, 165
fonction régulière, 224
fonction sur $\boldsymbol{M}$, 27
fonctions de partition, 69
fonctions régulières sur $\boldsymbol{Z}$, 224
forme m-multilinéaire, 51
formes (alternées) impaires, 54
formes (alternées) paires, 54

générique, 206
germe, 149
germes de k-formes différentielles de $\boldsymbol{M}$ au point x, 105
graphe de $\mathcal{R}$, 4
groupe à un paramètre, 33
groupe de Lie, 31
groupe de Lie $\boldsymbol{G}$ agit sur une variété différentiable $\boldsymbol{M}$, 32
groupe topologique, 31
groupes de cohomologie de faisceaux de $\mathcal{G}$, 173
groupes de cohomologie de faisceaux de $\mathcal{G}$ sur U, 173

homogènes de degré m, 52
homotope à zéro, 117
homotopes, 116
hyper-cohomologie, 179
hypersurface, 224

image, 112, 155
image directe, 94
image directe par f, 217
image inverse, 132
image inverse du $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module $\mathcal{M}$, 211
image réciproque par f de ω, 68
indices, 118
injectif, 111, 231
injectif d'une catégorie abélienne, 166
intégration sur les fibres, 94
irréductible, 202
isomorphisme, 100
isomorphisme local, 158
isomorphisme naturel, 104

jacobien de f, 59

l'algèbre de cohomologie de de Rham à supports compacts de U, 61

l'algèbre de cohomologie de de Rham à supports compacts de $\boldsymbol{M}$, 68
l'algèbre de cohomologie de de Rham de U, 61
l'algèbre de cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{M}$, 68
l'atlas de définition, 17
l'espace fibré au-dessus de $\boldsymbol{B}$, 37
l'espace projectif réel de dimension $n-1$, 11
l'espace total de la fibration, 37
l'hypercohomologie du complexe $(\mathcal{G}^*, d_*)$ en degré r, 181
l'intégrale de $\omega = f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$, 62
l'orbite de $\boldsymbol{G}$ passant par x, 10
la base de la fibration, 37
la catégorie des recouvrements de l'espace $\boldsymbol{Y}$, 138
la cohomologie de $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$, 84
la cohomologie de Čech de $\boldsymbol{Y}$ à valeurs dans le préfaisceau $\mathcal{P}$, 145
la cohomologie de Čech relativement au recouvrement $\mathcal{U}$ et à valeurs dans le préfaisceau $\mathcal{P}$, 133
la cohomologie singulière de $\boldsymbol{X}$ à coefficients dans $\boldsymbol{A}$, 197
la condition de recollement, 65
la différentielle du $\mathcal{A}$-module différentiel $\boldsymbol{A}$, 84
la résolution de $\mathcal{F}$ par le recouvrement (ouvert) $\mathcal{U}$, 193
la relation d'équivalence engendrée par $\mathcal{R}$, 4
la restriction d'un faisceau $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Fais}(\boldsymbol{X}))$ à $\boldsymbol{Y}$, 210
la restriction de U à V, 74
la restriction de $\mathcal{G}$ à U, 190
la restriction de $\mathcal{P}$ à l'ouvert U, 132
la restriction de la fibration π à $\boldsymbol{B}'$, 38
la section nulle, 44
la signature, 55
la structure de variété induite par $\boldsymbol{M}$, 29
la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte $(\triangle)$, 87
le p-simplexe standard, 196
le complexe $(S_\bullet(\boldsymbol{X}), \delta_\bullet)$ des chaînes singulières à coefficients dans $\boldsymbol{A}$, 197
le complexe de cochaînes singulières de $\boldsymbol{X}$ à coefficients dans $\boldsymbol{A}$, 197
le complexe de de Rham de $\boldsymbol{M}$, 68
le complexe de de Rham des formes différentielles à support compact de $\boldsymbol{M}$, 68
le complexe de Čech de $\boldsymbol{Y}$ à valeurs dans le préfaisceau $\mathcal{P}$, 145
le complexe des cochaînes de Čech relatif au recouvrement $\mathcal{U}$ et à valeurs dans le préfaisceau $\mathcal{P}$, 133
le faisceau conoyau, 157
le faisceau différentiel gradué des cochaînes de Čech à valeurs dans $\mathcal{F}$ et relatives au recouvrement $\mathcal{U}$, 192
le faisceau structural de l'espace annelé, 217
le fibré cotangent à $\boldsymbol{M}$, 49
le fibré tangent de $\boldsymbol{M}$, 47
le foncteur de restriction à l'ouvert U, 190
le germe de φ en y, 150
le localisé de $\boldsymbol{A}$ en $\mathfrak{P}$, 219
le rang du fibré, 43
le représentant de ω dans la carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, 66
le revêtement associé à la fibration (localement triviale) π, 42
le revêtement universel de $\boldsymbol{M}$, 41
le schéma affine associé à $\boldsymbol{A}$, 219, 221
le support de ω, 67
Lemme de Poincaré pour la cohomologie de de Rham à supports compacts, 93
les m-cobords de $(\boldsymbol{A}^*, d_*)$, 84
les m-formes différentielles sur U, 57
les composantes irréductibles de $\boldsymbol{Y}$, 203
les formes différentielles homogènes de degré m sur U, 57
les résolutions flasques canoniques de Godement, 165
les sections de $\mathcal{P}$ au-dessus de l'ouvert U, 131
librement, 33
limite, 119
local, 217
localement annelé, 217
localement finie, 69
localement isomorphes, 151
localement nul, 151
longueur, 203

même structure fibrée vectorielle, 44
matrice jacobienne, 59
mineurs de rang r, 55
morphisme, 84
morphisme d'espaces annelés de $(\boldsymbol{X}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ à valeurs dans $(\boldsymbol{Y}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$, 217
morphisme de $\mathcal{A}$-modules $\mathbb{Z}$-gradués, 83
morphisme de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules, 163
morphisme de faisceaux, 157
morphisme de faisceaux d'anneaux de $\underline{\boldsymbol{A}}$ vers $\underline{\boldsymbol{B}}$, 217
morphisme de fibrés vectoriels, 45
morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de $\boldsymbol{B}$, 45
morphisme de fibrations π_1 vers π_2, 38
morphisme de fibrations au-dessus de $\boldsymbol{B}$, 38
morphisme de liaison des suites de cohomologie associées à $(f(\boldsymbol{A}), g(\boldsymbol{A}))$, 87
morphisme de préfaisceaux, 131

morphisme de suites exactes de complexes différentiels de $\mathcal{A}$-modules, 85
morphisme de variétés, 25
morphisme identité de $\boldsymbol{A}$, 100
morphisme nul, 110
morphismes, 28
morphismes de $\mathcal{C}$ de domaine $\boldsymbol{A}$ et codomaine $\boldsymbol{B}$, 100
morphismes de degré d, 101

nœthérien, 202
naturalité, 99
nil-radical, 204
noyau, 111, 155, 157

objet injectif de la catégorie $\mathcal{C}$, 233
objet nul, 110
objets, 100
opérateur cobord, 133
opérateur d'antisymétrisation, 53
ordonnées, 139
orienté, 63, 70
orientable, 70
ouvert de trivialisation de la fibration, 37
ouvert principal, 218, 224
ouverte, 5
ouverts principaux, 218

partition de l'unité, 69
permutations de battage en tas de m et n cartes, 54
petites catégories, 101
pleine, 100
plus fine, 4
plus grossière, 4
point fixe de φ, 12
possède assez d'injectifs, 233
possède des limites, 119
possède des limites inductives, 119
possède des limites projectives, 119
préfaisceau d'anneaux, 217
préfaisceau image directe de $\mathcal{P}$ par f, 131
préfaisceau nul, 154
préfaisceau sur $\boldsymbol{Y}$, 131
préfaisceautiser, 148
préserve l'orientation, 63
produit extérieur, 53
prolongé par zéro, 62
prolongement par zéro, 74

quasi-cohérent, 227
quasi-compacts, 202
quasi-isomorphisme, 107

réductible, 202
réduit, 204
résolution d'un faisceau $\mathcal{G}$, 187
résolution de $(\mathcal{G}^*, d_*)$, 187
résolution de $\mathcal{G}$ (à droite), 170
résolution flasque canonique de Godement, 166
rétraction, 115
réunion disjointe de variétés, 36
radical, 204
radical de Jacobson, 204
radical de l'anneau $\boldsymbol{A}$, 204
radical de nilpotence de l'anneau $\boldsymbol{A}$, 204
radical nilpotent, 204
raffine, 138
raffinement, 138
rang d'un morphisme en un point, immersion, submersion, morphisme étal, difféomorphisme, etc., 26
recollement de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ par f, 13
recouvrement ouvert, 138
recouvrement pointé de $\boldsymbol{Y}$, 139
restriction de $\mathcal{U}$ à V, 191

saturée, 5
schéma affine nœthérien, 221
scindée, 115
section, 115
section de π, 38
section globale, 38
section nulle, 44
sections à support dans $\boldsymbol{Z}$, 235
sections à supports compacs, 45
sections au-dessus d'un ouvert, 131
sections au-dessus de U, 131, 156
sections globales, 229
simplement connexe, 40
simpliciale, 178
singulière, 178
singulières, 139
somme amalgamée, 35
sous-catégorie, 100
sous-groupe alterné, 52
sous-variété, 19, 21
sous-variété de $\boldsymbol{M}$ de dimension n, 29
sous-variété différentiable, 19
spectre, 205
spectre maximal, 205
spectre premier, 205
structure de variété fibrée vectorielle, 44
structure différentiable sur $\boldsymbol{M}$, 18
subordonnée à $\mathcal{U}$, 69
suite exacte courte, 113

suite exacte longue d'hyper-cohomologie de complexes de faisceaux, 180
suite exacte longue de cohomologie de faisceaux, 173, 179
suites exactes longues de Mayer-Vietoris, 88
support de f, 27
support de la section σ, 45
surjectif, 111
système inductif (resp. projectif) d'objets de $\mathfrak{C}$ relatif à $(\mathcal{I}, \preccurlyeq)$, 105
système inductif de $\mathcal{A}\mathbf{b}$, 118
système multiplicatif, 212
système projectif, 118
systèmes projectifs de $\mathcal{A}\mathbf{b}$ indexés par la catégorie $\mathfrak{I}$, 118

tautologique, 144
théorème principal de la théorie de faisceaux, 186
théorie des foncteurs dérivées (à droite), 164
topologie de Zariski, 208
topologie quotient, 5
topologie spectrale (souvent appelée de Zariski), 205
trace, 36
transformation naturelle, 104
trivialisable, 37
trivialisable au-dessus de V_b, 37

un m-cobord, 61
un espace vectoriel orienté, 64
un isomorphisme local de préfaisceau, 151
un préfaisceau de $\boldsymbol{A}$-modules, 154
un relèvement continu de γ, 40
un revêtement, 40
une orientation de E, 64
une orientation de $\boldsymbol{M}$, 71
une partition de l'unité de $\boldsymbol{M}$ d'un voisinage de $\boldsymbol{K}$ subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{K}$, 70
une présentation finie, 227

variété, 90
variété algébrique affine, 225
variété d'orientation de $\boldsymbol{M}$, 76
variété différentiable de dimension m, 18
variété orientée, 71
variété produit, 30
variétés différentiables, 28
vecteurs tangents à $\boldsymbol{M}$ basés en $x \in \boldsymbol{M}$, 47
vecteurs tangents de $\boldsymbol{M}$, 47

zéro de ω, 67

Cohomologie de de Rham dans la catégorie des schémas

Alberto Arabia

2007 – 2008

Université Paris 7 – Denis Diderot

175, rue de Chevaleret. Paris 75013

Cohomologie de de Rham dans la catégorie des schémas

Table des matières

§1. **Formes différentielles relatives** **3**
1.1. Différentielles relatives sur une algèbre 3
1.2. Représentabilité de $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A},_)$ 5
1.2.1.a Rappel sur le lemme de Yoneda 5
1.3. Première suite exacte à droite fondamentale 6
1.4. Constructions du module des formes différentielles relatives 7
1.4.1.a Quotients d'algèbre de polynômes 7
1.4.4.a Changement de base 8
1.4.7.a Produit tensoriel d'algèbres 9
1.4.9.a Algèbres de fractions 10
1.4.12.a Sous-quotient d'un produit tensoriel d'algèbres 11
1.4.13.a Algèbres symétriques 12
1.5. Seconde suite exacte à droite fondamentale 13
1.6. À propos de l'exactitude à gauche de la seconde suite fondamentale 14
1.6.2.a Une condition générale de scindage 14
1.6.3.a Le cas des algèbres symétriques 15
1.6.4.a Le cas des extensions de corps 16
1.7. Limites inductives et projectives des modules de différentielles relatives 18
§2. **Complexe de de Rham d'une algèbre** **19**
2.1. Catégorie d'algèbres différentielles graduées 19
2.1.1.a Rappels sur les foncteurs adjoints 19
2.1.5.a Rappels sur les algèbres associatives 22
2.1.7.a Algèbres symétriques, anticommutatives, alternées 24
2.1.8.a Notation 24
2.1.13.a $\boldsymbol{R}$-algèbres différentielles graduées 25
2.1.15.a $\boldsymbol{R}$-algèbres différentielles graduées alternées 26
2.1.19.a Structure de $\boldsymbol{R}$-adg alternée sur $\Omega^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}$ 26
2.1.23.a Structure de $\boldsymbol{R}$-adg alternée de $\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ 28
2.2. Les foncteurs 'complexe de de Rham' et 'cohomologie de de Rham' 29
2.3. Cohomologie de de Rham d'une algèbre de polynômes 31
§3. **Cohomologie de de Rham d'un schéma** **33**
3.1. Complexe et cohomologie de de Rham relatifs 33
3.1.1.a Remarques générales 33
3.1.3.a Fonctorialité de la cohomologie de de Rham 33
3.2. Quasi-cohérence du complexe de de Rham relatif 34
3.3. Propriétés élémentaires du complexe de de Rham relatif 35

Alberto Arabia

§ **4. Schémas et algèbres lisses** **35**
4.1. Rappels d'algèbre locale 35
4.2. Lissité dans les morphismes de schémas 39
4.2.3.a Étude locale de la lissité d'un morphisme 41
4.2.6.a Conditions locales de lissité 42
4.3. Condition globale de lissité 44
4.3.7.a Lissité de l'algèbre symétrique d'un module projectif 49
4.3.8.a À propos de l'exactitude à gauche de la seconde suite fondamentale 49
4.3.9.a Transitivité de la lissité 50
4.3.10.a Stabilité de la lissité par changement de base 51
4.4. Lissité, platitude et produit fibré 51
4.4.1.a Morphismes plats 51
4.4.3.a Transitivité de la platitude 52
4.4.4.a Stabilité de la platitude par changement de base 52
4.4.5.a Lissité et platitude 52
4.5. Intersections complètes lisses 54
4.5.6.a Transversalité de certains fibrés conormaux 55
4.5.8.a Complément sur les algèbres étales 57
§ **5. Relèvements** **58**
5.1. Cadre général 58
5.2. Relèvements des algèbres lisses 59
5.2.1.a Relèvements des intersections complètes lisses 59
5.2.2.a Relèvements des modules projectifs 60
5.2.6.a Existence des relèvements des algèbres lisses 63
5.2.9.a Le problème de l'unicité des relèvements d'une algèbre lisse 66
5.3. Relèvements d'homomorphismes à source lisse 67
5.3.5.a Homotopies de relèvements d'homomorphismes homotopes 75
5.4. Relèvements et complétion $\boldsymbol{I}$-adique 76
5.4.1.a Complétion $\boldsymbol{I}$-adique 76
5.4.2.a Complétion $\boldsymbol{I}$-adique des relèvements des $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses 78
5.4.6.a Existence et homotopie de relèvements d'un morphisme 79
5.4.9.a Relèvements d'algèbres sur un anneau de valuation discrète 80
5.4.12.a Relèvements de k-algèbres 82
§ **6. Exemples de calcul de la cohomologie de de Rham** **82**
6.1. La droite affine privée d'un nombre fini de points 82
6.2. À propos du complémentaire d'une hypersurface lisse de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ 86
§ **7. Références bibliographiques** **89**

§1. Formes différentielles relatives

1.1 Différentielles relatives sur une algèbre

Soit $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif arbitraire. On désigne par $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ la catégorie dont les objets sont les $\boldsymbol{R}$-algèbres unitaires, associatives et commutatives et les morphismes sont les morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres qui conservent l'élément neutre multiplicatif ; on notera indifféremment $\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$ et $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$ l'ensemble de telles applications. Les objets de $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ sont des quotients des algèbres de polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$; l'expression « *$\boldsymbol{R}$-algèbre* » fera toujours allusion à une telle algèbre plutôt qu'à une algèbre générale (*cf.* 2.1.5), sauf, bien évidemment, mention explicite du contraire.

1.1.1. Définition : Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre et $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}$-module. On appelle « **$\boldsymbol{R}$-dérivation de $\boldsymbol{A}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$** » la donnée d'un morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules $D : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{M}$ vérifiant l'égalité de Leibniz :

$$D(a_1 a_2) = a_1 \cdot D(a_2) + a_2 \cdot D(a_1) \qquad \text{pour tous } a_1, a_2 \in \boldsymbol{A}. \tag{1}$$

En particulier, si $\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$ désigne l'identité multiplicative de $\boldsymbol{A}$, on a $D(r \cdot \mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}) = 0$ pour tout $r \in \boldsymbol{R}$.

On note $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$ l'ensemble des $\boldsymbol{R}$-dérivations de $\boldsymbol{A}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$. Il est immédiat de constater que si $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$ alors $D_1 + a \cdot D_2$ appartient également à $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$, quel que soit $a \in \boldsymbol{A}$; il en résulte une structure naturelle de $\boldsymbol{A}$-module sur $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$.

1.1.2. Exercice : Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre et $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}$-module. On munit $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{M}$ avec une structure d'anneau en posant :

$$(a_1, m_1) \cdot (a_2, m_2) := (a_1\, a_2, a_1 \cdot m_2 + a_2 \cdot m_1)\,.$$

L'application $p_1 : \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{A}$ qui associe $(a, m) \mapsto a$ est alors un morphisme d'anneau. Notons $p_2 : \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ la projection canonique.

a) Pour chaque $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$ montrer que l'application $\varphi(D) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{M}$ définie par $a \overset{\varphi(D)}{\longmapsto} (a, D(a))$ est un morphisme d'anneaux tel que

$$\begin{cases} p_1 \circ \varphi(D) = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}\,, \\ p_2 \circ \varphi(D)(\boldsymbol{R} \cdot \mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}) = \mathbf{0}\,. \end{cases} \tag{$*$}$$

b) Notons $\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{M})$ l'ensemble des morphismes d'anneaux vérifiant les conditions $(*)$ ci-dessus.

Montrer que l'application $\varphi : \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M}) \to \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{M})$, définie dans la question précédente, est *bijective*.

1.1.3. Remarques et notations :

a) Soit $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres et soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{B}$-module. Pour tout $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B}; \boldsymbol{M})$, l'application $\alpha^*(D) := D \circ \alpha$ est une $\boldsymbol{R}$-dérivation de $\boldsymbol{A}$. La correspondance $\alpha^* : \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B}; \boldsymbol{M}) \to \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$ est un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules.

Exercice. Soit $\mathfrak{A}$ un idéal de $\boldsymbol{A}$ et notons, pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{N}$, par $\boldsymbol{N}^{\mathfrak{A}}$ le sous-module des éléments $n \in \boldsymbol{N}$ annulés par $\mathfrak{A}$. Le $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{N}^{\mathfrak{A}}$ possède alors une structure naturelle de $(\boldsymbol{A}/\mathfrak{A})$-module. Notons aussi $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})^{(\mathfrak{A})}$ l'ensemble des $\boldsymbol{R}$-dérivations de $\boldsymbol{A}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$ qui s'annulent sur $\mathfrak{A}$.

1) Montrer que $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})^{(\mathfrak{A})}$ est un sous-$\boldsymbol{A}$-module de $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})$ et que l'on a :

$$\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M}\big)^{(\mathfrak{A})} \subseteq \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M}\big)^{\mathfrak{A}} = \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M}^{\mathfrak{A}}\big)\,.$$

La structure de $\boldsymbol{A}$-module de $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})^{(\mathfrak{A})}$ se factorise en une structure $(\boldsymbol{A}/\mathfrak{A})$-module.

2) Notons $\nu : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}/\mathfrak{A}$ la surjection canonique. Montrer, pour $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})^{(\mathfrak{A})}$, qu'il existe une et une seule dérivation $D' \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}/\mathfrak{A};\boldsymbol{M}^{\mathfrak{A}})$ telle que $\nu^*(D') = D$.

3) En déduire que la composée des morphismes canoniques

$$\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}/\mathfrak{A};\boldsymbol{M}^{\mathfrak{A}}\big) \xrightarrow{\ \nu^*\ } \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M}^{\mathfrak{A}}\big) \xrightarrow{\ \jmath_*\ } \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M}\big)$$

où $\jmath : \boldsymbol{N}^{\mathfrak{A}} \hookrightarrow \boldsymbol{N}$ désigne l'inclusion canonique, est injective d'image $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})^{(\mathfrak{A})}$.

Cet exercice démontre le lemme suivant.

Lemme : *Lorsque $\alpha : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}$ un morphisme* surjectif *de $\boldsymbol{R}$-algèbres et que $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{B}$-module, l'application $\alpha^* : \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B};\boldsymbol{M}) \to \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})$ est* injective *et son image s'identifie au sous-$\boldsymbol{A}$-module de $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})$ des dérivations nulles sur l'idéal* $\ker(\alpha)$.

b) Soit $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules. Pour toute dérivation $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})$, la composée $f \circ D$ est clairement une $\boldsymbol{R}$-dérivation de $\boldsymbol{A}$ à valeurs dans $\boldsymbol{N}$ et sera notée, suivant le contexte, par $f_*(D)$, $D^*(f)$ ou $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A},f)$. L'application définie sur la somme directe $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M}) \oplus \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ à valeurs dans $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{N})$ qui fait correspondre au couple (D,f) la dérivation $f \circ D$ est $\boldsymbol{A}$-bilinéaire.

1.1.4. Définition : On appelle «**module des formes différentielles relatives de $\boldsymbol{A}$ sur $\boldsymbol{R}$**» la donnée d'un couple $\big(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\big)$, où $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est un $\boldsymbol{A}$-module et où $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} : \boldsymbol{A} \to \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est une $\boldsymbol{R}$-dérivation, tel que pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M}) & \xrightarrow[\equiv]{d^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}} & \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M}) \\ f & \longmapsto & d^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(f) \end{array}$$

est *bijective*.

1.1.5. Proposition : *Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, il existe un module de formes différentielles relatives sur $\boldsymbol{R}$, de plus, ce module est unique à isomorphisme (canonique) près.*

Démonstration :
Existence – Considérons le $\boldsymbol{A}$-module libre $\bigoplus_{a\in\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}\cdot da$, où da est un symbole, notons $\mathfrak{J}$ le sous-$\boldsymbol{A}$-module de $\bigoplus_{a\in\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}\cdot da$ engendré par les éléments de la forme :

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{(R1)} & d(a_1\,a_2) - a_1\cdot da_2 - a_2\cdot da_1\,, & \\ \text{(R2)} & d(a_1+a_2) - da_1 - da_2\,, & \end{array}\right\} \quad \text{pour tous } a_1,a_2 \in \boldsymbol{A}\,;$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{(R3)} & d(ra) - r\cdot da\,, & \end{array}\right. \quad \text{pour tous } r \in \boldsymbol{R} \text{ et } a \in \boldsymbol{A}\,;$$

et posons $\Omega := \left(\bigoplus_{a\in \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}\cdot da\right)/\mathfrak{J}$. L'application $d : \boldsymbol{A} \to \Omega$ définie par $d(a) = \overline{da}$ est alors une $\boldsymbol{R}$-dérivation. Montrons que le couple (Ω, d) est un module de formes différentielles relatives de $\boldsymbol{A}$ sur $\boldsymbol{R}$. En effet, soit $D : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{M}$ une $\boldsymbol{R}$-dérivation ; le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\varphi : \bigoplus_{a\in \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}\cdot da \to \boldsymbol{M}$ défini par $\varphi : da \mapsto D(a)$ s'annule sur $\mathfrak{J}$ et induit un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $f : \Omega \to \boldsymbol{M}$ qui vérifie, par construction, $f_*(d) = D$. L'application canonique induite par d entre $\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\Omega, \boldsymbol{M}) \to \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$ est donc surjective ; son injectivité découle d'observer que si $f_*(d) = 0$ on a $f(da) = 0$ pour tout $a \in \boldsymbol{A}$, et comme les éléments de la forme da constituent un système de générateurs pour Ω, l'égalité $f = 0$ s'ensuit.

Unicité – Elle découle de remarquer que si (Ω_1, d_1) et (Ω_2, d_2) vérifient la condition de la définition 1.1.4, les foncteurs $(_) \rightsquigarrow \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_1, _)$ et $(_) \rightsquigarrow \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_2, _)$ sont canoniquement isomorphes. ∎

1.2 Représentabilité de $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, _)$

1.2.1. Rappel sur le lemme de Yoneda. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathfrak{O} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$; notons **Ens** la catégorie des ensembles, et considérons le foncteur covariant $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{O}, _) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$. Soit maintenant $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}'$ un foncteur covariant de $\mathcal{C}$ vers une sous-catégorie $\mathbf{Ens}'$ de **Ens**. Un «*morphisme de foncteurs*» $\eta : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{O}, _) \to \mathcal{F}$ est la donnée, pour chaque $\mathfrak{M} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ d'une application $\eta(\mathfrak{M}) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{O}, \mathfrak{M}) \to \mathcal{F}(\mathfrak{M})$ de telle sorte que pour chaque morphisme $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{N} & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{O}, \mathfrak{N}) & \xrightarrow{\eta(\mathfrak{N})} \mathcal{F}(\mathfrak{N}) \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & {\scriptstyle \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{O},\alpha)}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{F}(\alpha)} \\ \mathfrak{M} & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{O}, \mathfrak{M}) & \xrightarrow{\eta(\mathfrak{M})} \mathcal{F}(\mathfrak{M}) \end{array}$$

soit commutatif. En particulier, lorsque $\mathfrak{N} = \mathfrak{O}$, on a l'égalité :

$$\eta(\mathfrak{M})(\alpha) = \eta(\mathfrak{M}) \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{O}, \alpha)(\mathbf{1}_{\mathfrak{O}}) = \mathcal{F}(\alpha)(\eta(\mathfrak{O})(\mathbf{1}_{\mathfrak{O}})) \qquad (*)$$

pour tous $\mathfrak{M} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{O}, \mathfrak{M})$. La transformation naturelle η est donc entièrement déterminée par l'élément $\boldsymbol{o} := \eta(\mathfrak{O})(\mathbf{1}_{\mathfrak{O}}) \in \mathcal{F}(\mathfrak{O})$. Réciproquement, pour chaque $\boldsymbol{o} \in \mathcal{F}(\mathfrak{O})$, l'égalité $\eta_{\boldsymbol{o}}(\mathfrak{M})(\alpha) := \mathcal{F}(\alpha)(\boldsymbol{o})$ (*cf.* $(*)$) définit une transformation naturelle de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{O}, _)$ vers $\mathcal{F}$. L'application de $\mathcal{F}(\mathfrak{O})$ vers $\mathrm{Hom}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{O}, _), \mathcal{F})$ qui associe $\boldsymbol{o} \mapsto \eta_{\boldsymbol{o}}$ est donc bijective.

1.2.2. Définition : Un foncteur covariant $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ est dit «*représentable*» lorsqu'il existe un isomorphisme naturel de foncteurs $\eta : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{O}, _) \equiv \mathcal{F}$ pour un certain $\mathfrak{O} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$; on dit alors que le couple $\big(\mathcal{F}(\mathfrak{O}), \eta(\mathfrak{O})(\mathbf{1}_{\mathfrak{O}})\big)$ «*représente*» $\mathcal{F}$.

1.2.3. Remarque : Tout foncteur d'ensembles n'est pas représentable. Pour qu'un foncteur additif $\mathcal{F} : \mathbf{Ab} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$, où **Ab** désigne une catégorie abélienne, soit représentable il faut qu'il soit exact à droite.

La proposition suivante est une conséquence de ce qui précède (*cf.* [J] p. 39).

1.2.4. Proposition (lemme d'Yoneda) : *Soit* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ *un foncteur covariant.*

a) *Le foncteur* $\mathcal{F}$ *est représentable, si et seulement si, il existe* $\mathfrak{O} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *et un élément* $\boldsymbol{o} \in \mathcal{F}(\mathfrak{O})$ *tels que pour chaque* $\mathfrak{M} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *et* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}(\mathfrak{M})$ *il existe* ***un et un unique*** $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{O}, \mathfrak{M})$ *vérifiant* $\boldsymbol{x} = \mathcal{F}(\alpha)(\boldsymbol{o})$.

b) *Lorsque* $\mathcal{F}$ *est représentable, deux couples* $(\boldsymbol{o}_1, \mathfrak{O}_1)$ *et* $(\boldsymbol{o}_2, \mathfrak{O}_2)$ *le représentent, si et seulement si, il existe un isomorphisme* $\Xi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2)$ *tel que* $\boldsymbol{o}_2 = \mathcal{F}(\Xi)(\boldsymbol{o}_1)$ *(un tel isomorphisme est alors unique).*

Comme la correspondance $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, _)$ qui associe à un $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ le module $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{M})$ et à un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $f : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$ le morphisme $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, f)$ (*cf.* 1.1.3-0b), est fonctorielle covariante (et additive), les considérations précédentes s'appliquent et permettent de reformuler la proposition 1.1.5 par le corollaire suivant.

1.2.5. Corollaire : *Pour chaque* $\boldsymbol{R}$*-algèbre* $\boldsymbol{A}$*, le couple* $(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ *représente le foncteur* $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, _) : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$.

1.3 Première suite exacte à droite fondamentale

La démonstration de la proposition 1.1.5 fournit, pour chaque $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, un couple canonique $(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ qui représente le foncteur $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, _)$; de plus, pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ l'application $\Omega(\alpha) : \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}$ qui associe $\Omega(\alpha) : a_1 \cdot da_2 \mapsto \alpha(a_1) \cdot d\alpha(a_2)$ est bien définie. La correspondance Ω définie sur la catégorie $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ des $\boldsymbol{R}$-algèbres vers la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{R})$ des $\boldsymbol{R}$-modules qui associe $\Omega : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ et $\alpha \rightsquigarrow \Omega(\alpha)$ est fonctorielle et covariante.

On vérifie aisément que pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ et pour tout $\boldsymbol{B}$-module $\boldsymbol{M}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{B}}\big(\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{M}\big) & \xleftarrow[\equiv]{d^*_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}} & \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B}; \boldsymbol{M}) \\ {\scriptstyle \Omega(\alpha)^*}\downarrow \quad \uparrow{\scriptstyle \Omega(\alpha)} & & {\scriptstyle \alpha^*}\downarrow \\ \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}\big(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{M}\big) & \xleftarrow[\equiv]{d^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}} & \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M}) \end{array} \tag{2}$$

1.3.1. Proposition : *Soit* $\alpha : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}$ *un morphisme* ***surjectif*** *de* $\boldsymbol{R}$*-algèbres.*

a) *La suite suivante est exacte.*

$$\boxed{\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{A} \cdot d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(\ker(\alpha)) \xrightarrow{\subseteq} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\Omega(\alpha)} \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{0}} \tag{3}$$

b) *L'application* $\partial : \ker(\alpha)/\ker(\alpha)^2 \to \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B}$ *donnée par* $\bar{x} \mapsto d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(x) \otimes 1$ *est un morphisme de* $\boldsymbol{A}$*-modules bien défini et la suite :*

$$\boxed{\ker(\alpha)/\ker(\alpha)^2 \xrightarrow{\partial} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B} \xrightarrow{\Omega(\alpha) \times \mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}} \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{0}} \tag{4}$$

où $\Omega(\alpha) \times \mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} : a \cdot da' \otimes b \mapsto b\alpha(a) \cdot d\alpha(a')$*, est exacte à droite.*

Démonstration :

a) La surjectivité de $\Omega(\alpha)$ résulte de ce que l'image par $\Omega(\alpha)$ du système de générateurs canonique de $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est le système de générateurs canonique de $\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}$.

L'assertion concernant le noyau de $\Omega(\alpha)$ résulte de remarquer dans un premier temps l'inclusion évidente : $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(\ker(\alpha)) \subseteq \ker(\Omega(\alpha))$ (‡) ; on considère ensuite le $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M} := \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}/\boldsymbol{A}\cdot d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(\ker(\alpha))$. Pour tout $x \in \ker(\alpha)$ et tout $a \in \boldsymbol{A}$, l'égalité $x\cdot da = d(xa) - a\cdot dx$ montre que $\ker(\alpha)\cdot\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$ de sorte que $\boldsymbol{M}$ possède une structure naturelle de $\boldsymbol{B}$-module compatible à sa structure de $\boldsymbol{A}$-module. Notons $\pi : \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}$ la projection canonique ; la composée $\pi\circ d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ définit une $\boldsymbol{R}$-dérivation de $\boldsymbol{A}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$ nulle sur $\ker(\alpha)$, elle se factorise donc à travers α et une dérivation de $\boldsymbol{B}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$ d'après le lemme de 1.1.3-0a. Ceci signifie, grâce à la commutativité du diagramme (2), que l'application π se factorise à travers $\Omega(\alpha)$ et donc que $\ker(\Omega(\alpha)) \subseteq \ker(\pi) = \boldsymbol{A}\cdot d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(\ker(\alpha))$, ce qui joint à (‡) termine la démonstration de l'assertion (0a).

b) La correspondance $\Delta : \ker(\alpha) \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}$ qui associe $x \overset{\Delta}{\longmapsto} dx\otimes 1$, vérifie bien l'égalité $\Delta(xy) = x\cdot dy\otimes 1 + y\cdot dx\otimes 1 = 0$; elle induit l'application ∂ de l'énoncé. D'autre part, on a $\Delta(ax) = dax\otimes 1 = a\cdot dx\otimes 1 + x\cdot da\otimes 1 = a\cdot dx\otimes 1$ et ∂ est un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules. On remarque alors que la suite (4) n'est autre que la suite (3) à laquelle on a appliqué le foncteur exact à droite $(_)\rightsquigarrow(_)\otimes_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}$. ∎

1.3.2. Remarque : On prendra garde du fait que, dans l'énoncé de la proposition précédente, la surjectivité de α est indispensable pour l'exactitude des suites (3) et (4) en leur terme central. En effet, soit k un corps de caractéristique 2 et soient $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = k[X]$ et $\alpha : \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ l'homomorphisme de k-algèbres déterminé par $\alpha(X) = X^2$; cette application est clairement injective. D'autre part, l'application $d : k[X]\to k[X]$ définie par $d(P(X)) = \frac{dP}{dX}(X)$ est une k-dérivation et toute k-dérivation $D : k[X]\to\boldsymbol{M}$ se factorise par $(k[X], d)$ de sorte que ce couple est un module de formes différentielles de $k[X]$ relatives à k. On remarque alors que $d(\alpha(P(X))) = d(P(X^2)) = \frac{dP}{dX}(X^2)\,\frac{d(X^2)}{dX} = 0$. Par conséquent, $\alpha^*(d) = 0$ et donc $\Omega(\alpha)^* : \mathrm{Mor}_{k[X]}(k[X], k[X]) \to \mathrm{Mor}_{k[X]}(k[X], k[X])$ annule $\mathrm{id}_{k[X]}$, autrement dit $\Omega(\alpha) = 0$.

1.4 Constructions du module des formes différentielles relatives

Bien que la démonstration de la proposition 1.1.5 donne une construction canonique du module des formes différentielles relatives, d'autres constructions sont souvent très utiles. Nous passons en revue dans cette section ces différentes constructions.

1.4.1. Quotients d'algèbre de polynômes. Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de «*variables*» et posons $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ la $\boldsymbol{R}$-algèbre des polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$ et variables dans $\mathcal{X}$. Soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}$-module, pour tous $D\in\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})$ et $P\in\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$, on a $D(P) = \sum_{X\in\mathcal{X}}\frac{\partial P}{\partial X}\,D(X)$. On pose :

$$\begin{cases} \Omega := \bigoplus_{X\in\mathcal{X}}\boldsymbol{A}\cdot dX\,, \text{ où } dX \text{ est un symbole ;} \\ d : \boldsymbol{R}\to\Omega\,, \text{ définie par } d(P) := \sum_{X\in\mathcal{X}}\frac{\partial P}{\partial X}\,dX\,. \end{cases}$$

Le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $f : \Omega\to\boldsymbol{M}$ donné par $f : dX\mapsto D(X)$ vérifie clairement l'égalité $f_*(d) = D$. Enfin, si $f' : \Omega\to\boldsymbol{M}$ vérifie également l'égalité $f'_*(d) = D$, la différence

$(f - f')$ est nulle sur les éléments dX et comme ils constituent une base pour Ω, on a $f = f'$. Le couple (Ω, d) est donc bien un module de formes différentielles de $\boldsymbol{A}$ relatives à $\boldsymbol{R}$.

Toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ étant quotient d'une algèbre de polynômes, soit $\pi : \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$ une présentation de $\boldsymbol{A}$ de noyau noté $\mathfrak{I}$. La proposition 1.3.1 permet de poser ;

$$\boxed{\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} := \frac{\bigoplus_{X\in\mathcal{X}} \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\cdot dX}{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\cdot d(\mathfrak{I})}} \tag{5}$$

La dérivation $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} : \boldsymbol{A} \to \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ étant alors la dérivation induite sur $\boldsymbol{A}$ par la dérivation sur $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ définie par $\Omega(\pi)\circ d_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}$ qui s'annule trivialement sur $\ker(\pi)$ (*cf.* lemme de 1.1.3-0a).

1.4.2. Exercice : Montrer l'égalité $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\cdot d(\mathfrak{I}) = \sum_{i\in\mathfrak{R}} \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\, d(f_i)$, où $\{f_i\}_{i\in\mathfrak{R}}$ est un système de générateurs de l'idéal $\mathfrak{I}$ considéré comme $\boldsymbol{R}$-module. En déduire que si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation finie, *i.e.* quotient d'une algèbre de polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$ et à un nombre fini de variables par idéal de type fini, alors le $\boldsymbol{A}$-module $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est de présentation finie.

1.4.3. Exercice : Montrer l'égalité $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\cdot d(\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}\cdot\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} + d(\mathfrak{I})$, d'où :

$$\boxed{\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} := \frac{\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}}{\mathfrak{I}\cdot\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} + d(\mathfrak{I})}} \tag{6}$$

1.4.4. Changement de base. Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{R}'$ deux $\boldsymbol{R}$-algèbres et posons $\boldsymbol{A}' := \boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}$ que l'on considère muni de la structure d'algèbre produit tensoriel. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R} & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \boldsymbol{R}' \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma\ \mathrm{id}_{\boldsymbol{R}'}\otimes 1} \\ \boldsymbol{A} & \xrightarrow[1\otimes\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}]{\ \delta\ } & \boldsymbol{A}' := \boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A} \end{array}$$

où α, β désignent les morphismes d'anneaux structuraux.

Soient $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}'$-module et $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}'}(\boldsymbol{A}';\boldsymbol{M})$. L'application $D\circ\delta$ est une dérivation de $\boldsymbol{A}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$ qui vérifie $D(\delta(r\cdot a)) = D(1\otimes\beta(r)a) = D(\alpha(r)\otimes a) = r\cdot D(\delta(a))$ pour tous $r\in\boldsymbol{R}$ et $a\in\boldsymbol{A}$, on a donc une application canonique

$$\boxed{\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}'}(\boldsymbol{A}';\boldsymbol{M}) \xrightarrow{\delta^*} \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})} \tag{7}$$

1.4.5. Lemme : *Soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}'$-module. L'application canonique (7) est* ***bijective****.*

Démonstration : Comme une $\boldsymbol{R}'$-dérivation sur $\boldsymbol{A}'$ est déterminée par l'image de δ, l'injectivité de δ^* résulte. Soient $D\in\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})$ et $D' : \boldsymbol{A}'\to\boldsymbol{M}$ définie par $D'(a'\otimes b) := \gamma(a')\cdot D(b)$; on vérifie aisément que $D'\in\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}'}(\boldsymbol{A}';\boldsymbol{M})$, et sa restriction à $\boldsymbol{A}$ coïncide avec D. ∎

1.4.6. Comme conséquence de ce dernier lemme, nous avons un isomorphisme canonique naturel :

$$\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}}\big(\Omega_{\boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}'},\boldsymbol{M}\big)\xrightarrow{\equiv}\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}\big(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M}\big)$$

qui composé à l'isomorphisme $\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}\big(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M}\big)\equiv\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}}\big(\boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M}\big)$, fournit un isomorphisme canonique :

$$\boxed{\Omega_{\boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}'}\equiv\boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}\tag{8}$$

qui identifie $d_{\boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}'}$ et $\mathrm{id}_{\boldsymbol{R}'}\otimes d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$.

Un cas particulier de changement de base est celui où $S\subseteq\boldsymbol{R}$ est un système multiplicatif et où $\boldsymbol{R}':=S^{-1}\boldsymbol{R}$. L'équivalence (8) se lit alors :

$$\boxed{\Omega_{S^{-1}\boldsymbol{A}/S^{-1}\boldsymbol{R}}\equiv S^{-1}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}\tag{9}$$

et $d_{S^{-1}\boldsymbol{A}/S^{-1}\boldsymbol{R}}:S^{-1}\boldsymbol{A}\to S^{-1}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ n'est autre que le morphisme induit par $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ après inversion des éléments de S.

1.4.7. Produit tensoriel d'algèbres. Généralisation naturelle du changement de base : soient $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{A}_2$ deux $\boldsymbol{R}$-algèbres et notons $q_1:\boldsymbol{A}_1\to\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2$ l'homomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres qui fait correspondre $a\mapsto a\otimes\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}_2}$ (*mutatis mutandis* pour $q_2:\boldsymbol{A}_2\to\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2$). Pour tout $(\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2)$-module $\boldsymbol{M}$ et toute $\boldsymbol{R}$-dérivation $D:\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2\to\boldsymbol{M}$, les «*restrictions*» $d_i:=D\circ q_i:\boldsymbol{A}_i\to\boldsymbol{M}$ sont des $\boldsymbol{R}$-dérivations. Réciproquement, lorsque l'on se donne $d_1:\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{M})$, on note $D_1:=(d_1\otimes 1):\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2\to\boldsymbol{M}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2\xrightarrow{\pi_2}\boldsymbol{M}$, où π_2 désigne le produit défini par l'action (à gauche) $\boldsymbol{A}_2$ sur $\boldsymbol{M}$. On a :

$$\begin{aligned}D_1\big((a_1\otimes b_1)(a_2\otimes b_2)\big)&=(1\otimes b_1\,b_2)\,D_1(a_1\,a_2)\\&=(a_1\otimes b_1\,b_2)\,d_1(a_2)+(a_2\otimes b_1\,b_2)\,d_1(a_1)\\&=(a_1\otimes b_1)\,D_1(a_2\otimes b_2)+(a_2\otimes\ b_2)\,D_1(a_1\otimes b_1)\end{aligned}$$

et D_1 est une $\boldsymbol{R}$-dérivation de $\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$ dont la restriction à $\boldsymbol{A}_1$ coïncide avec d_1 (*mutatis mutandis* pour $d_2\in\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{M})$). L'application :

$$\begin{aligned}\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{M})\oplus\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{M})&\xrightarrow{\Xi}\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{M})\\(d_1,d_2)&\longmapsto\ D_1+D_2\end{aligned}$$

est donc injective. Elle est aussi surjective ; en effet, pour tout $D\in\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{M})$ la différence $D-\Xi(d_1,d_2)$ est nulle puisque c'est une $\boldsymbol{R}$-dérivation de $\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2$ dont les restrictions aux $\boldsymbol{A}_i$ sont nulles.

On prendra garde du fait que Ξ est en fait un isomorphisme de $(\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2)$-modules lorsque l'on considère chaque $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{M})$ muni de la structure de $(\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2)$-module induite par celle de $\boldsymbol{M}$.

1.4.8. Proposition : *Soient $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{A}_2$ deux $\boldsymbol{R}$-algèbres. Soit $q_1:\boldsymbol{A}_1\to\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2$ l'homomorphisme défini par $a\mapsto a\otimes\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}_2}$ et notons :*

$$\Omega(q_1):\boldsymbol{A}_2\otimes_{\boldsymbol{R}}\Omega_{\boldsymbol{A}_1/\boldsymbol{R}}\equiv(\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2)\otimes_{\boldsymbol{A}_1}\Omega_{\boldsymbol{A}_1/\boldsymbol{R}}\to\Omega_{\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{A}_2/\boldsymbol{R}}$$

le morphisme de $(\boldsymbol{A}_1 \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}_2)$*-modules induit* (mutatis mutandis *pour* $\boldsymbol{A}_2$).
L'application :

$$\boxed{\Big(\boldsymbol{A}_2 \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega_{\boldsymbol{A}_1/\boldsymbol{R}}\Big) \oplus \Big(\boldsymbol{A}_1 \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega_{\boldsymbol{A}_2/\boldsymbol{R}}\Big) \xrightarrow[\equiv]{\Omega(q_1)\oplus\Omega(q_2)} \Omega_{\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2/\boldsymbol{R}}} \tag{10}$$

est un isomorphisme de $(\boldsymbol{A}_1 \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}_2)$*-modules.*

Démonstration : La proposition découle de l'isomorphisme induit par Ξ :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}_1}(\Omega_{\boldsymbol{A}_1/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{M}) \oplus \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}_2}(\Omega_{\boldsymbol{A}_2/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{M}) \xrightarrow[\equiv]{(\Xi)} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2}(\Omega_{\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{M})$$

modulo les équivalences $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2}\big((\boldsymbol{A}_1 \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}_2) \otimes_{\boldsymbol{A}_i} \Omega_{\boldsymbol{A}_i/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{M}\big) \equiv \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}_i}(\Omega_{\boldsymbol{A}_i/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{M})$. ∎

1.4.9. Algèbres de fractions. Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre et $S \subseteq \boldsymbol{A}$ un système multiplicatif. Notons $S^{-1}\boldsymbol{A}$ l'anneau obtenu à partir de $\boldsymbol{A}$ en inversant les éléments de S. L'homomorphisme canonique d'anneaux $\nu_S(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A} \to S^{-1}\boldsymbol{A}$ qui associe $a \mapsto \frac{a}{1}$ munit $S^{-1}\boldsymbol{A}$ d'une structure de $\boldsymbol{A}$-algèbre (donc aussi de $\boldsymbol{R}$-algèbre).

Propriété fondamentale : *Pour tout* $(S^{-1}\boldsymbol{A})$*-module* $\boldsymbol{M}$ *et pour chaque* $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$, *la correspondance* $D' : \frac{a}{s} \mapsto \frac{D(a)}{s} - \frac{aD(s)}{s^2}$ *définit une* $\boldsymbol{R}$*-dérivation* $D' : S^{-1}\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{M}$ *telle que* $D = D' \circ \nu_S(\boldsymbol{A})$ (‡) *; de plus,* D' *est unique dans* $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(S^{-1}\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$ *à vérifier l'égalité* (‡).

La conséquence immédiate de cette remarque est que l'application :

$$\boxed{\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(S^{-1}\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M}) \xrightarrow[\equiv]{\nu_S(\boldsymbol{A})^*} \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})} \tag{11}$$

est **un isomorphisme** de $(S^{-1}\boldsymbol{A})$-modules. Par conséquent :

$$\mathrm{Mor}_{S^{-1}\boldsymbol{A}}(\Omega_{S^{-1}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{M}) \xrightarrow{\Omega(\nu_S(\boldsymbol{A}))^*} \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{M})$$

l'est également et comme par ailleurs l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{S^{-1}\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} S^{-1}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{M}) & \xrightarrow{\nu_S(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})^*} & \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{M}) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha \circ \nu_S(\Omega(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R})) \end{array} \tag{12}$$

est *bijective*, on déduit un isomorphisme de $(S^{-1}\boldsymbol{A})$-modules canonique (et naturel par rapport à $\boldsymbol{M}$) :

$$\mathrm{Mor}_{S^{-1}\boldsymbol{A}}(\Omega_{S^{-1}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{M}) \equiv \mathrm{Mor}_{S^{-1}\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} S^{-1}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{M})$$

et nous pouvons poser

$$\boxed{\Omega_{S^{-1}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} := \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} S^{-1}\boldsymbol{A}} \tag{13}$$

La dérivation $d_{S^{-1}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} : S^{-1}\boldsymbol{A} \to \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} S^{-1}\boldsymbol{A}$ est alors l'unique dérivation sur $S^{-1}\boldsymbol{A}$ qui prolonge la dérivation $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes \mathbf{1} : \boldsymbol{A} \to \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} S^{-1}\boldsymbol{A}$.

1.4.10. Exercice : Vérifier la propriété fondamentale énoncée dans la section précédente.

1.4.11. Exercice : Soit S un système multiplicatif de $\boldsymbol{R}$. Montrer que $\Omega_{S^{-1}\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}} = \mathbf{0}$.

1.4.12. Sous-quotient d'un produit tensoriel d'algèbres. Rappelons que dans la démonstration de l'existence des modules des formes différentielles de la proposition 1.1.5, on quotiente le $\boldsymbol{A}$-module libre $\bigoplus_{a\in\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}\cdot da$ par le sous-module engendré par des éléments des trois formes R1, R2 et R3. Or, le quotient par le sous-module engendré uniquement par les éléments des formes R2 et R3 est précisément le $\boldsymbol{A}$-module à gauche $\boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}$.

Notons $\pi : \boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ la surjection canonique de $\boldsymbol{A}$-modules ***à gauche*** définie par $\pi(a_1\otimes a_2) = a_1\cdot da_2$. Le noyau de cette application, noté $\mathfrak{K}$, est engendré par les éléments de la forme $1\otimes a_1a_2 - a_1\otimes a_2 - a_2\otimes a_1$ et on a la suite exacte de $\boldsymbol{A}$-modules à gauche :

$$\mathbf{0}\to\mathfrak{K} := \boldsymbol{A}\cdot\langle 1\otimes a_1a_2 - a_1\otimes a_2 - a_2\otimes a_1 \mid a_i\in\boldsymbol{A}\rangle \xhookrightarrow{\iota_{\mathfrak{K}}} \boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A} \xrightarrow{\pi} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\to\mathbf{0}\,. \tag{14}$$

Soit $p : \boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$ l'application produit $p : a_1\otimes a_2 \mapsto a_1a_2$. Vue comme morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres, son noyau, noté $\mathfrak{J}$, est l'idéal ***à gauche*** (ou à droite) engendré par les éléments de la forme $1\otimes a - a\otimes 1$. On a la suite exacte de $\boldsymbol{A}$-modules à gauche (et à droite) :

$$\mathbf{0}\to\mathfrak{J} := \boldsymbol{A}\cdot\langle 1\otimes a - a\otimes 1 \mid a\in\boldsymbol{A}\rangle \xhookrightarrow{\iota_{\mathfrak{J}}} \boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A} \xrightarrow{p} \boldsymbol{A}\to\mathbf{0}\,. \tag{15}$$

En rassemblant les suites (14) et (15) en un seul diagramme, on a :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \mathbf{0} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathfrak{K} := \boldsymbol{A}\cdot\langle 1\otimes a_1a_2 - a_1\otimes a_2 - a_2\otimes a_1 \mid a_i\in\boldsymbol{A}\rangle & & \\
 & & & & \iota_{\mathfrak{K}}\big\downarrow & & \\
\mathbf{0}\to\mathfrak{J} := \boldsymbol{A}\cdot\langle 1\otimes a - a\otimes 1 \mid a\in\boldsymbol{A}\rangle & \xhookrightarrow{\iota_{\mathfrak{J}}} & \boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A} & \xrightarrow{p} & \boldsymbol{A}\to\mathbf{0} & & \\
 & & \pi\big\downarrow & & & & \\
 & & \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathbf{0} & & & &
\end{array} \tag{16}$$

On remarque alors que la composée $\pi\circ\iota_{\mathfrak{J}}$ est *surjective*. En effet, comme les éléments $a\otimes 1$ s'écrivent également $a\cdot(1\otimes 1)$ et que $1\otimes 1\in\mathfrak{K}$, le sous-module $\pi(\mathfrak{J})$ contient tous les éléments $\pi(1\otimes a) = da$ qui engendrent $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$.

Montrons maintenant l'égalité $\ker(\pi\circ\iota_{\mathfrak{J}}) = \mathfrak{J}^2$. Soit $\Delta : \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}$ l'application $\Delta(a) = a\otimes 1 - 1\otimes a\in\boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}$, pour tout $a\in\boldsymbol{A}$; on a

$$\Delta(a_1)\Delta(a_2) = a_1a_2\otimes 1 - a_1\otimes a_2 - a_2\otimes a_1 + 1\otimes a_1a_2\,, \tag{17}$$

et l'inclusion $\mathfrak{J}^2\subseteq\ker(\pi\circ\iota_{\mathfrak{J}})$ résulte immédiatement. D'autre part, et toujours par l'égalité (17), $\mathfrak{K}$ est engendré par les éléments de la forme $\Delta(a_1)\Delta(a_2) - 1\otimes a_1a_2$. Or, le noyau de $\pi\circ\mathfrak{J}$ est précisément le sous-module de $\mathfrak{K}$ des éléments annulés par p et comme cette application

est un morphisme d'algèbres vérifiant $p(\Delta(a)) = 0$, pour tout $a \in \boldsymbol{A}$, on a :

$$p\Big(\sum_j a_j \cdot \big(\Delta(a_{j,1})\Delta(a_{j,2}) - 1 \otimes a_{j,1}a_{j,2}\big)\Big) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_j a_j a_{j,1} a_{j,2} = 0$$

et donc $\ker(\pi \circ \iota_{\mathfrak{J}}) \subseteq \mathfrak{J}^2$.

Nous avons donc prouvé que le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules à gauche π induit un isomorphisme de $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ sur $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$. L'espace quotient $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ se retrouve ainsi, *a priori*, muni de deux structures de $\boldsymbol{A}$-module : celle que nous avons considérée jusqu'ici et celle induite par l'idéal $\mathfrak{J}$ de $\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$, ce qui fait de $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ un $(\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A})/\mathfrak{J} \overset{p}{\equiv} \boldsymbol{A}$-module ; ces deux structures sont bien évidemment les mêmes. On remarquera, pour terminer, que l'application $\pi \circ \Delta : \boldsymbol{A} \to \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ coïncide bien avec $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$. Nous pouvons, par conséquent, poser :

$$\boxed{\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} := \frac{\mathfrak{J} := \ker\big(p : \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}\big)}{\mathfrak{J}^2} \quad \text{et} \quad d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} := \pi \circ \Delta} \tag{18}$$

1.4.13. Algèbres symétriques. Soit $\boldsymbol{L}$ un $\boldsymbol{R}$-module et notons $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ la $\boldsymbol{R}$-algèbre symétrique de $\boldsymbol{L}$. On rappelle que cette algèbre est le quotient de l'algèbre tensorielle :

$$\mathsf{T}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}) := \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{L} \oplus \big(\boldsymbol{L} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{L}\big) \oplus \big(\boldsymbol{L} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{L} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{L}\big) \oplus \cdots$$

par l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $(m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1)$. L'algèbre $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ est alors une $\boldsymbol{R}$-algèbre naturellement graduée par le degré des tenseurs ; on a $\mathsf{S}^0_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{R}$, $\mathsf{S}^1_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}$ et $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ est engendrée en tant que $\boldsymbol{R}$-algèbre par ses éléments de degré 1. Enfin, $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ est de type fini si et seulement si le $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{L}$ l'est.

Lorsque l'on se donne un morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules $\alpha : \boldsymbol{L}_1 \to \boldsymbol{L}_2$, l'application $\mathsf{T}(\alpha)_* : \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}_1) \to \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}_2)$ qui fait correspondre $l_1 \otimes \cdots \otimes l_r \mapsto \alpha(l_1) \otimes \cdots \alpha(l_r)$ induit un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres graduées de degré nul de $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}_1) \to \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}_2)$. La correspondance $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(_)$ de la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{R})$ vers la catégorie $\mathrm{Alg}^*(\boldsymbol{R})$ qui associe $\boldsymbol{L} \rightsquigarrow \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ et $\alpha \rightsquigarrow \mathsf{S}_{\boldsymbol{R}}(\alpha)_*$ est un foncteur covariant et pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre positivement graduée $\mathcal{A}^*$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathrm{Alg}^*(\boldsymbol{R})}\big(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}), \mathcal{A}^*\big) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{L}, \mathcal{A}^1\big) \\ \alpha_* & \longmapsto & \alpha_1 \end{array}$$

est naturelle par rapport aux données de $\boldsymbol{L}$ et $\mathcal{A}^*$ et est ***bijective*** (le vérifier !) ; le foncteur $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(_)$ est donc adjoint à gauche du foncteur qui fait correspondre à une $\boldsymbol{R}$ -algèbre positivement graduée sa composante de degré 1 et *mutatis mutandis* pour les morphismes.

Soit $\boldsymbol{M}$ un $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$-module. L'application :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}), \boldsymbol{M}\big) & \xrightarrow{\Theta(\boldsymbol{L},\boldsymbol{M})} & \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}\big) & \equiv & \mathrm{Mor}_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})}\big(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}\big) \\ D & \longmapsto & D|_{\boldsymbol{L}} & & \end{array} \tag{$*$}$$

est ***bijective*** et naturelle par rapport aux données $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{M}$. En effet, comme $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ est engendrée, en tant que $\boldsymbol{R}$-algèbre, par ses éléments de degré 1, une $\boldsymbol{R}$-dérivation est entièrement déterminée par son action sur $\mathsf{S}^1_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}$, et $\Theta(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M})$ est injective. D'autre part, pour tout

morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules $\alpha : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{M}$ et pour chaque $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ la correspondance :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}^r = \boldsymbol{L} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{L} &\xrightarrow{D(\alpha)_r} \boldsymbol{M} \\ (l_1, \ldots, l_r) &\longmapsto \sum_{i=1}^{r} \big(l_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{l_i} \otimes \cdots \otimes l_r\big) \cdot \alpha(l_i) \end{aligned}$$

est r-linéaire symétrique et définit un morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules de $\mathsf{S}^r_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ vers $\boldsymbol{M}$. La somme $D(\alpha) = \sum_r D(\alpha)_r$ est alors une $\boldsymbol{R}$-dérivation de $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$, d'où la surjectivité de $\Theta(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M})$.

Comme conséquence de ces remarques on a la proposition suivante.

1.4.14. Proposition : *Notons $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ la $\boldsymbol{R}$-algèbre symétrique d'un $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{L}$.*

a) *Il existe une et une unique application $D : \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}) \to \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{L}$ nulle sur $\mathsf{S}^0_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ et vérifiant :*

$$D(l_1 \otimes \cdots \otimes l_r) = \sum_{i=1}^{r} \big(l_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{l_i} \otimes \cdots \otimes l_r\big) \otimes l_i \,,$$

pour tout $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et tous $l_i \in \boldsymbol{L}$.

b) *Le couple $\big(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{L}, D\big)$ représente le foncteur $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}), _\big)$. On peut donc poser :*

$$\boxed{\Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{R}} := \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{L}} \tag{19}$$

1.4.15. Remarque : Lorsque $\boldsymbol{L}$ est un $\boldsymbol{R}$-module libre on obtient une autre description du module des différentielles relatives d'une algèbre de polynômes (1.4).

1.5 Seconde suite exacte à droite fondamentale

Soit $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres et considérons $\boldsymbol{B}$ munie également de la structure de $\boldsymbol{A}$-algèbre induite par α. Il est clair que chaque $\boldsymbol{A}$-dérivation de $\boldsymbol{B}$ dans un $\boldsymbol{B}$-module $\boldsymbol{M}$ est automatiquement une $\boldsymbol{R}$-dérivation, nous avons donc des applications canoniques $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{B}; \boldsymbol{M}) \to \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B}; \boldsymbol{M})$ et $\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}}$. Il est par ailleurs évident d'après la construction de $\Omega_{\boldsymbol{B}/_}$ comme quotient de $\bigoplus_{b \in \boldsymbol{B}} \boldsymbol{B} \cdot db$ que l'application canonique $\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}}$ est surjective ; la proposition suivante donne une présentation de son noyau.

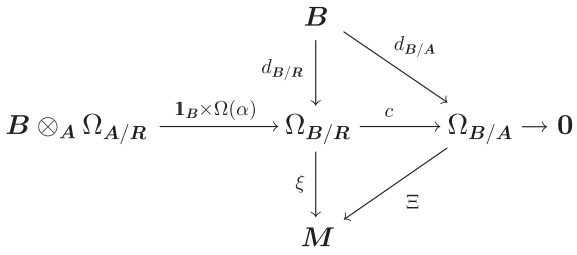
1.5.1. Proposition : *Soit $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres. La suite de $\boldsymbol{B}$-modules :*

$$\boxed{\boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)} \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}} \to \mathbf{0}} \tag{20}$$

où la flèche de droite est le morphisme canonique, est exacte.

Démonstration : Nous avons déjà expliqué la surjectivité de la flèche de droite. D'autre part chaque élément de la forme $1 \otimes da \in \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ s'annule sur $\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}}$ puisque dans ce module on a $da = a \cdot d1 = 0$. La suite (20) est donc bien un complexe. Notons maintenant $\boldsymbol{M} := \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}/\mathrm{im}(\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha))$ et soit $\xi : \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}$ la surjection canonique. La

composée $d := \xi \circ d_{\boldsymbol{B/R}}$ est alors une dérivation de $\boldsymbol{B}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$ qui vérifie $d(a\cdot b) = \alpha(a)\cdot db + b\cdot d\alpha(a) = a\cdot db + (\mathbf{1}\times\Omega(\alpha))(da\otimes b) = a\cdot db$ et par conséquent d est une $\boldsymbol{A}$-dérivation de $\boldsymbol{B}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$. Il existe alors un morphisme de $\boldsymbol{B}$-modules $\Xi : \Omega_{\boldsymbol{B/A}} \to \boldsymbol{M}$ tel que dans le diagramme :



où c désigne l'application canonique, on ait $\Xi\circ d_{\boldsymbol{B/R}} = \xi\circ d_{\boldsymbol{A/R}}$. Il s'ensuit que les dérivations définies par $\Xi\circ c$ et ξ coïncident et l'on a $\Xi\circ c = \xi$. Ceci implique que $\ker(c) \subseteq \mathrm{im}(\mathbf{1}\times\Omega(\alpha))$ et termine la démonstration de la proposition. ∎

1.5.2. Remarque : Soient $S \subseteq \boldsymbol{R}$ et $T \subseteq \boldsymbol{A}$ des systèmes multiplicatifs avec $\nu(S) \subseteq T$, où $\nu : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{A}$ désigne l'homomorphisme structural. La dernière proposition montre que le morphisme canonique $\Omega_{T^{-1}\boldsymbol{A}/S^{-1}\boldsymbol{R}} \to \Omega_{T^{-1}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est un isomorphisme puisque $\Omega_{T^{-1}\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}} = \mathbf{0}$ (*cf.* exercice 1.4.11). D'autre part, nous on a $\Omega_{T^{-1}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \overset{\equiv}{\leftarrow} \Omega_{\boldsymbol{A/R}}\otimes_{\boldsymbol{A}} T^{-1}\boldsymbol{A}$ (*cf.* formule (13)), d'où, par conséquent, un isomorphisme canonique :

$$\boxed{\Omega_{T^{-1}\boldsymbol{A}/S^{-1}\boldsymbol{R}} \equiv \Omega_{\boldsymbol{A/R}}\otimes_{\boldsymbol{A}} T^{-1}\boldsymbol{A}} \tag{21}$$

1.6 À propos de l'exactitude à gauche de la seconde suite fondamentale

Dans la suite (20) le morphisme $\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}\times\Omega(\alpha)$ n'est pas en général injectif, même lorsque $\alpha : \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ est injective.

1.6.1. Exemple : Soient $\boldsymbol{A} := \mathbb{F}_p[X]$, $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{A}[Y]/\langle Y^p - X\rangle$ et $\alpha : \boldsymbol{A}\hookrightarrow\boldsymbol{B}$ l'homomorphisme (injectif) $a\mapsto a\cdot\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}$. On a $\Omega_{\boldsymbol{A}/\mathbb{F}_p} = \boldsymbol{A}dX$ et $\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}\times\Omega(\alpha) = 0$ puisque, pour toute $\mathbb{F}_p$-dérivation D de $\boldsymbol{B}$, on a $0 = D(\boldsymbol{Y}^p - X) = p\,Y^{p-1}\,D(Y) - D(X) = -D(X)$.

Le fait que cet exemple concerne la caractéristique positive n'est pas fortuit, en effet, en caractéristique nulle le phénomène d'inséparabilité sous-jacent dans l'exemple disparaît et pour les extensions de corps de caractéristique nulle on montrera dans la proposition 1.6.4 que l'application $\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}\times\Omega(\alpha)$ est injective et donc que la suite (20) est scindée.

1.6.2. Une condition générale de scindage. Le lemme suivant donne une condition générale simple d'injectivité de $\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}\times\Omega(\alpha)$ et de scindage de la seconde suite fondamentale. (*cf.* la condition 4.3.8 en termes de lissité d'algèbres (*cf.* 4.2.1).)

Lemme : *Soient* $\boldsymbol{R}$ *un anneau commutatif arbitraire et* $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *un morphisme de* $\boldsymbol{R}$*-algèbres. Dans la seconde suite fondamentale :*

$$\boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)} \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}} \to \mathbf{0}$$

le morphisme $\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)$ *est injectif et scindé, si et seulement si, la dérivation* $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ «se prolonge à $\boldsymbol{B}$», i.e. *s'il existe une* $\boldsymbol{R}$*-dérivation* $d_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ *rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & \boldsymbol{B} \\ {\scriptstyle d_{\boldsymbol{A}/k}}\downarrow & \bigoplus & \downarrow{\scriptstyle d_{\boldsymbol{B}}} \\ \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} & \xrightarrow{\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \mathrm{id}} & \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \end{array}$$

Démonstration : Laissée en exercice. ∎

1.6.3. Le cas des algèbres symétriques. Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre, puis $\boldsymbol{L}$ un $\boldsymbol{A}$-module et $\alpha : \boldsymbol{A} \to \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})$ l'homomorphisme structural de l'algèbre symétrique $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})$ (voir 1.4).

Lorsque $\boldsymbol{L}$ est de la forme $\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M}$ pour un certain $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ (par exemple lorsque $\boldsymbol{L}$ est libre), on a $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M})$ et l'équivalence (1.4.8) :

$$\Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{R}} \equiv \left(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}) \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\right) \oplus \left(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}) \otimes_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M})} \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M})/\boldsymbol{R}}\right).$$

Le morphisme $\mathbf{1} \times \Omega(\alpha) : \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}) \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{R}}$ s'identifie alors à l'application $x \mapsto (x, 0)$ qui est évidemment injective et admet une rétraction.

Ceci étant, montrons que lorsque la deuxième suite fondamentale :

$$\mathbf{0} \to \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}) \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \rightleftarrows \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{R}} \rightleftarrows \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{A}} \equiv \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}) \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{L} \to \mathbf{0}$$

est scindée pour un certain $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{L}$, il en est de même de la suite associée à $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1)$ pour tout facteur direct $\boldsymbol{L}_1$ de $\boldsymbol{L}$. En effet, soit $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 \oplus \boldsymbol{L}_2$ et notons $\iota : \boldsymbol{L}_1 \to \boldsymbol{L}$ et $\pi : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}_1$ respectivement l'injection et la projection canoniques. Ces applications induisent des morphismes de $\boldsymbol{A}$-algèbres dont la composée est l'identité :

$$\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1) \xrightarrow{\iota} \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}) \xrightarrow{\pi} \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1), \quad \text{id}$$

Il s'ensuit que la composée :

$$\Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1)/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\Omega(\iota)} \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\Omega(\pi)} \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1)/\boldsymbol{R}}, \quad \text{id}$$

est également l'identité. On considère alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{S}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1)\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} & \xrightarrow{\mathbf{1}\times\Omega(\alpha_1)} & \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1)/\boldsymbol{R}} \\ {\scriptstyle \iota\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Omega(\iota)} \\ \mathsf{S}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} & \underset{\rho}{\overset{\mathbf{1}\times\Omega(\alpha)}{\rightleftarrows}} & \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{R}} \\ {\scriptstyle \pi\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Omega(\pi)} \\ \mathsf{S}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1)\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} & \xrightarrow{\mathbf{1}\times\Omega(\alpha_1)} & \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1)/\boldsymbol{R}} \end{array}$$

où l'on a noté $\alpha_1 : \boldsymbol{A} \to \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1)$ l'homomorphisme structural, et où la composée des morphismes verticaux est l'identité. L'injectivité de $\mathbf{1}\times\Omega(\alpha_1)$ en résulté immédiatement, et pour toute rétraction ρ de $\mathbf{1}\times\Omega(\alpha)$, l'application $(\pi\times\mathrm{id})\circ\rho\circ\Omega(\iota)$ est une rétraction de $\mathbf{1}\times\Omega(\alpha_1)$.

Comme conséquence de ces remarques, nous pouvons affirmer que la deuxième suite fondamentale :

$$\mathbf{0}\to\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\rightleftarrows\Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{R}}\rightleftarrows\Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{A}}\equiv\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})\otimes_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{L}\to\mathbf{0}$$

est exacte et scindée ***pour tout $\boldsymbol{A}$-module projectif $\boldsymbol{L}$***.

1.6.4. Le cas des extensions de corps

Proposition : *Soient $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{K}$ deux extensions d'un corps de* ***caractéristique nulle*** *k. Pour toute injection $\iota : \boldsymbol{L}\hookrightarrow\boldsymbol{K}$ de k-algèbres, le morphisme $\mathbf{1}_{\boldsymbol{K}}\times\Omega(\iota)$ est* ***injectif*** *et la seconde suite fondamentale :*

$$\mathbf{0}\to\boldsymbol{K}\otimes_{\boldsymbol{L}}\Omega_{\boldsymbol{L}/k}\xrightarrow{\mathbf{1}_{\boldsymbol{K}}\times\Omega(\iota)}\Omega_{\boldsymbol{K}/k}\longrightarrow\Omega_{\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}}\to\mathbf{0} \tag{22}$$

est scindée. En particulier, on a des décompositions de $\boldsymbol{K}$-espaces vectoriels :

$$\boxed{\Omega_{\boldsymbol{K}/k}=\left(\boldsymbol{K}\otimes_{\boldsymbol{L}}\Omega_{\boldsymbol{L}/k}\right)\oplus\Omega_{\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}}} \tag{23}$$

Démonstration : D'après le lemme 1.6.2 il suffit de montrer que la dérivation $d_{\boldsymbol{L}/k}$ se prolonge à $\boldsymbol{K}$. Notons $\mathcal{F}$ la famille des couples $(\boldsymbol{A}, d_{\boldsymbol{A}})$ où $\boldsymbol{A}$ est un sous-anneau de $\boldsymbol{K}$ contenant $\boldsymbol{L}$ et où $d_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{K}\otimes_{\boldsymbol{L}}\Omega_{\boldsymbol{L}/k}$ est une k-dérivation qui prolonge $d_{\boldsymbol{L}/k}$, autrement dit, est telle que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{L} & \hookrightarrow & \boldsymbol{A} \\ {\scriptstyle d_{\boldsymbol{L}/k}}\downarrow & \oplus & \downarrow{\scriptstyle d_{\boldsymbol{A}}} \\ \Omega_{\boldsymbol{L}/k} & \longrightarrow & \boldsymbol{K}\otimes_{\boldsymbol{L}}\Omega_{\boldsymbol{L}/k} \end{array}$$

est commutatif. On munit $\mathcal{F}$ de l'ordre partiel défini par $(\boldsymbol{A}_1, d_{\boldsymbol{A}_1})\preccurlyeq(\boldsymbol{A}_2, d_{\boldsymbol{A}_2})$ si et seulement si $\boldsymbol{A}_1\subseteq\boldsymbol{A}_2$ et la restriction de $d_{\boldsymbol{A}_2}$ à $\boldsymbol{A}_1$ coïncide avec $d_{\boldsymbol{A}_1}$. Comme la famille $(\mathcal{F},\preccurlyeq)$ est clairement non vide et inductive, elle possède, d'après le lemme de Zorn, un élément maximal $(\boldsymbol{A}_\infty, d_{\boldsymbol{A}_\infty})$ où $\boldsymbol{A}_\infty$ est nécessairement un sous-corps de $\boldsymbol{K}$. Supposons $\boldsymbol{K}\supsetneqq\boldsymbol{A}_\infty$ et soit $x\in\boldsymbol{K}\backslash\boldsymbol{A}_\infty$; deux cas peuvent se présenter *a priori* :

x est transcendant sur $\boldsymbol{A}_\infty$. Dans ce cas, la dérivation $d_{\boldsymbol{A}_\infty}$ se prolonge à $\boldsymbol{A}_\infty[x]$ (en imposant à x la valeur 0 par exemple) ce qui est contraire à la maximalité de $\boldsymbol{A}_\infty$.

x est algébrique sur $\boldsymbol{A_\infty}$. Soit $P_x(X) \in \boldsymbol{A}_\infty[X]$ le polynôme minimal de x ; on a l'égalité dans $\boldsymbol{K}$:

$$P_x(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_r\, x^r = 0\,,$$

avec $a_i \in \boldsymbol{A}_\infty$. Pour toute dérivation $D : \boldsymbol{A}_\infty[x] \to \boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{L}} \Omega_{\boldsymbol{L}/k}$ qui prolonge $d_{\boldsymbol{A}_\infty}$ on doit donc avoir :

$$-\textstyle\sum_{i=0}^r x^i\, d_{\boldsymbol{A}_\infty}(a_i) = \Big(\sum_{i=0}^r a_i\, i\, x^{i-1}\Big) D(x)$$

et comme k est de caractéristique nulle l'élément $\sum_{i=0}^r a_i\, i\, x^{i-1}$ est non nul dans $\boldsymbol{K}$ (x est séparable sur $\boldsymbol{A}_\infty$). Par conséquent, $D(x)$ est uniquement déterminé par l'égalité :

$$D(x) = -\frac{\sum_{i=0}^r x^i\, d_{\boldsymbol{A}_\infty}(a_i)}{\sum_{i=0}^r a_i\, i\, x^{i-1}} \in \boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{L}} \Omega_{\boldsymbol{L}/k}$$

et la formule $D\big(\sum c_i\, x^i\big) = \sum x^i\, d_{\boldsymbol{L}_\infty}(c_i) + \sum c_i\, i\, x^{i-1}\, D(x)$ définit une k-dérivation de $\boldsymbol{A}_\infty[x]$ qui prolonge $d_{\boldsymbol{A}_\infty}$, mais ceci contredit, à nouveau, la maximalité de $(\boldsymbol{A}_\infty, d_{\boldsymbol{A}_\infty})$.

La conclusion $\boldsymbol{A}_\infty = \boldsymbol{K}$ s'impose et ceci termine la démonstration. ∎

Cette proposition et sa démonstration permettent de caractériser la dépendance linéaire d'une famille finie de différentielles exactes $dx_1, \ldots, dx_r \in \Omega_{\boldsymbol{K}/k}$ en termes de dépendance algébrique de la famille $\{x_1, \ldots, x_r\}$.

1.6.5. Corollaire : *Soit $\boldsymbol{K}$ une extension d'un corps k de caractéristique nulle.*

a) *Le noyau de $d_{\boldsymbol{K}/k} : \boldsymbol{K} \to \Omega_{\boldsymbol{K}/k}$ est l'ensemble d'éléments de $\boldsymbol{K}$ algébriques sur k.*

b) *$\boldsymbol{K}$ est une extension algébrique de k, si et seulement si $\Omega_{\boldsymbol{K}/k} = \boldsymbol{0}$.*

c) *Soit $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq \boldsymbol{K}$. Les différentielles $dx_1, \cdots, dx_r \in \Omega_{\boldsymbol{K}/k}$ sont $\boldsymbol{K}$-linéairement dépendantes, si et seulement si, les éléments $x_1, \ldots, x_r$ sont algébriquement dépendants sur k.*

Démonstration : Pour chaque $x \in \boldsymbol{K}$ on note $k(x)$ le sous-corps de $\boldsymbol{K}$ engendré par k et x.

a) Dans la fin de la preuve de 1.6.4 nous avons montré que $\Omega_{k(x)/k} = \boldsymbol{0}$, si et seulement si, x est algébrique sur k. L'assertion (a) découle alors de remarquer que pour chaque triplet $k \subseteq k(x) \subseteq \boldsymbol{K}$ nous avons des inclusions $\Omega_{k(x)/k} \subseteq \boldsymbol{K} \otimes \Omega_{k(x)/k} \subseteq \Omega_{\boldsymbol{K}/k}$ (1.6.4) qui sont compatibles aux différentielles de sorte que :

$$x \in \boldsymbol{K} \text{ est algébrique sur } k \iff d_{k(x)/k}(x) = 0 \iff d_{\boldsymbol{K}/k}(x) = 0$$

b) Conséquence immédiate de (a).

c) L'assertion (a) correspond au cas $r = 1$. Dans le cas général on remarque que dx_r est nul dans $\Omega_{\boldsymbol{K}/k(x_1,\ldots,x_{r-1})}$ et la conclusion résulte une fois de plus de (a). ∎

1.7 Limites inductives et projectives des modules de différentielles relatives

Limites inductives. Soit $(\mathfrak{A}, \preccurlyeq)$ un ensemble partiellement ordonné filtrant supérieurement et soit $\mathcal{S} = \{A_i, \varphi_{i,j} : \boldsymbol{A}_i \to \boldsymbol{A}_j \mid i, j \in \mathfrak{A}\,, i \preccurlyeq j\}$ un système inductif d'homomorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres. Notons $\boldsymbol{A} := \varinjlim_{\mathfrak{A}} \boldsymbol{A}_i$ la limite inductive de ce système. Pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ le foncteur $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(_, \boldsymbol{M})$ transforme $\mathcal{S}$ en un système projectif :

$$\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{S}, \boldsymbol{M}) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{M})\,, & i \in \mathfrak{A}\,; \\ \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\varphi_{i,j}, \boldsymbol{M}) : \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_j, \boldsymbol{M}) \to \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{M})\,, & \\ & i, j \in \mathfrak{A}\,, i \preccurlyeq j \end{array} \right\}$$

d'où une application canonique $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\varinjlim_{\mathfrak{A}} \boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{M}) \to \varprojlim_{\mathfrak{A}} \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{M})$ qui est un isomorphisme puisque $(\mathfrak{A}, \preccurlyeq)$ est filtrant supérieurement (le vérifier !).

Dans le même ordre d'idées, le foncteur $\Omega_{_,\boldsymbol{R}}$ appliqué au système $\mathcal{S}$ donne lieu à un système inductif de $\boldsymbol{R}$-modules :

$$\Omega_{\mathcal{S},\boldsymbol{R}} = \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_{\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{R}}\,, & i \in \mathfrak{A}\,; \\ \Omega_{\varphi_{i,j},\boldsymbol{R}} : \Omega_{\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{A}_j,\boldsymbol{R}}\,, & i, j \in \mathfrak{A}\,, i \preccurlyeq j \end{array} \right\}$$

d'où une application canonique $\varinjlim_{\mathfrak{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}_i/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\varinjlim_{\mathfrak{A}} \boldsymbol{A}_i/\boldsymbol{R}}$ dont la bijectivité est conséquence de la remarque du paragraphe précédent. On a donc :

1.7.1. Proposition : *Pour tout système inductif filtrant supérieurement d'homomorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\mathcal{S} = \{A_i, \varphi_{i,j} : \boldsymbol{A}_i \to \boldsymbol{A}_j \mid i, j \in \mathfrak{A}\,, i \preccurlyeq j\}$ l'application canonique*

$$\boxed{\varinjlim_{\mathfrak{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}_i/\boldsymbol{R}} \xrightarrow[\equiv]{} \Omega_{\varinjlim_{\mathfrak{A}} \boldsymbol{A}_i/\boldsymbol{R}}}$$

est ***bijective****. Autrement dit, le foncteur $\Omega_{_,\boldsymbol{R}} : \mathrm{Alg}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{R})$ commute avec la limite de systèmes inductifs filtrants supérieurement.*

Limites projectives. Contrairement à la limite inductive, $\Omega_{_,\boldsymbol{R}}$ ***ne commute pas*** aux limites projectives. Il existe certes une application $\Omega_{\varprojlim_{\mathfrak{A}} \boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{R}} \to \varprojlim_{\mathfrak{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{R}}$ canonique, mais elle peut ne pas être bijective comme le montre l'exemple suivant dont la vérification de certains détails est laissée aux soins du lecteur.

1.7.2. Exemple : Soit $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif arbitraire et notons $\iota : \boldsymbol{R}[X] \hookrightarrow \boldsymbol{R}[[X]]$ l'injection canonique de l'anneau des polynômes dans l'anneau des séries formelles à une indéterminée et à coefficients dans $\boldsymbol{R}$.

L'application $(_)' : \boldsymbol{R}[[X]] \to \boldsymbol{R}[[X]]\,dx$ qui associe à une série formelle $\sum_j a_j\, X^j$ l'élément $\big(\sum_j a_j\, j\, X^{j-1}\big)\,dX$ est clairement un prolongement de la dérivation $d_{\boldsymbol{R}[X]/\boldsymbol{R}}$ de sorte que par le lemme 1.6.2 la seconde suite fondamentale :

$$\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{R}[[X]]\,dX \rightleftarrows \Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}} \rightleftarrows \Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]} \to \boldsymbol{0}$$

est exacte et scindée.

Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, posons $\boldsymbol{A}_m := \boldsymbol{R}[X]/\langle X^m\rangle$. On a

$$\Omega_{\boldsymbol{A}_m/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{R}[X]/\langle X^m, mX^{m-1}\rangle\, dX$$

et le système projectif défini par les surjections canoniques $\boldsymbol{A}_{m+1} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}_m$ induit un système projectif $\Omega_{\boldsymbol{A}_{m+1}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{A}_m/\boldsymbol{R}}$. On a des isomorphismes canoniques :

$$\boldsymbol{R}[[X]] \equiv \varprojlim{}_m\, \boldsymbol{A}_m \quad \text{et} \quad \boldsymbol{R}[[X]]\, dX \equiv \varprojlim{}_n\, \Omega_{\boldsymbol{A}_m/\boldsymbol{R}}$$

et la limite projective des dérivations $d_{\boldsymbol{A}_m/\boldsymbol{R}} : \boldsymbol{A}_m \to \Omega_{\boldsymbol{A}_m/\boldsymbol{R}}$ s'identifie $(_)' : \boldsymbol{R}[[X]] \to \boldsymbol{R}[[X]]\, dx$.

Par conséquent, la commutation de $\Omega_{_/\boldsymbol{R}}$ aux limites projectives se traduit dans cet exemple dans la condition d'annulation $\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]} = \mathbf{0}$.

Supposons maintenant $\boldsymbol{R}$ de caractéristique nulle et de cardinal dénombrable ($\boldsymbol{R} = \mathbb{Q}$ p. ex.). Si $\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]}$ était nul, on aurait $\Omega_{\boldsymbol{R}((X))/\boldsymbol{R}(X)} = \mathbf{0}$ par localisation, et le corps $\boldsymbol{R}((X))$ serait algébrique sur $\boldsymbol{R}(X)$ d'après la corollaire 1.6.5. Le corps $\boldsymbol{R}((X))$ serait donc de cardinal dénombrable puisqu'il en est ainsi de $\boldsymbol{R}(X)$. Or, nous savons par ailleurs que $\boldsymbol{R}((X))$ a le cardinal du continu, d'où une contradiction.

(Les arguments du paragraphe précédents montrent également que le $\boldsymbol{R}[[X]]$-module $\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]}$ n'est même pas de type fini ou dénombrable.)

Avant de conclure cet exemple il est intéressant d'interpréter chaque terme de la décomposition :

$$\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{R}[[X]]\, dX \oplus \Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]}$$

induite par la dérivation $(_)'$ lorsque l'on prend en considération la topologie X-adique. Dans ce cas, le module $\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]}$ contient l'adhérence de zéro dans $\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}}$ puisque de supplémentaire $\boldsymbol{R}[[X]]\, dX$ séparé. Mais réciproquement, comme la différentielle $d := d_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]}$ s'annule sur les polynômes, son action sur une série formelle $\sigma = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\, X^i$ ne dépend que du germe à l'infini de la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et pour chaque $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$d(\sigma) = d(X^m\sigma_m) = mX^{m-1}\sigma_m\, dX + X^m d(\sigma_m) \subseteq X^{m-1}\cdot\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}}$$

où nous avons noté $\sigma_m := \sum_{i\geqslant m} a_i\, X^{i-m}$.

Par conséquent, le module $\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]}$ est l'adhérence de $0 \in \Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}}$ pour la topologie X-adique et $\boldsymbol{R}[[X]]\, dX$ s'identifié au module séparé associé $\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}}$.

§2. Complexe de de Rham d'une algèbre

2.1 Catégorie d'algèbres différentielles graduées

2.1.1. Rappels sur les foncteurs adjoints. Ce paragraphe fait suite au paragraphe sur la représentabilité des foncteurs 1.2.1.

Définition : Étant donnés deux foncteurs covariants $\mathcal{L} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ et $\mathcal{R} : \mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{C}$, on dit que « $\mathcal{L}$ *est adjoint à gauche de* $\mathcal{R}$ », ou de manière équivalente, que « $\mathcal{R}$ *est adjoint à droite de* $\mathcal{L}$ », ou encore que « $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ *est une paire de foncteurs adjoints* », lorsqu'il existe un isomorphisme Φ de bifoncteurs d'ensembles :

$$\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \ni (A, B) \rightsquigarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{L}(A), B) \xrightarrow[\simeq]{\Phi(A,B)} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \mathcal{R}(B))$$

2.1.2. Exercice : Étant données deux équivalences $\Phi_1, \Phi_2 : \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{L}, \mathrm{id}_{\mathcal{D}}) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{R})$, montrer qu'il existe un unique automorphisme de foncteur λ de $\mathcal{L}$ (resp. ρ de $\mathcal{R}$) tel que

$$\Phi_2(_) = \Phi_1(_ \circ \lambda) \qquad (\text{resp. } \Phi_2(_) = \rho \circ \Phi_1(_))$$

En déduire que les adjoints à gauche (resp. à droite) d'un foncteur sont **canoniquement** isomorphes.

Morphismes d'adjonction. Avec les données précédentes, soit $\mathcal{B} = \mathcal{L}(A)$. L'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{L}(A), \mathcal{L}(A))$ contient l'élément $\mathrm{id}_{\mathcal{L}(A)}$ et la correspondance

$$A \rightsquigarrow \Big(\epsilon_\Phi(A) : A \to \mathcal{R}\mathcal{L}(A)\Big) = \Phi(A, \mathcal{L}(A))(\mathrm{id}_A) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \mathcal{R}\mathcal{L}(A))$$

est un morphisme *de foncteurs*

$$\boxed{\epsilon_\Phi : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{R}\mathcal{L}}$$

appelé « ***morphisme d'adjonction*** ». Le morphisme d'adjonction détermine l'isomorphisme Φ par l'égalité :

$$\Phi(A, B)(\alpha) = \mathrm{Mor}(A, \mathcal{R}\alpha)(\epsilon_\Phi(A)), \qquad \forall \alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{L}(A), B),$$

qui résulte de la commutativité des diagrammes (*cf.* 1.2.1)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{L}(A), \mathcal{L}(A)\big) & \xrightarrow{\Phi(A,\mathcal{L}(A))} & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}\big(A, \mathcal{R}\mathcal{L}(A)\big) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Mor}(\mathcal{L}(A),\alpha)} & \bigoplus & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Mor}(A,\mathcal{R}\alpha)} \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{L}(A), B\big) & \xrightarrow[\Phi(A,B)]{} & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}\big(A, \mathcal{R}(B)\big) \end{array} \quad \Big| \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{id}_{\mathcal{L}(A)} & \xmapsto{\Phi(A,\mathcal{L}(A))} & \epsilon_\Phi(A) \\ \downarrow & \bigoplus & \downarrow \\ \alpha & \xmapsto[\Phi(A,\mathcal{L}(A))]{} & \Phi(A, B)(\alpha) \end{array}$$

Autrement dit, étant donné $\alpha : \mathcal{L}(A) \to B$, on a $\mathcal{R}(\alpha) : \mathcal{R}\mathcal{L}(A) \to \mathcal{R}(B)$ par fonctorialité et alors $\Phi(A, B)(\alpha) = \mathcal{R}(\alpha) \circ \epsilon_\Phi(A)$:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\epsilon_\Phi(A)} & \mathcal{R}\mathcal{L}(A) & \xrightarrow{\mathcal{R}(\alpha)} & \mathcal{R}(B) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \xrightarrow[\Phi(A,B)(\alpha)]{} & & \end{array}$$

Les mêmes raisonnements en prenant $A = \mathcal{R}(B)$ et $\mathrm{id}_{\mathcal{R}(B)} \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{R}(B), \mathcal{R}(B))$ donnent lieu au « ***morphisme d'adjonction*** »

$$\boxed{\epsilon'_\Phi : \mathcal{L}\mathcal{R} \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}}$$

qui exprime l'isomorphisme Φ^{-1} appliqué à $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \mathcal{R}(B))$ par la composition de $\mathcal{L}(\beta) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{L}(A), \mathcal{L}\mathcal{R}(B))$ suivi de ϵ'_Φ :

$$\mathcal{L}(A) \xrightarrow{\mathcal{L}(\beta)} \mathcal{L}\mathcal{R}(B) \xrightarrow{\epsilon'_\Phi(B)} B$$
$$\mathcal{L}(A) \xrightarrow{\quad\Phi(A,B)^{-1}(\beta)\quad} B$$

On a, par conséquent, les factorisations du foncteur identité :

$$\mathcal{R}(_) \xrightarrow{\epsilon_\Phi(\mathcal{R}(_))} \mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R}(_) \xrightarrow{\mathcal{R}(\epsilon'_\Phi(_))} \mathcal{R}(_) \qquad \mathcal{L}(_) \xrightarrow{\mathcal{L}(\epsilon_\Phi(_))} \mathcal{L}\mathcal{R}\mathcal{L}(_) \xrightarrow{\epsilon'_\Phi(\mathcal{L}(_))} \mathcal{L}(_)$$
$$\mathcal{R}(_) \xrightarrow{\quad\mathrm{id}_{\mathcal{R}(_)}\quad} \mathcal{R}(_) \qquad \mathcal{L}(_) \xrightarrow{\quad\mathrm{id}_{\mathcal{L}(_)}\quad} \mathcal{L}(_)$$

La proposition suivante résume les principales propriétés de l'adjonction

2.1.3. Proposition : *Soient deux foncteurs* $\mathcal{L} : \mathfrak{C} \rightsquigarrow \mathfrak{D}$ *et* $\mathcal{R} : \mathfrak{D} \rightsquigarrow \mathfrak{C}$.

a) *Il y a équivalence entre*

i) *Il existe des morphismes de foncteurs* $\epsilon : \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \to \mathcal{R}\mathcal{L}$ *et* $\epsilon' : \mathcal{L}\mathcal{R} \to \mathrm{id}_{\mathfrak{D}}$ *tels que :*

$$\mathrm{id}_{\mathcal{R}(_)} = \mathcal{R}(\epsilon'(_)) \circ \epsilon(\mathcal{R}(_)) \quad \textit{et} \quad \mathrm{id}_{\mathcal{L}(_)} = \epsilon'(\mathcal{L}(_)) \circ \mathcal{L}(\epsilon(_)) \,.$$

ii) *Le couple* $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ *est une paire de foncteurs adjoints.*

b) *L'adjoint à gauche (resp. à droite) d'un foncteur, lorsqu'il existe, est déterminé à isomorphisme canonique près.*

c) *Le foncteur* $\mathcal{R} : \mathfrak{D} \rightsquigarrow \mathfrak{C}$ *admet un adjoint à gauche si et seulement si, pour chaque* $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, *le foncteur* $\mathrm{Mor}(A, \mathcal{R}(_)) : \mathfrak{D} \to \mathbf{Ens}$ *est représentable.*

d) *Le foncteur* $\mathcal{L} : \mathfrak{C} \rightsquigarrow \mathfrak{D}$ *admet un adjoint à droite si et seulement si, pour chaque* $B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{D})$, *le foncteur* $\mathrm{Mor}(\mathcal{L}(_), B) : \mathfrak{C} \to \mathbf{Ens}$ *est représentable .*

2.1.4. Exercices :

a) Soient $\mathcal{R}_1 : \mathfrak{C}_1 \rightsquigarrow \mathfrak{C}_2$ et $\mathcal{R}_2 : \mathfrak{C}_2 \rightsquigarrow \mathfrak{C}_3$ deux foncteurs admettant des adjoints à gauche notés respectivement $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. Montrer que $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$ est adjoint à gauche de $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$

b) Montrer qu'une équivalence de catégories admet des adjoints à droite et à gauche.

c) Montrer que l'adjoint d'un foncteur additif entre catégories additives est additif.

d) Soit $\mathcal{F}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes. Montrer que si $\mathcal{F}$ admet un adjoint à gauche exact $\mathcal{F}$ transforme un objet injectif en objet injectif. Donner l'énoncé analogue pour que $\mathcal{F}$ préserve les objets projectifs.

e) Soit $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif et soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{R}$-module. Monter que les foncteurs de $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{R})$ à valeurs dans $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{R})$

$$\boldsymbol{N} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) \,, \qquad \boldsymbol{N} \rightsquigarrow \boldsymbol{N} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M} \,,$$

sont adjoints l'un de l'autre. Indiquer dans quel sens.

f) Soit $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Alg}(\boldsymbol{A})$. Montrer que le foncteur $\boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} (_) = \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{B})$ est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion de catégories $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{B}) \subseteq \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$.

g) Généralisation de l'exercice précédent à la théorie des faisceaux. Montrer que si $\mu : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$, le foncteur de $\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ vers $\mathrm{Mod}(\mathcal{B})$ qui associe à un $\mathcal{A}$-module $\mathcal{M}$ le faisceau $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ engendré par le préfaisceau qui fait correspondre à l'ouvert U le module $\mathcal{B}(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{M}(U)$, est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\iota : \mathrm{Mod}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{A})$. Autrement dit, l'application naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}, \mathcal{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \iota(\mathcal{N}))$$

pour $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{N} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{B})$, est bijective.

h) Soit $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ une application continue. Montrer que le foncteur « *image inverse de faisceaux de groupes abéliens* » $f^{-1} : \mathrm{Mod}(\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{Y}})$ est adjoint à gauche du foncteur « *image directe de faisceaux de groupes abéliens* » $f_* : \mathrm{Mod}(\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{Y}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}})$. Autrement dit, pour tous $\mathcal{F} \in \mathrm{Mod}(\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}})$ et $\mathcal{G} \in \mathrm{Mod}(\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{Y}})$, l'application naturelle :

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$$

est bijective. En déduire (*cf.* 0d) que $f_*\mathcal{G}$ est injectif si $\mathcal{G}$ l'est.

i) Un morphisme $(f, f^\#) : (\boldsymbol{Y}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}) \to (\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ d'espaces annelés est la donnée d'une application continue $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ est d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $f^\# : \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \to f_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$. On définit alors $f^* : \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ comme le foncteur

$$\mathcal{M} \rightsquigarrow \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}} (f^{-1}\mathcal{M}) .$$

Montrer que f^* est adjoint à gauche de f_*. Autrement dit, l'application naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}}(f^*\mathcal{M}, \mathcal{N}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}}(\mathcal{M}, f_*\mathcal{N}) ,$$

pour $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ et $\mathcal{N} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$, est bijective.

j) Monter que le foncteur « *faisceau associé* » $(\widetilde{\ }) : \mathrm{Préf}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}(\boldsymbol{X})$ est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion de catégories $\iota : \mathrm{Fais}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathrm{Préf}(\boldsymbol{X})$.

2.1.5. Rappels sur les algèbres associatives. Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif.

$\boldsymbol{A}$-Algèbres. On rappelle (*cf.* [B$_1$]-III.§1) que l'expression « $\boldsymbol{A}$-*algèbre* » désigne la donnée d'un $\boldsymbol{A}$-module $\mathcal{A}$ et d'une application $\boldsymbol{A}$-linéaire de $\mathcal{A} \otimes_{\boldsymbol{A}} \mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$, appelée « *multiplication* » notée d'ordinaire $x_1 \otimes x_2 \mapsto x_1 \cdot x_2$, ou simplement $x_1 \otimes x_2 \mapsto x_1 x_2$.

L'algèbre $\mathcal{A}$ est dite

- « *associative* », si $x_1(x_2x_3) = (x_1x_2)x_3$, pour tous $x_i \in \mathcal{A}$;
- « *unitaire* », s'il existe $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} x = x\mathbf{1}_{\mathcal{A}} = x$ pour tout $x \in \mathcal{A}$;
- « *commutative* », si $x_1x_2 = x_2x_1$, pour tous $x_i \in \mathcal{A}$;
- « $\mathbb{Z}$-*graduée* » ou simplement « *graduée* », si $\mathcal{A}$ est munie d'une décomposition en somme directe de sous-$\boldsymbol{A}$-modules $\mathcal{A} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}^m$, telle que $\mathcal{A}^i\mathcal{A}^j \subseteq \mathcal{A}^{i+j}$ pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$. On note $\mathcal{A}^*$ une telle algèbre. On dit que $\mathcal{A}^*$ est « *positivement graduée* » lorsque $\mathcal{A}^m = 0$ pour tout $m < 0$.

Mise en garde. Dans la suite toutes nos algèbres seront unitaires et associatives et les morphismes entre algèbres $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ respecteront l'élément neutre multiplicatif, *i.e.* $\alpha(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$, pour cette raison nous n'introduirons pas de notation spécifique pour mettre en évidence ces propriétés. Par contre, la commutativité, que nous avons fixée pour les anneaux dans le paragraphe 1.1, sera remplacé par d'autres propriétés mais seulement dans le cas des algèbres *graduées* ; par conséquent, la notation « $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{A})$ » continuera de désigner la catégorie des $\boldsymbol{A}$-algèbres unitaires associatives et **commutatives**, et l'expression « $\boldsymbol{A}$-*algèbre* » désignera un objet de $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{A})$.

Catégorie des $\boldsymbol{A}$-Algèbres graduées. C'est la catégorie, notée $\mathbf{Alg_{gr}}(\boldsymbol{A})$ dont les objets sont les $\boldsymbol{A}$-algèbres graduées unitaires associatives et les morphismes sont les morphismes de

$\boldsymbol{A}$-modules gradués de degré nul, notés $\alpha_* : \mathcal{A}_1^* \to \mathcal{A}_2^*$, qui sont également des morphismes de $\boldsymbol{A}$-algèbres unitaires.

Algèbre tensorielle d'un $\boldsymbol{A}$-module. Pour $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ et tout entier $n > 1$, on note $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{A}}^{\otimes n}$, ou simplement $\boldsymbol{M}^{\otimes n}$, le produit tensoriel sur $\boldsymbol{A}$ de n copies de $\boldsymbol{M}$, *i.e.*

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{A}}^{\otimes n} := \underbrace{\boldsymbol{M} \otimes_{\boldsymbol{A}} \cdots \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{M}}_{n} .$$

On pose $\boldsymbol{M}^{\otimes 0} := \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{M}^{\otimes 1} := \boldsymbol{M}$ et l'on identifie $\boldsymbol{M}^{\otimes m} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{M}^{\otimes n}$ à $\boldsymbol{M}^{\otimes m+n}$ par l'intermédiaire de l'application

$$\iota_{m,n} : (x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \otimes (x_{m+1} \otimes \cdots \otimes x_{m+n}) \longmapsto (x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes x_{m+1} \otimes \cdots \otimes x_{m+n}) .$$

La « *$\boldsymbol{A}$-algèbre tensorielle de $\boldsymbol{M}$* » est, par définition, le $\boldsymbol{A}$-module gradué

$$\mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^* \boldsymbol{M} := \textstyle\bigoplus_{n \geqslant 0} \boldsymbol{M}^{\otimes n} = \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{M} \oplus \boldsymbol{M}^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{M}^{\otimes n} \oplus \cdots \qquad (*)$$

muni de la multiplication

$$\textstyle\sum_{m,n} \iota_{m,n} : \mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^* \boldsymbol{M} \otimes \mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^* \boldsymbol{M} = \bigoplus\limits_{m,n \geqslant 0} \left(\boldsymbol{M}^{\otimes m} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{M}^{\otimes n} \right) \longrightarrow \mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^* \boldsymbol{M}$$

L'algèbre $\mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^*(\boldsymbol{M})$ munie de la graduation $(*)$ est une $\boldsymbol{A}$-algèbre unitaire, positivement graduée associative. On a $\mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^k(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{A}}^{\otimes k}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La proposition suivante rassemble des propriétés générales des algèbres tensorielles, sa démonstration est laissée en exercice (*cf.* 1.2.1, 2.1.3-0c).

2.1.6. Proposition : *Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif.*

a) *Pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$, l'algèbre $\mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^* \boldsymbol{M} \in \mathrm{Alg}_{\mathrm{gr}}(\boldsymbol{A})$ est engendrée par ses éléments de degrés $\leqslant 1$.*

b) *La correspondance $\mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^* : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Alg}_{\mathrm{gr}}(\boldsymbol{A})$ qui associe à $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ l'algèbre $\mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^*(\boldsymbol{M})$ et à $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ le morphisme $\alpha_* : \mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^*(\boldsymbol{M}) \to \mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^*(\boldsymbol{N})$ défini par $\alpha_0 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (\alpha x_1 \otimes \cdots \otimes \alpha x_n)$, est fonctorielle covariante.*

c) *Si $\mathcal{A}$ est une $\boldsymbol{A}$-algèbre (générale) unitaire associative, l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{A}}(\mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^*(\boldsymbol{M}), \mathcal{A}) & \xrightarrow[=]{\Phi(\boldsymbol{M},\mathcal{A})} & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}, \mathcal{A}) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha|_{\mathsf{T}^1(\boldsymbol{M})} \end{array}$$

*est bijective et naturelle par rapport à $\boldsymbol{M}$ et à $\mathcal{A}$. Autrement dit, la $\boldsymbol{A}$-algèbre tensorielle $\mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^*(\boldsymbol{M})$ et l'inclusion $\boldsymbol{M} = \mathsf{T}^1(\boldsymbol{M}) \subseteq \mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^*(\boldsymbol{M})$ **représentent** le foncteur $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}, _) : \mathrm{Alg}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$.*

d) *Le foncteur $\mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^*(_) : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Alg}_{\mathrm{gr}}(\boldsymbol{A})$ est **adjoint à gauche** du foncteur de restriction $(_)^1 : \mathrm{Alg}_{\mathrm{gr}}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$. Les morphismes d'adjonction étant l'inclusion $\boldsymbol{M} = \mathsf{T}^1(\boldsymbol{M}) \subseteq \mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^*(\boldsymbol{M})$ et le morphisme d'algèbres canonique $\mathsf{T}_{\boldsymbol{A}}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$.*

2.1.7. Algèbres symétriques, anticommutatives, alternées. Soient $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif, $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}$-module et $\mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})$ son algèbre tensorielle sur $\boldsymbol{A}$ (2.1.5). On définit les algèbres

$$\begin{cases} \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}) := \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})/\big\langle m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1 \big\rangle_{m_i \in \boldsymbol{M}} \\ \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M} := \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})/\big\langle m_1 \otimes m_2 + m_2 \otimes m_1 \big\rangle_{m_i \in \boldsymbol{M}} \\ \bigwedge^r_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{M} := \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})/\big\langle m \otimes m \big\rangle_{m \in \boldsymbol{M}} \end{cases}$$

où $\langle \mathcal{F}(m) \rangle_{m \in \boldsymbol{M}}$ désigne l'idéal **bilatère** de $\mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}$ engendré par la famille $\{\mathcal{F}(m) \mid m \in \boldsymbol{M}\}$. Ces algèbres s'appellent respectivement «*algèbre symétrique du $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$*», «*algèbre anticommutative du $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$*» et «*algèbre alternée du $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$*».

2.1.8. Notation. L'opération de multiplication dans $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M}$ sera notée par '$\cdot$', et dans $\mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M}$ et $\bigwedge^*_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{M}$ par le même symbole '$\wedge$'.

2.1.9. Exercice

a) Soit $\mathcal{A}^* = \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})$. Montrer que $a_{k_1}a_{k_2} = (-1)^{k_1k_2}a_{k_2}a_{k_1}$ pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $a_k \in \mathcal{A}^k$. En particulier, $\mathcal{A}^{2*}$ est une $\boldsymbol{A}$-algèbre commutative et centrale dans $\mathcal{A}^*$.

b) Soit $\mathcal{A}^* = \bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})$. Monter que $x^2 = 0$ pour tout $x \in \mathcal{A}^*$, homogène de degré impair.

2.1.10. Remarque : On a

$$m_1 \otimes m_2 + m_2 \otimes m_1 = (m_1 + m_2) \otimes (m_1 + m_2) - m_1 \otimes m_1 - m_2 \otimes m_2$$

et alors

$$\big\langle m \otimes m \big\rangle_{m \in \boldsymbol{M}} \supseteq \big\langle m_1 \otimes m_2 + m_2 \otimes m_1 \big\rangle_{m_i \in \boldsymbol{M}} \supseteq \big\langle 2\, m \otimes m \big\rangle_{m \in \boldsymbol{M}}$$

d'où une surjection canonique d'algèbres $\mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}) \twoheadrightarrow \bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})$ de noyau de 2-torsion.

La proposition suivante, analogue de 2.1.6, est laissée en exercice (*cf.* 1.2.1, 2.1.3-0c).

2.1.11. Proposition : *Soient $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif et $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}$-module. Notons $(\mathsf{X}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}), \times)$ respectivement l'une des algèbres $(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}), \cdot)$, $(\mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}), \wedge)$, $(\bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}), \wedge)$. On désignera par $\mathrm{Alg}_{\text{gr-X}}(\boldsymbol{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Alg}_{\text{gr}}(\boldsymbol{A})$ des algèbres respectivement abéliennes (symétriques), anticommutatives, alternées. Alors*

a) *Pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$, l'algèbre $\mathsf{X}^*_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M} \in \mathrm{Alg}_{\text{gr-X}}(\boldsymbol{A})$ est engendrée par ses éléments de degrés $\leqslant 1$.*

b) *La correspondance $\mathsf{X}^*_{\boldsymbol{A}} : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Alg}_{\text{gr-X}}(\boldsymbol{A})$ qui associe à $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ l'algèbre $\mathsf{X}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})$ et à $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ le morphisme $\alpha_* : \mathsf{X}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}) \to \mathsf{X}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N})$ défini par $\alpha_0 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_n(x_1 \times \cdots \times x_n) = (\alpha x_1 \times \cdots \times \alpha x_n)$, est fonctorielle covariante.*

c) *Si $\mathcal{A}^* \in \mathrm{Alg}_{\text{gr-X}}(\boldsymbol{A})$ l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathrm{Alg}_{\text{gr}}(\boldsymbol{A})}(\mathsf{X}^*_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M}, \mathcal{A}^*) & \xrightarrow[=]{\Phi(\boldsymbol{M},\mathcal{A})} & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}, \mathcal{A}^1) \\ \alpha_* & \longmapsto & \alpha_1 \end{array}$$

*est bijective et naturelle par rapport à $\boldsymbol{M}$ et à $\mathcal{A}^*$. Autrement dit, $\mathsf{X}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})$ et l'l'égalité $\boldsymbol{M} = \mathsf{X}^1(\boldsymbol{M})$ **représentent** le foncteur $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}\big(\boldsymbol{M}, (_)^1\big) : \mathrm{Alg}_{\text{gr}}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$.*

d) *Le foncteur* $\mathsf{X}^*_A(_) : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Alg}_{\text{gr-X}}(\boldsymbol{A})$ *est* ***adjoint à gauche*** *du foncteur de restriction* $(_)^1 : \mathrm{Alg}_{\text{gr-X}}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$. *Les morphismes d'adjonction étant l'égalité* $\boldsymbol{M} = \mathsf{X}^1(\boldsymbol{M})$ *et le morphisme d'algèbres canonique* $\mathsf{X}^*_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{A}^1) \to \mathcal{A}^*$.

Le résultat suivant est démontré dans [B$_1$] (A III pp. 57, 69, 73, 78, 83).

2.1.12. Proposition : *Soit* $\boldsymbol{A}$ *un anneau commutatif. Pour chaque* $\boldsymbol{A}$*-module* $\boldsymbol{M}$*, notons* $\mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})$, $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})$, $\mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})$, *et* $\bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})$ *les algèbres respectivement tensorielle, symétrique, anticommutative et alternée du* $\boldsymbol{A}$*-module* $\boldsymbol{M}$*. Pour tout morphisme* ***surjectif*** *de* $\boldsymbol{A}$*-modules* $\alpha : \boldsymbol{M}_1 \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}_2$*, les morphismes d'algèbres graduées induits :*

$$\mathsf{T}(\alpha)_* : \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \twoheadrightarrow \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_2) \qquad \mathsf{S}(\alpha)_* : \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \twoheadrightarrow \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_2)$$
$$\mathsf{A}(\alpha)_* : \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \twoheadrightarrow \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_2) \qquad \bigwedge(\alpha)_* : \bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \twoheadrightarrow \bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_2)$$

sont tous surjectifs et leur noyau est engendré par l'idéal bilatère engendré par $\ker(\alpha)$.

De plus, les morphismes :

$$\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \otimes_{\boldsymbol{A}} \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \to \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{M}_2) \qquad \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \otimes_{\boldsymbol{A}} \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \to \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{M}_2)$$
$$\bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \otimes_{\boldsymbol{A}} \bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \to \bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{M}_2)$$

induits par les injections canoniques $\boldsymbol{M}_i \subseteq \boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{M}_2$ *sont tous des isomorphismes.*

2.1.13. $\boldsymbol{R}$-algèbres différentielles graduées. Soit $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif. Une « *algèbre différentielle graduée* », « $\boldsymbol{R}$*-adg* » en bref, est un couple $(\mathcal{A}^*, d_{\mathcal{A},*})$ où $\mathcal{A}^*$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre unitaire, graduée, associative et « *anticommutative* », *i.e.* tel que

$$x_{k_1}\, x_{k_2} = (-1)^{k_1 k_2} x_{k_2} x_{k1}\,, \text{ pour tous } k_i \in \mathbb{N} \text{ et } x_k \in \mathcal{A}^k,$$

et où $d_{\mathcal{A},*} : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ est la « *différentielle* » d'un complexe de $\boldsymbol{R}$-modules, *i.e.* un endomorphisme de $\boldsymbol{R}$-module gradué de degré 1 de carré nul, et c'est une dérivation d'algèbre anticommutative, *i.e.* telle que

$$\begin{cases} d_{\mathcal{A}} \circ d_{\mathcal{A}} = 0\,; \\ d_{\mathcal{A}}(x_k\, x) = d_{\mathcal{A}}(x_k)\, x + (-1)^k x_k\, d_{\mathcal{A}}(x)\,, \quad \textit{pour tous } k \in \mathbb{N},\ x_k \in \mathcal{A}^k \textit{ et } x \in \mathcal{A}^*. \end{cases}$$

Catégorie des $\boldsymbol{R}$-adg. Notée $\mathbf{Adg}(\boldsymbol{R})$, ses objets sont les $\boldsymbol{R}$-adg et ses morphismes $\alpha_* : (\mathcal{A}^*, D_{\mathcal{A},*}) \to (\mathcal{B}^*, d_{\mathcal{B},*})$ sont les morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres graduées $\alpha_* : \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ qui sont également des morphismes de complexes, *i.e.* tels que $\alpha_{i+1} \circ d_{\mathcal{A},i} = d_{\mathcal{B},i} \circ \alpha_i$.

2.1.14. Exercice : Soit $(\mathcal{A}^*, d_{\mathcal{A},*})$ une $\boldsymbol{R}$-adg.

a) Montrer que le module des « *cycles de* $(\mathcal{A}^*, d_{\mathcal{A},*})$ », *i.e.* $\mathcal{Z}^*(\mathcal{A}^*, d_{\mathcal{A},*}) = \ker(d_{\mathcal{A},*})$, est une sous-$\boldsymbol{R}$-algèbre graduée de $\mathcal{A}^*$.

b) Montrer que le module des « *bords de* $(\mathcal{A}^*, d_{\mathcal{A},*})$ », *i.e.* $\mathcal{B}^*(\mathcal{A}^*, d_{\mathcal{A},*}) = \mathrm{im}(d_{\mathcal{A},*})$, est un idéal homogène bilatère de $\mathcal{Z}^*(\mathcal{A}^*, d_{\mathcal{A},*})$.

c) En déduite une structure de $\boldsymbol{R}$-algèbre unitaire, positivement graduée, associative, et anticommutative sur la cohomologie $H^*(\mathcal{A}^*, d_{\mathcal{A},*}) := \mathcal{Z}^*(\mathcal{A}^*, d_{\mathcal{A},*})/\mathcal{B}^*(\mathcal{A}^*, d_{\mathcal{A},*})$.

d) Donner un sens au «*foncteur*» de cohomologie $H^* : \boldsymbol{R}\text{-adg} \rightsquigarrow \mathrm{Alg}_{\mathrm{gr}}(\boldsymbol{R})$

2.1.15. $\boldsymbol{R}$-algèbres différentielles graduées alternées. On note $\mathbf{Alt}(\boldsymbol{R})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Adg}(\boldsymbol{R})$ des «*algèbres alternées*», *i.e.* des $\boldsymbol{R}$-adg $(\mathcal{A}^*, d_{\mathcal{A},*})$ vérifiant la condition d'«*alternance*»:

$$\{\, x^2 = 0\,, \quad \textit{pout tout } x \in \mathcal{A}^* \textit{ homogène de degré impair.}$$

2.1.16. Remarque et exercice: Lorsque 2 est inversible dans $\boldsymbol{R}$, une $\boldsymbol{R}$-adg $\mathcal{A}^*$ et toujours alternée (*cf.* 2.1.10). Par contre la réciproque n'est pas vraie en général; elle l'est si $\mathcal{A}^*$ est engendrée par $\mathcal{A}^0$ et par des éléments de degré impair, et que $\mathcal{A}^0$ est centrale dans $\mathcal{A}^*$.

2.1.17. Exercice: Refaire l'exercice 2.1.14-(c) pour une $\boldsymbol{R}$-adg **alternée** en remplaçant "anticommutative" par "alternée".

2.1.18. Lemme

a) *Pour toute $\boldsymbol{R}$-adg $(\mathcal{A}^*, d_{\mathcal{A},*})$ l'idéal (bilatère) $\mathcal{K}^*$ engendré par les éléments x^2, où x est homogène de degré impair, est homogène et est stable par la différentielle $d_{\mathcal{A},*}$. En particulier, il existe une et une seule structure de $\boldsymbol{R}$-adg sur le quotient $\mathcal{A}^*/\mathcal{K}^*$, notée $(\mathcal{A}^*/\mathcal{K}^*, \bar{d}_{\mathcal{A},*})$, telle que la surjection canonique $\mathcal{A}^* \twoheadrightarrow \mathcal{A}^*/\mathcal{K}^*$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-adg.*

b) *La correspondance $(\mathcal{A}^*, d_{\mathcal{A},*}) \rightsquigarrow (\mathcal{A}^*/\mathcal{K}^*, \bar{d}_{\mathcal{A},*})$ est fonctorielle adjointe à gauche du foncteur d'inclusion de catégories $\mathrm{Alt}(\boldsymbol{R}) \subseteq \mathrm{Adg}(\boldsymbol{R})$.*

Indication: En effet, si $x \in \mathcal{A}^{2m+1}$ on a $dx^2 = d(x)x + (-1)^{2m+1}xd(x) = 0$. Par suite $d(ax^2b) = (da)x^2b \pm ax^2d(b) \in \mathcal{I}$. ∎

2.1.19. Structure de $\boldsymbol{R}$-adg alternée sur $\boldsymbol{\Omega^*_{R[\mathcal{X}]/R}}$. Soit $\mathcal{I}$ un ensemble non vide «*d'indices*» muni d'un ordre total '$\leqslant$'. Notons $\mathcal{X}$ la famille de variables $\{X_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ et posons

$$\boxed{\Omega^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} := \textstyle\bigwedge^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \left(\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}\right)}$$

Nous avons montré dans 1.4 que $\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}$ est un $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$-module libre de base l'ensemble de symboles $\{dX_i \mid i \in \mathcal{I}\}$, *i.e.* $\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\, dX_i$, il s'ensuit que pour tout entier naturel $n > 1$ on a:

$$\textstyle\bigwedge^n_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]}(\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}) = \bigoplus\limits_{i_1<\cdots<i_n} \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\; dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_n}$$

2.1.20. Exercice: Montrer que $\bigwedge^n_{\boldsymbol{R}[X_1,\ldots,X_m]}$ est un $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$-module libre de rang $\binom{m}{n}$. En particulier, $\bigwedge^n_{\boldsymbol{R}[X_1,\ldots,X_m]} = 0$ si $m < n$.

Différentielle sur $\Omega^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}$. Pour tout entier positif $n > 1$ on pose

$$d_n : \textstyle\bigwedge^n_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]}(\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}) \longrightarrow \bigwedge^{n+1}_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]}(\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}})$$
$$P\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_n} \longmapsto d_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}(P) \wedge dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_n}$$

où $P \in \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ et $d_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}(P) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \frac{\partial P}{\partial X_i} dX_i$ (*cf.* 1.4).

2.1.21. Proposition : *Le couple $(\Omega^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}, d_*)$ est une $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$-adg.*

Démonstration : $d_*^2 = 0$. En effet, notons $\varpi = dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_n}$, alors pour $P \in \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$:

$$\begin{aligned}(d_{n+1} \circ d_n)P\varpi = d_{n+1} \sum_k \frac{\partial P}{\partial X_k} dX_k \wedge \varpi &= \sum_\ell \sum_k \frac{\partial^2 P}{\partial X_\ell\, \partial X_k} dX_\ell \wedge dX_k \wedge \varpi \\ &= \sum_{\ell<k} \Big(\frac{\partial^2 P}{\partial X_\ell\, \partial X_k} dX_\ell \wedge dX_k + \frac{\partial^2 P}{\partial X_k\, \partial X_\ell} dX_k \wedge dX_\ell \Big) \wedge \varpi \\ &= \sum_{\ell<k} \Big(\frac{\partial^2 P}{\partial X_\ell\, \partial X_k} - \frac{\partial^2 P}{\partial X_k\, \partial X_\ell} \Big) dX_\ell \wedge dX_k \wedge \varpi = 0\,,\end{aligned}$$

d'après la commutation bien connue d'opérateurs différentiels : $\frac{\partial}{\partial X_k}\frac{\partial}{\partial X_\ell} = \frac{\partial}{\partial X_\ell}\frac{\partial}{\partial X_k}$.
***d_** est une antidérivation.** Notons maintenant $\varpi' = dX_{j_1} \wedge \cdots \wedge dX_{j_m}$, on a

$$\begin{aligned} d_{m+n}\big((P\varpi) \wedge (P'\varpi')\big) &= d_{m+n}\big(PP'\varpi \wedge \varpi'\big) = d_0(PP')\varpi \wedge \varpi' \\ &= P'd_0(P) \wedge \varpi \wedge \varpi' + Pd_0(P') \wedge \varpi \wedge \varpi' \\ &= \big(d_0(P) \wedge \varpi\big) \wedge \big(P'\varpi'\big) + Pd_0(P') \wedge \varpi \wedge \varpi' \\ &= d_n(P\varpi) \wedge (P'\varpi') + (-1)^n (P\varpi) \wedge d_m(P'\varpi')\,. \end{aligned}$$

∎

2.1.22. Proposition : *Soit $\mathcal{A}^*$ une $\boldsymbol{R}$-adg alternée, l'application*

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Adg}(\boldsymbol{R})}\big((\Omega^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}, d_*), (\mathcal{A}^*, d_{\mathcal{A},*})\big) \longrightarrow \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}[\mathcal{X}], \mathcal{A}^0)$$

induite par le foncteur «composante de degré 0» *est* ***bijective****. Autrement dit, $(\Omega^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}, d_*)$ et l'égalité $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}] = \Omega^0_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}$,* ***représentent*** *le foncteur $\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}[\mathcal{X}], (_)^0)$.*

Démonstration : Étant donné un homomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha_0 : \mathcal{R}[\mathcal{X}] \to \mathcal{A}^0$, la composée $d_{\mathcal{A},0} \circ \alpha_0$ est une $\boldsymbol{R}$-dérivation. Il existe donc un et un unique morphisme de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$-algèbres $\alpha_1 : \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \to \mathcal{A}^1$ (1.1.4) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] & \xrightarrow{d_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}} & \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \\ {\scriptstyle\alpha_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_1} \\ \mathcal{A}^0 & \xrightarrow{d_{\mathcal{A},0}} & \mathcal{A}^1 \end{array} \qquad (\Omega)$$

L'adjonction 2.1.11-0c établit que pour la structure de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$-algèbre sur $\mathcal{A}^0$ définie par α_0, il existe un et un unique prolongement du couple (α_0, α_1) en un morphisme d'algèbres

graduées alternées $\alpha_* : \Omega^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \to \mathcal{A}^*$. Le morphisme α_* est alors donné par la formule

$$\alpha_n(P\,dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_1}) = \alpha_0(P)\,d_{\mathcal{A},0}(Y_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d_{\mathcal{A},0}(Y_{i_1})$$

où l'on a posé $Y_i = \alpha_0(X_i)$, et la condition nécessaire et suffisante pour que α_* soit un morphisme de complexes équivaut à la commutativité du diagramme $(\mathcal{D})$. ∎

2.1.23. Structure de $\boldsymbol{R}$-adg alternée de $\boldsymbol{\Omega^*_{A/R}}$. Étant donnée une $\boldsymbol{R}$-algèbre unitaire associative et commutative $\boldsymbol{A}$, on pose :

$$\boxed{\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} := \bigwedge^*_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}$$

Fixons une surjection de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\pi : \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$. L'homomorphisme π munit $\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ d'une structure de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$-algèbre graduée associative alternée unitaire. On a donc, d'après 2.1.11-0d,

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Alg_{gr}}(\boldsymbol{R}[\mathcal{X}])}(\Omega^*_{\boldsymbol{R}[\boldsymbol{X}]/\boldsymbol{R}}, \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]}(\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}, \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})\,. \qquad (\diamond)$$

On note alors

$$\boxed{\pi_* : \Omega^*_{\boldsymbol{R}[\boldsymbol{X}]/\boldsymbol{R}} \to \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}$$

le morphisme le morphisme de $\boldsymbol{R}$-adg correspondant à $\Omega(\pi) : \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ dans l'égalité $(\diamond)$ (*cf.* 1.3). On a

$$\pi_n(P\,dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_n}) = \pi(P)\,d\pi(X_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d\pi(X_{i_n})\,.$$

2.1.24. Théorème : *Avec les données ci-dessus,*

a) $\pi_* : \Omega^*_{\boldsymbol{R}[\boldsymbol{X}]/\boldsymbol{R}} \to \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ *est un morphisme d'algèbres graduées surjectif dont le noyau,* $\ker(\pi_*)$, *est l'idéal bilatère engendré par* $\big(\ker(\pi) \oplus d\ker(\pi)\big) \subseteq \Omega^0_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \oplus \Omega^1_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}$.

b) $\ker(\pi_*)$ *et c'est un sous-complexe de* $(\Omega^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}, d_*)$ *et* $\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} = \Omega^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}/\ker(\pi_*)$ *admet une et une seule différentielle* $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},*}$ *telle que* $\pi_* : (\Omega^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}, d_*) \to (\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},*})$ *est un morphisme de* $\boldsymbol{R}$*-adg alternées.*

c) *Pour toute* $\boldsymbol{R}$*-adg alternée* $(\mathcal{B}^*, d_{\mathcal{B},*})$ *l'application*

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Adg}(\boldsymbol{R})}\big((\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A},*}), (\mathcal{B}^*, d_{\mathcal{B},*})\big) \longrightarrow \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \mathcal{B}^0)$$

induite par le foncteur « composante de degré 0 » *est* ***bijective****. Autrement dit,* $(\Omega^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}, d_*)$ *et l'égalité* $\boldsymbol{A} = \Omega^0_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$, ***représentent*** *le foncteur* $\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, (_)^0)$.

d) *La différentielle* $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},*}$ *définie dans* 0b *est indépendante de* $\pi : \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$.

Démonstration

a) π est surjectif par définition, $\Omega(\pi)$ est surjectif d'après 1.3.1, et alors π_* est surjectif d'après 2.1.12. On remarquera aussi que puisque $\boldsymbol{A}$ est quotient de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$, l'application évidente

$\bigwedge^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est bijective. On décompose alors le morphisme π_* comme composition de

$$\begin{array}{ccccc} \bigwedge^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]}\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} & \xrightarrow{\alpha_*} & \bigwedge^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} & \xrightarrow{\beta_*} & \bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \pi_* & & \end{array}$$

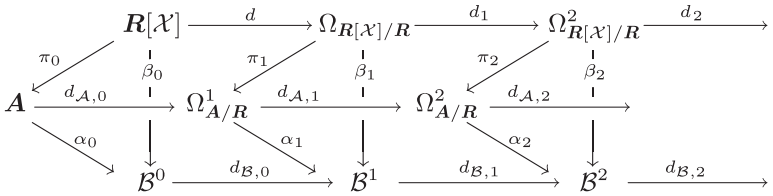
où $\alpha_* = \bigwedge(\Omega(\pi))_*$ (2.1.12) et $\beta_0 = \pi$ et $\beta_i = \mathrm{id}$ pour $i > 0$. L'idéal $\ker(\beta_*)$ est concentré en degré 0 où il s'identifie à $\ker(\pi)$, tandis que $\ker(\alpha_*)$ est l'idéal engendré par $\ker(\Omega(\pi))$ (2.1.12) donc par $d(\ker(\pi))$ (1.3.1-0a).

b) Résulte de l'égalité immédiate $d(\ker(\pi) \oplus d\ker(\pi)) = d\ker(\pi)$.

c) D'après la proposition 2.1.22, l'homomorphisme $\beta := \alpha \circ \pi : \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \to \mathcal{B}^0$ est la composante de degré 0 d'un et un unique morphisme de $\boldsymbol{R}$-adg alternées, notons-le $\beta_* : (\Omega^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}, d_*) \to (\mathcal{B}*, d_{\mathcal{B},*})$.

$$\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] & = & \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] & \xrightarrow{d} & \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} & \xrightarrow{d_1} & \Omega^2_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} & \xrightarrow{d_2} & \\ \pi\downarrow & & \downarrow\beta_0 & & \downarrow\beta_1 & & \downarrow\beta_2 & & \\ \boldsymbol{A}^0 & & & & & & & & \\ \alpha\downarrow & & & & & & & & \\ \mathcal{B}^0 & = & \mathcal{B}^0 & \xrightarrow{d_{\mathcal{B},0}} & \mathcal{B}^1 & \xrightarrow{d_{\mathcal{B},1}} & \mathcal{B}^2 & \xrightarrow{d_{\mathcal{B},2}} & \end{array}$$

L'idéal $\ker(\beta_*)$ qui contient clairement $\ker(\pi)$, contient également $d\ker(\pi)$ puisqu'il est aussi un sous-complexe de $(\Omega^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}, d_*)$. Par conséquent $\ker(\beta_*) \supseteq \ker(\pi_*)$, d'après (b), et β_* se factorise à travers $\pi_* : (\Omega^*_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}, d_*) \twoheadrightarrow (\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\mathcal{A},*})$ en un unique (car π_* est surjective) morphisme de $\boldsymbol{R}$-adg $\alpha_* : (\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\mathcal{A},*}) \to (\mathcal{B}^*, d_{\mathcal{B},*})$.



d) On aura remarqué que la définition de la différentielle $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},*}$ dans (a) est telle que la composante $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},0}$ coïncide avec le morphisme canonique de $\boldsymbol{A}$ vers $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ (*cf.* 1.4). Il s'ensuit que si $(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{1,*})$ et $(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{2,*})$ ont été définies à l'aide de surjections π_i différentes, le morphisme $\alpha_* : (\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{1,*}) \to (\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{2,*})$ de la question (c) vérifie $\alpha_0 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}$, $\alpha_1 = \mathrm{id}_{\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}$ et donc $\alpha_n = \mathrm{id}_{\Omega^n_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}$ puisque le noyau de α_* est engendré par $\ker(\alpha_0) \oplus \ker(\alpha_1) = 0$ (*cf.* 2.1.12 et 2.1.24-0a). ∎

2.2 Les foncteurs 'complexe de de Rham' et 'cohomologie de de Rham'

La définition suivante est justifié par le théorème 2.1.24.

2.2.1. Définition : Le foncteur «*complexe de de Rham*», noté $(_) \rightsquigarrow \Omega^*_{(_)/\boldsymbol{R}}$, de la catégorie $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ vers la catégorie $\mathrm{Alt}(\boldsymbol{R})$ des $\boldsymbol{R}$-adg alternées (2.1.15) est le foncteur qui fait correspondre

- à une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, le complexe $(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A};*})$ (*cf.* 2.1.23)

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A} \xrightarrow{d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},1}} \bigwedge^2_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},2}} \bigwedge^3_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},3}} \bigwedge^4_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},4}} \cdots$$

où la différentielle $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},r}$ vérifie la formule :

$$d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},r}\big(a_0 \cdot d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_1) \wedge \cdots \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_r)\big) = d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_0) \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_1) \wedge \cdots \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_r) \tag{24}$$

pour tout $r > 0$.

- à $\alpha \in \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, **le** morphisme de $\boldsymbol{R}$-adg $\alpha_* : (\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A};*}) \to (\Omega^*_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{B};*})$ vérifiant $\alpha_0 = \alpha$.

2.2.2. Théorème

a) *Le foncteur qui fait correspondre à une algèbre différentielle graduée alternée $(\boldsymbol{B}^*, d_{\boldsymbol{B}})$ sa composante homogène de degré zéro $\boldsymbol{B}^0$ et de même pour les morphismes, est* ***adjoint à droite*** *du foncteur* «complexe de Rham» $\Omega^*_{(_)/\boldsymbol{R}} : \mathrm{Alg}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathrm{Alt}(\boldsymbol{R})$.

Autrement dit, l'application

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Alt}(\boldsymbol{R})}\big((\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A};*}), (\boldsymbol{B}^*, d_{\boldsymbol{B},*})\big) \xrightarrow[\equiv]{(_)^0} \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^0)$$

est bijective.

b) *Soient $\boldsymbol{R}'$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ des $\boldsymbol{R}$-algèbres et soit $S \subseteq \boldsymbol{A}$ un système multiplicatif. On a des isomorphismes canoniques naturelles compatibles au différentielles :*

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \Omega^*_{\boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}'} \equiv \boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} & \text{(changement de base)} \\ \text{(ii)} \quad \Omega^*_{S^{-1}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \equiv S^{-1}\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} & \text{(localisation)} \\ \text{(iii)} \quad \Omega^*_{\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{B}} \equiv \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega^*_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} & \text{(produit fibré, produit tensoriel)} \end{cases}$$

Démonstration : La première partie résulte immédiatement du théorème 2.1.24. Les isomorphismes de la seconde partie résultent, par l'adjonction de (a), des isomorphismes donnés dans le paragraphe 1.4.6, formules (8) et (9), et dans la proposition 1.4.8 formule (10). Voici à titre d'exemple la preuve de la formule (iii) du complexe de de Rham d'un produit tensoriel :

Les morphismes canoniques $\iota_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{B}$ et $\iota_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{B}$ induisent par fonctorialité les morphismes de $\boldsymbol{R}$-adg

$$\iota_{\boldsymbol{A},*} : (\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A};*}) \to (\Omega^*_{\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B};*}) \qquad \iota_{\boldsymbol{B},*} : (\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A};*}) \to (\Omega^*_{\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B};*})$$

d'où un morphisme canonique $\iota_{\boldsymbol{A},*} \otimes \iota_{\boldsymbol{B},*} : \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes \Omega^*_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \to \Omega^*_{\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}$ induisant une application

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Alt}(\boldsymbol{R})}(\Omega^*_{\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}, \mathcal{B}^*) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathrm{Alt}(\boldsymbol{R})}(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes \Omega^*_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}, \mathcal{B}^*) \tag{$\diamond$}$$

qui sera bijective pour toute $\boldsymbol{R}$-adg alternée $(\mathcal{B}^*, d_{\mathcal{B},*})$ si et seulement si $\iota_{\boldsymbol{A},*} \otimes \iota_{\boldsymbol{B},*}$ est un isomorphisme.

Or, $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Alt}(\boldsymbol{R})}(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes \Omega^*_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}, \mathcal{B}^*) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Alt}(\boldsymbol{R})}(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \mathcal{B}^*) \times \mathrm{Mor}_{\mathrm{Alt}(\boldsymbol{R})}(\Omega^*_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}, \mathcal{B}^*)$ et l'application $(\diamond)$ est bijectivement équivalente par d'adjonction (a), à l'application

$$\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{B}, \mathcal{B}^0) \longrightarrow \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \mathcal{B}^0) \times \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B}, \mathcal{B}^0)$$

également induite pat $\iota_{\boldsymbol{A}}$ et $\iota_{\boldsymbol{B}}$ dont la bijectivité est bien connue. ∎

2.2.3. Définition : Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, on appelle «*cohomologie de de Rham de* $\boldsymbol{A}$ *sur* $\boldsymbol{R}$», et l'on note $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R})$, l'anneau de cohomologie du complexe de de Rham $(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A};*})$.

2.3 Cohomologie de de Rham d'une algèbre de polynômes

Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif, $\mathcal{X}$ un ensemble (de variables) et $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$ et variables dans $\mathcal{X}$. On a $\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} = \bigoplus_{X\in\mathcal{X}} \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\,dX$ et la différentielle $d_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} : \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \to \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}$ est donnée par :

$$d_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}(P) = \sum_{X\in\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial X}(P)\,dX\,.$$

Munissons l'ensemble $\mathcal{X}$ d'un ordre total '$\preccurlyeq$'. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ le $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$-module $\Omega^r_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}$ est libre, engendré par les éléments $dX_0 \wedge \cdots \wedge dX_{r-1}$ où $X_i \prec X_{i+1}$. On définit $h_r : \Omega^r_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \to \Omega^{r-1}_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}$ comme l'homomorphisme de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$-modules qui fait correspondre :

$$dX_0 \wedge \cdots \wedge dX_{r-1} \xmapsto{h_{r+1}} \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i\, X_i\, dX_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_r\,.$$

Cette application vérifie l'égalité $h_r(\omega_1 \wedge \omega_2) = h_{r_1}(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{r_1}\,\omega_1 \wedge h_{r_2}(\omega_2)$ pour tous ω_i homogènes de degrés respectifs r_i et tels que $r_1 + r_2 = r$. On en déduit la formule suivante :

$$(d_{r-1} \circ h_r + h_{r+1} \circ d_r)\big(P\,dX_0 \wedge \cdots \wedge dX_{r-1}\big) = \big(rP + \xi(P)\big)\,dX_0 \wedge \cdots \wedge dX_{r-1} \qquad (*)$$

pour tout $P \in \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ et où l'on a noté 'ξ' «*l'opérateur d'Euler*», *i.e.*

$$\xi(P) := h_1 \circ d_0(P) = \sum_{X\in\mathcal{X}} X\frac{\partial P}{\partial X}\,.$$

L'application $\xi : \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \to \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ est $\boldsymbol{R}$-linéaire et pour chaque $P \in \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$, on a $\xi^N(P) = 0$ pour $N \gg 0$ (dépendant de P). Notons ξ_r le prolongement linéaire de ξ à $\Omega^r_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}$, l'égalité $(*)$ s'écrit alors :

$$(d_{r-1} \circ h_r + h_{r+1} \circ d_r)(\omega) = (r + \xi_r)(\omega)$$

pour tout $\omega \in \Omega^k_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}$. L'application $(* + \xi_*) = \Omega^* \to \Omega^*$ est graduée de degré zéro et c'est un morphisme de complexes, *i.e.* commute à la différentielle. On a aussi

$$(r + \xi)\big(X_{i_1}^{d_1} \cdots X_{i_m}^{d_m}\big) = (r + d_1 + \cdots + d_m)\big(X_{i_1}^{d_1} \cdots X_{i_m}^{d_m}\big)$$

de sorte que la suite de complexes :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{R}[0] \longrightarrow \Omega^*_{\mathbb{R}[\mathcal{X}]/\mathbb{R}} \xrightarrow{(*+\xi_*)} \Omega^*_{\mathbb{R}[\mathcal{X}]/\mathbb{R}} \to \mathbf{0} \qquad (**)$$

où $\boldsymbol{R}[0]$ désigne le complexe concentré en degré zéro de composante en ce degré égale à $\boldsymbol{R}$, est exacte ***lorsque $\boldsymbol{R}$ contient le corps des rationnels***. La proposition suivante en résulte par la suite longue de cohomologie associée à $(**)$ et par le fait que $(* + \xi_*)$ induit le morphisme nul en cohomologie.

2.3.1. Proposition : *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif contenant le corps des nombres rationnels, $\mathcal{X}$ un ensemble (de variables) et $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$ et variables dans $\mathcal{X}$. La cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ relative à $\boldsymbol{R}$ est nulle en degrés positifs et isomorphe à $\boldsymbol{R}$ en degré nul*, i.e.

$$\begin{cases} H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}) \equiv \boldsymbol{R} \\ H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}) \equiv \mathbf{0}\,, \quad \textit{pour tout } r > 0 \end{cases}$$

2.3.2. Exercice : Montrer en toute généralité les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{R}[X]/\boldsymbol{R}) \equiv \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{Annul}_{\boldsymbol{R}}(m) \\ H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{R}[X]/\boldsymbol{R}) \equiv \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{R}/(m+1)\cdot\boldsymbol{R} \\ H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{R}[X]/\boldsymbol{R}) \equiv \mathbf{0}\,, \qquad\qquad \text{pour tout } r > 1 \end{cases}$$

où $\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{R}}(m)$ désigne l'idéal dans $\boldsymbol{R}$ des éléments de m-torsion.

§3. Cohomologie de de Rham d'un schéma

3.1 Complexe et cohomologie de de Rham relatifs

Dans cette partie on "globalise" la notion de complexe de de Rham et de cohomologie de de Rham d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre à un schéma au-dessus d'un schéma de base donné $\boldsymbol{S}$, *i.e.* à un objet de la catégorie des $\boldsymbol{S}$-schémas.

3.1.1. Remarques générales. Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique arbitraire muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{R}$ et soit $\mathcal{A}$ un faisceau de $\mathcal{R}$-algèbres. Lorsque $V \subseteq U$ sont deux ouverts de $\boldsymbol{X}$, le foncteur complexe de de Rham fait correspondre au morphisme de restriction $\mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ un morphisme d'algèbres différentielles $\Omega^*_{\mathcal{A}(U)/\mathcal{R}(U)} \to \Omega^*_{\mathcal{A}(V)/\mathcal{R}(V)}$ d'où un préfaisceau :

$$\underline{\Omega}^*_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} : U \longmapsto \Omega^*_{\mathcal{A}(U)/\mathcal{R}(U)}$$

de faisceau associé noté $\underline{\Omega}^*_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$, et de germe $\Omega^*_{\mathcal{A}_{(x)}/\mathcal{R}_{(x)}}$ en un point $x \in \boldsymbol{X}$.

Lorsque l'on se donne un $\boldsymbol{S}$-schéma de morphisme structural $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$, le morphisme de faisceaux d'anneaux $f^\# : f^{-1}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}}) \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ fait de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ une $f^{-1}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})$-algèbre et la construction précédente s'applique.

3.1.2. Définitions : Soient $\boldsymbol{S}$ un schéma et $\boldsymbol{X}$ un $\boldsymbol{S}$-schéma, notons $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ le morphisme structural. On appelle « *complexe de de Rham de $\boldsymbol{X}$ relatif à $\boldsymbol{S}$* », et l'on note $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}$, le faisceaux d'algèbres différentielles graduées (alternées) :

$$\boxed{\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}} := \underline{\Omega}^*_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}/f^{-1}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})}}$$

La « *cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{X}$ relative à $\boldsymbol{S}$* », notée $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S})$, est l'**hypercohomologie** du complexe de faisceaux $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}$. Pour chaque $r \in \mathbb{N}$, on a par conséquent :

$$\boxed{H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}) := \mathbb{H}^r(\boldsymbol{X}; \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}})}$$

3.1.3. Fonctorialité de la cohomologie de de Rham. Soit $g : \boldsymbol{X}_1 \to \boldsymbol{X}_2$ un morphisme de $\boldsymbol{S}$-schémas de morphismes structuraux $f_i : \boldsymbol{X}_i \to \boldsymbol{S}$. Le morphisme $g^\# : \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}_2} \to g_*\big(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}_1}\big)$ est un morphisme de $f_2^{-1}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})$-algèbres puisque $f_2 \circ g = f_1$; il induit, par conséquent, un morphisme canonique de faisceaux d'algèbres différentielles de $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}_2/\boldsymbol{S}} \to g_*\big(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}_1/\boldsymbol{S}}\big)$ et donc une application canonique en hypercoholomogie $\mathbb{H}^r\big(\boldsymbol{X}_2\,; \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}_2/\boldsymbol{S}}\big) \to \mathbb{H}^r\big(\boldsymbol{X}_2\,; g_*(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}_1/\boldsymbol{S}})\big)$ dont la composée avec l'application canonique $\mathbb{H}^r\big(\boldsymbol{X}_2\,; g_*(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}_1/\boldsymbol{S}})\big) \to \mathbb{H}^r\big(\boldsymbol{X}_1\,; \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}_1/\boldsymbol{S}}\big)$ donne un morphisme d'anneaux gradués :

$$\boxed{H^*_{\mathrm{DR}}(g) : H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_2/\boldsymbol{S}) \to H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1/\boldsymbol{S})}$$

appelée « *image inverse* ».

La proposition suivante est laissée en exercice.

3.1.4. Proposition : *La correspondance de la catégorie des $\boldsymbol{S}$-schémas vers la catégorie d'anneaux gradués alternés qui fait correspondre à un $\boldsymbol{S}$-schéma $\boldsymbol{X}$ l'anneau $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S})$ et à un morphisme de $\boldsymbol{S}$-schémas $g : \boldsymbol{X}_1 \to \boldsymbol{X}_2$ l'homomorphisme gradué* «image inverse» *$H^*_{\mathrm{DR}}(g)$, est fonctorielle et contravariante.*

3.2 Quasi-cohérence du complexe de de Rham relatif

Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif arbitraire et $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre, notons $\nu : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{A}$ l'homomorphisme structural $r \mapsto r \cdot \mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$. Le schéma affine $\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est considéré muni de sa structure de schéma de base $\boldsymbol{S} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$ induite par ν. Pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, le morphisme de restriction $\rho^{\boldsymbol{X}}_{U} : \boldsymbol{A} \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U)$ induit un morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres $\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}(U)$ qui se prolonge, pour chaque $r \in \mathbb{N}$, en un morphisme de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U)$-modules $\rho(U)_r : \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}(U) \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^r_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}(U)$. Comme ces constructions sont naturelles par rapport à U, on obtient un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules

$$\underline{\rho} : \widetilde{\Omega}^r_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}} \tag{$\diamond$}$$

qui se voit au niveau des germes en chaque $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ comme l'application canonique :

$$\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^r_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega^r_{\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}/\boldsymbol{R}_{\nu^{-1}(\mathfrak{P})}} .$$

Cette application est bijective d'après le théorème 2.2.2 et le morphisme ($\diamond$) est un ***isomorphisme*** de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules. Par conséquent, le $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module $\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}$ est quasi-cohérent. Ces remarques constituent l'essentiel de la démonstration du théorème suivant.

3.2.1. Théorème : *Soit $\boldsymbol{X}$ un $\boldsymbol{S}$-schéma de morphisme structural $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$.*

a) *Supposons les schémas $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{S}$ affines : $\boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et $\boldsymbol{S} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$. On considère la structure de $\boldsymbol{R}$-algèbre sur $\boldsymbol{A}$ définie par le morphisme f. Alors :*

1) *On a des isomorphismes canoniques et naturelles pour tout $r \in \mathbb{N}$:*

$$\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}} \equiv \widetilde{\Omega^r_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}} \equiv \textstyle\bigwedge^r_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}} \widetilde{\Omega}_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} .$$

2) *La cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{X}$ relative à $\boldsymbol{S}$ est isomorphe à la **cohomologie** du complexe de de Rham $\big(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},*}\big)$. Autrement dit, pour chaque $r \in \mathbb{N}$, l'application canonique :*

$$H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}) \longrightarrow \mathbb{H}^r\big(\boldsymbol{X}; \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}\big) =: H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S})$$

est bijective.

b) *Pour chaque $r \in \mathbb{N}$, le $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module $\underline{\Omega}^r_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}$ est quasi-cohérent et il est cohérent lorsque $\boldsymbol{X}$ est localement de présentation finie sur $\boldsymbol{S}$.*

3.3 Propriétés élémentaires du complexe de de Rham relatif

3.3.1. Théorème : *Soient $\boldsymbol{S}$ un schéma et $\boldsymbol{X}$ un $\boldsymbol{S}$-schéma.*

a) *Soit $f : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ un plongement ouvert de $\boldsymbol{S}$-schémas. Alors*

$$\boxed{\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{S}} \equiv f^*\big(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}\big)} \qquad \text{(restricion ouverte)} \quad (25)$$

b) *Soit $g : \boldsymbol{S}' \to \boldsymbol{S}$ un morphisme de schémas et notons $\bar{g} : \boldsymbol{S}' \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ le morphisme induit sur le produit fibré. Alors*

$$\boxed{\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{S}'\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}'} \equiv \bar{g}^*\big(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}\big)} \qquad \text{(changement de base)} \quad (26)$$

c) *Soit $\boldsymbol{X}'$ un $\boldsymbol{S}$-schéma et notons $p : \boldsymbol{X}' \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ et $p' : \boldsymbol{X}' \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}'$ les projections canoniques. Alors*

$$\boxed{\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}'\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}} \equiv p^*\big(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}\big) \otimes_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{X}'}} p'^*\big(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}\big)} \qquad \text{(produit fibré)} \quad (27)$$

Démonstration : Ces propriétés se vérifient localement où elles sont des corollaires de la quasi-cohérence 3.2.1 et des leurs analogues dans le cas des algèbres (*cf.* 2.2.2). ∎

Les propositions suivantes sont laissées en exercice.

3.3.2. Proposition : *Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ un morphisme de schémas de base $\boldsymbol{S}$. La suite canonique de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules :*

$$f^*\big(\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{S}}\big) \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}} \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{Y}} \to \mathbf{0}$$

est exacte.

3.3.3. Proposition : *Soit $\jmath : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ une immersion de $\boldsymbol{S}$-schémas. Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux de définition de $\boldsymbol{Y}$ en tant que sous-schéma de $\boldsymbol{X}$. La suite canonique de faisceaux de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$-modules :*

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \jmath^*\big(\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}\big) \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{S}} \to \mathbf{0}$$

est exacte.

§4. Schémas et algèbres lisses

4.1 Rappels d'algèbre locale

Dans cette section de rappels on désigne par $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire (non nécessairement nœthérien) et pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\boldsymbol{A}$, le corps résiduel de l'anneau local $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$ sera noté $k(\mathfrak{P}) := \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$.

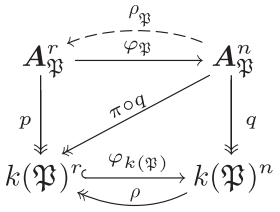
4.1.1. Lemme : *Soient $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire et $\varphi : \boldsymbol{A}^r \to \boldsymbol{A}^n$ un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules. Supposons qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\boldsymbol{A}$ tel que le morphisme induit :*

$$k(\mathfrak{P})^r \xhookrightarrow{\varphi_{k(\mathfrak{P})}} k(\mathfrak{P})^n$$

*est **injectif**. Alors, il existe un élément $f \in \boldsymbol{A}$ tel que $\mathfrak{P} \in D(f)$ et tel que le morphisme induit $\varphi_f : \boldsymbol{A}_f^r \to \boldsymbol{A}_f^n$ est une injection admettant un inverse à gauche et $\operatorname{coker}(\varphi_f)$ est un $\boldsymbol{A}_f$-module projectif de type fini.*

En particulier, pour tout $\mathfrak{Q} \in D(f)$ le morphisme $\varphi_{k(\mathfrak{Q})} : k(\mathfrak{Q})^r \to k(\mathfrak{Q})^n$ est injectif.

Démonstration : On considère le diagramme commutatif :



où p et q désignent les surjections induites par la surjection canonique $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \twoheadrightarrow k(\mathfrak{P})$. On fixe alors une « *rétraction* » ρ de $\varphi_{k(\mathfrak{P})}$, *i.e.* une application $k(\mathfrak{P})$-linéaire $\rho : k(\mathfrak{P})^n \to k(\mathfrak{P})^r$ telle que $\rho \circ \varphi_{k(\mathfrak{P})} = \mathrm{id}$, ce qui est possible puisque $\varphi_{k(\mathfrak{P})}$ est une injection de $k(\mathfrak{P})$-espaces vectoriels. L'application composée $\rho \circ q$ est alors une surjection de $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$-modules et comme sa source est libre, elle admet un relèvement en un morphisme de $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$-modules $\rho_{\mathfrak{P}} : \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^n \to \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^r$. Mais alors $\rho \circ \varphi_{k(\mathfrak{P})} = \mathrm{id}$ et $\det(\rho_{\mathfrak{P}} \circ \varphi_{\mathfrak{P}}) = 1 \bmod (\mathfrak{P}\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}})$, en particulier $\det(\rho_{\mathfrak{P}} \circ \varphi_{\mathfrak{P}})$ est inversible dans l'anneau local $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$ et $\Xi := \rho_{\mathfrak{P}} \circ \varphi_{\mathfrak{P}}$ est un isomorphisme de $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^r$. Quitte à remplacer $\rho_{\mathfrak{P}}$ par $\Xi^{-1} \circ \rho_{\mathfrak{P}}$, nous pouvons supposer dans la suite que $\rho_{\mathfrak{P}}$ est une rétraction de $\varphi_{\mathfrak{P}}$.

Ceci étant, on observe que pour chaque vecteur $\mathbf{e}_i$ de la base canonique de $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^n$, on a des éléments $\{s_{i,1}, \ldots, s_{i,r}\}$ *n'appartenant pas* à $\mathfrak{P}$ tels que le vecteur $\rho_{\mathfrak{P}}(\mathbf{e}_i)$ de $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^r$ s'écrit :

$$\rho_{\mathfrak{P}}(\mathbf{e}_i) = \left(\frac{a_{i,1}}{s_{i,1}}, \ldots, \frac{a_{i,r}}{s_{i,r}}\right) \qquad (*)$$

avec $a_{i,j} \in \boldsymbol{A}$. Notons maintenant $g = \prod_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r} s_{i,j}$; on a $g \notin \mathfrak{P}$ et chaque $s_{i,j}$ est inversible dans $\boldsymbol{A}_g$. Le terme de droite de $(*)$ a donc un sens sur $\boldsymbol{A}_g^r$ et permet de définir un relèvement ρ_g de $\rho_{\mathfrak{P}}$, on obtient de cette manière le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{A}_g^r & \xrightarrow{\varphi_g} & \boldsymbol{A}_g^n & \xrightarrow{\rho_g} & \boldsymbol{A}_g^r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^r & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{P}}} & \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^n & \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{P}}} & \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^r \end{array} \qquad (**)$$

où les applications verticales sont induites par l'homomorphisme canonique $\nu_{g,\mathfrak{P}} : \boldsymbol{A}_g \to \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$.

Notons $[\,t_{i,j}\,]$ la matrice de $\rho_g \circ \varphi_g$ relative à la base canonique de $\boldsymbol{A}_g^r$. Comme $\rho_{\mathfrak{P}} \circ \varphi_{\mathfrak{P}} = \mathrm{id}$, on a $\nu_{g,\mathfrak{P}}(t_{i,i}) = 1$ et $\nu_{g,\mathfrak{P}}(t_{i,j}) = 0$ lorsque $i \neq j$. Il existe alors des éléments $s'_{i,j} \notin \mathfrak{P}$ tels

que $s'_{i,i}(t_{i,i}-1)=0$ et $s'_{i,j}\,t_{i,j}=0$ lorsque $i\neq j$; en particulier l'élément $f=s(\prod s_{i,j})$ vérifie $f\notin\mathfrak{P}$, le diagramme $(**)$ se factorise en :

$$\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{A}_g^r & \xrightarrow{\varphi_g} & \boldsymbol{A}_g^n & \xrightarrow{\rho_g} & \boldsymbol{A}_g^r \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\boldsymbol{A}_f^r & \xrightarrow{\varphi_f} & \boldsymbol{A}_f^n & \xrightarrow{\rho_f} & \boldsymbol{A}_f^r \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^r & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{P}}} & \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^n & \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{P}}} & \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^r
\end{array}$$

et $\rho_f\circ\varphi_f=\mathrm{id}$; de sorte que ρ_f est une rétraction de φ_f. ∎

4.1.2. Lemme : *Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau arbitraire et considérons pour un $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ les assertions suivantes :*

1) *$\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{A}$-module projectif.*
2) *Pour tout idéal premier $\mathfrak{P}\subseteq\boldsymbol{A}$ il existe $f\notin\mathfrak{P}$ tel que $\boldsymbol{M}_f$ est un $\boldsymbol{A}_f$-module libre.*
3) *Pour tout idéal premier $\mathfrak{P}\subseteq\boldsymbol{A}$ le localisé $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{P}}$ est un $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$-module libre.*

Alors

a) *Lorsque $\boldsymbol{M}$ est **de type fini**, on a $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)$.*

b) *Lorsque $\boldsymbol{M}$ est **de présentation finie**, on a $(1)\Leftrightarrow(2)\Leftrightarrow(3)$.*

Démonstration :

a) Comme $\boldsymbol{M}$ est projectif de type fini, on a $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{M}\oplus\boldsymbol{N}$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$ et un certain $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{N}$.

Soit maintenant $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\boldsymbol{A}$ et notons $\mathcal{B}:=\{m_1,\dots,m_r\}$ un ensemble fini d'éléments de $\boldsymbol{M}$ tel que $\{\mathbf{1}\otimes m_1,\dots,\mathbf{1}\otimes m_r\}$ est une base de $k(\mathfrak{P})\otimes_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M}$, notons $\langle\mathcal{B}\rangle$ le sous-$\boldsymbol{A}$-module de $\boldsymbol{M}$ engendré par $\mathcal{B}$.

L'homomorphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\varphi:\boldsymbol{A}^r\to\boldsymbol{M}\subseteq\boldsymbol{A}^n$ défini par $\varphi(\mathbf{e}_i):=m_i$ satisfait, par construction, aux hypothèses du lemme 4.1.1, il existe donc $g\notin\mathfrak{P}$ tel que $\varphi_g:\boldsymbol{A}_g^r\to\boldsymbol{A}_g^n$ est injective. Il existe d'autre part, $g'\notin\mathfrak{P}$ tel que $\langle\mathcal{B}\rangle_{g'}=\boldsymbol{M}_{g'}$ puisque le $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$-module $(\boldsymbol{M}/\langle\mathcal{B}\rangle)_{\mathfrak{P}}$ est nul étant de type fini et de réduction à $k(\mathfrak{P})$ nulle (Nakayama). Comme $\langle\mathcal{B}\rangle=\mathrm{im}(\varphi)$, on conclut que l'application $\varphi_f:\boldsymbol{A}_f^r\to\boldsymbol{A}_f^n$ est un isomorphisme sur $\boldsymbol{M}_f$ lorsque $f=gg'$.

b) Pour toute surjection de $\boldsymbol{A}$-modules $\alpha:\boldsymbol{N}_1\twoheadrightarrow\boldsymbol{N}_2$ nous devons prouver que le morphisme induit

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M},\alpha):\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}_1)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}_2)$$

est surjectif et ceci équivaut à ce que, pour tout idéal premier $\mathfrak{P}\subseteq\boldsymbol{A}$, l'application induite :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}_1)\otimes_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}_2)\otimes_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}\qquad(\ddagger)$$

est surjective. En effet, dans un tel cas les localisés du conoyau $\boldsymbol{K}$ de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M},\alpha)$ sont tous nuls et comme l'application canonique $\boldsymbol{K}\to\prod_{\mathfrak{P}\in\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{K}_{\mathfrak{P}}$ est injective la nullité de

$\boldsymbol{K}$ en découle. Or, pour chaque $\boldsymbol{N} \in \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$, on dispose de la transformation naturelle canonique :

$$\eta(_) : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(_, \boldsymbol{N}) \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}\big(_, \boldsymbol{N} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}\big)$$

qui relie deux foncteurs exacts à droite et est telle que $\eta(\boldsymbol{L})$ est un isomorphisme pour tout $\boldsymbol{L}$ libre de rang fini. Il en découle que $\eta(\boldsymbol{L})$ est bijectif pour tout $\boldsymbol{L}$ de ***présentation finie***. En particulier (‡) est surjective, si et seulement si,

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}\big(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}_1 \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}\big(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}_2 \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}\big)$$

est surjective, autrement dit, si et seulement si :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}}\big(\boldsymbol{M}_{\mathfrak{P}}, \boldsymbol{N}_{1,\mathfrak{P}}\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}}\big(\boldsymbol{M}_{\mathfrak{P}}, \boldsymbol{N}_{2,\mathfrak{P}}\big)$$

est surjective, puisque $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(_, \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \otimes (_))$ et $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}}(\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \otimes (_), \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \otimes (_))$ canoniquement isomorphes. Ceci termine la démonstration de l'implication (3) $\Rightarrow$ (1) car $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{P}}$ est libre. ∎

4.1.3. Corollaire : *Soient $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire et $\varphi : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{A}^n$ un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules où $\boldsymbol{M}$ admet un système à r générateurs $\{m_1, \ldots, m_r\}$ tel que, pour tout idéal premier $\mathfrak{P} \subseteq \boldsymbol{A}$, le système $\{\mathbf{1}_{k(\mathfrak{P})} \otimes \varphi(m_1), \ldots, \mathbf{1}_{k(\mathfrak{P})} \otimes \varphi(m_r)\}$ est libre dans $k(\mathfrak{P})^n$. Alors $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{A}$-module libre de rang r et φ est une injection qui admet un inverse à gauche (une rétraction).*

Démonstration : Soit $\mu : \boldsymbol{A}^r \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}$ l'endomorphisme qui fait correspondre $\mathbf{e}_i \mapsto m_i$. L'application $\varphi \circ \mu : \boldsymbol{A}^r \to \boldsymbol{A}^m$ vérifie les hypothèses du lemme 4.1.1 et par conséquent $\varphi \circ \mu$ est localement injectif, autrement dit, pour tout idéal premier $\mathfrak{P} \subseteq \boldsymbol{A}$, $\ker(\varphi \circ \mu)_{\mathfrak{P}} = \mathbf{0}$. Il s'ensuit que $\ker(\varphi \circ \mu) = \mathbf{0}$ et donc μ est bijective et φ est injective.

Le lemme 4.1.1 nous dit également que $\mathrm{coker}(\varphi)$ est localement projectif puisque chaque $\varphi_{\mathfrak{P}}$ admet une rétraction et la démonstration du lemme précédent montre aussi que « *localement projectif* » et « *projectif* » sont des propriétés équivalentes, donc $\mathrm{coker}(\varphi)$ est projectif et φ admet une rétraction. ∎

4.1.4. Corollaire : *Soient $\boldsymbol{A}$ un anneau arbitraire et $\boldsymbol{J} \xrightarrow{\partial} \boldsymbol{A}^n \to \boldsymbol{M} \to \mathbf{0}$ (†) une suite exacte à droite de $\boldsymbol{A}$-modules où $\boldsymbol{J}$ est un $\boldsymbol{A}$-module de type fini admettant un système de générateurs à $n - r$ éléments $(r \leqslant n)$. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\boldsymbol{A}$ tel que :*

$$\begin{cases} \dim_{k(\mathfrak{P})}\big(k(\mathfrak{P}) \otimes \boldsymbol{J}\big) = n - r & \text{et} \\ 1 \otimes \partial : k(\mathfrak{P}) \otimes \boldsymbol{J} \to k(\mathfrak{P})^n & \text{est une injection.} \end{cases}$$

Il existe alors $f \notin \mathfrak{P}$ tel que $\boldsymbol{J}_f \simeq \boldsymbol{A}_f^{n-r}$, $\boldsymbol{M}_f \simeq \boldsymbol{A}_f^r$ et la suite : $\mathbf{0} \to \boldsymbol{J}_f \xrightarrow{1 \otimes \partial} \boldsymbol{A}_f^n \to \boldsymbol{M}_f \to \mathbf{0}$ induite par (†) est exacte et scindée.

Démonstration : Soit $\{g_{r+1},\dots,g_n\}$ un système de générateurs de $\boldsymbol{J}$ et considérons la surjection de $\boldsymbol{A}$-modules $\psi : \boldsymbol{A}^{n-r} \twoheadrightarrow \boldsymbol{J}$ définie par $\psi(\mathbf{e}_i) = g_{r+i}$. Alors la composée $\psi\circ\partial$ satisfait aux hypothèses du lemme 4.1.1 et par conséquent la suite :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A}_g^{n-r} \xrightarrow{\mathbf{1}_g\otimes\partial\circ\psi} \boldsymbol{A}_g^{n} \longrightarrow \boldsymbol{M}_g \to \mathbf{0} \qquad (\ddagger)$$

est exacte et scindée pour un certain $g\notin\mathfrak{P}$. Dans ce cas, $\boldsymbol{M}_g$ est un $\boldsymbol{A}_g$-module de présentation finie et projectif (puisque facteur direct de $\boldsymbol{A}_g^n$) et l'on peut appliquer le lemme 4.1.2. Il existe donc $g'\notin\mathfrak{P}$ tel que $\boldsymbol{M}_{gg'}$ est un $\boldsymbol{A}_{gg'}$-module libre. Posons $f=gg'$. En tensorisant la suite $(\ddagger)$ par $\boldsymbol{A}_f$, elle reste scindée. On remarque pour terminer que comme ψ est surjective $\mathbf{1}_f\otimes\psi$ l'est également et cette dernière établit un isomorphisme entre $\boldsymbol{A}_f^{n-r}$ et $\boldsymbol{J}_f$, d'autre part $\boldsymbol{M}_f\simeq\boldsymbol{A}_f^r$ puisque $\dim_{k(\mathfrak{P})}(k(\mathfrak{P})\otimes\boldsymbol{M})=r$. ∎

Voici maintenant deux énoncés bien connus et conséquences faciles de ce qui précède.

4.1.5. Lemme : *Sur un anneau local un module de type fini est projectif, si et seulement si, il est libre.*

4.1.6. Lemme : *Sur un anneau nœthérien un module de type fini est projectif, si et seulement si, il est localement libre.*

4.2 Lissité dans les morphismes de schémas

4.2.1. Définition : Un morphisme de schémas $f : \boldsymbol{X}\to\boldsymbol{S}$ est dit «*lisse au point* $x\in\boldsymbol{X}$ (*de dimension relative* r)» s'il existe un voisinage ouvert $U\ni x$ et une $\boldsymbol{S}$-immersion $\jmath : U\hookrightarrow\mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}$ de U dans un espace linéaire $\mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}$ sur $\boldsymbol{S}$, tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

L-(a) Localement en $y:=\jmath(x)$, le faisceau des idéaux de définition de $\jmath(U)$, en tant que sous-schéma de $\mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}$, est engendré par $(n-r)$ sections $g_{r+1},\dots,g_n$; et

L-(b) l'ensemble $\{dg_{r+1},\dots,dg_n\}$ est linéairement indépendant dans $\underline{\Omega}^1_{\mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}/\boldsymbol{S}}\otimes k(y)$.

Le morphisme $f : \boldsymbol{X}\to\boldsymbol{S}$ est dit «*lisse*» lorsqu'il est lisse en chaque point de $\boldsymbol{X}$, et il est dit «*étale*» s'il est lisse et de dimension relative nulle en chaque point de $\boldsymbol{X}$.

Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau et $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre, on dira que «$\boldsymbol{A}$ *est lisse (resp. étale)*» lorsque le morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})\to\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$ induit par l'homomorphisme (structural) d'anneaux $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{A}$, $r\mapsto r\cdot\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$, est lisse (resp. étale). Plus généralement, un morphisme d'anneaux $\alpha : \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{A}$ sera dit «*lisse*» lorsque $\mathrm{Spec}(\alpha) : \mathrm{Spec}(\boldsymbol{B})\to\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$ est un morphisme lisse.

4.2.2. Remarque : On observera le caractère local de cette définition qui fait que quels que soient les sous-schémas ouverts $V\subseteq\boldsymbol{X}$ et $U\subseteq\boldsymbol{S}$ vérifiant $y\in V$ et $f(V)\subseteq U$, le morphisme f est lisse en y, si et seulement si, $f|$ est lisse en y, où $f| : V\to U$ désigne la restriction de f. En particulier, on peut prendre pour U et V des schémas affines. Il est d'autre part évident qu'un point lisse d'un morphisme appartient à un ouvert au-dessus de $\boldsymbol{S}$ qui est de présentation finie. Ceci explique pourquoi l'hypothèse pour un morphisme de schémas d'être ***localement de présentation finie*** est souvent explicite dans la définition même de la lissité de morphismes.

4.2.3. Remarque : D'après la définition, une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse est toujours localement de présentation finie. Or, une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ localement de présentation finie est également globalement de présentation finie, *i.e.* quotient d'une algèbre de polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$ et à un nombre fini de variables par un idéal de type fini (*cf.* [EGA$_1$] prop. 6.2.9 p. 302). On prendra garde du fait que ceci signifie uniquement que $\boldsymbol{A}$ admet des présentations finies et non pas que tout morphisme surjectif de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$, où $\mathcal{X}$ désigne une liste finie de variables, est à noyau de type fini (à moins bien entendu que $\boldsymbol{R}$ soit nœthérien). Nous rappelons à continuation une démonstration élémentaire de cette assertion.

4.2.3.1. Proposition : *Soit $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif avec identité pour le produit. Toute $\boldsymbol{R}$-algèbre localement de présentation finie est globalement de présentation finie.*

En particulier, toute $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse est globalement de présentation finie.

Démonstration : Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre localement de présentation finie. Par quasi-compacité, il existe une famille finie $\{f_1, \ldots, f_r\}$ d'éléments de $\boldsymbol{A}$ tels que $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}) = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_r)$ $(*)$, et tels que chaque localisation $\boldsymbol{A}_{f_i}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation finie. On fixe dans la suite une telle famille et l'on note $\nu_i : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_{f_i}$ l'homomorphisme canonique.

Pour chaque $i = 1, \ldots, r$, il existe alors un entier positif ou nul m_i, que l'on pourra choisir aussi grand que l'on veut, et des éléments $a_{i,1}, \ldots, a_{i,s_i}$ de $\boldsymbol{A}$, tels que l'homomorphisme $\psi_i : \boldsymbol{R}[\overline{X}_i] \to \boldsymbol{A}_{f_i}$, où $\overline{X}_i$ désigne la liste de variables $X_{i,1}, \ldots, X_{i,s_i}$, défini par $X_{i,j} \mapsto a_{i,j}/f_i^{m_i}$, est surjectif de noyau un idéal $\mathcal{K}_i \subseteq \boldsymbol{R}[\overline{X}_i]$ de type fini.

Comme il n'y a qu'un nombre fini d'éléments f_i, nous pouvons, sans perte de généralité, supposer les m_i égaux à un même entier M (il suffit en effet de prendre $M := \sup\{m_i\}$ quitte à modifier les $a_{i,j}$). On fixe pour la suite un choix de tels éléments $a_{i,j}$ dont on désignera par $\bar{a}_i$ la liste des éléments $a_{i,1}, \ldots, a_{i,s_i}$.

Il s'ensuit que pour chaque $b \in \boldsymbol{A}$ et chaque i, il existe un polynôme $P(b)_i \in \boldsymbol{R}[\overline{X}_i]$, tel que $\nu_i(b) = \psi_i\big(P(b)_i\big)$ dans $\boldsymbol{A}_{f_i}$. On en déduit que pour chaque i, il existe un élément $Q(b)_i \in \boldsymbol{R}[\bar{a}_i, f_i] \subseteq \boldsymbol{A}$ et un entier $n_i \in \mathbb{N}$ tels que $b\, f_i^{n_i} = Q(b)_i$ dans $\boldsymbol{A}$. Encore une fois, comme la famille des n_i est finie, nous pouvons remplacer les n_i par un même entier N (en prenant leur sup et modifiant les $Q(b)_i$ en conséquence). On a alors :

$$b\, f_i^N = Q(b)_i \in \boldsymbol{R}[\bar{a}_i, f_i] \subseteq \boldsymbol{A}\,, \text{ pour tout } i = 1, \ldots, r. \qquad (\dagger)$$

Ceci étant, la condition $(*)$ équivaut à $\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}} \in \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_r \rangle}$, de sorte qu'il existe des éléments $h_i \in \boldsymbol{A}$ (ne dépendant que des f_i), tels que $1 = h_1 f_1 + \cdots + h_r f_r$ et une puissance suffisamment grande de $h_1 f_1 + \cdots + h_r f_r$ fournit une décomposition $1 = H_1 f_1^N + \cdots + H_r f_r^N$ où $H_i \in \boldsymbol{R}[f_1, h_1, \ldots, f_r, h_r]$. On a alors :

$$b = bH_1 f_1^N + \cdots + bH_r f_r^N = H_1 Q(b)_1 + \cdots + H_r Q(b)_r$$

d'après $(\dagger)$, et $b \in \boldsymbol{R}[\bar{a}_1, f_1, h_1, \ldots, \bar{a}_r, f_r, h_r] \subseteq \boldsymbol{A}$. La $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est par conséquent **globalement** de type fini.

Pour chaque $i = 1, \ldots, r$, notons $\overline{W}_i$ la liste de variables $W_{i,1}, \ldots, W_{i,s_i}$ et considérons l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}[\overline{W}_1, Y_1, Z_1, \ldots, \overline{W}_r, Y_r, Z_r] &\xrightarrow{\ \psi\ } \boldsymbol{A} \\ W_{i,j}, Y_i, Z_i &\longmapsto a_{i,j}, f_i, h_i \end{aligned}$$

qui est surjectif d'après l'étude qui précède. Montrons que son noyau $\mathcal{K}$ est un idéal de type fini de $\boldsymbol{R}[\overline{W}_1, Y_1, Z_1, \ldots, \overline{W}_r, Y_r, Z_r]$.

En localisant par Y_i, on obtient une surjection :

$$\boldsymbol{R}[\overline{W}_1, Y_1, Z_1, \ldots, \overline{W}_r, Y_r, Z_r]_{Y_i} \xrightarrow{\psi_{Y_i}} \boldsymbol{A}_{f_i}$$

dont la restriction à la sous-algèbre $\boldsymbol{R}\big[\overline{W}_i/Y_i^M\big]$ est surjective de noyau $\mathcal{K}_i$, engendré par un nombre fini d'éléments en raison des choix initiaux. Nous pouvons donc choisir des éléments $y_i, z_i, w_{i,j} \in \boldsymbol{R}\big[\overline{W}_i/Y_i^M\big]$ vérifiant $\psi_{Y_i}(Y_i) = \psi_{Y_i}(y_i)$, $\psi_{Y_i}(Z_i) = \psi_{Y_i}(z_i)$ et $\psi_{Y_i}(W_{i,j}) = \psi_{Y_i}(w_{i,j})$. Il est alors aisé de voir que l'idéal $\ker(\psi_{Y_i})$ est engendré par $\mathcal{K}_i$ et par les différences $Y_i - y_i$, $Z_i - z_i$, $W_{i,j} - w_{i,j}$. Notons ξ l'élément de $\mathcal{K}$ donné par $(1 - Z_1Y_1 - \cdots - Z_rY_r)$ et notons $\boldsymbol{A}'$ le quotient de $\boldsymbol{R}[\overline{W}_1, Y_1, Z_1, \ldots, \overline{W}_r, Y_r, Z_r]$ par l'idéal principal $\langle\xi\rangle$. L'application ψ induit alors un morphisme surjectif de $\boldsymbol{A}'$ sur $\boldsymbol{A}$ et ce qui précède montre que la restriction du $\boldsymbol{A}'$-module $\mathcal{K}/\langle\xi\rangle$ à chaque ouvert $D(Y_i)$ est de type fini. Comme $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}') = D(Y_1) \cup \cdots \cup D(Y_r)$, on conclut que $\mathcal{K}/\langle\xi\rangle$ et donc $\mathcal{K}$ est de type fini, ce qui termine la démonstration de la proposition. ∎

4.2.3.2. Exercice : Montrer de manière analogue que tout $\boldsymbol{R}$-module localement de présentation finie est globalement de présentation finie. (Voir [B$_2$] II.§5.3 cor. prop. 3, p. 109.)

4.2.3. Étude locale de la lissité d'un morphisme. Nous allons nous intéresser à la lissité dans la situation où $\boldsymbol{S} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et où $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation finie, *i.e.* le quotient de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}] := \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n]$ par un idéal ***de type fini*** $\boldsymbol{I} = \langle g_{n-r}, \ldots, g_n\rangle$. Nous nous intéresserons donc aux données *locales* de la définition 4.2.1.

D'après la proposition 1.3.1, nous avons la première suite fondamentale exacte à droite :

$$\boldsymbol{I}/\boldsymbol{I}^2 \xrightarrow{\partial} \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

où le terme central est un $\boldsymbol{A}$-module libre de rang n puisque :

$$\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \Big(\bigoplus\nolimits_{i=1,\ldots,n} \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\, dX_i\Big) \equiv \bigoplus\nolimits_{i=1,\ldots,n} \boldsymbol{A}\, dX_i\ ,$$

et où $\boldsymbol{I}/\boldsymbol{I}^2$ est engendré par les $n-r$ éléments : $\bar{g}_{n-r}, \ldots, \bar{g}_n$.

On aura remarqué que lorsque un point $\mathfrak{P}$ de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est lisse et de dimension relative r au-dessus de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$ les hypothèses du corollaire 4.1.4 sont satisfaites et par conséquent tout point $\mathfrak{Q}$ dans un voisinage de $\mathfrak{P}$ sera lui-aussi lisse de dimension relative r. Nous pouvons donc supposer dans ce qui suit que c'est le cas pour tout $\mathfrak{Q} \in \mathrm{Spec}\boldsymbol{A}$ (ce qui est possible quitte à localiser $\boldsymbol{A}$). Dans ce cas, tout point de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est lisse au-dessus de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$ et le morphisme ∂ de $(*)$ est injectif, puisque localement injectif. La suite courte :

$$\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{I}/\boldsymbol{I}^2 \xrightarrow{\partial} \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{0} \qquad (**)$$

est alors exacte avec $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ de présentation finie et localement libre, donc projectif d'après 4.1.2. La suite de $\boldsymbol{A}$-modules $(**)$ est donc scindée.

Ces remarques prouvent la proposition suivante :

4.2.4. Proposition : *Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ un morphisme de schémas localement de présentation finie.*

a) *L'ensemble* $\mathrm{Lisse}(f)$ *des points lisses pour f est un ouvert de $\boldsymbol{X}$.*

b) *La restriction du faisceau des* 1*-formes différentielles relatives* $\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}$ *à* $\mathrm{Lisse}(f)$*, est localement libre de rang localement constant.*

c) *Le complexe de de Rham* $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}|_{\mathrm{Lisse}(f)}$ *est localement libre et* $\underline{\Omega}^m_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}|_{\mathrm{Lisse}(f)}$ *est nul lorsque* m *majore strictement les dimensions relatives de* $f|_{\mathrm{Lisse}(f)}$*.*

d) *Soit* $x \in \mathrm{Lisse}(f)$ *et* $\jmath : U \to \mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}$ *une* $\boldsymbol{S}$*-immersion de la définition* 4.2.1*. Notons* $\mathcal{I}$ *l'idéal de définition de* $\jmath(U)$ *; la suite*

$$\mathbf{0} \to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \jmath^*\underline{\Omega}^1_{\mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}/\boldsymbol{S}} \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{U/\boldsymbol{S}} \to \mathbf{0}$$

est exacte et localement scindée.

4.2.5. Remarque et exercice : On prendra garde du fait que l'ensemble $\mathrm{Lisse}(f)$ peut être vide. Prouvez que pour le morphisme structural $h : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p[X]/(X^p)$, on a $\mathrm{Lisse}(\mathrm{Spec}(h)) = \varnothing$.

4.2.6. Conditions locales de lissité. Les données du paragraphe précédent sont toujours en vigueur. On se donne donc une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse de dimension relative r et une présentation finie $\mathbf{0} \to \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n] \to \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}$ où l'idéal $\boldsymbol{J}$ admet $n - r$ générateurs vérifiant les conditions de la définition 4.2.1 en tout point de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$.

4.2.7. Proposition : *Sous ces conditions, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\boldsymbol{A}$ *est une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre lisse.*

b) *La première suite fondamentale de* $\boldsymbol{A}$*-modules :*

$$\mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \xrightarrow{\partial} \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \mathbf{0} \tag{28}$$

est exacte et scindée.

c) *Le* $\boldsymbol{A}$*-module* $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ *est projectif et* ∂ *est injective.*

c') ∂ *admet des rétractions (locales).*

d) *Soient* $\boldsymbol{B}$ *une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre et* $\boldsymbol{I}$ *un idéal dans* $\boldsymbol{B}$*, notons* $\pi : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}$ *la projection canonique. Alors, lorsque* $\boldsymbol{I}^2 = \mathbf{0}$ *(resp.* $\boldsymbol{I}$ *est nilpotent), l'application entre les ensembles d'homomorphismes de* $\boldsymbol{R}$*-algèbres :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) & \longrightarrow & \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}) \\ \varphi & \longmapsto & \pi \circ \varphi \end{array}$$

est surjective.

Démonstration : L'implication (a)⇒(b) a déjà été établie dans le paragraphe précédent. Lorsque (b) est satisfaite le $\boldsymbol{A}$-module $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est projectif puisque facteur direct du module libre $\oplus_i \boldsymbol{A}\, dX_i$ et (c) résulte. Réciproquement, lorsque (c) est vérifiée la suite (28) est exacte et scindée puisque son terme de droite est projectif et (b)⇔(c). Les équivalences (c)⇔(c') découlent du corollaire 4.1.4.

(b)⇒(a). Lorsque la suite (28) est scindée chacune de ses extrémités est un $\boldsymbol{A}$-module projectif de type fini (et même de présentation finie) et nous avons affaire à des $\boldsymbol{A}$-modules

localement libres (*cf.* 4.1.2) ; en particulier pour chaque $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ on peut localiser les données de la proposition et nous pouvons rajouter à (c) le fait que $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ est $\Omega^1_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ sont tous les deux des $\boldsymbol{A}$-modules libres. Soit maintenant $\{g_{r+1}, \dots, g_n\}$ une famille d'éléments de $\boldsymbol{J}$ tels que leurs classes modulo $\boldsymbol{J}^2$ définissent une *base* de $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$. Notons $\boldsymbol{J}' := \langle g_{r+1}, \dots, g_n\rangle \subseteq \boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{A}' := \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{J}'$. On a l'égalité $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^2 + \boldsymbol{J}'$ dont on déduit $\mathfrak{Q}\cdot(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}') = (\mathfrak{Q}\cdot\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}')/\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}'$ pour tout idéal $\mathfrak{Q} \subseteq \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ contenant $\boldsymbol{J}$. En particulier, lorsque $\mathfrak{Q}$ est l'image inverse de $\mathfrak{P}$ par la surjection canonique $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$, on a $(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}')_{\mathfrak{Q}} = \boldsymbol{0}$ par Nakayama, et il existe $f \notin \mathfrak{Q}$ tel que $(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}')_f = \boldsymbol{0}$. Ces remarques montrent que sur le voisinage principal $\mathfrak{Q} \in D(f) \subseteq \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R}[\mathcal{X}])$, l'idéal $\boldsymbol{J}$ est bien engendré par $n-r$ éléments dont les différentielles sont linéairement indépendantes (au point $\mathfrak{P}$) ; les conditions de lissité (de dimension relative r) sont donc bien remplies pour $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$.

(b)⇒(d). Soit $\varphi' \in \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I})$ et considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{J} & \hookrightarrow & \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] & \xrightarrow{\pi} & \boldsymbol{A} \\ & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & \swarrow{\scriptstyle\varphi} & \downarrow{\scriptstyle\varphi'} \\ \boldsymbol{I} & \hookrightarrow & \boldsymbol{B} & \xrightarrow{\nu} & \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I} \end{array}$$

Par la propriété universelle de l'algèbre de polynômes, il existe ψ rendant le diagramme commutatif et la question du relèvement de φ' s'exprime par : "*peut-on choisir ψ de sorte que $\psi(\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{0}$?*". Ou encore, "*existe-t-il une $\boldsymbol{R}$-dérivation D de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ à valeurs dans $\boldsymbol{I}$, telle que $D(x) = \psi(x)$, pour tout $x \in \boldsymbol{J}$?*". En effet, pour toute $\boldsymbol{R}$-dérivation $D : \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \to \boldsymbol{I}$ (on voit $\boldsymbol{I}$ comme $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$-module via ψ), on montre aisément l'égalité :

$$(\psi - D)(xy) - (\psi - D)(x) - (\psi - D)(y) = -D(x)D(y) \in \boldsymbol{I}^2\,,$$

pour tous $x, y \in \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$, et l'application $\psi - D : \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \to \boldsymbol{B}$ est bien un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres qui relève φ' puisque $\boldsymbol{I}^2 = \boldsymbol{0}$ et qui s'annule sur $\boldsymbol{J}$ par construction, elle induit donc un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\varphi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ qui relève φ'. Montons donc, pour ψ fixée, l'existence d'une $\boldsymbol{R}$-dérivation $D : \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \to \boldsymbol{I}$ vérifiant $D(x) = \psi(x)$ pour tout $x \in \boldsymbol{J}$.

Comme $\boldsymbol{I}^2 = \boldsymbol{0}$, l'application $\psi : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{I}$ définit un morphisme de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$-module $\overline{\psi} : \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \to \boldsymbol{I}$, et la ligne centrale du diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \boldsymbol{J} & \subseteq & \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}} & & & & \\ \boldsymbol{0} & \to & \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 & \underset{\rho}{\overset{\partial}{\rightleftarrows}} & \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \boldsymbol{A} & \longrightarrow & \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} & \to & \boldsymbol{0} \\ & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\psi}} & & & & & & \\ & & \boldsymbol{I} & & & & & & \end{array}$$

est exacte et scindée par hypothèse. Il est donc possible de prolonger $\psi|_{\boldsymbol{J}}$ en la $\boldsymbol{R}$-dérivation $\overline{\psi} \circ \rho \circ d_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} : \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \to \boldsymbol{I}$ ce qui prouve l'existence d'un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ vers $\boldsymbol{B}$ se factorisant par π.

Lorsque l'idéal $\boldsymbol{I}$ est nilpotent de degré de nilpotence plus grand que deux, on factorise la surjection $\nu : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}$ en :

$$\boldsymbol{B} \xrightarrow{\nu'} \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}^2 \xrightarrow{\nu''} \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}$$

le degré de nilpotence du noyau de ν' est alors strictement inférieur à celui de $\boldsymbol{I}$ et celui du noyau de ν'' vaut exactement deux. Un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres de $\boldsymbol{A}$ vers $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}$ se relève suite au paragraphe précédent en un morphisme de $\boldsymbol{A}$ vers $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}^2$ et, dans un seconde temps, à $\boldsymbol{B}$ tout entier par un argument inductif portant sur le degré de nilpotence des noyaux.

(d)⇒(b). On applique (d) au cas particulier où $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{J}^2$ et $\boldsymbol{I} := \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$. L'identité $\mathrm{id} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}$ se relève alors en un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\sigma : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{J}^2$ et l'on a la suite exacte scindée de $\boldsymbol{R}$-modules :

$$\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \underset{\rho}{\overset{}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{J}^2 \underset{\sigma}{\overset{\nu}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{0}\,,$$

où $\rho(m) := m - \sigma \circ \nu(m)$. On a $\rho(m_1 m_2) - m_1\rho(m_2) - m_2\rho(m_1) = -\rho(m_1)\rho(m_2) = 0$ et la composée Δ de la surjection canonique $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \twoheadrightarrow \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{J}^2$ suivie de ρ est une $\boldsymbol{R}$-dérivation de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ dans $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ dont la restriction à $\boldsymbol{J}$ coïncide avec la surjection canonique de $\boldsymbol{J}$ sur $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$:

$$\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{J} & \subseteq & \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] & & \\
\downarrow & \swarrow & \downarrow & & \\
\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 & \underset{\rho}{\overset{}{\rightleftarrows}} & \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J}^2 & \rightleftarrows & \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J} \to \boldsymbol{0}
\end{array}$$

Par la propriété universelle du module des formes différentielles, on a un morphisme de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$-modules $\pi_\Delta : \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ vérifiant $\pi_\Delta \circ d_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} = \Delta$. Soit $p_\Delta : \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules induit par π_Δ, alors pour chaque $x \in \boldsymbol{J}$ on a :

$$x \bmod \boldsymbol{J}^2 = \pi_\Delta(d(x)) = p_\Delta\big(\partial\big(x \bmod \boldsymbol{J}^2\big)\big)\,,$$

et p_Δ est une rétraction de ∂ dans la suite (28) qui est alors exacte et scindée. ∎

4.3 Condition globale de lissité

Voici maintenant la généralisation de l'équivalence (a)⇔(d) de la proposition 4.2.7 au cas des morphismes de schémas localement de présentation finie.

4.3.1. Corollaire : *Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ localement de présentation finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *f est lisse.*

b) *Pour tout $\boldsymbol{S}$-schéma $\boldsymbol{Y}$ affine et tout sous-schéma fermé $\boldsymbol{Y}'$ de $\boldsymbol{Y}$ défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ vérifiant $\mathcal{I}^2 = 0$, l'application canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{Y}', \boldsymbol{X})\,,$$

est surjective.

Démonstration : (b)⇒(a). Comme la lissité de f est une propriété locale nous pouvons supposer $\boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et $\boldsymbol{S} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$. Dans ce cas la condition (b) équivaut à la condition (d) de la proposition 4.2.7 et donc f est lisse.

(a)⇒(b). Soit $f' \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{Y}', \boldsymbol{X})$ et fixons un recouvrement de $\boldsymbol{Y}$ par des ouverts affines $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{Y}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ tel que chaque $\boldsymbol{Y}'_\alpha := \boldsymbol{Y}_\alpha \cap \boldsymbol{Y}'$ est un ouvert affine de $\boldsymbol{Y}'$ et que la restriction f'_α de f' à $\boldsymbol{Y}'_\alpha$ se factorise par un ouvert affine de $\boldsymbol{X}$ au-dessus d'un ouvert affine de $\boldsymbol{S}$. Il existe alors, toujours grâce à la proposition 4.2.7, des relèvements $f_\alpha : \boldsymbol{Y}_\alpha \to \boldsymbol{X}$ des morphismes $f'_\alpha : \boldsymbol{Y}'_\alpha \to \boldsymbol{X}$.

Faisons maintenant quelques remarques simples pour chaque situation affine (indexée par $\alpha \in \mathfrak{A}$) en reprenant le diagramme de la démonstration de 4.2.7 :

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{J} & \hookrightarrow & \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] & \xrightarrow{\pi} & \boldsymbol{A} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi_\alpha} & \overset{\varphi_1}{\underset{\varphi_2}{\swarrow}} & \downarrow{\scriptstyle \varphi'_\alpha} \\ \boldsymbol{I}_\alpha & \hookrightarrow & \boldsymbol{B}_\alpha & \xrightarrow{\nu} & \boldsymbol{B}_\alpha/\boldsymbol{I} =: \boldsymbol{B}'_\alpha \end{array}$$

où $\boldsymbol{Y}_\alpha = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{B}_\alpha)$, $\boldsymbol{Y}'_\alpha = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{B}'_\alpha)$, et $f'_\alpha = \mathrm{Spec}(\varphi'_\alpha)$.

R-1) Le fait que $\boldsymbol{I}_\alpha^2$ soit nul entraîne aussitôt que $\boldsymbol{I}_\alpha$ est canoniquement un $\boldsymbol{B}'_\alpha$-module et également que les structures de $\boldsymbol{A}$-modules dont il est muni par les différents relèvements φ de φ' coïncident, on notera par $a \cdot x$ cette action canonique lorsque $a \in \boldsymbol{A}$ et $x \in \boldsymbol{I}_\alpha$.

R-2) Soient φ_1 et φ_2 deux relèvements de φ'_α, leur différence $D := \varphi_1 - \varphi_2$ est une application $D : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{I}_\alpha$ additive vérifiant $D(a_1a_2) = a_2 \cdot D(a_1) + a_1 \cdot D(a_2)$ pour tous $a_i \in \boldsymbol{A}$; c'est donc une $\boldsymbol{R}$-dérivation qui correspond à un élément $\xi(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{I}_\alpha)$. Mieux encore, si φ_0 est un relèvement de φ'_α l'application $\varphi \mapsto \xi(\varphi, \varphi_0)$ est une bijection entre l'ensemble de tous les relèvements possibles de φ'_α et $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{I}_\alpha)$.

R-3) Le morphisme de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}'_\alpha}(\boldsymbol{B}'_\alpha \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{I}_\alpha)$ vers $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{I}_\alpha)$ induit par l'application $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{B}'_\alpha \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$, $m \mapsto 1 \otimes m$, est un isomorphisme.

R-4) D'après (R-1) le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ de définition de $\boldsymbol{Y}' \subseteq \boldsymbol{Y}$ est un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}'}$-module quasi-cohérent sur $\boldsymbol{Y}'$ et le $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}'}$-module $\mathscr{H}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}'}}\big(f'^*(\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}), \mathcal{I}\big)$ est quasi-cohérent puisque $\mathcal{I}$ est quasi-cohérent et que $f'^*(\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}})$ est cohérent. Les sections de ce faisceau au-dessus d'un ouvert $\boldsymbol{Y}'_\alpha$ s'identifient canoniquement aux éléments de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}'_\alpha}(\boldsymbol{B}'_\alpha \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{I}_\alpha)$.

Ceci étant, nous avons la famille $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de relèvements locaux de $f' : \boldsymbol{Y}' \to \boldsymbol{X}$ et notre problème est de comprendre s'il est possible de les recoller quitte peut être à les déformer. Pour chaque couple $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{A}^2$ notons $\boldsymbol{Y}_{\alpha,\beta} := \boldsymbol{Y}_\alpha \cap \boldsymbol{Y}_\beta$ (*mutatis mutandis* pour $\boldsymbol{Y}'$) les relèvements f_α et f_β donnent lieux à deux relèvements sur $\boldsymbol{Y}_{\alpha,\beta}$ et suite à (R-2,3,4) on peut faire correspondre :

$$(\varphi_\alpha)_\alpha \longmapsto \big(\xi(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)\big)_{\alpha,\beta} \in \prod_{\alpha,\beta\in\mathfrak{A}} \Gamma\big(\boldsymbol{Y}'_{\alpha,\beta}\,; \mathscr{H}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}'}}\big(f'^*(\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}), \mathcal{I}\big)\big)$$

Or, le terme de droite est le groupe des 1-cochaînes de Čech relatives au recouvrement par des ouverts affines $\boldsymbol{Y}' \cap \mathcal{U}$ du faisceau $\mathscr{H}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}'}}\big(f'^*(\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}), \mathcal{I}\big)$ et l'on vérifie aisément que l'élément

$\big(\xi(\varphi_\alpha,\varphi_\beta)\big)_{\alpha,\beta}$ est un 1-cocycle. Comme la cohomologie de Čech relative à un recouvrement affine d'un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}'}$-module quasi-cohérent est concentrée en degré zéro, il existe une famille

$$(\xi_\alpha)_\alpha \in \prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \Gamma\big(\boldsymbol{Y}'_\alpha\,;\mathscr{H}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}'}}(f'^*(\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}),\mathcal{I})\big)$$

telle que $\xi_\alpha-\xi_\beta=\xi(\varphi_\alpha,\varphi_\beta)$. Notons $D_\alpha:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{I}_\alpha$ la dérivation correspondante à ξ_α (*cf.* R-2) ; la famille $(\varphi_\alpha-D_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ est alors une famille de relèvements locaux de f' qui vérifie la condition de recollement et fournit le relèvement global annoncé. ∎

4.3.2. Corollaire : *Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre et $\boldsymbol{0}\to\boldsymbol{I}\to\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_n]\to\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{0}$ une présentation finie quelconque de $\boldsymbol{A}$. Alors, il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :*

a) *$\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse..*

b) *La première suite fondamentale de $\boldsymbol{A}$-modules :*

$$\boldsymbol{0}\longrightarrow \boldsymbol{I}/\boldsymbol{I}^2\xrightarrow{\ \partial\ }\boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]}\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}\longrightarrow\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\to\boldsymbol{0}$$

est exacte et scindée.

En particulier, la proposition 4.2.7 reste vraie quelle que soit la présentation finie $\boldsymbol{0}\to\boldsymbol{J}\to\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_n]\to\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{0}$ considérée.

Démonstration : Lorsque $\boldsymbol{A}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$, l'assertion 4.3.1-(0b) est vérifiée d'après le corollaire précédent et alors, la démonstration de l'implication (d)⇒(b) de la proposition 4.2.7 prouve l'assertion (b) de ce corollaire. Enfin, l'implication (b)⇒(a) fait également partie de la preuve de 4.2.7. ∎

4.3.3. Remarque : Ce corollaire montre, que si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation finie ***lisse***, le critère de lissité de la définition 4.2.1 est vérifié par toute présentation finie de $\boldsymbol{A}$.

4.3.4. Exercice : Soit $(\boldsymbol{G},1,\cdot)$ un groupe abélien noté multiplicativement. Pour tout anneau $\boldsymbol{A}$, on note $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$ l'« *algèbre du groupe $\boldsymbol{G}$ à coefficients dans $\boldsymbol{A}$* ». On rappelle qu'il s'agit de l'ensemble des familles $\{a_g\}_{g\in\boldsymbol{G}}$ d'éléments de $\boldsymbol{A}$ indexés par les éléments du groupe $\boldsymbol{G}$. On a $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]=\bigoplus_{g\in\boldsymbol{G}}\boldsymbol{A}$, d'où une structure canonique de $\boldsymbol{A}$-module à gauche libre pour $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$. Notons δ_g l'élément de la base canonique de $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$ correspondant à l'indice d'indexation $g\in\boldsymbol{G}$; un élément $x\in\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$ s'écrit alors $x=\sum_{g\in\boldsymbol{G}}x(g)\cdot\delta_g$ avec des coefficients $x(g)\in\boldsymbol{A}$ presque tous nuls, et ceci de manière unique. On définit une multiplication sur $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$ par la formule

$$\begin{cases} x\cdot y:=\sum_{g\in\boldsymbol{G}}\,z(g)\,\delta_g\ ;\text{ avec}\\ z(g):=\sum_{h\in\boldsymbol{G}}\,x(h)\,y(h^{-1}g)\end{cases}$$

Le triplet $(\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}],0,\delta_1,+,\cdot)$ est alors une structure $\boldsymbol{A}$-algèbre qui est de type fini lorsque c'est ainsi pour $\boldsymbol{G}$.

Pour tout morphisme de groupes $\alpha : \boldsymbol{G}_1 \to \boldsymbol{G}_2$, notons $\boldsymbol{A}[\alpha] : \boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}_1] \to \boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}_2]$ l'application définie par :

$$\boldsymbol{A}[\alpha]\Big(\sum\nolimits_{g\in\boldsymbol{G}} x(g)\,\delta_g\Big) := \sum\nolimits_{g\in\boldsymbol{G}} x(g)\,\delta_{\alpha(g)}\,.$$

On vérifie que $\boldsymbol{A}[\alpha]$ est un morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres.

La correspondance $\boldsymbol{A}[_]$ qui associe $\boldsymbol{G} \rightsquigarrow \boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$ et $\alpha \rightsquigarrow \boldsymbol{A}[\alpha]$ est fonctorielle de la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ des groupes abéliens vers la catégorie $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{A})$ des $\boldsymbol{A}$-algèbres.

a) Montrer que le foncteur $\boldsymbol{A}[_]$ est adjoint à gauche du foncteur $(_)^*$ qui associe à une $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{B}$, le groupe $\boldsymbol{B}^*$ de ses éléments inversibles et à un morphisme d'algèbres sa restriction aux éléments inversibles ; autrement dit, montrer que pour toute $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ et tout groupe abélien $\boldsymbol{G}$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{B}^*) & \xrightarrow{\ \psi\ } & \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}],\boldsymbol{B}) \\ \alpha & \longmapsto & \Big(\sum_{g\in\boldsymbol{G}} x(g)\,\delta_g \xmapsto{\psi(\alpha)} \sum_{g\in\boldsymbol{G}} x(g)\,\alpha(g)\Big) \end{array}$$

est naturelle et bijective.

b) Monter que le foncteur $\boldsymbol{A}[_]$ transforme une somme directe de groupes abéliens en produit tensoriel de $\boldsymbol{A}$-algèbres.

c) i) Soit $\varphi : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}$ un morphisme surjectif de $\boldsymbol{A}$-algèbres de noyau $\boldsymbol{I}$ vérifiant $\boldsymbol{I}^2 = \boldsymbol{0}$. Montrer que la restriction de φ au groupe $(\boldsymbol{B}^*, \cdot, \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{B}})$ des éléments inversibles de $\boldsymbol{B}$ est un morphisme de groupes surjectif sur $(\boldsymbol{C}^*, \cdot, \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{C}})$ de noyau isomorphe au groupe $(\boldsymbol{I}, +, \boldsymbol{0}_{\boldsymbol{B}})$. Plus précisément, monter que la suite de groupes abéliens :

$$\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{0} & \to & (\boldsymbol{I},+,\boldsymbol{0}_{\boldsymbol{B}}) & \longrightarrow & (\boldsymbol{B}^*,\cdot,\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{B}}) & \xrightarrow{\ \varphi\ } & (\boldsymbol{C}^*,\cdot,\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{C}}) & \to & \boldsymbol{1} \\ & & x & \longmapsto & 1+x & & & & \end{array}$$

est exacte.

ii) À l'aide de (a) et (b), monter que $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}_1 \times \boldsymbol{G}_2]$ vérifie la propriété de relèvement de l'assertion (0d) de la proposition 4.2.7 pour $\boldsymbol{I}$ de carré nul, si et seulement si, il en est de même pour chaque $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}_i]$.

d) Montrer que $\boldsymbol{A}[\mathbb{Z}^m]$ est isomorphe à $\boldsymbol{A}[X_1, \ldots, X_m]_{X_1\cdots X_m}$, et donc que $\boldsymbol{A}[\mathbb{Z}^m]$ est une $\boldsymbol{A}$-algèbre lisse, pour tout entier positif m.

e) Montrer que $\boldsymbol{A}\big[\mathbb{Z}/\langle p^m\rangle\big]$ est isomorphe à $\boldsymbol{A}\big[X/\langle X^{p^m}-1\rangle\big]$, pour tout nombre premier p et tout entier positif m. En déduire que $\boldsymbol{A}\big[\mathbb{Z}/\langle p^m\rangle\big]$ est une $\boldsymbol{A}$-algèbre lisse, si et seulement si, $p\cdot\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{A}}$ est inversible dans $\boldsymbol{A}$ (on dit alors que « *p est inversible dans $\boldsymbol{A}$* »).

f) À l'aide des résultats précédents, montrer que pour tout groupe abélien de type fini $\boldsymbol{G}$, l'algèbre $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$ est lisse sur $\boldsymbol{A}$, si et seulement si, les ordres des éléments de $\boldsymbol{G}$ d'ordre fini sont inversibles dans $\boldsymbol{A}$.

Indication : Utiliser le fait que pour tout $\mathbb{Z}$-module $\boldsymbol{G}$ de type fini, il existe une famille finie (peut être vide) de nombres premiers $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ et une famille finie d'entiers positifs ou nuls $\{m_0, m_2, \ldots, m_r\}$ telles que :

$$\boldsymbol{G} \equiv \mathbb{Z}^{m_0} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{\langle p_1^{m_1}\rangle} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{\langle p_2^{m_2}\rangle} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{\langle p_r^{m_r}\rangle}\,.$$

g) Pour tout groupe abélien $\boldsymbol{G}$ notons $\mathfrak{T}(\boldsymbol{G})$ le sous-ensemble de ses éléments de torsion, *i.e.* d'ordre strictement positif. L'ensemble $\mathfrak{T}(\boldsymbol{G})$ est un sous-groupe de $\boldsymbol{G}$ et le quotient $\boldsymbol{G}/\mathfrak{T}(\boldsymbol{G})$ ne possède aucun élément de torsion. Lorsque $\boldsymbol{G}$ est de type fini, $\mathfrak{T}(\boldsymbol{G})$ est fini et $\boldsymbol{G}/\mathfrak{T}(\boldsymbol{G})$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini sans torsion donc libre ; le groupe $\boldsymbol{G}$ est, par conséquent, isomorphe $\mathfrak{T}(\boldsymbol{G}) \oplus \mathbb{Z}^m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

Montrer comme conséquence de cette remarque et de (f) que lorsque $\boldsymbol{G}$ est de type fini, la $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$ est lisse, si et seulement si, le cardinal de $\mathfrak{T}(\boldsymbol{G})$ est inversible dans $\boldsymbol{A}$.

Le corollaire 4.3.2 fait référence à une présentation d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ comme quotient d'une algèbre de polynômes par un nombre fini de relations. Dans le corollaire suivant nous étendons l'équivalente (a)⇔(c') de 4.2.7 au cas où $\boldsymbol{A}$ est donnée comme quotient d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse $\boldsymbol{C}$ par un nombre fini de relations. Nous aurons besoin de ce résultat dans la démonstration de l'existence de relèvements lisses d'algèbres du théorème 5.2.7.

4.3.5. Corollaire : *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau, $\boldsymbol{C}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et $\boldsymbol{L}$ un idéal de type fini de $\boldsymbol{C}$. Notons $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{C}/\boldsymbol{L}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *$\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse.*

b) *Le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\partial : \boldsymbol{L}/\boldsymbol{L}^2 \to \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{A}$ de la première suite fondamentale associée à la surjection canonique $\boldsymbol{C} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$ (1.3.1) est injectif et admet une rétraction.*

Démonstration : Fixons une présentation finie de $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{J} \hookrightarrow \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] := \boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_q] \xrightarrow{\Pi_C} \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{0}\,,$$

et considérons la présentation (finie) de $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{0} \to \Pi_C^{-1}(\boldsymbol{L}) \hookrightarrow \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] := \boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_q] \xrightarrow{\Pi_A} \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{0}\,.$$

Comme $\boldsymbol{C}$ est supposée lisse, on a la première suite fondamentale scindée :

$$\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \underset{\rho}{\overset{\partial_C}{\rightleftarrows}} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \boldsymbol{C} \twoheadrightarrow \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{0}$$

d'où le diagramme de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{0} \to & (\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2) \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{A} & \underset{\rho\otimes \mathbf{1}_A}{\overset{\partial_C \otimes \mathbf{1}_A}{\rightleftarrows}} & \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \boldsymbol{A} & \xrightarrow{\nu} & \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{0} \\ & \alpha \downarrow & & \downarrow = & & \beta \downarrow & \\ & \Pi_C^{-1}(\boldsymbol{L})/\Pi_C^{-1}(\boldsymbol{L})^2 & \xrightarrow{\partial_A} & \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \boldsymbol{A} & \twoheadrightarrow & \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{0} \end{array} \qquad (\mathcal{D})$$

où $\operatorname{coker}(\alpha) \equiv \boldsymbol{L}/\boldsymbol{L}^2$ et où la composée $\nu \circ \partial_{\boldsymbol{A}}$ est "bien définie" sur $\operatorname{coker}(\alpha)$ et s'identifie naturellement au morphisme ∂ de l'assertion (b).

Lorsque $\boldsymbol{A}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$, la seconde ligne dans $(\mathcal{D})$ est exacte et scindée et une simple chasse au diagramme montre que la suite :

$$\boldsymbol{0} \to \operatorname{coker}(\alpha) = \boldsymbol{L}/\boldsymbol{L}^2 \underset{\nu\circ\partial_A}{\overset{\partial}{\rightrightarrows}} \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{A} \xrightarrow{\beta} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{0} \qquad (\ddagger)$$

est exacte. Comme $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est projectif (4.2.7-(b)), le morphisme β admet une section et donc ∂ admet une rétraction.

Réciproquement, lorsque ∂ est injective et admet une rétraction, la suite $(\ddagger)$ est exacte et scindée et la cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe $(\mathcal{D})$ est nulle. La seconde ligne de $(\mathcal{D})$ est donc exacte. Mais le scindage de $(\ddagger)$ montre également que $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est un $\boldsymbol{A}$-module projectif puisque facteur direct de $\Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{A}$. La seconde ligne de $(\mathcal{D})$ est par conséquent scindée et le corollaire est prouvé. ∎

4.3.6. Exercice : Démontrer le « *Critère de Jacobi* » suivant :

Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Z}$ deux $\boldsymbol{S}$-schémas, et soit $\jmath : \boldsymbol{X} \hookrightarrow \boldsymbol{Z}$ une immersion fermée localement de présentation finie. Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}$ qui définit $\boldsymbol{X}$ comme sous-schéma de $\boldsymbol{Z}$. Soit x un point de $\boldsymbol{X}$, et posons $z := \jmath(x)$. Supposons que, en tant que $\boldsymbol{S}$-schéma, $\boldsymbol{Z}$ est lisse en z de dimension relative n. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) *En tant que $\boldsymbol{S}$-schéma, $\boldsymbol{X}$ est lisse en x de dimension relative r.*

b) *La suite canonique de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules :*

$$\mathbf{0} \to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \jmath^*\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{S}} \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}} \to \mathbf{0}\,,$$

est exacte et scindée en x et $r = \dim_{k(x)}\big(\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}} \otimes k(x)\big)$.

c) *Si $dz_1, \dots, dz_n$ est une base de $\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{S}\,(x)}$, et si $g_1, \dots, g_N$ sont des sections locales de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}$ qui engendrent $\mathcal{I}_{(z)}$, il existe une réindexation de $z_1, \dots, z_n$ et de $g_1, \dots, g_N$ telle que $g_{r+1}, \dots, g_n$ engendrent $\mathcal{I}_{(z)}$ et $dz_1, \dots, dz_r, dg_{r+1}, \dots, dg_n$ engendrent $\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{S}\,(z)}$.*

d) *Il existe des sections locales $g_{r+1}, \dots, g_n$ de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}$ qui engendrent $\mathcal{I}_{(z)}$ et telles que les différentielles $dg_{r+1}, \dots, dg_n$ sont linéairement indépendantes dans $\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{S}} \otimes k(z)$.*

4.3.7. Lissité de l'algèbre symétrique d'un module projectif

Proposition : *Soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{R}$-module projectif de type fini. L'algèbre symétrique $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M})$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$.*

Démonstration : On sait que $\boldsymbol{M}$ est facteur direct dans un module libre $\boldsymbol{R}^N$, de sorte qu'il existe des morphismes de $\boldsymbol{R}$-modules $\boldsymbol{M} \hookrightarrow \boldsymbol{R}^N \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}$ dont la composée est l'identité sur $\boldsymbol{M}$. On en déduit des morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M}) \xhookrightarrow{p} \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^N) \xrightarrow{q} \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M})$ dont la composée est également l'identité. Comme $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^N)$ est clairement lisse (isomorphe à $\boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_N]$), elle vérifie le critère de la proposition 4.2.7-(0d). On en déduit que $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M})$ vérifie ce même critère à l'aide des morphismes p et q (laissé en exercice). ∎

4.3.8. À propos de l'exactitude à gauche de la seconde suite fondamentale

Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau et $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres. Nous avons donné dans le lemme 1.6.2 une condition simple et générale garantissant une la seconde suite exacte fondamentale scindée. Voici maintenant un critère de scindage en termes de lissité.

Proposition : *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau et $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme lisse $\boldsymbol{R}$-algèbres. La seconde suite fondamentale de $\boldsymbol{B}$-modules :*

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)} \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}} \to \mathbf{0}$$

est exacte et le morphisme $\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)$ admet une rétraction.

En particulier, lorsque α est étale, le morphisme $\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)$ est un isomorphisme.

Démonstration : Considérons $\boldsymbol{B}$ muni de la structure de $\boldsymbol{A}$-algèbre induite par l'homomorphisme α et fixons une présentation finie

$$\boldsymbol{J} \hookrightarrow \boldsymbol{A}[\mathcal{X}] := \boldsymbol{A}[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}$$

de $\boldsymbol{B}$. On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{0} & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}[\mathcal{X}]} \boldsymbol{A}[\mathcal{X}]_{\otimes_{\boldsymbol{A}}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} & \xrightarrow{\equiv} & \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\iota)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)} \\
\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 & \xrightarrow{\partial} & \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}[\mathcal{X}]} \Omega_{\boldsymbol{A}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} & \twoheadrightarrow & \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \to \mathbf{0} \\
|| & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{0} \to \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 & \xrightarrow{\partial} & \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}[\mathcal{X}]} \Omega_{\boldsymbol{A}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{A}} & \twoheadrightarrow & \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}} \to \mathbf{0} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
\end{array}$$

où les dernières lignes sont les premières suites exactes fondamentales associées à α, relatives respectivement à $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{A}$, et où les dernières colonnes sont les secondes suites fondamentales associées à l'homomorphisme structural $\iota : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}[\mathcal{X}]$ et à α respectivement.

L'injectivité de $1_{\boldsymbol{B}} \otimes \Omega(\iota)$ résulte du fait que la surjection $p : \boldsymbol{A}[\mathcal{X}] \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$, définie par $p(X_i) = 0$, est une rétraction de ι de sorte que $\Omega(p) \circ \Omega(\iota) = \mathrm{id}_{\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}$. Enfin, le scindage de la dernière ligne (et donc de la ligne centrale) vient de la lissité de $\boldsymbol{B}$ sur $\boldsymbol{A}$. Une simple chasse au diagrammes suffit alors pour montrer l'injectivité de $\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)$ et comme $\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}}$ est un $\boldsymbol{B}$-module projectif le scindage de la dernière colonne en découle.

Enfin, lorsque α est en plus étale, $\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}} = \mathbf{0}$ et la conclusion est évidente. ∎

4.3.9. Transitivité de la lissité

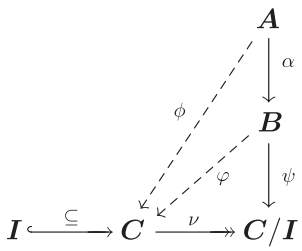
Proposition : *Soient $\boldsymbol{X}$ un schéma lisse sur $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{Y}$ un schéma lisse sur $\boldsymbol{X}$. Alors $\boldsymbol{Y}$ est un schéma lisse sur $\boldsymbol{S}$.*

Démonstration : En nous restreignant à une situation locale affine, nous avons à prouver que si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et si $\boldsymbol{B}$ est une $\boldsymbol{A}$-algèbre lisse, alors $\boldsymbol{B}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$. On applique pour ceci le critère de lissité donné par la proposition 4.2.7-(0d).

Soient $\boldsymbol{C}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre, $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{C}$ un idéal de carré nul et $\nu : \boldsymbol{C} \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}/\boldsymbol{I}$ la surjection canonique. Montrons la surjectivité de l'application :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}/\boldsymbol{I}) \\
\varphi & \longmapsto & \nu \circ \varphi
\end{array} \qquad (*)$$

Soit α l'homomorphisme structural de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$ et considérons le diagramme suivant.



Comme $\boldsymbol{A}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$, il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres ϕ qui relève la composée $\psi \circ \alpha$ et la $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{C}$ se trouve munie d'une structure de $\boldsymbol{A}$-algèbre telle que $\boldsymbol{I}$ est un idéal de $\boldsymbol{A}$-algèbre. D'autre part l'homomorphisme ψ est un morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres (via α). La lissité de $\boldsymbol{B}$ sur $\boldsymbol{A}$ affirme alors l'existence d'un relèvement φ de ψ et $(*)$ est bien surjective. ∎

4.3.10. Stabilité de la lissité par changement de base

Proposition : *Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ un morphisme de schémas lisse. Pour tout morphisme de schémas $g : \boldsymbol{S}' \to \boldsymbol{S}$ le morphisme induit $g^* : \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{S}' \to \boldsymbol{S}'$ est lisse.*

Démonstration : La lissité étant de nature locale, la proposition résulte de sa version affine (*cf.* 4.2.7), c'est-à-dire :

Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et soit $\boldsymbol{R}'$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre. Alors $\boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}'$-algèbre lisse.

Comme le foncteur $\boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} (_)$ est exact à droite, la $\boldsymbol{R}'$-algèbre $\boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ est de présentation finie et nous pouvons appliquer le critère de lissité de 4.2.7(0d). Soit donc $\boldsymbol{B}$ une $\boldsymbol{R}'$-algèbre et $\boldsymbol{I}$ un idéal de carré nul de $\boldsymbol{B}$, on a le diagramme d'applications canoniques :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}'}(\boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}) & \longrightarrow & \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}'}(\boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par l'homomorphisme d'algèbres $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{R}' \otimes \boldsymbol{A}$, $a \mapsto \mathbf{1}_{\boldsymbol{R}'} \otimes a$ et sont donc des bijections (*cf.* [B$_1$] prop. 5, A III.7). La proposition résulte maintenant de la surjectivité de la seconde application horizontale. ∎

4.4 Lissité, platitude et produit fibré

4.4.1. Morphismes plats

Définition : Un morphisme de schémas $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ est dit «*plat*» lorsque pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, le $\mathcal{O}_{\boldsymbol{S},f(x)}$-module $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X},x}$ est plat.

Lorsque $\boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{S} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$ et que $f = \mathrm{Spec}(\varphi)$ pour un morphisme d'anneaux $\varphi : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{A}$, le morphisme f est plat si, pour tout idéal premier $\mathfrak{P} \subseteq \boldsymbol{A}$ l'anneau $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$, vu comme $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{Q}}$-module, où $\mathfrak{Q} := \varphi^{-1}(\mathfrak{P})$, est plat.

4.4.2. Remarque : Il convient de souligner que dans le cas affine, la condition de la définition équivaut au fait que $\boldsymbol{A}$ est un $\boldsymbol{R}$-module plat (*cf.* [Mat] 3.J p. 24). Dans ce cas on dit que « $\boldsymbol{A}$ *est une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre plate* ».

4.4.3. Transitivité de la platitude

Proposition : *Soient* $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ *et* $g : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ *des de schémas plats. Le morphisme* $g \circ f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{S}$ *est plat.*

Démonstration : Résulte immédiatement de la transitivité de la platitude pour les algèbres. ∎

4.4.4. Stabilité de la platitude par changement de base

Proposition : *Soit* $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ *un morphisme de schémas plat. Pour tout morphisme de schémas* $g : \boldsymbol{S}' \to \boldsymbol{S}$ *le morphisme induit* $g^* : \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{S}' \to \boldsymbol{S}'$ *est plat.*

Démonstration : En termes de schémas affines la proposition se traduit en : «*Soient* $\boldsymbol{R}'$ *et* $\boldsymbol{A}$ *deux* $\boldsymbol{R}$*-algèbres où* $\boldsymbol{A}$ *est* $\boldsymbol{R}$*-plate, alors* $\boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ *est* $\boldsymbol{R}'$*-plate* ». Ceci résulte du fait qu'une inclusion $\iota : \boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{M}$ de $\boldsymbol{R}'$-modules est automatiquement une inclusion de $\boldsymbol{R}$-modules et alors $1 \otimes \iota : \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M}$ est injective puisque $\boldsymbol{A}$ est $\boldsymbol{R}$-plat. On conclut alors grâce à l'isomorphisme naturel $\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} (\boldsymbol{L}) \equiv \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}'} (\boldsymbol{L})$ pour tout $\boldsymbol{R}'$-module $\boldsymbol{L}$. ∎

4.4.5. Lissité et platitude

Proposition : *Une algèbre lisse est plate.*

Démonstration : Soit $\boldsymbol{A}$ une algèbre lisse sur un anneau $\boldsymbol{R}$ de présentation finie : $\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \to \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{0}$, et considérons la suite infinie d'homomorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres :

$$\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\widehat{}_{\boldsymbol{J}} := \varprojlim{}_{N\in\mathbb{N}^+} \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{J}^N \xrightarrow{\pi_\infty} \cdots \xrightarrow{\pi_4} \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{J}^3 \xrightarrow{\pi_3} \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{J}^2 \xrightarrow{\pi_2} \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A}$$

où le noyau de chaque π_r est de carré nul. Notons $p_\infty : \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\widehat{}_{\boldsymbol{J}} \to \boldsymbol{A}$ la projection canonique.

Par la propriété universelle des algèbres lisses (*cf.* 4.2.7(0d)) l'identité sur $\boldsymbol{A}$ se relève successivement en des morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\sigma_r : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{J}^r$ et donne, par passage à la limite projective, un morphisme $\sigma_\infty : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\widehat{}_{\boldsymbol{J}}$ qui est une section de p_∞ ; en particulier $\boldsymbol{A}$ est un facteur direct de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\widehat{}_{\boldsymbol{J}}$ en tant que $\boldsymbol{R}$-module et, par conséquent, $\boldsymbol{A}$ est un $\boldsymbol{R}$-module plat, si $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\widehat{}_{\boldsymbol{J}}$ l'est.

Or, si nous supposons l'anneau $\boldsymbol{R}$ ***nœthérien***, l'anneau $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ l'est également et comme $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\widehat{}_{\boldsymbol{J}}$ n'est autre que son complété $\boldsymbol{J}$-adique, il est $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$-plat (*cf.* [Mat] 23.L, cor. 1, p. 170). Comme $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ est $\boldsymbol{R}$-libre donc plat, la composée des applications canoniques $\boldsymbol{R} \hookrightarrow \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \to \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\widehat{}_{\boldsymbol{J}}$ est plate et $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]\widehat{}_{\boldsymbol{J}}$ est un $\boldsymbol{R}$-module plat.

Dans le cas où $\boldsymbol{R}$ n'est pas un anneau nœthérien, l'idée est de le réaliser comme limite du système inductif, filtrant supérieurement, des $\mathbb{Z}$-sous-algèbres de type fini (donc nœthériennes)

de $\boldsymbol{R}$ mais de façon à «préserver la lissité». Plus précisément, pour chaque sous-anneau $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{R}$, on a $\boldsymbol{T}[\mathcal{X}] \subseteq \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ et nous notons $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{T}) := \boldsymbol{T}[\mathcal{X}] \cap \boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}) := \boldsymbol{T}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{J}(\boldsymbol{T})$ de sorte que $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}) \subseteq \boldsymbol{A}$. On remarque alors que $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T})$ est $\boldsymbol{T}$-lisse à chaque fois que l'application

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{T})/\boldsymbol{J}(\boldsymbol{T})^2 \xrightarrow{\partial(\boldsymbol{T})} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}) \otimes_{\boldsymbol{T}[\mathcal{X}]} \Omega_{\boldsymbol{T}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{T}}$$

admet une rétraction (*cf.* prop. 4.2.4). Or, la lissité de $\boldsymbol{A}$ donne une rétraction de

$$\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \xrightarrow{\partial} \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \qquad (\ddagger)$$

et comme $\boldsymbol{J}$ est de type fini, on comprend qu'à partir du moment où l'on fixe un système fini de générateurs de $\boldsymbol{J}$ (des polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$), ce qui détermine un ensemble fini de scalaires dans $\boldsymbol{R}$ (les coefficients des polynômes en question), la rétraction de $(\ddagger)$ ne demandera au plus qu'un nombre fini de scalaires supplémentaires et la conclusion de ces remarques est qu'il existe un ensemble ***fini*** $\mathcal{F} \subseteq \boldsymbol{R}$ tel que, si $\boldsymbol{T} \supseteq \mathcal{F}$, alors $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T})$ est $\boldsymbol{T}$-lisse.

On réalise alors $\boldsymbol{R}$ comme limite du système inductif filtrant supérieurement des $\mathbb{Z}$-sous-algèbres de type fini $\boldsymbol{T}$ qui contiennent l'ensemble $\mathcal{F}$. On a $\boldsymbol{A} = \varinjlim_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{T})$ et chaque $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T})$ est $\boldsymbol{T}$-plate d'après l'étude préliminaire. On termine en observant que comme une injection de $\boldsymbol{R}$-modules $\boldsymbol{N} \hookrightarrow \boldsymbol{M}$ $(*)$ est automatiquement une injection de $\boldsymbol{T}$-modules et comme l'application induite

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}) \otimes_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{N} \hookrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}) \otimes_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{M} \qquad (**)$$

est injective par la platitude de $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T})$, le passage à la limite inductive sur $\boldsymbol{T}$ de $(**)$ est injective et cette limite est précisément le morphisme $\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M}$ induit par (*). ∎

Le théorème suivant donne un autre critère intrinsèque de lissité d'un morphisme de schémas, il présente l'intérêt de ramener l'étude de la lissité d'un morphisme à celles de sa platitude et de la lissité de ses fibres (des schémas sur des corps !). La platitude du morphisme se voit alors comme une condition de recollement lisse de fibres (*cf.* [EGA$_{4,4}$] §17.5 p. 67).

4.4.6. Théorème : *Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ un morphisme de schémas localement de présentation finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *f est lisse.*

b) *f est plat et pour chaque $y \in \boldsymbol{S}$ la fibre $\boldsymbol{X}_y := \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} k(y)$ est lisse sur $k(y)$.*

Démonstration : L'implication (a)⇒(b) est conséquence immédiate des propositions 4.3.10 et 4.4.5. Prouvons la réciproque suivant [BLR] prop. 8 p. 53.

On se place dans une situation affine : $\boldsymbol{S} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$, $f := \mathrm{Spec}(\varphi)$, $\mathfrak{P}$ l'idéal correspondant à $x \in \boldsymbol{X}$ et $\mathfrak{R} := \varphi^{-1}(\mathfrak{P})$ celui correspondant à $f(x)$. On fixe une présentation finie $\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \to \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{0}$.

La suite $\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{J} \otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R}) \to k(\mathfrak{R})[\mathcal{X}] \to \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R}) \to \boldsymbol{0}$ est exacte puisque $\boldsymbol{A}$ est $\boldsymbol{R}$-plate, et comme $\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R})$ est $k(\mathfrak{R})$ lisse l'application :

$$\big(\boldsymbol{J} \otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R})\big)/\big(\boldsymbol{J} \otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R})\big)^2 \xrightarrow{\partial_{\mathfrak{R}}} \big(\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R})\big) \otimes_{k(\mathfrak{R})[\mathcal{X}]} \Omega_{k(\mathfrak{R})[\mathcal{X}]/k(\mathfrak{R})}$$

admet une rétraction. Notons $\boldsymbol{J}'$ l'idéal de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ engendré par un relèvement dans $\boldsymbol{J}$ d'une base de $\big(\boldsymbol{J}\otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R})\big)/\big(\boldsymbol{J}\otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R})\big)^2$. On a :

$$\mathbf{0}\to \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}' \xrightarrow{\ \iota\ } \boldsymbol{A}':=\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{J}' \xrightarrow{\ \nu\ } \boldsymbol{A}:=\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{J}\to \mathbf{0} \qquad (\ddagger)$$

où ν désigne la surjection canonique.

En termes de schémas, $\boldsymbol{X}:=\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est un sous-schéma fermé de $\boldsymbol{X}':=\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}')$ et ce dernier est lisse au voisinage de x par construction. D'autre part, les fibres au-dessus de $k(\mathfrak{R})$ de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X}'$ coïncident ce qui signifie que la tensorisation de $(\ddagger)$ par $k(\mathfrak{R})$ rend ν un isomorphisme. Mais la platitude de $\boldsymbol{A}$ assure que ι reste injective après une tensorisation et par Nakayama $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}'$ au voisinage de x, de sorte que $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X}'$ coïncident au voisinage de x. ∎

4.5 Intersections complètes lisses

Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau et $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation finie

$$\mathbf{0}\to \boldsymbol{J}=\langle f_1,\dots,f_s\rangle \to \boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_n]\to \boldsymbol{A}\to \mathbf{0}\,.$$

Lorsque $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse la dimension relative des points de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est localement une constante $r\leqslant n$ qui est minorée par $n-s$ puisque tout système de générateurs de $\boldsymbol{J}$ induit un système de générateurs des différents $k(\mathfrak{P})\otimes(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2)$. Le cas extrême où l'idéal $\boldsymbol{J}$ admet un système de générateurs ayant exactement $n-r$ éléments présente des avantages techniques importants et mérite que l'on introduise une terminologie spécifique.

4.5.1. Définition : Une $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation finie $\boldsymbol{A}$ telle que $\dim_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A})=r$ sera appelée « *intersection complète (de dimension relative r) sur $\boldsymbol{R}$* » si elle admet une présentation finie de la forme :

$$\mathbf{0}\to \boldsymbol{J}=\langle g_{r+1},\dots,g_n\rangle \to \boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_n]\to \boldsymbol{A}\to \mathbf{0}\,.$$

On dira, par extension, qu'un schéma $\boldsymbol{X}$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$ est « *intersection complète sur* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$ » lorsqu'il est isomorphe au schéma affine associé à une intersection complète sur $\boldsymbol{R}$.

4.5.2. Remarque : Une algèbre lisse sur un anneau est *localement* intersection complète d'après la définition de lissité 4.2.1, elle est globalement de présentation finie, mais n'est pas nécessairement globalement intersection complète.

Le lemme suivant est conséquence facile des développements précédents.

4.5.3. Lemme : *Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *$\boldsymbol{A}$ est lisse et intersection complète de dimension relative r.*

b) *$\boldsymbol{A}$ admet une présentation finie :*

$$\mathbf{0}\to \boldsymbol{J}=\langle g_{r+1},\dots,g_n\rangle \to \boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_n]\to \boldsymbol{A}\to \mathbf{0}\,,$$

telle que l'idéal de $\boldsymbol{A}$ engendré par les mineurs d'ordre $n-r$ de la matrice jacobienne $[\,\partial g_i/\partial X_j\,]$ est l'idéal unité.

c) $\boldsymbol{A}$ *admet une présentation finie* $\mathbf{0} \to \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{R}[X] := \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}$ *telle que* $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ *est un* $\boldsymbol{A}$*-module libre et l'application canonique* $\partial : \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \to \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}$ *est injective et admet une rétraction.*

Démonstration : On montre l'équivalence (b)⇔(c).

(b)⇒(c). Conséquence presque immédiate du corollaire 4.1.3.

(c)⇒(b). Soit $\{\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_d\}$ une base de $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ en tant que $\boldsymbol{A}$-module et notons m_i un relèvement dans $\boldsymbol{J}$ de $\overline{m}_i$, pour chaque $i = 1, \ldots, d$ et soit $\boldsymbol{M}$ le sous-$\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$-module de $\boldsymbol{J}$ engendré par les m_i. On a alors $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{J}^2$ et le $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$-module $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{M}$ est de type fini et vérifie $\boldsymbol{J} \cdot (\boldsymbol{J}/\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{J}/\boldsymbol{M}$. Il existe alors, par Nakayama, un élément $x \in \boldsymbol{J}$ tel que $(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{M})_f = \mathbf{0}$, autrement dit, tel que $\boldsymbol{M}_f = \boldsymbol{J}_f$. Comme d'autre part $f = 1_{\boldsymbol{A}}$ dans $\boldsymbol{A}$, on a la présentation finie :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{M}_f \longrightarrow \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m]_f \longrightarrow \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}\,.$$

et donc :

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}]}{\langle m_1, \ldots, m_d, m_{d+1}\rangle}\,,$$

où $m_{d+1} := fX_{m+1} - 1$. On vérifie alors que l'idéal dans $\boldsymbol{A}$ engendré par les mineurs d'ordre $d+1$ de la matrice jacobienne $[\,\partial m_i/\partial X_j\,]_{i=1,\ldots,d+1}^{j=1,\ldots,m+1}$ est bien l'idéal unité. ∎

4.5.4. Exercice : Soit f non diviseur de zéro dans $\boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n]$ et soit $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n]/\langle f\rangle$. Montrer que si $\boldsymbol{A}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$ une intersection complète de dimension relative $n-1$.

4.5.5. Exercice : Soit $\boldsymbol{I} = \langle f_{r+1}, \ldots, f_n\rangle$ un idéal de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}] := \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n]$ et considérons l'idéal $\boldsymbol{Mn}(f_{r+1}, \ldots, f_n)$ de $\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]$ engendré par les mineurs d'ordre $(n-r)$ de la matrice jacobienne $[\,\partial f_i/\partial X_j\,]$. Notons $\nu : \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \twoheadrightarrow \boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{I} =: \boldsymbol{A}$ la surjection canonique. Montrer que pour tout $f \in \boldsymbol{Mn}(f_{r+1}, \ldots, f_n)$, non nul, la localisation $\boldsymbol{A}_{\nu(f)}$ est une intersection complète lisse de dimension relative r sur $\boldsymbol{R}$.
Indication : Utiliser la présentation $\boldsymbol{A}_{\nu(f)} \equiv \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n, Z]/\langle f_{r+1}, \ldots, f_n, Zf - 1\rangle$.

4.5.6. Transversalité de certains fibrés conormaux. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse. Pour toute présentation finie :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{J} = \langle f_1, \ldots, f_s\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] = \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_N] \longrightarrow \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}\,, \qquad (*)$$

la première suite fondamentale de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \xrightarrow{\partial} \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \mathbf{0}$$

est scindée puisque $\boldsymbol{A}$ est lisse (4.3.3).

Notons $\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$, soit $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}}$ le plongement fermé défini par la présentation ci-dessus et fixons un point $x \in \boldsymbol{X}$. Les localisations de $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ et $\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}}$ en x représentent respectivement les espaces cotangents à $\boldsymbol{X}$ et $\mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}}$ au même point, de sorte que la localisation du $\boldsymbol{A}$-module localement libre $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ en x s'identifie naturellement au conormal

à $\boldsymbol{X}$ au point x dans le plongement $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}}$. Le spectre premier de l'algèbre symétrique $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2)$ est alors le schéma affine au-dessus de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ qui réalise «*le fibré conormal du plongement* $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}}$». On notera :

$$\boxed{T^*_{\boldsymbol{X}}\big(\mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}}\big) := \mathrm{Spec}\big(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2)\big)}$$

La proposition suivante est démontrée dans [E] (lemme 3, p. 562) dans le cadre nœthérien, mais sa démonstration est valable en toute généralité.

4.5.7. Proposition : *Soient* $\boldsymbol{R}$ *un anneau commutatif arbitraire et* $\boldsymbol{A}$ *une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre lisse. On se donne une présentation finie*

$$\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] = \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_N] \to \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{0}$$

et l'on considère le plongement fermé $\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}) \subseteq \mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}}$ *associé. Alors, le fibré conormal* $T^*_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}})$ *est intersection complète lisse sur* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$.

Démonstration : D'après le corollaire 4.3.2, on a une première suite fondamentale scindée :

$$\boldsymbol{0} \longrightarrow \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \underset{\partial}{\rightleftarrows} \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \rightleftarrows \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{0}\,. \tag{$*$}$$

Notons $\boldsymbol{C} := \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2)$. L'application du foncteur $\boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{A}} (_)$ à la suite $(*)$ donne clairement une suite également scindée :

$$\boldsymbol{0} \longrightarrow \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \rightleftarrows \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \rightleftarrows \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{0}\,,$$

où l'on a $\boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{X}]/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{C}^N$ et $\boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \equiv \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{A}}$ (voir prop. 1.4.14), par conséquent :

$$\boldsymbol{C}^N \equiv \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{A}} \oplus \big(\boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\big)\,. \tag{$\diamond$}$$

La seconde suite fondamentale associée au morphisme structural de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{C}$,

$$\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \rightleftarrows \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \rightleftarrows \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{A}} \to \boldsymbol{0}\,, \tag{$\dagger$}$$

est également scindée (voir 1.6.3) et le $\boldsymbol{C}$-module $\Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}}$ est ***globalement*** libre de rang N puisque $\Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{C}^N$ d'après $(\dagger)$ et $(\diamond)$.

Ceci étant, comme $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ est un $\boldsymbol{A}$-module projectif de type fini, le schéma $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{C})$ est lisse sur $\boldsymbol{A}$ donc lisse sur $\boldsymbol{R}$ (*cf.* 4.3.7 et 4.3.9) et nous pouvons refaire l'analyse précédente en remplaçant $\boldsymbol{A}$ par $\boldsymbol{C}$. On fixe donc un plongement $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{C}) \subseteq \mathbb{A}^M_{\boldsymbol{R}}$ associé à une présentation finie :

$$\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{K} \longrightarrow \boldsymbol{R}[\mathcal{Y}] := \boldsymbol{R}[Y_1, \ldots, Y_M] \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{0} \tag{$\star$}$$

de première suite fondamentale scindée :

$$\boldsymbol{0} \longrightarrow \boldsymbol{K}/\boldsymbol{K}^2 \rightleftarrows \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathcal{Y}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathcal{Y}]/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{C}^M \rightleftarrows \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{C}^N \to \boldsymbol{0}\,. \tag{$**$}$$

où l'on remarquera que les deux derniers termes sont libres. On considère alors une nouvelle présentation de $\boldsymbol{C}$ en rajoutant N variables à $(\star)$:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{0 \to K' \longrightarrow R[\mathcal{Y},\mathcal{Z}] := R[Y_1,\dots,Y_M,Z_1,\dots,Z_N] \longrightarrow C \to 0} & & \\ Y_i & \longmapsto & \pi(Y_i) \\ Z_i & \longmapsto & 0 \end{array} \qquad (\star\star)$$

où $\boldsymbol{K'/K'^2} \equiv \big(\boldsymbol{K/K^2}\big) \oplus \boldsymbol{C}^N$ (le vérifier !) et, par conséquent, $\boldsymbol{K'/K'^2} \equiv \boldsymbol{C}^M$ d'après $(**)$. La présentation $(\star\star)$ réalise donc un plongement fermé de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{C})$ dans $\mathbb{A}^{N+M}_{\boldsymbol{R}}$ dont le fibré conormal est ***globalement libre***. La fin de la preuve découle alors de l'assertion (0c) du lemme 4.5.3. ∎

4.5.8. Complément sur les algèbres étales

On se donne un anneau $\boldsymbol{R}$, un idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$, une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, et une $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ d'homomorphisme structural noté $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$. On rappelle que lorsque $\boldsymbol{B}$ est une $\boldsymbol{A}$-algèbre étale le morphisme canonique $\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha) : \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A/R}} \to \Omega_{\boldsymbol{B/R}}$ est un isomorphisme (4.3.8). Notons $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R/I}$, $\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{A/I \cdot A}$, $\overline{\boldsymbol{B}} := \boldsymbol{B/I \cdot B}$ et $\overline{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ l'homomorphisme induit par α. Grâce à la stabilité de la lissité par changement de base (4.3.10), l'homomorphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{\alpha}$ est également étale (stabilité de la lissité par changement de base (4.3.10)) et nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & \xrightarrow[\varepsilon]{\alpha} & \boldsymbol{B} \\ {\scriptstyle\nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\nu} \\ \overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow[\varepsilon]{\overline{\alpha}} & \overline{\boldsymbol{B}} \end{array}$$

dont l'interprétation en termes de langage de schémas est que la restriction d'un schéma étale au-dessus d'un schéma $\boldsymbol{S}$, à un sous-schéma fermé de $\boldsymbol{S}$, est un schéma étale au-dessus du sous-schéma en question. La proposition suivante donne une condition permettant de relever un schéma étale au-dessus d'un sous-schéma fermé de $\boldsymbol{S}$ en un schéma étale au-dessus de $\boldsymbol{S}$.

Proposition : *Avec les données précédentes, soit $\overline{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ un morphisme étale et supposons que $\overline{\boldsymbol{B}}$ soit intersection complète sur $\overline{\boldsymbol{A}}$. Il existe alors une $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ intersection complète étale sur $\boldsymbol{A}$ et un morphisme surjectif $p_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}$ tels que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & \xrightarrow[\text{ⓗ}]{\alpha} & \boldsymbol{B} \\ {\scriptstyle\nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_B} \\ \overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow[\text{ⓗ}]{\overline{\alpha}} & \overline{\boldsymbol{B}} \end{array}$$

Démonstration : Soit $\boldsymbol{A}[X_1,\dots,X_m]/\langle \overline{f}_1,\dots,\overline{f}_m\rangle$ une présentation de $\overline{\boldsymbol{B}}$ en tant qu'intersection complète étale. Pour chaque $i = 1,\dots,m$, on note f_i un relèvement de $\overline{f}_i$ dans $\boldsymbol{A}[X_1,\dots,X_m]$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & \xrightarrow{\alpha} & \boldsymbol{A}[X_1,\dots,X_m]/\langle f_1,\dots,f_m\rangle \\ {\scriptstyle\nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\nu} \\ \overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow[\text{ⓗ}]{\overline{\alpha}} & \overline{\boldsymbol{A}}[X_1,\dots,X_m]/\langle \overline{f}_1,\dots,\overline{f}_m\rangle \equiv \overline{\boldsymbol{B}} \end{array}$$

où ν désigne les surjections canoniques. La localisation :

$$\boldsymbol{B} := \big(\boldsymbol{A}[X_1,\dots,X_m]/\langle f_1,\dots,f_m\rangle\big)_{\det[\partial f_i/\partial X_j]}$$

répond alors à la question (*cf.* exercice 4.5.5). ∎

§5. Relèvements

5.1 Cadre général

Soient $\boldsymbol{R}$ anneau commutatif arbitraire et $\boldsymbol{I}$ un idéal de $\boldsymbol{R}$; posons $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$ et considérons les foncteurs de «*réduction modulo* $\boldsymbol{I}$» de $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ vers $\mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{R}})$ et, pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, de $\mathrm{Mod}_{\mathrm{t.f.}}(\boldsymbol{A})$ vers $\mathrm{Mod}_{\mathrm{t.f.}}(\overline{\boldsymbol{A}})$, qui font respectivement correspondre à une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ l'algèbre $\overline{\boldsymbol{A}} := \overline{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ et à un $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ le $\overline{\boldsymbol{A}}$-module $\overline{\boldsymbol{M}} := \overline{\boldsymbol{A}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{M}$ et *mutatis mutandis* pour les morphismes.

Ces foncteurs respectent la lissité et la projectivité, autrement dit : "*la réduction modulo* $\boldsymbol{I}$ *d'une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre lisse est une* $\overline{\boldsymbol{R}}$*-algèbre lisse et pour toute* $\boldsymbol{R}$*-algèbre* $\boldsymbol{A}$*, la réduction modulo* $\boldsymbol{I}$ *d'un* $\boldsymbol{A}$*-module projectif est un* $\overline{\boldsymbol{A}}$*-module projectif*". Dans cette section, nous allons donner des réponses aux trois questions de «*relèvements*» suivantes principalement motivées par l'introduction de la cohomologie de de Rham p-adique qui fera l'objet d'une section ultérieure.

Rel-1) Étant donnée une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$, existe-t-il une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ s'identifie à $\overline{\boldsymbol{A}}$?

Rel-2) Étant donnés une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse $\boldsymbol{A}$ et un $\overline{\boldsymbol{A}}$-module $\overline{\boldsymbol{M}}$ projectif de type fini, dans quelle mesure existe-t-il un $\boldsymbol{A}$-module projectif de type fini dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ s'identifie à $\overline{\boldsymbol{M}}$?

Rel-3) Étant données des $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, et un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{u} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, dans quelle mesure existe-t-il un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres de $\boldsymbol{A}$ vers $\boldsymbol{B}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ s'identifie à $\overline{u}$?

Rel-4) Étant données des $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, et des morphismes de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres homotopes $\overline{u}_1, \overline{u}_2 : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, dans quelle mesure des morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_i : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ que la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ identifie aux $\overline{u}_i$, sont-ils homotopes ?

Toute la difficulté et intérêt de ces questions, résident dans les conditions de lissité imposées dans les relèvements.

Précisons maintenant par des définitions ces notions de relèvements.

5.1.1. Définition : On appelle «*relèvement (resp. plat, lisse)*» d'une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}$ (resp. plate, lisse), la donnée d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ (resp. plate, lisse) dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{A}}$.

De manière équivalente, un relèvement (resp. plat, lisse) de $\overline{\boldsymbol{A}}$, est la donnée d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ (resp. plate, lisse) et d'un morphisme surjectif $p : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ de noyau l'idéal $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A}$.

5.1.2. Définition : Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre. Pour tout $\overline{\boldsymbol{A}}$-module $\overline{\boldsymbol{M}}$, on appellera «*relèvement de* $\overline{\boldsymbol{M}}$» un $\boldsymbol{A}$-module dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{M}}$. Plus généralement, on appellera «*relèvement d'une présentation d'un* $\overline{\boldsymbol{A}}$*-module projectif* »:

$$\overline{\boldsymbol{A}}^{\#} \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{A}}^{\#} \to \overline{\boldsymbol{M}} \to \mathbf{0}\,, \tag{$*$}$$

la donnée d'un $\boldsymbol{A}$-module projectif $\boldsymbol{M}$ et d'une présentation

$$\boldsymbol{A}^{\#} \xrightarrow{L} \boldsymbol{A}^{\#} \to \boldsymbol{M} \to \mathbf{0}\,,$$

tels que $\mathbf{1}_{\overline{\boldsymbol{A}}} \otimes L = \overline{L}$. Lorsque un tel relèvement existe on dira que «*la présentation de module projectif* $(*)$ *se relève à* $\boldsymbol{A}$».

5.2 Relèvements des algèbres lisses

5.2.1. Relèvements des intersections complètes lisses. La proposition suivante est utilisée dans la preuve du théorème d'existence de relèvements 5.2.7.

Proposition : *Soient* $\boldsymbol{R}$ *un anneau et* $\boldsymbol{I}$ *un idéal dans* $\boldsymbol{R}$. *Posons* $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$.

a) *Toute* $\overline{\boldsymbol{R}}$*-algèbre intersection complète lisse (de dimension relative* r*) admet un relèvement intersection complète lisse (de dimension relative* r*) sur* $\boldsymbol{R}$.

b) *Soit* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *une* $\overline{\boldsymbol{R}}$*-algèbre lisse. Alors, le fibré conormal de tout plongement fermé* $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}}) \subseteq \mathbb{A}^N_{\overline{\boldsymbol{R}}}$ *associé à une présentation finie de* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *admet un relèvement intersection complète lisse sur* $\boldsymbol{R}$.

Démonstration :

a) On a une présentation de $\overline{\boldsymbol{A}}$ de la forme :

$$\mathbf{0} \to \langle \bar{g}_{r+1}, \dots, \bar{g}_n \rangle \to \overline{\boldsymbol{R}}[\mathcal{X}] := \overline{\boldsymbol{R}}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \overline{\boldsymbol{A}} \to \mathbf{0}\,,$$

où l'idéal $\bar{\mathbb{J}}$ de $\overline{\boldsymbol{R}}[X_1, \dots, X_n]$ engendré par les mineurs d'ordre $n-r$ de la matrice jacobienne $[\,\partial \bar{g}_i/\partial X_j\,]$ est l'idéal unité. Pour chaque $i = r+1, \dots, n$, notons g_i un relèvement arbitraire de $\bar{g}_i$ dans $\boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_n]$ et notons $\boldsymbol{A}$ la $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation :

$$\mathbf{0} \to \langle g_{r+1}, \dots, g_n \rangle \to \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] := \boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}\,.$$

Soit $\mathbb{J}$ l'idéal de $\boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_n]$ engendré par les mineurs d'ordre $n-r$ de la matrice jacobienne $[\,\partial g_i/\partial X_j\,]$. L'idéal $\bar{\mathbb{J}}$ est clairement l'image de $\mathbb{J}$ par la surjection canonique $\nu : \boldsymbol{R}[\mathcal{X}] \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{R}}[\mathcal{X}]$, en particulier, il existe $g \in \mathbb{J}$ vérifiant $\nu(g) = 1$. On en déduit une surjection $\boldsymbol{A}_g \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ induite par ν qui fait de $\overline{\boldsymbol{A}}$ la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\boldsymbol{A}_g$. D'autre part, $\boldsymbol{A}_g$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse puisque $\mathbf{1}_{k(y)} \otimes dg_{r+1} \wedge \cdots \wedge dg_n \neq 0$ pour tout y dans l'ouvert principal $D(g) \subseteq \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$, ce qui termine la démonstration de (a). La présentation $\boldsymbol{A}_g = \boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_n, Z]/\langle g_{r+1}, \dots, g_n, gZ - 1\rangle$ permet de voir que $\boldsymbol{A}_g$ est également intersection complète sur $\boldsymbol{R}$ (*cf.* ex. 4.5.5).

b) Résulte de l'assertion (a) grâce à la proposition 4.5.7 qui affirme que le fibré conormal en question est intersection complète lisse sur $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{R}})$. ∎

5.2.2. Relèvements des modules projectifs

5.2.3. Définition : Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre. On appellera «*voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$*» toute $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ **étale** sur $\boldsymbol{A}$, telle que la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ du morphisme structural de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$ est un isomorphisme.

5.2.4. Définition : On dira que le couple $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ «*vérifie la propriété de relèvement*» si pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$ et pour toute présentation libre et finie de $\overline{\boldsymbol{A}}$-module projectif de type fini $\overline{\boldsymbol{M}}$:

$$\overline{\boldsymbol{A}}^p \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{A}}^q \xrightarrow{\overline{\Pi}} \overline{\boldsymbol{M}} \to \boldsymbol{0}\,, \tag{$\diamond$}$$

il existe un voisinage étale $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$ tel que la présentation de module projectif ($\diamond$) se relève à $\boldsymbol{A}_\varepsilon$.

Théorème : *Pour tout anneau $\boldsymbol{R}$ et tout idéal $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{R}$, le couple $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ vérifie la propriété de relèvement.*

Démonstration : Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini et notons $\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}$. Donnons-nous une présentation libre et finie d'un $\overline{\boldsymbol{A}}$-module projectif de type fini $\overline{\boldsymbol{M}}$:

$$\overline{\boldsymbol{A}}^p \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{A}}^q \xrightarrow{\overline{\Pi}} \overline{\boldsymbol{M}} \to \boldsymbol{0}\,. \tag{$\diamond$}$$

Comme $\overline{\boldsymbol{M}}$ est un $\overline{\boldsymbol{A}}$-module projectif, la surjection de $\overline{\boldsymbol{A}}$-modules $\overline{\Pi}$ admet une section $\overline{\sigma}$, la composée $\overline{\psi} := \overline{\sigma}\circ\overline{\Pi} \in \mathrm{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q)$ vérifie $\overline{\psi}^2 = \overline{\psi}$ et $\mathrm{im}(\overline{\psi}) \simeq \overline{\boldsymbol{M}}$. L'endomorphisme $\overline{\psi}$ est donc idempotent et $\overline{\boldsymbol{M}}$ s'identifie au sous-module de $\overline{\boldsymbol{A}}^q$ des vecteurs propres associés à la valeur propre 1. On a ainsi une nouvelle présentation libre et finie de $\overline{\boldsymbol{M}}$:

$$\overline{\boldsymbol{A}}^q \xrightarrow{1-\overline{\psi}} \overline{\boldsymbol{A}}^q \longrightarrow \overline{\boldsymbol{M}} \to \boldsymbol{0}\,, \qquad \text{avec } \overline{\psi}^2 = \overline{\psi}, \tag{$\dagger$}$$

qui est un cas particulier des présentations considérées dans le théorème et que nous étudierons dans un premier temps.

Notons $\psi \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ un relèvement quelconque de $\overline{\psi}$. Comme $\overline{\psi}$ est idempotent, on a $\det(2\overline{\psi}-1) = \pm 1$ et donc $\det(2\psi-1) = \pm 1 + x$, pour un certain $x \in \boldsymbol{I}$. Ainsi, quitte à remplacer $\boldsymbol{A}$ par le localisé $\boldsymbol{A}_{\pm 1+x}$ (voisinage ouvert de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$), on peut supposer que l'endomorphisme $2\psi - 1 \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ est inversible.

Nous allons montrer maintenant comment déformer l'endomorphisme ψ (quitte à remplacer $\boldsymbol{A}$ par un voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$) pour en faire un relèvement **idempotent** de $\overline{\psi}$.

– *Supposons l'idéal $\boldsymbol{I}$ principal de générateur noté π.*
On a alors $\psi^2 - \psi = \pi\alpha$ pour un certain $\alpha \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$.

Considérons l'algèbre de polynômes à q^2 inconnues $\boldsymbol{A}[\mathcal{X}] := \boldsymbol{A}[X_{1,1},\ldots,X_{q,q}]$ et notons $\beta \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}[\mathcal{X}]}(\boldsymbol{A}[\mathcal{X}]^q)$ l'endomorphisme dont la matrice $[\,\beta_{i,j}\,]$, par rapport à la base canonique

de $\boldsymbol{A}[\mathcal{X}]$, vérifie $\beta_{i,j} = X_{i,j}$. Soit :

$$R := \alpha + (2\psi - 1)\beta + \pi\beta^2 \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}[\mathcal{X}]}(\boldsymbol{A}[\mathcal{X}]^q)\,, \qquad (\ddagger)$$

de matrice associée $[\,R_{i,j}\,]$. On pose : $\boldsymbol{A}_1 := \boldsymbol{A}[\mathcal{X}]/\langle R_{i,j}\rangle$.

Le jacobien $f := \det[\,\partial R_{i,j}/\partial X_{k,l}\,]$ modulo π est le déterminant de la matrice $\big[\,\partial\overline{R}_{i,j}/\partial_{X_{k,l}}\,\big]$ qui vaut ± 1 puisque $\big[\,\overline{R}_{i,j}\,\big] = [\,\overline{\alpha}_{i,j}\,] + (2\big[\,\overline{\psi}_{i,j}\,\big] - 1)[\,X_{i,j}\,]$, ce qui implique que l'application tangente à l'application affine $\overline{R} : \overline{\boldsymbol{A}}^q \to \overline{\boldsymbol{A}}^q$ est un isomorphisme de valeurs propres ± 1 étant donné que $\overline{\psi}$ est idempotent. On a donc $f = \pm 1 + \pi P$ pour un certain $P \in \boldsymbol{A}[\mathcal{X}]$, et l'algèbre $\boldsymbol{A}_{1,f} = \boldsymbol{A}[\mathcal{X}]_f/\langle R_{i,j}\rangle$ est, par conséquent, intersection complète étale sur $\boldsymbol{A}$ (voir exercice 4.5.5). De plus, la réduction modulo π de $\boldsymbol{A}_{1,f}$, *i.e.* $\overline{\boldsymbol{A}}[\mathcal{X}]/\big\langle\overline{R}_{i,j}\big\rangle$, est clairement isomorphe (par le morphisme structural) à $\overline{\boldsymbol{A}}$ puisque $(2\overline{\psi}-1)$ est inversible. La $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{A}_{1,f}$ est donc un voisinage étale de π dans $\boldsymbol{A}$.

Nous étudions maintenant le problème de la commutation de ψ et de $\pi\cdot\beta$.
Comme $\pi\alpha = \psi^2 - \psi$ commute à ψ et que R est nul dans $\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}_{1,f}}(\boldsymbol{A}_{1,f}{}^q)$, l'égalité $(\ddagger)$ donne :

$$[\psi, \pi\beta] = -\pi(2\psi - 1)^{-1}(\beta[\psi, \pi\beta] + [\psi, \pi\beta]\beta)\,.$$

Notons $[\,t_{i,j}\,]$ la matrice de l'endomorphisme $[\psi, \pi\beta]$ relative à la base canonique de $\boldsymbol{A}_{1,f}{}^q$. Le développement de la dernière égalité donne lieu à une égalité de la forme :

$$\begin{bmatrix} t_{1,1} \\ \vdots \\ t_{q,q} \end{bmatrix} = \pi\cdot\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} t_{1,1} \\ \vdots \\ t_{q,q} \end{bmatrix}$$

où $\boldsymbol{Q}$ est une matrice à q^2 lignes et colonnes et à coefficients dans $\pi\cdot\boldsymbol{A}_{1,f}$. Comme le déterminant de $\mathbf{1} - \pi\cdot\boldsymbol{Q}$ est congruent à 1 modulo π, le vecteur $(t_{1,1}, \ldots, t_{q,q})$ (et donc le commutateur $[\psi, \pi\beta]$) est nul dans la localisation $\boldsymbol{A}_\varepsilon := (\boldsymbol{A}_{1,f})_{\det(\mathbf{1}-\pi\cdot\boldsymbol{Q})}$ qui est bien un voisinage ouvert de π dans $\boldsymbol{A}_{1,f}$. (On observera, en passant, que $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ est également une intersection complète étale sur $\boldsymbol{A}$.)

Grâce à la commutation de ψ et $\pi\beta$ dans $\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon}(\boldsymbol{A}_\varepsilon{}^q)$, le développement de la différence $(\psi + \pi\beta)^2 - (\psi + \pi\beta)$ est égal à πR d'après $(\ddagger)$, et $\psi + \pi\beta$ est un idempotent de $\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon}(\boldsymbol{A}_\varepsilon^q)$ qui relève $\overline{\psi}$, puisque $R = 0$ dans $\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon}(\boldsymbol{A}_\varepsilon^q)$ par construction.

– *Lorsque l'idéal $\boldsymbol{I}$ est de type fini : $\boldsymbol{I} = \langle\pi_1, \ldots, \pi_m\rangle$ avec $m > 1$.*
Notons $\boldsymbol{A}' := \boldsymbol{A}/\pi_1\cdot\boldsymbol{A}$. On peut supposer, par hypothèse de récurrence sur m, qu'il existe une intersection complète étale $\boldsymbol{A}'_\varepsilon$ sur $\boldsymbol{A}'$ et un relèvement idempotent $\psi' \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}'}(\boldsymbol{A}'_\varepsilon{}^q)$ de $\overline{\psi} \in \mathrm{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q)$.

Fixons une présentation de $\boldsymbol{A}'_\varepsilon$ sous la forme $\boldsymbol{A}'_\varepsilon = \boldsymbol{A}[Z_1, \ldots, Z_n]/\langle f'_1, \ldots, f'_n\rangle$ avec $\det[\,\partial f'_i/\partial Z_j\,]$ [redacted] inversible dans $\boldsymbol{A}'_\varepsilon$. La surjection canonique $\boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}'$ induit une surjection $\boldsymbol{A}[Z_1, \ldots, Z_n] \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}'[Z_1, \ldots, Z_n]$ et, si f_i désigne un relèvement de f'_i dans $\boldsymbol{A}[Z_1, \ldots, Z_n]$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & \longrightarrow & \boldsymbol{A}[Z_1, \ldots, Z_n]/\langle f_1, \ldots, f_n\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boldsymbol{A}' & \xrightarrow[\text{ét}]{} & \boldsymbol{A}'_\varepsilon \equiv \boldsymbol{A}'[Z_1, \ldots, Z_n]/\langle f'_1, \ldots, f'_n\rangle \end{array}$$

La $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{A}_\varepsilon$, localisation de $\boldsymbol{A}[Z_1,\dots,Z_n]/\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ par $\det[\,\partial f_i/\partial Z_j\,]$, est clairement une intersection complète lisse, voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$ et le diagramme induit suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & \xrightarrow[\pitchfork]{} & \boldsymbol{A}_\varepsilon \\ {\scriptstyle \mathrm{mod}\ \pi_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{mod}\ \pi_1} \\ \boldsymbol{A}' & \xrightarrow[\pitchfork]{} & \boldsymbol{A}'_\varepsilon \end{array}$$

Et, toujours par hypothèse inductive, il existe une $\boldsymbol{A}_\varepsilon$-algèbre, intersection complète étale $(\boldsymbol{A}_\varepsilon)_\varepsilon$, voisinage de $\langle\pi_1\rangle$ dans $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ (donc intersection complète étale et voisinage de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$), telle que ψ' se relève en un idempotent $\psi\in\mathrm{End}_{(\boldsymbol{A}_\varepsilon)_\varepsilon}((\boldsymbol{A}_\varepsilon)_\varepsilon{}^q)$.

Ceci étant, posons $\boldsymbol{M}_\varepsilon := \mathrm{im}(\psi_\varepsilon)$. Comme ψ_ε est un endomorphisme idempotent, on a $\boldsymbol{A}_\varepsilon^q = \boldsymbol{M}_\varepsilon \oplus \mathrm{im}(1-\psi_\varepsilon)$, et $\boldsymbol{M}_\varepsilon$ est un $\boldsymbol{A}_\varepsilon$-module projectif de type fini. La présentation $\boldsymbol{A}_\varepsilon^q \xrightarrow{1-\psi_\varepsilon} \boldsymbol{A}_\varepsilon^q \to \boldsymbol{M}_\varepsilon \to \boldsymbol{0}$ est donc un relèvement de la présentation de module projectif (†), ce qui termine la démonstration du théorème pour ce type de présentations.

On reprend maintenant la donnée d'une présentation de module projectif de la forme générale ($\diamond$) :

$$\overline{\boldsymbol{A}}^p \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{A}}^q \xrightarrow{\overline{\Pi}} \overline{\boldsymbol{M}} \to \boldsymbol{0}\,.$$

Fixons une section $\overline{\sigma}$ de $\overline{\Pi}$ et notons $\overline{\psi} := \overline{\sigma}\circ\overline{\Pi}$. D'après l'étude précédente, il existe une $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}$, intersection complète étale et voisinage de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$, telle que l'idempotent $\overline{\psi}\in\mathrm{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q)$ se relève en un idempotent $\psi_{\tilde\varepsilon}\in\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}}(\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}^q)$. Notons $L_1\in\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}}(\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}^p,\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}^q)$ un relèvement quelconque de $\overline{\boldsymbol{L}}$ et posons $L_{\tilde\varepsilon}=(1-\psi_{\tilde\varepsilon})\circ L_1$ de sorte que la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $L_{\tilde\varepsilon}$ s'identifie toujours à $\overline{L}$:

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}^p & \xrightarrow[(1-\psi_{\tilde\varepsilon})\circ L_1]{L_{\tilde\varepsilon}} & \boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}^q & & \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\ \overline{\boldsymbol{A}}^p & \xrightarrow{\overline{L}} & \overline{\boldsymbol{A}}^q & \twoheadrightarrow & \overline{\boldsymbol{M}}\to\boldsymbol{0} \end{array}$$

Mais, si $L_{\tilde\varepsilon}$ relève bien $\overline{L}$, rien n'assure, *a priori*, que son conoyau soit projectif, ce pour quoi il suffirait que l'on ait $\mathrm{im}(L_{\tilde\varepsilon})=\mathrm{im}(1-\psi_{\tilde\varepsilon})$, puisque $\psi_{\tilde\varepsilon}$ est idempotent. Or, le conoyau $\mathcal{K}$ de l'inclusion $\mathrm{im}(L_{\tilde\varepsilon})\subseteq\mathrm{im}(1-\psi_{\tilde\varepsilon})$ est un $\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}$-module de type fini dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est nulle, autrement dit, on a $\boldsymbol{I}\cdot\mathcal{K}=\mathcal{K}$. Il existe par conséquent un élément g de $\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}$ congruent à 1 modulo $\boldsymbol{I}$, tel que le foncteur (exact) de localisation $\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon,g}\otimes_{\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}}(_)$ annule $\mathcal{K}$ (Nakayama). On pose alors $\boldsymbol{A}_\varepsilon := \boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon,g}$ et $L_\varepsilon := \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon}\otimes L_{\tilde\varepsilon}$. (On remarquera que la $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ est toujours intersection complète étale et voisinage de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$.)

L'image de L_ε s'identifie bien maintenant à l'image de l'idempotent $\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon}\otimes(1-\psi_{\tilde\varepsilon})$ de supplémentaire $\boldsymbol{M}_\varepsilon := \mathrm{im}(\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon}\otimes\psi_{\tilde\varepsilon})$. Le $\boldsymbol{A}_\varepsilon$-module $\boldsymbol{M}_\varepsilon$ est donc projectif de type fini, et nous avons la présentation :

$$\boldsymbol{A}_\varepsilon^p \xrightarrow{L_\varepsilon} \boldsymbol{A}_\varepsilon^q \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}_\varepsilon \to \boldsymbol{0}$$

qui est un relèvement de ($\diamond$). ∎

5.2.5. Remarque : La preuve de l'existence du relèvement ψ se simplifie remarquablement dans le cas où l'idéal $\boldsymbol{I}$ est nilpotent (plus généralement lorsque chaque élément de $\boldsymbol{I}$ est nilpotent). Dans ce cas on peut prendre $\boldsymbol{A}_\varepsilon := \boldsymbol{A}$. En effet, dans ce cas, on a $\psi^2 - \psi = \alpha$, pour un certain idéal de type fini $\boldsymbol{I}' \subseteq \boldsymbol{I}$ et un élément $\alpha \in \boldsymbol{I}' \cdot \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ qui commute clairement à ψ. Supposons $\alpha \in (\boldsymbol{I}')^r \cdot \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ et posons :

$$\psi' := \psi + (1-2\psi)^{-1}\alpha\,.$$

L'endomorphisme ψ' relève $\overline{\psi}$ et vérifie :

$$\psi'^2 - \psi' = (1-2\psi)^{-2}\alpha^2 =: \alpha' \in (\boldsymbol{I}')^{2r} \cdot \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)\,.$$

de sorte que l'itération de cette idée permet, grâce à la nilpotence de $\boldsymbol{I}'$, de construire un relèvement **idempotent** $\psi_\varepsilon \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ de $\overline{\psi}$.

5.2.6. Existence des relèvements des algèbres lisses. Le théorème suivant et sa démonstration sont transcription presque littérale du théorème de relèvement d'algèbres lisses sur un couple hensélien nœthérien de l'article [E] de Renée Helkik (*cf. loc. cit.* §4 p. 580).

5.2.7. Théorème : *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif arbitraire et $\boldsymbol{I}$ un idéal de $\boldsymbol{R}$. Toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse se relève en une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse.*

Démonstration : Soit $\overline{\boldsymbol{B}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse et fixons une présentation finie de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre : $\overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{R}}[X_1,\dots,X_N]/\overline{\boldsymbol{J}}$. Le $\overline{\boldsymbol{B}}$-module $\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2$ est alors projectif de type fini. Notons $\overline{\boldsymbol{C}} := \mathsf{S}^*_{\overline{\boldsymbol{B}}}(\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2)$ la $\overline{\boldsymbol{B}}$-algèbre symétrique de $\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2$, de sorte que $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$ est le fibré conormal à $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}})$ dans le plongement $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}}) \subseteq \mathbb{A}^N_{\overline{\boldsymbol{R}}}$ déterminé par la présentation ci-dessus (4.5.6). Notons $f : \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}}) \to \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}})$ le morphisme de schémas induit par l'homomorphisme structural de $\overline{\boldsymbol{B}}$ dans $\overline{\boldsymbol{C}}$. L'homomorphisme de $\overline{\boldsymbol{B}}$-algèbres $\sigma_0 : \overline{\boldsymbol{C}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, nul sur $\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2$, donne le morphisme de schémas « *section nulle* » $\mathrm{Spec}(\sigma_0) : \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}}) \to \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$. On a $f \circ \mathrm{Spec}(\sigma_0) = \mathrm{id}_{\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}})}$.

Comme ces données sont conformes aux hypothèses de la proposition 5.2.1-(0b), on peut fixer pour la suite une $\boldsymbol{R}$-algèbre (intersection complète) lisse $\boldsymbol{C}$ qui relève $\overline{\boldsymbol{C}}$. On a ainsi le diagramme des morphismes canoniques ci-après.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\boldsymbol{C}) & \hookleftarrow & \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}}) \\ \downarrow & & f\downarrow \uparrow \text{section nulle} \\ & & \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}}) \\ & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R}) & \hookleftarrow & \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{R}}) \end{array} \qquad (\mathcal{D})$$

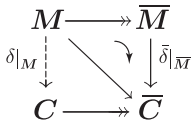
Le $\overline{\boldsymbol{C}}$-module $\overline{\boldsymbol{M}} := \overline{\boldsymbol{C}} \otimes_{\overline{\boldsymbol{B}}} \left(\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2\right)$ est projectif de type fini et, quitte à remplacer $\boldsymbol{C}$ par un voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{C}$, nous pouvons supposer, par la propriété de relèvement du couple $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$, qu'il existe un $\boldsymbol{C}$-module projectif de type fini $\boldsymbol{M}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{M}}$. L'algèbre $\boldsymbol{D} := \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{M})$ est lisse sur $\boldsymbol{C}$ puisque $\boldsymbol{M}$ est projectif de type fini (4.3.7).

Complétons le diagramme $(\mathcal{D})$ par les morphismes canoniques indiqués ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Spec}\big(\mathsf{S}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{M})\big) = \operatorname{Spec}(\boldsymbol{D}) & \hookleftarrow & \operatorname{Spec}\big(\overline{\boldsymbol{C}} \otimes_{\boldsymbol{B}} \overline{\boldsymbol{C}}\big) = \operatorname{Spec}\big(\mathsf{S}_{\overline{\boldsymbol{C}}}(\overline{\boldsymbol{M}})\big) & & \\
\text{section nulle}\uparrow\downarrow\ \Delta & & \overline{\Delta}\uparrow\downarrow\uparrow\ \text{section nulle} & & \\
\operatorname{Spec}(\boldsymbol{C}) & \hookleftarrow & \operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}}) & & \\
\big\downarrow & & f\downarrow\uparrow\ \text{section nulle} & & (\mathcal{D}') \\
\big\downarrow\ (\mathscr{D}) & & \operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}}) & & \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \\
\operatorname{Spec}(\boldsymbol{R}) & \hookleftarrow & \operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{R}}) & &
\end{array}$$

où $\overline{\Delta}$ désigne la « *section diagonale* » du morphisme structural de $\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}}\otimes_{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{C}})$ vers $\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$. Il s'agit du morphisme de schémas associé à l'homomorphisme de $\overline{\boldsymbol{C}}$-algèbres $\bar{\delta} : \mathsf{S}^*_{\overline{\boldsymbol{C}}}(\overline{\boldsymbol{M}}) \to \boldsymbol{C}$ défini par la forme $\overline{\boldsymbol{C}}$-linéaire :

$$\begin{array}{rcl}
\bar{\delta}|_{\overline{\boldsymbol{M}}} : \overline{\boldsymbol{M}} = \overline{\boldsymbol{C}} \otimes_{\boldsymbol{B}} \big(\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2\big) & \longrightarrow & \overline{\boldsymbol{C}} = \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{B}}\big(\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2\big) \\
c \otimes v & \longmapsto & c \cdot v
\end{array} \qquad (\ddagger)$$

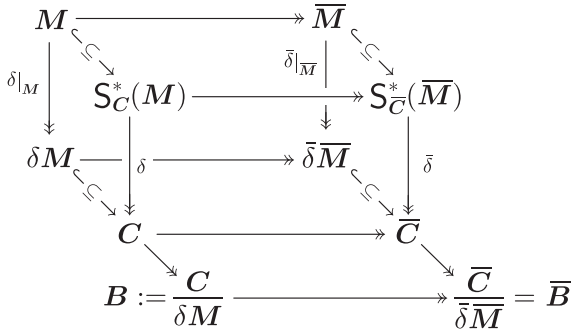


Comme $\boldsymbol{D}$ est l'algèbre symétrique de $\boldsymbol{M}$, l'homomorphisme $\bar{\delta}$ admet un relèvement en un morphisme de $\boldsymbol{C}$-algèbres $\delta : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ si et seulement la forme $\overline{\boldsymbol{C}}$-linéaire $\bar{\delta}|_{\overline{\boldsymbol{M}}} : \overline{\boldsymbol{M}} \to \overline{\boldsymbol{C}}$ se relève en une forme $\boldsymbol{C}$-linéaire $\delta|_{\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{C}$. Le diagramme ci-après, où les lignes désignent les morphismes de réduction modulo $\boldsymbol{I}$, explique l'existence du relèvement $\delta|_{\boldsymbol{M}}$ comme conséquence du fait que $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{C}$-module projectif. La section diagonale :

$$\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}}) \underset{\operatorname{Spec}(\bar{\delta})}{\overset{\overline{\Delta}}{\leftarrow\!\!\!\rightarrow}} \operatorname{Spec}\big(\overline{\boldsymbol{C}} \otimes_{\boldsymbol{B}} \overline{\boldsymbol{C}}\big) = \operatorname{Spec}\big(\mathsf{S}^*_{\overline{\boldsymbol{C}}}(\overline{\boldsymbol{M}})\big)$$

se relève donc bien en une section $\Delta : \operatorname{Spec}(\boldsymbol{C}) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(\boldsymbol{D})$ du morphisme structural $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{D}) \to \operatorname{Spec}(\boldsymbol{C})$.

Nous avons ainsi le diagramme commutatif suivant :



où les morphismes horizontaux sont ceux déterminés par la réduction modulo $\boldsymbol{I}$. On remarquera également que le module $\delta\boldsymbol{M}$ est en fait un idéal de $\boldsymbol{C}$ puisque δ est un morphisme de $\boldsymbol{C}$-algèbres. Enfin, l'équivalence $\overline{\boldsymbol{B}} \equiv \overline{\boldsymbol{C}}/\bar{\delta}\overline{\boldsymbol{M}}$ résulte, quant à elle, de la définition de $\bar{\delta}$ $(\ddagger)$. (Heuristiquement, $\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}})$ apparaît comme l'intersection de la section nulle et de la section diagonale de la fibration $\operatorname{Spec}(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{C}}(\overline{\boldsymbol{M}})) \twoheadrightarrow \operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$.)

Nous montrons maintenant que la $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{C}/\delta\boldsymbol{M}$ est lisse.

Compte tenu des constructions précédentes, on dispose de la suite d'applications

$$\overline{\boldsymbol{M}} \xrightarrow{\bar{\delta}} \overline{\boldsymbol{C}} \xrightarrow{d_{\overline{C}/\overline{R}}} \Omega_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{R}}} \xrightarrow{\bar{\nu}} \Omega_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{B}}} = \overline{\boldsymbol{M}} \tag{$*$}$$

où $\bar{\nu}$ est la surjection donnée par la seconde suite fondamentale associée à l'homomorphisme structural de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres de $\overline{\boldsymbol{B}}$ dans $\overline{\boldsymbol{C}}$. Les applications $\bar{\delta}$ et $\bar{\nu}$ sont $\overline{\boldsymbol{C}}$-linéaires et lorsque l'on tensorise chaque terme de $(*)$ par $\overline{\boldsymbol{C}}/\bar{\delta}\overline{\boldsymbol{M}} = \overline{\boldsymbol{B}}$, l'application composée $\mathbf{1}_{\overline{\boldsymbol{B}}} \otimes (d_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{B}}} \circ \bar{\delta})$ le devient également ; le morphisme de $\overline{\boldsymbol{C}}$-modules $\mathbf{1}_{\overline{\boldsymbol{B}}} \otimes (\bar{\nu} \circ d_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{B}}} \circ \bar{\delta}) : \overline{\boldsymbol{B}} \otimes_{\overline{\boldsymbol{C}}} \overline{\boldsymbol{M}} \to \overline{\boldsymbol{B}} \otimes_{\overline{\boldsymbol{C}}} \overline{\boldsymbol{M}}$ est alors l'identité d'après la définition même de $\bar{\delta}$ dans $(\ddagger)$.

Ceci étant, le $\boldsymbol{C}$-module $\Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}}$ est projectif car $\boldsymbol{C}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$, et le morphisme $\bar{\nu}$ se relève en un morphisme de $\boldsymbol{C}$-modules ν. On a :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} & \overset{\nu}{\dashrightarrow} & \boldsymbol{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{R}}} & \xrightarrow{\bar{\nu}} & \Omega_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{B}}} = \overline{\boldsymbol{M}} \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont ceux déterminés par la réduction modulo $\boldsymbol{I}$.

La suite $(*)$ tensorisée par $\overline{\boldsymbol{B}}$ se relève donc en une suite de morphismes de $\boldsymbol{C}$-modules :

$$\boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{M} \xrightarrow{\mathbf{1}_B \otimes (d_{C/R} \circ \delta)} \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{C}} \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\mathbf{1}_B \otimes \nu} \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{M} \tag{$**$}$$

$$\xi$$

dont la composée, notée ξ, est l'identité modulo $\boldsymbol{I}$. Le conoyau de ξ est donc annulé par la réduction modulo $\boldsymbol{I}$, ce qui signifie que $\boldsymbol{I} \cdot \operatorname{coker}(\xi) = \operatorname{coker}(\xi)$. Comme $\boldsymbol{M}$ est de type fini, un argument comme pour le lemme de Nakayama montre que l'idéal dans $\boldsymbol{C}$, annulateur de $\operatorname{coker}(\xi)$, contient un élément de la forme $g = 1 + x \cdot c$, avec $x \in \boldsymbol{I}$, de sorte que, quitte à remplacer $\boldsymbol{C}$ par le localisé $\boldsymbol{C}_g$ (voisinage ouvert de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{C}$), on peut supposer ξ surjectif. Mais alors, comme $\boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{B}$-module projectif, il suit que $\ker(\xi)$ est un facteur direct de $\boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{M}$ annulé également par la réduction modulo $\boldsymbol{I}$. Par conséquent, en remplaçant une fois de plus si besoin $\boldsymbol{C}$ par un nouveau voisinage de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{C}$, on peut supposer le morphisme ξ **bijectif**.

On a d'autre part la factorisation de $\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \otimes (d_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \circ \delta)$ en :

$$\boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{M} \xrightarrow{\delta} \frac{\delta \boldsymbol{M}}{(\delta \boldsymbol{M})^2} \xrightarrow{\partial} \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{C}} \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}}$$

$$\mathbf{1}_B \otimes (d_{C/R} \circ \delta)$$

où ∂ est le morphisme de la première suite fondamentale associée à la surjection canonique $\boldsymbol{C} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}/\delta \boldsymbol{M}$. La bijectivité de ξ implique alors que le morphisme ∂ admet une rétraction. La $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ est par conséquent lisse d'après 4.3.5 et le théorème est démontré.

■

5.2.8. Remarque : Soient $\overline{\boldsymbol{A}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse et $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse relevant $\overline{\boldsymbol{A}}$. Posons $\boldsymbol{X} := \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{S} := \operatorname{Spec}(\boldsymbol{R})$ et soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ le morphisme structural. Il convient de souligner que si le théorème 5.2.7 affirme en toute généralité l'existence de $\boldsymbol{A}$, il ne donne en revanche aucune information sur l'image de f.

On démontre que lorsque $\boldsymbol{R}$ est nœthérien, $\mathrm{im}(f)$ est nécessairement ouvert dans $\boldsymbol{S}$ (voir [Har] §III ex. 9.1 p. 266) et l'on a $\mathrm{im}(f) = \boldsymbol{S}$ pour tout anneau de valuation discrète $\boldsymbol{R}$ (5.4.9). Mais en dehors de ces cas, l'égalité $\mathrm{im}(f) = \boldsymbol{S}$ n'a aucune raison *a priori* d'être vérifiée. Autrement dit, le théorème n'exclut pas que l'on puisse avoir $k(\mathfrak{P}) \otimes \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, pour certains idéaux premiers de $\boldsymbol{R}$. L'exercice 4.3.4 fournit bien d'exemples de ce phénomène. En effet, soit $\boldsymbol{G}$ un groupe abélien fini de cardinal $m := |\boldsymbol{G}|$ et soit p un nombre premier ne divisant pas m. La $\mathbb{F}_p$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}} := \mathbb{F}_p[\boldsymbol{G}]$ est alors lisse et isomorphe à la réduction modulo p de la $\mathbb{Z}$-algèbre lisse $\boldsymbol{A} := \{1, m, m^2, \ldots\}^{-1}\,\mathbb{Z}[\boldsymbol{G}]$. Il est clair dans cet exemple que $\mathbb{F}_q \otimes \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ pour tout nombre premier q qui divise m ; l'image du morphisme structural $f : \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est, dans ce cas, le complémentaire de l'ensemble (fini) de tels nombres premiers.

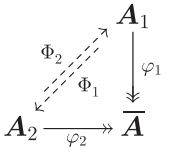
5.2.9. Le problème de l'unicité des relèvements d'une algèbre lisse. Le dernier théorème montre que pour tout couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ les $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses admettent des relèvements lisses. Une question naturelle alors est de savoir à quelle condition deux relèvements d'une même algèbre lisse sont isomorphes.

Lorsque l'idéal $\boldsymbol{I}$ n'est pas nilpotent, on construit facilement des exemples de relèvements non isomorphes. Par exemple, pour tout entier m et tout nombre premier p ne divisant pas m (‡), l'anneau $\boldsymbol{A}_m := \{1, m, m^2, \ldots\}^{-1}\mathbb{Z}$ est lisse sur $\mathbb{Z}$ et relève $\mathbb{F}_p$. Or, deux algèbres $\boldsymbol{A}_{m_1}$ et $\boldsymbol{A}_{m_2}$ vérifiant (‡) sont isomorphes en tant que $\mathbb{Z}$-algèbres, si et seulement si, $m_1 = m_2$. (Voir 6.1-(**(7)**) pour d'autres exemples de ce phénomène.)

Il suffira, par contre, que l'idéal $\boldsymbol{I}$ soit nilpotent pour que tout relèvement soit unique à isomorphisme (non canonique) près.

5.2.10. Proposition : *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau arbitraire et $\boldsymbol{I}$ un idéal nilpotent de $\boldsymbol{R}$. Soient $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{A}_2$ deux $\boldsymbol{R}$-algèbres* ***lisses*** *telles que leurs réductions $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ et $\overline{\boldsymbol{A}}_2$ sont des $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres isomorphes. Alors, les $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{A}_2$ sont isomorphes.*

Démonstration : Notons $\overline{\boldsymbol{A}}$ la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\boldsymbol{A}_1$. Les données du théorème nous emmènent à considérer deux surjections de noyaux nilpotents $\varphi_i : \boldsymbol{A}_i \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$:



Il existe alors, par 4.2.7-(0d), deux morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\Phi_1 : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$ et $\Phi_2 : \boldsymbol{A}_2 \to \boldsymbol{A}_1$ vérifiant $\varphi_2 \circ \Phi_1 = \varphi_1$ et $\varphi_1 \circ \Phi_2 = \varphi_2$. En particulier, $\Phi_2 \circ \Phi_1$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres de $\boldsymbol{A}_1$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est l'identité sur $\overline{\boldsymbol{A}}$ et *mutatis mutandis* pour $\Phi_1 \circ \Phi_2$.

L'homomorphisme $h := \Phi_2 \circ \Phi_1$ est un isomorphisme. En effet, pour tout $a \in \boldsymbol{A}_1$ on a $a = h(a) \bmod \boldsymbol{I}$ et si l'on se donne $b \in \boldsymbol{A}$ tel que $a = h(b) \bmod \boldsymbol{I}^s$, les égalités :

$$a = h(b) + \sum_{i=1}^{r} x_i \cdot b_i = h(b) + \sum_{i=1}^{r} x_i \cdot \Big(h(b_i) + \sum_{j=1}^{r_i} x_{i,j} \cdot b_{i,j}\Big)$$
$$= h\Big(b + \sum_{i=1}^{r} x_i \cdot b_i\Big) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r_i} x_i \cdot x_{i,j} \cdot b_{i,j}$$

avec $x_i \in \boldsymbol{I}^s$, $x_{i,j} \in \boldsymbol{I}$ et $b_* \in \boldsymbol{A}$, montrent que pour chaque $s \in \mathbb{N}$, il existe b_s tel que $a = h(b_s) \bmod \boldsymbol{I}^s$. Comme $\boldsymbol{I}$ est nilpotent, h est surjectif.

Tout élément $a \in \ker(h)$ vérifie $a \in \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A}$ et si nous supposons $a \neq 0$, il existe un entier positif s tel que $a \in \boldsymbol{I}^s \cdot \boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{I}^{s+1} \cdot \boldsymbol{A}$. Mais alors, on considère une expression de a de la forme $a = \sum_i x_i \cdot a_i$, avec $x_i \in \boldsymbol{I}^s$, et l'on observe que :

$$0 = h(a) = \sum_i x_i \cdot h(a_i) = \sum_i x_i \cdot a_i + \sum_{i,j} x_i x_{i,j} \cdot a_{i,j}\,,$$

d'où $a = -\sum_{i,j} x_i x_{i,j} \cdot a_{i,j} \in \boldsymbol{I}^{s+1} \cdot \boldsymbol{A}$, ce qui est contradictoire. Par conséquent, l'homomorphisme h est injectif.

Comme ces arguments sont également valables pour $\Phi_1 \circ \Phi_2$, on déduit que chaque Φ_i est un isomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres et la proposition est prouvée ∎

5.3 Relèvements d'homomorphismes à source lisse

Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux $\boldsymbol{R}$-algèbres et soit $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres. Par réduction modulo $\boldsymbol{I}$, on obtient le morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$; on dit alors que « $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *est un relèvement de* $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ ». Plus généralement :

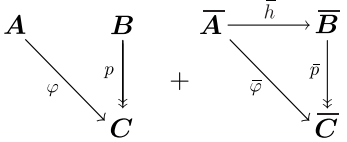
5.3.1. Définition : Soit $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres, on appelle « *relèvement de* $\overline{h}$ » la donnée d'un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, et des morphismes surjectifs de $\boldsymbol{R}$-algèbres $p_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ et $p_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}$ tels que $p_{\boldsymbol{B}} \circ h = \overline{h} \circ p_{\boldsymbol{A}}$. Soit, en termes de diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & \xrightarrow{h} & \boldsymbol{B} \\ {\scriptstyle p_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_B} \\ \overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow{\overline{h}} & \overline{\boldsymbol{B}} \end{array}$$

Dans cette section nous allons étudier les questions de relèvements d'homomorphismes (Rel-3,4) (voir 5.1) ; les principaux théorèmes concernant ces questions seront des corollaires simples du résultat technique suivant.

5.3.2. Proposition : *Soient $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ des $\boldsymbol{R}$-algèbres. Supposons $\boldsymbol{A}$ lisse sur $\boldsymbol{R}$ et donnons-nous :*

- *une paire de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{C} \xleftarrow{p} \boldsymbol{B}$, où p est surjectif de noyau noté $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}$ compris),*
- *un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ vérifiant $\overline{\varphi} = \overline{p} \circ \overline{h}$,*

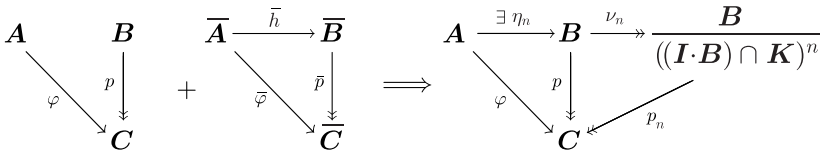


Alors :

a) *Pour chaque entier strictement positif n, il existe une* ***application*** $\eta_n : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *telle que :*

$$\begin{cases} \text{(i) } p_{\boldsymbol{B}} \circ \eta_n = \overline{h} \circ p_{\boldsymbol{A}}\,, \\ \text{(ii) } p \circ \eta_n = \varphi\,, \\ \text{(iii) } \nu_n \circ \eta_n \text{ est un morphisme de } \boldsymbol{R}\text{-algèbres.} \end{cases} \qquad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & \xrightarrow{\eta_n} & \boldsymbol{B} \\ {\scriptstyle p_{\boldsymbol{A}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\boldsymbol{B}}} \\ \overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow{\overline{h}} & \overline{\boldsymbol{B}} \end{array}$$

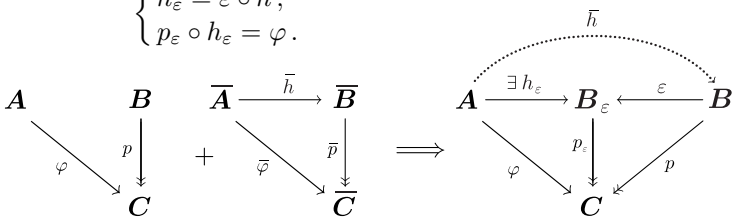
où $\nu_n : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}/((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K})^n$ désigne la surjection canonique.



(*L'homomorphisme p_n est celui induit par p.*)

b) *Il existe un voisinage étale $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{K}$ dans $\boldsymbol{B}$, intersection complète sur $\boldsymbol{B}$ dont on note $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ l'homomorphisme structural et $p_\varepsilon : \boldsymbol{B}_\varepsilon \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}$ l'homomorphisme induit par p, et il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_\varepsilon : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ tels que :*

$$\begin{cases} \overline{h}_\varepsilon = \bar{\varepsilon} \circ \overline{h}\,, \\ p_\varepsilon \circ h_\varepsilon = \varphi\,. \end{cases}$$



Démonstration :

• ***Cas où $\boldsymbol{A}$ est intersection complète lisse***

a) Soit $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m]/\langle f_{r+1}, \ldots, f_m\rangle$ une présentation de $\boldsymbol{A}$ en tant qu'intersection complète lisse sur $\boldsymbol{R}$ et notons $\nu : \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \boldsymbol{A}$ la surjection canonique.

L'existence des applications η_n de l'assertion (a) équivaut à l'existence d'homomorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha_n : \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \boldsymbol{B}$ rendant les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] & \xrightarrow{\alpha_n} & \boldsymbol{B} \\ {\scriptstyle \nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \boldsymbol{A} & \xrightarrow{\varphi} & \boldsymbol{C} \end{array} \qquad \Big| \qquad \begin{array}{ccc} \overline{\boldsymbol{R}}[X_1, \ldots, X_m] & \xrightarrow{\overline{\alpha}_n} & \overline{\boldsymbol{B}} \\ {\scriptstyle \overline{\nu}}\downarrow & \overset{\overline{h}}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \overline{p}} \\ \overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & \overline{\boldsymbol{C}} \end{array} \qquad (\mathcal{D})$$

commutatifs et tels que :

$$\alpha_n\big(\langle f_{r+1}, \ldots, f_m\rangle\big) \subseteq \big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K}\big)^n\,.$$

Nous allons démontrer l'existence de α_n par induction sur l'entier n.

Lorsque $n = 1$, l'assertion résultera de trouver, pour chaque $i = 1, \ldots, m$, un élément $\alpha_1(X_i) \in \boldsymbol{B}$ tel que l'on ait à la fois $\alpha_1(X_i) \in p^{-1}\big(\varphi(\nu(X_i))\big)$ et $\overline{\alpha_1(X_i)} = \overline{h}\big(\overline{\nu}(\overline{X}_i)\big)$; deux

contraintes qui peuvent être satisfaites simultanément lorsque, pour tout $c \in \boldsymbol{C}$, la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de la fibre $p^{-1}(c)$ se surjecte sur la fibre $\bar{p}^{-1}(\bar{c})$. Or, pour tous $c \in \boldsymbol{C}$ et $\bar{b} \in \overline{\boldsymbol{B}}$ vérifiant $\bar{p}(\bar{b}) = \bar{c}$, on a $c - p(b) = \sum_j x_j \cdot c_j$, avec $x_j \in \boldsymbol{I}$ et $c_j \in \boldsymbol{C}$; et ceci pour chaque $b \in \boldsymbol{B}$ qui relève $\bar{b}$. Comme p est surjective, il existe $b_j \in \boldsymbol{B}$ tel que $p(b_j) = c_j$ de sorte que l'élément $b + \sum_j x_j \cdot b_j \in \boldsymbol{B}$ satisfait bien aux contraintes en question. L'endomorphisme $\alpha_1 : \boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_m] \to \boldsymbol{B}$ est alors défini par de tels choix des $\alpha_1(X_i)$ et l'inclusion $\alpha_1\big(\langle f_{r+1}, \dots, f_m\rangle\big) \subseteq (\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K}$ est vérifiée par construction.

Supposons avoir défini α_ℓ pour $\ell \geqslant 1$ et soit $\alpha_{\ell+1} : \boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_m] \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres donné par :

$$\alpha_{\ell+1}(X_j) = \alpha_\ell(X_j) + b_j\,, \qquad \text{pour chaque } j = 1, \dots, m, \tag{$\star$}$$

avec $b_j \in \big((\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K}\big)^\ell$. Les conditions (i) et (ii) de l'assertion (a) pour $n = \ell + 1$ sont alors clairement satisfaites et l'étude de la condition (iii) nous amène à considérer, pour chaque $k = r+1, \dots, m$, le début d'un développement en série de Taylor par rapport aux variables b_j :

$$\begin{aligned}\alpha_{\ell+1}(f_k) &= f_k\big(\alpha_\ell(\vec{X}) + \vec{b}\big) \\ &= \alpha_\ell(f_k) + \left[\, \frac{\partial f_k}{\partial X_1}\,, \cdots\cdots\,, \frac{\partial f_k}{\partial X_m} \,\right] \big(\alpha_{n+1}(\vec{X})\big) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + \cdots\,,\end{aligned}$$

où $\vec{X}$ et $\vec{b}$ désignent respectivement les m-uplets $(X_1, \dots, X_m)$ et $(b_1, \dots, b_m)$ et où les termes omis appartiennent l'idéal $\big((\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K}\big)^{2\ell}$. L'ensemble de ces développements donne l'égalité de matrices modulo $\big((\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K}\big)^{2\ell}$:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{\ell+1}(f_{r+1}) \\ \vdots \\ \alpha_{\ell+1}(f_m) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \alpha_\ell(f_{r+1}) \\ \vdots \\ \alpha_\ell(f_m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial X_m} \end{bmatrix} \big(\alpha_\ell(\vec{X})\big) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \tag{$\ddagger$}$$

où l'on aura remarqué que la jacobienne est évaluée en $\alpha_\ell(\vec{X})$ plutôt qu'en $\alpha_{\ell+1}(\vec{X})$.

C'est maintenant que le fait que $\boldsymbol{A}$ est intersection complète lisse intervient de manière cruciale. En effet, dans ce cas, nous savons, d'après le lemme 4.5.3 (0c), que le classes des différentielles $df_{r+1}, \dots, df_m$ dans $\boldsymbol{A} \otimes \Omega_{\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m]/\boldsymbol{R}}$ sont linéairement indépendantes et que le $\boldsymbol{A}$-sous-module qu'elles engendrent : $\boldsymbol{A} \cdot df_{r+1} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A} \cdot df_m \equiv \boldsymbol{A}^{m-r}$ est un facteur direct dans $\boldsymbol{A} \otimes \Omega_{\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m]/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{A}^m$. Il existe alors une matrice $[\,a_{j,k}\,] \in M^{m\times(m-r)}(\boldsymbol{A})$ qui inverse à droite la matrice de $[\,\partial f_k/\partial X_j\,] \in M^{(m-r)\times m}(\boldsymbol{A})$. Pour chaque couple (j,k), soit $P_{j,k}$ un relèvement dans $\boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_m]$ de $a_{j,k}$; on a alors l'égalité modulo l'idéal $\langle f_{r+1}, \dots, f_m\rangle$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_m} \end{bmatrix} (\vec{X}) \begin{bmatrix} P_{1,r+1} & \cdots & P_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{m,r+1} & \cdots & P_{m,m} \end{bmatrix} = \mathbb{1}_{m-r\times m-r}\,, \qquad (\ddagger\ddagger)$$

à laquelle on applique α_ℓ pour obtenir l'égalité modulo $\big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{K}\big)^\ell$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_m} \end{bmatrix} \big(\alpha_\ell(\vec{X})\big) \begin{bmatrix} Q_{1,r+1} & \cdots & Q_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{m,r+1} & \cdots & Q_{m,m} \end{bmatrix} = \mathbb{1}_{m-r\times m-r}\,, \qquad (\diamond)$$

où l'on a noté $Q_{j,k} := \alpha_\ell(P_{j,k}) \in \boldsymbol{B}$. On pose alors :

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} := - \begin{bmatrix} Q_{1,r+1} & \cdots & Q_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{m,r+1} & \cdots & Q_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_\ell(f_{r+1}) \\ \vdots \\ \alpha_\ell(f_m) \end{bmatrix},$$

de sorte que les éléments b_j appartiennent bien à $\big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{K}\big)^\ell$ conformément à notre choix initial $(\star)$. Il s'ensuit que l'on a, pour tout $k = r+1,\ldots,m$:

$$\alpha_{\ell+1}(f_k) \in \big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{K}\big)^{2\ell},$$

grâce aux égalités $(\ddagger)$ et $(\diamond)$, ce qui termine la démonstration de l'assertion (a).

b) *I. Réduction au cas où l'idéal $\boldsymbol{K}$ est principal.*

On commence par observer qu'un morphisme α_n de la question (a) induit un morphisme $h_n : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ lorsque $\alpha_n(f_k) = 0$, pour tout $k = r+1,\ldots,m$. Lorsque c'est le cas, on peut prendre $\boldsymbol{B}_\varepsilon := \boldsymbol{B}$ et $h_\varepsilon := h_n$ et l'assertion (b) est vérifiée. Dans le cas contraire, on applique (a) pour $n = 1$ et l'on considère l'idéal de type fini $\boldsymbol{K}' := \langle b_1,\ldots,b_{m-r}\rangle \subseteq \boldsymbol{K}$ de $\boldsymbol{B}$ engendré par les éléments $b_i := \alpha_1(f_{r+i})$. Pour chaque $\ell = 1,\ldots,m-r$ notons $\boldsymbol{B}_\ell := \boldsymbol{B}/\langle b_1,\ldots,b_\ell\rangle$. On a la suite finie de surjections canoniques de $\boldsymbol{B}$-algèbres :

$$\boldsymbol{B} =: \boldsymbol{B}_0 \xrightarrow{\nu_{0,1}} \boldsymbol{B}_1 \xrightarrow{\nu_{1,2}} \boldsymbol{B}_2 \xrightarrow{\nu_{2,3}} \cdots\cdots \xrightarrow{\nu_{t-1,t}} \boldsymbol{B}_t\,,$$

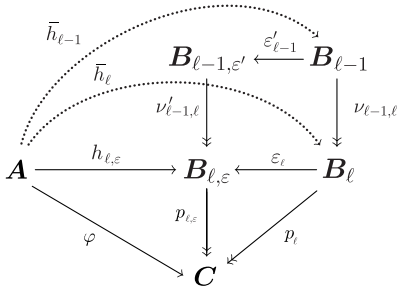
où $\boldsymbol{B}_\ell \equiv \boldsymbol{B}_{\ell-1}/\langle b_\ell\rangle$. Notons aussi, pour chaque ℓ :

- $\nu_\ell : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}_\ell$ la surjection canonique (on a $\nu_{\ell,\ell+1}\circ\nu_\ell = \nu_{\ell+1}$),
- $p_\ell : \boldsymbol{B}_\ell \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}$ la surjection induite par p, de noyau $\boldsymbol{K}_\ell := \nu_\ell(\boldsymbol{K})$ (on a $p_\ell\circ\nu_\ell = p$),
- $\overline{h}_\ell : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}_\ell$ l'homomorphisme $\bar{\nu}_\ell\circ\overline{h}$.

On remarquera que pour chaque $\ell = 0,1,\ldots,m-r$, la paire d'homomorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{C} \xleftarrow{p_\ell} \boldsymbol{B}_\ell$ et l'homomorphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h}_\ell : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}_\ell$ sont des données conformes aux hypothèses de notre proposition.

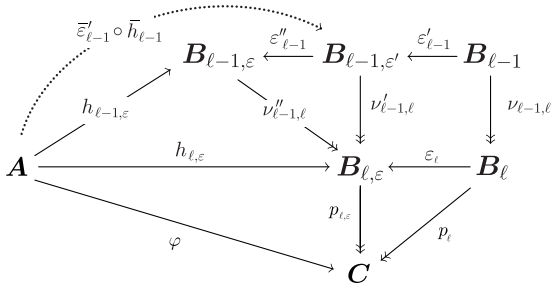
Lorsque $\ell = m-r$, l'homomorphisme $\nu_{m-r}\circ\alpha_1$ s'annule sur $\langle f_{r+1},\ldots,f_m\rangle$ et induit, par conséquent, un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_{m-r,\varepsilon} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_{m-r} =: \boldsymbol{B}_{m-r,\varepsilon}$ vérifiant (b) par

construction. Supposons maintenant que pour un certain « *niveau* » $\ell \in \{1, \dots, m-r\}$ l'assertion (b) est vérifiée ; autrement dit, supposons qu'il existe un voisinage étale $\varepsilon : \boldsymbol{B}_\ell \to \boldsymbol{B}_{\ell,\varepsilon}$ de $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{K}$ intersection complète sur $\boldsymbol{B}_\ell$ et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_{\ell,\varepsilon} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_{\ell,\varepsilon}$ vérifiant $\overline{h}_{\ell,\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_\ell \circ \overline{h}_\ell$, tels que le diagramme suivant est commutatif :



où $\varepsilon'_{\ell-1} : \boldsymbol{B}_{\ell-1} \to \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'}$ est un voisinage étale de $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{K}$, intersection complète sur $\boldsymbol{B}_{\ell-1}$, qui relève ε_ℓ et où $\nu'_{\ell-1,\ell}$ est la surjection induite (*cf.* 4.5.8).

La paire d'homomorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A} \xrightarrow{h_{\ell,\varepsilon}} \boldsymbol{B}_{\ell,\varepsilon} \xleftarrow{\nu'_{\ell-1,\ell}} \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'}$ et l'homomorphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\bar{\varepsilon}'_{\ell-1} \circ \overline{h}_{\ell-1} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}_{\ell-1,\varepsilon'}$ sont à nouveau conformes aux hypothèses de notre proposition mais cette fois le noyau de $\nu'_{\ell-1,\ell}$ est l'idéal *principal* de $\boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'}$ engendré par b_ℓ (4.5.8). Il s'ensuit que si nous supposons l'assertion (b) vérifiée pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ et tout idéal $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{B}$ ***principal***, il existe un morphisme de $\boldsymbol{B}$-algèbres $\varepsilon''_{\ell-1} : \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'} \to \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon}$, tel que $\boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon}$ est intersection complète sur $\boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'}$ et voisinage étale de $\boldsymbol{I}\cdot b_\ell\cdot\boldsymbol{B}_{l-1,\varepsilon'}$, donc de $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{K}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_{\ell-1,\varepsilon} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon}$, tels que le diagramme précédent se complète en un nouveau diagramme commutatif :



où $\nu''_{\ell-1,\ell}$ désigne la surjection induite par $\varepsilon''_{\ell-1}$ à partir de $\nu'_{\ell-1,\ell}$, et où $\bar{\varepsilon}''_{\ell-1}\circ\bar{\varepsilon}'_{\ell-1}\circ\overline{h}_{\ell-1} = \overline{h}_{\ell-1,\varepsilon}$. La composée $\varepsilon_{\ell-1} := \varepsilon''_{\ell-1}\circ\varepsilon'_{\ell-1} : \boldsymbol{B}_{\ell-1} \to \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon}$ est alors un voisinage étale de $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{K}$, intersection complète sur $\boldsymbol{B}_{\ell-1}$, et (b) est vérifiée au niveau $\ell-1$.

Un argument par induction montre alors que (b) est bien vérifiée pour $\ell = 0$.

II. Cas où l'idéal $\boldsymbol{K}$ est principal.

Nous vérifions dans cette partie l'assertion (b) lorsque $\boldsymbol{K}$ est un idéal principal de $\boldsymbol{B}$ de générateur noté $b_{\boldsymbol{K}}$.

– *Cas où l'idéal* $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ *est principal de générateur* π.

Il existe, d'après (a), un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha_2 : \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \boldsymbol{B}$ tel que les diagrammes $(\mathcal{D})$ sont commutatifs et tel que l'on a, pour tout $k = r+1, \ldots, m$:

$$\alpha_2(f_k) \in \big((\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K}\big)^2 \subseteq \langle \pi \cdot b_{\boldsymbol{K}} \rangle ,$$

autrement dit, $\alpha_2(f_k) = \pi \cdot b_{\boldsymbol{K}} \cdot S_k$ pour un certain $S_k \in \boldsymbol{B}$.

Nous procédons maintenant de manière analogue à la démonstration de (a). Notons, pour chaque $k = r+1, \ldots, m$, $\vec{P}_k := (P_{1,k}, \ldots, P_{m,k})$ le m-uplet d'éléments de $\boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m]$ de l'égalité $(\ddagger\ddagger)$ dans la preuve de (a). On pose $Q_{j,k} := \alpha_2(P_{j,k})$ et $\vec{Q}_k := \alpha_2(\vec{P}_k) = (Q_{1,k}, \ldots, Q_{m,k})$. Notons $\vec{X} := (X_1, \ldots, X_m)$ et considérons l'homomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] & \xrightarrow{\ \beta\ } & \boldsymbol{B}[Z_{r+1}, \ldots, Z_m] \\ \vec{X} & \longmapsto & \alpha_2(\vec{X}) + \sum_{k=r+1}^{m} \pi \cdot b_{\boldsymbol{K}} \cdot \vec{Q}_k \, Z_k \end{array}$$

On a le développement en série de Taylor par rapport aux variables Z_k :

$$\begin{aligned} \beta\big(f_k(\vec{X})\big) &= f_k\Big(\alpha_2(\vec{X}) + \textstyle\sum_{k=r+1}^{m} \pi \cdot b_{\boldsymbol{K}} \cdot \vec{Q}_k \, Z_k\Big) = \\ &= \pi \cdot b_{\boldsymbol{K}} \cdot S_k + \pi \cdot b_{\boldsymbol{K}} \cdot \Big(\frac{\partial f_k}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial f_k}{\partial X_m}\Big)\big(\beta(\vec{X})\big) \begin{bmatrix} Q_{1,r+1} & \cdots & Q_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{m,r+1} & \cdots & Q_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{r+1} \\ \vdots \\ Z_m \end{bmatrix} + \\ &\qquad + \pi^2 \cdot b_{\boldsymbol{K}}^2 \cdots \end{aligned}$$

et l'on définit les éléments :

$$R_k := \frac{\beta\big(f_k(\vec{X})\big)}{\pi \cdot b_{\boldsymbol{K}}} \in \boldsymbol{B}[Z_{r+1}, \ldots, Z_m] ,$$

en diminuant d'une unité les exposants de $\pi \cdot b_{\boldsymbol{K}}$ dans les développements qui précèdent. Nous avons ainsi l'égalité dans $\big(\boldsymbol{B}[Z_{r+1}, \ldots, Z_m]\big)^{m-r}$ modulo $\pi \cdot b_{\boldsymbol{K}}$:

$$\begin{bmatrix} R_{r+1} \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} S_{r+1} \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_m} \end{bmatrix} \big(\alpha_2(\vec{X})\big) \begin{bmatrix} Q_{1,r+1} & \cdots & Q_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{m,r+1} & \cdots & Q_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{r+1} \\ \vdots \\ Z_m \end{bmatrix} \qquad (\diamond\diamond)$$

et la composition de β avec la surjection canonique $\nu_{\boldsymbol{B}}$:

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] & \xrightarrow{\ \beta\ } & \boldsymbol{B}[Z_{r+1}, \ldots, Z_m] & \xrightarrow{\ \nu_B\ } & \dfrac{\boldsymbol{B}[Z_{r+1}, \ldots, Z_m]}{\langle R_{r+1}, \ldots, R_m \rangle} =: \boldsymbol{B}' \\ \Big\downarrow \nu & & & \nearrow \gamma & \\ \boldsymbol{A} = \dfrac{\boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m]}{\langle f_{r+1}, \ldots, f_m \rangle} & & & & \end{array}$$

s'annule *par construction* sur l'idéal $\langle f_{r+1}, \ldots, f_m \rangle$ et induit un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres noté $\gamma : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}'$.

On remarque alors que le déterminant de la matrice jacobienne $[\partial R_k/\partial Z_j]$ modulo $\pi\cdot b_{\boldsymbol{K}}$ est égal à :

$$\det\left[\frac{\partial R_k}{\partial Z_j}\right] \simeq \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_m} \end{bmatrix}(\alpha_2(\vec{X}))\begin{bmatrix} Q_{1,r+1} & \cdots & Q_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{m,r+1} & \cdots & Q_{m,m} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \alpha_2\left(\det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{1,r+1} & \cdots & P_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{m,r+1} & \cdots & P_{m,m} \end{bmatrix}\right)\right) = 1$$

d'après l'égalité (‡‡) de la preuve de (a).

Par conséquent, la localisation $\boldsymbol{B}_\varepsilon := \boldsymbol{B}'_{\det[\partial R_k/\partial Z_j]}$ est une $\boldsymbol{B}$-algèbre intersection complète étale.

Notons $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ la composée de γ et du morphisme structural $\boldsymbol{B}' \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$. La réduction modulo $\pi\cdot b_{\boldsymbol{K}}$ identifie $\boldsymbol{B}'$ et $\boldsymbol{B}_\varepsilon$. Notons $\widetilde{\boldsymbol{B}} := \boldsymbol{B}/\langle\pi\cdot b_{\boldsymbol{K}}\rangle$. La $\widetilde{\boldsymbol{B}}$-algèbre $\widetilde{\boldsymbol{B}}\otimes_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}'$ apparaît alors, d'après ($\diamond\diamond$), comme le quotient :

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{B}}[Z_{r+1},\dots,Z_m]}{\langle Z_{r+1}+\widetilde{S}_{r+1},\dots,Z_m+\widetilde{S}_m\rangle},$$

qui est clairement isomorphe à $\widetilde{\boldsymbol{B}}$. Par conséquent, $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ est bien un voisinage étale de $\langle\pi\cdot b_{\boldsymbol{K}}\rangle$ dans $\boldsymbol{B}$, et la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de h s'identifie à $\overline{h}$.

L'assertion (b) est ainsi vérifiée à chaque fois que $\boldsymbol{A}$ est intersection complète lisse et que $\boldsymbol{I}$ est principal, et ceci quel que soit l'idéal $\boldsymbol{K}\subseteq\boldsymbol{B}$ d'après la partie I.

– *Cas où l'idéal $\boldsymbol{I}\subseteq\boldsymbol{R}$ est quelconque.*

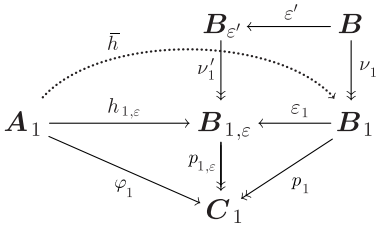
Nous montrons que le cas général se ramène au cas où $\boldsymbol{I}$ est principal essentiellement de la même manière que dans la partie I.

Soit $\alpha_2 : \boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m]\to\boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres tel que les diagrammes ($\mathcal{D}$) sont commutatifs et tel que $\alpha_2(f_k)\in\boldsymbol{I}\cdot b_{\boldsymbol{K}}\cdot\boldsymbol{B}$, *i.e.* $\alpha_2(f_k)=\sum_i \pi_{k,i}\cdot b_{\boldsymbol{K}}\cdot b_{k,i}$, avec $\pi_{k,i}\in\boldsymbol{I}$ et $b_{k,i}\in\boldsymbol{B}$, et ceci pour chaque $k=r+1,\dots,m$. L'ensemble de ces égalités fait apparaître l'ensemble fini $\{\pi_{k,i}\}=\{\pi_1,\dots,\pi_t\}$ d'éléments de $\boldsymbol{I}$ dont on note $\boldsymbol{I}'=\langle\pi_1,\dots,\pi_t\rangle$ l'idéal dans $\boldsymbol{R}$ qu'il engendre. Posons, pour $\ell\in\{1,\dots,t\}$: $\boldsymbol{R}_\ell$, $\boldsymbol{A}_\ell$, $\boldsymbol{B}_\ell$, $\boldsymbol{C}_\ell$, φ_ℓ, p_ℓ, les réductions modulo l'idéal $\langle\pi_1,\dots,\pi_\ell\rangle$ des objets correspondants ; on appellera le nombre ℓ le « *degré de réduction* ». L'idéal $\boldsymbol{I}'$ rend compte de l'obstruction au relèvement de $\overline{h}$ vérifiant (b) avec $\boldsymbol{B}_\varepsilon=\boldsymbol{B}$, de sorte que (b) est vérifiée avec $\boldsymbol{B}_\varepsilon=\boldsymbol{B}$ au degré de réduction t. Notons h_t un tel relèvement ; on a les diagrammes analogues à $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R} & & \boldsymbol{B} \\ & & \downarrow p \\ \boldsymbol{A} & \xrightarrow{\varphi} & \boldsymbol{C} \end{array} \qquad \left| \qquad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}_t & & \boldsymbol{B}_t \\ & \overset{h_t}{\nearrow} & \downarrow p_t \\ \boldsymbol{A}_t & \xrightarrow{\varphi_t} & \boldsymbol{C}_t \end{array} \right. \qquad (\mathcal{D}_t)$$

où celui de droite correspond à la réduction modulo l'idéal $\langle \pi_1, \dots, \pi_t \rangle \subseteq \boldsymbol{R}$.

L'assertion (b) peut être vérifiée maintenant par récurrence sur le nombre t ; le cas $t = 0$ est trivial et le cas $t = 1$ a déjà été traité. Dans le cas général, l'assertion (b) est vérifiée par hypothèse inductive pour les données $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{C}_1$, etc ; il existe donc une intersection complète lisse $\varepsilon_1 : \boldsymbol{B}_1 \to \boldsymbol{B}_{1,\varepsilon}$, voisinage étale de $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{K}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}_1$-algèbres $h_{1,\varepsilon} : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{B}_{1,\varepsilon}$ tel que $\bar{\varepsilon}_1 \circ \bar{h} = \bar{h}_{1,\varepsilon}$, et tels que le diagramme suivant est commutatif :



où ν_1 est la surjection canonique, $\varepsilon' : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_{\varepsilon'}$ est un voisinage étale de $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{K}$ intersection complète qui relève ε_1, et ν'_1 est la surjection induite par ε' à partir de ν_1 (4.5.8). En particulier, $\boldsymbol{B}_{1,\varepsilon'}$ s'identifie à la réduction modulo π_1 de $\boldsymbol{B}_{\varepsilon'}$. Notons $p_{\varepsilon'} : \boldsymbol{B}_{\varepsilon'} \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}$ la surjection induite par ε' à partir de p ; on a $p = p_{\varepsilon'} \circ \varepsilon'$ et p_1 s'identifie à la réduction modulo π_1 de $p_{\varepsilon'}$. On a ainsi les données suivantes :



et comme le passage de $\boldsymbol{R}$ à $\boldsymbol{R}_1$ se fait par réduction modulo l'idéal principal $\langle \pi_1 \rangle$, l'assertion (b) est vérifiée pour ces données. On a donc une $\boldsymbol{B}_{\varepsilon'}$-algèbre intersection complète lisse $\varepsilon'' : \boldsymbol{B}_{\varepsilon'} \to \boldsymbol{B}_{\varepsilon}$, voisinage étale de $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{K}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_{\varepsilon} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_{\varepsilon}$ tel que $p_{\varepsilon'} \circ h_{\varepsilon} = \varphi$ et tel que, par réduction modulo π_1, h_{ε} coïncide avec $h_{1,\varepsilon} \circ \varepsilon''$. Enfin, la composée $\varepsilon := \varepsilon'' \circ \varepsilon' : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_{\varepsilon}$ fait de $\boldsymbol{B}_{\varepsilon}$ une $\boldsymbol{B}$-algèbre intersection complète voisinage étale de $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{K}$ et l'assertion (b) est vérifiée pour les données d'origine : $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, φ, p, $\bar{h}$.

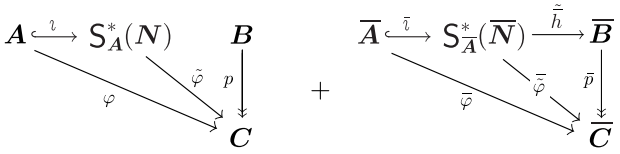
Ceci termine la démonstration de la proposition lorsque $\boldsymbol{A}$ est intersection complète lisse sur $\boldsymbol{R}$.

- ***Cas où $\boldsymbol{A}$ est lisse mais pas nécessairement intersection complète***

La proposition 5.2.1 (0b) montre qu'il existe un $\boldsymbol{A}$-module projectif $\boldsymbol{N}$ tel que l'algèbre symétrique $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N})$ est une intersection complète lisse sur $\boldsymbol{R}$. Tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ admet alors une factorisation canonique en

$$\boldsymbol{A} \xhookrightarrow{\iota} \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N}) \xrightarrow{\tilde{\phi}} \boldsymbol{A}', \qquad \boldsymbol{A} \xrightarrow{\phi} \boldsymbol{A}'$$

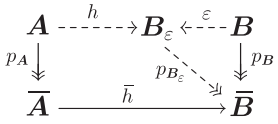
où ι désigne le morphisme structural et où $\widetilde{\phi}$ est le prolongement de ϕ, nul sur $\boldsymbol{N}$. En particulier, les morphismes φ et $\bar{h}$ des données de la proposition se factorisent suivant :



et la validité de la proposition pour $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N})$ entraîne sa validité pour $\boldsymbol{A}$. ∎

5.3.3. Remarque : Lorsque dans la proposition précédente, $(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{K}$ est nilpotent, l'assertion (b) est vérifiée avec $\boldsymbol{B}_\varepsilon=\boldsymbol{B}$ d'après (a).

5.3.4. Théorème : *Étant donnés un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h}:\overline{\boldsymbol{A}}\to\overline{\boldsymbol{B}}$, et des relèvements $p_{\boldsymbol{A}}:\boldsymbol{A}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}$ et $p_{\boldsymbol{B}}:\boldsymbol{B}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{B}}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, il existe une $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ intersection complète lisse étale, voisinage de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, et un morphisme $h:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}_\varepsilon$ qui relève $\overline{h}$. Soit, en termes de diagramme commutatif :*



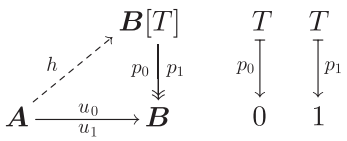
où $\varepsilon:\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}_\varepsilon$ désigne l'homomorphisme structural et où $p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}$ est l'homomorphisme (surjectif) induit par ε à partir de $p_{\boldsymbol{B}}$.

En particulier, si $\boldsymbol{B}$ est intersection complète lisse sur $\boldsymbol{R}$, l'algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ l'est également.

Démonstration : Corollaire immédiat de la proposition 5.3.2 avec $\boldsymbol{K}=0$. ∎

5.3.5. Homotopies de relèvements d'homomorphismes homotopes. Dans cette partie, qui est un complément naturel au théorème 5.3.4, nous allons étudier le lien qui relie deux relèvements d'un même morphisme modulo $\boldsymbol{I}$. Nous montrerons que deux tels relèvements sont toujours «*homotopes au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ près*» et , dans une prochaine section, que leurs complétés $\boldsymbol{I}$-adiques sont «*homotopes au sens des algèbres $\boldsymbol{I}$-adiquement complètes*» (5.4.7). Ces types d'homotopies sont des généralisations de la notion naïve d'homotopie suivante.

5.3.6. Définition : Deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_0,u_1:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ sont dits «*homotopes*», et l'on écrit $u_0\sim u_1$, lorsqu'il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}[T]$ tel que $p_i\circ h=u_i$, où $p_i:\boldsymbol{B}[T]\to\boldsymbol{B}$ est la surjection de $\boldsymbol{B}$-algèbres qui fait correspondre $p_i:T\mapsto i$. Soit, en termes de diagramme commutatif :

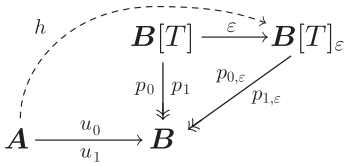


Cette notion d'homotopie s'avère trop rigide dans notre contexte et se trouve avantageusement remplacée par le type d'homotopie suivante :

5.3.7. Définition : Soit $\boldsymbol{I}$ un idéal dans $\boldsymbol{R}$. Deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ seront dits « *homotopes au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ près* », et l'on écrit $u_0 \sim_\varepsilon u_1$, lorsqu'il existe :

- un voisinage étale $\boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I}$, de $\langle T\rangle$ et de $\langle 1-T\rangle$ dans $\boldsymbol{B}[T]$ dont on note $\varepsilon : \boldsymbol{B}[T] \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ le morphisme structural et $p_{0,\varepsilon}, p_{1,\varepsilon} : \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon \to \boldsymbol{B}$ les morphismes de $\boldsymbol{B}[T]$-algèbres induits par ε à partir de p_0 et p_1 respectivement.
- un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ vérifiant $p_{i,\varepsilon} \circ h = u_i$.

Soit, en termes de diagramme commutatif :



Lorsque, en plus, $\boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ est intersection complète sur $\boldsymbol{B}[T]$, on dira que u_0 et u_1 sont « *homotopes au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ intersection complète près* ».

5.3.8. Remarque : Les dernières définitions ont bien évidemment un sens lorsque les données appartiennent à la catégorie $\mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{R}})$, mais dans ce cas, un voisinage étale est toujours un isomorphisme et ces différents types d'homotopie coïncident.

Nous pouvons maintenant énoncer le principal résultat de cette section ; il répond à la question (Rel-4) de 5.1.

5.3.9. Théorème : *Soit $\boldsymbol{I}$ un idéal arbitraire dans $\boldsymbol{R}$. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse. Alors, deux morphismes $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{R}$-algèbres dont les réductions modulo $\boldsymbol{I}$ sont homotopes (en particulier égales), sont homotopes au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ intersection complète près.*

Démonstration : Soient les morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $p : \boldsymbol{B}[T] \to \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{B}$ défini par $p(P(T)) := (P(0), P(1))$ dont on remarquera qu'il est *surjectif* de noyau $\boldsymbol{K} = \langle T(1-T)\rangle$, et $\varphi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{B}$ défini par $\varphi(a) := (u_0(a), u_1(a))$. On a $\overline{p} \circ \overline{h} = \overline{\varphi}$ pour toute homotopie $\overline{h}$ entre $\overline{u}_0$ et $\overline{u}_1$, et le théorème est corollaire immédiat de la proposition 5.3.2 appliquée à la paire d'homomorphismes $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{B} \xleftarrow{p} \boldsymbol{B}[T]$ et à l'homomorphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}[T]$. ∎

5.4 Relèvements et complétion $\boldsymbol{I}$-adique

5.4.1. Complétion $\boldsymbol{I}$-adique. On se donne un anneau $\boldsymbol{R}$ et un idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ arbitraires. On considère $\boldsymbol{R}$ muni de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique et l'on note $\widehat{\boldsymbol{R}}$ le complété séparé $\boldsymbol{I}$-adique de $\boldsymbol{R}$

(*cf.* [Mat] chap. 9). Une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ sera alors considérée munie de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique et l'on notera $\widehat{\boldsymbol{A}}$ le complété séparé de $\boldsymbol{A}$ pour cette topologie. Notons, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{A}_m := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^m \cdot \boldsymbol{A}$. L'algèbre $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est naturellement une $\widehat{\boldsymbol{R}}$-algèbre isomorphe à la limite projective du système projectif défini par les surjections canoniques $\nu_{m+1}(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A}_{m+1} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}_m$. Les éléments $a \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ admettent alors des représentations (non uniques) sous forme de séries formelles $a := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, avec $x_n \in \boldsymbol{I}^n \cdot \boldsymbol{A}$, et les opérations de somme et produit dans $\widehat{\boldsymbol{A}}$ correspondent aux mêmes opérations sur les séries en question. La famille des surjections canoniques $\boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}_m$ induit un morphisme canonique de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\xi_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \to \widehat{\boldsymbol{A}}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est bijective. On a $\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}_m/\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}_m \equiv \widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{I}\cdot\widehat{\boldsymbol{A}}$, .

Enfin, pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$, et chaque $a \in \widehat{\boldsymbol{A}}_1$, l'élément $\widehat{\alpha}(a) := \sum_n \alpha(x_n)$ est indépendant de la représentation sous forme de série $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, avec $x_n \in \boldsymbol{I}^n \cdot \boldsymbol{A}$. L'application $\widehat{\alpha} : \widehat{\boldsymbol{A}}_1 \to \widehat{\boldsymbol{A}}_2$ ainsi définie est l'unique morphisme de $\widehat{\boldsymbol{R}}$-algèbres rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \boldsymbol{A}_2 \\ {\scriptstyle \xi_{\boldsymbol{A}_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi_{\boldsymbol{A}_2}} \\ \widehat{\boldsymbol{A}}_1 & \xrightarrow{\widehat{\alpha}} & \widehat{\boldsymbol{A}}_2 \end{array}$$

Les correspondances $\boldsymbol{A} \rightsquigarrow \widehat{\boldsymbol{A}}$ et $\alpha \rightsquigarrow \widehat{\alpha}$ définissent un foncteur covariant de la catégorie $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ vers la catégorie $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\widehat{\boldsymbol{R}})$ des $\widehat{\boldsymbol{R}}$-algèbres complètes et séparées que nous allons appeler « *complétion $\boldsymbol{I}$-adique* » et simplement « *complétion* » lorsque la référence à la topologie $\boldsymbol{I}$-adique sera sous-entendue. Le foncteur de complétion factorise le foncteur de réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ vers $\mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{R}})$; autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alg}(\boldsymbol{R}) & \overset{(\widehat{\ })}{\rightsquigarrow} & \mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\widehat{\boldsymbol{R}}) \\ & {\scriptstyle (\overline{\ })}\searrow & \downarrow{\scriptstyle (\overline{\ })} \\ & & \mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{R}}) \end{array}$$

On observera que comme toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre est la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre, le foncteur de réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\widehat{\boldsymbol{R}})$ vers $\mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{R}})$ est essentiellement surjectif.

Les problèmes de relèvements des algèbres lisses et des morphismes que nous avons étudiés dans la section précédente se posent maintenant pour la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\widehat{\boldsymbol{R}})$ vers $\mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{R}})$. Lorsque $\boldsymbol{A}$ est un relèvement lisse d'un $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$, sa complétion $\widehat{\boldsymbol{A}}$ relève également $\overline{\boldsymbol{A}}$ et *mutatis mutandis* pour les morphismes entre deux $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres.

L'intérêt majeur de considérer les complétions des relèvements tient à ce que deux telles algèbres sont toujours isomorphes, contrairement aux relèvements dans $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ dont on ne peut affirmer qu'ils soient isomorphes en dehors du cas ou $\boldsymbol{I}$ est nilpotent (*cf.* 5.2.9). En contrepartie, ces complétions ne sont plus (en général) des $\boldsymbol{R}$-algèbres de présentation finie, même lorsque $\boldsymbol{R}$ est complet, et l'on ne peut plus parler de relèvements lisses. Ces complétions sont pourtant proches des algèbres lisses : elles sont « $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$-*formellement lisses* » (voir 5.4.3). On montre que pour une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse donnée $\overline{\boldsymbol{A}}$, deux algèbres dans $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\widehat{\boldsymbol{R}})$ qui sont $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$-formellement lisses et qui relèvent $\overline{\boldsymbol{A}}$ sont toujours isomorphes.

Enfin, lorsque $\overline{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}}_1 \to \overline{\boldsymbol{A}}_2$ est un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses nous avons montré qu'il existe des relèvements $\alpha_i : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$, dans la catégorie de $\boldsymbol{R}$-algèbres (th. 5.2.10), et qu'ils sont deux-à-deux homotopes au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ près (th. 5.3.9). Nous montrerons que la complétion rend les morphismes $\widehat{\alpha}_i$ deux-à-deux homotopes au sens des algèbres $\boldsymbol{I}$-adiquement complètes (5.4.7).

Ces préliminaires font apparaître en filigrane une "correspondance" qui va de la catégorie de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses vers la catégorie des $\widehat{\boldsymbol{R}}$-algèbres complètes séparées et $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$-formellement lisses, mais on ne peut parler de correspondance fonctorielle dans la mesure où les algèbres image ne sont définies qu'à isomorphisme ***canonique à homotopie près*** et *mutatis mutandis* pour les morphismes image. Ces indétermination disparaîtront lorsque l'on s'intéressera à la cohomologie de de Rham p-adique ce qui fera l'objet du prochain chapitre.

5.4.2. Complétion $\boldsymbol{I}$-adique des relèvements des $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses

Les notations du paragraphe précédent sont toujours en vigueur. Soit $\overline{\boldsymbol{A}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse et fixons une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse $\boldsymbol{A}$ relevant $\overline{\boldsymbol{A}}$ (5.2.7). Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{A}_m := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^m \cdot \boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}_m$-algèbre lisse. La limite du système projectif des surjections canoniques $\varphi_{m+1} : \boldsymbol{A}_{m+1} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}_m$ est la $\widehat{\boldsymbol{R}}$-algèbre $\widehat{\boldsymbol{A}}$. Cette algèbre peut fort bien ne pas être une algèbre de présentation finie sur $\widehat{\boldsymbol{R}}$ mais elle vérifie, par construction, la propriété suivante proche de la lissité.

5.4.3. Définition : Soient un anneau $\boldsymbol{R}$ et un idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ arbitraires. On dit qu'une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est « $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$-**formellement lisse** » lorsque $\boldsymbol{A}_m$ est $\boldsymbol{R}_m$-lisse pour tout entier m strictement positif.

5.4.4. Remarque : Une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse est toujours $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$-formellement lisse.

5.4.5. Théorème : *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau et $\boldsymbol{I}$ un idéal dans $\boldsymbol{R}$ arbitraires.*

a) *Pour chaque $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$, il existe une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\widehat{\boldsymbol{A}}$ qui est $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$-formellement lisse, complète et séparée pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique et dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{A}}$. De plus, une telle algèbre $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est unique à isomorphisme (non canonique) près.*

b) *Pour chaque morphisme $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{R}$-algèbres lisses dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est un isomorphisme, la complétion $\widehat{\alpha} : \widehat{\boldsymbol{A}} \to \widehat{\boldsymbol{B}}$ est un isomorphisme.*

Démonstration :

a) L'existence a été établie dans les remarques préliminaires. Soient maintenant $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{B}'$ deux $\boldsymbol{R}$-algèbres complètes et séparées pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique, $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$-formellement lisses et dont les réductions modulo $\boldsymbol{I}$ sont isomorphes à $\overline{\boldsymbol{A}}$. Comme ces algèbres sont isomorphes aux limites des systèmes projectifs définis par leurs réductions modulo les puissance de $\boldsymbol{I}$,

la donnée d'un isomorphisme entre $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{B}'$ équivaut à la donnée d'une famille d'isomorphismes $\{\alpha_m : \boldsymbol{B}_m \to \boldsymbol{B}'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ telle que tous les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{B}_{m+1} & \xrightarrow[\equiv]{\alpha_{m+1}} & \boldsymbol{B}'_{m+1} \\ {\scriptstyle \nu_{m+1}(\boldsymbol{B})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{m+1}(\boldsymbol{B}')} \\ \boldsymbol{B}_m & \xrightarrow[\equiv]{\alpha_m} & \boldsymbol{B}'_m \end{array} \qquad (\mathcal{D})$$

sont commutatifs.

Les isomorphismes d'une telle famille peuvent être introduits par récurrence sur l'entier m. L'isomorphisme α_1 est donné dans nos hypothèses ; supposons avoir défini α_m vérifiant la condition ci-dessus. L'existence de α_{m+1} résulte alors de ce que $\boldsymbol{B}_{m+1}$ est $\boldsymbol{R}_{m+1}$-lisse et que $\ker(\nu_{m+1}(\boldsymbol{B}'))$ est nilpotent. Enfin, la ligne m du diagramme $(\mathcal{D})$ est la réduction modulo l'idéal nilpotent $\boldsymbol{I}^m\cdot\boldsymbol{R}_{m+1} \subseteq \boldsymbol{R}_{m+1}$ de la ligne $m+1$, α_{m+1} est donc un isomorphisme d'après 5.2.10.

b) Résulte immédiatement du fait que les réductions α_m sont des isomorphismes d'près la démonstration de 5.2.10. ∎

5.4.6. Existence et homotopie de relèvements d'un morphisme. Dans cette partie nous démontrons les théorèmes analogues à 5.3.4 et 5.3.9 pour des relèvements dans la catégorie $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\widehat{\boldsymbol{R}})$. Dans ce cadre, on a des résultats plus précis dans la mesure où les voisinages étales de $\boldsymbol{I}$ auxquels font allusion les théorèmes cités, deviennent des isomorphismes après complétion (5.4.5-(b)).

Avant d'énoncer le théorème précisons par une définition un nouveau type d'homotopie.

5.4.7. Définition : Soit $\boldsymbol{B}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre complète et séparée pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. Notons $\boldsymbol{B}\langle T\rangle$ la complétion $\boldsymbol{I}$-adique de l'algèbre des polynômes $\boldsymbol{B}[T]$ et soient $p_0, p_1 : \boldsymbol{B}\langle T\rangle \to \boldsymbol{B}$ les morphismes de $\boldsymbol{B}$-algèbres déterminés respectivement par les égalités $p_0(T) = 0$ et $p_1(T) = 1$. Soit $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ et $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres. On appelle «**homotopie de u vers v au sens des algèbres $\boldsymbol{I}$-adiquement complètes**» la donnée d'un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}\langle T\rangle$ tel que $u = p_0 \circ h$ et $v = p_1 \circ h$.

5.4.8. Théorème : *Soient $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{B}$ des $\boldsymbol{R}$-algèbres. On suppose que $\boldsymbol{D}$ est $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$-formellement lisse et que $\boldsymbol{B}$ est complète et séparée pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. Pour toute paire de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_0, u_1 : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{B}$, dont les réductions modulo $\boldsymbol{I}$ $\overline{u}_0, \overline{u}_1 : \overline{\boldsymbol{D}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ sont homotopes, les morphismes u_0 et u_1 sont homotopes au sens des algèbres $\boldsymbol{I}$-adiquement complètes.*

Démonstration : Notons $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse qui relève $\overline{\boldsymbol{D}}$ (th. 5.2.7). La complétion $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est isomorphe à la complétion de $\boldsymbol{D}$ (th. 5.4.5-(a)), d'où un morphisme canonique $\boldsymbol{D} \to \widehat{\boldsymbol{A}}$ qui factorise les morphismes u_i puisque $\boldsymbol{B}$ est supposée complète et séparée. Il suffit donc de prouver le théorème lorsque $\boldsymbol{D}$ est de la forme $\widehat{\boldsymbol{A}}$; auquel cas, il est conséquence immédiate de 5.3.9 et 5.4.5-(b). ∎

5.4.9. Relèvements d'algèbres sur un anneau de valuation discrète. On appelle «*anneau de valuation discrète*» tout domaine principal $\boldsymbol{V}$ ne possédant qu'un unique idéal premier non nul noté $\mathfrak{m}(\boldsymbol{V}) = \langle\pi\rangle$ (et aussi '$\mathfrak{m}$' lorsque la référence à $\boldsymbol{V}$ est sous-entendue) (*cf.* [Ser] chap. I). Le spectre premier de $\boldsymbol{V}$ ne comporte alors que deux points : «*le point générique*» : (0), partout dense dans $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{V})$, et «*le point fermé*» : $\mathfrak{m}$. On notera $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{V})$ (resp. $\boldsymbol{K}$) le corps de fractions de $\boldsymbol{V}$, et $k(\boldsymbol{V}) := \boldsymbol{V}/\mathfrak{m}$ (resp. k) le «*corps résiduel de* $\boldsymbol{V}$» ; la notation $(\boldsymbol{V}, \mathfrak{m}, \boldsymbol{K}, k)$ désignera la donnée d'un anneau de valuation discrète.

5.4.10. Exemples et définitions : Les exemples fondamentaux d'anneaux de valuation discrète sont les suivants :

- Soit $\boldsymbol{Q}$ un corps arbitraire. L'«*anneau des séries formelles*» à coefficients dans $\boldsymbol{Q}$ et à une seule variable $\boldsymbol{V} := k[[X]]$ est un anneau de valuation discrète complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. On a $\mathfrak{m} = \langle X\rangle$, $\boldsymbol{K} := \boldsymbol{Q}((X))$ et $k := \boldsymbol{Q}[[X]]/\mathfrak{m} \equiv \boldsymbol{Q}$. Corps résiduel et corps de fractions ont même caractéristique ; on dit alors que $\boldsymbol{V}$ est un anneau de valuation discrète «*d'égale caractéristique*».
- Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier strictement plus grand que 1. Notons $\mathbb{Z}_{(p)}$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels x s'exprimant comme quotient $x = A/B$ où $\mathrm{pgcd}(B, p) = 1$. L'anneau $\boldsymbol{V} := \mathbb{Z}_{(p)}$ est de valuation discrète mais n'est pas complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. On a $\mathfrak{m} = \langle p\rangle$, $\boldsymbol{K} := \mathbb{Q}$ et $k = \mathbb{Z}_{(p)}/\langle p\rangle \equiv \mathbb{F}_p$. Dans ce cas $\mathrm{car}(\boldsymbol{K}) = 0$ et $\mathrm{car}(k) = p$; on dit alors que $\boldsymbol{V}$ est un anneau de valuation discrète «*d'inégale caractéristique*».
- L'anneau $\mathbb{Z}_p$, complété p-adique de $\mathbb{Z}_{(p)}$, est appelé «*l'anneau des entiers p-adiques*», c'est la limite projective du système $\{\mathbb{Z}_{(p)}/\langle p\rangle^{m+1} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_{(p)}/\langle p\rangle^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ des surjections canoniques. L'anneau $\boldsymbol{V} := \mathbb{Z}_p$ est de valuation discrète et complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. On a $\mathfrak{m} = \langle p\rangle$, $\boldsymbol{K} := \mathbb{Q}_p$, appelé «*le corps des nombres p-adiques*», et $k = \mathbb{F}_p$; $\boldsymbol{V}$ est d'inégale caractéristique.
- **Vecteurs de Witt.** (*cf.* [Ser] §II.6) Dans l'exemple précédent on donne un anneau de valuation discrète complet et séparé dont la réduction modulo l'idéal maximum est le corps $\mathbb{F}_p$. Une procédure générale (et fonctorielle) permet d'associer à tout corps k de caractéristique finie (et parfait) un anneau de valuation discrète complet, séparé et dont la réduction modulo l'idéal maximum est le corps k lui-même.

  Pour chaque nombre premier p et chaque entier positif ℓ, notons $\boldsymbol{X}_\ell$ l'ensemble des ℓ-uplets $\vec{a} = (a_0, \ldots, \ell-1)$ où les a_i sont des éléments de l'anneau $\boldsymbol{Q} := \mathbb{Q}[X_i, Y_i, Z_i]_{i=0,\ldots,\ell-1}$ à 3ℓ variables, et soit $\varphi : \boldsymbol{X}_\ell \to \boldsymbol{X}_\ell$ l'application qui fait correspondre au ℓ-uplet $\vec{a}$ le ℓ-uplet $\varphi(\vec{a})$ de coefficients :

$$\varphi(\vec{a})_j := \textstyle\sum_{i=0}^{j} p^i a_i^{p^{j-i}}, \qquad j = 0, \ldots, \ell.$$

  Par exemple, on a pour les trois premiers coefficients :

$$\begin{cases} \varphi(\vec{a})_0 = a_0 \\ \varphi(\vec{a})_1 = a_0^p + p \cdot a_1 \\ \varphi(\vec{a})_2 = a_0^{p^2} + p \cdot a_1^p + p^2 \cdot a_2 \end{cases}$$

On vérifie que φ est bijective et que $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ et $\varphi(\mathbf{1}) = (1, \dots, 1)$, où l'on a noté $\mathbf{0} := (0, \dots, 0)$ et $\mathbf{1} := (1, 0, \dots, 0)$. On définit alors une structure d'anneau $\big(\boldsymbol{X}_\ell, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1}\big)$ en transportant par φ la structure d'anneau produit sur $\boldsymbol{X}_\ell = \boldsymbol{Q} \times \cdots \times \boldsymbol{Q}$; autrement dit, on pose $\vec{a} \circledast \vec{b} := \varphi^{-1}\big(\varphi(\vec{a}) * \varphi(\vec{b})\big)$, où $*$ désigne l'un des trois opérateurs binaires $+, -, \cdot$. Un théorème fondamental affirme que pour chaque $j = 0, \dots, \ell$ et chaque opération $* \in \{+, -, \cdot\}$, il existe un polynôme ***à coefficients entiers et sans terme constant*** $P_{*,j} \in \mathbb{Z}[x_i, y_i]_{i=0,\dots,\ell-1}$ tel que :

$$(\vec{a} \circledast \vec{b})_j = P_{*,j}(a_0, \dots, a_{\ell-1}, b_0, \dots, b_{\ell-1}) \,,$$

pour tous $\vec{a}, \vec{b} \in \boldsymbol{X}_\ell$ (*loc. cit.* th. 5 page 50). Les propriétés de : associativité, distributivité, éléments neutres, commutativité, etc., qui font de la structure $\big(\boldsymbol{X}_\ell, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1}\big)$ un anneau, s'expriment alors à l'aide de propriétés « *universelles* » qui relient les polynômes $P_{+,j}$ et $P_{\cdot,j}$.

Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau, « *l'anneau des vecteurs de Witt de longueur ℓ sur $\boldsymbol{A}$* », noté $W_\ell(\boldsymbol{A})$, est l'ensemble des ℓ-uplets à coefficients dans $\boldsymbol{A}$ muni des opérations binaires '$+$' et '$\cdot$' définies par :

$$\left\{ \begin{array}{r} \big(\vec{a} + \vec{b}\big)_j \\ \big(\vec{a} \cdot \vec{b}\big)_j \end{array} \begin{array}{l} := P_{+,j}(a_0, \dots, a_{\ell-1}, b_0, \dots, b_{\ell-1}) \\ := P_{\cdot,j}(a_0, \dots, a_{\ell-1}, b_0, \dots, b_{\ell-1}) \end{array} \right\} \quad \text{pour } j = 0, \dots, \ell - 1,$$

On démontre, grâce aux propriétés universelles qui relient les polynômes $P_{*,j}$, que $\big(W_\ell(\boldsymbol{A}), +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1}\big)$ est un anneau commutatif et, lorsque $\boldsymbol{A}$ est en plus de caractéristique positive p, que $W_\ell(\boldsymbol{A})$ est de caractéristique p^ℓ.

L'application de « *restriction* » $r_{\ell+1} : W_{\ell+1}(\boldsymbol{A}) \to W_\ell(\boldsymbol{A})$ qui fait correspondre $(a_0, \dots, a_\ell) \mapsto (a_0, \dots, a_{\ell-1})$ est un morphisme surjectif d'anneaux et la limite du système projectif défini par $\{r_m\}$ est appelée « *l'anneau de vecteurs Witt sur $\boldsymbol{A}$* » et est notée $W(\boldsymbol{A})$. Pour chaque ℓ, la surjection $r_2 \circ \cdots \circ r_\ell : W_\ell(\boldsymbol{A}) \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$ qui fait correspondre $\vec{a} \mapsto a_0$ est un morphisme d'anneaux de noyau nilpotent et un ℓ-uplet $\vec{a}$ est inversible dans $W_\ell(\boldsymbol{A})$, si et seulement si, son coefficient $a_0 \in \boldsymbol{A}$ l'est. On a les théorèmes suivants (*loc. cit.*) :

Si k est un corps parfait de caractéristique finie, $W(k)$ est un anneau de caractéristique nulle, de valuation discrète complet et séparé, et sa réduction modulo l'idéal maximum est k.

L'anneau $W(\mathbb{F}_p)$ est isomorphe à l'anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$.

Pour tout morphisme d'anneaux $\alpha : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$, l'application $W(\alpha) : W(\boldsymbol{A}_1) \to W(\boldsymbol{A}_2)$ définie par $W(\alpha)(a_0, a_1, \dots) := \big(\alpha(a_0), \alpha(a_1), \dots\big)$, est un morphisme d'anneaux et la correspondance $\boldsymbol{A} \rightsquigarrow W(\boldsymbol{A})$, $\alpha \rightsquigarrow W(\alpha)$ est fonctorielle. En particulier, lorsque $\boldsymbol{A}$ est de caractéristique p, l'homomorphisme de Frobenius $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$, $a \mapsto a^p$, admet un « *relèvement* » canonique $W(F) : W(\boldsymbol{A}) \to W(\boldsymbol{A})$.

5.4.11. Exercice : Montrer qu'un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique est nécessairement de caractéristique nulle.

5.4.12. Relèvements de k-algèbres. Les surjections canoniques $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{V} \twoheadrightarrow k$ donnent lieu aux morphismes de schémas affines : $\mathrm{Spec}(k) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\boldsymbol{V}) \leftarrow \mathrm{Spec}(\boldsymbol{K})$, et nous avons par changement de base deux foncteurs de la catégorie des schémas sur $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{V})$ vers les catégories des schémas sur $\mathrm{Spec}(k)$ et $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{K})$ appelés respectivement : « *la fibre spéciale* » et « *la fibre générique* ».

5.4.13. Définitions : Soit $\boldsymbol{X}_k$ un schéma sur $\mathrm{Spec}(k)$. On appelle « *relèvement (plat) de* $\boldsymbol{X}_k$ » tout schéma $\boldsymbol{X_V}$ ***plat*** sur $\boldsymbol{V}$ dont la fibre spéciale est isomorphe à $\boldsymbol{X}_k$.

Lorsque $\boldsymbol{X}_k$ est lisse sur $\mathrm{Spec}(k)$, on appelle « *relèvement lisse de* $\boldsymbol{X}_k$ » tout schéma $\boldsymbol{X_V}$ ***lisse*** sur $\boldsymbol{V}$ dont la fibre spéciale est isomorphe à $\boldsymbol{X}_k$.

5.4.14. Remarque : Suite au théorème 4.4.6, un relèvement lisse d'un schéma lisse sur $\mathrm{Spec}(k)$ est un relèvement dont la fibre générique est lisse.

Le théorème suivant résume les principaux résultats des paragraphes précédents (th. 5.2.7, th. 5.4.5-(b), th. 5.4.8).

5.4.15. Théorème : *Soit $\boldsymbol{V}$ un anneau de valuation discrète. Alors :*

a) *Toute $k(\boldsymbol{V})$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$ admet un relèvement $\boldsymbol{A}$ lisse sur $\boldsymbol{V}$.*

b) *De plus, la classe d'isomorphie dans $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\widehat{\boldsymbol{V}})$ de la $\boldsymbol{V}$-algèbre $\widehat{\boldsymbol{A}}$: complétée séparée de $\boldsymbol{A}$, dépend uniquement de la $k(\boldsymbol{V})$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}$ et non pas du relèvement $\boldsymbol{V}$-lisse $\boldsymbol{A}$ choisi.*

c) *Pour tout morphisme de $k(\boldsymbol{V})$-algèbres $\overline{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, entre deux algèbres $k(\boldsymbol{V})$-lisses, il existe un morphisme de $\widehat{\boldsymbol{V}}$-algèbres $\widehat{\alpha} : \widehat{\boldsymbol{A}} \to \widehat{\boldsymbol{B}}$ qui relève $\overline{\alpha}$. Deux tels relèvements sont homotopes au sens des algèbres $\boldsymbol{I}$-adiquement complètes.*

5.4.16. Rappel : On insiste sur le fait que deux relèvements de $\overline{\boldsymbol{A}}$, lisses sur $\boldsymbol{V}$, peuvent ne pas être isomorphes (voir 5.2.9 et 6.1-((**7**))) alors que leurs complétions $\boldsymbol{I}$-adiques sont toujours isomorphes (bien que de manière non canonique), mais alors ces complétions ne sont plus nécessairement de présentation finie sur $\widehat{\boldsymbol{V}}$ (on dit qu'elles ne sont pas « *algébriques sur* $\widehat{\boldsymbol{V}}$ »).

Le théorème 5.4.15 affirme que tout relèvement $(\boldsymbol{V}, \mathfrak{m}(\boldsymbol{V}))$-formellement lisse, complet et séparé d'une $k(\boldsymbol{V})$-algèbre lisse s'obtient par complétion d'un relèvement lisse sur $\boldsymbol{V}$ (donc *algébrique sur* $\boldsymbol{V}$) (5.4.5).

§6. Exemples de calcul de la cohomologie de de Rham

6.1 La droite affine privée d'un nombre fini de points

Soit $\boldsymbol{R}$ un anneau intègre de caractéristique arbitraire et notons $\boldsymbol{Q}$ son corps de fractions. Pour tout sous-ensemble fini $\boldsymbol{F} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ de $\boldsymbol{R}$, on désigne par $S_{\boldsymbol{F}}$ le système multi-

plicatif de $\boldsymbol{R}[X]$ des éléments de la forme $(X-x_1)^{m_1}\cdots(X-x_r)^{m_r}$ avec $m_i\in\mathbb{N}$. On note $\boldsymbol{A}:=S_{\boldsymbol{F}}^{-1}\boldsymbol{R}[X]$.

1) Notons $\zeta=\prod_{i=1}^{r}(X-x_i)$. Comme l'inversibilité des éléments de $S_{\boldsymbol{F}}$ équivaut à l'inversibilité de ζ, on a $\boldsymbol{R}[X]_\zeta\equiv S_{\boldsymbol{F}}^{-1}\boldsymbol{R}[X]$. En particulier, $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est isomorphe en tant que schéma à l'ouvert principal $D(\zeta)\subseteq\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R}[X])=\mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$. Le complémentaire de $D(\zeta)$ est l'ensemble des idéaux premiers de $\boldsymbol{R}[X]$ qui contiennent l'un quelconque des $(X-x_i)$.

Lorsque $\boldsymbol{R}$ est un corps, les idéaux $\langle X-x_i\rangle$ sont maximaux et $D(\zeta)$ est alors le complémentaire dans $\mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$ d'un ensemble fini qui s'identifie canoniquement à $\boldsymbol{F}$.

2) Comme $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est ouvert dans $\mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$ au-dessus de $\boldsymbol{R}$, il est lisse de même dimension relative que $\mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$. D'autre part, l'équivalence $\boldsymbol{A}\equiv\boldsymbol{R}[X,Z]/\langle Z\zeta-1\rangle$ montre que $\boldsymbol{A}$ est intersection transverse puisque $\boldsymbol{R}[X,Z]=\langle Z\zeta-1,\zeta,Z\zeta'\rangle$ (*cf.* lemme 4.5.3).

3) La localisation commute au foncteur Ω, par conséquent :

$$\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\equiv\boldsymbol{R}[X]_\zeta\otimes_{\boldsymbol{R}[X]}\Omega_{\boldsymbol{R}[X]/\boldsymbol{R}}\equiv\boldsymbol{A}\,dX$$

et le $\boldsymbol{A}$-module $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est libre de rang 1. On a donc $\Omega^i_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}=\bigwedge^i_{\boldsymbol{R}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{0}$ pour tout $i>1$. Le complexe de de Rham $\big(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}},d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\big)$ est par conséquent réduit à deux termes et un morphisme :

$$\boldsymbol{0}\to\boldsymbol{A}\xrightarrow{d}\boldsymbol{A}\,dX\to\boldsymbol{0}$$

D'autre part, comme $\boldsymbol{A}$ est une algèbre de fractions de $\boldsymbol{R}[X]$, la différentielle $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est entièrement déterminée par la différentielle $d_{\boldsymbol{R}[X]/\boldsymbol{R}}$ et l'on a la formule bien connue :

$$d\big(P(X)/\zeta^m\big)=\frac{P'(X)\,\zeta^m-P(X)\,m\,\zeta^{m-1}}{\zeta^{2m}}\,dX\,.$$

4) Pour chaque $f\in\boldsymbol{Q}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}$ il existe ***une et une seule*** famille $\{P_f(X),c(f)_{i,m}\}$ vérifiant :

$$f=P_f(X)+\sum_{i=1}^{r}\sum_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}\frac{c(f)_{i,m}}{(X-x_i)^m}\,,$$

avec $P_f(X)\in\boldsymbol{Q}[X]$ et $c(f)_{i,m}\in\boldsymbol{Q}$.

Existence. Il suffit de le prouver pour f de la forme :

$$f=\frac{P(X)}{(X-x_1)^{m_1}\dots(X-x_r)^{m_r}}\,,\ \text{avec } d^\circ(P(X))<\textstyle\sum_{i=1}^{r}m_i.$$

On procède par induction sur $m=\sum m_i$.

Lorsque $m<2$ on n'a rien à prouver. Dans le cas général l'un des m_i sera non nul, supposons que ce soit m_1. On écrit alors $P(X)=Q(X)(X-x_1)+P(x_1)$ d'où l'égalité :

$$\begin{aligned}f&=\frac{Q(X)(X-x_1)+P(x_1)}{(X-x_1)^{m_1}\dots(X-x_r)^{m_r}}=\\&=\frac{Q(X)}{(X-x_1)^{m_1-1}\dots(X-x_r)^{m_r}}+\frac{P(x_1)}{(X-x_1)^{m_1}\dots(X-x_r)^{m_r}}\end{aligned}$$

où le premier terme admet, par l'hypothèse inductive, une décomposition du type cherché. Pour le second terme, il suffit de supposer $P(x) = 1$ et nous sommes amenés à étudier les expressions de la forme :

$$\frac{1}{(X-x_1)^{m_1}\dots(X-x_r)^{m_r}} \tag{‡}$$

où il existe au moins deux m_i non nuls. Or, comme les $x_i - x_j$ sont non nuls dans $\boldsymbol{Q}$ puisque $\boldsymbol{R}$ est intègre, on a les décompositions :

$$\frac{1}{(X-x_i)(X-x_j)} = \frac{(x_i-x_j)^{-1}}{X-x_i} + \frac{(x_j-x_i)^{-1}}{X-x_j}$$

qui ramènent les expressions (‡) à d'autres dans la portée de l'hypothèse inductive.
Unicité. Elle revient à prouver que si l'on a :

$$0 = P(X) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \frac{c_{i,m}}{(X-x_i)^m}\,,$$

avec $P(X) \in \boldsymbol{Q}[X]$ et $c_{i,m} \in \boldsymbol{Q}$, alors $P(X) = 0$ et $c_{i,m} = 0$ pour tous i, m. Ceci résulte d'arguments élémentaires que nous ne détaillons pas.

Ceci étant, l'application :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} : \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A} &\longrightarrow \boldsymbol{Q}^r \\ f &\longmapsto \big(c(f)_{1,1}, \dots, c(f)_{r,1}\big) \end{aligned}$$

est une surjection linéaire. En effet, la linéarité résulte de l'unicité des décompositions (4) et la surjectivité est évidente puisque $\boldsymbol{I} : 1/(X-x_i) \mapsto \mathbf{e}_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$.

5) L'application $\boldsymbol{I}$ induit une surjection de $\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R})$ sur $\boldsymbol{Q}^r$ qui est bijective lorsque $\boldsymbol{R}$ est de caractéristique nulle, mais elle possède un noyau de dimension infinie autrement.

En effet, comme $\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}\, dX$, nous définissons $\boldsymbol{I} : \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{Q}^r$ par $\boldsymbol{I}(f\, dX) = \boldsymbol{I}(f)$. De plus, pour tout $f \in \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ on a d'après (3) et (4) :

$$(1 \otimes d)(f) = P_f(X)' - \sum_{i=1}^{r} \sum_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \frac{m\, c(f)_{i,m}}{(X-x_i)^{m+1}}\,, \tag{◇}$$

de sorte que $\boldsymbol{I} \circ d = 0$, puisque les décompositions en termes simples des images de $1 \otimes d$ ne font intervenir aucun des termes $1/(X-x_i)$.

La surjection $\boldsymbol{I} : \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \twoheadrightarrow \boldsymbol{Q}^r$ définit donc, par passage au quotient, une surjection :

$$\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}) = \frac{\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}{\mathrm{im}(1 \otimes d)} \xrightarrow{\boldsymbol{I}'} \boldsymbol{Q}^r$$

où l'égalité est justifiée par l'exactitude du foncteur (de localisation) $\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} (_)$.

Lorsque $\boldsymbol{Q}$ est de caractéristique nulle, on construit facilement une primitive pour tout $f \in \ker(\boldsymbol{I})$ et $\boldsymbol{I}'$ est bien un isomorphisme. Par contre, en caractéristique positive p il n'y a pas de primitive pour les éléments de $\ker(\boldsymbol{I})$ de la forme

$$c_1 X^{p-1} + c_2 X^{p^2-1} + \dots + c_m X^{p^m-1}$$

et ceci quels que soient $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $c_1, \dots, c_m \in \boldsymbol{Q}$ non tous nuls. En particulier, ces éléments sont non cohomologues et constituent un sous-espace vectoriel de dimension infinie de $\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R})$.

6) On a $\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}) = \ker(1 \otimes d)$. En caractéristique 0 l'égalité $(\diamond)$ montre que $\ker(1 \otimes d) = \boldsymbol{Q}$. En caractéristique positive p, on a $X^{p^\alpha} \in \ker(1 \otimes d)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $\ker(1 \otimes d)$ est de dimension infinie.

7) Dans cette partie $\boldsymbol{R} := \mathbb{F}_p$.

On note $\nu : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p/\langle p\rangle =: \mathbb{F}_p$ la projection canonique de l'anneau des entiers p-adiques sur son corps résiduel. Pour toute partie finie $\boldsymbol{G}$ de $\mathbb{Z}_p$ qui relève $\boldsymbol{F}$, *i.e.* telle que $\nu(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{F}$, on note $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}} := S_{\boldsymbol{G}}^{-1}\mathbb{Z}_p[X]$.

a) La réduction modulo p d'une $\mathbb{Z}_p$-algèbre $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est la $\mathbb{F}_p$-algèbre $\mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \boldsymbol{\mathcal{A}}$. On a donc :

$$\mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}} \equiv \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} S_{\boldsymbol{G}}^{-1}\mathbb{Z}_p[X] \equiv S_{\nu(\boldsymbol{G})}^{-1}\mathbb{F}_p[X] = \boldsymbol{A}\,.$$

et $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}}$ est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre lisse qui relève la $\mathbb{F}_p$-algèbre lisse $\boldsymbol{A}$.

b) Les algèbres $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}}$ rentrent dans le cadre de la question (6), par conséquent $\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}})) = \#\boldsymbol{G}$. Comme les nombres de Betti sont des invariants pour les $\mathbb{Z}_p$-algèbres (de type fini), on conclut que $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_1} \not\equiv \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_2}$ dès que $\#\boldsymbol{G}_1 \neq \#\boldsymbol{G}_2$.

Cette question montre que la $\mathbb{F}_p$-algèbre lisse $\boldsymbol{A}$ admet des relèvements $\mathbb{Z}_p$-lisses non isomorphes (*cf.* rappel 5.4.16).

c) Pour toute inclusion d'ensembles $\boldsymbol{G}_1 \subseteq \boldsymbol{G}_2$, l'inclusion $S_{\boldsymbol{G}_1} \subseteq S_{\boldsymbol{G}_2}$ donne le morphisme d'algèbres canonique habituel $h(\boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{G}_1) : \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_1} = S_{\boldsymbol{G}_1}^{-1}\mathbb{Z}_p[X] \to S_{\boldsymbol{G}_2}^{-1}\mathbb{Z}_p[X] = \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_2}$.

c-i) D'après les questions questions (1) et (2) on a des isomorphisme :

$$\xi(\boldsymbol{G}) : \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}} \xrightarrow[\equiv]{} \frac{\mathbb{Z}_p[X, Z]}{\left\langle Z \prod_{y\in\boldsymbol{G}}(X - y) - 1\right\rangle}\,.$$

vérifiant :

$$\xi(\boldsymbol{G})\left(\frac{P(X)}{\prod_{y\in\boldsymbol{G}}(X - y)^m}\right) = \overline{P(X)\, Z^m}\,.$$

c-ii) Soient $X' := \xi(\boldsymbol{G}_2)\circ h(\boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{G}_1)\circ\xi(\boldsymbol{G}_1)^{-1}(X)$ et $Z' := \xi(\boldsymbol{G}_2)\circ h(\boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{G}_1)\circ\xi(\boldsymbol{G}_1)^{-1}(Z)$. On a $X' = X$ et $Z' = Z\prod_{y\in\boldsymbol{G}_2\backslash\boldsymbol{G}_1}(X - y)$. En effet, Z représente l'inverse de $\prod_{y\in\boldsymbol{G}_1}(X - y)$ dans $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_1}$ tandis qu'il représente l'inverse de $\prod_{y\in\boldsymbol{G}_2}(X - y)$ dans $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_2}$.

c-iii) Pour chaque algèbre $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}}$, on note $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}}$ sa complétion pour la topologie p-adique. La composée $\xi(\boldsymbol{G}_2)\circ h(\boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{G}_1)\circ\xi(\boldsymbol{G}_1)^{-1}$ induit une ***bijection*** entre les complétions p-adiques :

$$\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_1} \equiv \frac{\widehat{\mathbb{Z}_p[X, Z]}}{\left\langle Z \prod_{y\in\boldsymbol{G}_1}(X - y) - 1\right\rangle} \xrightarrow[\equiv]{} \frac{\widehat{\mathbb{Z}_p[X, Z]}}{\left\langle Z \prod_{y\in\boldsymbol{G}_2}(X - y) - 1\right\rangle} \equiv \widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_2}\,.$$

En effet, d'après (c-ii) il suffira de prouver que $\prod_{y\in\boldsymbol{G}_2\backslash\boldsymbol{G}_1}(X - y)$ est inversible dans $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_1}$. Pour chaque $y \in \boldsymbol{G}_2\backslash\boldsymbol{G}_1$ il existe (par définition des ensembles $\boldsymbol{G}$) un

$y_0 \in \boldsymbol{G}_1$ tel que $\nu(y) = \nu(y_0)$; autrement dit tel que $y - y_0 \in p\,\mathbb{Z}_p$. Alors :

$$(X - y) = X - y_0 + p\,w = (X - y_0)\big(1 + p\,w\,(X - y_0)^{-1}\big)$$

pour un certain $w \in \mathbb{Z}_p$, et le dernier facteur est inversible dans $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_1}$.
Remarque. Cette démonstration prouve que la même conclusion est vrai pour tous $\boldsymbol{G}_1 \subseteq \boldsymbol{G}_2 \subseteq \mathbb{Z}_p[X]$ vérifiant $\nu(\boldsymbol{G}_i) = \boldsymbol{F}$.

c-iv) Les algèbres $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}}$ sont deux-à-deux isomorphes puisque pour $\boldsymbol{G}_1$ et $\boldsymbol{G}_2$ donnés, on a les isomorphisme de (c-iii) : $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_1} \equiv \widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_1 \cup \boldsymbol{G}_2} \equiv \widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_2}$. Conclusion qui corrobore par le calcul l'assertion (a) du théorème 5.4.5.

8) Dans cette dernière question on choisit $\boldsymbol{R} := \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{C}$ l'ouvert complémentaire d'un ensemble fini de nombres complexes $\boldsymbol{F} \subseteq \mathbb{C}$. On considère $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$ muni de la topologie transcendante induite par celle de $\mathbb{C}$. Les nombres de Betti de la cohomologie de de Rham des formes différentielles réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$ se déterminent à l'aide de la suite exacte longue de cohomologie à support compact associée au triplet $\boldsymbol{U}(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \supseteq \boldsymbol{F}(\mathbb{C})$, puis la dualité de Poincaré.

La suite exacte en question en degrés $0, 1$ est :

$$\underset{\mathbf{0}}{H^0_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})} \to \underset{\mathbf{0}}{H^0_{\mathrm{DR},c}(\mathbb{C};\mathbb{C})} \to \underset{\mathbb{C}^r}{H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F};\mathbb{C})} \to H^1_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U};\mathbb{C}) \to \underset{\mathbf{0}}{H^1_{\mathrm{DR},c}(\mathbb{C};\mathbb{C})} \to \underset{\mathbf{0}}{H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F};\mathbb{C})}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{C}}\big(H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})\big) = \mathbb{C}\,, & \text{par connexité}\,; \\ \dim_{\mathbb{C}}\big(H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})\big) = \dim_{\mathbb{C}}\big(H^1_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})\big) = r\,; \\ \dim_{\mathbb{C}}\big(H^2_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})\big) = \dim_{\mathbb{C}}\big(H^0_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})\big) = 0\,; \end{cases}$$

où les dernières égalités résultent de la dualité de Poincaré.

6.2 À propos du complémentaire d'une hypersurface lisse de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Soit $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ une hypersurface ***irréductible et lisse*** définie par un polynôme $f \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ homogène de degré d. On note $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ l'ouvert complémentaire de $\boldsymbol{X}$. Comme f est homogène l'anneau $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n][1/f]$ est gradué sur $\mathbb{Z}$, ses éléments homogènes de degré zéro constituent alors un sous-anneau noté $R[\boldsymbol{U}] := \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n][1/f]^0$. Le schéma $\boldsymbol{U}$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}(R[\boldsymbol{U}])$.

Rappelons rapidement la démonstration de ce résultat dans le langage des schémas.
Pour tout anneau commutatif $\boldsymbol{R}$, le complémentaire d'une hypersurface $\boldsymbol{Y}$ de $\mathbb{P}^n_{\boldsymbol{R}}$ est isomorphe au schéma affine $\mathrm{Spec}\big(\boldsymbol{R}[X_0, \ldots, X_n][1/f]^0\big)$ *où f désigne le polynôme homogène qui définit $\boldsymbol{Y}$.*

Démonstration : On note $d = d^0(f)$ et nous allons supposer que f n'est divisible par aucun des X_i, ce qui est toujours possible quitte à faire un changement linéaire des variables $\{X_0, \ldots, X_n\}$. Une remarque fondamentale apparaît dans les diagrammes suivants qui dépendent de $i = 0, \ldots, n$:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}[X_0,\dots,X_n][1/f]^0 & \xhookrightarrow{\ \iota\ } & \boldsymbol{R}[X_0,\dots,X_n][1/f] \\ {\scriptstyle\nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \boldsymbol{R}[X_0,\dots,X_n][1/f]^0\big[f/X_i^d\big] & \xrightarrow[\simeq]{\ \bar\iota\ } & \dfrac{\boldsymbol{R}[X_0,\dots,X_n][1/f]}{\langle X_i-1\rangle} \end{array}$$

La première ligne est l'injection canonique et l'on montre aisément que l'idéal $\langle X_i-1\rangle$ de l'anneau $\boldsymbol{R}[X_0,\dots,X_n][1/f]$ ne contient aucune fraction homogène de degré 0. Par conséquent la composée $\pi\circ\iota$ est injective. Mais $(\pi\circ\iota)(X_i^d/f)$ est inversible et $\pi\circ\iota$ se factorise à travers ν en une injection $\bar\iota$ qui est surjective puisque :

$$\frac{X_i^{d-1}X_j}{f}\ \frac{f}{X_i^d} \xmapsto{\ \bar\iota\ } \overline{X}_j$$

On remarque ensuite que les anneaux $\boldsymbol{R}[X_0,\dots,X_n][1/f]/\langle X_i-1\rangle$ sont précisément les anneaux $\mathcal{O}_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U}\cap U_i)$ où U_i désigne le complémentaire dans $\mathbb{P}^n_{\boldsymbol{R}}$ de l'hypersurface $\{X_i=0\}$. L'application ι définit donc un homomorphisme d'anneaux $\boldsymbol{R}[X_0,\dots,X_n][1/f]^0\to\mathcal{O}_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U})$ qui est un isomorphisme local. On en déduit une application

$$\sigma:\boldsymbol{U}\to\operatorname{Spec}\big(\boldsymbol{R}[X_0,\dots,X_n][1/f]^0\big)$$

dont les restrictions aux ouverts $\boldsymbol{U}\cap U_i$ sont des plongements ouverts de schémas, en particulier σ est continue.

Pour l'étude de l'application ensembliste σ nous pouvons supposer que l'anneau $\boldsymbol{R}$ est réduit.

La surjectivité de σ résulte de l'égalité

$$\bigcup_i \sigma(\boldsymbol{U}\cap U_i)=\operatorname{Spec}\big(\boldsymbol{R}[X_0,\dots,X_n][1/f]^0\big)\,.$$

Comme on a $\sigma(\boldsymbol{U}\cap U_i)=D(X_i^d/f)$, il suffit de montrer que 1 appartient à l'idéal $\langle X_0^d/f,\dots,X_n^d/f\rangle$ de $\boldsymbol{R}[X_0,\dots,X_n][1/f]^0$ ce qui est une conséquence du fait que $f^d\in\langle X_0^d,\dots,X_n^d\rangle\subseteq\boldsymbol{R}[X_0,\dots,X_n]$.

Enfin, l'injectivité de σ résulte de ce que pour tous $u_1,u_2\in\boldsymbol{U}$ avec $u_1\neq u_2$, il existe $g\in\boldsymbol{R}[X_0,\dots,X_n][1/f]^0$ tel que $g(u_1)\neq g(u_2)$. Or, comme $\boldsymbol{U}\subseteq\mathbb{P}^n_{\boldsymbol{R}}$ on sait qu'il existe un polynôme homogène $g'\in\boldsymbol{R}[X_0,\dots,X_n]$ tel que $g'(u_1)\neq g'(u_2)$. Soit $d'=d^\circ(g')$ alors $g:=(g')^d/f^{d'}$ répond à la question. ∎

1) La $\mathbb{C}$-algèbre $R[\boldsymbol{U}]$ est de type fini puisqu'elle est clairement engendrée par les monômes $X_0^{m_1}\cdots X_n^{m_n}/f$ avec $\sum m_i=d$ et comme $\boldsymbol{U}$ est un ouvert de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $R[\boldsymbol{U}]$ est en plus lisse de dimension relative n.

2) Finitude des nombres de Betti $\dim_{\mathbb{C}}\big(H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}/\mathbb{C})\big)$.

C'est un théorème que les nombres de Betti des variétés lisses sur un corps de caractéristique nulle sont finis ; il a été démontré pour la première fois sur le corps des nombres complexes par A. Grothendieck dans son article "On the de Rham cohomology of algebraic varieties" (IHES ; Publications Mathématiques, **29**, 351–359, 1966). Nous n'avons pas démontré ce théorème dans le cours mais le théorème de comparaison de Grothendieck donne des isomorphismes canoniques $H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}/\mathbb{C})\equiv H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))$ et la dualité de

Poincaré montre que

$$\dim_{\mathbb{C}}(H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))) = \dim_{\mathbb{C}}(H^{2n-i}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C})))$$

de sorte que la finitude des nombre de Betti résultera de la finitude de la cohomologie de de Rham à support compact de $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$ ce qui est expliqué dans la question suivante.

3) On considère $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$, $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$ et $\boldsymbol{X}(\mathbb{C})$ munis de la topologie transcendante. Les dimensions des espaces $H^i_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))$, $H^i_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}))$ et $H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))$ est finie puisque la finitude des nombres de Betti des variétés $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ et de $\boldsymbol{X}(\mathbb{C})$ résulte de leur compacité et celle des nombres de Betti de $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$, du fait que les $H^i_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))$ sont dans la suite exacte longue de cohomologie à support compact associée au triplet $\boldsymbol{U}(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \supseteq \boldsymbol{X}(\mathbb{C})$.

4) **Le but de cette question est de montrer que $\boldsymbol{H^r_{\mathrm{DR}}(U/\mathbb{C}) = 0}$ pour tout $\boldsymbol{r \notin \{0, n\}}$.**

a) Annulation des $H^{n+i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))$ lorsque $i > 0$ et

$$\begin{cases} H^{n-i}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \equiv H^{n-i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))\,, & \text{pour tout } i \geqslant 2\,; \\ H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \subseteq H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))\,. \end{cases}$$

Comme $\boldsymbol{U}$ est (lisse) de dimension n le complexe de de Rham algébrique $\Omega^*_{\boldsymbol{U}/\mathbb{C}}$ est concentré en degrés $[0, \ldots, n]$ et donc $H^j_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}/\mathbb{C}) = 0$ pour tout $j > n$. D'autre part, le théorème de comparaison de Grothendieck nous dit précisément que puisque $\boldsymbol{U}$ est ***affine*** la cohomologie du complexe de de Rham algébrique s'identifie canoniquement à la cohomologie du faisceau constant $\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{U}(\mathbb{C})}$ qui est, à son tour, canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe de de Rham différentiable à coefficients dans $\mathbb{C}$ d'après le théorème de comparaison de de Rham.

On a donc $H^{n+j}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C})) = 0$ pour tout $j > 0$, et alors $H^{n-j}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C})) = 0$ pour tout $j > 0$, par dualité de Poincaré. Lorsque l'on reporte cette information dans la suite exacte longue de cohomologie à support compact :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \to & H^{n-2}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^{n-2}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^{n-2}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & H^{n-1}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & H^n_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) \\ & \mathbf{0} & & \equiv & & & & \mathbf{0} & & \subseteq & & & & ? \end{array}$$

on obtient le résultat cherché.

b) L'anneau $H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}))$ est isomorphe en tant qu'algèbre graduée à $\mathbb{C}[T]/\langle T^n \rangle$ où T est considéré de degré 2. Soit $\omega \in H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ ***non nul*** et notons ϖ sa restriction à $\boldsymbol{X}$. Le théorème de Lefschetz « *difficile* » affirme dans notre cas ($\boldsymbol{X}(\mathbb{C})$ est lisse) que l'application $L(\varpi^{\wedge i}) : H^{(n-1)-i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C})) \to H^{(n-1)+i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))$ qui fait correspondre $\mu \mapsto \varpi^{\wedge i} \wedge \mu$, est un ***isomorphisme*** pour tout $i > 0$.

A l'aide de ce théorème et des résultats précédents on prouve :

$$H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}/\mathbb{C}) = \mathbf{0}\,, \qquad \text{pour tout } 0 < r < n.$$

En effet, par le théorème de comparaison de Grothendieck et la dualité de Poincaré, il revient au même de montrer que $H^r_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C})) = \mathbf{0}$, pour tout $n < r < 2n$.

Pour chaque $i>0$ on a :

$$\begin{array}{ccc} H^{(n-1)-i}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) & \xrightarrow[\equiv]{L(T^i)} & H^{(n-1)+i}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \\ \equiv\big\downarrow & \bigoplus & \big\downarrow \\ H^{(n-1)-i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C})) & \xrightarrow[\equiv]{L(\varpi^{\wedge i})} & H^{(n-1)+i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C})) \end{array}$$

Le morphisme de la première ligne résulte de la structure d'anneau de $H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ rappelée dans l'énoncé. Puis, les morphismes verticaux sont donnés par la restriction de classes de cohomologie et la question précédente a montré la bijectivité de celui de gauche. Enfin l'isomorphisme de la seconde ligne est celui du théorème de Lefschetz. La commutativité du diagramme résulte du fait que le morphisme de restriction est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres et que l'isomorphisme $H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \equiv H^2_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X})$ permet de supposer que la restriction de T à $\boldsymbol{X}$ est la classe ϖ. Les restrictions

$$H^{n+i}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \to H^{n+i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))$$

sont donc des isomorphisme pour tout $i \geqslant 0$, et lorsque l'on reporte cette information dans la suite exacte longue de cohomologie à support compact :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} H^n_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^n_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^n_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & H^{n+1}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^{n+1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^{n+1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & H^{n+2}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to \\ ? & & 0 & & \equiv & & \mathbf{0} & & \equiv & & & & \mathbf{0} & & \end{array}$$

qui termine par :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \to H^{2n-1}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^{2n-1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^{2n-1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & H^{2n}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^{2n}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^{2n}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) \to \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}_* & & \mathbb{C} & \equiv & \mathbb{C} & & \mathbf{0} \end{array}$$

où le '0_*' se justifie par une simple raison de dimension : $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{X}) = 2(n-1)$, on obtient le résultat demandé.

§7. Références bibliographiques

[B$_1$] N. Bourbaki. "*Algèbre, chapitres 1 à 3*" ; Éléments de mathématique. Herman (1970).

[B$_2$] N. Bourbaki. "*Commutative algebra*" ; Elements of mathematics. Herman (1972).

[BLR] S. Bosh, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. "*Néron Models*" ; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **3**. Folge–Band **21** (1980).

[E] R. Elkik. Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien ; Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, quatrième série, tome 6, pp. 553–604, (1973).

[EGA$_1$] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné. "*Éléments de géométrie algébrique-I*" ; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 166. Springer-Verlag, (1971).

[EGA$_{4,4}$] ———————————. "*Éléments de géométrie algébrique-IV*" ; Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. Quatrième partie. Publications mathématiques de l'I.H.E.S. **32**, (1967).

[Har] R. Hartshorne. "*Algébraic Geometry*" ; Graduate texts in mathematices **52**. Springer–Verlag, (1977).

[J] N. Jacobson. "*Basic algebra II (second edition)*" ; W. H. Freeman and Company, New York, (1989).

[Mat] H. Matsumura. "*Commutative Algebra (second edition)*" ; Mathematical lecture notes series. Benjamin (1980).

[Ser] J.-P. Serre. "*Corps locaux*" ; Actualités scientifiques et industrielles 1296. Hermann (1962).

———————×———————

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes
Dimanche 21 juillet 2018

Cohomologie de de Rham p-adique

"Applications du théorème de Čech-Leray"

Alberto Arabia

Table des matières

§**1. Contenu de ces notes**

§**2. Préliminaires sur les bicomplexes**

2.1. Catégorie des complexes associée à une catégorie abélienne 3

2.1.1. Définition 3

2.1.3. Amplitude d'un complexe 3

2.1.4. Complexes concentrés en un seul degré 3

2.1.5. Complexes noyaux et conoyaux 4

2.1.6. Catégories de sous-complexes bornés 4

2.1.7. Foncteur de translation 4

2.1.8. Foncteurs de cohomologie 4

2.1.9. Quasi-isomorphismes 5

2.1.10. Amplitude cohomologique 5

2.1.11. Cône d'un morphisme de complexes 5

2.1.14. Troncatures bêtes 6

2.2. Catégorie des bicomplexes associée à une catégorie abélienne 7

2.2.1. Foncteurs induits 8

2.2.2. Foncteurs de translation 8

2.2.3. Foncteur de cohomologie verticale 8

2.2.4. Foncteur de cohomologie horizontal 8

2.2.5. $h_v \circ h_h \neq h_h \circ h_v$ 9

2.2.6. Catégorie des suites exactes courtes 9

2.2.8. Complexe simple associé à un bicomplexe borné inférieurement 10

2.2.10. Critère d'acyclicité du complexe simple associé 10

2.2.11. Un critère de quasi-isomorphie de complexes simples associés 11

2.2.14. Notation $\Sigma^{\star}_{\bullet\circ}$ 12

§**3. Cohomologie des faisceaux**

3.1. Préliminaires 12

3.1.1. Faisceaux flasques 13

3.1.3. Résolution flasque de Godement 13

3.2. Cohomologie des faisceaux 14

3.2.1. Définition 14

3.2.2. Augmentation du complexe de Godement 14

3.2.4. Faisceaux acycliques 14

3.2.8. Propriétés générales de la cohomologie de faisceaux 15

3.3. Cohomologie de Čech des faisceaux 15

3.3.1. Complexe de Čech 15

3.3.3. Augmentation du complexe de Čech 16

3.3.4. Cohomologie de Čech 16

3.3.6. Faisceautisation du complexe de Čech 16

3.3.8. Théorème de Čech-Leray pour la cohomologie des faisceaux 17

§**4. Hypercohomologie des complexes de faisceaux**

4.1. Hypercohomologie des complexes de faisceaux 18

4.1.2. Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\boldsymbol{X};_) : h^*(\Gamma(U;_)) \to \mathbb{H}^*(U;_)$ 18

4.1.3. Propriétés générales de l'hypercohomologie 19

4.2. Cohomologie de Čech de complexes de faisceaux 20

4.2.1. Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\mathcal{U};_) : h^*(\Gamma(\boldsymbol{X};_)) \to \check{H}^*(\mathcal{U};_)$ 20

4.3. Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\mathcal{U};\boldsymbol{X};_) : \check{H}(\mathcal{U};_) \to \mathbb{H}(\boldsymbol{X};_)$ 21
4.3.2. Troncatures et suites exactes longues 22
4.4. Théorème de Čech-Leray pour l'hypercohomologie des complexes de faisceaux 23
§**5. Applications**
5.1. Théorème de de Rham sur les variétés différentielles 24
5.2. Calculs effectifs de la cohomologie de de Rham des variétés différentielles 25
5.2.1. Exemple : Cohomologie de de Rham de la sphère $\mathbb{S}^2$ 26
5.3. Calculs effectifs de la cohomologie de de Rham des variétés algébriques 26
5.3.1. Exemple : Cohomologie de de Rham de la sphère de Riemann 27
5.4. Théorème de comparaison de Grothendieck pour les variétés algébriques sur $\mathbb{C}$ non singulières 28
5.4.1. Structure d'espace analytique d'une variété algébrique complexe 28
5.4.2. Acyclicité des modules cohérents 29
5.4.4. Hypercohomologie de l'image directe des complexes cohérents 29
5.4.6. Cohomologies de de Rham 30
§**6. Références bibliographiques**
§**7. Index terminologique**

§1. Contenu de ces notes

On rappelle les terminologies, définitions et résultats de base d'algèbre homologique utiles dans l'étude de la cohomologie des faisceaux, de l'hypercohomologie des complexes de faisceaux, de la cohomologie de Čech des complexes de faisceaux, ainsi que dans l'étude des liens qui les unissent, en particulier, nous démontrons le théorème de Čech-Leray suivant :

Théorème (4.4.1). *Soient* $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{C}^+\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ *et* $\mathcal{U} = \{U_{\mathfrak{a}}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ *un recouvrement ouvert de* $\boldsymbol{X}$.

a) **(Čech-Leray)** *Si* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{G}^\bullet$*-acyclique, le morphisme canonique*

$$\Xi(\mathcal{U};\boldsymbol{X};\mathcal{G}^\bullet) : \check{H}^\star(\mathcal{U};\mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^\star(\boldsymbol{X};\mathcal{G}^\bullet)$$

est un ***isomorphisme****.*

b) *Soit* $\varphi_\bullet : \mathcal{G}_1^\bullet \to \mathcal{G}_2^\bullet$ *un morphisme de complexes faisceau tel que*

$$\mathbb{H}^\star(V;\varphi) : \mathbb{H}^\star(V;\mathcal{G}_1^\bullet) \to \mathbb{H}^\star(V;\mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un isomorphisme pour tout $V = U_{\mathfrak{a}_0\ldots\mathfrak{a}_k}$ *; ou bien, si* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{G}_i^\bullet$*-acyclique et que*

$$h^\star\Gamma(V;\varphi) : h^\star\Gamma(V;\mathcal{G}_1^\bullet) \to h^\star\Gamma(V;\mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un isomorphisme pour tout tel V*. Alors*

$$\mathbb{H}^\star(\boldsymbol{X};\varphi) : \mathbb{H}^\star(\boldsymbol{X};\mathcal{G}_1^\bullet) \to \mathbb{H}^\star(\boldsymbol{X};\mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un ***isomorphisme****.*

Dans la section §5 nous donnons des applications au calcul effectif de la cohomologie de de Rham et au théorèmes de comparaison des cohomologies de de Rham, tout particulièrement au théorème de comparaison de Grothendieck entre cohomologies de de Rham algébrique et holomorphe pour les variétés algébriques complexes non singulières.

Ces notes se veulent un «*complément*» aux documents déjà distribués et aux références bibliographiques, le texte n'est pas complet et ne prétend aucune exhaustivité.

§2. Préliminaires sur les bicomplexes

2.1 Catégorie des complexes associée à une catégorie abélienne

2.1.1. Définition. Étant donnée une catégorie abélienne $\mathbf{Ab}$ ([1]), on note $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ la catégorie dont les objets sont les « *complexes de* $\mathbf{Ab}$ », *i.e.* les familles $\{d_k : \boldsymbol{C}^k \to \boldsymbol{C}^{k+1} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ avec $\boldsymbol{C}^k \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Ab})$ et $d_k \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Ab}}(\boldsymbol{C}^k, \boldsymbol{C}^{k+1})$, tels que $d_{k+1} \circ d_k = 0$. Les objets $\boldsymbol{C}^k$ sont les « *termes* » du complexe et les morphisme d_k sont ses « *différentielles* » ou « *cobords* ».

Un complexe est noté $(\boldsymbol{C}^*; d_*)$ et même simplement $\boldsymbol{C}$ lorsque la référence à la graduation et la différentielle est superflue ; il se représente sous la forme :

$$\cdots \xrightarrow{d_{-3}} \boldsymbol{C}^{-2} \xrightarrow{d_{-2}} \boldsymbol{C}^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \boldsymbol{C}^{0} \xrightarrow{d_{0}} \boldsymbol{C}^{1} \xrightarrow{d_{1}} \boldsymbol{C}^{2} \xrightarrow{d_{2}} \cdots$$

Un « *morphisme de complexes* » de $(\boldsymbol{C}_1^*; d_{1,*})$ vers $(\boldsymbol{C}_2^*; d_{2,*})$ est une famille $\{\varphi_k \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Ab}}(\boldsymbol{C}_1^k, \boldsymbol{C}_2^k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ telle que $d_k \circ \varphi_k = \varphi_{k+1} \circ d_k$, autrement dit, telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{d_{-3}} & \boldsymbol{C}^{-2} & \xrightarrow{d_{-2}} & \boldsymbol{C}^{-1} & \xrightarrow{d_{-1}} & \boldsymbol{C}^{0} & \xrightarrow{d_{0}} & \boldsymbol{C}^{1} & \xrightarrow{d_{1}} & \boldsymbol{C}^{2} \xrightarrow{d_{2}} \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{-2}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{0}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{2}} \\
\cdots & \xrightarrow{d_{-3}} & \boldsymbol{C}^{-2} & \xrightarrow{d_{-2}} & \boldsymbol{C}^{-1} & \xrightarrow{d_{-1}} & \boldsymbol{C}^{0} & \xrightarrow{d_{0}} & \boldsymbol{C}^{1} & \xrightarrow{d_{1}} & \boldsymbol{C}^{2} \xrightarrow{d_{2}} \cdots
\end{array}$$

est commutatif. L'ensemble des morphismes de $\boldsymbol{C}_1$ vers $\boldsymbol{C}_2$ est noté $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})}(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2)$ et même $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2)$ lorsque aucune confusion n'est à craindre.

2.1.2. La correspondance $(\boldsymbol{C}^k; d_k) \rightsquigarrow \boldsymbol{C}^k$ et $\big(\varphi_* \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2)\big) \rightsquigarrow \big(\varphi_k : \boldsymbol{C}_1^k \to \boldsymbol{C}_2^k\big)$ est le foncteur « *k-ième terme* »

2.1.3. Amplitude d'un complexe. On appelle « *amplitude* » d'un complexe $\boldsymbol{C}$ le plus petit intervalle de $\mathbb{Z}$, noté $\mathrm{ampl}(\boldsymbol{C})$, contenant tous les termes non nuls de $\boldsymbol{C}$. Pour $\boldsymbol{J} \subseteq \mathbb{Z}$, on dit également qu'un complexe est « *concentré dans* $\boldsymbol{J}$ » lorsque $\mathrm{ampl}(\boldsymbol{C}) \subseteq \boldsymbol{J}$.

2.1.4. Complexes concentrés en un seul degré. Pour $k \in \mathbb{Z}$, un complexe $\boldsymbol{C} \in \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est dit « *concentré en degré k* » si $\mathrm{ampl}(\boldsymbol{C}) \subseteq \{k\}$. Dans ce cas $d_* = 0$ et $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{Ab}}(\boldsymbol{C}^k, \boldsymbol{D}^k)$. Pour $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Ab})$, on note $\boldsymbol{M}[k]$ le complexe $(\boldsymbol{C}^*; d_*)$ tel que $\boldsymbol{C}^k = \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}^j = \mathbf{0}$ pour $j \neq k$ et $d_* = 0$. De même, si $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Ab}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$, on note $\varphi[k] : \boldsymbol{M}[k] \to \boldsymbol{N}[k]$ le morphisme donné par $\varphi[k]_k = \varphi$ et $\varphi[k]_j = 0$ si $j \neq k$.

Proposition. *Pour $k \in \mathbb{Z}$, la correspondance $(_)[k] : \mathbf{Ab} \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est fonctorielle covariante additive ([2]) adjointe à gauche du foncteur « k-ième terme ».*

La sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ des complexes concentrés en degré 0 est clairement équivalente à la catégorie $\mathbf{Ab}$. Pour chaque $\boldsymbol{O} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{A})$, on note $\boldsymbol{O}[0]$ le complexe $(\boldsymbol{C}^*; d_*)$ tel que $\boldsymbol{C}^0 = \boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{C}^k = \mathbf{0}$ pour $k \neq 0$ et $d_* = 0$.

---

[1] Pour éviter des abstractions inutiles nous raisonnerons en termes de catégories de modules, il ne faudra donc pas s'étonner des expressions du genre « *pour tout* $x \in \ker(\alpha)$ ».

[2] Un foncteur covariant « *additif* » entre catégories additives (p.e. abéliennes) $\mathcal{F} : \mathbf{Ab} \rightsquigarrow \mathbf{Ab}'$ est un foncteur dont les applications fonctorielles $\mathcal{F}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) : \mathrm{Mor}_{\mathbf{Ab}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{Ab}'}(\mathcal{F}\boldsymbol{M}, \mathcal{F}\boldsymbol{N})$ sont des morphismes de groupes abéliens.

2.1.5. Complexes noyaux et conoyaux. Soit $\varphi_* : (\boldsymbol{C}_1^*; d_{1,*}) \to (\boldsymbol{C}_2^*; d_{2,*})$ un morphisme de complexes, si $x \in \ker(\varphi_k)$, on a $\varphi_{k+1} d_k(x) = d_k \varphi_k(x) = 0$ et la famille $\ker(\varphi_*) := (\ker(\varphi_*); d_{1,*})$ est un sous-complexe de $(\boldsymbol{C}_1^*; d_{1,*})$, on note $\kappa_* : \ker(\varphi_*) \hookrightarrow (\boldsymbol{C}_1^*; d_{1,*})$ le morphisme de complexes donné par l'inclusion. De manière analogue, chaque morphisme $d_{2,k} : \boldsymbol{C}_2^k \to \boldsymbol{C}_2^{k+1}$ induit un morphisme $\bar{d}_{2,k} : \operatorname{coker}(\varphi_k) \to \operatorname{coker}(\varphi_{k+1})$ d'où un complexe $\operatorname{coker}(\varphi_*) := (\operatorname{coker}(\varphi_*); \bar{d}_{2,*})$ et un morphisme de complexes surjectif $\nu_* : (\boldsymbol{C}_2^*; d_{2,*}) \twoheadrightarrow \operatorname{coker}(\varphi_*)$.

Avec ces définitions, tout morphisme $\varphi_* : (\boldsymbol{C}_1^*; d_{1,*}) \to (\boldsymbol{C}_2^*; d_{2,*})$ se factorise en

$$\ker(\varphi) \xhookrightarrow{\kappa_*} (\boldsymbol{C}_1^*; d_{1,*}) \twoheadrightarrow \operatorname{coker}(\kappa_*) = \ker(\nu_*) \hookrightarrow (\boldsymbol{C}_2^*; d_{2,*}) \xrightarrow{\nu_*} \operatorname{coker}(\varphi_*)$$

$$\varphi_* : (\boldsymbol{C}_1^*; d_{1,*}) \to (\boldsymbol{C}_2^*; d_{2,*})$$

ce qui constitue l'essentiel de la preuve de

Théorème. *La catégorie* $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ *est abélienne.*

2.1.6. Catégories de sous-complexes bornés. Pour tout sous-ensemble $\boldsymbol{J} \subseteq \mathbb{Z}$ on note $\mathbf{C}^{\boldsymbol{J}}(\mathbf{Ab})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ des complexes $(\boldsymbol{C}^*, d_*)$ tels que $\boldsymbol{C}^k = \mathbf{0}$ pour tout $k \notin \boldsymbol{J}$. On trouve également les notations suivantes dans la littérature

$$\begin{cases} \mathbf{C}^{\geqslant 0}(\mathbf{Ab}) = \mathbf{C}^{[0,+\infty[}(\mathbf{Ab}) & \text{« \textit{complexe à termes positifs ou nuls} »} \\ \mathbf{C}^{+}(\mathbf{Ab}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{C}^{[-n,+\infty[}(\mathbf{Ab}) & \text{« \textit{complexes bornés à gauche ou inférieurement} »} \\ \mathbf{C}^{-}(\mathbf{Ab}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{C}^{]-\infty,n]}(\mathbf{Ab}) & \text{« \textit{complexes bornés à droite ou supérieurement} »} \\ \mathbf{C}^{b}(\mathbf{Ab}) = \mathbf{C}^{+}(\mathbf{Ab}) \cap \mathbf{C}^{-}(\mathbf{Ab}) & \text{« \textit{complexes bornés} »} \end{cases}$$

Toutes ces catégories contiennent les complexes ker et coker de leurs morphismes de sorte que

Théorème. *La catégorie* $\mathbf{C}^{\boldsymbol{J}}(\mathbf{Ab})$ *est une sous-catégorie abélienne de* $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$. ([3])

2.1.7. Foncteur de translation. On note $\mathcal{T} : \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ le foncteur « *de translation* » qui fait correspondre

$$\begin{cases} (\boldsymbol{C}^*; d_*) \rightsquigarrow (\boldsymbol{D}^*, d'_*), & \text{avec } \boldsymbol{D}^k = \boldsymbol{C}^{k+1} \text{ et } d'_k = -d_{k+1} \\ (\varphi : \boldsymbol{C}_1 \to \boldsymbol{C}_2) \rightsquigarrow \big(\mathcal{T}(\varphi) : \mathcal{T}(\boldsymbol{C}_1) \to \mathcal{T}(\boldsymbol{C}_2)\big), & \text{avec } \mathcal{T}(\varphi)_k = \varphi_{k+1} \end{cases}$$

On note aussi $\mathcal{T}^n(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}[n]$ et $\mathcal{T}^n(\varphi) = \varphi[n]$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$.

2.1.8. Foncteurs de cohomologie. Les différentielles $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}^*; d_*)$ définissent un morphisme de complexes $d_* : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}[1]$ dont $\ker(d_*)$, $\operatorname{im}(d_*)$ sont des complexes à différentielle

[3] Une sous-catégorie d'une catégorie abélienne peut être abélienne sans que ses noyaux et conoyaux soient des noyaux et conoyaux dans la catégorie plus grande. Par exemple, la catégorie des faisceaux est une sous-catégorie de la catégorie des préfaisceaux mais une surjection de faisceaux est rarement une surjection de préfaisceaux. Lorsque les noyaux, conoyaux, images et co-images des deux catégories coïncident on parle de « *sous-catégorie abélienne* ».

nulle. On a, de plus, une injection naturelle $\mathrm{im}(d_*)[-1] \subseteq \ker(d_*)$ de conoyau :

$$h(\boldsymbol{C}) := \frac{\ker(d_*)}{\mathrm{im}(d_*)[-1]} \cdot$$

La correspondance $\boldsymbol{C} \rightsquigarrow h(\boldsymbol{C})$ est fonctorielle de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ vers la catégorie produit $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$, c'est le «*foncteur de cohomologie*» dont la composée avec le foncteur le k-ième terme est le «*foncteur additif*» de «*k-ième objet de cohomologie*»

$$h^k(_) : \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{Ab} \ .$$

2.1.9. Quasi-isomorphismes. Un morphisme de complexes $\varphi : \boldsymbol{C}_1 \to \boldsymbol{C}_2$ est dit «*quasi-isomorphisme*» lorsque le morphisme $h(\varphi)$ est un isomorphisme.

2.1.10. Amplitude cohomologique. L'«*amplitude cohomologique*» d'un complexe $\boldsymbol{C}$, notée $\mathrm{ampl}_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{C})$, est l'amplitude du complexe $h^*(\boldsymbol{C})$, *i.e.* $\mathrm{ampl}_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{C}) := \mathrm{ampl}(h^*(\boldsymbol{C}))$.

Un complexe $\boldsymbol{C} \in \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est dit «*acyclique*» lorsque son amplitude cohomologique est vide, *i.e.* lorsque $h^k(\boldsymbol{C}) = \mathbf{0}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

2.1.11. Cône d'un morphisme de complexes. On appelle «*cône*» d'un morphisme de complexes $\varphi : \boldsymbol{C}_1 \to \boldsymbol{C}_2$ le complexe, noté $(\hat{\boldsymbol{c}}(\varphi), \Delta)$, défini par

$$\hat{\boldsymbol{c}}(\varphi) = \boldsymbol{C}_2 \oplus \boldsymbol{C}_1[1] \,, \quad \Delta(x,y) = \big(dx + \varphi(y), -dy\big)$$

On note alors $p : \hat{\boldsymbol{c}}(\varphi) \to \boldsymbol{C}_1[1]$ et $q : \boldsymbol{C}_2 \to \hat{\boldsymbol{c}}(\varphi)$ respectivement la projection $\boldsymbol{C}_2 \oplus \boldsymbol{C}_1[1] \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}_1[1]$ et l'injection $\boldsymbol{C}_2 \hookrightarrow \boldsymbol{C}_2 \oplus \boldsymbol{C}_1[1]$ canoniques. La suite des morphismes de complexes

$$\boldsymbol{C}_1[-1] \xrightarrow{\varphi[-1]} \boldsymbol{C}_2[-1] \xrightarrow{q[-1]} \hat{\boldsymbol{c}}(\varphi)[-1] \xrightarrow{p[-1]} \boldsymbol{C}_1 \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{C}_2 \xrightarrow{q} \hat{\boldsymbol{c}}(\varphi) \xrightarrow{p} \boldsymbol{C}_1[1] \xrightarrow{\varphi[1]} \boldsymbol{C}_2[1] \xrightarrow{q[1]} \hat{\boldsymbol{c}}(\varphi)[1] \xrightarrow{p[1]} \quad (\diamond)$$

est appelée «*triangle distingué*» où «*triangle exact*» et se note classiquement

$$\boldsymbol{C}_1 \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{C}_2 \xrightarrow{q} \hat{\boldsymbol{c}}(\varphi) \xrightarrow[[+1]]{p}$$

Mise en garde. Les composés $q \circ \varphi$ et $\varphi[1] \circ p$ ne sont généralement pas nuls et la suite longue ci-dessus $(\diamond)$ n'est donc généralement pas un complexe.

Le résultat le plus important concernant le cône d'un morphisme est le suivant

2.1.12. Théorème *Soit $\varphi : \boldsymbol{C}_1 \to \boldsymbol{C}_2$ un morphisme de complexes.*

a) *Le foncteur de cohomologie $h^0(_)$ appliqué à la suite $(\diamond)$ donne une suite longue de cohomologies*

$$\cdots \xrightarrow{h^{-1}p} h^0\boldsymbol{C}_1 \xrightarrow{h^0\varphi} h^0\boldsymbol{C}_2 \xrightarrow{h^0q} h^0\hat{\boldsymbol{c}}(\varphi) \xrightarrow{h^0p} h^1\boldsymbol{C}_1 \xrightarrow{h^1\varphi} h^1\boldsymbol{C}_2 \xrightarrow{h^1q} h^1\hat{\boldsymbol{c}}(\varphi) \xrightarrow{h^1p} \cdots$$

qui est un complexe acyclique.

b) *Le morphisme φ est un quasi-isomorphisme, si et seulement si, $(\hat{\boldsymbol{c}}(\varphi), \Delta)$ est acyclique.*

Indication. La preuve est élémentaire et il suffit de la faire autour des termes en h^0 puisque $h^k(_) = h^0((_)[k]))$. Nous montrons uniquement l'exactitude autour de $\hat{\boldsymbol{c}}(\varphi)$ et laissons les autres cas au soin du lecteur. Soit $\omega = (x,y) \in \hat{\boldsymbol{c}}(\varphi)^0$ vérifiant $\Delta(\omega) = (dx + \varphi(y); -dy) = 0$, autrement

dit, $dx = -\varphi(y)$ et $dy = 0$. Dire que $h^0 p(\overline{\omega}) = 0$ revient à dire que $y = -dy'$, auquel cas

$$\omega \sim \big(\omega - \Delta(0, y')\big) = (x - \varphi(y'), 0)\,,$$

et ω est cohomologue de l'image du cocycle $\omega' = (x - \varphi(y')) \in \boldsymbol{C}_2^0$ par q_0. On a donc $h^0(q)(\overline{\omega'}) = \overline{\omega}$.

L'assertion (b) est conséquence immédiate de (a). ∎

2.1.13. Exercice. Soit $\mathcal{F} : \mathbf{Ab} \rightsquigarrow \mathbf{Ab}'$ un foncteur additif. Montrer que si $\boldsymbol{C} := (\boldsymbol{C}^*, d_*) \in \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ alors $\mathcal{F}(\boldsymbol{C}) := (\mathcal{F}(\boldsymbol{C}^*), \mathcal{F}(d_*)) \in \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}')$. Puis que si $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})}(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2)$ alors $\mathcal{F}(\hat{\boldsymbol{c}}(\varphi)) = \hat{\boldsymbol{c}}(\mathcal{F}\varphi)$.

En particulier, si $\varphi_* : \mathcal{F}^* \to \mathcal{G}^*$ un morphisme de complexes faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$. Montrer que les foncteurs $\hat{\boldsymbol{c}}(_)$ et $\Gamma(\boldsymbol{X}; _)$ commutent, *i.e.* on a une identification canonique

$$\Gamma(\boldsymbol{X}; \hat{\boldsymbol{c}}(\varphi)) = \hat{\boldsymbol{c}}(\Gamma(\boldsymbol{X}; \varphi))\,.$$

2.1.14. Troncatures bêtes. Pour $\boldsymbol{C} \in \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ et $\ell \in \mathbb{Z}$, on note $\beta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{C}$ le complexe $(\boldsymbol{D}^*, \delta_*)$ tel que $\boldsymbol{D}^k = \boldsymbol{C}^k$ pour tout $k \leqslant \ell$ et $\boldsymbol{D}^k = \mathbf{0}$ autrement ; on pose ensuite $\delta_k = d_k$ pour $k < \ell$ et $\delta_k = 0$ autrement. La troncature bête $\beta_{\geqslant \ell}\boldsymbol{C}$ est définie de manière symétrique. On a graphiquement :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C} &= \Big(\cdots \longrightarrow \boldsymbol{C}^{\ell-1} \xrightarrow{d_{\ell-1}} \boldsymbol{C}^{\ell} \xrightarrow{d_{\ell}} \boldsymbol{C}^{\ell+1} \xrightarrow{d_{\ell+1}} \boldsymbol{C}^{\ell+2} \xrightarrow{d_{\ell+2}} \cdots\Big)\\
\beta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{C} &= \Big(\cdots \longrightarrow \boldsymbol{C}^{\ell-1} \xrightarrow{d_{\ell-1}} \boldsymbol{C}^{\ell} \xrightarrow{0} \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \cdots\Big)\\
\beta_{\geqslant \ell+1}\boldsymbol{C} &= \Big(\cdots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{C}^{\ell+1} \xrightarrow{d_{\ell+1}} \boldsymbol{C}^{\ell+2} \xrightarrow{d_{\ell+2}} \cdots\Big)
\end{aligned}$$

Si $\varphi : \boldsymbol{C}_1 \to \boldsymbol{C}_2$ est un morphisme de complexes, on note $\beta_{\leqslant \ell}\varphi : \beta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{C}_1 \to \beta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{C}_2$ le morphisme qui coïncide avec φ en degrés $\leqslant \ell$ et est nul ailleurs. Le morphisme $\beta_{\geqslant \ell}\varphi : \beta_{\geqslant \ell}\boldsymbol{C}_1 \to \beta_{\geqslant \ell}\boldsymbol{C}_2$ est défini de manière symétrique.

Notation pour les troncatures bêtes. Les foncteurs de troncatures bêtes se définissent également sur les catégories des multicomplexes via l'identification évidente entre $\mathbf{C}^*(\mathbf{C}^{\bullet,\circ}(\mathbf{Ab}))$ et $\mathbf{C}^{\bullet,*,\circ}(\mathbf{Ab})$; le foncteur $\beta_{\leqslant \ell}$ sur $\mathbf{C}^*(\mathbf{C}^{\bullet,\circ}(\mathbf{Ab}))$ sera alors noté $\beta_{*\leqslant \ell}$ sur $\mathbf{C}^{\bullet,*,\circ}(\mathbf{Ab})$ pour éviter toute ambiguïté.

2.1.15. Proposition

a) *La correspondance $\boldsymbol{C} \rightsquigarrow \beta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{C}$ et $\varphi \rightsquigarrow \beta_{\leqslant \ell}\varphi$ est un foncteur covariant additif de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ vers $\mathbf{C}^{*\leqslant \ell}(\mathbf{Ab})$, adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\mathbf{C}^{*\leqslant \ell}(\mathbf{Ab}) \subseteq \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$. On a donc un morphisme canonique (d'adjonction) $p_\ell(\boldsymbol{C}) : \boldsymbol{C} \to \beta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{C}$.*

b) *La correspondance $\boldsymbol{C} \rightsquigarrow \beta_{\geqslant \ell}\boldsymbol{C}$ et $\varphi \rightsquigarrow \beta_{\geqslant \ell}\varphi$ est un foncteur covariant additif de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ vers $\mathbf{C}^{*\geqslant \ell}(\mathbf{Ab})$, adjoint à droite du foncteur d'inclusion $\mathbf{C}^{*\geqslant \ell}(\mathbf{Ab}) \subseteq \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$. On a donc un morphisme canonique (d'adjonction) $q_\ell(\boldsymbol{C}) : \beta_{\geqslant \ell}\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$.*

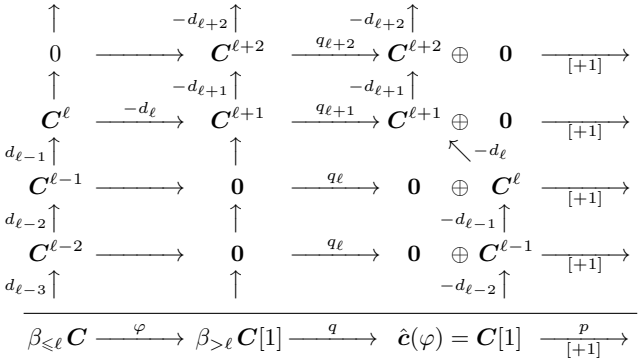
c) *La correspondance $\boldsymbol{C} \rightsquigarrow \big(\mathbf{0} \to \beta_{>\ell}\boldsymbol{C} \xrightarrow{q_{\ell+1}(\boldsymbol{C})} \boldsymbol{C} \xrightarrow{p_\ell(\boldsymbol{C})} \beta_{\leqslant \ell}\boldsymbol{C} \to \mathbf{0}\big)$ est fonctorielle de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$*

vers la catégorie $\Delta(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}))$ *des suites exactes courtes de complexes* (cf. 2.2.6).

$$\begin{array}{rl}
\beta_{>\ell}\boldsymbol{C} = & \Big(\cdots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{C}^{\ell+1} \xrightarrow{d_{\ell+1}} \boldsymbol{C}^{\ell+2} \xrightarrow{d_{\ell+2}} \cdots\Big) \\
{\scriptstyle q_{\ell+1}(\boldsymbol{C})}\downarrow & \quad\downarrow \quad\downarrow \quad {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow \quad {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow \\
\boldsymbol{C} = & \Big(\cdots \longrightarrow \boldsymbol{C}^{\ell-1} \xrightarrow{d_{\ell-1}} \boldsymbol{C}^{\ell} \xrightarrow{d_{\ell}} \boldsymbol{C}^{\ell+1} \xrightarrow{d_{\ell+1}} \boldsymbol{C}^{\ell+2} \xrightarrow{d_{\ell+2}} \cdots\Big) \\
{\scriptstyle p_{\ell}(\boldsymbol{C})}\downarrow & \quad {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow \quad {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow \quad\downarrow \quad\downarrow \\
\beta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{C} = & \Big(\cdots \longrightarrow \boldsymbol{C}^{\ell-1} \xrightarrow{d_{\ell-1}} \boldsymbol{C}^{\ell} \xrightarrow{0} \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \cdots\Big)
\end{array}$$

d) *Un foncteur additif entre catégories abéliennes induit un foncteur sur les catégories des complexes* (cf. 2.1.13, 2.2.1) *qui respecte les troncatures et les suites exactes courtes de troncatures de* 0c.

2.1.16. Exercice. Avec les notations précédentes, soit $\varphi : \beta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{C} \to \beta_{>\ell}\boldsymbol{C}[1]$ avec $\varphi_k = 0$ si $k \neq \ell$ et $\varphi_\ell = -d_\ell$. Vérifier que φ est un morphisme de complexes dont le cône s'identifie canoniquement au complexe $\boldsymbol{C}[1]$.
En écrivant les complexes verticalement, on retrouve le diagramme ci-contre. Le morphisme de complexes φ est alors un quasi-isomorphisme si et seulement si le complexe $\boldsymbol{C}$ est acyclique.



2.2 Catégorie des bicomplexes associée à une catégorie abélienne

Étant donné une catégorie abélienne $\mathbf{Ab}$, sa catégorie de ses complexes $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est également abélienne et nous pouvons considérer la catégorie de ses complexes, c'est à dire à la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}))$, notée aussi $\boldsymbol{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab})$. Ses objets se représentent toujours sous la forme :

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{-3}} \boldsymbol{C}^{-2} \xrightarrow{\delta_{-2}} \boldsymbol{C}^{-1} \xrightarrow{\delta_{-1}} \boldsymbol{C}^{0} \xrightarrow{\delta_{0}} \boldsymbol{C}^{1} \xrightarrow{\delta_{1}} \boldsymbol{C}^{2} \xrightarrow{\delta_{2}} \cdots$$

mais cette fois, les $\boldsymbol{C}^k$ sont des complexes et les δ_k des morphismes de complexes. Si nous représentons chaque complexe $\boldsymbol{C}^k$ verticalement, nous obtenons la représentation plus explicite suivante

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \uparrow{\scriptstyle d_{-2,1}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{-1,1}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{0,1}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{1,1}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{2,1}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta_{-3,1}} & \boldsymbol{C}^{-2,1} & \xrightarrow{\delta_{-2,1}} & \boldsymbol{C}^{-1,1} & \xrightarrow{\delta_{-1,1}} & \boldsymbol{C}^{0,1} & \xrightarrow{\delta_{0,1}} & \boldsymbol{C}^{1,1} & \xrightarrow{\delta_{1,1}} & \boldsymbol{C}^{2,1} & \xrightarrow{\delta_{2,1}} & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_{-2,0}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{-1,0}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{0,0}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{1,0}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{2,0}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta_{-3,0}} & \boldsymbol{C}^{-2,0} & \xrightarrow{\delta_{-2,0}} & \boldsymbol{C}^{-1,0} & \xrightarrow{\delta_{-1,0}} & \boldsymbol{C}^{0,0} & \xrightarrow{\delta_{0,0}} & \boldsymbol{C}^{1,0} & \xrightarrow{\delta_{1,0}} & \boldsymbol{C}^{2,0} & \xrightarrow{\delta_{2,0}} & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_{-2,-1}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{-1,-1}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{0,-1}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{1,-1}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{2,-1}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta_{-3,-1}} & \boldsymbol{C}^{-2,-1} & \xrightarrow{\delta_{-2,-1}} & \boldsymbol{C}^{-1,-1} & \xrightarrow{\delta_{-1,-1}} & \boldsymbol{C}^{0,-1} & \xrightarrow{\delta_{0,-1}} & \boldsymbol{C}^{1,-1} & \xrightarrow{\delta_{1,-1}} & \boldsymbol{C}^{2,-1} & \xrightarrow{\delta_{2,-1}} & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_{-2,-2}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{-1,-2}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{0,-2}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{1,-2}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{2,-2}} & &
\end{array} \qquad (\mathcal{B})$$

où les sous-diagrammes sont commutatifs. C'est ce que l'on appelle un « *bicomplexe à termes dans* $\mathbf{Ab}$ ».

2.2.1. Foncteurs induits. Un foncteur additif transforme un complexe de $\mathbf{Ab}$ en un complexe de $\mathbf{Ab}'$ (*cf.* 2.1.13) induisant un foncteur additif, lui aussi, $\mathbf{C}^*\mathcal{F} : \mathbf{C}^*\mathbf{Ab} \rightsquigarrow \mathbf{C}^*\mathbf{Ab}'$ (noté souvent $\mathcal{F}$ par abus). Le foncteur $\mathbf{C}^*\mathcal{F}$ est alors un foncteur additif et nous pouvons itérer le procédé à volonté. Le foncteur additif $\mathcal{F}$ induit ainsi des foncteurs additifs sur les catégories de n-complexes quel que soit n. Ces foncteurs sont tous exacts (resp. à gauche, à droite) si $\mathcal{F}$ l'est.

2.2.2. Foncteurs de translation. On note $\mathfrak{T}_h : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab})$ le foncteur « *de translation horizontale* » qui fait correspondre

$$\begin{cases} (\boldsymbol{C}^{\bullet,*}, d_{\bullet,*}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{D}^{\bullet,*}, d'_{\bullet,*}), & \text{avec } \boldsymbol{D}^{k,*} = \boldsymbol{C}^{k+1,*} \text{ et } d'_{k,*} = -d_{k+1,*} \\ (\varphi : \boldsymbol{C}_1 \to \boldsymbol{C}_2) \rightsquigarrow \big(\mathfrak{T}_h(\varphi) : \mathfrak{T}_h(\boldsymbol{C}_1) \to \mathfrak{T}_h(\boldsymbol{C}_2)\big), & \text{avec } \mathfrak{T}_h(\varphi)_{k,*} = \varphi_{k+1,*} \end{cases}$$

Le foncteur « *de translation verticale* » noté $\mathfrak{T}_v : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab})$ se défini symétriquement.

On notera aussi $\mathfrak{T}_h^n\mathfrak{T}_v^m(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}[n,m]$ et $\mathfrak{T}_h^n\mathfrak{T}_v^m(\varphi) = \varphi[n,m]$ pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$.

2.2.3. Foncteur de cohomologie verticale. Le foncteur $h^k : \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{Ab}$ de k-ième cohomologie de la section 2.1.8 induit (2.2.1) un foncteur de « *k-ième cohomologie verticale* »

$$h_v^k = \mathbf{C}^\bullet(h^k) : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^\bullet(\mathbf{Ab})$$

dont l'action sur le bicomplexe $(\mathcal{B})$ donne le complexe des k-ièmes cohomologies (verticales) :

$$\cdots \xrightarrow{h^k(\delta_{-2,*})} h^k(\boldsymbol{C}^{-1,*}) \xrightarrow{h^k(\delta_{-1,*})} h^k(\boldsymbol{C}^{0,*}) \xrightarrow{h^k(\delta_{0,*})} h^k(\boldsymbol{C}^{1,*}) \xrightarrow{h^k(\delta_{1,*})} h^k(\boldsymbol{C}^{2,*}) \xrightarrow{h^k(\delta_{2,*})} \cdots$$

que l'on peut représenter par :

$$\begin{array}{l}
\cdots \xrightarrow{h^1(\delta_{-2,*})} h^1(\boldsymbol{C}^{-1,*}) \xrightarrow{h^1(\delta_{-1,*})} h^1(\boldsymbol{C}^{0,*}) \xrightarrow{h^1(\delta_{0,*})} h^1(\boldsymbol{C}^{1,*}) \xrightarrow{h^1(\delta_{1,*})} h^1(\boldsymbol{C}^{2,*}) \xrightarrow{h^1(\delta_{2,*})} \cdots \\
\cdots \xrightarrow{h^0(\delta_{-2,*})} h^0(\boldsymbol{C}^{-1,*}) \xrightarrow{h^0(\delta_{-1,*})} h^0(\boldsymbol{C}^{0,*}) \xrightarrow{h^0(\delta_{0,*})} h^0(\boldsymbol{C}^{1,*}) \xrightarrow{h^0(\delta_{1,*})} h^0(\boldsymbol{C}^{2,*}) \xrightarrow{h^0(\delta_{2,*})} \cdots \\
\cdots \xrightarrow{h^{-1}(\delta_{-2,*})} h^{-1}(\boldsymbol{C}^{-1,*}) \xrightarrow{h^{-1}(\delta_{-1,*})} h^{-1}(\boldsymbol{C}^{0,*}) \xrightarrow{h^{-1}(\delta_{0,*})} h^{-1}(\boldsymbol{C}^{1,*}) \xrightarrow{h^{-1}(\delta_{1,*})} h^{-1}(\boldsymbol{C}^{2,*}) \xrightarrow{h^{-1}(\delta_{2,*})} \cdots
\end{array} \qquad (\mathcal{B}_v)$$

Le foncteur de cohomologie vertical à donc comme effet d'"effacer" les flèches verticales, on peut le voir comme un foncteur $h_v : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^\bullet(\mathbf{Ab})^{\mathbb{Z}}$

2.2.4. Foncteur de cohomologie horizontal. Le même foncteur de cohomologie de 2.1.8 appliqué cette fois à la catégorie $\mathbf{C}^\bullet(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}))$ donne le foncteur de « *cohomologie horizontale* »

$$h_h^k : \mathbf{C}^\bullet(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$$

dont l'action sur le bicomplexe $\mathcal{B}$ donne la suite de complexes de cohomologies (horizontales) représenté dans :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow h^{-1}(d_{\bullet,1}) & \uparrow h^0(d_{\bullet,1}) & \uparrow h^1(d_{\bullet,1}) & \uparrow h^2(d_{\bullet,1}) & \\
\cdots & & h^{-1}(\boldsymbol{C}^{\bullet,1}) & h^0(\boldsymbol{C}^{\bullet,1}) & h^1(\boldsymbol{C}^{\bullet,1}) & h^2(\boldsymbol{C}^{\bullet,1}) & \cdots \\
 & & \uparrow h^{-1}(d_{\bullet,0}) & \uparrow h^0(d_{\bullet,0}) & \uparrow h^1(d_{\bullet,0}) & \uparrow h^2(d_{\bullet,0}) & \\
\cdots & & h^{-1}(\boldsymbol{C}^{\bullet,0}) & h^0(\boldsymbol{C}^{\bullet,0}) & h^1(\boldsymbol{C}^{\bullet,0}) & h^2(\boldsymbol{C}^{\bullet,0}) & \cdots \\
 & & \uparrow h^{-1}(d_{\bullet,-1}) & \uparrow h^0(d_{\bullet,-1}) & \uparrow h^1(d_{\bullet,-1}) & \uparrow h^2(d_{\bullet,-1}) & \\
\cdots & & h^{-1}(\boldsymbol{C}^{\bullet,-1}) & h^0(\boldsymbol{C}^{\bullet,-1}) & h^1(\boldsymbol{C}^{\bullet,-1}) & h^2(\boldsymbol{C}^{\bullet,-1}) & \cdots \\
 & & \uparrow h^{-1}(d_{\bullet,-2}) & \uparrow h^0(d_{\bullet,-2}) & \uparrow h^1(d_{\bullet,-2}) & \uparrow h^2(d_{\bullet,-2}) &
\end{array} \qquad (\mathcal{B}_h)$$

Le foncteur de cohomologie horizontale à donc comme effet d'"effacer" les flèches horizontales, on peut le voir comme un foncteur $h_h : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})^{\mathbb{Z}}$

2.2.5. $h_v \circ h_h \neq h_h \circ h_v$. Les foncteurs h_v et h_v apparaissent naturellement comme des foncteurs à valeurs dans la catégorie des bicomplexes, le premier dans la sous-catégories des bicomplexes à flèches verticales nulles, le second à flèches horizontales nulles. Il est donc possible de les itérer mais les foncteurs **ne commutent pas nécessairement**. Par exemple, dans le bicomplexe $\mathcal{B}'$ ci-contre où $\mu(m)z = mz$, les lignes sont exactes et alors $h_v(h_h(\mathcal{B}')) = 0$. Par contre, $h_v(\mathcal{B}')$ et $h_h(h_v(\mathcal{B}'))$ sont respectivement :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \to & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mu(2)} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(2) \to \mathbf{0} \\
 & & {\scriptstyle\mu(3)}\uparrow & & {\scriptstyle\mu(2)}\uparrow & & {\scriptstyle\mu(0)}\uparrow \\
\mathbf{0} & \to & \mathbb{Z} & \xrightarrow[\mu(3)]{} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(3) \to \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
\end{array} \qquad (\mathcal{B}')$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \to & \mathbb{Z}/(3) & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/(2) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{Z}/(2) \to \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \to & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(3) \to \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
\end{array} \qquad (h_v(\mathcal{B}'))$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\
\mathbf{0} & \mathbb{Z}/(3) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{Z}/(3) & \mathbf{0} \\
 & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{array} \qquad (h_h(h_v(\mathcal{B}')))$$

2.2.6. Catégorie des suites exactes courtes. On note maintenant $\Delta(\mathbf{C}^*\,\mathbf{Ab})$ la catégorie dont les objets, notés $(\boldsymbol{C}_\star, \varphi, \psi)$, sont les suites exactes courtes de complexes de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$,

$$\boldsymbol{C}_\star := \left(\mathbf{0} \to \boldsymbol{C}_1 \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{C}_2 \xrightarrow{\psi} \boldsymbol{C}_3 \to \mathbf{0}\right),$$

que l'on interprète naturellement comme la sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab})$ des bicomplexes concentrés sur les colonnes $1, 2, 3$, tels que pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, la suite courte $\mathbf{0} \to \boldsymbol{C}_1^k \xrightarrow{\varphi_k} \boldsymbol{C}_2^k \xrightarrow{\psi_k} \boldsymbol{C}_3^k \to \mathbf{0}$ est exacte.

La catégorie $\Delta(\mathbf{C}^*\,\mathbf{Ab})$ est additive mais n'est généralement pas abélienne comme l'a montré l'exemple du bicomplexe $(\mathcal{B}')$ du paragraphe précédent que nous pouvons voir comme morphisme des suites exactes courtes horizontales. Le bicomplexe $h_v(\mathcal{B}')$ montre respectivement les complexes conoyau et noyau, le premier n'est pas exact à gauche et le second n'est pas exact à droite.

Si nous appliquons maintenant le foncteur de cohomologie verticale au bicomplexe $\boldsymbol{C}_\star$ nous obtenons le bicomplexe à flèches verticales nulles :

$$\mathbf{0} \to h^*(\boldsymbol{C}_1) \xrightarrow{h^*(\varphi)} h^*(\boldsymbol{C}_2) \xrightarrow{h^*(\psi)} h^*(\boldsymbol{C}_3) \to \mathbf{0} \qquad (h_v(\boldsymbol{C}_\star))$$

dont les lignes ne sont pas nécessairement exactes ([4]).

Les correspondances $\boldsymbol{C}_\star \rightsquigarrow h^*(\boldsymbol{C}_i)$ sont fonctorielles de $\Delta(\boldsymbol{C}^*(\mathbf{Ab}))$ à valeurs dans $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$ et les flèches $h^*(\varphi)$ et $h^*(\psi)$ sont des morphismes de foncteurs. La suite $(h_v(\boldsymbol{C}_\star))$ s'interprète donc comme un complexe de foncteurs additifs.

Le théorème suivant est fondamental en algèbre homologique, (*cf.* le théorème de 2.1.12).

[4] Ces suites sont pourtant toujours exactes au terme central.

2.2.7. Théorème

a) *Pour tout toute suite exacte courte* $(\boldsymbol{C}_\star, \varphi, \psi)$ *de complexes de* $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$*, il existe un morphisme* $\delta(\boldsymbol{C}_\star) : h(\boldsymbol{C}_3) \to h(\boldsymbol{C}_1)[1]$ *fonctoriel par rapport à* $(\boldsymbol{C}_\star, \varphi, \psi) \in \Delta(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}))$*, tel que la suite longue*

$$h^*(\boldsymbol{C}_1) \xrightarrow{h^*(\varphi)} h^*(\boldsymbol{C}_2) \xrightarrow{h^*(\psi)} h^*(\boldsymbol{C}_3) \xrightarrow{\delta(\boldsymbol{C}_\star)_*} h^{*+1}(\boldsymbol{C}_1) \xrightarrow{h^*(\varphi)} h^{*+1}(\boldsymbol{C}_2) \xrightarrow{h^*(\psi)} h^{*+1}(\boldsymbol{C}_3) \xrightarrow{\delta(\boldsymbol{C}_\star)_{*+1}}$$

est un complexe acyclique.

b) *Une inclusion (resp. surjection) de complexes* $\varphi : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}'$ *est un quasi-isomorphisme si et seulement si, le complexe* $\operatorname{coker}(\varphi)$ *(resp.* $\ker(\varphi)$*) est* ***acyclique****.*

c) *Si* $\Phi_\star : \boldsymbol{C}_{1,\star} \to \boldsymbol{C}_{2,\star}$ *est un morphisme de suites exactes courtes de complexes tel que deux des trois morphismes* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *sont des quasi-isomorphismes, alors le troisième l'est également.*

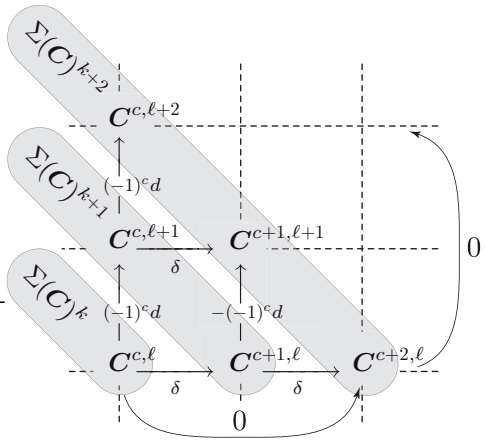
Démonstration. Consulter n'importe quel livre d'algèbre homologique élémentaire. ∎

2.2.8. Complexe simple associé à un bicomplexe borné inférieurement. On définit le foncteur additif $\Sigma : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ «*complexe simple associé*».

Action de Σ sur un bicomplexe. Pour tout bicomplexe $\boldsymbol{C} := (\boldsymbol{C}^{\bullet,*}, \delta_{\bullet,*}, d_{\bullet,*})$ d'objets de $\mathbf{Ab}$, on note $(\Sigma(\boldsymbol{C}); D(\boldsymbol{C}))$ le complexe de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ suivant :

$$\begin{cases} \bullet\ \Sigma(\boldsymbol{C})^k := \bigoplus_{c+\ell=k} \boldsymbol{C}^{c,\ell}, \\ \bullet\ \begin{cases} D(\boldsymbol{C})_k : \Sigma(\boldsymbol{C})^k \to \Sigma(\boldsymbol{C})^{k+1} \\ \qquad\quad x_{c,\ell} \mapsto \delta x \oplus (-1)^c dx \end{cases} \end{cases}$$

où nous avons omis des indices superflus pour améliorer la lisibilité. Le graphique suivant résume ces données et tente d'illustrer l'égalité $D_{k+1} \circ D_k = 0$.



Action de Σ sur un morphisme. Étant donné un morphisme de bicomplexes $\alpha_{\bullet,*} : \boldsymbol{C}_1^{\bullet,*} \to \boldsymbol{C}_2^{\bullet,*}$ on note,

$$\Sigma(\alpha)_k : \Sigma(\boldsymbol{C}_1)^k \to \Sigma(\boldsymbol{C}_2)^k.$$

le morphisme $\bigoplus_{k=c+\ell} \alpha_{c,\ell}$ dont la commutation avec les différentielles horizontale et verticale est évidente. Il s'ensuit que l'on a $\Sigma(\alpha)_{k+1} \circ D(\boldsymbol{C}_1)_k = D(\boldsymbol{C}_2)_k \circ \Sigma(\alpha)_k$ et que $\Sigma(\alpha)_* : \Sigma(\boldsymbol{C}_1)^* \to \Sigma(\boldsymbol{C}_2)^*$ est bien un morphisme de complexes.

2.2.9. Proposition. *Le foncteur* «complexe simple associé» $\Sigma : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ *est covariant additif et exact.*

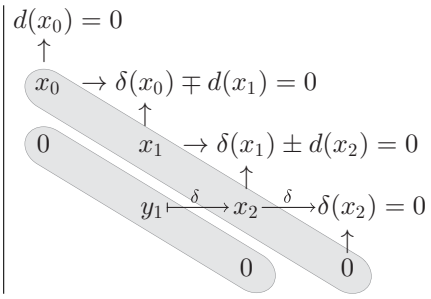
2.2.10. Critère d'acyclicité du complexe simple associé

Définitions. Un bicomplexe $\boldsymbol{C}^{\bullet,*}$ est dit «*borné inférieurement*» lorsque ses termes $\boldsymbol{C}^{i,j}$ sont nuls dès que l'un des indices i, j est assez négatif, autrement dit, $\boldsymbol{C}^{\bullet,*} \in \mathbf{C}^{+,+}(\mathbf{Ab}) := \mathbf{C}^+(\mathbf{C}^+(\mathbf{Ab}))$ (*cf.* 2.1.6). Un bicomplexe $\boldsymbol{C}^{\bullet,*}$ est dit du «*premier quadrant*» lorsque ses coefficients $\boldsymbol{C}^{i,j}$ sont nuls dès que l'un des indices i, j est négatif, autrement dit, $\boldsymbol{C}^{\bullet,*} \in \mathbf{C}^{\geqslant 0,\geqslant 0}(\mathbf{Ab})$.

Théorème. *Soit $\boldsymbol{C} \in \mathbf{C}^{+,+}(\mathbf{Ab})$. Le complexe $(\Sigma(\boldsymbol{C}); D(\boldsymbol{C}))$ est acyclique dans les deux cas suivants*

$$\bullet\ h_v(\boldsymbol{C}) := 0 \quad \textit{ou} \quad \bullet\ h_h(\boldsymbol{C}) := 0$$

Démonstration. Il suffit de raisonner dans le cas où $\boldsymbol{C}$ est un bicomplexe du premier quadrant de lignes exactes. Soit $k \in \mathbb{N}$ et notons $\bar{x} := (x_0, \dots, x_k) \in \boldsymbol{C}^{0,k} \oplus \dots \oplus \boldsymbol{C}^{k,0}$ un élément de $\Sigma(\boldsymbol{C})^k$ annulé par D_k. Si $\bar{x} \neq 0$, notons j le plus grand des indices tels que $x_j \neq 0$, alors $\delta(x_j) = 0$ et il existe $y \in \boldsymbol{C}^{j-1,k-j}$ tel que $\delta(y) = x_j$ grâce à l'exactitude des lignes de $\boldsymbol{C}$. Notons $\bar{y}$ l'élément $(y_0, \dots, y_{k-1}) \in \Sigma(\boldsymbol{C})^{k-1}$ avec $y_i = 0$ si $i \neq j-1$ et $y_{j-1} = y$. Le cocycle $\bar{x}$ est alors cohomologue à $\bar{x}' := \bar{x} - D(\bar{y})$ dont le plus grand des indice j' tel que $x'_{j'} \neq 0$ vérifie $j' < j$. L'itération de ce procédé, possible puisque toutes les lignes sont exactes, s'arrête après au plus k étapes et montre que $\bar{x}$ est un cobord. ∎



2.2.11. Un critère de quasi-isomorphie de complexes simples associés. Le critère de 2.2.10 est aussi conséquence du critère de quasi-isomorphie de complexes simples associée suivant.

Théorème. *Soit $\varphi_{\bullet,*} : \boldsymbol{C}_1^{\bullet,*} \to \boldsymbol{C}_2^{\bullet,*}$ un morphisme de bicomplexes bornés inférieurement. Le morphisme des complexes simples associés $\Sigma(\varphi) : \Sigma(\boldsymbol{C}_1) \to \Sigma(\boldsymbol{C}_2)$ est un quasi-isomorphisme dans les deux cas suivants*

$$\bullet\ h_v(\varphi) \textit{ est un isomorphisme} \quad \textit{ou} \quad \bullet\ h_h(\varphi) \textit{ est un isomorphisme}$$

Le théorème de 2.2.10 résulte alors du cas où $\boldsymbol{C}_1 = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{C}$.

Démonstration du théorème. On donne le raisonnement pour le cas de la cohomologie verticale et l'on supposera le support des bicomplexes contenu dans le premier quadrant. La fonctorialité des troncatures bêtes du paragraphe 2.1.14 permet de définir le sous-bicomplexe $\boldsymbol{C}^{\bullet>0,*}$ de $\boldsymbol{C}^{\bullet,*}$ de mêmes colonnes d'indice positif et nul sur la colonne 0. On note $\boldsymbol{C}^{0,*} := \boldsymbol{C}^{\bullet,*}/\boldsymbol{C}^{\bullet>0,*}$; sa colonne 0 coïncide avec celle de $\boldsymbol{C}$ et ses autres colonnes sont nulles. On considère alors le morphisme de suites exactes courtes de bicomplexes $(\mathcal{B})$ qui donne lieu au morphisme de suites exactes courtes de complexes simples associés $(\Sigma\mathcal{B})$ où $\Sigma\varphi_{0,*} : \Sigma\boldsymbol{C}_1^{0,*} \to \Sigma\boldsymbol{C}_2^{0,*}$ s'identifie trivialement au morphisme $\varphi_{0,*} : \boldsymbol{C}_1^{0,*} \to \boldsymbol{C}_2^{0,*}$ dont on a supposé que c'est un quasi-isomorphisme.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \to & \boldsymbol{C}_1^{\bullet>0,*} & \hookrightarrow & \boldsymbol{C}_1 & \twoheadrightarrow & \boldsymbol{C}_1^{0,*} & \to & \mathbf{0} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\bullet>0}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{0,*}} & & \quad (\mathcal{B}) \\
\mathbf{0} & \to & \boldsymbol{C}_2^{\bullet>0,*} & \hookrightarrow & \boldsymbol{C}_2 & \twoheadrightarrow & \boldsymbol{C}_2^{0,*} & \to & \mathbf{0} \\
\hline
\mathbf{0} & \to & \Sigma\boldsymbol{C}_1^{\bullet>0,*} & \hookrightarrow & \Sigma\boldsymbol{C}_1 & \twoheadrightarrow & \Sigma\boldsymbol{C}_1^{0,*} & \to & \mathbf{0} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\varphi_{\bullet>0}} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\varphi_{0,*}} & & \quad (\Sigma\mathcal{B}) \\
\mathbf{0} & \to & \Sigma\boldsymbol{C}_2^{\bullet>0,*} & \hookrightarrow & \Sigma\boldsymbol{C}_2 & \twoheadrightarrow & \Sigma\boldsymbol{C}_2^{0,*} & \to & \mathbf{0}
\end{array}$$

Il s'ensuit (*cf.* 2.2.7-0c) que $\Sigma\varphi$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\Sigma\varphi_{\bullet>0}$ l'est, mais aussi, par une itération évidente de ces idées, que $\Sigma\varphi$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\Sigma\varphi_{\bullet>k}$ l'est pour n'importe quel $k \geqslant 1$. On peut même raffiner sans difficulté cette assertion en disant que $\Sigma\varphi$ est un quasi-isomorphisme en degré ℓ si et seulement si $\Sigma\varphi_{\bullet>k}$ l'est pour n'importe quel $k \geqslant 1$. Or, sous cette forme il ne reste plus rien à démontrer puisque les termes des complexes $\Sigma\boldsymbol{C}^{\bullet>\ell,*}$ sont nuls en degrés $\leqslant \ell$ (car $\boldsymbol{C}$ du premier quadrant). ∎

2.2.12. L'idée de découper une suite exacte longue pour fabriquer deux complexes quasi-isomorphes de l'exercice 2.1.16 se généralise au contexte des bicomplexes (*cf.* 2.2.1). En effet, si $\boldsymbol{C}^{\bullet,*}$ est un bicomplexe, nous pouvons découper chaque colonne comme indiqué dans l'illustration de 2.1.16 pour obtenir un morphisme de bicomplexes $\varphi_{\bullet,*} : \boldsymbol{C}^{\bullet,*\leqslant\ell} \to \boldsymbol{C}^{\bullet,*>\ell}[0,1]$ avec $\varphi_{\bullet,\ell} = d_{\bullet,\ell}$ et $\varphi_{\bullet,k} = 0$ si $k \neq \ell$.

$$\begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \to & \mathbf{0} & \to & \mathbf{0} & \to & \mathbf{0} & \to \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \to & \mathbf{0} & \to & \mathbf{0} & \to & \mathbf{0} & \to \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \to & \boldsymbol{C}^{0,2} & \to & \boldsymbol{C}^{1,2} & \to & \boldsymbol{C}^{2,2} & \to \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \to & \boldsymbol{C}^{0,1} & \to & \boldsymbol{C}^{1,1} & \to & \boldsymbol{C}^{2,1} & \to \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \to & \boldsymbol{C}^{0,0} & \to & \boldsymbol{C}^{1,0} & \to & \boldsymbol{C}^{2,0} & \to \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi_{\bullet,*}} \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \to & \boldsymbol{C}^{0,5} & \to & \boldsymbol{C}^{1,5} & \to & \boldsymbol{C}^{2,5} & \to \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \to & \boldsymbol{C}^{0,4} & \to & \boldsymbol{C}^{1,4} & \to & \boldsymbol{C}^{2,4} & \to \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \to & \boldsymbol{C}^{0,3} & \to & \boldsymbol{C}^{1,3} & \to & \boldsymbol{C}^{2,3} & \to \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \to & \mathbf{0} & \to & \mathbf{0} & \to & \mathbf{0} & \to \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \to & \mathbf{0} & \to & \mathbf{0} & \to & \mathbf{0} & \to \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \end{bmatrix}$$

$$\Sigma(\boldsymbol{C}^{\bullet,*\leqslant 2}) \xrightarrow{\Sigma(\varphi_{\bullet,*})} \Sigma(\boldsymbol{C}^{\bullet,*>2}[0,1])$$

La remarque de l'exercice 2.1.16 jointe au théorème 2.2.10 prouvent alors le corollaire suivant.

2.2.13. Corollaire. *Avec les notations en cours, si $\boldsymbol{C} \in \mathbf{C}^{+,+}(\mathbf{Ab})$ est tel que $h_v(\boldsymbol{C}) = 0$, le morphisme de complexes*

$$\Sigma(\varphi) : \Sigma\left(\boldsymbol{C}^{\bullet,*\leqslant\ell}\right) \longrightarrow \Sigma\left(\boldsymbol{C}^{\bullet,*>\ell}[0,1]\right)$$

est un quasi-isomorphisme.

2.2.14. Notation $\Sigma^{\star}_{\bullet\circ}$. Le foncteur "complexe simple associé" étant additif, induit des foncteurs sur les catégories des multicomplexes. Son action transforme un n-complexe en un $n-1$-complexe en opérant des regroupements suivant une paire d'indices dont la notation devra faire référence explicite. Par exemple, sur un n-complexe constitué d'objets $\boldsymbol{C}^{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ avec $i_k \in \mathbb{Z}$, l'opérateur qui indexe par i_a les regroupements des termes suivant la diagonale i_a, i_b défini l'opérateur

$$\left(\Sigma(\boldsymbol{C}^{i_1,\ldots,i_a,\ldots,i_b,\ldots,i_n})\right)^{i_1,\ldots,i_{a-1},k,i_{a+1},\ldots,\widehat{i_b},\ldots,i_n} = \Sigma_{k=i_a+i_b} \boldsymbol{C}^{i_1,\ldots,i_{a-1},i_a,i_{a+1},\ldots,i_b,\ldots,i_n}$$

que l'on notera $\Sigma^a_{a,b}$. L'opérateur $\Sigma^b_{a,b}$ est défini de manière analogue. Enfin, pour une référence des indices non alphanumérique, on préférera la notation $\Sigma^{\star}_{\bullet\circ}(_)$.

2.2.15. Exercice. Soit $\boldsymbol{I}^*$ un foncteur additif de $\mathbf{Ab}$ vers $\boldsymbol{C}^{\mathbb{N}}(\mathbf{Ab})$ qui fait correspondre à chaque $\boldsymbol{M} \in \mathbf{Ab}$ une suite exacte longue $\left(\mathbf{0} \to \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{I}^*(\boldsymbol{M})\right) = \left(\mathbf{0} \to \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{I}^0(\boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{I}^1(\boldsymbol{M}) \to \cdots\right)$. Montrer que pour tout complexe $\boldsymbol{M}^\bullet \in \mathbf{C}^+(\mathbf{Ab})$ on a un quasi-isomorphisme canonique $\boldsymbol{M}^\bullet \to \Sigma^{\bullet}_{*\bullet} \boldsymbol{I}^*(\boldsymbol{M}^\bullet)$ fonctoriel sur la catégorie $\boldsymbol{C}^+(\mathbf{Ab})$.

§3. Cohomologie des faisceaux

La référence incontournable pour cette section est [Go].

3.1 Préliminaires

On désigne par $\boldsymbol{X}$ un espace topologique et par $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ la catégorie (abélienne) des faisceaux de groupes abéliens sur $\boldsymbol{X}$. Pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ et tout $\mathcal{G} \in \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ on note $\Gamma(U;\mathcal{G})$ le

groupe des sections de $\mathcal{G}$ au-dessus de U. La correspondance $\mathcal{G} \rightsquigarrow \Gamma(U;\mathcal{G})$ est fonctorielle, additive, exacte à gauche, de $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ vers la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ des groupes abéliens.

Pour $\mathcal{G} \in \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$, on appelle «*résolution de* $\mathcal{G}$» toute suite exacte longue de faisceaux

$$\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{d_2} \cdots$$

on la note $\epsilon : \mathcal{G} \to (\mathcal{G}^*, d_*)$. Le morphisme ϵ s'appelle l'«*augmentation (de la résolution de* $\mathcal{G}$*)*»[5].

3.1.1. Faisceaux flasques. Un faisceau $\mathcal{F} \in \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X})$ est dit «*flasque*» si ses sections locales sont restrictions de sections globales, autrement dit si l'application $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{F}) \to \Gamma(U;\mathcal{F})$ est surjective quel que soit l'ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$.

3.1.2. Proposition

a) *Pour toute suite exacte courte de faisceaux* $\mathbf{0} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}' \to \mathbf{0}$ *avec* $\mathcal{F}$ *flasque, la suite courte de groupes abéliens*

$$\mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U;\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U;\mathcal{G}') \to \mathbf{0}$$

est exacte, quel que soit l'ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$.

b) *Pour toute suite exacte longue de faisceaux flasques :* $\mathbf{0} \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \cdots$, *la suite longue de groupes abéliens*

$$\mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathcal{F}_0) \longrightarrow \Gamma(U;\mathcal{F}_1) \longrightarrow \Gamma(U;\mathcal{F}_2) \longrightarrow \cdots$$

est exacte, quel que soit l'ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$.

3.1.3. Résolution flasque de Godement. À tout un faisceau $\mathcal{G}$ sur $\boldsymbol{X}$ on associe un espace topologique $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ et une application étale $p_{\mathcal{G}} : \mathcal{E}_{\mathcal{G}} \to \boldsymbol{X}$ dont la fibre en $x \in \boldsymbol{X}$ s'identifie à l'ensemble $\mathcal{G}_x$ des germes de $\mathcal{G}$ en x. Le faisceau des sections locales continues de $p_{\mathcal{G}}$ s'identifie à $\mathcal{G}$ et c'est un sous-faisceau du faisceau des sections locales ensemblistes $\mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}$ qui est clairement flasque. La correspondance

$$\mathcal{G} \rightsquigarrow \left(\mathcal{G} \xhookrightarrow{\epsilon(\mathcal{G})} \mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}\right)$$

est *fonctorielle* et *exacte* de $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ vers la catégorie $\mathbf{C}^+(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z}))$ des complexes de faisceaux bornés à gauche. On procède ensuite par induction : ayant défini le complexe *exact* de foncteurs exacts

$$0 \to \mathrm{id}(_) \xrightarrow{\epsilon(_)} \mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}(_) \xrightarrow{d_0(_)} \cdots \xrightarrow{d_{k-2}(_)} \mathscr{C}^{k-1}_{\boldsymbol{X}}(_) \xrightarrow{d_{k-1}(_)} \mathscr{C}^k_{\boldsymbol{X}}(_)$$

le conoyau de $d_{k-1}(_)$, noté $\mathcal{Q}(_)$, est, lui aussi, un foncteur exact. On pose alors $\mathscr{C}^{k+1}_{\boldsymbol{X}}(_) := \mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{Q}(_))$ et $(d_k(_) : \mathscr{C}^k_{\boldsymbol{X}}(_) \to \mathscr{C}^{k+1}_{\boldsymbol{X}}(_))$: la composée du morphisme canonique $\mathscr{C}^k_{\boldsymbol{X}}(_) \twoheadrightarrow \mathcal{Q}(_)$ suivi du morphisme $\epsilon(\mathcal{Q}(_)) : \mathcal{Q}(_) \hookrightarrow \mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{Q}(_))$. La suite

$$0 \to \mathrm{id}(_) \xrightarrow{\epsilon(_)} \mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}(_) \xrightarrow{d_0(_)} \cdots \xrightarrow{d_{k-2}(_)} \mathscr{C}^{k-1}_{\boldsymbol{X}}(_) \xrightarrow{d_{k-1}(_)} \mathscr{C}^k_{\boldsymbol{X}}(_) \xrightarrow{d_k(_)} \mathscr{C}^{k+1}_{\boldsymbol{X}}(_)$$

est alors un complexe de foncteurs exacts dont l'homologie est nulle en tout degré $\leqslant k$.

[5] Plus généralement «*augmenter un complexe*» $\mathbf{0} \to \boldsymbol{C}^0 \xrightarrow{d_0} \boldsymbol{C}^1 \to \cdots$ consiste à le rendre exact à gauche en lui rajoutant le terme $\boldsymbol{C}^{-1} := \ker(d_0)$ via l'injection canonique $\epsilon : \boldsymbol{C}^{-1} \to \boldsymbol{C}^0$ que l'on appelle «*le morphisme d'augmentation*». Le complexe $\mathbf{0} \to \boldsymbol{C}^{-1} \to \boldsymbol{C}^0 \to \boldsymbol{C}^1 \to \cdots$ s'appelle «*le complexe augmenté*». Cette procédure est fonctorielle et c'est une équivalence de catégories entre la catégorie des complexes à support dans $[0,+\infty[$ et la catégorie des complexes à support dans $[-1,+\infty[$ exacts en degrés $\{-1,0\}$. La procédure symétrique donne lieu à la notion de «*co-augmentation*».

L'itération de ce procédé donne le foncteur «*résolution (flasque) canonique de Godement*», il est noté $\mathcal{F} \rightsquigarrow \Big(\epsilon(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \to \big(\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{F}; d_*(\mathcal{F})\big)\Big)$.

3.2 Cohomologie des faisceaux

3.2.1. Définition. On appelle «*k-ième groupe de cohomologie de faisceaux de $\mathcal{G} \in \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ au-dessus de l'ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$*» et on note $H^k(U;\mathcal{G})$, le k-ième groupe de cohomologie du complexe

$$\Gamma\big(U;(\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}, d_*(\mathcal{G}))\big) := \Big(\mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U;\mathscr{C}^1_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U;\mathscr{C}^2_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}) \longrightarrow \cdots\Big)$$

soit

$$\boxed{H^\star(U;\mathcal{G}) := h^\star\Gamma\big(U;(\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}, d_*(\mathcal{G}))\big)}$$

3.2.2. Augmentation du complexe de Godement. La suite longue $\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\epsilon(\mathcal{G})} \big(\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}; d_*(\mathcal{G})\big)$ est un complexe exact à gauche, *i.e.* $\epsilon(\mathcal{G})$ est une «*augmentation*» du complexe de Godement.

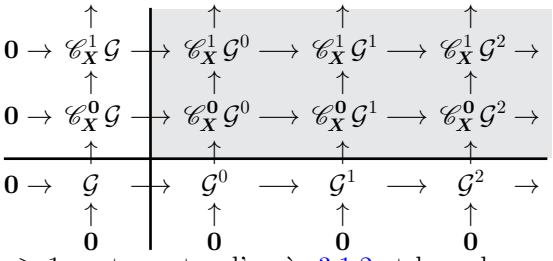
3.2.3. Exercice. Montrer que $\Gamma(U;\epsilon(\mathcal{G}))$ induit un isomorphisme entre $\Gamma(U;\mathcal{G})$ et $H^0(U;\mathcal{G})$

3.2.4. Faisceaux acycliques. Un faisceau $\mathcal{G}$ est dit «*acyclique sur un ouvert U*» lorsque se groupes de cohomologie de faisceau au-dessus de U en degrés positifs sont nuls, *i.e.* $H^{>0}(U;\mathcal{G}) = 0$.

3.2.5. Exercice. Un faisceau flasque est acyclique au-dessus de tout ouvert (3.1.2).

3.2.6. Théorème (Leray). *Soit $\epsilon : \mathcal{G} \to (\mathcal{G}^*, d_*)$ une résolution de $\mathcal{G} \in \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ où chaque $\mathcal{G}^k$ est acyclique sur $U \subseteq \boldsymbol{X}$. Alors, le groupe de cohomologie de faisceaux $H^k(U;\mathcal{G})$ s'identifie canoniquement au k-ième groupe de cohomologie du complexe $\Gamma(U;(\mathcal{G}^*, d_*))$.*

Démonstration. En appliquant le foncteur (exact) «*résolution de Godement*» sur chaque terme de la suite longue $\epsilon : \mathcal{G} \to (\mathcal{G}^\bullet, d_\bullet)$ on obtient le bicomplexe de faisceaux du premier quadrant de lignes et colonnes exactes représenté ci-après. L'application du foncteur $\Gamma(U;_)$ transforme ce bicomplexe en un bicomplexe de groupes abéliens dont les lignes d'indices $\geqslant 1$ sont exactes d'après 3.1.2 et les colonnes d'indices $\geqslant 1$ le sont aussi en raison de l'acyclicité des $\mathcal{G}^\bullet$. La cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe $\mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\bullet)$ (partie grisée) est alors canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe $\mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathcal{G}^\bullet)$ grâce au corollaire 2.2.13, et est aussi canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe $\mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G})$ en raison de la version symétrique du même corollaire, or cette dernière est précisément $H^*(U;\mathcal{G})$. ∎



3.2.7. Remarque. L'intérêt pratique immédiat de ce théorème vient de la souplesse qu'il permet dans le choix de résolutions d'un faisceau. Ainsi, ***toute*** résolution flasque d'un faisceau (*cf.* 3.2.5), pas seulement celle de Godement, permet le calcul de ses groupes de cohomologie.

3.2.8. Propriétés générales de la cohomologie de faisceaux. Nous avons défini dans les paragraphes précédents la cohomologie d'un faisceau. Si maintenant nous avons un morphisme de faisceaux $\alpha : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$, la fonctorialité de la résolution canonique de Godement donne un morphisme de complexes $\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\,\alpha : \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\,\mathcal{G}_1 \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\,\mathcal{G}_2$ et donc un morphisme de cohomologies de faisceaux $H^*(U;\alpha) : H^*(U;\mathcal{G}_1) \to H^*(U;\mathcal{G}_2)$.

3.2.9. Théorème. *Soit U un ouvert de $\boldsymbol{X}$. Soient $\mathcal{G}_i$ des faisceaux de groupes abéliens sur $\boldsymbol{X}$.*

a) *La correspondance qui associe*

$$\mathcal{G} \rightsquigarrow H^*(U;\mathcal{G})\,, \qquad \Big(\alpha : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2\Big) \rightsquigarrow \Big(H^*(U;\alpha) : H^*(U;\mathcal{G}_1) \to H^*(U;\mathcal{G}_2)\Big)$$

est fonctorielle additive et covariante de $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ *vers la catégorie* $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$.

b) *Le morphisme de foncteurs $\Gamma(U;_) \to \Gamma(U';_)$ correspondant à une inclusion d'ouverts $U' \hookrightarrow U$, induit un morphisme de foncteurs de cohomologie $H^*(U;_) \to H^*(U';_)$.*

c) *Pour toute suite exacte courte $\mathbf{0} \to \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_3 \to \mathbf{0}$, il existe un morphisme de connexion $c(U)_* : H^*(U;\mathcal{G}_3) \to H^{*+1}(U;\mathcal{G}_1)$ tel que la suite longue de cohomologies*

$$0 \to H^0(U;\mathcal{G}_1) \to H^0(U;\mathcal{G}_2) \to H^0(U;\mathcal{G}_3) \xrightarrow{c(U)_0} H^1(U;\mathcal{G}_1) \to H^1(U;\mathcal{G}_2) \to H^1(U;\mathcal{G}_3) \xrightarrow{c(U)_1}$$

est exacte. Ces suites, particulièrement le morphisme de connexion $c(U)_*$, sont fonctorielles sur la catégorie des suites exactes courtes de faisceaux et sont naturelles relativement aux inclusions d'ouverts $U' \subseteq U$.

Indications. Les assertions (a,b) sont immédiates, pour (c) il suffit de remarquer que l'application du foncteur "résolution de Godement" sur la catégorie des suites exactes courtes de faisceaux, défini un foncteur à valeurs dans la catégorie des suites exactes courtes de complexes de faisceaux *flasques*. On a, pour un morphisme de suites exactes courtes,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \to \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_3 \to \mathbf{0} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{0} \to \mathcal{G}'_1 \to \mathcal{G}'_2 \to \mathcal{G}'_3 \to \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}_1) \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}_2) \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}_3) \to \mathbf{0} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{0} \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}'_1) \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}'_2) \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}'_3) \to \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, le foncteur $\Gamma(U;_)$ appliqué au bicomplexe $\mathbf{0} \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\,\mathcal{G}_1 \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\,\mathcal{G}_2 \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\,\mathcal{G}_3 \to \mathbf{0}$ préserve l'exactitude des lignes (*cf.* prop. 3.1.20a) et nous fait passer de la catégorie des suites exactes courtes de complexes de faisceaux flasques à la catégorie des suites exactes courtes de complexes de groupes abéliens,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}_1) \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}_2) \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}_3) \to \mathbf{0} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{0} \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}'_1) \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}'_2) \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}'_3) \to \mathbf{0} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}_1)) \to \Gamma(U;\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}_2)) \to \Gamma(U;\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}_3)) \to \mathbf{0} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{0} \to \Gamma(U;\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}'_1)) \to \Gamma(U;\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}'_2)) \to \Gamma(U;\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}(\mathcal{G}'_3)) \to \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

on conclut alors en appliquant le théorème 2.2.7. ∎

3.3 Cohomologie de Čech des faisceaux

3.3.1. Complexe de Čech. Pour tout **pré**faisceau $\mathcal{P}$ de groupes abéliens sur $\boldsymbol{X}$ et toute famille $\mathcal{U} = \{U_{\mathfrak{a}}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ d'ouverts de $\boldsymbol{X}$ on note $\check{\boldsymbol{C}}^k(\mathcal{U};\mathcal{P})$ le «*groupe des k-cochaînes de Čech à valeurs dans*

$\mathcal{P}$ et relatives à $\mathcal{U}$ » :

$$\check{\boldsymbol{C}}^k(\mathcal{U};\mathcal{P}) = \prod_{\mathfrak{a}_0<\cdots<\mathfrak{a}_k} \mathcal{P}(U_{\mathfrak{a}_0\ldots\mathfrak{a}_k})$$

où $U_{\mathfrak{a}_0\ldots\mathfrak{a}_k} := U_{\mathfrak{a}_0} \cap \cdots \cap U_{\mathfrak{a}_k}$. On définit ensuite la « *différentielle de Čech* »

$$d_k : \check{\boldsymbol{C}}^k(\mathcal{U};\mathcal{P}) \to \check{\boldsymbol{C}}^{k+1}(\mathcal{U};\mathcal{P}) \qquad d_k(\omega)_{\mathfrak{a}_0\ldots\mathfrak{a}_{k+1}} = \sum\nolimits_{j=0}^{k+1} (-1)^j \omega_{\mathfrak{a}_0\ldots\widehat{\mathfrak{a}_j}\ldots\mathfrak{a}_{k+1}}$$

dont on vérifie aisément que $d_{k+1} \circ d_k = 0$. On note $\big(\check{\boldsymbol{C}}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}); d_*\big)$ le « *complexe des cochaînes de Čech à valeurs dans $\mathcal{P}$ et relatif à $\mathcal{U}$* »

3.3.2. Exercice. Vérifier que pour tout complexe de préfaisceaux $(\mathcal{P}^\bullet, d_\bullet)$ et chaque $k \in \mathbb{N}$, la cohomologie du complexe $\check{\boldsymbol{C}}^k(\mathcal{U};\mathcal{P}^\bullet)$ s'identifie au produit des cohomologies des complexes $\Gamma(U_{\mathfrak{a}_0\ldots\mathfrak{a}_k}; (\mathcal{P}^\bullet, d_\bullet))$.

3.3.3. Augmentation du complexe de Čech. Soit $\epsilon(\mathcal{U};\mathcal{P}) : \mathcal{P}(\boldsymbol{X}) \to \check{\boldsymbol{C}}^0(\mathcal{U};\mathcal{P})$ le morphisme qui associe à une section $\sigma \in \mathcal{P}(\boldsymbol{X})$ l'élément $\epsilon(\sigma) \in \prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_\mathfrak{a})$ tel que $\epsilon(\sigma)_\mathfrak{a} = \sigma|_{U_\mathfrak{a}}$. La suite longue $\mathbf{0} \to \mathcal{P}(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{\epsilon(\mathcal{U};\mathcal{P})} \big(\check{\boldsymbol{C}}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}); d_*\big)$ est un complexe, on appelera $\epsilon(\mathcal{U};_)$ l'« *augmentation* » du complexe de Čech. ([6])

3.3.4. Cohomologie de Čech. Avec les notions précédentes, on appelle « *k-ième groupe de cohomologie de Čech d'un préfaisceau $\mathcal{P}$ relativement à $\mathcal{U}$* » les k-ième groupe de cohomologie du complexe $\big(\check{\boldsymbol{C}}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}); d_*\big)$, on le note $\check{H}^k(\mathcal{U};\mathcal{P})$.

3.3.5. Exercice. Montrer que si $\mathcal{P}$ est un *faisceau* et si $\mathcal{U}$ est un recouvrement de $\boldsymbol{X}$, l'augmentation $\epsilon(\mathcal{U};\mathcal{P})$ induit un isomorphisme entre $\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$ et $\check{H}^0(\mathcal{U};\mathcal{P})$.

3.3.6. Faisceautisation du complexe de Čech. Les notation étant celles des paragraphes précédents, on note $\mathcal{U} \Cap V = \{U_\alpha \cap V\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ pour tout ouvert $V \subseteq \boldsymbol{X}$, et l'on pose

$$(\underline{\check{\boldsymbol{C}}}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}), d_*)(V) := (\check{\boldsymbol{C}}^*(\mathcal{U} \Cap V;\mathcal{P}); d_*)$$

Lorsque $V' \subseteq V$ les morphismes de restriction $\mathcal{P}(U_{\mathfrak{a}_0\ldots\mathfrak{a}_k} \cap V) \to \mathcal{P}(U_{\mathfrak{a}_0\ldots\mathfrak{a}_k} \cap V')$ induisent un morphisme de restriction $\underline{\check{\boldsymbol{C}}}^k(\mathcal{U};\mathcal{P})(V) \to \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^k(\mathcal{U};\mathcal{P})(V)$ clairement compatible aux différentielles de Čech. On a ainsi une complexe de préfaisceaux sur $\boldsymbol{X}$ noté $(\underline{\check{\boldsymbol{C}}}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}), d_*)$ muni de l'« *augmentation* » $\epsilon(\mathcal{U};\mathcal{P}) : \mathcal{P} \to (\underline{\check{\boldsymbol{C}}}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}), d_*)$ définie par $\Gamma(V, \epsilon(\mathcal{U};\mathcal{P})) = \epsilon(V, \mathcal{U};\mathcal{P})$ (3.3.3).

Le théorème suivant est fondamental, surtout pour l'assertion (b).

3.3.7. Théorème. *Soit $\mathcal{G}$ un faisceau sur $\boldsymbol{X}$.*

a) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le préfaisceau $\underline{\check{\boldsymbol{C}}}^k(\mathcal{U};\mathcal{G})$ est un faisceau qui est flasque si $\mathcal{G}$ est flasque.*

!! b) *Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement de $\boldsymbol{X}$, le complexe $\mathbf{0} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\epsilon} (\underline{\check{\boldsymbol{C}}}^*(\mathcal{U};\mathcal{G}), d_*)$ est acyclique.* !!

Démonstration. (*cf.* §**5** [Go], Thm. 5.2.1 p. 206.) ∎

[6] Il y a ici un petit abus de langage dans la mesure où le complexe de Čech augmenté est exact à gauche, à priori seulement lorsque $\mathcal{P}$ est un faisceau et que $\mathcal{U}$ est un recouvrement de $\boldsymbol{X}$.

3.3.8. Théorème de Čech-Leray pour la cohomologie des faisceaux. Soit $\mathcal{G} \in \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$. Un recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{X}$ est dit «*acyclique pour* $\mathcal{G}$» où «$\mathcal{G}$*-acyclique*» lorsque $\mathcal{G}$ est acyclique au-dessus de chaque ouvert $U_{\mathfrak{a}_0\dots\mathfrak{a}_k}$.

3.3.9. Théorème. *Soient* $\mathcal{G} \in \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ *et* $\mathcal{U} = \{U_\mathfrak{a}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ *un recouvrement ouvert de* $\boldsymbol{X}$.

a) *Si* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{G}$*-acyclique, la cohomologie de faisceaux de* $\mathcal{G}$ *s'identifie canoniquement à la cohomologie de Čech de* $\mathcal{G}$ *relative à* $\mathcal{U}$, i.e.

$$\boxed{\check{H}^*(\mathcal{U};\mathcal{G}) \simeq H^*(\boldsymbol{X};\mathcal{G})}$$

b) *Soit* $\varphi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ *un morphisme de faisceau tel que* $H^*(V;\varphi) : H^*(V;\mathcal{G}_1) \to H^*(V;\mathcal{G}_2)$ *est un isomorphisme au-dessus de chaque ouvert* $V = U_{\mathfrak{a}_0\dots\mathfrak{a}_k}$, *alors*

$$\boxed{H^*(\boldsymbol{X};\varphi) : H^*(\boldsymbol{X};\mathcal{G}_1) \to H^*(\boldsymbol{X};\mathcal{G}_2)}$$

est un isomorphisme.

Démonstration

a) La preuve est semblable à celle du théorème de Leray (3.2.6). La résolution de Godement appliquée au termes de la résolution de Čech $\mathbf{0} \to \mathcal{G} \to \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{G})$ (*cf.* 3.3.7-0b) donne le bicomplexe de faisceaux du premier quadrant

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \to & \mathscr{C}^1_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G} & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^0(\mathcal{U};\mathscr{C}^1_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}) & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^1(\mathcal{U};\mathscr{C}^1_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}) & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^2(\mathcal{U};\mathscr{C}^1_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}) \to \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \to & \mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G} & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^0(\mathcal{U};\mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}) & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^1(\mathcal{U};\mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}) & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^2(\mathcal{U};\mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}) \to \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \to & \mathcal{G} & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^0(\mathcal{U};\mathcal{G}) & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^1(\mathcal{U};\mathcal{G}) & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^2(\mathcal{U};\mathcal{G}) \to \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
\end{array}$$

que le foncteur $\Gamma(\boldsymbol{X};_)$ transforme en un bicomplexe de groupes abéliens de lignes d'indices $\geqslant 1$ exactes car sections globales de suites exactes de faisceaux flasques (3.3.7) et les colonnes d'indices $\geqslant 1$ le sont également puisqu'elles calculent la cohomologie de faisceaux de $\underline{\check{\boldsymbol{C}}}^k(\mathcal{U};\mathcal{G})$ qui n'est autre que le produit des cohomologies faisceaux $\mathcal{G}|_{U_{\mathfrak{a}_0\dots\mathfrak{a}_k}}$, triviales par hypothèse. La cohomologie du complexe simple associé au sous-complexe $\Gamma(\boldsymbol{X};\underline{\check{\boldsymbol{C}}}^\bullet(\mathcal{U};\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}))$ (partie grisée) est alors canoniquement isomorphe, d'une part à la cohomologie de faisceaux de $\mathcal{G}$, et d'autre part à la cohomologie de Čech de $\mathcal{G}$ relative à $\mathcal{U}$ (*cf.* 2.2.13).

b) Le morphisme $H^*(\boldsymbol{X};\varphi)$ est un isomorphisme, si et seulement si les sections globales du morphisme $\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\varphi : \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}_1 \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}_2$, défini par le foncteur «*résolution de Godement*», est un quasi-isomorphisme, autrement dit, si et seulement si la cohomologie des sections globales du cône de $\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\varphi$, noté $\mathcal{F}^*$, est nulle (2.1.12-0b). Soit $\mathcal{B}^{\bullet,*}$ le bicomplexe du premier quadrant ci-contre, où là ligne ℓ est le complexe de Čech augmenté associé à $\mathcal{F}^\ell$. Comme chaque ligne de $\mathcal{B}^{\bullet,*}$ est une suite exacte de faisceaux flasques (3.3.70a), la cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{B}^{\bullet,*})$ est nulle (3.1.20b, 2.2.10), et la cohomologie de $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{F}^*)$ s'identifie canoniquement à celle du complexe simple associé au bicomplexe

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \to & \mathcal{F}^2 & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^0(\mathcal{U};\mathcal{F}^2) & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^1(\mathcal{U};\mathcal{F}^2) & \to & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \to & \mathcal{F}^1 & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^0(\mathcal{U};\mathcal{F}^1) & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^1(\mathcal{U};\mathcal{F}^1) & \to & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \to & \mathcal{F}^0 & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^0(\mathcal{U};\mathcal{F}^0) & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^1(\mathcal{U};\mathcal{F}^0) & \to & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & (\mathcal{B}^{\bullet,*})
\end{array}$$

$\Gamma(\boldsymbol{X};\underline{\check{\boldsymbol{C}}}^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{F}^*))$ (version symétrique du corollaire de 2.2.13). Or, les colonnes de ce bicomplexe sont les produits des complexes $\Gamma(U_{\mathfrak{a}_0\dots\mathfrak{a}_k};\mathcal{F}^*)$ (3.3.2) dont les cohomologies sont nulles puisqu'il s'agit des cohomologies des cônes des morphismes $\Gamma(U_{\mathfrak{a}_0\dots\mathfrak{a}_k};\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\varphi)$, qui sont des quasi-isomorphismes par hypothèse. On conclut par 2.2.10. ∎

§ 4. Hypercohomologie des complexes de faisceaux

Cette partie étend les définitions et résultats de la section précédente de la catégorie $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ à la catégorie $\mathbf{C}^+\big(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})\big)$ des *complexes* de faisceaux bornés inférieurement.

4.1 Hypercohomologie des complexes de faisceaux

L'«*hypercohomologie*» au-dessus de l'ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ d'un complexe de faisceaux borné inférieurement $\mathcal{G}^\bullet$, notée $\mathbb{H}^*(U;\mathcal{G}^\bullet)$, est la cohomologie des sections globales du complexe simple associé au bicomplexe (borné inférieurement) $\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\bullet$, on pose donc

$$\boxed{\mathbb{H}^*(U;\mathcal{G}^\bullet) := h^*\Gamma\big(U;\Sigma^\bullet_{*\bullet}(\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\bullet)\big)}$$

4.1.1. Commentaire. Le foncteur $(_)[0] : \mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ (2.1.4) identifie la catégorie de faisceaux à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}^+\big(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})\big)$ des complexes concentrés en degré zéro. Ainsi, pour tout faisceau $\mathcal{G}$, on a $\Sigma\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}[0] = \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}$ et $\mathbb{H}^*(U;\mathcal{G}[0]) = H^*(U;\mathcal{G})$. L'hypercohomologie étend de cette manière la cohomologie des faisceaux.

4.1.2. Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\boldsymbol{X};_) : h^*(\Gamma(\boldsymbol{U};_)) \to \mathbb{H}^*(\boldsymbol{U};_)$. On construit un morphisme canonique de complexes de faisceaux

$$\epsilon(\mathcal{G}^\bullet) : \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \Sigma^\bullet_{*\bullet}\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\bullet$$

par découpage de la première ligne (*cf.* 2.2.12) du bicomplexe construit à partir du complexe (horizontal) $\mathcal{G}^\bullet$ en lui appliquant, terme à terme le foncteur «*résolution de Godement augmentée*» :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathbf{0} \to & \mathscr{C}^1_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^0 & \to & \mathscr{C}^1_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^1 & \to & \mathscr{C}^1_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^2 & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathbf{0} \to & \mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^0 & \to & \mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^1 & \to & \mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^2 & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow\,\epsilon(_) \\
\mathbf{0} \to & \mathcal{G}^0 & \longrightarrow & \mathcal{G}^1 & \longrightarrow & \mathcal{G}^2 & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} &
\end{array}$$

Le morphisme $\epsilon(\mathcal{G}^\bullet)$, naturel par rapport à $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{C}^+\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$, s'identifie au morphisme d'augmentation d'un faisceau dans sa résolution de Godement (3.2.2) lorsque $\mathcal{G}^\bullet$ est concentré en degré 0. La section de $\epsilon(\mathcal{G}^\bullet)$ au-dessus de U sera notée

$$\epsilon(U;\mathcal{G}^\bullet) : \Gamma(U;\mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \Sigma^\bullet_{*\bullet}\Gamma(U;\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\bullet)\,,$$

et le passage en cohomologie donne «*le morphisme canonique de la cohomologie des sections de* $\mathcal{G}^\bullet$

vers l'hypercohomologie de $\mathcal{G}^\bullet$ », noté

$$\boxed{\Xi(U;\mathcal{G}^\bullet) : h^*(\Gamma(U;\mathcal{G}^\bullet)) \longrightarrow \mathbb{H}^*(U;\mathcal{G}^\bullet)}$$

4.1.3. Propriétés générales de l'hypercohomologie. Si $\varphi_\bullet : \mathcal{G}_1^\bullet \to \mathcal{G}_2^\bullet$ est un morphisme de complexes de faisceaux, la fonctorialité de la résolution canonique de Godement donne le morphisme de bicomplexes $\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\varphi_\bullet : \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}_1^\bullet \to \mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}_2^\bullet$ d'où un morphisme d'hypercohomologies

$$\mathbb{H}^*(U;\varphi_\bullet) : \mathbb{H}^*(U;\mathcal{G}_1^\bullet) \to \mathbb{H}^*(U;\mathcal{G}_2^\bullet)$$

4.1.4. Théorème. *Soient* U *un ouvert de* $\boldsymbol{X}$ *et* $\mathcal{G}_i^\bullet \in \mathbf{C}^+(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z}))$.

a) *La correspondance qui associe*

$$\mathcal{G}^\bullet \rightsquigarrow \mathbb{H}^*(U;\mathcal{G}^\bullet)\,, \qquad \Big(\varphi_\bullet : \mathcal{G}_1^\bullet \to \mathcal{G}_2^\bullet\Big) \rightsquigarrow \Big(\mathbb{H}^*(U;\varphi_\bullet) : H^*(U;\mathcal{G}_1^\bullet) \to H^*(U;\mathcal{G}_2^\bullet)\Big)$$

est fonctorielle additive et covariante de $\mathbf{C}^+\,\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ *vers la catégorie* $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$.

b) *Le morphisme canonique* $\epsilon(U;_) : h^*\Gamma(U;_) \to \mathbb{H}^*(U;_)$ (4.1.2) *est un morphisme de foncteurs.*

c) *Le morphisme de foncteurs* $\Gamma(U;_) \to \Gamma(U';_)$ *correspondant à une inclusion d'ouverts* $U' \hookrightarrow U$, *induit un morphisme de foncteurs d'hypercohomologie* $\mathbb{H}^*(U;_) \to \mathbb{H}^*(U';_)$.

d) *Pour toute suite exacte courte* $\mathbf{0} \to \mathcal{G}_1^\bullet \to \mathcal{G}_2^\bullet \to \mathcal{G}_3^\bullet \to \mathbf{0}$, *il existe un morphisme de connexion* $c(U)_* : \mathbb{H}^*(U;\mathcal{G}_3^\bullet) \to \mathbb{H}^{*+1}(U;\mathcal{G}_1^\bullet)$ *tel que la suite longue d'hypercohomologies*

$$0 \to \mathbb{H}^0(U;\mathcal{G}_1^\bullet) \to \mathbb{H}^0(U;\mathcal{G}_2^\bullet) \to \mathbb{H}^0(U;\mathcal{G}_3^\bullet) \xrightarrow{c(U)_0} \mathbb{H}^1(U;\mathcal{G}_1^\bullet) \to \mathbb{H}^1(U;\mathcal{G}_2^\bullet) \to \mathbb{H}^1(U;\mathcal{G}_3^\bullet) \xrightarrow{c(U)_1}$$

est un complexe acyclique. Ces suites, particulièrement le morphisme de connexion $c(U)_*$, *sont fonctorielles sur la catégorie des suites exactes courtes de complexes de faisceaux bornés inférieurement et sont naturelles relativement aux inclusions d'ouverts* $U' \subseteq U$.

e) *Si* $\mathcal{G}^\bullet$ *est un complexe acyclique* ([7]) *son hypercohomologie est nulle*, i.e.

$$\Big(h(\mathcal{G}^\bullet) = 0\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\mathbb{H}^*(U;\mathcal{G}^\bullet) = 0\Big)$$

f) *Un quasi-isomorphisme* $\varphi_\bullet : \mathcal{G}_1^\bullet \to \mathcal{G}_2^\bullet$ *induit un isomorphisme en hypercohomologie*, i.e.

$$\Big(h(\mathcal{G}_1^\bullet) \xleftarrow[\text{iso}]{h(\varphi)} h(\mathcal{G}_2^\bullet)\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\mathbb{H}^*(U;\mathcal{G}_1^\bullet) \xleftarrow[\text{iso}]{\mathbb{H}(U;\varphi_\bullet)} \mathbb{H}^*(U;\mathcal{G}_2^\bullet)\Big)$$

g) **(Leray)** *Lorsque les faisceaux* $\mathcal{G}^k$ *du complexe* $\mathcal{G}^\bullet$ *sont acycliques sur l'ouvert* U, *le morphisme canonique*

$$h^*\Gamma(U;\mathcal{G}^\bullet) \to \mathbb{H}^*(U;\mathcal{G}^\bullet)$$

est un isomorphisme.

h) *Un quasi-isomorphisme* $\varphi_\bullet : \mathcal{G}^\bullet \to \mathcal{F}^\bullet$ *est appelé* «résolution acyclique (resp. flasque ou molle)» *lorsque les faisceaux* $\mathcal{F}^k$ *le sont. Dans ces cas,* $\varphi_\bullet$ *induit un isomorphisme canonique*

$$\mathbb{H}^*(U;\mathcal{G}^\bullet) \to h^*\Gamma(U;\mathcal{F}^\bullet)$$

[7] On rappelle qu'un complexe de faisceau $(\mathcal{G}^\bullet, d_\bullet)$ est acyclique si et seulement l'inclusion $\mathrm{im}(d_{i-1}) \subseteq \ker(d_i)$ de sous-faisceaux de $\mathcal{G}^i$ est une égalité pour tout i. On a le critère qui dit : "$(\mathcal{G}^\bullet; d_\bullet)$ *est acyclique si et seulement si le complexe des germes* $(\mathcal{G}_x^\bullet; d_{x,\bullet})$ *est acyclique pour tout* $x \in \boldsymbol{X}$" (*cf.* [Go] § **2.5** th. 2.5.1, p. 133).

4.1.5. Commentaire. Ce théorème étend le théorème 3.2.9 de la catégorie des faisceaux à la catégorie des complexes (*cf.* 4.1.1) ; il comporte quatre assertions absentes dans 3.2.9 : les assertions 0e et 0f triviales dans ce cas, et 0g et 0h qui généralisent l'énoncé qui dit que si un faisceau $\mathcal{G}$ est acyclique sur U, sa cohomologie est celle du complexe $\Gamma(U;\mathbf{0}\to\mathcal{G}\to 0)$, ce qui est clairement tautologique.

Démonstration du théorème. Les assertions (a,b,c) sont immédiates. Pour (d), l'exactitude des foncteurs "résolution de Godement" et complexe simple associé nous ramènent à la preuve de l'analogue 3.2.9-(c) de cette assertion. Pour 0e on remarque que dans le bicomplexe $\Gamma(U;\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\bullet)$ chaque ligne de $\Gamma(U;\mathscr{C}^k_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\bullet)$ est exacte puisque sections sur U du complexe exact de faisceaux flasques $\mathscr{C}^k_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\bullet$ (exactitude du foncteur $\mathscr{C}^k_{\boldsymbol{X}}$), on conclu par 2.2.10. L'assertion 0f résulte de 0e appliquée au $\hat{\boldsymbol{c}}(\varphi)$. L'assertion 0g résulte du corollaire 2.2.13, appliqué au morphisme de complexes $\Gamma(U;\mathcal{G}^\bullet)\to\Gamma(U;\Sigma^\bullet_{*\bullet}\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\bullet)$ associé au découpage de bicomplexe de colonnes exactes représenté ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0}\to & \Gamma(U;\mathscr{C}^1_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^0) & \to & \Gamma(U;\mathscr{C}^1_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^1) & \to & \Gamma(U;\mathscr{C}^1_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^2) & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathbf{0}\to & \Gamma(U;\mathscr{C}^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^0) & \to & \Gamma(U;\mathscr{C}^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^1) & \to & \Gamma(U;\mathscr{C}^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^2) & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\hline
\mathbf{0}\to & \Gamma(U;\mathcal{G}^0) & \longrightarrow & \Gamma(U;\mathcal{G}^1) & \longrightarrow & \Gamma(U;\mathcal{G}^2) & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} &
\end{array}$$

■

L'assertion 0h est conséquence immédiate de 0f et 0g.

4.2 Cohomologie de Čech de complexes de faisceaux

Dans cette partie on étend la définition de cohomologie de Čech (*cf.* 3.3) de la catégorie des faisceaux à la catégorie des complexes de faisceaux bornés inférieurement. Nous reprenons les notations de la section 3.3. Alors, si $\mathcal{P}^\bullet$ est un complexe de **pré**faisceaux de groupes abéliens borné inférieurement, si $\mathcal{U}=\{U_{\mathfrak{a}}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ est une famille d'ouverts de $\boldsymbol{X}$, le « *complexe des cochaînes de Čech à valeurs dans* $\mathcal{P}^\bullet$ *relatives à* $\mathcal{U}$ » est le complexe simple associé au bicomplexe $\check{\boldsymbol{C}}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}^\bullet)$, puis on définit « *la cohomologie de Čech de* $\mathcal{P}^\bullet$ *relative à* $\mathcal{U}$ » par :

$$\boxed{\check{H}^\star(\mathcal{U};\mathcal{P}^\bullet)=h^*\big(\Sigma^\bullet_{*\bullet}\check{\boldsymbol{C}}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}^\bullet)\big)}$$

4.2.1. Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\mathcal{U};_):h^*(\Gamma(\boldsymbol{X};_))\to\check{\boldsymbol{H}}^*(\mathcal{U};_)$. Tout comme dans 4.1.2, on construit un morphisme canonique de complexes

$$\epsilon(\mathcal{U};\mathcal{P}^\bullet):\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{P}^\bullet)\longrightarrow\Sigma^\bullet_{*\bullet}\check{\boldsymbol{C}}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}^\bullet)$$

par découpage de la première ligne (*cf.* 2.2.12) du bicomplexe construit à partir du complexe (horizontal) $\mathcal{P}^\bullet$ en lui appliquant, terme à terme le foncteur « *complexe de Čech augmenté* » :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & \mathbf{0} \to \check{\boldsymbol{C}}^1(\mathcal{U};\mathcal{P}^0) & \to & \check{\boldsymbol{C}}^1(\mathcal{U};\mathcal{P}^1) & \to & \check{\boldsymbol{C}}^1(\mathcal{U};\mathcal{P}^2) & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \mathbf{0} \to \check{\boldsymbol{C}}^{\mathbf{0}}(\mathcal{U};\mathcal{P}^0) & \to & \check{\boldsymbol{C}}^{\mathbf{0}}(\mathcal{U};\mathcal{P}^1) & \to & \check{\boldsymbol{C}}^{\mathbf{0}}(\mathcal{U};\mathcal{P}^2) & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \epsilon(\mathcal{U};_) \\
 & \mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{P}^0) & \longrightarrow & \Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{P}^1) & \longrightarrow & \Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{P}^2) & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} &
\end{array}$$

Le morphisme $\epsilon(\mathcal{U};\mathcal{P}^\bullet)$, naturel par rapport à $\mathcal{P}^\bullet \in \mathbf{C}^+(\mathrm{Prefaisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z}))$, s'identifie à l'augmentation $\epsilon(\mathcal{U};\mathcal{P})$ de la section 3.3.3 lorsque $\mathcal{P}^\bullet$ est concentré en degré 0. Le passage en cohomologie donne «*le morphisme canonique de la cohomologie des sections de* $\mathcal{P}^\bullet$ *sur* $\boldsymbol{X}$ *vers la cohomologie de Čech de* $\mathcal{P}^\bullet$ *relative à* $\mathcal{U}$ », noté

$$\boxed{\Xi(\mathcal{U};\mathcal{P}^\bullet) : h^*(\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{P}^\bullet)) \to \check{H}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}^\bullet)}$$

4.3 Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\mathcal{U};\boldsymbol{X};_) : \check{\boldsymbol{H}}(\mathcal{U};_) \to \mathbb{H}(\boldsymbol{X};_)$

Soit $\mathcal{G}^\circ$ un complexe de faisceaux borné inférieurement que nous allons imaginer comme représenté perpendiculairement au plan de la page. Le foncteur «*résolution de Godement*» donne alors le **bi**complexe $\epsilon(\mathcal{G}^\circ) : \mathcal{G}^\circ \to \mathscr{C}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\circ$ que nous représentons comme une suite exacte longue de complexes de faisceaux : $\mathbf{0} \to \mathcal{G}^\circ \to \mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\circ \to \mathscr{C}^1_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\circ \to \mathscr{C}^2_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\circ \to \cdots$. Si nous appliquons maintenant, sur chaque terme de cette suite, le foncteur «*complexe de Čech faisceautisé*», on a le **tri**complexe suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & \mathbf{0} \to \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^1(\mathcal{U};\mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^1(\mathcal{U};\mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^1(\mathcal{U};\mathscr{C}^1_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^1(\mathcal{U};\mathscr{C}^2_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow \cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \mathbf{0} \to \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^0(\mathcal{U};\mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^0(\mathcal{U};\mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^0(\mathcal{U};\mathscr{C}^1_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^0(\mathcal{U};\mathscr{C}^2_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow \cdots \\
 & \epsilon(\mathcal{U};\mathcal{G}^\circ)\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \mathbf{0} \to \quad \mathcal{G}^\circ & \longrightarrow & \mathscr{C}^0_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\circ & \longrightarrow & \mathscr{C}^1_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\circ & \longrightarrow & \mathscr{C}^2_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\circ & \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
\texttt{indice} & & \texttt{0} & & \texttt{1} & & \texttt{2} & & \texttt{3}
\end{array} \qquad (\mathcal{B})$$

où chaque colonne d'indice positif est un **bi**complexe de faisceaux flasques et colonnes exactes (3.3.7) ; propriété qui demeure vérifiée lorsque l'on applique le foncteur $\Gamma(\boldsymbol{X};_)$ à $(\mathcal{B})$ (3.1.2-0b). On déduit aussitôt, par 2.2.13, que les morphisme induits $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{C}^k_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\circ) \to \Sigma^\circ_{*\circ}\check{\boldsymbol{C}}^*(\mathcal{U};\mathscr{C}^k_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^\circ)$ ([8]) sont des quasi-isomorphismes **pour chaque** $\boldsymbol{k \geqslant 0}$ **fixé**. On a donc le diagramme commutatif :

[8] On rappelle que par la notation $\Sigma^\star_{\bullet\circ}(_)$ nous signifions l'opérateur $\Sigma_\star\,\Sigma_{\star=\bullet+\circ}(_)$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} \to & \Sigma^{\circ}_{*\circ}\check{\boldsymbol{C}}^{*}(\mathcal{U};\mathcal{G}^{\circ}) & \longrightarrow & \Sigma^{\circ}_{*\circ}\check{\boldsymbol{C}}^{*}(\mathcal{U};\mathscr{C}^{0}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^{\circ}) & \longrightarrow & \Sigma^{\circ}_{*\circ}\check{\boldsymbol{C}}^{*}(\mathcal{U};\mathscr{C}^{1}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^{\circ}) & \longrightarrow & \Sigma^{\circ}_{*\circ}\check{\boldsymbol{C}}^{*}(\mathcal{U};\mathscr{C}^{2}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^{\circ}) & \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow\circ & & \uparrow\circ & & \uparrow\circ \\
\mathbf{0} \to & \Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{G}^{\circ}) & \longrightarrow & \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{C}^{0}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^{\circ}) & \longrightarrow & \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{C}^{1}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^{\circ}) & \longrightarrow & \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{C}^{2}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^{\circ}) & \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
\texttt{indice} & & 0 & & 1 & & 2 & & 3
\end{array} \tag{$\mathcal{B}'$}$$

où les flèches marquées par '$\circ$' sont des quasi-isomorphismes. Si l'on regarde maintenant, sur une même ligne, la suite des termes d'indice positif comme bicomplexe sur les directions horizontale et perpendiculaire à la page (indiquée par '$\circ$'), les flèches '$\circ$' apparaissent comme un morphisme de bicomplexes induisant un isomorphisme sur la cohomologie de direction '$\circ$'. On peut donc appliquer le théorème 2.2.11 et affirmer que les flèches '$\circ$' induisent un quasi-isomorphisme des complexes simples associés, ce qui donne les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{pmatrix} \Sigma^{\circ}_{*\circ}\check{\boldsymbol{C}}^{*}(\mathcal{U};\mathcal{G}^{\circ}) & \longrightarrow & \Sigma^{\circ}_{\bullet\circ}\Sigma^{\circ}_{*\circ}\check{\boldsymbol{C}}^{*}(\mathcal{U};\mathscr{C}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^{\circ}) \\ \uparrow{\scriptstyle \epsilon(\mathcal{U};\mathcal{G}^{\circ})} & & \uparrow{\scriptstyle \Sigma^{\circ}_{\bullet\circ}\uparrow\circ} \text{ q.i.} \\ \Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{G}^{\circ}) & \xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{X};\mathcal{G}^{\circ})} & \Sigma^{\circ}_{\bullet\circ}\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{C}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^{\circ}) \end{pmatrix} \xrightarrow[h^{\star}]{\text{cohomologie}} \begin{pmatrix} \check{H}^{\star}(\mathcal{U};\mathcal{G}^{\circ}) & \longrightarrow & h^{\star}\big(\Sigma^{\circ}_{\bullet\circ}\Sigma^{\circ}_{*\circ}\check{\boldsymbol{C}}^{*}(\mathcal{U};\mathscr{C}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^{\circ})\big) \\ \uparrow{\scriptstyle \Xi(\mathcal{U};\mathcal{G}^{\circ})} & & h^{\star}(\Sigma^{\circ}_{\bullet\circ}\uparrow\circ)\uparrow \text{ iso} \\ h^{\star}\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{G}^{\circ}) & \xrightarrow{\Xi(\boldsymbol{X};\mathcal{G}^{\circ})} & \mathbb{H}^{\star}(\boldsymbol{X};\mathcal{G}^{\circ}) \end{pmatrix}$$

Maintenant, la composition de la flèche horizontale $\check{H}^{\star}(\mathcal{U};\mathcal{G}^{\circ}) \to h^{\star}\big(\Sigma^{\circ}_{\bullet\circ}\Sigma^{\circ}_{*\circ}\check{\boldsymbol{C}}^{*}(\mathcal{U};\mathscr{C}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{G}^{\circ})\big)$ avec l'inverse de $h^{\star}(\Sigma^{\circ}_{\bullet\circ}\uparrow\circ)$ est naturelle par rapport à $\mathcal{G}^{\circ}$, nous le notons

$$\boxed{\Xi(\mathcal{U};\boldsymbol{X};_) : \check{H}^{\star}(\mathcal{U};_) \longrightarrow \mathbb{H}^{\star}(\boldsymbol{X};_)}$$

c'est le «*morphisme canonique de la cohomologie de Čech vers l'hypercohomologie*».

Nous avons ainsi un diagramme commutatif de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} h^{\star}\Gamma(\boldsymbol{X};_) & \xrightarrow{\Xi(\mathcal{U};_)} & \check{H}^{\star}(\mathcal{U};_) \\ & \searrow^{\Xi(\boldsymbol{X};_)} & \downarrow{\scriptstyle \Xi(\mathcal{U};\boldsymbol{X};_)} \\ & & \mathbb{H}^{\star}(\boldsymbol{X};_) \end{array}$$

4.3.1. Remarque. Pour $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{X}\}$, on a trivialement $\Xi(\mathcal{U};_) = \mathrm{id}(_)$ et $\Xi(\mathcal{U};\boldsymbol{X};_) = \Xi(\boldsymbol{X};_)$.

4.3.2. Troncatures et suites exactes longues. Les foncteurs $\Gamma(\boldsymbol{X};_)$ et $\check{\boldsymbol{C}}^{k}(\mathcal{U};_)$ n'étant généralement pas exacts à droite, les foncteurs $h^{\star}(\Gamma(\boldsymbol{X};_))$ et $\check{H}^{\star}(\mathcal{U};_)$ ne génèrent pas de suite exacte longue de cohomologie lorsqu'ils sont appliqués à des suites exactes courtes de complexes, contrairement au foncteur $\mathbb{H}^{\star}(\boldsymbol{X};_)$ (3.2.9). C'est par contre bien le cas pour une suite exacte de troncatures bêtes (2.1.14, 2.1.15-0d) :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \beta_{>\ell}\boldsymbol{C}^{\bullet} \xrightarrow{q_{\ell+1,\bullet}} \boldsymbol{C}^{\bullet} \xrightarrow{p_{\ell,\bullet}} \beta_{\leqslant\ell}\boldsymbol{C}^{\bullet} \to \mathbf{0}\,,$$

puisque sur chaque ligne k, l'une des flèches $q_{\ell+1,k}$ ou $p_{\ell,k}$ est un isomorphisme tandis que l'autre est nulle. On en déduit aussitôt le lemme suivant laissé en exercice.

4.3.3. Lemme. *Les morphismes de foncteurs $\Xi(\mathcal{U};_)$, $\Xi(\mathcal{U};\boldsymbol{X};_)$ et $\Xi(\boldsymbol{X};_)$ induisent des morphismes de suites exactes longues,*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathbf{0}\to & h^0\Gamma(\boldsymbol{X};\beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \to & h^0\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{G}^\bullet) & \to & h^0\Gamma(\boldsymbol{X};\beta_{\leqslant\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \to & h^1\Gamma(\boldsymbol{X};\beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \to & h^1\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{G}^\bullet) & \to & h^1\Gamma(\boldsymbol{X};\beta_{\leqslant\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \to \\
& \Xi(\mathcal{U};_)\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\mathbf{0}\to & \check{H}^0(\mathcal{U};\beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \to & \check{H}^0(\mathcal{U};\mathcal{G}^\bullet) & \to & \check{H}^0(\mathcal{U};\beta_{\leqslant\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \to & \check{H}^1(\mathcal{U};\beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \to & \check{H}^1(\mathcal{U};\mathcal{G}^\bullet) & \to & \check{H}^1(\mathcal{U};\beta_{\leqslant\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \to \\
& \Xi(\mathcal{U};\boldsymbol{X};_)\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\mathbf{0}\to & \mathbb{H}^0(\boldsymbol{X};\beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \to & \mathbb{H}^0(\boldsymbol{X};\mathcal{G}^\bullet) & \to & \mathbb{H}^0(\boldsymbol{X};\beta_{\leqslant\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \to & \mathbb{H}^1(\boldsymbol{X};\beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \to & \mathbb{H}^1(\boldsymbol{X};\mathcal{G}^\bullet) & \to & \mathbb{H}^1(\boldsymbol{X};\beta_{\leqslant\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \to
\end{array}$$

pour tout $\mathcal{G}^\bullet\in\mathbf{C}^+(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z}))$.

4.4 Théorème de Čech-Leray pour l'hypercohomologie des complexes de faisceaux

On étend le théorème de Čech-Leray (3.3.9) de la catégorie $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ à $\mathbf{C}^+(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z}))$.

Soit $\mathcal{G}^\bullet\in\mathbf{C}^+\,\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$. Un recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{X}$ est dit «*acyclique pour $\mathcal{G}^\bullet$*» où «*$\mathcal{G}^\bullet$-acyclique*» lorsque chaque $\mathcal{U}$ est $\mathcal{G}^k$-acyclique pour tout $k\in\mathbb{Z}$ (*cf.* 3.3.8).

4.4.1. Théorème. *Soient $\mathcal{G}^\bullet\in\mathbf{C}^+\,\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{U}=\{U_{\mathfrak{a}}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$.*

!!! !!!

a) **(Čech-Leray)** *Si $\mathcal{U}$ est $\mathcal{G}^\bullet$-acyclique, le morphisme canonique*

$$\Xi(\mathcal{U};\boldsymbol{X};\mathcal{G}^\bullet):\check{H}^\star(\mathcal{U};\mathcal{G}^\bullet)\longrightarrow\mathbb{H}^\star(\boldsymbol{X};\mathcal{G}^\bullet)$$

est un ***isomorphisme****.*

b) *Soit $\varphi_\bullet:\mathcal{G}_1^\bullet\to\mathcal{G}_2^\bullet$ un morphisme de complexes faisceau tel que*

$$\mathbb{H}^\star(V;\varphi):\mathbb{H}^\star(V;\mathcal{G}_1^\bullet)\to\mathbb{H}^\star(V;\mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un isomorphisme pour tout $V=U_{\mathfrak{a}_0\ldots\mathfrak{a}_k}$; ou bien, si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{G}_i^\bullet$-acyclique, tel que

$$h^\star\Gamma(V;\varphi):h^\star\Gamma(V;\mathcal{G}_1^\bullet)\to h^\star\Gamma(V;\mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un isomorphisme pour tout tel V. Alors

$$\mathbb{H}^\star(\boldsymbol{X};\varphi):\mathbb{H}^\star(\boldsymbol{X};\mathcal{G}_1^\bullet)\to\mathbb{H}^\star(\boldsymbol{X};\mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un ***isomorphisme****.*

Démonstration

a) L'idée est la même que celle de la preuve du théorème 2.2.11. On suppose $\mathcal{G}^k=0$ pour $k<0$.

Le lemme 4.3.3 pour $\ell=0$, le lemme des cinq et le fait que $\Xi(\mathcal{U};\boldsymbol{X};_)$ est bien un isomorphisme pour un complexe concentré en un seul degré (3.3.9), montre que pour $a\in\mathbb{N}$ donné, $\Xi(\mathcal{U};\boldsymbol{X};\mathcal{G}^{\bullet\geqslant 0})$ est un isomorphisme en degré cohomologique d, si et seulement si $\Xi(\mathcal{U};\boldsymbol{X};\mathcal{G}^{\bullet\geqslant 1})$ l'est. Et, en itérant cette idée pour $\ell=1,2,\ldots$, on montre de même $\Xi(\mathcal{U};\boldsymbol{X};\mathcal{G}^{\bullet\geqslant 0})$ est un isomorphisme en degré d, si et seulement si $\Xi(\mathcal{U};\boldsymbol{X};\mathcal{G}^{\bullet\geqslant k})$ l'est pour un certain $k\geqslant 1$. Or, si $k>d$ l'énoncé est trivial.

b) Quitte à changer $\mathcal{G}_i^\bullet$ par $\Sigma_{*\bullet}^\bullet\mathscr{C}_{\boldsymbol{X}}^*\mathcal{G}_i^\bullet$ on peut supposer que les $\mathcal{G}_i^k$ sont flasques de même alors que le termes du cône de φ que nous notons $\mathcal{F}^\bullet$ par commodité. Il s'agit alors de prouver que si $\mathcal{F}^\bullet$ est un complexe borné à gauche de faisceaux flasques tel que la cohomologie des complexes $\Gamma(V;\mathcal{F}^\bullet)$ est nulle, alors la cohomologie de $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{F}^\bullet)$ est nulle aussi. Or, c'est très exactement ce que nous avons démontré dans la preuve de 3.3.9-0b. L'équivalence entre les deux hypothèses la donne le théorème de Leray pour les complexes de faisceaux 4.1.4-0g. ∎

§ 5. Applications

Le théorème 4.4.1 est de grande utilité, pratique comme théorique.

- L'assertion 4.4.1-0a est utilisée pour rendre le calcul de l'hypercohomologie effectif puisque le complexe de Čech $\check{\boldsymbol{C}}^*(\mathcal{U};\mathcal{P}^\bullet)$ est un objet éminemment combinatoire.
- L'assertion 4.4.1-0b est utilisée dans les théorèmes de comparaison, elle dit pour l'essentiel que, étant données deux théories cohomologiques basées sur des complexes de faisceaux sur $\boldsymbol{X}$, s'il existe un recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{X}$ *acyclique* pour les termes des complexes des deux théories simultanément, les théories sont globalement isomorphes si elles sont "localement" isomorphes.

5.1 Théorème de de Rham sur les variétés différentielles

Soit $\boldsymbol{M}$ une « *variété différentielle de dimension* $d_{\boldsymbol{M}}$ ». Notons $(\Omega^*(\boldsymbol{M});d_*)$ le complexe des formes différentielles sur $\boldsymbol{M}$; son homologie est la « *cohomologie de de Rham de* $\boldsymbol{M}$ » :

$$H^\star_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) := h^\star(\Omega^*(\boldsymbol{M});d_*)$$

La correspondance $U \rightsquigarrow (\Omega^*(U);d_*)$ et les restrictions des formes différentielles constituent un faisceaux sur $\boldsymbol{M}$, c'est le « *faisceau des formes différentielles sur* $\boldsymbol{M}$ » noté $(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{M}},d_*)$.

5.1.1. Proposition

a) *Chaque faisceau* $\underline{\Omega}^k_{\boldsymbol{M}}$ *est acyclique sur tout ouvert* $U\subseteq\boldsymbol{M}$.

b) **(Lemme de Poincaré)** *La cohomologie du complexe des formes différentielles* $(\Omega^*(\mathbb{R}^n,d_*))$ *est nulle en degrés positifs et isomorphe à* $\mathbb{R}$ *en degré* 0.

c) *Le complexe* $\mathbf{0}\to\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}\longrightarrow\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{M}}\longrightarrow\underline{\Omega}^2_{\boldsymbol{M}}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\underline{\Omega}^{d_{\boldsymbol{M}}}_{\boldsymbol{M}}\to\mathbf{0}$ *est une résolution acyclique de* $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$.

Indications. Pour (a), de manière très succincte, comme $\boldsymbol{M}$ est paracompacte, il existe des partitions de l'unité subordonnées à n'importe quel recouvrement ouvert ; ceci suffit pour montrer que le faisceaux des fonctions différentiables $\underline{\Omega}^0(\boldsymbol{M})$ est « *mou* ». On utilise ensuite le fait que tout module sur un faisceau d'anneaux mou (en l'occurrence $\underline{\Omega}^k(\boldsymbol{M})$ est un $\underline{\Omega}^0(\boldsymbol{M})$-module) est mou lui-aussi. Enfin, un faisceau mou est acyclique sur tout ouvert ([9]). Pour (b), voir les notes du cours § **6**, page 96. Pour (c), on remarque que tout germe de cocycle ω_x en $x\in\boldsymbol{M}$ provient d'un cocycle $\omega\in\Omega^k(U)$ sur un voisinage ouvert U de x assez petit que nous pouvons supposer isomorphe à $\mathbb{R}^{d_M}$. L'assertion (b) affirme alors qu'il existe $\varpi\in\Omega^{k-1}(U)$ tel que $d\varpi=\omega$, mais alors $\omega_x=d\varpi_x$ et la suite des faisceaux en question est bien exacte. ∎

5.1.2. Théorème. *Soit* $\boldsymbol{M}$ *une variété différentielle de dimension* n.

a) **(de Rham)** *On a un isomorphisme canonique*

$$\boxed{H^\star(\boldsymbol{M};\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}})=H^\star_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})}$$

En particulier, le faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$ *est acyclique sur un ouvert* ***homéomorphe*** *à* $\mathbb{R}^n$. ([10])

[9] Voir [Go] § **3.5** et thm. **4.4.3** pour plus de détails.

[10] Théorème de Vietoris-Begle.

b) *$H^\star_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})$ est indépendante de la structure différentielle de $\boldsymbol{M}$ et seule dépend de sa topologie. Autrement dit, deux variétés différentielles* homéomorphes *ont des cohomologies de de Rham canoniquement isomorphes.*

c) *Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement de $\boldsymbol{M}$ par des ouverts dont les intersections finies sont homéomorphes à $\mathbb{R}^n$, on a des isomorphismes canoniques*

$$\boxed{H^\star_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) = \check{H}^\star(\mathcal{U};\underline{\Omega}^*) = \check{H}^\star(\mathcal{U};\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}})}$$

Indication

a-b) Par 5.1.1 la suite longue 5.1.1-0c est une résolution acyclique de $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}$. On applique alors le théorème de Leray pour la cohomologie des faisceaux (3.2.6).

On en déduit aussitôt que la cohomologie de de Rham est un invariant **topologique**. En particulier, su U est un ouvert **homéomorphe** à $\mathbb{R}^n$, $H(U;\underline{\mathbb{R}}_U)$ est isomorphe à $H_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}[0]$ de sorte que $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$ est bien acyclique sur tout ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

c) • *Première démonstration.* On considère le bicomplexe de Čech-de Rham

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \to & \underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{M}} & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^0(\mathcal{U};\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{M}}) & \longrightarrow & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^1(\mathcal{U};\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{M}}) & \longrightarrow & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^2(\mathcal{U};\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{M}}) \to \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \to & \underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{M}} & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^0(\mathcal{U};\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{M}}) & \longrightarrow & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^1(\mathcal{U};\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{M}}) & \longrightarrow & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^2(\mathcal{U};\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{M}}) \to \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \to & \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}} & \to & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^0(\mathcal{U};\underline{\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^1(\mathcal{U};\underline{\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \underline{\check{\boldsymbol{C}}}^2(\mathcal{U};\underline{\mathbb{R}}) \to \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
\end{array} \qquad (\mathcal{B})$$

Comme les faisceaux $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{M}}$ sont acycliques sur tout ouvert de $\boldsymbol{M}$ d'après 5.1.1-0a, le théorème de Čech-Leray pour les faisceaux (3.3.9) s'applique sur chaque ligne de la partie supérieure du bicomplexe, dont la cohomologie des sections globales sera nulle. On en déduit l'isomorphisme canonique

$$H^\star_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \simeq h^\star\big(\Sigma^\star_{\bullet *}\,\underline{\check{\boldsymbol{C}}}^\bullet(\mathcal{U};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{M}})\big) = \check{H}^\star(\mathcal{U};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{M}})\,.$$

Ensuite, les sections globales des colonnes de la partie droite du bicomplexe $(\mathcal{B})$ calculent les produits des cohomologies de de Rham des intersections des ouverts de $\mathcal{U}$ et sont donc acycliques d'après (a), on en déduit l'isomorphisme canonique

$$\check{H}^\star(\mathcal{U};\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}) \simeq h^\star\big(\Sigma^\star_{\bullet *}\,\underline{\check{\boldsymbol{C}}}^\bullet(\mathcal{U};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{M}})\big)\,.$$

• *Deuxième démonstration.* Le quasi-isomorphisme $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}[0] \to \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{M}}$ de 5.1.1-0c induit l'isomorphisme

$$H(\boldsymbol{M};\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}) \simeq \mathbb{H}(\boldsymbol{M};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{M}})$$

et comme $\mathcal{U}$ est à la fois $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}$-acyclique par (a), et $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{M}}$-acyclique par 5.1.1-0a ; on peut donc appliquer théorème de Leray pour les complexes de faisceaux acycliques 4.1.4-0g pour avoir

$$H(\boldsymbol{M};\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}) \simeq \check{H}^\star(\mathcal{U};\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}) \quad \text{et} \quad \mathbb{H}(\boldsymbol{M};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{M}}) \simeq \check{H}^\star(\mathcal{U};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{M}})\,. \qquad \blacksquare$$

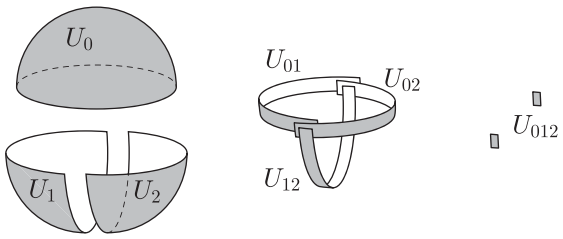
5.2 Calculs effectifs de la cohomologie de de Rham des variétés différentielles

L'assertion 5.1.2-0c, par son égalité $H^\star_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) = \check{H}^\star(\mathcal{U};\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}})$, donne une méthode de calcul pour la cohomologie de de Rham d'une variété différentielle. La voici pour $\boldsymbol{M}$ compacte de dimension

n :

- On fixe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_1, \dots U_r\}$ de $\boldsymbol{M}$ tel que pour tout $\bar{\imath} = i_0 < \cdots < i_k$ l'intersection $U_{\bar{\imath}} := U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k}$ possède un nombre fini de composantes connexes et tel que toutes ces composantes soient toutes homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ ([11]). Le groupe des cochaînes de Čech admet alors une description très simple, on a
$$\check{\boldsymbol{C}}^k(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}}) = \prod\nolimits_{1 \leqslant i_0 \dots i_k \leqslant r} \mathbb{R}^{\Pi_0(U_{i_0} \dots i_k)}$$
où $\Pi_0(U)$ désigne l'ensemble des composantes connexes de U.
- Calculer la cohomologie du complexe de Čech $\check{\boldsymbol{C}}^*(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{M}})$.

5.2.1. Exemple : Cohomologie de de Rham de la sphère $\mathbb{S}^2$. On décompose $\boldsymbol{X} := \mathbb{S}^2$ comme réunion des ouverts de la famille $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$ suivants :



Le complexe de Čech $\check{\boldsymbol{C}}^*(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}})$ est
$$\mathbf{0} \to \Gamma(U_0, \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \oplus \Gamma(U_1, \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \oplus \Gamma(U_2, \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \to \Gamma(U_{01}, \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \oplus \Gamma(U_{12}, \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \oplus \Gamma(U_{02}, \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \to \\ \to \Gamma(U_{012}, \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \to \mathbf{0}$$
équivalent au complexe à trois termes : $\mathbf{0} \to \mathbb{R}^3 \xrightarrow{p} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{q} \mathbb{R}^2 \to \mathbf{0}$ où $p(x, y, z) = (x - y, y - z, x - z)$ et $q(x, y, z) = (y - z + x, y - z + x)$.

Par la condition de faisceau et la connexité de $\boldsymbol{X}$, on a $\check{H}^0(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) = \Gamma(\boldsymbol{X}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) = \mathbb{R}$. Il s'ensuit que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(p)) = 2$. D'autre part, il est clair que $\mathrm{im}(q) = \Delta_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^2$ et donc $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(q)) = 2$, d'où $\check{H}^1(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) = 0$ et, pour terminer, $\check{H}^2(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) = \mathbb{R}^2/\Delta_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. On a donc
$$\bullet\ H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) = \mathbb{R}\,, \qquad \bullet\ H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) = \mathbf{0}\,, \qquad \bullet\ H^2_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) = \mathbb{R}\,.$$

5.3 Calculs effectifs de la cohomologie de de Rham des variétés algébriques

En géométrie algébrique l'acyclicité des faisceaux du complexe de de Rham sur les ouverts affines est conséquence de leur *cohérence* (critère d'acyclicité de Serre). L'assertion 4.4.1-0a donne alors une recette pour calculer la cohomologie de de Rham d'une variété algébrique $\boldsymbol{X}$, c'est-à-dire pour calculer de l'hypercohomologie de son complexe de de Rham $(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}, d_*)$. La voici :

- Fixer un recouvrement fini par des ouverts affines $\mathcal{U} = \{U_1, \dots U_r\}$ de $\boldsymbol{X}$,

Pour $\bar{\imath} = i_0 < \cdots < i_k$, on note $U_{\bar{\imath}} := U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k}$.
- Expliciter l'algèbre $\mathcal{R}_{\bar{\imath}}$ des fonctions régulières sur $U_{\bar{\imath}}$ et les restrictions $\mathcal{R}_{\bar{\imath}} \to \mathcal{R}_{\bar{\imath}'}$, $\bar{\imath} \succcurlyeq \bar{\imath}'$.
- Expliciter les modules $\Omega_{\mathcal{R}_{\bar{\imath}}/\mathbb{C}}$ et les morphismes de restriction $\Omega_{\mathcal{R}_{\bar{\imath}}/\mathbb{C}} \to \Omega_{\mathcal{R}_{\bar{\imath}'}/\mathbb{C}}$, $\bar{\imath} \succcurlyeq \bar{\imath}'$.

[11] De tel recouvrements existent toujours.

- Expliciter les flèches du bicomplexe de Čech-de Rham $\check{\boldsymbol{C}}^*(\mathcal{U};\underline{\Omega}_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}})$ suivant

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
\mathbf{0} & \to & \prod_{1\leqslant i\leqslant r} \bigwedge^d \Omega_{\mathcal{R}_i/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \prod_{1\leqslant i_0<i_1\leqslant r} \bigwedge^d \Omega_{\mathcal{R}_{i_0i_1}/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \prod_{1\leqslant i_0<i_1<i_2\leqslant r} \bigwedge^d \Omega_{\mathcal{R}_{i_0i_1i_2}/\mathbb{C}} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \bigwedge^d \Omega_{\mathcal{R}_{1\dots r}/\mathbb{C}} & \to & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \to & \prod_{1\leqslant i\leqslant r} \bigwedge^2 \Omega_{\mathcal{R}_i/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \prod_{1\leqslant i_0<i_1\leqslant r} \bigwedge^2 \Omega_{\mathcal{R}_{i_0i_1}/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \prod_{1\leqslant i_0<i_1<i_2\leqslant r} \bigwedge^2 \Omega_{\mathcal{R}_{i_0i_1i_2}/\mathbb{C}} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \bigwedge^2 \Omega_{\mathcal{R}_{1\dots r}/\mathbb{C}} & \to & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \to & \prod_{1\leqslant i\leqslant r} \Omega_{\mathcal{R}_i/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \prod_{1\leqslant i_0<i_1\leqslant r} \Omega_{\mathcal{R}_{i_0i_1}/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \prod_{1\leqslant i_0<i_1<i_2\leqslant r} \Omega_{\mathcal{R}_{i_0i_1i_2}/\mathbb{C}} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \Omega_{\mathcal{R}_{1\dots r}/\mathbb{C}} & \to & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{0} & \to & \prod_{1\leqslant i\leqslant r} \mathcal{R}_i & \longrightarrow & \prod_{1\leqslant i_0<i_1\leqslant r} \mathcal{R}_{i_0i_1} & \longrightarrow & \prod_{1\leqslant i_0<i_1<i_2\leqslant r} \mathcal{R}_{i_0i_1i_2} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathcal{R}_{1\dots r} & \to & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & &
\end{array}$$

(illustration pour $\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X}) = d$ et $\mathrm{card}(\mathcal{U}) = r$).

- Calculer la cohomologie du complexe simple associé $\Sigma\check{\boldsymbol{C}}^*(\mathcal{U};\underline{\Omega}_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}})$.

5.3.1. Exemple : Cohomologie de de Rham de la sphère de Riemann. La variété algébrique complexe $\boldsymbol{X} := \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est réalisée comme réunion de deux ouverts U_0 et U_1 isomorphes à $\mathbb{C}$ d'intersection U_{01} isomorphe à $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ (variété affine). Les algèbres des fonctions régulières sont

$$\bullet\ \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1 = \mathbb{C}[X] \quad \text{et} \quad \bullet\ \mathcal{R}_{01} = \mathbb{C}[X, 1/X]\,.$$

Les complexes de de Rham sont

$$\begin{array}{l}
(\Omega^*_{\mathcal{R}_i/\mathbb{C}}, d_*) = \mathbb{C}[X] \xrightarrow{\quad d \quad} \mathbb{C}[X]\ dX, \qquad d(P) = \frac{\partial P}{\partial X} dX, \\
(\Omega^*_{\mathcal{R}_{01}/\mathbb{C}}, d_*) = \mathbb{C}[X, 1/X] \xrightarrow{d} \mathbb{C}[X, 1/X]\ dX
\end{array}$$

D'où le complexe Čech-de Rham :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \to & \mathbb{C}[X]\,dX \oplus \mathbb{C}[X]\,dX & & \xrightarrow{\beta} & & \mathbb{C}[X]_X dX \to \mathbf{0} \\
 & & {\scriptstyle d}\uparrow & & {\scriptstyle d}\uparrow & & {\scriptstyle d}\uparrow \\
0 & \to & \mathbb{C}[X] & \oplus & \mathbb{C}[X] & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{C}[X]_X \to \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
\end{array} \qquad (\mathfrak{D})$$

avec

$$\begin{cases}
\alpha(P(X), Q(X)) = Q(1/X) - P(X) \\
\beta(P(X)dX, Q(X)dX) = Q(1/X)d(1/X) - P(X)dX
\end{cases}$$

Le complexe simple associé au bicomplexe $(\mathfrak{D})$ sera noté (Σ^*, D_*) dans la suite. On a (*cf.* 2.2.8)

$$\begin{cases}
D_0(P, Q) = (dP, dQ) \oplus \alpha(P, Q) \\
D_1((P, Q), R) = -\beta(P, Q) + dR
\end{cases}$$

- On a $\Sigma^2 = \mathbb{C}[X]_X dX$ et la cohomologie en degré 2 est

$$h^2(\Sigma^*, D_*) = \frac{\mathbb{C}[X]_X d_X}{\mathrm{im}(\beta) + \mathrm{im}(d)} = \frac{\mathbb{C}[X]_X d_X}{\langle Q(\frac{1}{X})\frac{-1}{X^2}dX - P(X)dX\rangle + \langle d(R(X, \frac{1}{X}))\rangle} ,$$

avec $P(X), Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ et $R(X, 1/X) \in \mathbb{C}[X]_X$. Un calcul simple montre que les monômes $X^m dX$ avec $m \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ sont dans l'image de $(\beta + d)$ alors que $\frac{1}{X}d_X$ n'est pas atteint. On a donc

$$h^2(\Sigma^*, D_*) = \mathbb{C}\Big[\frac{1}{X}dX\Big] .$$

- On a $\Sigma^0 = \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X]$ et la cohomologie de (Σ^*, D_*) en degré 0 est

$$h^0(\Sigma^*, D_*) = \ker(d, d) \cap \ker\alpha = \mathbb{C} .$$

- On a $\Sigma^1 = \big(\mathbb{C}[X]dX \oplus \mathbb{C}[X]dX\big) \oplus \mathbb{C}[X]_X$ et l'application (d, d) est surjective d'après le lemme de Poincaré global. Il s'ensuit qu'un cocycle $((P', Q'), S') \in \Sigma^2$ est toujours cohomologue à un cocycle de la forme

$$((P', Q'), S') - (dP, dQ), \alpha(P, Q)) = ((0, 0), S' + \alpha(P, Q)) ,$$

où $(P', Q') = (dP, dQ)$. Mais dans un tel cocycle la fonction $S' + \alpha(P, Q))$ est nécessairement une constante $c \in \mathbb{C}$. Or, $((0, 0), c)$ est bien un 1-cobord puisque image par $(d, d) \oplus \alpha$ de $(0, c)$. Par conséquent :

$$h^1(\Sigma^*, D_*) = \mathbf{0} .$$

Nous avons trouvé

$$\bullet\ H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\mathbb{C}) = \mathbb{C} , \qquad \bullet\ H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\mathbb{C}) = \mathbf{0} , \qquad \bullet\ H^2_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\mathbb{C}) = \mathbb{C} .$$

5.4 Théorème de comparaison de Grothendieck pour les variétés algébriques sur $\mathbb{C}$ non singulières

Cette partie rappelle rapidement le théorème de comparaison et indique comment l'équivalence entre les cohomologies de de Rham holomorphe et algébrique sur des ouverts algébriques affines permet d'obtenir leur équivalence sur toute variété algébrique.

5.4.1. Structure d'espace analytique d'une variété algébrique complexe. Un ouvert algébrique $\boldsymbol{U}$ de $\mathbb{C}^n$, *i.e.* le complémentaire de l'ensemble des zéros d'une famille $\{P_{\mathfrak{a}}(X_1, \ldots, X_n)\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ d'applications polynomiales, muni de la topologie de Zariski et du faisceau des fonctions algébriques, est un espace localement annelé noté $(\boldsymbol{U}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{U}})$. Le même ensemble $\boldsymbol{U}$ muni de la topologie «*transcendante*» ([12]) et du faisceau des fonctions holomorphes, est aussi un espace localement annelé, il est noté $(\boldsymbol{U}^{\mathrm{an}}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})$. L'application identique $\epsilon_{\boldsymbol{U}} : \boldsymbol{U}^{\mathrm{an}} \to \boldsymbol{U}$, $x \mapsto x$ (clairement continue) et le morphisme de faisceaux d'anneaux $\epsilon^\natural_{\boldsymbol{U}} : \mathcal{O}_{\boldsymbol{U}} \to \epsilon_*(\mathcal{O}_{\boldsymbol{U}^{\mathrm{an}}})$ qui fait correspondre à une fonction algébrique la même fonction dans l'algèbre des fonctions holomorphes, définissent un morphisme d'espaces localement annelés noté brièvement $\epsilon : \boldsymbol{U}^{\mathrm{an}} \to \boldsymbol{U}$.

Dans l'article [GaGa], J.-P. Serre généralise ces constructions en définissant le **foncteur** $(_)^{\mathrm{an}}$ de la catégorie $\mathbf{Var}_{\mathrm{alg}}(\mathbb{C})$ des toutes les variétés algébriques sur $\mathbb{C}$, singulières ou non, vers la catégorie

[12] Il s'agit de la topologie d'espace métrique de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ muni la distance euclidienne. Cette terminologie fait référence à l'opposition entre «*nombre algébrique*» et «*nombre transcendant*», *i.e.* «*non algébrique*».

$\mathbf{Esp}_{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$ des espaces analytiques complexes :

$$(_)^{\mathrm{an}} : \mathbf{Var}_{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}) \rightsquigarrow \mathbf{Esp}_{\mathrm{an}}(\mathbb{C}) .$$

On défini également le morphisme naturel $\epsilon(\boldsymbol{X}) : \boldsymbol{X}^{\mathrm{an}} \to \boldsymbol{X}$ qui est l'identité sur l'ensemble $\boldsymbol{X}$ et qui identifie une fonction algébrique à la même fonction dans l'espace des fonctions analytiques complexes.

5.4.2. Acyclicité des modules cohérents. Soit $\mathcal{O}$ un faisceau d'anneaux sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$. On rappelle qu'un faisceau de $\mathcal{O}$-modules $\mathcal{M}$ est dit « *cohérent* » s'il admet des présentations finies locales, *i.e.* si pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$ il existe un voisinage ouvert $\boldsymbol{V}$ et une suite exacte courte à droite de faisceaux

$$\big(\mathcal{O}|_{\boldsymbol{V}}\big)^{M} \longrightarrow \big(\mathcal{O}|_{\boldsymbol{V}}\big)^{N} \longrightarrow \mathcal{M}|_{\boldsymbol{V}} \to \mathbf{0} ,$$

avec $M, N \in \mathbb{N}$.

Lorsque l'espace annelé $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O})$ est une variété algébrique ou analytique complexe on dispose des critères d'acyclicité pour la cohomologie des faisceaux très importants suivants :

5.4.3. Proposition

a) **(Serre)** *Un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module cohérent sur une variété algébrique affine est acyclique.*

b) **(Cartan)** *Un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$-module cohérent sur l'espace analytique complexe correspondant à une variété algébrique complexe* ***affine*** *est acyclique.*

5.4.4. Hypercohomologie de l'image directe des complexes cohérents. Soit $\epsilon : (\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}) \to (\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ le morphisme d'espaces annelés de 5.4.1. Pour tout complexe $\boldsymbol{C}^{\bullet} \in \mathbf{C}^{+}(\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}(\mathbb{Z}))$, le foncteur image directe ϵ_* appliqué au morphisme $\boldsymbol{C}^{\bullet} \to \Sigma^{\bullet}_{\star\bullet} \mathscr{C}^{\star}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}} \boldsymbol{C}^{\bullet}$ (*cf.* 4.1) donne le morphisme

$$\epsilon_*(\boldsymbol{C}^{\bullet}) \longrightarrow \epsilon_*\big(\Sigma^{\bullet}_{\star\bullet} \mathscr{C}^{\star}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}} \boldsymbol{C}^{\bullet}\big) \qquad (\diamond)$$

dont on déduit $I\!H(\boldsymbol{X}; \epsilon_*(\boldsymbol{C}^{\bullet})) \to I\!H(\boldsymbol{X}; \Sigma^{\bullet}_{*\bullet} \epsilon_*(\mathscr{C}^{*}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}} \boldsymbol{C}^{\bullet}))$ qui, composé avec les égalités :

$$I\!H(\boldsymbol{X}; \Sigma^{\bullet}_{*\bullet} \epsilon_*(\mathscr{C}^{*}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}} \boldsymbol{C}^{\bullet})) \underset{1}{=} h\big(\Gamma(\boldsymbol{X}; \Sigma^{\bullet}_{*\bullet} \epsilon_*(\mathscr{C}^{*}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}} \boldsymbol{C}^{\bullet}))\big) = h\big(\Gamma(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}; \Sigma^{\bullet}_{*\bullet} \mathscr{C}^{*}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}} \boldsymbol{C}^{\bullet})\big) = I\!H(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}; \boldsymbol{C}^{\bullet}) ,$$

([13]) donne à son tour le morphisme canonique d'hypercohomologies

$$\Xi(\epsilon, \boldsymbol{C}^{\bullet}) : I\!H^{\star}\left(\boldsymbol{X}; \epsilon_* \boldsymbol{C}^{\bullet}\right) \longrightarrow I\!H^{\star}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}; \boldsymbol{C}^{\bullet})$$

5.4.5. Proposition. *Soit $\mathcal{M}^{\bullet}$ un complexe borné inférieurement de faisceaux* cohérents *sur une variété analytique complexe $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$. Le morphisme canonique $\Xi(\epsilon, \mathcal{M}^{\bullet})$ est un* ***isomorphisme****.*

Démonstration. L'image directe n'étant pas exacte en général, le morphisme $(\diamond)$ n'est pas toujours un quasi-isomorphisme ; cependant, dans le cas présent, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, le complexe

$$\Gamma\big(\boldsymbol{V}; \mathbf{0} \to \epsilon_* \boldsymbol{M}^k \to \epsilon_* \mathscr{C}^{*}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}} \mathcal{M}^k\big) = \Gamma\big(\boldsymbol{V}^{\mathrm{an}}; 0 \to \mathcal{M}^k \to \mathscr{C}^{*}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}} \mathcal{M}^k\big)$$

est exact pour tout ouvert (algébrique) affine $\boldsymbol{V}$ de $\boldsymbol{X}$ d'après 5.4.3-0b. Il s'ensuit que la suite longue $\mathbf{0} \to \epsilon_* \boldsymbol{M}^k \to \epsilon_* \mathscr{C}^{*}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}} \mathcal{M}^k$ est exacte puisque, dans $\boldsymbol{X}$, tout point admet une base de voisinages af-

[13] L'égalité '$\underset{1}{=}$' d'après 4.1.4-0g parce que l'image directe d'un faisceau flasque est flasque.

fines (p.e. les ouverts principaux) ([14]). Le morphisme $I\!H(\boldsymbol{X};\epsilon_*(\mathcal{M}^\bullet)) \to I\!H(\boldsymbol{X};\epsilon_*(\Sigma^\bullet_{*\bullet}\mathscr{C}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}\mathcal{M}^\bullet))$ est donc bijectif d'après 2.2.15 et 4.1.4-0g et la bijectivité de $\Xi(\epsilon,\mathcal{M}^\bullet)$ en résulte. ∎

5.4.6. Cohomologies de de Rham. Lorsque la variété algébrique $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est «*non singulière*» de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$, l'espace analytique $(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})$ est une «*variété analytique complexe*» (aussi appelée «*variété holomorphe*») ([15]). On note alors $(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}};d_*)$ le «*complexe des formes différentielles holomorphes sur* $\boldsymbol{X}$», *i.e.* le faisceau des sections holomorphes du fibré $\bigwedge_{\mathbb{C}}\mathsf{T}^*_{\mathbb{C}}\boldsymbol{X}$ ([16]) muni de la «*différentielle holomorphe*» ([17]). Pour chaque $k\in\mathbb{N}$, le $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$-module $\underline{\Omega}^k_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ est localement libre (de rang $\binom{d_{\boldsymbol{X}}}{k}$), il est donc $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$-cohérent et donc acyclique sur tout ouvert algébrique affine de $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$ (5.4.3-0b). Dans le cas algébrique les faisceaux des formes différentielles sont des $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules cohérents et sont également acycliques sur les ouverts affines de $\boldsymbol{X}$ (5.4.3-0a).

Cela dit, le morphisme d'espaces annelés $\epsilon^\natural:\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\to\epsilon_*(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})$ se prolonge en un morphisme de complexes de faisceaux $\epsilon^\natural_*:\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}}\to\epsilon_*(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})$ ([18]), induisant un morphisme d'hypercohomologies

$$I\!H(\boldsymbol{X};\epsilon^\natural_\bullet):I\!H(\boldsymbol{X};\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}})\to I\!H(\boldsymbol{X};\epsilon_*(\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}))=I\!H(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})$$

où l'égalité est justifiée par 5.4.5. Enfin, comme la cohomologie de de Rham est l'hypercohomologie du complexe de de Rham, nous obtenons le morphisme canonique

$$\boxed{I\!H^\star(\boldsymbol{X};\epsilon^\natural_\bullet):H^\star_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\mathbb{C})\longrightarrow H^\star_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}})}$$

5.4.7. Théorème (Grothendieck). *La cohomologie de de Rham d'une variété algébrique complexe non singulière $\boldsymbol{X}$ coïncide avec la cohomologie de de Rham de la variété analytique complexe $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$. Plus précisément, le morphisme canonique $I\!H^\star(\boldsymbol{X};\epsilon^\natural_\bullet)$ ci-dessus est* ***bijectif****.*

Résumé de la démonstration d'après [Gr]. Compte tenu des théorèmes d'acyclicité de Serre et Cartan (5.4.3), le théorème 4.4.1-0b réduit l'étude au cas où $\boldsymbol{X}$ est **affine**.

La preuve de Grothendieck passe alors par les étapes suivantes :

i) Par le théorème de résolution de singularités d'Hironaka, on peut considérer que $\boldsymbol{X}$ est un ouvert d'une variété algébrique complexe projective non singulière $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ et que $\boldsymbol{Y}=\widetilde{\boldsymbol{X}}\backslash\boldsymbol{X}$ est un

[14] Lorsque les sections $\Gamma(\boldsymbol{V};\boldsymbol{C}^\bullet)$ d'un complexe de faisceaux $\boldsymbol{C}^\bullet$ sur les ouverts $\boldsymbol{V}$ d'une base pour la topologie sont des suites exactes longues, le complexe des germes $\boldsymbol{C}^\bullet_x$ en tout point $x\in\boldsymbol{X}$ est exact et la suite $\boldsymbol{C}^\bullet$ l'est donc aussi.

[15] De définition analogue à celle des variétés différentiables : par des atlas d'ouverts homéomorphes à $\mathbb{C}^{d_{\boldsymbol{X}}}$ et morphismes de transition biholomorphes.

[16] Algèbre extérieure sur $\mathbb{C}$ du fibré cotangent $\mathsf{T}^*_{\mathbb{C}}\boldsymbol{X}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathsf{T}_{\mathbb{C}}\boldsymbol{X};\mathbb{C})$ de $\boldsymbol{X}$

[17] On prendra garde du fait que $(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}},d_*)$ est un sous-complexe strict du complexe $(\underline{\Omega}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}},d_*)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ des formes différentielles réelles à valeurs complexes ; le support du premier étant $[0,d_{\boldsymbol{X}}]$ tandis que celui du second est $[0,2d_{\boldsymbol{X}}]$. En effet, pour $\omega\in\Omega^k(\boldsymbol{V}^{\mathrm{an}})$ et $x\in\boldsymbol{V}$, l'élément $\omega(x)$ est une forme-k-multilinéaire complexe alternée sur $\mathsf{T}_x\boldsymbol{X}$, autrement dit, c'est une application $\omega(x):(\mathsf{T}_x\boldsymbol{X})^k\to\mathbb{C}$ qui est $\mathbb{C}$-linéaire par rapport à chaque coordonnée et est nulle sur les multivecteurs $(\bar z_1,\dots,\bar z_k)$ avec $\bar z_i=\bar z_j$ pour un certain couple (i,j) avec $i\neq j$; u ne telle application est aussi (trivialement) une forme-k-linéaire *réelle* alternée à valeurs dans $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$. On a donc une inclusion canonique $\underline{\Omega}^k_{\boldsymbol{U}^{\mathrm{an}}}\subseteq\underline{\Omega}^k_{\boldsymbol{U}^{\mathrm{diff}}}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ qui est stricte dans la mesure où $\underline{\Omega}^k_{\boldsymbol{U}^{\mathrm{an}}}=0$ si $k>d_{\boldsymbol{X}}$, alors que $\underline{\Omega}^k_{\boldsymbol{U}^{\mathrm{diff}}}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=0$ pour $k>2d_{\boldsymbol{X}}$.

[18] Ce qui signifie que toute forme différentielle algébrique complexe est analytique complexe et que la différentielle algébrique coïncide avec la différentielle holomorphe.

diviseur à croisement normaux. On notera $\iota : \boldsymbol{X} \to \widetilde{\boldsymbol{X}}$ l'application d'inclusion et ι_* (resp. ι_*^{an}) le foncteur «*image directe*» dans la catégorie des $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules (resp. $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$-modules).

ii) Le morphisme $\epsilon_\bullet^\natural : \underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}} \to \epsilon_*\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ induit le morphisme de complexes de faisceaux sur $\widetilde{\boldsymbol{X}}$

$$\iota_*\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}} \to \iota_*\epsilon_*\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}} = \epsilon_*\iota_*^{\mathrm{an}}(\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}) \to \epsilon_*\,I\!R\,\iota_*^{\mathrm{an}}(\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})$$

([19]) et donc, par adjonction ([20]), le morphisme de complexes de faisceaux sur $\widetilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{an}}$:

$$\boxed{\Phi_\bullet : (\iota_*(\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}))^{\mathrm{an}} \longrightarrow I\!R\,\iota_*^{\mathrm{an}}(\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})}$$

dont le passage en hypercohomologie donne le morphisme canonique de comparaison

$$I\!H^\star(\boldsymbol{X};\Phi_\bullet) : H^\star_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\mathbb{C}) \longrightarrow H^\star_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}})$$

qui coïncide, par construction avec $I\!H(\boldsymbol{X};\epsilon_\bullet^\natural)$.

Pour justifier cette affirmation :

- On a $I\!H\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{an}};(\iota_*(\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}))^{\mathrm{an}}\right) = I\!H\left(\widetilde{\boldsymbol{X}};\iota_*(\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}})\right)$ par [GaGa] puisque chaque $\iota_*\underline{\Omega}^k_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}$ est limite inductive de module cohérents et que [GaGa] continue d'être valable dans ces cas. D'autre part, le fait que $\boldsymbol{X}$ soit le complémentaire d'un diviseur de $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ implique que si $\underline{\Omega}^k_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}} \to \mathcal{F}^{k,\star}$ est une résolution flasque (4.1.4-0h) la suite longue $\iota_*(\underline{\Omega}^k_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}) \to \iota_*(\mathcal{F}^{k,\star})$ est une résolution flasque de $\iota_*(\underline{\Omega}^k_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}})$, puisque $\iota_*(\texttt{flasque}) = (\texttt{flasque})$ et que tout point $y \in \widetilde{\boldsymbol{X}}$ admet un voisinage V_y tel que $W_y := V_y \cap \boldsymbol{X}$ est affine (puisque $\boldsymbol{Y} := \widetilde{\boldsymbol{X}}\backslash\boldsymbol{X}$ est de codimension 1 d'après (i) ci-dessus), mais alors $\Gamma(V_y;\iota_*(\underline{\Omega}^k_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}) \to \iota_*(\mathcal{F}^{k,\star})) = \Gamma(W_y;\underline{\Omega}^k_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}} \to \mathcal{F}^{k,\star})$ est acyclique en degrés positifs d'après le critère d'affinité de Serre. On en déduit l'égalité

$$I\!H\left(\widetilde{\boldsymbol{X}};\iota_*(\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}})\right) = \Gamma(\widetilde{\boldsymbol{X}};\iota_*(\Sigma\,\mathcal{F}^{\bullet,\star})) = \Gamma(\boldsymbol{X};\Sigma\,\mathcal{F}^{\bullet,\star}) = I\!H(\boldsymbol{X};\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}) = H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}})$$

- L'égalité $I\!H\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{an}};I\!R\,\iota_*^{\mathrm{an}}\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}\right) = I\!H\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}\right) = H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\mathbb{C})$ est immédiate.

iii) Pour démontrer que $\Phi_\bullet$ induit un isomorphisme en hypercohomologie il suffit de montrer que c'est un quasi-isomorphisme dans la catégorie des complexes de faisceaux (4.1.4-0e) ce qui est une question **locale**. On utilise alors le fait que autour de chaque $y \in \boldsymbol{Y}^{\mathrm{an}} = \widetilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{an}}\backslash\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$ il existe un ouvert V_y et un isomorphisme **analytique** $\varphi_y : V_y \to I\!B^{d_{\boldsymbol{X}}}$, où $I\!B^{d_{\boldsymbol{X}}}$ désigne une boule ouverte centrée à l'origine de $\mathbb{C}^{d_{\boldsymbol{X}}}$, tel que $\varphi_y(\boldsymbol{Y} \cap V_y)$ est la trace sur $I\!B^{d_{\boldsymbol{X}}}$ d'une réunion d'hyperplans **de coordonnées**, autrement dit $V_y \cap \boldsymbol{X} = \varphi_y^{-1}(D(x_1x_2\cdots x_r))$. On a donc autour de y une base de voisinages pour la topologie transcendante de la forme $V = I\!B\backslash\{x_1x_2\cdots x_r = 0\}$ et le morphisme

$$\Gamma(V_y;\Phi_\bullet) : \Gamma(V_y;(\iota_*(\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}))^{\mathrm{an}}) \longrightarrow \Gamma(V_y;I\!R\,\iota_*^{\mathrm{an}}(\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}))$$

s'identifie alors à l'inclusion des complexes

$$\left\{\begin{array}{c}\text{formes différentielles}\\ \text{homolorphes sur } V\\ \text{méromorphes sur } I\!B\end{array}\right\} \subseteq \left\{\begin{array}{c}\text{formes différentielles}\\ \text{homolorphes sur } V\end{array}\right\}$$

et un calcul explicite montre que c'est bien un quasi-isomorphisme. ∎

[19] $I\!R\,\iota_*^{\mathrm{an}}(\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})$ est le complexe $\iota_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{I}^\bullet)$ où $\mathcal{I}^\bullet$ est un complexe de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$-modules injectifs tel qu'il existe un quasi-isomorphisme $\Phi^\bullet : \underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}} \to \mathcal{I}^\bullet$. Le morphisme $\epsilon_*\iota_*^{\mathrm{an}}(\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}) \to \epsilon_*\,I\!R\,\iota_*^{\mathrm{an}}(\underline{\Omega}^\bullet_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})$ est alors celui induit par $\Phi^\bullet$.

[20] Dans [GaGa] le foncteur $(_)^{\mathrm{an}} : \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{an}}})$ est adjoint à gauche du foncteur $\epsilon^\natural : \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{an}}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}})$.

5.4.8. Exercice. Justifier les propriétés suivantes.

a) La cohomologie de de Rham d'une variété algébrique complexe non singulière $\boldsymbol{X}$ coïncide avec la cohomologie de faisceau sur $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$ du faisceau constant $\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$.

b) La cohomologie de de Rham d'une variété algébrique complexe non singulière $\boldsymbol{X}$ coïncide avec la cohomologie de de Rham de la variété différentielle réelle $\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}$ sous-jacente à $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$.

c) Montrer que la cohomologie de de Rham d'une variété différentielle **réelle** de dimension n admettant une structure complexe (auquel cas n est pair) est nulle en degrés supérieurs à $n/2$.

§6. Références bibliographiques

[Gr] A. Grothendieck. On the de Rham cohomology of algebraic varieties ; Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 29 pp. 95–103 (1966).

[Go] R. Godement. "*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*" ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

[GaGa] J.-P. Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique ; Ann. Inst. Fourier, Grenoble 6, pp. 1–42, (1955–1956).

§7. Index terminologique

acyclique
(critère de Serre), 25
complexe, 5
faisceau, 13
additif (foncteur), 3
amplitude
cohomologique, 4
d'un complexe, 3
augmenté
complexe, 12
complexe de Čech, 19
augmentation, **12**, 15

bicomplexe
à termes dans **Ab**, 7
borné inférieurement, 10
du premier quadrant, 10

cône d'un morphisme de complexes, 5
catégorie
de modules, 2
Čech (complexe), 19
co-augmentation, 12
cochaînes de Čech, 14
cohérent
(faisceau), 27
(module), 27
cohomologie
de Čech, 15
de de Rham, 22
de faisceaux, 13
horizontale, 8
verticale, 7
complexe
à termes dans **Ab**, 3
acyclique, 5
augmenté, 12
concentré dans. . . , 3
des cochaînes de Čech, 19
des formes différentielels holomorphes, 28
positifs, bornés, . . . , 4
simple associé, 9

différentielle, 3
du complexe de Čech, 14
holomorphe, 28

faisceau
acyclique, 13
cohérent, 27
des formes différentielles, 22
flasque, 12
mou, 22
résolution, 12
foncteur
additif, 3
image directe, 28

Godement (résolution de), 12

hypercohomologie des complexes, 17

image directe (foncteur), 28

k-ième terme, 3

module cohérent, 27
modules (catégorie), 2
morphisme
canonique $\Xi(\mathcal{U}, \boldsymbol{X}, _)$, 20
canonique $\Xi(\mathcal{U}, _)$, 19
canonique $\Xi(\boldsymbol{X}, _)$, 17
d'augmentation, 12
mou (faisceau), 22

quasi-isomorphisme, 4

résolution
acyclique, flasque, molle, 18
canonique de Godement, 12
d'un faisceau, 12

Serre (acyclicité), 25

termes d'un complexe, 3
théorème
de Čech-Leray
pour les complexes de faisceaux, 21
pour les faisceaux, 15
de Leray
pour les complexes de faisceaux, 18
pour les faisceaux, 13
transcendant (topologie), 26
triangle distingué, 5
troncatures bêtes, 5

variété
analytique complexe, 28
différentielle, 22
holomorphe, 28

———×———

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes
2008

Cohomologie de de Rham p-adique

"Complétion †-adique"

Alberto Arabia

Table des matières

§1. **Complétion I-adique formelle**
1.1. Topologie I-adique 2
1.1.1. Boule I-adique 2
1.1.3. Définition 3
1.2. Propriétés générales de la topologie I-adique 3
1.2.2. Séparation I-adique 5
1.3. Valuations discrètes et valeurs absolues 5
1.3.7. Valuations et valeurs absolues 7
1.4. Complétion 7
1.4.1. Condition de Cauchy 7
1.4.2. Suites de Cauchy 8
1.4.3. Suites convergentes 8
1.4.6. Topologie I-adique sur $\mathbf{Chy}(M)$ 8
1.4.11. Complété séparé I-adique formel 9
1.4.15. Séries de Cauchy 10
1.4.17. Sommabilité et critère de Cauchy pour les familles 11
1.5. Propriétés générales de la complétion I-adique formelle 14
§2. **Sur la topologie des limites projectives**
2.1. Catégorie des systèmes projectifs 17
2.1.1. Systèmes projectifs 17
2.1.2. Morphismes de systèmes projectifs 17
2.1.3. Limite projective 17
2.1.5. Foncteur $\varprojlim_n$ 18
2.2. Sur la topologie des complétions I-adiques formelles 19
2.3. Le cas des entiers p-adiques 20
2.3.1. $\mathbb{Z}_m$ comme fermé totalement discontinu dans $[\![0,1]\!]$ 20
2.3.3. Arbre des entiers m-adiques 20
2.3.4. Intégrité de $\mathbb{Z}_m$ 21
2.3.5. Anneaux de valuation discrète 21
2.3.6. Prolongement de la valuation p-adique 22
§3. **Remarques sur la cohomologie de de Rham en caractéristique zéro**
3.1. Cohomologies de de Rham associés à des ouverts principaux de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ 22
3.1.1. Le cas $\tilde{P}=1$ 22
3.1.2. Le cas $\tilde{P}=1+pX$ 23
3.1.3. Les anneaux de Zariski 23
3.1.7. La convergence faible 24
3.1.12. Heuristique autour du rayon de convergence 25
3.1.16. Rayon et domaine de convergence 26
§4. **Complétion †-adique**
4.1. Complété †-adique des algèbres 27
4.1.1. Définition 27
4.1.7. Algèbres faiblement completes 31
4.2. Complétion †-adique des algèbres de type fini 31
4.3. Propriétés générales de la complétion †-adique 31

§5. **Cohomologie de de Rham †-adique des algèbres**
5.1. Foncteurs complexe et cohomologie de Rham †-adique 33
5.1.1. Exemple : cohomologie de de Rham p-adique d'un ouvert principal de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}_p}$ 33
5.1.3. Un petit théorème de comparaison 34
5.2. Homotopie de morphismes 35
5.2.1. Les cas topologique et différentiel 35
5.2.2. Le cas algébrique affine 35
5.2.3. Le cas des complétés 35
5.2.4. Théorème d'homotopie 35
§6. **Cohomologie de de Rham †-adique des schémas affines en caractéristique positive**
6.1. Esquisse 37
6.2. Foncteur de cohomologie de de Rham †-adique 38
6.0.4. Nombres de Betti 38
§7. **Références bibliographiques**
§8. **Index terminologique**

§1. Complétion $\boldsymbol{I}$-adique formelle

Dans ces notes le couple $(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ désigne toujours un anneau commutatif unitaire $\boldsymbol{R}$ et un idéal $\boldsymbol{I}\subseteq\boldsymbol{R}$.

1.1 Topologie $\boldsymbol{I}$-adique

Nous montrons comment à partir de la simple donnée d'un idéal $\boldsymbol{I}\subseteq\boldsymbol{R}$ il est possible de munir les $\boldsymbol{R}$-modules (resp. $\boldsymbol{R}$-algèbres) d'une topologie «*la topologie $\boldsymbol{I}$-adique*» rendant les opérations internes (somme, produit) ainsi que leurs morphismes continus.

1.1.1. Boule $\boldsymbol{I}$-adique. Soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{R}$-module. Pour tout $x\in\boldsymbol{M}$ et $r\in\mathbb{N}$, on appelle «*boule $\boldsymbol{I}$-adique de centre x et d'ordre r dans $\boldsymbol{M}$*», l'ensemble

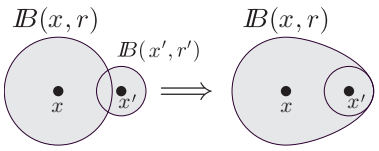
$$\boxed{\mathbb{B}(x;r):=x+\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}}$$

1.1.2. Proposition

a) *Le grosses boules absorbent les petites. Autrement dit, si $r\leqslant r'$ et si $\mathbb{B}(x;r)\cap\mathbb{B}(x';r')\neq\varnothing$ alors $\mathbb{B}(x;r)\supseteq\mathbb{B}(x';r')$.*

b) *Une intersection finie non vide de boules est une boule.*

c) *Les réunions des boules $\boldsymbol{I}$-adiques d'un $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ constituent les ouverts d'une topologie sur $\boldsymbol{M}$.*



Démonstration. Si $x'+w'\in x+\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$, on a $x'+w'+\boldsymbol{I}^{r'}\boldsymbol{M}\in x+\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}+\boldsymbol{I}^{r'}\boldsymbol{M}$, et si en plus $w'\in\boldsymbol{I}^{r'}\boldsymbol{M}\subseteq\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$, on a bien $x'+\boldsymbol{I}^{r'}\boldsymbol{M}\subseteq x+\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$. Par conséquent, l'intersection de deux boules et soit vide, soit la boule la plus petite. Par induction, une intersection finie non vide de boules est une boule. Pour vérifier que les réunions de boules constituent une topologie il ne reste plus qu'à vérifier que $(\cup_i\mathbb{B}(x_i;r_i))\cap(\cup_j\mathbb{B}(x_j;r_j))$ est une réunion de boules. Or, par distributivité :

$$\big(\bigcup_i\mathbb{B}(x_i;r_i)\big)\bigcap\big(\bigcup_j\mathbb{B}(x_j;r_j)\big)=\bigcup_{i,j}\big(\mathbb{B}(x_i;r_i)\cap\mathbb{B}(x_j;r_j)\big)$$

et l'assertion 0b permet de conclure. ∎

1.1.3. Définition. Suite à la proposition 1.1.2-0c, on appelle «*ouvert $\boldsymbol{I}$-adique de $\boldsymbol{M}$*» toute réunion de boules $\boldsymbol{I}$-adiques et «*topologie $\boldsymbol{I}$-adique*» la topologie dont les ouverts sont les ouverts $\boldsymbol{I}$-adiques.

1.1.4. Exemples limites. Si $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{R}$ (resp. $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$), la topologie $\boldsymbol{I}$-adique de $\boldsymbol{M}$ est la topologie grossière (resp. discrète).

1.1.5. Exercice. Montrer que la topologie $\boldsymbol{I}$-adique sur $\boldsymbol{M}$ est la topologie discrète si et seulement si $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$ pour $r\gg 0$.

1.2 Propriétés générales de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique

1.2.1. Proposition. *Dans les énoncés suivants, les lettres $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ désignent des $\boldsymbol{R}$-modules munis de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique.*

a) *L'anneau $\boldsymbol{R}$ muni de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique est un anneau topologique.*

b) *Une $\boldsymbol{R}$-algèbre (resp. un $\boldsymbol{R}$-module) munie de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique est une $\boldsymbol{R}$-algèbre (resp. un $\boldsymbol{R}$-module) topologique.*

c) *Un morphisme $\boldsymbol{R}$-linéaire entre modules munis de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique est continu.*

d) *Pour tout sous-ensemble $\boldsymbol{Y}\subseteq\boldsymbol{M}$, l'*«adhérence $\boldsymbol{I}$-adique de $\boldsymbol{Y}$»*, notée $\overline{\boldsymbol{Y}}$, est l'ensemble des $x\in\boldsymbol{M}$ tels que $\mathbb{B}(x;r)\cap\boldsymbol{Y}\neq\varnothing$ pour tout $r\in\mathbb{N}$, donc*

$$\overline{\boldsymbol{Y}}=\bigcap\nolimits_{r\in\mathbb{N}}\left(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}\right)$$

e) *Une boule $\boldsymbol{I}$-adique est toujours fermée.*

f) *L'adhérence $\boldsymbol{I}$-adique de l'origine de $\boldsymbol{M}$ est l'ensemble $\bar{\boldsymbol{0}}=\bigcap_r\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$.*

g) *$\boldsymbol{M}$ est séparé (on dit aussi «$\boldsymbol{I}$-adiquement séparé»), si et seulement si $\boldsymbol{0}=\bar{\boldsymbol{0}}$. En particulier, $\boldsymbol{N}$ est fermé dans $\boldsymbol{M}$, si et seulement si $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{N}$ est séparé. Le module $\boldsymbol{M}_\sigma:=\boldsymbol{M}/\bar{\boldsymbol{0}}$ est séparé.*

h) *Si **$\boldsymbol{R}$ est noethérien et $\boldsymbol{M}$ est de type fini**.*

1) (**Artin-Rees**) *Si $\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2$ sont des sous-modules $\boldsymbol{M}$. Il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $r\geqslant k$ on a*

$$\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{N}_1\cap\boldsymbol{N}_2=\boldsymbol{I}^{r-k}(\boldsymbol{I}^k\boldsymbol{N}_1\cap\boldsymbol{N}_2)$$

2) **(Krull)** *Dans $\boldsymbol{M}$, on a $\boldsymbol{I}\bar{\boldsymbol{0}}=\bar{\boldsymbol{0}}$.*

3) **(Krull)** *Si $\boldsymbol{N}\subseteq\boldsymbol{M}$, la topologie induite sur $\boldsymbol{N}$ est la topologie $\boldsymbol{I}$-adique de $\boldsymbol{N}$.*

i) *Si $\boldsymbol{R}$ est **noethérien et intègre**, $\boldsymbol{R}$ est séparé.*

j) *Si **$\boldsymbol{R}$ est noethérien et $\boldsymbol{I}\subseteq\mathbf{Rad}(\boldsymbol{R})$*** ([1]) *(p.e. si $(\boldsymbol{R},\mathfrak{m})$ est local et que $\boldsymbol{I}\subseteq\mathfrak{m}$)*

1) *Si $\boldsymbol{M}$ est de type fini, $\boldsymbol{M}$ est séparé.*

2) *Si $\boldsymbol{M}$ est de type fini, tout sous-module de $\boldsymbol{M}$ est fermé. En particulier, tout idéal de $\boldsymbol{R}$ est fermé.*

---

[1] On rappelle que le radical (de Jacobson) d'un anneau $\boldsymbol{R}$ est l'idéal $\mathrm{Rad}(\boldsymbol{R})$ des $x\in\boldsymbol{R}$ qui opèrent comme 0 sur tout $\boldsymbol{R}$-module simple, *i.e.* sur tout $\boldsymbol{R}$-module de la forme $\boldsymbol{R}/\mathfrak{M}$ où $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $\boldsymbol{R}$. On voit aussitôt que $\mathrm{Rad}(\boldsymbol{R})=\bigcap\{\mathfrak{M}\mid\mathfrak{M}\text{ est un idéal maximal de }\boldsymbol{R}\}$. Or, x est dans tout idéal maximal, si et seulement si, $1+ax$ n'appartient à aucun idéal de $\boldsymbol{R}$. En effet, la nécessité étant claire, si $x\notin\mathfrak{M}$, on a $\boldsymbol{R}=(x)+\mathfrak{M}$ par maximalité de $\mathfrak{M}$ et donc $1=ax+m$ pour certains $a\in\boldsymbol{R}$ et $m\in\mathfrak{M}$, en particulier $1+ax\in\mathfrak{M}$ n'est pas inversible. Par conséquent, $\mathrm{Rad}(\boldsymbol{R})=\{x\in\boldsymbol{R}\mid 1+ax\text{ est inversible }\forall a\in\boldsymbol{R}\}$ et l'assertion «$\boldsymbol{I}\subseteq\mathrm{Rad}(\boldsymbol{R})$» est équivalente à «$1+y$ *est inversible que que soit* $y\in\boldsymbol{I}$».

3) $(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *est un* «anneau de Zariski» ([2]).
4) *Une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre de type fini* $\boldsymbol{A}$ *ainsi que son complexe de de Rham* $\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ *sont séparés.*

Indications

a,b,c) Ces énoncés affirment simplement que les opérations de somme et produits sont continues. Nous démontrons seulement le cas du produit dans une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\cdot : \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}$ et laissons les autres cas en exercice. Dans ce cas, on doit montrer que l'ensemble $\{(x,y)\mid xy\in z+\boldsymbol{I}^r\}$ est un ouvert ce qui est évident car si $xy\in z+\boldsymbol{I}^r$ alors $(x+\boldsymbol{I}^r)(y+\boldsymbol{I}^r)=xy+x\boldsymbol{I}^r+y\boldsymbol{I}^r+\boldsymbol{I}^{2r}\subseteq xy+\boldsymbol{I}^r$.

d,e,f,g) 1.1.2-0a. Si $\boldsymbol{M}$ est séparé un point est toujours fermé, réciproquement si $x\neq y$ il existe une boule ouverte $\mathbb{B}$ contenant x et ne contenant pas y, or le complémentaire de $\mathbb{B}$ est ouvert par 0e.

h-1) Voir p.e. [B$_2$] ch. III § **3.1** p. 197.

h-2) Artin-Rees pour $\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}_2=\bar{\boldsymbol{0}}$ donne $\bar{\boldsymbol{0}}=\boldsymbol{I}^{r-k}\bar{\boldsymbol{0}}\subseteq\boldsymbol{I}\bar{\boldsymbol{0}}$.

h-3) Voir p.e. [B$_2$] ch. III § **3.2** p. 199.

i) On raisonne comme pour le lemme de Nakayama. Le $\boldsymbol{R}$-module $\bar{\boldsymbol{0}}$ est de type fini de système de générateurs $\{x_1,\dots,x_r\}$ et l'on a $\bar{\boldsymbol{0}}=\boldsymbol{I}\bar{\boldsymbol{0}}$ (0h-02) ; il existe alors des éléments $\alpha_{i,j}\in\boldsymbol{I}$ tels que $x_i=\alpha_{i,1}x_1+\cdots+\alpha_{i,r}x_r$. On a donc en écriture matricielle

$$\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}1-\alpha_{1,1} & -\alpha_{1,2} & \cdots & -\alpha_{1,r}\\ -\alpha_{2,1} & 1-\alpha_{2,2} & \cdots & -\alpha_{2,r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\alpha_{r,1} & -\alpha_{r,2} & \cdots & 1-\alpha_{r,r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_x\end{pmatrix},$$

et si nous multiplions à gauche par la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \alpha_{2,1} & 1-\alpha_{1,1} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{r,1} & 0 & 0 & \cdots & 1-\alpha_{1,1}\end{pmatrix},$$

nous obtenons l'égalité

$$\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}1-\beta_{1,1} & -\beta_{1,2} & \cdots & -\beta_{1,r}\\ 0 & 1-\beta_{2,2} & \cdots & -\beta_{2,r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & -\beta_{r,2} & \cdots & 1-\beta_{r,r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_x\end{pmatrix},$$

avec $\beta_{i,j}\in\boldsymbol{I}$ puisque $\boldsymbol{I}$ est un idéal et que $1+\boldsymbol{I}$ est stable par multiplication. L'itération de cette idée est le procédé de «*trigonalisation*» des matrices dans les anneaux ; il produit, après r étapes, une famille d'éléments $\gamma_{i,j}\in\boldsymbol{I}$ tels que

$$\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}1-\gamma_{1,1} & -\gamma_{1,2} & \cdots & -\gamma_{1,r}\\ 0 & 1-\gamma_{2,2} & \cdots & -\gamma_{2,r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1-\gamma_{r,r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_x\end{pmatrix},$$

[2] Le couple $(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ est ainsi appelé lorsque $\boldsymbol{R}$ est noethérien et que ses idéaux sont $\boldsymbol{I}$-adiquement fermés. Cette dernière propriété équivaut à $\boldsymbol{I}\subseteq\mathrm{Rad}(\boldsymbol{R})$; 0j-02 montre la suffisance, réciproquement, si $\boldsymbol{I}\not\subseteq\mathrm{Rad}(\boldsymbol{R})$, il existe $\mathfrak{M}$ maximal tel que $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}+\mathfrak{M}$, auquel cas $1\in\boldsymbol{I}$ mod $\mathfrak{M}$ et $\boldsymbol{R}/\mathfrak{M}$ n'est pas $\boldsymbol{I}$-adiquement séparé car alors $\boldsymbol{I}^r(\boldsymbol{R}/\mathfrak{M})=\boldsymbol{R}/\mathfrak{M}$ pour tout $r\in\mathbb{N}$, et donc $\bigcap_n\boldsymbol{I}^r(\boldsymbol{R}/\mathfrak{M})=\boldsymbol{R}/\mathfrak{M}\neq 0$.

avec des coefficients sous la diagonale tous nuls.

Si nous posons maintenant $1-\gamma := (1-\gamma_{1,1})\cdots(1-\gamma_{r,r})$, on a $\gamma \in \boldsymbol{I}$ et

$$(1-\gamma)\, x_i = 0\,, \quad \forall i = 1,\dots,r\,. \tag{$\diamond$}$$

par conséquent, si $\boldsymbol{R}$ est intègre, on a $x_i = 0$ (car $1-\gamma \neq 0$) et donc $\overline{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$.

j-1) Le raisonnement précédent s'applique jusqu'à l'égalité ($\diamond$), on conclut puisque $1-\gamma$ est inversible.

j-2,3) Si $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{M}$, notons $\nu : \boldsymbol{M} \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}/\boldsymbol{N}$ la surjection canonique. Le quotient $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{N}$ est séparé d'après l'assertion précédente et alors $\overline{\boldsymbol{N}} = \nu^{-1}(\overline{\mathbf{0}}) = \nu^{-1}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{N}$.

j-4) Si $\boldsymbol{A}$ est de type fini, $\boldsymbol{A}$ est noethérienne et $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est un $\boldsymbol{A}$-module de type fini. ∎

1.2.2. Séparation $\boldsymbol{I}$-adique. Soit **Top** la catégorie des espace topologiques et $\mathbf{Top}_\sigma$ la sous-catégorie pleine des espaces topologiques *séparés*. Le foncteur l'inclusion de catégories $\iota : \mathbf{Top}_\sigma \rightsquigarrow \mathbf{Top}$ admet un adjoint à gauche $(_)_\sigma : \mathbf{Top} \rightsquigarrow \mathbf{Top}_\sigma$; il fait correspondre à un espace topologique $\boldsymbol{T}$ son séparé $\boldsymbol{T}_\sigma$, quotient $\boldsymbol{T}$ par la relation d'équivalence (le vérifier) qui identifie deux points $t_1, t_2 \in \boldsymbol{T}$ lorsque pour toute application continue $f : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{S}$ avec $\boldsymbol{S}$ séparé, on a $f(t_1) = f(t_2)$. Notons $\mathcal{R}$ cette relation. Il est immédiat que $\boldsymbol{T}_\sigma$ est séparé (le vérifier) et que la surjection canonique $\boldsymbol{T} \twoheadrightarrow \boldsymbol{T}/\mathcal{R}$ factorise toute application continue de $\boldsymbol{T}$ vers un espace séparé. On a donc bien

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{Top}}(\boldsymbol{T}, \iota\boldsymbol{S}) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{Top}_\sigma}(\boldsymbol{T}_\sigma, \boldsymbol{S})$$

Dans le cadre des topologies $\boldsymbol{I}$-adiques l'espace $\boldsymbol{M}/\overline{\mathbf{0}}$ est séparé (1.2.1-0g) et pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{S}$ avec $\boldsymbol{S}$ séparé, on a bien $\overline{\mathbf{0}} \subseteq \ker(f)$. Par conséquent, la surjection $\boldsymbol{M} \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}/\overline{\mathbf{0}}$ représente «*le séparé $\boldsymbol{M}_\sigma$ de $\boldsymbol{M}$*». En particulier,

1.2.3. Proposition. *Un morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules $\varphi : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{M}$ induit un* ***isomorphisme*** *$\varphi_\sigma : \boldsymbol{N}_\sigma \to \boldsymbol{M}_\sigma$, si et seulement si l'application induite $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\varphi; \boldsymbol{S}) : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{S}) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{S})$ est bijective pour tout $\boldsymbol{R}$-module séparé $\boldsymbol{S}$.*

1.3 Valuations discrètes et valeurs absolues

Un $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ est «*filtré*» par la suite décroissante de ses boules $\boldsymbol{I}$-adiques

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 \supseteq \boldsymbol{I}\boldsymbol{M} \supseteq \boldsymbol{I}^2\boldsymbol{M} \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M} \supseteq \cdots$$

et pour chaque $m \in \boldsymbol{M}$, on appelé «*l'ordre $\boldsymbol{I}$-adique de m*», noté $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(m)$, la borne supérieure dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble $\{r \in \mathbb{N} \mid m \in \boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}\}$. L'ordre $\boldsymbol{I}$-adique vérifie les propriétés suivantes :

O-i) $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(_) : \boldsymbol{M} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

O-ii) $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(xm) \geqslant \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(x) + \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(m)$, pour tout $x \in \boldsymbol{R}$ et $m \in \boldsymbol{M}$.

O-iii) $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(m) = +\infty$, si et seulement si $m \in \overline{\mathbf{0}}$.

O-iv) $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(m_1 + m_2) \geqslant \inf(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(m_1), \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(m_2))$.

On peut alors considérer pour tout nombre réel $s > 1$, l'application

$$\boxed{|_|_s : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}\,, \quad |m|_s := s^{-\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(m)}}$$

Elle vérifie :

i) $|_|_s : \boldsymbol{M} \to [\![0,1]\!] \subseteq \mathbb{R}$.

ii) $|m|_s = 0$, si et seulement si $m \in \bar{\mathbf{0}}$.

iii) $|xm|_s \leqslant |x|_s\,|m|_s$, pour tout $x \in \boldsymbol{R}$ et $m \in \boldsymbol{M}$.

iv) $|m_1 + m_2|_s \leqslant \sup(|m_1|_s, |m_2|_s)$.

1.3.1. Lorsque $\boldsymbol{M}$ est $\boldsymbol{I}$-adiquement séparé, la condition (ii) devient

ii') $|m|_s = 0$, si et seulement si $m = 0$.

et l'application

$$d_s : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \quad d_s(m_1, m_2) := |m_1 - m_2|_s$$

vérifie les conditions d'une distance sur $\boldsymbol{M}$:

D-i) distance bornée : $d_s(m_1, m_2) \leqslant 1$.

D-ii) symétrie : $d_s(m_1, m_2) = d_s(m_2, m_1)$.

D-iii) séparation : $d_s(m_1, m_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; m_1 = m_2$.

D-iv) inégalité triangulaire : $d_s(m_1, m_3) \leqslant d_s(m_1, m_2) + d_s(m_2, m_3)$.

et même l'inégalité plus forte

$$\boxed{d_s(m_1, m_3) \leqslant \sup(d_s(m_1, m_2), d_s(m_2, m_3))}$$

qui fait de d_s une «*distance ultramétrique*» ou «*non archimédienne*»

1.3.2. Commentaire. Dans l'axiomatique de Hilbert de la géométrie euclidienne le premier axiome de continuité (axiome IV.1) est l'axiome d'Archimède qui affirme : «*Pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande*». Dans le cas d'une métrique non archimédienne le fait de prolonger indéfiniment un segment ne fait pas croître sa longueur. Ainsi par exemple, étant donnée une suite de points $\{m_0, m_1, \ldots, m_r\}$ l'inégalité triangulaire établit que $d(m_0, m_r) \leqslant \sum_{i=0}^{r-1} d(m_i, m_{i+1})$, l'égalité pouvant être atteinte ; par contre, dans le cas non archimédien on a $d(m_0, m_r) \leqslant \sup\big\{d(m_i, m_{i+1}) \;\big|\; 0 \leqslant i \leqslant r-1\big\}$ et le fait de rajouter de petits segments n'a pas d'effet sur la distance finale, quel que soit leur nombre.

1.3.3. Exercice. Montrer que dans un espace muni d'une distance ultramétrique tout triangle est isocèles.

Les observations de 1.3.1 prouvent la proposition suivante.

1.3.4. Proposition. *La topologie $\boldsymbol{I}$-adique sur $\boldsymbol{M}$ est définie par un* «écart» *borné par* 1 ([3]). *Le séparé $\boldsymbol{I}$-adique $\boldsymbol{M}_\sigma$ de $\boldsymbol{M}$ est un espace* «métrique».

[3] On appelle «*écart*» sur un ensemble $\boldsymbol{E}$ une application $\boldsymbol{e} : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant

• $\boldsymbol{e}(x,x) = 0$, • $\boldsymbol{e}(x,y) = \boldsymbol{e}(y,x)$, • $\boldsymbol{e}(x,z) \leqslant \boldsymbol{e}(x,y) + \boldsymbol{e}(y,z)$ (inégalité triangulaire).

Un écart est une «*distance*» si, de plus, • $\boldsymbol{e}(x,y) < +\infty$ et • $\big(x \neq y \Rightarrow \boldsymbol{e}(x,y) \neq 0\big)$ $(*)$. Dans un ensemble $\boldsymbol{E}$ muni d'un écart $\boldsymbol{e}$, on appelle «*boule ouverte centrée en $x \in \boldsymbol{E}$ de rayon R*» l'ensemble $\mathbb{B}_{\boldsymbol{e}}(x,R) = \{y \in \boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{e}(x,y) < R\}$. L'inégalité triangulaire suffit alors pour prouver que l'intersection de deux boules est une réunion de boules, et donc que les réunions de boules constituent les ouverts d'une topologie. Bien entendu, cette topologie n'est séparée que si $(*)$ est vérifiée. Lorsque $\boldsymbol{E}$ est un groupe abélien muni d'une application sous-additive $|_| : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$, *i.e.* telle que $|x+y| \leqslant |x| + |y|$, l'application $\boldsymbol{e} : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$, $\boldsymbol{e}(x,y) = |x-y|$, est un écart.

1.3.5. Remarque. Le fait que $\boldsymbol{M}/\overline{\mathbf{0}}$ est un espace topologique séparé apparaît donc aussi comme conséquence de 1.3.4 (*cf.* 1.2.1-0g).

1.3.6. Remarque et notation. On rappelle que deux distances sur un ensemble $\boldsymbol{E}$ sont dites « *équivalentes* » lorsqu'elles définissent la même topologie. Il est facile de voir que les distances ultramétriques d_s sont toutes équivalentes bien qu'elles ne soient pas « *commensurables* », *i.e.* il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $d_{s_1} \leqslant C d_{s_2}$ et $d_{s_2} \leqslant C d_{s_1}$ (le vérifier !) ([4]). Dans la suite on notera de manière générique $|_|$ l'une des applications $|_|_s : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$ lorsque la précision de la valeur s sera inutile.

1.3.7. Valuations et valeurs absolues. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{I}$-adiquement séparée. Lorsque l'application $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}} : \boldsymbol{A}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ est **additive** et pas seulement suradditive, *i.e.* lorsque l'on a une égalité

$$\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(ab) = \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a) + \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(b) \quad \forall a, b \in \boldsymbol{A}\backslash\{0\}\,, \tag{1}$$

l'application ordre est une « *valuation* » et est notée $v_{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{A}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$, les applications $|_|_s : \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ qui s'en déduisent sont alors appelées des « *valeurs absolues* » ; elles vérifient donc :

V-i) $|_|_s : \boldsymbol{A} \to [\![0, 1]\!] \subseteq \mathbb{R}$.

V-ii) $|a|_s = 0$, si et seulement si $a = 0$.

V-iii) $|ab|_s = |a|_s\,|b|_s\,,\ \forall a, b \in \boldsymbol{A}$.

V-iv) $|a + b|_s \leqslant \sup(|a|_s, |b|_s)$.

1.3.8. Exercice. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{I}$-adiquement séparée. Montrer que les conditions suivantes sont nécessaires pour que l'application $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(_) : \boldsymbol{A} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ soit une valuation :

(i) $\boldsymbol{A}$ est intègre. (ii) $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}$ est un idéal premier.

1.3.9. Exercice. Soit p un nombre premier, notons $\boldsymbol{I} := \langle p \rangle$ et munissons $\mathbb{Z}$ de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. Montrer que l'application $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}} : \mathbb{Z}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ est une valuation ; notons-la v_p. Pour m premier à p, montrer l'égalité

$$v_p((p^r m)!) = p^{r-1} m + v_p((p^{r-1} m)!)\,.$$

En déduire, pour $m \in \mathbb{Z}$ non nul :

$$v_p(m!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor,$$

puis

$$v_p(p^r!) = \frac{p^r - 1}{p - 1}\,, \quad \text{et donc aussi} \quad v_p(m!) = \frac{p^{\lfloor \log_p(m) \rfloor} - 1}{p - 1}\,.$$

1.4 Complétion

1.4.1. Condition de Cauchy. Commençons par rappeler que dans le cas des espaces vectoriels réels normés $(V; \|_\|)$ la complétion consiste à passer de l'espace des vecteurs à celui des suites de vecteurs vérifiant une condition de pseudo-convergence, « *le critère de Cauchy* » qui affirme, pour

[4] À la différence des espaces vectoriels réels ou complexes normés où deux normes sont équivalentes si et seulement si elles sont commensurables.

une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

« *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que pour tous* $n_1, n_2 \geqslant N_\varepsilon$ *on ait* $\|v_{n_1} - v_{n_2}\| < \varepsilon$ ».

Dans le cas non archimédien (*cf.* 1.3.2) cette condition est équivalente à

$$\boxed{\text{« } \textit{Pour tout } \varepsilon > 0 \textit{ il existe } N_\varepsilon \in \mathbb{N} \textit{ tel que pour tous } n \geqslant N_\varepsilon \textit{ on ait } |v_n - v_{n+1}| < \varepsilon \text{ »}} \quad (\mathbf{Chy})$$

1.4.2. Suites de Cauchy. Étant donné un $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ muni de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique, on note $\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})$ l'ensemble des « *suites de Cauchy de* $\boldsymbol{M}$ », *i.e.* des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \boldsymbol{M}^{\mathbb{N}}$ vérifiant le critère de Cauchy sous la forme $(\mathbf{Chy})$.

1.4.3. Suites convergentes. Étant donné un $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ muni de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \boldsymbol{M}^{\mathbb{N}}$ est dite « *convergente* » de « *limite* » $x_\infty \in \boldsymbol{M}$ lorsque pour chaque $\varepsilon > 0$ donné, il existe N_ε tel que pour tout $n > N_\varepsilon$ on a $|x_n - x_\infty| < \varepsilon$. On note $\mathbf{Cv}(\boldsymbol{M})$ l'ensemble des suites convergentes et $\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M})$ celui des suites convergentes de limite 0. On a des inclusions de $\boldsymbol{R}$-modules

$$\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M}) \subseteq \mathbf{Cv}(\boldsymbol{M}) \subseteq \mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})\,.$$

1.4.4. Exercice. Montrer que si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy, la suite de nombres réels $(|x_n|)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy et, ou bien elle est stationnaire (1.3.3), ou bien converge vers zéro.

1.4.5. Exercice. La suite constante de terme général $x \in \boldsymbol{M}$ converge vers zéro si et seulement si $x \in \bar{\mathbf{0}}$.

1.4.6. Topologie $\boldsymbol{I}$-adique sur $\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})$. On rappelle qu'une conséquence classique de la « *sous-additivité* » $|x_1 + x_2| \leqslant |x_1| + |x_2|$ est l'inégalité

$$\big||x_1| - |x_2|\big| \leqslant |x_1 - x_2|\,,$$

qui dit que l'application $|_| : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}_+$ est 1-lipschitzienne, donc continue, et qu'elle transforme suite de Cauchy de $\boldsymbol{M}$ en suite de Cauchy, **donc convergente**, de $\mathbb{R}$. On pose alors

$$\boxed{\|_\| : \mathbf{Chy}(\boldsymbol{M}) \to \mathbb{R}\,, \quad \|(x_n)_{n\geqslant 0}\| = \varinjlim{}_n\, |x_n| \in [\![0,1]\!]}$$

et l'on constate aussitôt les propriétés suivantes

i) $\|_\| : \mathbf{Chy}(\boldsymbol{M}) \to [\![0,1]\!] \subseteq \mathbb{R}$;

ii) $\|(x_n)_{n\geqslant 0}\| = 0$, si et seulement si $(x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbf{Cv}_0$;

iii) $\|a(x_n)_{n\geqslant 0}\| = |a|\,\|(x_n)_{n\geqslant 0}\|$, $\forall a \in \boldsymbol{R}$, $\forall (x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})$;

iv) $\|(x_n)_{n\geqslant 0} + (y_n)_{n\geqslant 0}\| \leqslant \sup(\|(x_n)_{n\geqslant 0}\|, \|(y_n)_{n\geqslant 0}\|)$;

qui nous conduisent à munir $\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})$ de la topologie associée à l'écart défini par $\|_\|$ suivant le procédé (standard) de ([3]) (p. 6). Notons $(\mathbf{Chy}; \|_\|)$ cet espace topologique. Il est immédiat de constater que l'application $\|_\|$ passe au quotient $\|_\| : \mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})/\,\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M}) \to [\![0,1]\!]$ où elle induit une structure d'espace **métrique**.

1.4.7. Exercice. Montrer que les applications $\|_\| : \mathbf{Chy}(\boldsymbol{M}) \to [\![0,1]\!]$ et $|_| : \boldsymbol{M} \to [\![0,1]\!]$ ont même image.

1.4.8. Proposition. *L'identité* $\big(\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})/\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M});|_|\big) \to \big(\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})/\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M});\|_\|\big)$ *est continue. En particulier,* $\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})/\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M})$ *est* $\boldsymbol{I}$*-adiquement séparé.*

Démonstration. Pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ du $\boldsymbol{R}$-module $\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})$ on a $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}((x_n)_{n\geqslant 0}) \leqslant \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(x_m)$, pour tout $m\in\mathbb{N}$. On en déduit l'inégalité $|_| \geqslant \|_\|$ sur $\mathbf{Chy}_0(\boldsymbol{M})/\mathbf{Cv}(\boldsymbol{M})_0$ et l'application en question est 1-lipschitzienne. ∎

1.4.9. Remarque. Nous verrons plus tard que l'on a $\|_\| = |_|$ (*cf.* 1.5.1-(c)).

1.4.10. Commentaire. Un $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ est dit «*complet*» lorsque ses séries de Cauchy convergent. Notons $\mathrm{Cmp}(\boldsymbol{R})$ la catégorie de tels modules et $\iota : \mathrm{Cmp}(\boldsymbol{R}) \subseteq \mathrm{Mod}(\boldsymbol{R})$ le foncteur d'inclusion. Le $\boldsymbol{R}$-module $\widehat{\boldsymbol{M}} := \mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})/\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M})$, complet *par construction*, est universel en ce sens que le foncteur $\boldsymbol{M} \rightsquigarrow \widehat{\boldsymbol{M}}$, dit «*de complétion*», est adjoint à gauche de ι. La proposition 1.4.8 établit que $\widehat{\boldsymbol{M}}$ est séparé, mais cette propriété est particulière au contexte $\boldsymbol{I}$-adique, en effet sur la catégorie des groupes abéliens filtrés généraux, le foncteur de complétion peut produire des espaces non séparés (*cf.* [B$_2$] III §**2.12** et [J] §**7.17** p. 455). Dans tous les cas le complété séparé d'un groupe abélien filtré $\boldsymbol{M}_*$ est $\varprojlim_n \boldsymbol{M}/\boldsymbol{M}_n$ (*cf.* 1.5.1-(d)).

1.4.11. Complété séparé $\boldsymbol{I}$-adique formel. On appelle «*complété (séparé) du $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ (pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique)*» le $\boldsymbol{R}$-module

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{M}} := \frac{\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})}{\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M})}}$$

La proposition suivante est de vérification immédiate.

1.4.12. Proposition

a) *L'application qui fait correspondre à $m\in\boldsymbol{M}$ la suite* «constante» $(m_n \mid m_n = m)_{n\geqslant 0}$ *est une injection de $\boldsymbol{R}$-modules $\boldsymbol{M}\to\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})$ induisant une injection de $\boldsymbol{R}$-modules $\boldsymbol{I}$-adiquement séparés*

$$\iota(\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M}_\sigma \xrightarrow[\subseteq]{} \widehat{\boldsymbol{M}}$$

b) *Un morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules $\varphi : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$, induit par son action terme à terme un morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules entre les modules des suites $\varphi^{\mathbb{N}} : \boldsymbol{M}_1^{\mathbb{N}} \to \boldsymbol{M}_2^{\mathbb{N}}$ induisant un morphisme $\widehat{\varphi} : \widehat{\boldsymbol{M}}_1 \to \widehat{\boldsymbol{M}}_2$. On a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{M}_{1,\sigma} & \xrightarrow{\iota(\boldsymbol{M}_1)} & \widehat{\boldsymbol{M}}_{1,\sigma} \\ {\scriptstyle\varphi_\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\widehat{\varphi}} \\ \boldsymbol{M}_{2,\sigma} & \xrightarrow{\iota(\boldsymbol{M}_2)} & \widehat{\boldsymbol{M}}_{2,\sigma} \end{array}$$

De plus, si $\varphi : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$ est surjectif, le morphisme $\widehat{\varphi} : \widehat{\boldsymbol{M}}_1 \to \widehat{\boldsymbol{M}}_2$ est surjectif. En particulier, un module $\boldsymbol{I}$-adiquement complet et séparé est le quotient du complété (séparé) $\boldsymbol{I}$-adique d'un $\boldsymbol{R}$-module libre.

c) *Si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre, la multiplication terme à terme est une opération interne dans les modules $\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{A})$, $\mathbf{Cv}(\boldsymbol{A})$ et $\mathbf{Chy}(\boldsymbol{A})$ qui fait de $\mathbf{Cv}(\boldsymbol{A})\subseteq\mathbf{Chy}(\boldsymbol{A})$ une inclusion d'anneaux dont $\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{A})$ est un idéal. L'application canonique* 0a *induit une injection de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{I}$-*

adiquement séparées

$$\boxed{\iota(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A}_\sigma \longrightarrow \widehat{\boldsymbol{A}} := \frac{\mathbf{Chy}(\boldsymbol{A})}{\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{A})}}$$

d) *Un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\varphi : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$, induit par son action terme à terme un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres entre les algèbres de suites $\varphi^{\mathbb{N}} : \boldsymbol{A}_1^{\mathbb{N}} \to \boldsymbol{A}_2^{\mathbb{N}}$ induisant un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\widehat{\varphi} : \widehat{\boldsymbol{A}}_1 \to \widehat{\boldsymbol{A}}_2$. On a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}_{1,\sigma} & \xrightarrow{\iota(\boldsymbol{A}_1)} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{1,\sigma} \\ {\scriptstyle\varphi_\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\widehat{\varphi}} \\ \boldsymbol{A}_{2,\sigma} & \xrightarrow{\iota(\boldsymbol{A}_2)} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{2,\sigma} \end{array}$$

De plus, si $\varphi : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$ est surjectif, le morphisme $\widehat{\varphi} : \widehat{\boldsymbol{A}}_1 \to \widehat{\boldsymbol{A}}_2$ est surjectif. En particulier, une algèbre $\boldsymbol{I}$-adiquement complète et séparée est le quotient du complété (séparé) $\boldsymbol{I}$-adique $\boldsymbol{R}[\overline{X}]\widehat{\ }$ d'une algèbre de polynômes $\boldsymbol{R}[\overline{X}]$.

Indication. Dans (c) il faut vérifier que le produit de deux suites de Cauchy est une suite de Cauchy et que les suites qui convergent vers zéro constituent un idéal de $\widehat{\boldsymbol{A}}$. Or, si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ sont des suites de Cauchy de $\boldsymbol{A}$, on a

$$|x_n y_n| \leqslant |x_n||y_n| \quad \text{et} \quad \begin{cases} |x_{n+1}y_{n+1} - x_n y_n| = |(x_{n+1}y_{n+1} - x_{n+1}y_n) + (x_{n+1}y_n - x_n y_n)| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant |x_{n+1}||y_{n+1} - y_n| + |x_{n+1} - x_n||y_n| \end{cases}$$

et les vérifications sont immédiates puisque $|_| \leqslant 1$. ∎

1.4.13. Corollaire. *La correspondance $\widehat{(_)} : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{R})$ (resp. $\widehat{(_)} : \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$)*

$$\boldsymbol{M} \rightsquigarrow \widehat{\boldsymbol{M}}, \qquad (\varphi : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2) \rightsquigarrow (\widehat{\varphi} : \widehat{\boldsymbol{M}}_1 \to \widehat{\boldsymbol{M}}_2)$$

est fonctorielle covariante ; c'est le foncteur de «complétion ($\boldsymbol{I}$-adique) formelle».

L'inclusion $\iota(_) : (_)_\sigma \subseteq \widehat{(_)}$ est fonctorielle.

1.4.14. Exercice. On suppose $\boldsymbol{R}$ noethérien. Soit $\varphi : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{M}$ une injection de $\boldsymbol{R}$-modules où $\boldsymbol{M}$ est supposé de type fini. On munit $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{M}$ de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy (resp. convergente) de $\boldsymbol{N}$, si et seulement si $(\varphi(x_n))_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy (resp. convergente) de $\boldsymbol{M}$. En particulier l'application $\widehat{\varphi} : \widehat{\boldsymbol{N}} \to \widehat{\boldsymbol{M}}$, $(x_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (\varphi(x_n))_{n\geqslant 0}$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules **injectif**. (*Indication :* 1.2.1-0h-03.)

1.4.15. Séries de Cauchy. Par la notion de «*série*», on étend la notion de «*somme finie*» à celle de «*somme dénombrable ordonnée*». L'expression «*série de terme général x_n*», notée $\sum_{n\geqslant 0} x_n$, est un raccourci pour «*suite des sommes partielles*» $(s_n)_{n\geqslant 0}$ avec $s_n = x_0 + \cdots + x_n$. Cette correspondance entre «*série*» et «*suite*» est clairement bijective dans un groupe abélien. La série est dite «*de Cauchy*» lorsque la suite correspondante l'est. Le critère de Cauchy pour les suites d'un un espace non archimédien (1.4.1) se traduit en un critère encore plus simple pour les séries. En effet,

$$\boxed{\text{«}\textit{La série } \textstyle\sum_{n\geqslant 0} x_n \textit{ est de Cauchy, si et seulement si } |x_n| \textit{ tend vers zéro.}\text{»}}$$

Une série est dite «*convergente (de somme s)*» lorsque la suite des sommes partielles est conver-

gente (de limite s). Une série convergente est toujours de Cauchy, la réciproque étant la caractéristique des espaces dits «*complets*». La proposition suivante est la traduction en termes de séries de la définition de «*complété (séparé)*» 1.4.11.

1.4.16. Proposition. *Pour tout $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$, le complété (séparé) $\boldsymbol{I}$-adique $\widehat{\boldsymbol{M}}$ est le module des séries de Cauchy de $\boldsymbol{M}$ modulo les séries qui convergent vers 0.*

1.4.17. Sommabilité et critère de Cauchy pour les familles. Les notions de *série convergente* et de *séries de Cauchy* admettent une formulation indépendante de l'ordre et du cardinal de l'ensemble des termes de la série. Soient $\mathfrak{A}$ un ensemble et $\{x_\mathfrak{a}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ une famille d'éléments d'un espace valué,

- La famille $\{x_\mathfrak{a}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ est «*sommable de somme s*» lorsque pour tout $\varepsilon>0$ il existe une partie finie $F(\varepsilon)\subseteq\mathfrak{A}$ telle que pour toute partie finie $F'\supseteq F(\varepsilon)$ on ait $\left|s-\sum_{\mathfrak{a}\in F'}x_\mathfrak{a}\right|<\varepsilon$.
- La famille $\{x_\mathfrak{a}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ «*est de Cauchy*» lorsque pour tout $\varepsilon>0$ il existe une partie finie $F(\varepsilon)\subseteq\mathfrak{A}$ telle que pour toute partie finie $\boldsymbol{K}\subseteq\mathfrak{A}$ vérifiant $\boldsymbol{K}\cap F(\varepsilon)=\varnothing$ on ait $\left|\sum_{\mathfrak{a}\in\boldsymbol{K}}x_\mathfrak{a}\right|<\varepsilon$.

Bien évidemment, une famille sommable est de Cauchy. La proposition suivante résume des propriétés très utiles de ces notions lorsque $\mathfrak{A}$ est dénombrable.

1.4.18. Proposition

a) *Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille sommable de somme s (resp. de Cauchy). Pour toute partition $\mathbb{N}=\coprod_\ell \boldsymbol{F}_\ell$ où $\boldsymbol{F}_\ell$ est fini, la série $\sum_\ell s_\ell$ avec $s_\ell:=\sum_{i\in\boldsymbol{F}_\ell}x_i$ converge vers s (resp. est de Cauchy).*

b) *Soit $\boldsymbol{M}$ une $\boldsymbol{R}$-module muni de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. Pour $\ell\in\mathbb{N}$, soit $\mathcal{F}_\ell=\{x_{\ell,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de Cauchy avec $x_{\ell,n}\in\boldsymbol{I}^\ell\boldsymbol{M}$. Alors, la famille $\bigcup_\ell\mathcal{F}_\ell=\{x_{\ell,n}\}_{\ell,n}$ est de Cauchy.*

Indication

a) Pour $\epsilon>0$ donné, il existe N_ϵ tel que pour toute partie finie $\boldsymbol{F}\supseteq[\![0,N_\epsilon]\!]$ on a $\left|s-\sum_{n\in\boldsymbol{F}_\epsilon}x_n\right|<\epsilon$. Or, si m est assez grand, on a $\boldsymbol{F}_1\amalg\cdots\amalg\boldsymbol{F}_m\supseteq[\![0,N_\epsilon]\!]$ et alors

$$\left|s-\sum\nolimits_{\ell=0}^{m}s_\ell\right|=\left|s-\sum\nolimits_{n\in\boldsymbol{F}_1\amalg\cdots\amalg\boldsymbol{F}_m}x_n\right|<\epsilon\,.$$

b) Soit $\epsilon>0$. Comme les termes de $\mathcal{F}_\ell$ appartiennent à $\boldsymbol{I}^\ell\boldsymbol{M}$, il existe L tel que $|x_{\ell,n}|<\epsilon$ pour tout couple (ℓ,n) tel que $\ell>L$. Par conséquent, $\left|\sum_{\ell,n}x_{\ell,n}\right|<\epsilon$ pour **toute somme finie** avec $\ell>L$, par non archimédiannité. D'autre part, pour chaque $\ell\leqslant L$, il existe N_ℓ tel que $\left|\sum_{\ell,n}x_{\ell,n}\right|<\epsilon$ pour **toute somme finie** avec $n>N_\ell$, aussi par non archimédiannité. Ainsi, si l'on pose $N:=\sup\{N_\ell\mid\ell\leqslant L\}$ on a bien $|\sum_{(\ell,n)\in\boldsymbol{K}}x_{\ell,n}|<\epsilon$, pour toute partie finie $\boldsymbol{K}$ disjointe de $[\![0,L]\!]\times[\![0,N]\!]$. ∎

1.4.19. Exercice. Une série est $\sum_n x_n$ est «*absolument convergente*» lorsque la série de réels positifs $\sum_n|x_n|$ est convergente. Prouver que la famille $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des termes d'une série absolument convergente $\sum_{n\geqslant0}x_n$ est sommable. Donner un contrexemple à l'affirmation réciproque.

1.4.20. Exercice. Montrer qu'une sous-famille d'une famille de Cauchy est de Cauchy mais qu'une sous-famille d'une famille convergente n'est pas en général convergente (bien qu'elle soit de Cauchy et donc converge dans un espace complet). Conclure que dans un espace complet l'assertion 1.4.18-0a est vraie quelle que soit la partition de $\mathbb{N}$.

1.4.21. Proposition. *Dans un espace non archimédien il y a équivalence entre série convergente (resp. de Cauchy) et famille dénombrable sommable (resp. de Cauchy). Plus précisément, la famille $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable (resp. de Cauchy) si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ est convergente (resp. de Cauchy).*

Démonstration. Soit $z=\sum_{n\geqslant 0} x_n$. Pour $\epsilon>0$ donné, il existe N_ϵ tel que

$$\Big|z-\sum\nolimits_{n=0}^{N_\epsilon} x_n\Big|<\epsilon \quad \text{et} \quad |x_\ell|<\epsilon\,, \quad \forall \ell\geqslant N_\epsilon\,.$$

Mais alors, si $\boldsymbol{F}\subseteq\mathbb{N}$ est une partie finie telle que $\boldsymbol{F}\supseteq[\![0,N_\epsilon]\!]$, on a

$$\Big|z-\sum\nolimits_{n\in\boldsymbol{F}} x_n\Big|\leqslant \sup\Big(\Big|z-\sum\nolimits_{n=0}^{N_\epsilon} x_n\Big|, |x_\ell| \text{ avec } \ell\in\boldsymbol{F}\backslash[\![0,N_\epsilon]\!]\Big)<\epsilon\,,$$

grâce à la non archimédiannité de $|_|$. Le cas de séries de Cauchy est laissé en exercice. ∎

On en déduit le résultat utile suivant, corollaire aussi de la proposition 1.4.18, qui justifie dans son assertion (c) la terminologie d'espace «*complet*» introduite dans 1.4.11, en ce sens que le foncteur de complétion formelle laisse invariants les espaces complets.

1.4.22. Corollaire

a) *Soit $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ une série convergente de somme s dans un $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ muni de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. Soit $\amalg_{\ell\in\mathbb{N}} F_\ell$ une partition de $\mathbb{N}$ en parties finies et posons $s_\ell:=\sum_{n\in F_\ell} x_n$. Alors, la série $\sum_{\ell\geqslant 0} s_\ell$ est convergente de même somme s.*

b) *Les éléments de $\widehat{\boldsymbol{M}}$ sont les sommes des séries de la forme*

$$\sum\nolimits_{n\geqslant 0} x_n \text{ avec } \operatorname{ord}_{\boldsymbol{I}}(x_n)\in\{n,+\infty\}\,.$$

De plus, si l'on choisi pour chaque $n\in\mathbb{N}$ une famille $\mathcal{R}(n)\subseteq \boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M}$ de représentants dans $\boldsymbol{M}$ des classes de $\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^{n+1}\boldsymbol{M}$, un élément $z\in\widehat{\boldsymbol{M}}$ s'exprime d'une et une seule manière comme somme de série de la forme

$$\sum\nolimits_{n\geqslant 0} x_n \text{ avec } x_n\in\mathcal{R}(n)\cup\{0\}\,.$$

c) *Pour tout $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ le morphisme canonique $\iota(\widehat{\boldsymbol{M}}):\widehat{\boldsymbol{M}}\to\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}$ (1.4.12-0a) est bijectif.*

Indication

a) Par 1.4.21 et 1.4.18-0a.

b) Soit $z_0=\sum_{n\geqslant 0} x_n\in\widehat{\boldsymbol{M}}$ non nul, il existe alors n_0 tel que pour $s_0=x_0+\cdots+x_{n_0}$ on ait $|s_0|>|x_{n_0+r}|$ pour tout $r>0$. Par ultramétricité on a $|z_0|=|s_0|$ (*cf.* 1.3.3, 1.4.4) et $|s_0|>|z_0-s_0|$. On pose $z_1=z_0-s_0$. Alors, ou bien $0=z_1$, ou bien $0\neq z_1=\sum_{n>n_0} x_n$, auquel cas, l'itération du procédé donne une somme partielle s_1 vérifiant $|z_1|=|s_1|$ et $|s_1|>|z_1-s_1|$, soit

$$|z_0|=|s_0|>|s_1|>|z_0-s_0-s_1|\,.$$

Ce procédé s'arrête après un nombre fini d'itérations auquel cas z_0 s'exprime par une somme finie vérifiant la condition demandée, ou bien produit la série $\sum_n s_n$ de même somme z_0 d'après (a) et vérifiant $|s_n|>|s_{n+1}|$ pour tout n, ce qui démontre l'existence de telles séries. La fin de la preuve est aux soins du lecteur.

c) L'application $\iota(\widehat{\boldsymbol{M}})$ est injective puisque $\widehat{\boldsymbol{M}}$ est séparé (1.4.12-0a). Pour la surjectivité on se donne une série de Cauchy $\sum_{\ell\geqslant 0} z_\ell$ de $\widehat{\boldsymbol{M}}$ avec $z_\ell \in \boldsymbol{I}^\ell \widehat{\boldsymbol{M}}$, possible d'après (b) ; le terme z_ℓ est une série de Cauchy $\sum_n x_{\ell,n}$ de $\boldsymbol{I}^\ell \boldsymbol{M}$, et la famille $\{x_{\ell,n}\}_{\ell,n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy d'après 1.4.18-0b. On a donc,

$$\sum\nolimits_{\ell\geqslant 0} z_\ell = \sum\nolimits_{n\geqslant 0} x_{\varphi_n}$$

pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (1.4.21). ∎

1.4.23. Corollaire

a) *Les éléments de l'anneau $\boldsymbol{R}[\overline{X}]\widehat{}$, complété (séparé) $\boldsymbol{I}$-adique de l'anneau des polynômes $\boldsymbol{R}[\overline{X}] = \boldsymbol{R}[\{X_{\mathfrak{a}} \mid \mathfrak{a}\in\mathfrak{A}\}]$, s'écrivent d'une et d'une unique manière comme séries de la forme*

$$\sum\nolimits_{J\in\bigoplus_{\mathfrak{A}}\mathbb{N}} a_J X^J\,,\ \textit{avec } a_J \in \widehat{\boldsymbol{R}} \textit{ t.q. } \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J) \rightsquigarrow \infty, \textit{ lorsque } |J| \rightsquigarrow \infty\ ([5])\,.$$

b) *Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de système de générateurs algébriques $\{\xi_{\mathfrak{a}}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$. Les éléments de $\widehat{\boldsymbol{A}}$ s'écrivent (mais pas nécessairement de manière unique !) comme séries de la forme*

$$\sum\nolimits_{J\in\bigoplus_{\mathfrak{A}}\mathbb{N}} a_J\,\xi^J\,,\ \textit{avec } a_J \in \widehat{\boldsymbol{R}} \textit{ t.q. } \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J) \rightsquigarrow \infty, \textit{ lorsque } |J| \rightsquigarrow \infty\,.$$

Démonstration. D'après 1.4.22-0b un élément $z \in \boldsymbol{R}[\overline{X}]\widehat{}$ est la somme s'une série de polynômes $\sum_{n\geqslant 0} P_n$ où $P_n \in \boldsymbol{I}^n\boldsymbol{R}[\overline{X}]$ est une somme finie de monômes $P_n = \sum a_{n,J}X^J$ avec $a_{n,J}\in\boldsymbol{I}^n$. On remarque alors que la famille $\{a_{n,J}X^J\}_{(n,J)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^r}$ est de Cauchy puisque pour $\epsilon>0$ donné, il existe n_0 tel que $|a_{n,J}|<\epsilon$ si $n>n_0$ et si $n\leqslant n_0$ il n'y a qu'un nombre fini de monômes X^J dont les coefficients $a_{n,J}$ sont non nuls, à savoir les monômes dans les polynômes $P_0,\dots,P_{n_0}$. Par conséquent, si

$$\boldsymbol{K} \cap \Big(\llbracket 0, n_0\rrbracket \times \big\{J \bigm| |J| > \sup\{\deg(P_0),\dots,\deg(P_{n_0})\}\big\}\Big) = \varnothing$$

$|\sum_{(n,J)\in\boldsymbol{K}} a_{n,J}X^J| < \epsilon$. Les familles $\{a_{n,J}X^J\}_{n,J}$ et $\{P_n\}_n$ sont donc sommables et de même somme $z\in\boldsymbol{R}[\overline{X}]\widehat{}$ (1.4.18). De plus, pour chaque J donné, la famille $\{a_{n,J}X^J\}_n$ est une famille de Cauchy de $\boldsymbol{R}$ (1.4.20) et représente donc un élément a_J de $\widehat{\boldsymbol{R}}$. Il est alors aisé de vérifier que la famille $\{a_JX^J\}_{J\in\mathbb{N}^r}$ est de Cauchy dans $\boldsymbol{R}[\overline{X}]\widehat{}$ de somme z (laissé en exercice de même que l'unicité des décompositions). L'assertion (b) résulte de (a) modulo 1.4.12-0d. ∎

1.4.24. Exercice. Montrer qu'un élément $z\in\boldsymbol{R}[X,1/X]\widehat{}$ s'exprime sous la forme

$$z = \Big(\sum\nolimits_{n\geqslant 0} a_nX^n\Big) + \Big(\sum\nolimits_{n\geqslant 1} a_nX^{-n}\Big)$$

et que cette écriture est unique. Une telle série est appelée « *série de Laurent* ».

1.4.25. Exercice. Montrer qu'une algèbre quotient séparé d'une algèbre $\boldsymbol{I}$-adiquement complète est complète séparée

[5] Pour un multi-indice $J\in\bigoplus_{\mathfrak{A}}\mathbb{N}$, on note $X^J = X_1^{n_1}\cdots X_r^{n_r}$, puis $|J| = n_1+\cdots+n_r$. La notation $\sum_{J\in\bigoplus_{\mathfrak{A}}\mathbb{N}}$ fait alors référence à la somme d'une famille sommable d'ensemble d'indices $\bigoplus_{\mathfrak{A}}\mathbb{N}$.

1.5 Propriétés générales de la complétion $\boldsymbol{I}$-adique formelle

Le théorème suivant donne une liste de propriétés de la complétion formelle que nous retrouverons plus tard dans un autre type de complétion, la complétion faible ou †-adique (4.3.1). Ces propriétés jouent un rôle très important dans la théorie de la cohomologie de de Rham.

1.5.1. Théorème. *On suppose l'anneau $\boldsymbol{R}$ noethérien.*

a) *Les éléments de $\boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{M}}$ sont les séries de Cauchy de $\boldsymbol{M}$ à termes dans $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$.*

b) *Les morphismes naturels suivants sont bijectifs*

$$\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}} \to \operatorname{coker}\left(\widehat{\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}} \to \widehat{\boldsymbol{M}}\right) \to \frac{\widehat{\boldsymbol{M}}}{\boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{M}}}\cdot$$

En particulier $\mathbf{Gr}^*(\boldsymbol{M}) = \mathbf{Gr}^*(\widehat{\boldsymbol{M}})$ ([6]).

c) *L'application $\mathrm{id} : \left(\widehat{\boldsymbol{M}}; |_|\right) \to \left(\widehat{\boldsymbol{M}}; \|_\|\right)$ de 1.4.8 (p. 8) est une isométrie*

d) *On a un isomorphisme naturel*

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{M}} \xrightarrow[\simeq]{} \varprojlim_r \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}}}$$

e) *Si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre noethérienne et si $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{A}$-module, on a :*

- *$\widehat{({}_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{M})}$: le complété $\boldsymbol{I}$-adique formel de $\boldsymbol{M}$ en tant que $\boldsymbol{R}$-module,*
- *$\widehat{({}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M})}$: le complété $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}$-adique formel de $\boldsymbol{M}$ en tant que $\boldsymbol{A}$-module.*

Le morphisme naturel $\widehat{({}_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{M})} \to \widehat{({}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M})}$ est bijectif.

f) *Si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre noethérienne, $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est noethérienne.* ([7])

$$\boxed{\mathbf{Alg}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R}) \subseteq \mathbf{Alg}_{\mathrm{noet.}}(\boldsymbol{R}) \xrightarrow[\rightsquigarrow]{\widehat{(_)}} \mathbf{Alg}_{\mathrm{noet.}}(\widehat{\boldsymbol{R}})}$$

g) *Si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre, $\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}} \subseteq \mathrm{Rad}(\widehat{\boldsymbol{A}})$*, i.e. *$z \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ est inversible si et seulement si $\bar{z} \in \widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}}$ est inversible. De plus, si $\boldsymbol{A}$ est noethérienne, $(\widehat{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}})$ est de Zariski.*

h) *Si $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{R}$-module de type fini, le morphisme canonique $\widehat{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M} \to \widehat{\boldsymbol{M}}$ est bijectif. En particulier, $\widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{M} = \widehat{\boldsymbol{M}}$ et le foncteur*

$$\boxed{\widehat{(_)} : \mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}(\widehat{\boldsymbol{R}})}$$

est exact.

---

[6] Une «*filtration (décroissante)*» d'un $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ est la donnée d'une famille de sous-modules $\mathcal{F} := \{\boldsymbol{M}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0$ et $\boldsymbol{M}_i \supseteq \boldsymbol{M}_{i+1}$. Un module filtré se note aussi $\boldsymbol{M}_*$. La filtration est dite «*séparée*» si $\bigcap_i \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{0}$. Dans le cas des topologie $\boldsymbol{I}$-adiques ces notions s'appliquent à la filtration $\{\boldsymbol{I}^i\boldsymbol{M}\}_{i\in\mathbb{N}}$. On appelle «*module gradué associé au module filtré $\boldsymbol{M}_*$*» la somme directe $\mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{M}) := \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \boldsymbol{M}_i/\boldsymbol{M}_{i+1}$. Un «*morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules filtrés $\varphi_* : \boldsymbol{M}_* \to \boldsymbol{N}_*$*» est un morphisme $\varphi : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ qui respecte la filtration, *i.e.* $\varphi(\boldsymbol{M}_i) \subseteq \boldsymbol{N}_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Un tel morphisme induit un morphisme $\mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\varphi) : \boldsymbol{G}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{M}) \to \mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{N})$. Un «*anneau filtré*» est un $\mathbb{Z}$-module filtré par une famille de parties (idéaux) $\{\boldsymbol{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j \subseteq \boldsymbol{A}_{i+j}$. Si $\boldsymbol{A}_*$ est un anneau filtré le module $\mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{A})$ est muni d'une structure d'anneau en remarquant que si $\alpha \in \boldsymbol{A}_i/\boldsymbol{A}_{i+1}$ et $\beta \in \boldsymbol{A}_j/\boldsymbol{A}_{j+1}$ l'élément $ab \in \boldsymbol{A}_{i+j}/\boldsymbol{A}_{i+j+1}$ est indépendant des représentants $a, b \in \boldsymbol{A}$ des classes α, β, on pose donc $\alpha\cdot\beta := \overline{ab}$, et $\left(\mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{A}), 0, \bar{1} \in \boldsymbol{A}_0/\boldsymbol{A}_1, +, \cdot\right)$ est un anneau gradué, c'est «*l'anneau gradué associé à l'anneau filtré $\boldsymbol{A}_*$*».

[7] Cette assertion ne sera pas tout à fait vérifiée dans la complétion faible !

i) *Soit* $\boldsymbol{A}$ *une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre et soient* $f, g \in \boldsymbol{A}$ *tels que* $D(\bar{g}) \subseteq D(\bar{f})$ *dans* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{A})$*, il existe alors un et un unique morphisme de* $\boldsymbol{A}$*-algèbres* $\widehat{\rho}_{g,f} : \widehat{\boldsymbol{A}_f} \to \widehat{\boldsymbol{A}_g}$*. De plus, si* $\nu_f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_f$ *et* $\nu_g : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_g$ *sont les morphismes de localisation, on a* $\widehat{\nu_g} = \widehat{\rho}_{g,f} \circ \widehat{\nu_f}$*.*

j) *Si* $\boldsymbol{A}$ *est une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre de type fini, le morphisme naturel* $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{R}}$ *induit un* ***isomorphisme***

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{A}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\simeq} \big(\Omega^*_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{R}}\big)_\sigma}$$

Indications

a) Il est clair que tout élément de $\boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{M}}$ se réalise comme série de Cauchy à termes dans $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$. Réciproquement, si $\{t_1, \dots, t_\ell\}$ est un système de générateurs de $\boldsymbol{I}^r$, un élément $y \in \boldsymbol{I}^{r+t}\boldsymbol{M}$ s'écrit $\sum_{i=1}^{\ell} t_i\, y_i$ avec $y_i \in \boldsymbol{I}^t\boldsymbol{M}$ et donc $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(y_i) \geqslant \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(y) - r$. Par conséquent, une série de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ avec $x_n \in \boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$ s'écrit aussi

$$\sum\nolimits_{n\geqslant 0}\Big(\sum\nolimits_{i=1}^{\ell} t_i\, x_{n,i}\Big) = \sum\nolimits_{i=1}^{\ell} t_i\Big(\sum\nolimits_{n\geqslant 0} x_{n,i}\Big)$$

où $\sum_{n\geqslant 0} x_{n,i}$ est de Cauchy puisque $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(x_{n,i}) \geqslant (\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(x_n) - r) \rightsquigarrow +\infty$, donc $\sum_{n\geqslant 0} x_n \in \boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{M}}$.

b) L'assertion 0a montre l'égalité $\widehat{\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{M}}$ qui donne immédiatement la bijectivité de la deuxième flèche et l'injectivité de la première. Enfin, la surjectivité de $\boldsymbol{M} \to \widehat{\boldsymbol{M}}/\boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{M}}$ est claire puisque d'après 0a une série de Cauchy modulo $\boldsymbol{I}^r$ s'exprime comme somme finie d'éléments de $\boldsymbol{M}$ donc comme un élément de $\boldsymbol{M}$.

c) La proposition 1.4.8 a déjà donné l'inégalité $\|_\| \leqslant |_|$, autrement dit $\mathbb{B}_{|_|}(0;r) \subseteq \mathbb{B}_{\|_\|}(0;r)$. Réciproquement, un élément **non nul** w de $\mathbb{B}_{\|_\|}(0;r) \subseteq \widehat{\boldsymbol{M}}$ se représente par une suite de Cauchy $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de $\boldsymbol{M}$ qui ne converge pas vers zéro, et donc, telle que la suite $(|x_n|)_{n\geqslant 0}$ est stationnaire (1.4.4) et même **constante** car si $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy, la différence $(y_n)_{n\geqslant 0} - (y_{n+N})_{n\geqslant 0}$ est une suite qui converge vers zéro. L'élément w se représente donc par une suite de Cauchy à termes dans $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$, mais alors $w \in \boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{M}} = \mathbb{B}_{|_|}(0;r)$ d'après 0a. Par conséquent $\mathbb{B}_{|_|}(0;r) = \mathbb{B}_{\|_\|}(0;r)$.

d) L'assertion est équivalente à 1.4.22-0b. *Autre preuve:* — Le noyau du morphisme est $\mathbf{0} = \bigcap_r \boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{M}}$ par 0b et 0c (*cf.* aussi 1.4.8) et la surjectivité se vérifie manuellement.

e) Par 0d.

f) L'assertion 0b affirme que les anneaux $\boldsymbol{R}$ et $\widehat{\boldsymbol{R}}$, filtrés par la suite décroissante des puissance successives de $\boldsymbol{I}$, ont les mêmes graduées associés. On conclut alors à l'aide de deux résultats classiques ([8]), "*l'anneau gradué associé à un anneau noethérien est noethérien*", et "*un anneau complet et séparé est noethérien si son gradué l'est*".

g) Il suffit de vérifier que si $z \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ et $y \in \boldsymbol{I}$, l'élément $1 - yz$ est inversible. Or, la série $\sum_{n\geqslant 0}(yz)^n$ converge dans $\widehat{\boldsymbol{A}}$ (car $\widehat{\widehat{\boldsymbol{A}}} = \widehat{\boldsymbol{A}}$) et $(1-yz)\big(\sum_{n\geqslant 0}(yz)^n\big) = 1$. Ensuite, $\bar{z} \in \widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}}$ est inversible, si et seulement si, il existe $w \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ tel que $wz \in 1 + \boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}}$; or, nous avons vu que les éléments de $1 + \boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}}$ sont tous inversibles. Enfin, si $\boldsymbol{A}$ est noethérien, $\widehat{\boldsymbol{A}}$ l'est aussi (par 0f), et $(\widehat{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}})$ est bien de Zariski.

h) On procède un peu comme dans 0a. Si $\{m_1, \dots, m_r\}$ est un système de générateurs de $\boldsymbol{M}$, toute série de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^{r}\big(\sum_{n\geqslant_0} t_{i,n}\big)x_i$ avec $\big(\sum_{n\geqslant_0} t_{i,n}\big) \in \widehat{\boldsymbol{R}}$, et l'application $\widehat{\boldsymbol{R}} \otimes \boldsymbol{M} \to \widehat{\boldsymbol{M}}$ est bien surjective. Ensuite, le $\widehat{\boldsymbol{R}}$-module $\widehat{\boldsymbol{R}} \otimes \boldsymbol{M}$ est séparé puisque

[8] Voir [B$_2$] ch. III § **2.10** p. 183 et aussi [J] § **7.17** p. 456.

de type fini et que $\widehat{\boldsymbol{R}}$ est de Zariski (1.2.1-0j), mais alors et le morphisme $\widehat{\boldsymbol{R}}\otimes\boldsymbol{M}\to\widehat{\boldsymbol{M}}$ est injectif s'il en est ainsi de son gradué, ce qui est évident.

i) L'inclusion $D(\bar{f})\supseteq D(\bar{g})$ équivaut à $\sqrt{(\bar{f})}\supseteq\sqrt{(\bar{g})}$ de sorte que $\overline{f}$ est inversible dans $(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{A})_{\bar{g}}$. L'image de f par $\nu_g:\boldsymbol{A}\to\widehat{\boldsymbol{A}_g}$ est donc inversible (*cf.* 0g) d'où le morphisme induit $\rho_{g,f}:\boldsymbol{A}_f\to\widehat{\boldsymbol{A}_g}$ de complétion $\widehat{\rho}_{g,f}$.

j) D'après 0e, le séparé $\boldsymbol{I}$-adique d'un $\widehat{\boldsymbol{A}}$-module coïncide avec le séparé $\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}}$-adique. D'autre part, comme $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini, $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est un $\boldsymbol{A}$-module de type fini et donc $\widehat{\boldsymbol{A}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega^k_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est un $\widehat{\boldsymbol{A}}$-module de type fini, $\boldsymbol{I}$-adiquement séparé en plus, puisque $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est de Zariski (1.2.1-0j-01). Ainsi, l'assertion résultera, moyennant le critère de séparabilité 1.2.3, de vérifier que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\boldsymbol{A}}}(\Omega^k_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{S})\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\widehat{\boldsymbol{A}}}(\widehat{\boldsymbol{A}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega^k_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{S}) \tag{$*$}$$

induite par le morphisme canonique $\widehat{\boldsymbol{A}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\to\Omega_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{R}}$ ([9]), est bijective pour tout $\widehat{\boldsymbol{A}}$-module $\boldsymbol{I}$-adiquement séparé $\boldsymbol{S}$.

Lorsque $k=1$, la propriété d'adjonction pour le module des différentielles relatives traduit la question de bijectivité de $(*)$ en celle du morphisme canonique

$$\alpha:\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\widehat{\boldsymbol{A}};\boldsymbol{S})\longrightarrow\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{S})$$

induit par $\iota(\boldsymbol{A}):\boldsymbol{A}\to\widehat{\boldsymbol{A}}$.

Notons $\{X_1,\dots,X_n\}$ un système de générateurs de $\boldsymbol{A}$ en tant que $\boldsymbol{R}$-algèbre. Un élément de $\widehat{\boldsymbol{A}}$ s'écrit alors sous la forme $\sum_{n\geqslant0}P_n(X_1,\dots,X_n)$ avec $P_n\in\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{R}[\overline{X}]$ (*cf.* 1.4.22-0b). Ainsi, pour toute $\boldsymbol{R}$-dérivation $D:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{S}$, on a "formellement"

$$\begin{aligned}D\Big(\sum\nolimits_{n\geqslant0}P_n(X_1,\dots,X_n)\Big)&=\sum\nolimits_{n\geqslant0}D\big(P_n(X_1,\dots,X_n)\big)\\&=\sum\nolimits_{n\geqslant0}\sum\nolimits_{i=1}^{r}\frac{\partial P_n}{\partial X_i}(X_1,\dots,X_n)\,D(X_i)\\&=\sum\nolimits_{i=1}^{r}\Big(\sum\nolimits_{n\geqslant0}\frac{\partial P_n}{\partial X_i}(X_1,\dots,X_n)\Big)\,D(X_i)\end{aligned}\tag{$\diamond$}$$

où chaque terme entre parenthèses appartient bien à $\widehat{\boldsymbol{A}}$, *i.e.* est une série de Cauchy de $\boldsymbol{A}$.

L'expression $(\diamond)$ définit bien une application $\tilde{D}:\widehat{\boldsymbol{A}}\to\boldsymbol{S}$ puisque $\sum_{n\geqslant0}P_n=0$, si et seulement si, les sommes partielles $\sum_{n\geqslant0}^{r}P_n$ convergent vers 0, et cette dernière condition est évidemment préservée dans les suites des dérivées partielles $\sum_{n\geqslant0}^{r}\frac{\partial P_n}{\partial X_i}$. On vérifie ensuite que $\tilde{D}$ est $\boldsymbol{R}$-linéaire et que $\tilde{D}(z_1x_2)=z_1\tilde{D}(z_2)+z_2\tilde{D}(z_1)$. On a ainsi défini une application $\boldsymbol{R}$-linéaire

$$\beta:\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{S})\to\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\widehat{\boldsymbol{A}};\boldsymbol{S}),\quad\beta(D):=\tilde{D}.$$

La composée $\alpha\circ\beta$ est clairement l'identité, et α sera bijective si et seulement si $\beta\circ\alpha$ est injective. Or, pour $D\in\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\widehat{\boldsymbol{A}};\boldsymbol{S})$ la différence $\Delta:=\widetilde{\alpha(D)}-D$ est nulle sur l'image de $\boldsymbol{A}$ dans $\widehat{\boldsymbol{A}}$; cette image est dense dans $\widehat{\boldsymbol{A}}$, $\boldsymbol{S}$ est séparé et Δ est continue, donc $\Delta=0$ et $\beta\circ\alpha$ est l'identité. Ce qui termine la preuve de la bijectivité du morphisme $\widehat{\boldsymbol{A}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega^1_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\to(\Omega^1_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{R}})_\sigma$.

Lorsque $k>1$, on a

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega^k_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}=\widehat{\boldsymbol{A}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\bigwedge^k_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}=\bigwedge^k_{\widehat{\boldsymbol{A}}}\widehat{\boldsymbol{A}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}=\bigwedge^k_{\widehat{\boldsymbol{A}}}(\Omega_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{R}})_\sigma\to\Big(\bigwedge^k_{\widehat{\boldsymbol{A}}}\Omega_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{R}}\Big)_\sigma$$

et la flèche de droite est bijective par 1.2.3. ∎

[9] Voir les notes du cours "*Cohomologie de de Rham dans la catégorie des Schémas*" §**1.5**.

1.5.2. Exercice. Expliquer pourquoi 1.5.1-0j dit aussi que pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$ l'application naturelle $\widehat{\boldsymbol{A}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\simeq} \left(\Omega^*_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\widehat{\boldsymbol{R}}}\right)_\sigma$ est bijective. (Attention au '$\widehat{\boldsymbol{R}}$' du second membre)

1.5.3. Exercice. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre et $P \in \boldsymbol{A}[X]$. Donner des isomorphismes canoniques entre les algèbres

$$(\boldsymbol{A}[X]_P)\widehat{\ } \qquad (\widehat{\boldsymbol{A}}[X]_P)\widehat{\ } \qquad \left(((\widehat{\boldsymbol{A}}[X])\widehat{\ })_P\right)\widehat{\ }$$

1.5.4. Exercice. Soient $\boldsymbol{I}_1$ et $\boldsymbol{I}_2$ deux idéaux de $\boldsymbol{R}$ tels qu'il existe des entiers n_i avec $\boldsymbol{I}_1^{n_1} \subseteq \boldsymbol{I}_2$ et $\boldsymbol{I}_2^{n_2} \subseteq \boldsymbol{I}_1$. Montrer que pour tout $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ les complétions $\boldsymbol{I}_i$-adiques de $\boldsymbol{M}$ s'identifient canoniquement.

§2. Sur la topologie des limites projectives

2.1 Catégorie des systèmes projectifs

2.1.1. Systèmes projectifs. Dans ces notes un «*système projectif*» d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un foncteur contravariant de la catégorie $\mathbb{N}$ ([10]) vers la catégorie $\mathcal{C}$. Ainsi, un système projectif dans $\mathcal{C}$ est la donnée d'une famille d'objets $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et d'une famille de morphismes $\{\nu_n \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{X}_{n+1}, \boldsymbol{X}_n)\}_n$ ce que l'on représente plus simplement par :

$$\cdots \xrightarrow{\nu_n} \boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\nu_{n-1}} \boldsymbol{X}_{n-1} \xrightarrow{\nu_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\nu_2} \boldsymbol{X}_2 \xrightarrow{\nu_1} \boldsymbol{X}_1 \xrightarrow{\nu_0} \boldsymbol{X}_0$$

Un tel système sera noté $\{\boldsymbol{X}_n, \nu_n\}_n$.

2.1.2. Morphismes de systèmes projectifs. Un «*morphisme de systèmes projectifs*» de $\{\boldsymbol{X}_n, \nu_n\}_n$ vers $\{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$ est une famille de morphismes $\{\varphi_n \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{Y}_n)\}_n$ telle que le diagramme :

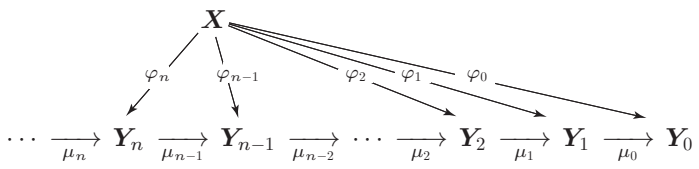
$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\nu_n} & \boldsymbol{X}_n & \xrightarrow{\nu_{n-1}} & \boldsymbol{X}_{n-1} & \xrightarrow{\nu_{n-2}} & \cdots & \xrightarrow{\nu_2} & \boldsymbol{X}_2 & \xrightarrow{\nu_1} & \boldsymbol{X}_1 & \xrightarrow{\nu_0} & \boldsymbol{X}_0 \\
 & & \varphi_n\downarrow & & \varphi_{n-1}\downarrow & & & & \varphi_2\downarrow & & \varphi_1\downarrow & & \varphi_0\downarrow \\
\cdots & \xrightarrow{\mu_n} & \boldsymbol{Y}_n & \xrightarrow{\mu_{n-1}} & \boldsymbol{Y}_{n-1} & \xrightarrow{\mu_{n-2}} & \cdots & \xrightarrow{\mu_2} & \boldsymbol{Y}_2 & \xrightarrow{\mu_1} & \boldsymbol{Y}_1 & \xrightarrow{\mu_0} & \boldsymbol{Y}_0
\end{array}$$

est commutatif.

Les systèmes projectifs d'objets de $\mathcal{C}$ et leurs morphismes constituent une catégorie, la «*catégorie des systèmes projectifs de* $\mathcal{C}$» notée $\mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})$.

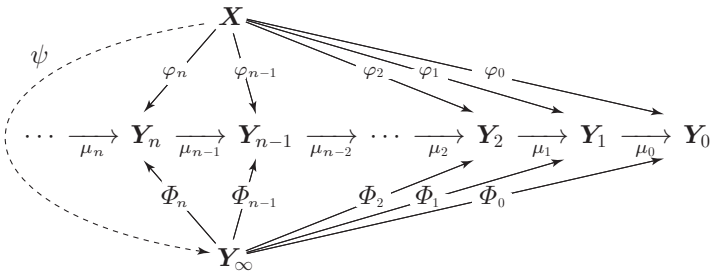
2.1.3. Limite projective. La correspondance de $\mathcal{C}$ vers $\mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})$ qui fait correspondre à un objet $\boldsymbol{X}$ le «*système projectif constant*» $\{\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{X}, \nu_n = \mathrm{id}_{\boldsymbol{X}}\}_n$ et à un morphisme $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ le «*morphisme constant*» $\{\varphi_n = \varphi\}_n$ est un foncteur covariant $\iota(_) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})$.

On appelle «*morphisme de* $\boldsymbol{X} \in \mathcal{C}$ *vers un système projectif*» $\{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$ tout morphisme de $\iota(\boldsymbol{X})$ vers $\{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$, autrement dit toute famille de morphismes $\{\varphi_n : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}_n\}_n$ telle que $\varphi_n = \mu_n \circ \varphi_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



[10] La «*catégorie associée à un ensemble partiellement ordonné* $(\boldsymbol{E}; \preccurlyeq)$» est la catégorie dont les objets sont les éléments $x \in \boldsymbol{E}$ et où $\mathrm{Mor}(x_1, x_2)$ possède un unique élément lorsque $x_1 \preccurlyeq x_2$ et est vide autrement.

On dit que le système projectif $\{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$ admet une «*limite projective*» lorsqu'il existe $\boldsymbol{Y}_\infty \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et un morphisme $\{\Phi_n\}_n : \boldsymbol{Y}_\infty \to \{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$ tels que pour tout $\boldsymbol{X} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, tout morphisme $\{\varphi_n\}_n : \boldsymbol{X} \to \{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$ se factorise à travers un et un unique morphisme $\psi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}_\infty$, *i.e.* $\varphi_n = \Phi_n \circ \psi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



La proposition suivante est immédiate

2.1.4. Proposition et notation. *Le système projectif $\{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$ admet une limite projective, si et seulement si le foncteur d'ensembles* $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})}(\iota(_), \{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n)$ *est représentable. La limite projective de $\{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$, lorsqu'elle existe est donc unique à isomorphisme canonique près, elle sera notée $\varprojlim_n \{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$ et même $\varprojlim_n \boldsymbol{Y}_n$ lorsque les morphismes $\{\mu_n\}_n$ seront sous-entendus.*

2.1.5. Foncteur $\varprojlim_n$. On dit que la catégorie $\mathcal{C}$ «*possède des limites projectives*» lorsque tout système projectif d'objets de $\mathcal{C}$ admet une limite projective. Dans ce cas on dispose du foncteur $\varprojlim_n(_) : \mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C}) \rightsquigarrow \mathcal{C}$ *adjoint à droite* du foncteur $\iota(_) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})$, autrement dit l'application naturelle

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})}(\iota(_), (_)) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}((_), \varprojlim_n (_))$$

est bijective.

2.1.6. Théorème. *Les catégories suivantes possèdent des limites projectives.*

a) *La catégorie des ensembles* **Ens**.

b) *La catégorie des espaces topologiques* **Top**.

c) *Les catégories d'anneaux, d'algèbres, des modules sur un anneau.*

Démonstration. Soit $\{\boldsymbol{E}_n, \nu_n\}_n$ un système projectif d'ensembles. L'un des axiomes de la théorie des ensembles garantit l'existence de l'ensemble produit $\prod_n \boldsymbol{E}_n$. Notons $p_n : \prod_n \boldsymbol{E}_n \twoheadrightarrow \boldsymbol{E}_n$ la projection canonique. On vérifie alors aisément que le sous-ensemble $\boldsymbol{E}_\infty \subseteq \prod_n \boldsymbol{E}_n$ des suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\nu_n(e_{n+1}) = e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la famille d'applications $p_n : \boldsymbol{E}_\infty \to \boldsymbol{E}_n$ est une limite projective.

Si $\{\boldsymbol{T}_n, \nu_n\}_n$ un système projectif d'espaces topologiques, on muni l'ensemble $\prod_n \boldsymbol{T}_n$ de la «*topologie produit*», *i.e.* de la topologie la plus grossière rendant continues les projections canoniques ; un ouvert de $\prod_n \boldsymbol{T}_n$ est alors une intersection finie de sous-ensembles de la forme $p_n^{-1}(U_n)$ où U_n est un ouvert de $\boldsymbol{T}_n$ que l'on appelle «*ouvert élémentaire*» de $\prod_n \boldsymbol{T}_n$. L'ensemble $\varprojlim_n \boldsymbol{T}_n$ muni de la topologie induite par la topologie produit de $\prod_n \boldsymbol{T}_n$ est alors une limite projective dans la catégorie des espaces topologiques. En effet, étant donnée une famille d'applications continues $\{\varphi_n : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{T}_n\}_n$, l'application $\prod_n \varphi_n : \boldsymbol{X} \to \prod_n \boldsymbol{T}_n$, $x \mapsto \{\varphi_n(x)\}_n$, est continue puisque l'image inverse de l'ouvert élémentaire $p_n^{-1}(U_n)$ s'identifie à $\varphi_n^{-1}(U_n)$, ouvert par hypothèse.

Le cas des anneaux, algèbres et modules est laissé aux soins du lecteur. ∎

2.1.7. Exercice. Montrer qu'une limite projective d'espaces topologiques séparés est séparée.

2.1.8. Proposition. *Une suite décroissante de parties $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 \supseteq \boldsymbol{X}_1 \supseteq \cdots$ d'un ensemble (resp. espace topologique) $\boldsymbol{X}$ défini de manière évidente un système projectif. Le sous-ensemble (resp. sous-espace) $\boldsymbol{X}_\infty = \bigcap_n \boldsymbol{X}_n$ muni des inclusions $\boldsymbol{X}_\infty \subseteq \boldsymbol{X}_n$ est une réalisation de $\varprojlim_n \boldsymbol{X}_n$.*

Démonstration. La famille d'inclusions $\boldsymbol{X}_\infty \subseteq \boldsymbol{X}_n$ induit une application $\epsilon : \boldsymbol{X}_\infty \to \varprojlim_n \boldsymbol{X}_n$ (continue dans le cas topologique) par la propriété universelle de la limite projective. L'application ϵ est injective, puisque la composée $\boldsymbol{X}_\infty \to \varprojlim_n \boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\Phi_0} \boldsymbol{X}_0$ l'est, et surjective, puisque $\varprojlim_n \boldsymbol{X}_n$ se voit dans sa construction comme ensemble des suites constantes de terme (évidemment) dans $\boldsymbol{X}_\infty$. Ainsi, ϵ est bijective (bicontinue dans le cas topologique car ouverte). ∎

2.2 Sur la topologie des complétions $\boldsymbol{I}$-adiques formelles

2.2.1. Théorème. *Soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{R}$-module.*

a) *L'isomorphisme $\widehat{\boldsymbol{M}} = \varprojlim_n(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M})$ (1.5.1-0d) est un isomorphisme d'espaces topologiques. L'espace $\widehat{\boldsymbol{M}}$ est une limite projective d'espaces topologiques discrets et est* «totalement discontinu» ([11]).

b) *Lorsque les modules $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$ sont tous finis, le complété $\boldsymbol{I}$-adique formel $\widehat{\boldsymbol{M}}$ est un espace topologique **compact** totalement discontinu.*

c) *Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ l'anneau $\mathbb{Z}_m$, complété de $\mathbb{Z}$ pour la topologie (m)-adique, appelé* «anneau des entiers m-adiques» *est compact et totalement discontinu.*

Démonstration

a) Nous avons déjà remarqué que la topologie $\boldsymbol{I}$-adique de chaque $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M}$ est discrète (ex. 1.1.5). D'autre part, la topologie $\boldsymbol{I}$-adique de $\widehat{\boldsymbol{M}}$ est engendrée par les boules $\mathbb{B}(z;n)$ qui sont précisément les traces sur l'ensemble $\varprojlim_n \boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M}$ de ouverts élémentaires de $\prod_n \boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M}$.

Notons $\nu_n : \widehat{\boldsymbol{M}} \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M}$ la projection canonique. Si $e_1 \neq e_2$ sont deux éléments de $\widehat{\boldsymbol{M}}$, il existe N tel que $p_N(e_1) \neq p_N(e_2)$ et comme l'espace $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M}$ est muni de la topologie discrète, il est réunion d'ouverts disjoints U_1, U_2 tels que $e_i \in U_i$, mais alors $\widehat{\boldsymbol{M}} = p_N^{-1}(U_1) \amalg p_N^{-1}(U_1)$. On en déduit que les seules parties connexes de $\widehat{\boldsymbol{M}}$ sont les singletons.

b,c) Conséquence immédiate du théorème de Tykhonov.([12]) ∎

2.2.2. Exercice. Montrer que $\widehat{\boldsymbol{M}}$ est compact si et seulement si $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{M}$ est fini.

[11] On appelle ainsi un espace topologie dont les seules parties connexes sont les singletons.

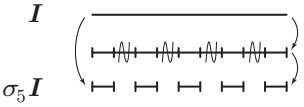
[12] Le produit d'une famille quelconque de compacts muni de la topologie produit est un espace topologique compact.

2.3 Le cas des entiers p-adiques

L'anneau $\mathbb{Z}_m$ «*des entiers (m)-adiques*» a été introduit (2.2.1) comme le complété (séparé) (m)-adique de l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$. Nous discutons dans cette section quelques unes de ses propriétés élémentaires.

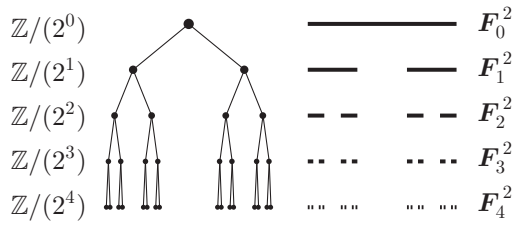
2.3.1. $\mathbb{Z}_m$ comme fermé totalement discontinu dans $[\![0,1]\!]$. On défini par récurrence une famille décroissante $\boldsymbol{F}_n^m$ de fermés de l'intervalle réel $[\![0,1]\!]$. Notons σ_m l'opérateur qui, appliqué à l'intervalle fermé $\boldsymbol{I} = a + r[\![0,1]\!]$, donne les m sous-intervalles fermés disjoints suivants

$$\sigma_m(a + r[\![0,1]\!]) = \coprod_{i=1}^{m} \left(a + r\left[\!\!\left[\frac{2i-2}{2m-1}, \frac{2i-1}{2m-1}\right]\!\!\right]\right)$$



On étend ensuite la définition de σ_m à l'ensemble des réunions disjointes des sous-intervalles fermés de $[\![0,1]\!]$ en le faisant agir intervalle par intervalle.

On pose alors $\boldsymbol{F}_0^m := [\![0,1]\!]$ et $\boldsymbol{F}_{n+1}^m = \sigma_m(\boldsymbol{F}_n^m)$. Le nombre $\pi_0(\boldsymbol{F}_n^m)$ de composantes connexes de $\boldsymbol{F}_n^m$ est précisément m^n ce qui nous permet d'identifier $\mathbb{Z}/(m^n)$ à l'ensemble des extrémités de gauche de ces composantes et ceci de manière compatible aux applications $\nu_n : \mathbb{Z}/(m^{n+1}) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(m^n)$ et $\boldsymbol{F}_{n+1}^m \subseteq \boldsymbol{F}_n^m$ (voir illustration) d'où l'inclusion $\iota_n : \mathbb{Z}/(m^n) \subseteq \boldsymbol{F}_n^m$. Notons $p_n : \boldsymbol{F}_n^m \to \mathbb{Z}/(m^n)$ la surjection qui fait correspondre à $x \in \boldsymbol{F}_n^m$ l'extrémité gauche de la composante connexe de $\boldsymbol{F}_n^m$ contenant x. On munit $\mathbb{Z}/(m^n)$ de la topologie discrète et $\boldsymbol{F}_n^m$ de la topologie induite par $\mathbb{R}$, les applications ι_n et p_n sont alors continues et induisent des applications continues



$$\varprojlim_n \frac{\mathbb{Z}}{(m^n)} \xrightarrow{\varprojlim_n \iota_n} \varprojlim_n \boldsymbol{F}_n^m \xrightarrow{\varprojlim_n p_n} \varprojlim_n \frac{\mathbb{Z}}{(m^n)}$$

dont la composée est l'identité puisque $p_n \circ \iota_n = \mathrm{id}$ pour chaque n. Or, l'application $\varprojlim_n \iota_n$ est également surjective puisque $x \in \varprojlim_n \boldsymbol{F}_n^m = \bigcap_n \boldsymbol{F}_n^m$ (2.1.8) détermine pour chaque n la composante connexe de $\boldsymbol{F}_n^m$ à laquelle il appartient et donc l'extrémité gauche z_n de celle-ci ; l'élément x défini ainsi une famille $\{z_n \in \mathbb{Z}/(m^n)\}_n$ compatible aux applications ν_n, *i.e.* un élément $z \in \varprojlim_n \frac{\mathbb{Z}}{(m^n)}$ dont x est l'image par l'application $\varprojlim_n \iota_n$. On a ainsi démontré

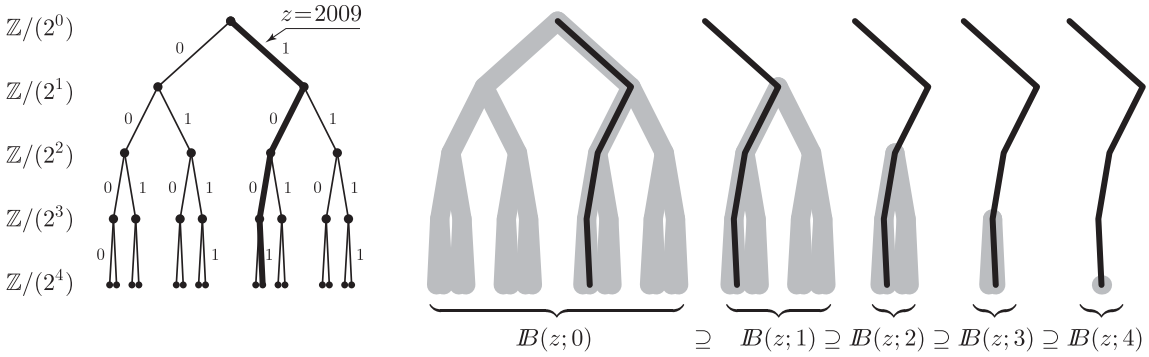
2.3.2. Proposition. *Le complété (m)-adique de $\mathbb{Z}$, noté $\mathbb{Z}_m$, est homéomorphe au sous-espace compact et totalement discontinu $\boldsymbol{F}^m = \bigcap_n \boldsymbol{F}_n^m$ de l'intervalle réel $[\![0,1]\!]$.*

2.3.3. Arbre des entiers m-adiques. Revenons à **l'anneau** des «*entiers m-adiques*» $\mathbb{Z}_m$ (2.2.1-0c). On a $\mathbb{Z}_m = \varprojlim_n \mathbb{Z}/(m^n)$ (1.5.1-0d) et tout élément de $\mathbb{Z}_m$ s'exprime d'une et d'une unique manière comme somme d'une série $\sum_n \theta_n m^n$ avec $\theta_n \in \{0, 1, \ldots m-1\}$ (1.4.22-0b). L'itération de la division euclidienne permet la détermination de la suite $(\theta_n)_{n\geqslant 0}$. Par exemple, si $m = 2$, les divisions successives de 2009 par 2 donnent le tableau ci-contre, d'où le «*développement diadique*»

itération	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
nombre	2009	1004	502	251	125	62	31	15	7	3	1	0
reste de la division par 2	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	-

$$2009 = \sum\nolimits_{n\geqslant 0} \theta_n 2^n = \mathbf{1}{\cdot}2^0 + \mathbf{0}{\cdot}2^1 + \mathbf{0}{\cdot}2^2 + \mathbf{1}{\cdot}2^3 + \mathbf{1}{\cdot}2^4 + \mathbf{0}{\cdot}2^5 + \mathbf{1}{\cdot}2^6 + \mathbf{1}{\cdot}2^7 + \mathbf{1}{\cdot}2^8 + \mathbf{1}{\cdot}2^9 + \mathbf{1}{\cdot}2^{10}$$

à ne pas confondre avec l'écriture en base 2 de 2009 qui se lit en sens inverse, à savoir `11111011001`. Le dessin suivant illustre ce résultat numérique et la suite des boules centrées en $z = 2009$ (modulo 2^5).



2.3.4. Intégrité de $\mathbb{Z}_m$

Proposition. *L'anneaux $\mathbb{Z}_m$ est intègre si et seulement si m est une puissance d'un nombre premier.*

Preuve sous forme d'exercice

a) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{N}$ *relativement premiers*, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$1 + \alpha_n a^n \in b^n\mathbb{Z}$$

b) On munit $\mathbb{Z}$ de la topologie (ab)-adique.

i) Montrer que la suite

$$(t_n(a))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_0(a) = 1 \\ t_n(a) = \alpha_{2^0}\alpha_{2^1}\cdots\alpha_{2^n}\, a^{2^{n+1}} \end{cases}$$

est une suite de Cauchy de $\mathbb{Z}$ qui ne converge pas vers zéro.

ii) En procédant de même pour b montrez que le produit des suites Cauchy $(t_n(a))_n \cdot (t_n(b))_n$ est nul dans $\mathbb{Z}_{ab}$. Conclure que $\mathbb{Z}_{ab}$ n'est pas intègre.

c) Soit $\boldsymbol{I} = (m) \subseteq \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(_) : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ est une valuation si et seulement si m est un nombre premier. En déduire une condition d'intégrité de $\mathbb{Z}_m$ (*cf.* 1.3.8).

d) Conclure que $\mathbb{Z}_m$ est intègre si et seulement si m est une puissance d'un nombre premier (*cf.* 1.5.4). ∎

2.3.5. Anneaux de valuation discrète. On appelle ainsi tout anneau intègre principal ayant un unique idéal premier non nul (*cf.* [Ser] ch. **I** § **1,2**).

Par exemple, si p est un nombre premier l'anneau $\mathbb{Z}_p$ et un anneau de valuation discrète. En effet, son intégrité a été prouvée dans 2.3.4 et l'équivalence $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ (1.5.1-0b) montre que $p\mathbb{Z}_p$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}_p$, et même que tout élément de valuation nulle est inversible (1.5.1-0g). Par conséquent, si l'on écrit $z \in \mathbb{Z}_p$ sous la forme $z = \sum \theta_n p^n$ avec $\theta_n \in \{0, \ldots, p-1\}$ (1.4.22-0b), on voit que $z = p^{v_p(z)}u$ où u est un élément inversible de $\mathbb{Z}_p$. Les idéaux de $\mathbb{Z}_p$ sont donc engendrés par les puissances de p et $\mathbb{Z}_p$ est bien de valuation discrète.

2.3.6. Prolongement de la valuation p-adique. Nous avons les inclusions d'anneaux et corps

$$\boxed{\mathbb{Z} \underset{0}{\subsetneq} \mathbb{Z}_{(p)} \underset{1}{\subsetneq} \mathbb{Z}_p \underset{2}{\subsetneq} \mathbb{Q}_p \underset{3}{\subsetneq} \overline{\mathbb{Q}}_p \underset{4}{\subsetneq} \mathbb{C}_p}$$

où 1 et 4 résultent de complétions topologiques alors que 0, 2 et 3 sont de nature algébrique. En effet, $\mathbb{Z}_p$ est un anneau local d'idéal maximal $p\mathbb{Z}_p$ et le morphisme naturel $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ se factorise canoniquement à travers le localisé $\mathbb{Z}_{(p)}$ ce qui donne les inclusions $\subseteq_{0,1}$. Ensuite, comme $\mathbb{Z}_p$ est intègre, il s'injecte ($\subseteq_2$) dans son corps de fractions $\mathbb{Q}_p$ lequel s'injecte à sont tour ($\subseteq_3$) dans sa clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

La valuation $v_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{N}$ se prolonge à $\mathbb{Q}_p$ car une fraction rationnelle s'écrit d'une manière unique sous la forme up^m avec u inversible dans $\mathbb{Z}_p$ et $m \in \mathbb{Z}$; on pose alors $v_p(z) = m$ d'où la valuation $v_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z}$ de valeur absolue associée $|_|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}$. On démontre alors ([Ser]) que cette valeur absolue se prolonge d'une et une unique manière en une valeur absolue (ultramétrique) $|_|_p : \overline{\mathbb{Q}}_p \to \mathbb{R}$ dont l'image est cette fois dense dans $\mathbb{R}$. Enfin, l'inclusion $\subseteq_4$ est l'inclusion de $(\overline{\mathbb{Q}}_p, |_|_p)$ dans son complété topologique $\mathbb{C}_p$; l'image de $|_|_p : \mathbb{C}_p \to \mathbb{R}$ et alors la même que celle de $|_|_p : \overline{\mathbb{Q}}_p \to \mathbb{R}$ (1.4.4). On démontre (*loc. cit.*) que $\mathbb{C}_p$ est algébriquement clos.

2.3.7. Exercice. Montrer que $(\mathbb{Q}_p, |_|_p)$ est localement compact.

§3. Remarques sur la cohomologie de de Rham en caractéristique zéro

Les techniques de complétion des sections précédentes trouvent l'une des principales motivations dans la problématique de la recherche d'une théorie cohomologique « *à la de Rham* » en caractéristique zéro pour les variétés (schémas en fait) algébriques en caractéristique positive. Nous allons regarder un exemple simple pour montrer à quel niveau la complétion intervient.

3.1 Cohomologies de de Rham associés à des ouverts principaux de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$

L'anneau des fonctions régulières d'un ouvert principal de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ est de la forme $\mathbb{F}_p[X]_P$ avec $P \in \mathbb{F}_p[X]$, et la surjection canonique $\nu : \mathbb{Z}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p[X]$, qui induit une surjection $\nu_{\tilde{P}} : \mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p[X]_P$ pour chaque $\tilde{P}$ vérifiant $\nu(\tilde{P}) = P$, identifie $\mathbb{F}_p[X]_P$ à la réduction modulo p de $\mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}}$, on dit alors que $\mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}}$ est un « *relèvement* ($\mathbb{Z}$*-plat*) *de* $\mathbb{F}[X]_P$ ». D'où l'idée de définir la cohomologie de de Rham (en caractéristique zéro) de l'ouvert $D(P) \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ comme la cohomologie de de Rham de l'une des algèbres $\mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}}$. Regardons d'un peu plus près cette idée.

3.1.1. Le cas $\tilde{P} = 1$. S'agissant de la cohomologie de l'espace affine, la nécessité de voir vérifié le lemme de Poincaré nous conduit à tensoriser le complexe de de Rham par le corps de fractions de l'anneau des coefficients. En effet, la cohomologie de $\Omega^*_{\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}}$, à savoir, la cohomologie du complexe à deux termes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} & \to & \Omega^0_{\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}} & \xrightarrow{d_0} & \Omega^1_{\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}} \to \mathbf{0} \\ & & \| & & \| \\ & & \mathbb{Z}[X] & \xrightarrow{\partial/\partial X} & \mathbb{Z}[X] \end{array}$$

n'est jamais triviale en degré positif (X^n n'est pas la dérivée d'un polynôme si $n > 0$) alors que celle de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^*_{\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}}$ l'est. Cette remarque est générale :

Proposition. *Pour toute algèbre $\boldsymbol{A}$ de caractéristique nulle, de corps de fractions $\boldsymbol{K}$ la cohomologie du complexe $\boldsymbol{K}\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega^*_{\boldsymbol{A}[X]/\boldsymbol{A}}$ est nulle en degrés positifs et s'identifie à $\boldsymbol{K}$ en degré 0.*

3.1.2. Le cas $\tilde{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{1}+\boldsymbol{pX}$. Le polynôme $\tilde{P}$ relève toujours $1\in\mathbb{F}_p[X]$ et l'algèbre $\mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}}$ est un relèvement de $\mathbb{F}_p[X]$. Dans ce cas l'application $X\mapsto(Y-1)/p$ identifie $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}}$ et $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{Z}[Y]_Y$ de sorte que la cohomologie du complexe $\mathbb{Q}\otimes\Omega_{\mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}}/\mathbb{Z}}$ s'identifie à la cohomologie de la droite affine épointée, isomorphe à $\mathbb{Q}$ en degré 1.

La cohomologie de de Rham (sur $\mathbb{Q}$) des algèbres $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Z}[X]_{1+pX}$ sont donc différentes, et ce procédé naïf de relèvement ne risque pas de produire des invariants cohomologiques pour les variétés en caractéristique positive.

3.1.3. Les anneaux de Zariski. Dans les exemples précédents, les polynômes $\tilde{P}$ relèvent bien l'identité de $\mathbb{F}_p[X]$ mais ce qui les rend incomparables c'est le fait que l'un est inversible et l'autre non. Or, c'est précisément la propriété caractéristique des anneaux de Zariski d'assurer l'inversibilité des relèvement des éléments qui sont inversibles dans la réduction (1.5.1-0g), et c'est l'une caractéristique du procédé de complétion de fabriquer, fonctoriellement de surcroît, des anneaux de Zariski. Ainsi, et comme nous cherchons des relèvements d'algèbres de caractéristique p, nous sommes emmenés à nous intéresser à la complétion formelle p-adique où l'on a, toujours par 1.5.1-0g mais surtout par 1.5.1-0i, des égalités

$$\widehat{\mathbb{Z}[X]}=\mathbb{Z}\widehat{[X]_{1+pX}}=\mathbb{Z}\widehat{[X]_{1+pQ(X)}}\,,\quad\forall Q\in\mathbb{Z}[X]\,.$$

Ces algèbres ([13]) fournissent, évidemment, la même cohomologie de de Rham, mais laquelle? Non pas celle du complexe de de Rham algébrique (car pathologique) mais plutôt celle du complexe de de Rham algébrique séparé (1.5.1-0j) et tensorisé par $\mathbb{Q}_p$ pour tenir compte de 3.1.1. Nous sommes ainsi emmenés à comprendre la cohomologie du complexe à deux termes

$$\begin{array}{ccccc}\mathbf{0}\to\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[X]\widehat{\ }\otimes_{\mathbb{Z}_p[X]}\Omega^0_{\mathbb{Z}_p[X]/\mathbb{Z}_p}&\xrightarrow{d_0}&\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[X]\widehat{\ }\otimes_{\mathbb{Z}_p[X]}\Omega^1_{\mathbb{Z}_p[X]/\mathbb{Z}_p}\to\mathbf{0}\\ \|&&\|\\ \mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[X]\widehat{\ }&\xrightarrow{\partial/\partial X}&\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[X]\widehat{\ }\end{array}\qquad(\ddagger)$$

3.1.4. Proposition. *L'image de la dérivation $\partial_X:\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[X]\widehat{\ }\to\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[X]\widehat{\ }$ ([14]) est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel engendré par les séries $\sum_{n\geqslant0}a_nX^n$ telles que*

$$\boxed{\big(v_p(a_n)-v_p(n+1)\big)\rightsquigarrow+\infty\,,\ \textit{lorsque}\ n\rightsquigarrow+\infty}\qquad(\mathbf{C})$$

Démonstration. Les éléments de $\mathbb{Z}_p[X]\widehat{\ }$ sont les séries $\sum_n b_nX^n$ avec $v_p(b_n)\rightsquigarrow+\infty$ d'après 1.4.23-0a, donc $z\in\partial_X\mathbb{Z}_p[X]\widehat{\ }$ est une série $\sum_n a_nX^n$ avec $a_n=b_{n+1}(n+1)$ et alors $\big(v_p(a_n)-v_p(n+1)\big)\rightsquigarrow+\infty$. Réciproquement, étant donnée une série $z=\sum_n a_nX^n$ avec $a_n\in\mathbb{Q}_p$ et vérifiant la condition (**C**), ce qui implique que $a_n\in\mathbb{Z}_p$ pour $n\gg0$, la série $\sum_n(a_n/(n+1))X^{n+1}$ a aussi ses coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ pour $n\gg0$ et quitte à la multiplier par une puissance suffisante de p, non seulement tous ses coefficients sont dans $\mathbb{Z}_p$, en plus la série est de Cauchy et converge (donc) vers un élément $w\in\mathbb{Z}_p[X]\widehat{\ }$. Ceci prouve que $p^{-N}\partial_Xw=z$ pour $N\gg0$. ∎

[13] Ces algèbres sont les mêmes que $(\mathbb{Z}_p[X])\widehat{\ }=(\mathbb{Z}_p[X]_{1+pX})\widehat{\ }=(\mathbb{Z}_p[X]_{1+pQ(X)})\widehat{\ }$, $\forall Q\in\mathbb{Z}_p[X]$.

[14] La notation ∂_X est équivalente de $\frac{\partial}{\partial X}$.

3.1.5. Remarque. La proposition 3.1.4 et sa démonstration restent valables si l'on remplace $\mathbb{Z}_p$ par un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique et de caractéristique résiduelle p.

3.1.6. Remarque. La condition (**C**) de la proposition précédente est plus forte que celle de convergence formelle qui demande seulement que $v_p(a_n) \rightsquigarrow +\infty$. Par exemple, la série $\sum_{i\geqslant 0} p^i X^{p^i-1}$ est bien une série de Cauchy mais elle ne vérifie pas (**C**) puisque autrement la primitive

$$\int \sum_{i\geqslant 0} p^i X^{p^i-1} = \sum_i p^i \frac{X^{p_i}}{p^i} = \sum_i X^{p^i}$$

serait sommable ce qui est de toute évidence impossible. Le complexe (‡) possède donc bien de la cohomologie en degré un et c'est pour corriger ce défaut tout en gardant les bénéfices des anneaux de Zariski et les différentes fonctorialités des constructions jusqu'ici introduites que Dwork dans un premier temps et Monsky-Washnitzer ensuite ont introduit la notion de convergence faible.

3.1.7. La convergence faible. Une série $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n \in \boldsymbol{R}[X]^\frown$ (1.4.23-0a) est dite «*faiblement convergente (pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique)*» s'il existe une constante positive C telle que

$$\boxed{n \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_n)+1)\,, \quad \forall n\in\mathbb{N}} \qquad (\mathbf{FC})$$

3.1.8. Proposition. *Notons $\boldsymbol{R}[X]^\dagger$ le sous-ensemble de $\boldsymbol{R}[X]^\frown$ des séries faiblement convergentes.*

a) *$\boldsymbol{R}[X]^\dagger$ est une $\boldsymbol{R}$-sous-algèbre de $\boldsymbol{R}[X]^\frown$.*

b) *L'opérateur $\partial_X : \mathbb{Z}_p[X]^\frown \to \mathbb{Z}_p[X]^\frown$ induit une **surjection** $\partial_X : \mathbb{Q}_p\otimes\mathbb{Z}_p[X]^\dagger \twoheadrightarrow \mathbb{Q}_p\otimes\mathbb{Z}_p[X]^\dagger$ de noyau les séries constantes $\mathbb{Q}_p\cdot 1$.*

Démonstration

a) Si $z_1=\sum_n a_n X^n$ et $z_2=\sum_n b_n X^n$ sont faiblement convergentes, on prend la même constante C dans la condition **FC** pour les deux séries. Alors, pour tout $x\in\boldsymbol{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$v_p(a_n+xb_n) \geqslant \inf\{v_p(a_n), v_p(b_n)\} \geqslant C^{-1}n-1$$

et la série z_1+xz_2 est faiblement convergente, donc $\boldsymbol{R}[X]^\dagger$ est un sous-$\boldsymbol{R}$-module de $\boldsymbol{R}[X]^\frown$. Le produit z_1z_2 est la somme de la famille $\{a_nb_mX^{n+m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ (de Cauchy !). Notons $c_k=\sum_{i=0}^k a_ib_{k-i}$ alors

$$v_p(c_k) \geqslant \inf\{v_p(a_ib_{k-i})\} = \inf\{v_p(a_i)+v_p(b_{k-i})\} \geqslant C^{-1}k-2$$

donc $k\leqslant C(v_p(c_k)+2)\leqslant 2C(v_p(c_k)+1)$ et la série $z_1z_2=\sum_k c_kX^k$ est faiblement convergente.

b) Si $\sum_n a_nX^n$ est faiblement convergente la condition (**C**) de la proposition 3.1.4 est

$$v_p(a_n)-v_p(n+1) \geqslant C^{-1}n-1-v_p(n+1) \geqslant C^{-1}n-1-\log_p(n+1)$$

et il est bien connu que la fonction $t\mapsto C^{-1}t-1-\log_p(t+1)$ tend vers $+\infty$ avec $t\in\mathbb{R}$. Il existe donc N tel que $p^N\sum_n a_n(n+1)^{-1}X^{n+1}$ appartient à $\mathbb{Z}_p[X]^\frown$. Or, on a

$$v_p\left(a_n(n+1)^{-1}\right) = v_p(a_n)-v_p(n+1) \geqslant C^{-1}n-1-\log_p(n+1) \geqslant D^{-1}n-1$$

si et seulement si $(C^{-1}-D^{-1})n \geqslant \log_p(n+1)$, et cette condition est vérifiée pour chaque $D>C$,

pour tout n assez grand (dépendant de D). Pour un tel choix de D il existe donc n_0 tel que

$$n \leqslant D(v_p(p^N a_n(n+1))+1)\,,\ \text{pour tout } n > n_0.$$

Mais alors la série $p^N \sum_n a_n(n+1)^{-1}X^{n+1}$ vérifie la condition (**FC**) avec la constante $C = \sup\{D, n_0\}$.

La détermination de $\ker(\partial_X)$ est laissée en exercice (*cf.* 1.4.23-0a). ∎

3.1.9. Remarque. L'assertion 3.1.8-0b et sa démonstration restent valables si l'on remplace $\mathbb{Z}_p$ par un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique et de caractéristique résiduelle p.

3.1.10. Remarque. On aura remarqué par la preuve de 3.1.8, l'équivalence entre (**FC**) et la condition

$$\boxed{\text{il existe } C, C' \in \mathbb{R}_+^* \text{ tels que } n \leqslant C\,\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_n) + C', \text{ pour } n \gg 0} \qquad (\mathbf{FC}')$$

3.1.11. Commentaire. Les complétions formelles $\widehat{\boldsymbol{A}}$ des $\boldsymbol{R}$-algèbres de type fini $\boldsymbol{A}$ ont le propriété fondamentale d'être de Zariski et de dépendre fonctoriellement de $\boldsymbol{A}$, mais la cohomologie de leurs complexes de de Rham séparés ne fournit pas les bons nombres de Betti. Les sous-algèbres $\boldsymbol{A}^\dagger$ des séries faiblement convergentes de $\widehat{\boldsymbol{A}}$, corrigent ce défaut, mais pour qu'elles soient utiles pour une *théorie* cohomologique il faudra en donner une définition fonctorielle et prouver qu'elles vérifient la propriété d'être de Zariski. La section 4 est destinée à cette question où l'analogue des propriétés générales de la complétion formelle (th. 1.5.1) est démontré pour la complétion faible, ce qui est assez remarquable. Nous verrons aussi que pour une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$, on a toujours $(\Omega^*_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}})_\sigma = \boldsymbol{A}^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$. On définira alors la « *cohomologie de de Rham †-adique* » d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$ par

$$H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{K}) := h^*(\boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}^\dagger \otimes \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$$

où $\boldsymbol{K}$ désigne le corps des fractions de $\boldsymbol{R}$.

Les considérations du paragraphe 3.1.3 seront alors valables pour la complétion faible des algèbres $\mathbb{Z}_p[X]_{\tilde{P}}$ et la cohomologie de de Rham p-adique d'un ouvert principal $D(P) \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ sera, par définition,

$$H_{\mathrm{DR}}(D(P)/\mathbb{Q}_p) := H_{\mathrm{DR}}(\mathbb{Z}_p[X]_{\tilde{P}}{}^\dagger/\mathbb{Q}_p)\,,$$

indépendante du relèvement $\tilde{P}$ de P. La proposition 3.1.8-0b montre déjà que cette définition donne les bons nombre de Betti pour $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$.

3.1.12. Heuristique autour du rayon de convergence. Pour chaque $a \in \widehat{\boldsymbol{R}}$, la complétion formelle du morphisme $\boldsymbol{R}[X] \to \widehat{\boldsymbol{R}}$, $P(X) \mapsto P(a)$, d'« *évaluation d'un polynôme en a* », donne le morphisme $\boldsymbol{R}[X]\widehat{\ } \to \widehat{\boldsymbol{R}}$, $z \mapsto z(a)$, d'« *évaluation des séries en a* ». Une série $z \in \boldsymbol{R}[X]\widehat{\ }$ définit ainsi une application $z : \widehat{\boldsymbol{R}} \to \widehat{\boldsymbol{R}}$, $a \mapsto z(a)$ de manière analogue aux séries entières sur $\mathbb{C}$.

Plus généralement, si $(\boldsymbol{A}, |_|)$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre valuée non archimédienne complète, pour $a \in \boldsymbol{A}$ et chaque série de Cauchy $z = \sum_{n\geqslant 0} x_n X^n$, la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n a^n$ est de Cauchy, et donc converge dans $\boldsymbol{A}$, si et seulement si la suite $|x_n||a|^n$ converge vers zéro. En particulier, la convergence de la série dépend uniquement de la valeur absolue de $a \in \boldsymbol{A}$. Le « *domaine de définition* » de $z : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$, *i.e.* l'ensemble des $a \in \boldsymbol{A}$ tels que la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n a^n$ converge, est par conséquent une boule de $\boldsymbol{A}$ centrée à l'origine.

Définition. On appelle «*rayon de convergence*» d'une série $z = \sum_{n\geqslant 0} x_n X^n$, et on note $\mathcal{R}(z)$, la borne supérieure de l'ensemble des $\rho \in \mathbb{R}^+$ tels que la suite $(|x_n|\rho^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$. On dit que «*la série z converge en a*» si la série $z(a) := \sum_n x_n a^n$ converge.

3.1.13. Proposition. *Avec les donnes en cours,*

a) *Le rayon $\mathcal{R}(z)$ de la série $z = \sum_n x_n X^n$ est donnée par la formule* ([15])

$$\boxed{\mathcal{R}(z) = \liminf_n \frac{1}{\sqrt[n]{|x_n|}}}$$

b) *Si $|a| < \mathcal{R}(z)$ la série $z(a) = \sum_{n\geqslant 0} x_n a^n$ converge ; si $|a| > \mathcal{R}(z)$ la série $z(a)$ ne converge pas ; si $|a| = \mathcal{R}(z)$ on ne peut rien dire, mais si $z(a)$ converge, la série $z(b)$ converge dès que $|b| \leqslant |a|$.*

Indication. Notons $\mathcal{R}_0(x)$ (resp. $\mathcal{R}_b(z)$) l'ensemble des $\rho \in \mathbb{R}_+$ tels que la suite $(|x_n|\rho^n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 (resp. est bornée). On a bien $\mathcal{R}_0(z) \subseteq \mathcal{R}_b(z)$. Inversement, si $(|x_n|\rho_0^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, pour tout $\rho_1 < \rho_0$ on a $(|x_n|\rho_1^n)_{n\geqslant 0} = (|x_n|\rho_0^n(\rho_1/\rho_0)^n)_n$ et donc $\rho_1 \in \mathcal{R}_0(z)$. Les bornes supérieures de ces deux ensembles sont donc bien égales. Or, $|x_n|\rho^n < C$ pour tout n équivaut à

$$\rho \leqslant \frac{\sqrt[n]{C}}{\sqrt[n]{|x_n|}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et la conclusion s'ensuit. L'assertion (b) est laissée en exercice. ∎

3.1.14. Remarque. L'analogie avec le cas des séries entières est évident, mais il faut bien retenir une différence importante : dans le cas d'une valeur absolue non archimédienne, *si une série converge en un point, elle converge en chaque point du cercle centré à l'origine contenant ce point.*

3.1.15. Exercice. Donner une condition sur la constante C dans (**FC**) (1.4.23-0a) pour que $\mathcal{R}(z) > r > 1$.

3.1.16. Rayon et domaine de convergence. Dans ce qui précède nous avons défini le rayon de convergence d'une série mais nous n'avons encore rien dit à propos du «*domaine de convergence d'une série*». En effet, la valuation $\boldsymbol{I}$-adique étant à valeurs entières, les valeurs absolues associées sont discrètes. Par exemple, la série $\sum p^n X^n$ a un rayon de convergence égal à p ([16]) mais il n'existe aucun élément de $\mathbb{Z}_p$ de valeur absolue plus grande que 1 et notre série converge sur $\mathbb{Z}_p$ tout entier. Par contre, si nous nous plaçons sur $\mathbb{Q}_p$ (2.3.6), la valuation p-adique $v_p(_) : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z}$ est surjective et l'ensemble des valeurs absolues atteintes est $\{p^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, le cercle de rayon p est maintenant plus grand que celui de rayon 1, mais la série n'y converge pas car $\sum_n p^n(1/p)^n$ n'est de toute évidence pas convergente. Or, dans $\mathbb{Q}_p$ le disque de rayon p privé du cercle de même rayon est le disque de rayon 1 donc exactement $\mathbb{Z}_p$; il n'y a donc dans $\mathbb{Q}_p$ aucun élément de valeur absolue plus grande que 1 rendant convergente notre série de rayon p. Il faut passer à la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ pour trouver assez de points pour que l'affirmation *"Pour tout $\epsilon > 0$ il existe a tel que $0 \leqslant \mathcal{R}(z) - |a| < \epsilon$ et $\sum_n x_n a^n$ converge"* soit vérifiée. En effet, l'application $|_| : \overline{\mathbb{Q}}_p \to \mathbb{R}$ est maintenant d'image dense. Par exemple, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\xi_n := \sqrt[n+1]{p^{-n}} \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ d'où

[15] Formule dite «*de Hadamard*» *cf.* [C] I.§ **2.3** p. 20.

[16] Dans le cas p-adique on pose $|x| = p^{-v_p(x)}$, donc $|p| = 1/p$.

$|\xi| = \sqrt[n+1]{p^n} < p$ et donc $|\xi_n| \rightsquigarrow p$ lorsque $n \rightsquigarrow +\infty$. Remarquons, pour terminer, que le passage de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ à $\mathbb{C}_p$ ne fournit pas plus de valeurs absolues (1.4.4).

La conclusion de ces remarques est que, si le rayon de convergence d'une série est toujours bien défini, les assertions concernant son domaine de convergence peuvent exiger des extensions de l'espace pour prendre tout leur sens. La proposition suivante est un exemple typique de cette remarque.

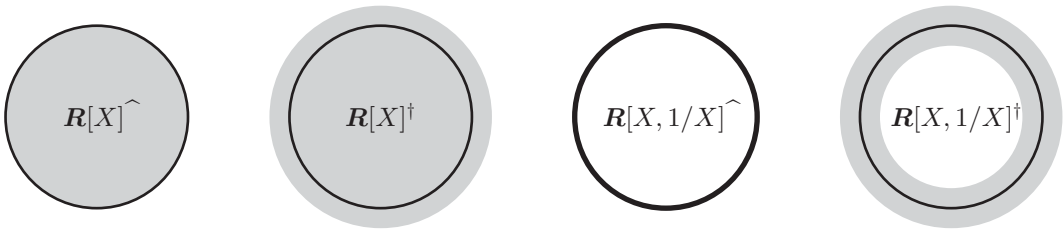
3.1.17. Proposition

a) *Les séries* $z \in \boldsymbol{R}[X]\widehat{\ }$ *sont les séries telles que* $\mathcal{R}(z) \geqslant 1$ *et qui convergent sur le cercle unité.*

b) *Les séries* $z \in \boldsymbol{R}[X]^\dagger$ *sont les séries telles que* $\mathcal{R}(z) > 1$.

c) *Les séries* $z \in \boldsymbol{R}[X, 1/X]\widehat{\ }$ *sont les séries qui convergent sur le cercle unité.*

d) *Les séries* $z \in \boldsymbol{R}[X, 1/X]^\dagger$ *sont les séries qui convergent sur une couronne autour du cercle unité.*



Démonstration

a) Une série $z = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ converge pour $X = 1$, si et seulement si $|a_n| \rightsquigarrow 0$, donc si et seulement si $z \in \boldsymbol{R}[X]\widehat{\ }$.

b) Dans une série $z = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ l'inégalité $n \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_n)+1)$ (**FC**) équivaut à $|a_n|_s \leqslant s s^{-n/C}$ (on rappelle que $s > 1$ (*cf.* 1.3)) auquel cas

$$\mathcal{R}(z) = \liminf_n \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|_s}} \geqslant s^{1/C} > 1\,.$$

c-d) Les éléments de $\boldsymbol{R}[X, 1/X]$ sont les «*polynômes de Laurent*» *i.e.* sommes de deux polynômes $P(X) + Q(1/X)(1/X)$. Toute série à termes dans $\boldsymbol{R}[X, 1/X]$ se décompose alors en somme de deux séries $z = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ et $w = \sum_{n\geqslant 1} b_n (1/X)^n$; le domaine de convergence de $z + w$ est donc l'intersection des domaines respectifs de z et de w. D'après 1.4.24, $z + w \in \boldsymbol{R}[X]\widehat{\ }$ si et seulement si $z \in \boldsymbol{R}[X]\widehat{\ }$ et $w \in \boldsymbol{R}[1/X]\widehat{\ }$ et l'on applique (a). La même idée prouve (d). ∎

§ 4. Complétion †-adique

Les paragraphes § **1,2** de [MW] et § **0,1** de [M] constituent une très bonne référence pour cette section.

4.1 Complété †-adique des algèbres

4.1.1. Définition. Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, Monsky et Washnitzer définissent dans [MW] «*la complétion* $\boldsymbol{I}$*-adique faible* $\boldsymbol{A}^\dagger$» que nous appellerons aussi «*complétion* †*-adique*», comme le sous-ensemble du complété (séparé) $\boldsymbol{I}$-adique $\widehat{\boldsymbol{A}}$ de $\boldsymbol{A}$, des éléments z admettant une représentation

comme somme infinie :

$$z = \sum\nolimits_{n\geqslant 0} P_n(x_1, \dots, x_\ell)$$

(l'entier r et les éléments $x_1, \dots, x_\ell$ sont fixes et indépendants de n mais dépendent de z) dans laquelle :

$$\begin{cases} \text{(a)} \;\; x_1, \dots, x_\ell \in \boldsymbol{A}\,; \\ \text{(b)} \;\; P_n \in \boldsymbol{I}^n \cdot \boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_\ell], \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\,; \\ \text{(c)} \;\; \text{Il existe une constante } C \in \mathbb{R}_+, \text{ telle que } \deg P_n \leqslant C(n+1) \text{ por tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{$\mathbb{FC}$}$$

4.1.2. Exercice. Montrer que si $z = \sum_{n\geqslant 0} P_n(x_1, \dots, x_\ell)$ vérifie les conditions $\mathbb{FC}$ et si $x_i = Q_i(y_1, \dots, y_m)$ avec $Q_i \in \boldsymbol{R}[\overline{Y}] := \boldsymbol{R}[Y_1, \dots, Y_m]$, la somme $\sum_{n\geqslant 0} \widetilde{P}_i(y_1, \dots, y_m)$, où $\widetilde{P}_i(\overline{Y}) := P_y(Q_1(\overline{Y}), \dots, Q_\ell(\overline{Y}))$ vérifie aussi les conditions $\mathbb{FC}$ (bien que la constante C puisse changer).

4.1.3. La proposition suivante exprime les éléments de $\boldsymbol{A}^\dagger$ à l'aide des représentations des éléments de $\widehat{\boldsymbol{A}}$ en séries géométriques à plusieurs variables (*cf.* corollaire 1.4.23-0b).

4.1.4. Proposition. *Avec les notation en cours, les éléments de $\boldsymbol{A}^\dagger$ sont les éléments $z \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ pour lesquels il existe une famille finie $\{\xi_1, \dots, \xi_\ell\}$ d'éléments de $\boldsymbol{A}$ (dépendant de z) telle que*

$$z = \sum\nolimits_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_J\, \xi^J\,, \;\; \text{avec } a_J \in \widehat{\boldsymbol{R}} \text{ et } |J| \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J) + 1), \tag{$\mathbb{FC}\star$}$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}_+$ (dépendant de z).

Démonstration. Soit $z \in \boldsymbol{A}^\dagger$ et $z = \sum_{n\geqslant 0} P_n(x_1, \dots, x_\ell)$ une représentation de z vérifiant $(\mathbb{FC})$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n = \sum_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_{n,J} X^J$ le développement de $P_n \in \boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_r]$ en somme de monômes. La famille $\mathcal{F} := \{a_{n,J}\, x^J \neq 0\}_{(n,J)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^\ell}$ est une famille sommable de $\widehat{\boldsymbol{A}}$ de somme z. En effet, si $\varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que $|z - \sum_{n=0}^{N_\varepsilon+r} P_n(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon$, quel que soit $r \in \mathbb{N}$, et nous pouvons même prendre N_ε assez grand pour avoir, en plus, $|a_{n,J}| < \varepsilon$ pour tout $n > N_\varepsilon$ et ceci grâce à la condition (b) de $(\mathbb{FC})$. La famille $\boldsymbol{F}(\varepsilon) := \{a_{n,J}\, x^J\}_{n\leqslant N_\varepsilon} \subseteq \mathcal{F}$ est finie puisqu'elle ne concerne qu'un nombre fini de polynômes P_n et que chacun d'eux fournit au plus un nombre fini de coefficients $a_{n,J}$ non nuls. Maintenant, pour toute sous-famille finie $\boldsymbol{F} \subseteq \mathcal{F}$ telle que $\boldsymbol{F} \supseteq \boldsymbol{F}(\varepsilon)$, on a par non archimédiannité :

$$\begin{aligned} \Big|z - \sum\nolimits_{\boldsymbol{F}} a_{n,J} x^J\Big| &= \Big|\Big(z - \sum\nolimits_{\boldsymbol{F}(\varepsilon)} a_{n,J} x^J\Big) + \sum\nolimits_{(n,J)\in\boldsymbol{F}\setminus\boldsymbol{F}(\varepsilon)} a_{n,J} x^J\Big| \\ &\leqslant \sup\Big\{\Big|z - \sum\nolimits_{\boldsymbol{F}(\varepsilon)} a_{n,J} x^J\Big|, \big|a_{n,J} x^J\big| \text{ t.q. } a_{n,J} x^J \in \boldsymbol{F}\setminus\boldsymbol{F}(\varepsilon)\Big\} \leqslant \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve de la sommabilité de $\mathcal{F}$. Nous pouvons donc regrouper les termes de la série double $\sum_{n\geqslant 0}\sum_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_{n,J} x^J$ sans en modifier la somme (*cf.* 1.4.18-0a), on a donc :

$$z = \sum\nolimits_{J\in\mathbb{N}^\ell} \Big(\sum\nolimits_{n\geqslant 0} a_{n,J}\Big)\, x^J\,,$$

où bien évidemment $(\sum_{n\geqslant 0} a_{n,J}) \in \widehat{\boldsymbol{R}}$, pour tout $J \in \mathbb{N}^\ell$.

Cela étant, dans les développements $P_n = \sum_{n\geqslant 0} a_{n,J} X^J$, la condition (c) de ($\mathbb{FC}$) donne

$$|J| \leqslant \deg P_n \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_{n,J}) + 1) \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(\textstyle\sum_n a_{n,J}) + 1)\,, \qquad \forall J \in \mathbb{N}^\ell\,,$$

puisque $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(\sum_n a_{n,J}) \geqslant \inf_n\{\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_{n,J})\}$ (*cf.* 1.5.1-0a), et l'égalité

$$z = \sum\nolimits_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_J\, x^J\,, \quad \text{avec} \quad a_J := \sum\nolimits_{n\geqslant 0} a_{n,J}\,,$$

est bien de la forme ($\mathbb{FC}\star$).

Réciproquement, soit $z \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ vérifiant

$$z = \sum\nolimits_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_J\, \xi^J\,, \text{ avec } a_J \in \widehat{\boldsymbol{R}} \text{ et } |J| \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J) + 1), \tag{$\diamond$}$$

pour une certaine famille finie $\{\xi_1, \ldots, \xi_\ell\} \subseteq \boldsymbol{A}$ et une certaine constante $C \in \mathbb{R}_+$.

Fixons pour chaque $J \in \mathbb{N}^\ell$, une égalité de la forme (*cf.* 1.4.22-0b et 1.5.1-0a)

$$a_J = \sum\nolimits_{n\geqslant 0} a_{n,J}\,, \quad \text{avec } a_{n,J} \in \boldsymbol{I}^n \text{ et } a_{n,J} = 0 \text{ si } n < \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J). \tag{$\diamond\diamond$}$$

La famille $\{a_{n,J}\,\xi^J\}$ est alors sommable de somme z (laissé en exercice) et nous pouvons regrouper les termes de la série double $\sum_{J\in\mathbb{N}^\ell}\sum_{n\geqslant 0} a_{n,J}\, x^J$ sans en modifier la somme, on a donc

$$z = \sum\nolimits_{n\geqslant 0} \Big(\sum\nolimits_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_{n,J}\, \xi^J\Big)\,,$$

où les termes entre parenthèses sont polynomiaux puisque, pour n donné, si nous avons $a_{n,J} \neq 0$, on a $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J) \leqslant n$ par ($\diamond\diamond$), et alors $|J| \leqslant C(n+1)$ par ($\diamond$). On pose alors

$$P_n(X_1, \ldots, X_n) = \Big(\sum\nolimits_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_{n,J} X^J\Big) \in \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n]\,.$$

On a clairement $P_n \in \boldsymbol{I}^n\boldsymbol{R}[\overline{X}]$ d'après le choix de $a_{n,J}$ dans ($\diamond\diamond$) et, d'autre part, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\deg(P_n) \leqslant \sup\{|J| \mid a_{n,J} \neq 0\} \leqslant C(n+1)\,,$$

comme nous l'avons remarqué quelques lignes plus haut. Par conséquent, on a bien une expression de la forme

$$z = \sum\nolimits_n P_n(\xi_1, \ldots, \xi_\ell)\,,$$

vérifiant les conditions ($\mathbb{FC}$). ∎

4.1.5. Exercice. Montrer que l'inclusion $\boldsymbol{R}^\dagger \subseteq \widehat{\boldsymbol{R}}$ est une égalité.

4.1.6. Proposition

a) *Les éléments de* $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger$ *sont séries de* $\boldsymbol{A}^\dagger$ *à termes dans* $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}$.

b) *Le morphisme naturel* $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger$ *est bijectif et* $\mathbf{Gr}^*(\boldsymbol{A}) = \mathbf{Gr}^*(\boldsymbol{A}^\dagger)$ (cf. ([6]) *p.* 14).

c) *Le morphisme canonique* $\iota(\boldsymbol{A}^\dagger) : \boldsymbol{A}^\dagger \to (\boldsymbol{A}^\dagger)^\dagger$ *est bijectif.*

d) *Le complété* †*-adique d'une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre est une* $\boldsymbol{R}$*-sous-algèbre (*$\boldsymbol{I}$*-adiquement séparée) de* $\widehat{\boldsymbol{A}}$.

e) *Si* $\varphi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *est un morphisme de* $\boldsymbol{R}$*-algèbres, l'image de* $\boldsymbol{A}^\dagger$ *par* $\widehat{\varphi} : \widehat{\boldsymbol{A}} \to \widehat{\boldsymbol{B}}$ *est contenu dans* $\boldsymbol{B}^\dagger$. *Le morphisme* $\varphi^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ *défini par restriction de* $\widehat{\varphi}$ *est l'unique morphisme rendant*

commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{A} & \xrightarrow{\iota(\boldsymbol{A})} & \boldsymbol{A}^\dagger & \xrightarrow{\subseteq} & \widehat{\boldsymbol{A}} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi^\dagger}\downarrow & & {\scriptstyle\widehat{\varphi}}\downarrow \\ \boldsymbol{B} & \xrightarrow{\iota(\boldsymbol{B})} & \boldsymbol{B}^\dagger & \xrightarrow{\subseteq} & \widehat{\boldsymbol{B}} \end{array} \tag{‡‡}$$

f) *La correspondance* $(_)^\dagger : \mathbf{Alg}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Alg}_\sigma(\boldsymbol{R})$ ([17]) *qui fait correspondre* $\boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{A}^\dagger$ *et* $\varphi^\dagger$ *est fonctorielle, c'est le* «foncteur de complétion †-adique». *Le diagramme* (‡‡) *est fonctoriel.*

Indications. Pour (a,b), on suit de près la preuve de 1.5.1-0a. Il est tout d'abord clair que tout élément de $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger$ se réalise comme série de la forme $\mathbb{FC}$ (resp. $\mathbb{FC}\star$) à coefficients dans $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger$ l'inclusion $\boldsymbol{A}^\dagger \subseteq \widehat{\boldsymbol{A}}$ induit donc une application $\mu_r : \boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger \to \widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{A}}$ dont la composition avec le morphisme naturel $\nu_r : \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger$, à savoir la composition

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}} \xrightarrow{\nu_r} \frac{\boldsymbol{A}^\dagger}{\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger} \xrightarrow{\mu_r} \frac{\widehat{\boldsymbol{A}}}{\boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{A}}}\,, \tag{⋄}$$

est bijective d'après 1.5.1-0b ; l'injectivité de ν_r s'ensuit et sa surjectivité résulte de ce que

$$\sum\nolimits_{n\geqslant 0} P_n(x_1,\dots,x_\ell) = \sum\nolimits_{r>n\geqslant 0} P_n(x_1,\dots,x_\ell) \bmod \boldsymbol{I}^r\,,$$

pour toute série $\sum_{n\geqslant 0} P_n(x_1,\dots,x_\ell)$ vérifiant les conditions $\mathbb{FC}$. L'application ν_r dans (⋄) est donc bijective d'inverse μ_r ; par conséquent

$$\left(\boldsymbol{A}^\dagger \cap \boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{A}}\right) \subseteq \boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger\,,$$

et toute série de $\boldsymbol{A}^\dagger$ pouvant s'exprimer comme série de Cauchy à termes dans $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}$ appartient à $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger$.

L'assertion 0c est plus délicate et nous conseillons vivement de lire la preuve de [MW] (th. 1.2), nous donnons à continuation une preuve différente. On commence par remarquer que l'inclusion $\iota : \boldsymbol{A}^\dagger \subseteq \widehat{\boldsymbol{A}}$ induit un morphisme canonique $\hat{\iota} : (\boldsymbol{A}^\dagger)\widehat{\ } \to (\widehat{\boldsymbol{A}})\widehat{\ }$ dont les réductions modulo $\boldsymbol{I}^r$ sont bijectives d'après (b) et 1.5.1-0b ; on a donc $\ker(\hat{\iota}) \subseteq \bigcap_r \boldsymbol{I}^r((\boldsymbol{A}^\dagger)\widehat{\ })$ et $\hat{\iota}$ est injective puisque $(\boldsymbol{A}^\dagger)\widehat{\ }$ est séparé. Comme d'autre part $\widehat{\widehat{\boldsymbol{A}}} = \widehat{\boldsymbol{A}}$ d'après 1.4.22-0c, $\hat{\iota}$ est aussi surjective. Par conséquent $\boldsymbol{A}^{\dagger}\widehat{\ } = \widehat{\boldsymbol{A}}$, et un élément de $\boldsymbol{A}^{\dagger\dagger}$ est, d'après 4.1.4, une série $z \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ de la forme

$$z = \sum\nolimits_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_J\,\xi^J\,,\ \text{avec}\ |J| \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J)+1)\,, \tag{∗}$$

pour un certain $C \in \mathbb{R}_+$ et avec $\{\xi_1,\dots,\xi_\ell\} \subseteq \boldsymbol{A}^\dagger$.

Fixons maintenant, toujours par 4.1.4, une famille $\{\zeta_1,\dots,\zeta_s\} \subseteq \boldsymbol{A}$ et pour chaque $i = 1,\dots,\ell$ une expression

$$\xi_i = \sum\nolimits_{K\in\mathbb{N}^s} b_{i,K}\,\zeta^K\,,\ \text{avec}\ |K| \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(b_{i,K})+1)\,, \tag{∗′}$$

pour une constante $C \in \mathbb{R}_+$ que nous pouvons prendre égale à celle de (∗) quitte à prendre des constantes plus grandes. On a alors pour chaque $m \in \mathbb{N}$:

$$\xi_i^m = \sum\nolimits_{K_1,\dots,K_m\in\mathbb{N}^s} b_{i,K_1}\cdots b_{i,K_m}\,\zeta^{K_1+\cdots+K_m}\,,\qquad \forall i = 1,\dots,\ell\,, \tag{∗∗}$$

où par les inégalités (∗′) on a

$$|K_1+\cdots+K_m| \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(b_{i,K_1}\cdots b_{i,K_m})+m)\,, \tag{∗∗′}$$

[17] On rappelle que par l'indice 'σ' on désigne la sous-catégorie pleine des objets séparés (*cf.* 1.2.2).

de sorte que si nous reportons $(**)$ dans $(*)$, nous obtenons une famille sommable de termes de la forme

$$a_J \underbrace{(b_{1,K_{1,1}} \cdots b_{1,K_{1,j_1}}) \cdots (b_{r,K_{r,1}} \cdots b_{r,K_{r,j_\ell}})} \zeta^{(K_{1,1}+\cdots+K_{1,j_1})+\cdots+(K_{\ell,1}+\cdots+K_{r,j_\ell})}\,, \qquad (\diamond)$$

où par les inégalités $(**')$ on a

$$\begin{aligned} |(K_{1,1}+\cdots+K_{1,j_1})+\cdots+(K_{\ell,1}+\cdots+K_{\ell,j_\ell})| &\leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(b_{*,\bullet})+j_1+\cdots+j_\ell) \\ &\leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(b_{*,\bullet})+C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J)+1)) \\ &\leqslant C^2(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J\, b_{*,\bullet})+1)\,, \end{aligned}$$

si nous avions en plus pris le soin de prendre $C > 1$ ce qui est possible, et où la notation $b_{\star,\bullet}$ désigne le termes soulignés dans $(\diamond)$. Le regroupement des termes $(\diamond)$ suivant les sommes $K_{1,1}+\cdots+K_{\ell,j_\ell} \in \mathbb{N}^s$ montre alors que l'élément z de $(*)$ admet une représentation sous la forme $\mathbb{FC}^\star$ avec la constante C^2. Par conséquent $z \in \boldsymbol{A}^\dagger$ et nous avons prouvé l'égalité $\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}^{\dagger\dagger}$.

Pour prouver (d) on suit la même démarche que pour 3.1.8-0a, et (e) et (f) sont immédiates. ∎

4.1.7. Algèbres faiblement completes. Une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est dite «*faiblement complète*» lorsque le morphisme canonique $\iota(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\dagger$ est bijectif.

4.1.8. Exercices

a) Les algèbres $\boldsymbol{A}^\dagger$ sont faiblement complètes. (4.1.6-0c)

b) Si $\varphi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ est un morphisme surjectif de $\boldsymbol{R}$-algèbres, le morphisme induit $\varphi^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ est surjectif.

c) Un quotient séparé d'une algèbre faiblement complète est une algèbre faiblement complète. (*cf.* 1.4.25.)

d) Les algèbres faiblement complètes sont les quotients *séparés* des complétions faibles des algèbres de polynômes. (*cf.* 1.4.23-0b.)

4.2 Complétion †-adique des algèbres de type fini

Lorsque l'algèbre $\boldsymbol{A}$ est de type fini, la définition générale de la complétion faible admet une simplification importante dans la mesure où les systèmes de référence $\{x_1,\dots,x_\ell\}$ de 4.1.1, où $\{\xi_1,\dots,\xi_\ell\}$ de 4.1.4, peuvent être gardés fixes.

4.2.1. Proposition. *Si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini de générateurs algébriques $\{\xi_1,\dots,\xi_\ell\}$, les éléments de $\boldsymbol{A}^\dagger$ sont les séries*

$$z = \sum\nolimits_{n\geqslant 0} P_n(\xi_1,\dots,\xi_\ell) \in \widehat{\boldsymbol{A}}\,, \quad \textit{telles que} \quad \boxed{P_n \in \boldsymbol{I}^n\boldsymbol{R}[\overline{X}] \text{ et } \deg P_n \leqslant C(n+1)\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}} \qquad (\dagger)$$

$$z = \sum\nolimits_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_J\,\xi^J \in \widehat{\boldsymbol{A}}\,, \qquad \textit{telles que} \qquad \boxed{|J| \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J)+1)\,, \quad \forall J \in \mathbb{N}^\ell} \qquad (\dagger')$$

Démonstration. Corollaire rapide de 4.1.4 modulo l'exercice 4.1.2. ∎

4.3 Propriétés générales de la complétion †-adique

Le théorème suivant donne une liste de propriétés de la complétion †-adique partagées par la complétion formelle (1.5.1). Les démonstrations sont essentiellement les mêmes que pour 1.5.1 et sont laissées en exercice ou bien à consulter dans la référence [MW]. Une exception importante

concerne pourtant la preuve de la nœthérianité de $\boldsymbol{A}^\dagger$ qui exige de nouvelles idées (*cf. loc.cit*). Enfin, tout comme dans le cas formel, ces propriétés jouent un rôle très important dans la théorie de la cohomologie de de Rham.

4.3.1. Théorème. *On suppose l'anneau $\boldsymbol{R}$ noethérien.*

a) *Si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini et si $\boldsymbol{B}$ est une $\boldsymbol{A}$-algèbre, on a :*

- $(\boldsymbol{B})^\dagger_{\boldsymbol{R}}$ *: le complété †-adique de $\boldsymbol{B}$ en tant que $\boldsymbol{R}$-algèbre,*
- $(\boldsymbol{B})^\dagger_{\boldsymbol{A}}$ *: le complété †-adique de $\boldsymbol{B}$ en tant que $\boldsymbol{A}$-algèbre.*

Le morphisme naturel $(\boldsymbol{B})^\dagger_{\boldsymbol{R}} \to (\boldsymbol{B})^\dagger_{\boldsymbol{A}}$ est bijectif.

b) *Si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini, $\boldsymbol{A}^\dagger$ est noethérienne* ([18]), *on a donc*

$$(_)^\dagger : \mathbf{Alg}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Alg}_{\mathrm{noet.}}(\widehat{\boldsymbol{R}})\,.$$

c) *Si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini, $(\boldsymbol{A}^\dagger, \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger)$ est de Zariski,* i.e. $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger \subseteq \mathrm{Rad}(\boldsymbol{A}^\dagger)$. *En particulier, $z \in \boldsymbol{A}^\dagger$ est inversible si et seulement si, $\bar{z} \in \boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}$ est inversible.*

d) *Si $f, g \in \boldsymbol{A}$ sont tels que $D(\bar{g}) \subseteq D(\bar{f})$ dans $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{A})$, il existe un et un unique morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres $\rho^\dagger_{g,f} : \boldsymbol{A}_f{}^\dagger \to \boldsymbol{A}_g{}^\dagger$. De plus si $\nu_f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_f$ et $\nu_g : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_g$ sont les morphismes de localisation, on a $\nu_g{}^\dagger = \rho^\dagger_{g,f} \circ \nu_f{}^\dagger$.*

e) *Si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini, le morphisme naturel $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}}$ induit un* ***isomorphisme***

$$\boxed{\boldsymbol{A}^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\simeq} \left(\Omega^*_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}}\right)_\sigma}$$

Indication. Nous expliquons seulement l'inclusion $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger \subseteq \mathrm{Rad}(\boldsymbol{A}^\dagger)$. Référons-nous au paragraphe 4.2 et reprenons ses notations. Pour $z = \sum_J a_J\,\xi^J \in \boldsymbol{A}^\dagger$ et $y \in \boldsymbol{I}$ nous devons montrer que $1 - yz$ est inversible dans $\boldsymbol{A}^\dagger$. Nous savons déjà que l'inverse de $1 - yz$ dans $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est la série $\sum_{n\geqslant 0} y^n z^n$ (*cf.* la preuve de 1.5.1-0j p. 15) qui, par sommabilité, est aussi la somme de la famille

$$\mathcal{F} := \left\{ a_{J_1} \cdots a_{J_n}\, y^{|J_1+\cdots+J_n|}\, \xi^{J_1+\cdots+J_n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ J \in \mathbb{N}^r \right\}$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned} |J_1 + \cdots + J_n| = |J_1| + \cdots + |J_n| &\leqslant C\big(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_{J_1}) + \cdots + \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_{J_n}) + |J_1| + \cdots + |J_n|\big) \\ &\leqslant C\big(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}\left(a_{J_1} \cdots a_{J_n}\, y^{|J_1+\cdots+J_n|}\right)\big) \end{aligned}$$

et si nous regroupons les termes de $\mathcal{F}$ suivant la somme $J_1 + \cdots + J_n$, possible par la sommabilité des sous-familles d'une famille sommable dans un espace complet (1.4.20), nous constatons que la somme de $\mathcal{F}$ dans $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est une série $\sum_{J\in\mathbb{N}^r} b_J\,\xi^J$ telle que $|J| \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(b_J) + 1)$. ∎

4.3.2. Exercice. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini et $P \in \boldsymbol{A}[X]$. Donner des isomorphismes canoniques entre les algèbres suivantes

$$(\boldsymbol{A}[X]_P)^\dagger \qquad (\boldsymbol{A}^\dagger[X]_P)^\dagger \qquad \big(((\boldsymbol{A}^\dagger[X])^\dagger)_P\big)^\dagger$$

Indication. cf. 1.5.3.

[18] C'est un résultat dû à Fulton ([MW] p. 185) qui prouve que $\boldsymbol{A}^\dagger$ est noethérienne si $\boldsymbol{A}$ est de type fini. Dans le cas général, l'implication "$\boldsymbol{A}$ *noethérienne* $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}^\dagger$ *noethérienne*" ne semble pas établie contrairement au cas de la complétion formelle.

§5. Cohomologie de de Rham †-adique des algèbres

Nous définissons la cohomologie de de Rham †-adique d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini en général, nous introduisons la notion d'homotopie de morphismes d'algèbres et démontrons le «*théorème d'homotopie*» qui affirme que deux morphismes homotopes induisent le même morphisme en cohomologie.

À propos de la terminologie. La terminologie «†-*adique*» est la terminologie pour un couple $(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ générique. Dans le cas où $\boldsymbol{R}$ est un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique et de caractéristique résiduelle p, on parle plutôt de topologie p-adique, complétion p-adique (toujours formelle), complétion p-adique faible où †-adique, complexe de de Rham p-adique et cohomologie de de Rham p-adique.

5.1 Foncteurs complexe et cohomologie de Rham †-adique

Le foncteur «*complexe de de Rham †-adique*» est le foncteur qui associe à une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$ le complexe (4.3.1-0e)

$$\boxed{\left(\Omega^*_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}}\right)_\sigma = \boldsymbol{A}^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}$$

et à un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\varphi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ fait correspondre le morphisme de complexes

$$\Omega^*(\varphi)_\sigma : \left(\Omega^*_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}}\right)_\sigma \to \left(\Omega^*_{\boldsymbol{B}^\dagger/\boldsymbol{R}}\right)_\sigma$$

La «*cohomologie de de Rham †-adique*» d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$ est par définition

$$\boxed{\boxed{H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{K}) := h^*\left(\boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{R}} \left(\Omega^*_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}}\right)_\sigma\right) = h^*\left(\boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\right)}} \qquad (\mathbf{DR}^\dagger)$$

où $\boldsymbol{K}$ désigne le corps de fractions de $\boldsymbol{R}$.

5.1.1. Exemple : cohomologie de de Rham p-adique d'un ouvert principal de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}_p}$.

Il s'agit de la cohomologie du complexe de de Rham p-adique de l'anneau $\mathbb{Z}_p[X_1,\dots,X_n]_P$ pour $P \in \mathbb{Z}_p[\overline{X}]$. On pose donc

$$\Omega^*(D(P)/\mathbb{Q}_p) := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\overline{X}, 1/P]^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}_p[\overline{X}]_P} \Omega^*_{\mathbb{Z}_p[\overline{X}]_P/\mathbb{Z}_p},$$

où $\Omega_{\mathbb{Z}_p[X]_P/\mathbb{Z}_p} = \mathbb{Z}_p[X]_P \otimes_{\mathbb{Z}_p[X]} \Omega^*_{\mathbb{Z}_p[X]/\mathbb{Z}_p}$ par la propriété universelle de la localisation des complexes de de Rham algébriques ([19]), donc

$$\Omega^*(D(P)/\mathbb{Q}_p) := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\overline{X}, 1/P]^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}_p[\overline{X}]} \Omega^*_{\mathbb{Z}_p[\overline{X}]/\mathbb{Z}_p}$$

et comme $\Omega^k_{\mathbb{Z}_p[\overline{X}]/\mathbb{Z}_p} = \mathbb{Z}_p[\overline{X}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge^k_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^n$ on a

$$\boxed{\Omega^*(D(P)/\mathbb{Q}_p) := \mathbb{Z}_p[\overline{X}, 1/P]^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge^*_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^n}$$

Ainsi, si $\{dX_1,\dots,dX_n\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{Q}_p^n$, une k-forme différentielle p-adique

[19] Voir les notes du cours "*Cohomologie de de Rham dans la catégorie des Schémas*" §**1.4.4**.

s'écrit

$$\omega = \sum\nolimits_{i_1<\cdots<i_k} z_{i_1\cdots i_k}(\overline{X}, 1/P)\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}$$

où $z_{i_1\cdots i_k}(\overline{X}, 1/P) \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\overline{X}, 1/P]^\dagger$, et alors, tout comme dans le cas classique, on a

$$d\omega = \sum\nolimits_{i_1<\cdots<i_k} \sum\nolimits_{j=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial X_j}(\overline{X}, 1/P)\, dX_j \wedge \left(dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}\right).$$

5.1.2. Remarque. Bien que ce complexe ressemble beaucoup au complexe algébrique, sa cohomologie est bien différente. Par exemple, et c'est bien une propriété fondamentale, on aura

$$H_{\mathrm{DR}}(D(P_1)/\mathbb{Q}_p) = H_{\mathrm{DR}}(D(P_2)/\mathbb{Q}_p)$$

si $P_1 = P_2 \bmod p$, car ${\mathbb{Z}_p[\overline{X}]_{P_1}}^\dagger$ et ${\mathbb{Z}_p[\overline{X}]_{P_2}}^\dagger$ sont alors canoniquement isomorphes (4.3.1-0d), contrairement au cas algébrique (non complet) (*cf.* 3.1.2).

5.1.3. Un petit théorème de comparaison. Comme exemple du paragraphe 5.1.1, regardons la cohomologie p-adique de $D(X) \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}_p}$. Ici le complexe de de Rham †-adique est réduit à deux termes :

$$\mathbf{0} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger \xrightarrow{\partial_X} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger \to \mathbf{0}$$

et les éléments de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger$ sont somme de deux séries (*cf.* 1.4.24) $z \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X]^\dagger$ et $w \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X^{-1}\mathbb{Z}_p[1/X]^\dagger$. La série z admet toujours une primitive d'après 3.1.8-0b (en fait tout à été fait pour !). D'autre part, la série w se décompose en somme $w = a_1X^{-1} + w'$ avec $w' := \sum_{n\geqslant 2} a_n X^{-n}$. Une primitive (formelle) pour w' est

$$\int w' = \sum\nolimits_{n\geqslant 2} \frac{a_n}{-n+1} X^{-n+1}$$

de rayon de convergence $\mathcal{R}(\int w') = \mathcal{R}(w') > 1$ par la formule d'Hadamard (3.1.13-0a). On voit donc bien que tout 1-cocycle est cohomologue à un multiple de $\frac{dX}{X}$ qui, lui, n'est pas un cobord (en exercice).

Enfin, l'unicité de l'écriture des éléments de éléments de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger$ (*cf.* 1.4.24) montre aussitôt que l'égalité $dw = 0$ ne peut se produire que si w est un multiple de 1.

Par conséquent $H^0_{\mathrm{DR}}(D(X)^\dagger/\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p$, $H^1_{\mathrm{DR}}(D(X)^\dagger/\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p$, $H^k_{\mathrm{DR}}(D(X)^\dagger/\mathbb{Q}_p) = \mathbf{0}$, si $k > 1$.

Ces résultats numériques coïncident avec le cas algébrique, ce qui relève en fait d'un phénomène beaucoup plus intéressant : *le morphisme de complexes*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \to & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X] & \xrightarrow{\partial_X} & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X] & \to \mathbf{0} \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathbf{0} \to & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger & \xrightarrow{\partial_X} & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger & \to \mathbf{0} \end{array}$$

induit par l'inclusion de $\mathbb{Z}_p$-algèbres $\mathbb{Z}_p[X, 1/X] \subseteq \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger$, est un quasi-isomorphisme. ([20])

5.1.4. Exercice. Démontrez cette dernière affirmation.

[20] Plus généralement, si $\boldsymbol{A} := \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n, 1/X_1, \ldots, 1/X_r]$, avec $r \leqslant n$, le morphisme $\mathbb{Q}_p \otimes \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\mathbb{Z}_p} \to \mathbb{Q}_p \otimes \Omega^*_{\boldsymbol{A}^\dagger/\mathbb{Z}_p}$ est un quasi-isomorphisme. L'algèbre $\boldsymbol{A}$ est l'algèbre des fonctions régulières d'un « *diviseur à croisements normaux* », ce résultat montre que les nombres de Betti p-adiques (6.4) d'un tel ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_p}$ coïncident avec ceux de l'ouvert équivalent de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. C'est un résultat clef !

5.2 Homotopie de morphismes

La notion d'homotopie de morphismes est relative à une catégorie. Les paragraphes suivants rappellent sa définition dans les catégories des variétés différentielles, variétés algébriques, schémas et algèbres, et algèbres formellement et faiblement complètes.

5.2.1. Les cas topologique et différentiel. Deux morphismes de variétés différentielles (resp. espaces topologiques) $f_0, f_1 : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ sont «*homotopes*» s'il existe un morphisme de variétés différentielles (resp. application continue) $h : \boldsymbol{X} \times \mathbb{R} \to \boldsymbol{Y}$ tel que, si nous notons $\iota_t : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X} \times \mathbb{R}$ l'injection $x \mapsto (x, t)$, on a $f_i = h \circ \iota_i$

$$\begin{array}{ccccc} & & f_1 & & \\ & \overset{\iota_1}{\rightrightarrows} & & \overset{h}{\longrightarrow} & \\ \boldsymbol{X} & & \boldsymbol{X} \times \mathbb{R} & & \boldsymbol{Y} \\ & \underset{\iota_0}{\rightrightarrows} & & & \\ & & f_0 & & \end{array}$$

5.2.2. Le cas algébrique affine. La définition est la même que dans les cas précédents. Deux morphismes de variétés sur un corps $\boldsymbol{R}$ (resp. schémas sur un anneau $\boldsymbol{R}$) $f_0, f_1 : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ sont «*homotopes*» s'il existe un morphisme de variétés (resp. de schémas) $h : \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{R}} \mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{Y}$ tel que, si nous notons $\iota_t : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X} \times \mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$ l'immersion $x \mapsto (x, t)$, on a $f_i = h \circ \iota_i$

$$\begin{array}{ccccc} & & f_1 & & \\ & \overset{\iota_1}{\rightrightarrows} & & \overset{h}{\longrightarrow} & \\ \boldsymbol{X} & & \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{R}} \mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}} & & \boldsymbol{Y} \\ & \underset{\iota_0}{\rightrightarrows} & & & \\ & & f_0 & & \end{array}$$

Lorsque $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ sont affines d'anneaux de fonctions régulières les $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{A}$ respectivement, la notion d'homotopie se traduit en : deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\varphi_0, \varphi_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ sont «*homotopes*» s'il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\eta : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]$ tel que, si nous notons $p_t : \boldsymbol{B}[T] \to \boldsymbol{B}$ la projection de $T \mapsto t$, on a $\varphi_i = p_i \circ \eta$

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi_1 & & \\ & \overset{\eta}{\longrightarrow} & & \overset{p_1}{\rightrightarrows} & \\ \boldsymbol{A} & & \boldsymbol{B}[T] & & \boldsymbol{B} \\ & & & \underset{p_0}{\rightrightarrows} & \\ & & \varphi_0 & & \end{array}$$

5.2.3. Le cas des complétés. Comme dans le cas algébrique moyennant les complétions d'usage, tantôt la complétion formelle $\widehat{(_)}$, tantôt la complétion †-adique $(_)^\dagger$. Ainsi, deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\varphi_1, \varphi_2 : \widehat{\boldsymbol{A}} \to \widehat{\boldsymbol{B}}$ (resp. $\boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$) sont «*homotopes*» s'il existe un morphisme $\eta : \widehat{\boldsymbol{A}} \to \widehat{\boldsymbol{B}}[T]\widehat{\ }$ (resp. $\eta : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger[T]^\dagger$) tel que $\varphi_i = \widehat{p}_i \circ \eta$ (resp. $\varphi_i = {p_i}^\dagger \circ \eta$).

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi_1 & & \\ & \overset{\eta}{\longrightarrow} & & \overset{\widehat{p}_1}{\rightrightarrows} & \\ \widehat{\boldsymbol{A}} & & \widehat{\boldsymbol{B}}[T]\widehat{\ } & & \widehat{\boldsymbol{B}} \\ & & & \underset{\widehat{p}_0}{\rightrightarrows} & \\ & & \varphi_0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & \varphi_1 & & \\ & \overset{\eta}{\longrightarrow} & & \overset{{p_1}^\dagger}{\rightrightarrows} & \\ \boldsymbol{A}^\dagger & & \boldsymbol{B}^\dagger[T]^\dagger & & \boldsymbol{B}^\dagger \\ & & & \underset{{p_0}^\dagger}{\rightrightarrows} & \\ & & \varphi_0 & & \end{array}$$

5.2.4. Théorème d'homotopie. Le résultat suivant est vrai dans tous les contextes, topologique, différentiel et algébriques et la démarche à suivre pour le prouver est toujours la même à quelques petits détails techniques près, ceci nous autorise d'une certaine manière (manque de temps oblige), à nous limiter à ne détailler que le cas †-adique qui intéresse plus particulièrement ces notes. Le «*Lemme de Poincaré*» en est un corollaire immédiat.

5.2.5. Théorème. *Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{B}$, les morphismes $p_i{}^\dagger : \boldsymbol{B}[T]^\dagger \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}^\dagger$, $p_i(T) = i$ et $i = 0, 1$, induisent le même morphisme en cohomologie de de Rham †-adique.*

$$\boxed{H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{B}[T]^\dagger/\boldsymbol{K}) \underset{H_{\mathrm{DR}}(p_0)}{\overset{H_{\mathrm{DR}}(p_1)}{\rightrightarrows}} H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{B}^\dagger/\boldsymbol{K}), \quad H_{\mathrm{DR}}(p_0) = H_{\mathrm{DR}}(p_1)}$$

Démonstration. Le complexe de de Rham †-adique de $\boldsymbol{B}[T]^\dagger$ (5.1) est

$$\big(\Omega^*_{\boldsymbol{B}[T]^\dagger/\boldsymbol{R}}\big)_\sigma = \boldsymbol{B}[T]^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}[T]} \Omega^*_{\boldsymbol{B}[T]/\boldsymbol{R}}$$

et comme $\boldsymbol{B}[T] = \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{R}[T]$, on a l'égalité de complexes de de Rham ([21])

$$\big(\Omega^*_{\boldsymbol{B}[T]/\boldsymbol{R}}, d_*\big) = \big(\Omega^*_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{B},*}\big) \otimes_{\boldsymbol{R}} \big(\Omega^*_{\boldsymbol{R}[T]/\boldsymbol{R}}, d_*\big)$$

et alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}\Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}[T]/\boldsymbol{R}} &= \big(\Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega^0_{\boldsymbol{R}[T]/\boldsymbol{R}}\big) \oplus \big(\Omega^k_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega^1_{\boldsymbol{R}[T]/\boldsymbol{R}}\big)\\ &= \big(\Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{R}[T]\big) \oplus \big(\Omega^k_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{R}[T]\, dT\big)\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}[T]^\dagger/\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{B}[T]^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}[T]} \Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}[T]/\boldsymbol{T}} = \big(\boldsymbol{B}[T]^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}} \Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}\big) \oplus \big(\boldsymbol{B}[T]^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}} \Omega^k_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}\big)\, dT$$

de sorte que $\omega \in \Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}[T]^\dagger/\boldsymbol{R}}$ se décompose canoniquement en

$$\omega = w\alpha + z\beta\ dT\,, \text{ avec } w, z \in \boldsymbol{B}[T]^\dagger\,,\ \alpha \in \Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}\,,\ \beta \in \Omega^k_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}.$$

et alors

$$d\omega = d_{\boldsymbol{B}}(w\alpha) \pm \partial_T(w)\alpha\, dT + d_{\boldsymbol{B}}(z\beta)\, dT\,.$$

D'où l'implication

$$d\omega = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} d_{\boldsymbol{B}}(w\alpha) = 0 \\ \partial_T(w)\,\alpha = \mp d_{\boldsymbol{B}}(z\beta) \end{cases} \tag{$*$}$$

D'autre part, pour chaque $t \in \boldsymbol{R}$ on a

$$p_{t,*}(\omega) = w(t)\,\alpha + z(t)\,\beta\, dt = w(t)\,\alpha\,, \quad (\text{car } dt = 0),$$

et donc

$$p_{1,*}(\omega) - p_{2,*}(\omega) = \big(w(1) - w(0)\big)\,\alpha$$

Or, comme l'application $\boldsymbol{\partial_T : K \otimes_R B[T]^\dagger \to K \otimes_R B[T]^\dagger}$ est surjective ! on peut écrire

$$p_{1,*}(\omega) - p_{2,*}(\omega) = \big(w(1) - w(0)\big)\alpha = \int_0^1 \partial_T(w)\,\alpha\, dT \underset{\text{par } (*)}{=} \mp \int_0^1 d_{\boldsymbol{B}}(z\beta)\, dT \underset{\star}{=} \mp\, d_{\boldsymbol{B}}\Big(\int_0^1 z\, dT\Big)\,\beta \tag{$\diamond\diamond$}$$

où l'égalité $=_\star$ résulte de la commutation $\partial_T d_{\boldsymbol{B}} = d_{\boldsymbol{B}}\partial_T$, car pour vérifier que sur $\boldsymbol{K} \otimes \boldsymbol{B}[T]^\dagger$ on a égalité d'opérateurs

$$\int_0^1 d_{\boldsymbol{B}} = d_{\boldsymbol{B}} \int_0^1$$

il suffit de vérifier l'égalité

$$\int_0^T d_{\boldsymbol{B}} = d_{\boldsymbol{B}} \int_0^T$$

[21] Voir les notes du cours "*Cohomologie de de Rham dans la catégorie des Schémas*" § **2.4**.

et comme ces deux opérateurs produisent des fonctions qui s'annulent pour $T=0$, il suffit de vérifier que composés à ∂_T on a l'égalité, et ceci est immédiat grâce à la commutation de ∂_T et $d_{\boldsymbol{B}}$, en effet :

$$\partial_T \int_0^T d_{\boldsymbol{B}} = d_{\boldsymbol{B}}\,, \quad \text{et} \quad \partial_T\, d_{\boldsymbol{B}} \int_0^T = d_{\boldsymbol{B}}\, \partial_T \int_0^T = d_{\boldsymbol{B}}\,.$$

Ainsi, l'égalité $(\diamond\diamond)$ prouve que les cocycles $p_{t,*}(\omega)$ son bien cohomologues dans $\boldsymbol{K}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{B}^\dagger\otimes_{\boldsymbol{B}}\Omega^*_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}$.

Reste à regarder l'action de $p_{t,*}$ et degré 0. Dans ce cas, on remarque que, puisque $\boldsymbol{B}[T]^\dagger\subseteq\boldsymbol{B}[T]\widehat{\ }$ et que $\boldsymbol{B}[T]\widehat{\ }$ est le complété $\boldsymbol{I}$-adique par rapport au couple $(\boldsymbol{B};\boldsymbol{IB})$ (1.5.1-0e), les éléments de $\boldsymbol{B}[T]^\dagger$ ont une écriture unique comme séries $\sum_{n\geqslant 0} b_n T^n$ (1.4.23-0a) et alors, si $w\in\boldsymbol{B}[T]^\dagger$ est tel que $0=d(w)=\partial_T(w)\,dT+d_{\boldsymbol{B}}(w)$, on a $\partial_T(w)=0$ et w est indépendant de T, donc $p_{1,*}(w)=p_{0,*}(w)$. ∎

5.2.6. Corollaire. *Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini. Les morphismes $\iota:\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{A}[X]$ et $\pi_a:\boldsymbol{A}[X]\to\boldsymbol{A}$, pour tout $a\in\boldsymbol{A}$, induisent des morphismes inverses l'un de l'autre en cohomologie de de Rham †-adique.*

$$H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{K}) \xrightarrow{H_{\mathrm{DR}}(\iota)} H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}[X]^\dagger/\boldsymbol{K}) \xrightarrow{H_{\mathrm{DR}}(\pi_a)} H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{K})$$
$$\text{id}$$

Démonstration. Par le théorème 5.2.5, il suffit de regarder le cas $a=0$. Soit $h:\boldsymbol{A}[X]\to\boldsymbol{A}[X,T]$, le morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres défini par $X\mapsto XT$. Notons $p_i:\boldsymbol{A}[X,T]\to\boldsymbol{A}[X]$ les morphismes de $\boldsymbol{A}[X]$-algèbres définis par $T\mapsto i$ pour $i=0,1$. Encore une fois par 5.2.5, les morphismes $\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}[X]}=p_1\circ h$ et $p_0\circ h$ induisent le même morphisme en cohomologie, donc $p_0\circ h=\iota\circ\pi_0$ induit l'identité. Comme d'autre part $\pi_0\circ\iota=\mathrm{id}$, rien ne reste à prouver. ∎

5.2.7. Corollaire (lemme de Poincaré). *Si $\boldsymbol{R}[\overline{X}]$ est l'anneau de polynômes à n variables, les morphismes $\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{R}[\overline{X}]$ et $\pi_{\bar a}:\boldsymbol{R}[\overline{X}]\to\boldsymbol{R}$, $X_i\mapsto a_i$, pour tout $\bar a\in\boldsymbol{R}^n$, induisent des morphismes inverses l'un de l'autre en cohomologie de de Rham †-adique. En particulier*

$$H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{R}[\boldsymbol{X}]^\dagger/\boldsymbol{K})=\boldsymbol{K}\,,\qquad H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{R}[\boldsymbol{X}]^\dagger/\boldsymbol{K})=\boldsymbol{0}\,,\quad\forall i>0\,.$$

§6. Cohomologie de de Rham †-adique des schémas affines en caractéristique positive

6.1. Esquisse. Plaçons-nous dans le cadre de la catégorie des schémas affines de type fini sur un corps k de caractéristique positive p, ou ce qui revient au même, de la catégorie $\mathbf{Alg}_{\mathrm{tf}}(k)$ des k-algèbres de type fini. On cherche une définition fonctorielle d'une cohomologie de de Rham en caractéristique 0 sur $\mathbf{Alg}_{\mathrm{tf}}(k)$. Comme le corps k est le corps résiduel d'un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique $(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt par exemple) on cherche pour chaque k-algèbre, notée $\overline{\boldsymbol{A}}$, un «*relèvement*» $\boldsymbol{A}$ de $\overline{\boldsymbol{A}}$, *i.e.* une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ coïncide avec $\overline{\boldsymbol{A}}$. On pourrait prendre $\boldsymbol{A}=\overline{\boldsymbol{A}}$, mais alors $\boldsymbol{A}$, et donc $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ aussi, seraient de torsion sur $\boldsymbol{R}$ et alors $H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{K})=0$ puisque $\boldsymbol{K}\otimes_{\boldsymbol{R}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{0}$ (*cf.* 5.1 ($\mathbf{DR}^\dagger$)). On est ainsi

emmené à chercher des relèvements «*plats sur* $\boldsymbol{R}$» ([22]), mais cette contrainte ne peut pas toujours être satisfaite ! Elle l'est pourtant pour une classe suffisamment riche de k-algèbres, les «k*-algèbres lisses*» dont les exemples les plus immédiats sont précisément les algèbres $k[\overline{X}]_P$. Nous ne pouvons malheureusement pas les définir dans ces notes, mais il suffira de dire qu'elles constituent les modèles locaux pour les schémas lisses sur k, analogues des variétés algébriques non singulières, pour comprendre leur intérêt, tout comme dans le cadre différentiel ou algébrique ou analytique complexe, la connaissance du complexe de de Rham local permet d'atteindre la cohomologie de de Rham globale via le formalisme de Čech-de Rham.

Le résultat général concernant la problématique des relèvements plats est le suivant ([Ar,E]).

Théorème. *Pour toute algèbre* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *lisse sur* $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$*, il existe un relèvement* $\boldsymbol{A}$ *plat et de type fini sur* $\boldsymbol{R}$*. Pour deux tels relèvements* $\boldsymbol{A}_i$*, les algèbres* ${\boldsymbol{A}_i}^\dagger$ *sont isomorphes (non canoniquement !).*

De plus, pour tout morphisme de k*-algèbres lisses* $\overline{\varphi} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$*, il existe un morphisme* $\varphi^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ *dont la réduction coïncide avec* $\overline{\varphi}$*. Ce morphisme n'est pas unique, mais deux tels morphismes sont toujours homotopes.*

6.2. Foncteur de cohomologie de de Rham †-adique. Au vu du dernier théorème, on défini la cohomologie de de Rham †-adique d'une $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$ par

$$H_{\mathrm{DR}}(\overline{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{K}) := H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{K})$$

et le théorème d'homotopie 5.2.5 intervient maintenant de manière décisive pour démontrer

6.3. Théorème. *La correspondance qui associe*

$$\overline{\boldsymbol{A}} \rightsquigarrow H_{\mathrm{DR}}(\overline{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{K}), \quad (\overline{\varphi} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}) \rightsquigarrow \left(H_{\mathrm{DR}}(\varphi^\dagger) : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger\right)$$

est fonctorielle sur la catégorie des $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$*-algèbres lisses.*

6.4. Nombres de Betti. On rappelle pour terminer la notation pour les «*nombres de Betti*», *i.e.* les dimensions des groupes de cohomologie :

- $\mathbf{B}_{\mathrm{top},i}(\boldsymbol{X}/\mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}}(H^i(\boldsymbol{X}; \underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{X}}))$ ····· cohomologie de faisceaux sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$ du faisceau constant $\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{X}}$.
- $\mathbf{B}_{\mathrm{diff},i}(\boldsymbol{X}) = \dim_{\mathbb{R}}(H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}))$ ····· cohomologie du complexe des formes différentielles réelles d'une variété différentielle $\boldsymbol{X}$.
- $\mathbf{B}_{\mathrm{an},i}(\boldsymbol{X}) = \dim_{\mathbb{C}}(H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}))$ ····· hypercohomologie du complexe des faisceaux des formes différentielles holomorphes d'une variété analytique complexe $\boldsymbol{X}$.
- $\mathbf{B}_{K,i}(\boldsymbol{X}) = \dim_K(H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/K))$ ····· hypercohomologie du complexe des faisceaux des formes différentielles algébrique d'une variété algébrique $\boldsymbol{X}$ sur un corps K de caractéristique nulle.
- $\mathbf{B}_{\ell,i}(\boldsymbol{X}) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell}(H^i(\boldsymbol{X}; \underline{\mathbb{Q}}_\ell)$ ····· cohomologie de faisceaux pour la topologie étale sur une variété $\boldsymbol{X}$ sur un corps de caractéristique positive p à coefficients dans le faisceau constant $\underline{\mathbb{Q}}_\ell$ avec $\ell \neq p$.

[22] Sur un anneau principal $\boldsymbol{R}$ (anneaux des vecteurs de Witt par exemple) il y a équivalence entre «*plat sur* $\boldsymbol{R}$» et «*sans* $\boldsymbol{R}$*-torsion*»

- $\mathbf{B}_{p,i}(\boldsymbol{X}) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\mathbb{Q}_p))$ ····· cohomologie p-adique pour un schéma lisse $\boldsymbol{X}$ sur un corps de caractéristique positive p.

6.5. Exercice. Montrer que $\mathbf{B}_{p,i}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_p}) = \mathbf{B}_{\mathbb{C},i}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) = \mathbf{B}_{\mathrm{an},i}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) = \mathbf{B}_{\mathrm{top},i}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$.

§ 7. Références bibliographiques

[Ar] A. Arabia. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes ; Commentarii Mathematici Helvetici 76 (2001) 607–639. (avril 2000).

[B$_2$] N. Bourbaki. "*Commutative algebra*" ; Elements of mathematics. Herman (1972).

[C] H. Cartan. "*Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*" ; Enseignement des Sciences. Hermann, Paris (1961).

[E] R. Elkik. Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien ; Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, quatrième série, tome 6, pp. 553–604, (1973).

[J] N. Jacobson. "*Basic algebra II (second edition)*" ; W. H. Freeman and Company, New York, (1989).

[M] D. Meredith. Weak formal schemes ; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).

[MW] P. Monsky, G. Washnitzer. Formal cohomology : I ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217, (1968).

[Ser] J.-P. Serre. "*Corps locaux*" ; Actualités scientifiques et industrielles 1296. Hermann (1962).

§ 8. Index terminologique

écart, 6
élémentaire (ouvert), 18
évaluation (morphisme), 25

absolument convergente, 11
adhérence $\boldsymbol{I}$-adique, 3
adhérence de l'origine, 3
algèbre faiblement complète, 31
anneau de valuation discrète, 21
anneau de Zariski, 4
archimédien (non), 6

boule $\boldsymbol{I}$-adique, 2

catégorie des systèmes projectifs, 17
Cauchy
  critère de, 7
  série, 10
  suite, 8
$\mathbb{C}_p$, 22
commensurables, 7
complété (séparé) $\boldsymbol{I}$-adique, 9
complétion $\boldsymbol{I}$-adique, 9
complétion formelle, 10
complet (espace), 11, 12
constant
  (morphisme), 17
  (système projectif), 17
convergence
  domaine, 26
  rayon), 26
convergence faible, 24
critère de Cauchy pour les familles, 11

†-adique, 33
  (cohomologie de de Rham), 33
  (cohomologie), 25
  (complétion), 27
  (complexe de de Rham), 33
∂_X, 23
diadique (développement), 20
discontinu (totalement), 19
distance, 6
distance ultramétrique, 6
distances équivalentes, 7
diviseur à croisements normaux, 34
domaine
  de convegence, 26
  de définition, 25

entiers m-adiques, 19, 20
espace
  complet, 11, 12
  métrique, 6

faiblement complète (algèbre), 31

faiblement convergent, 24
filtré (module), 5
filtration, 14
    séparée, 14

Hadamard, 26
homotopes, 38

$\boldsymbol{I}$-adiquement séparé, 3

Laurent
    polynômes, 27
    série, 13
lemme de Poincaré, 35
limite
    d'une suite, 8
    projective, 18

métrique, 6
module filtré, 5
morphisme
    constant, 17
    d'évaluation, 25
    de systèmes projectifs, 17
morphismes homotopes, 35

ordre $\boldsymbol{I}$-adique, 5
ouvert $\boldsymbol{I}$-adique, 3
ouvert élémentaire, 18

plat (relèvement), 38
Poincaré (lemme), 35
polynômes de Laurent, 27
posséder des limites projectives, 18

$\mathbb{Q}_p \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p$, 22

radical (de Jacobson), 3
rayon de convergence, 26
relèvement, 22, 37
    plat, 38

séparé (filtration), 14
séparation $\boldsymbol{I}$-adique, 3
série, 10
    converge en a, 26
    convergente, 10
    de Cauchy, 10
    de Laurent, 13
    de terme général x_n, 10
sommable (famille), 11
sommes partielles, 10
sous-additivité, 8
suite
    constante, 9
    convergente, 8
    de Cauchy, 8
    limite, 8
système projectif, 17
    catégorie, 17
    constant, 17

topologie produit, 18
totalement discontinu, 19
trigonalisation, 4

valeur absolue, 7
valuation, 7
    discrète, 21

$\mathbb{Z}_m$, 19–21
$\mathbb{Z}_{(p)} \subseteq \mathbb{Z}_p$, 22
$\mathbb{Z}_p$, 21, 22, 26

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes
2008

Cohomologie de de Rham p-adique

"Contextes : différentiel, analytique et algébrique"

Alberto Arabia

Table des matières

§1. **Préliminaires** 2
1.1. Rappel sur les catégories d'objets au-dessus d'un objet donné 2
1.2. Catégories des espaces annelés 2
1.3. Catégories des espaces localement annelés 4
§2. **Tableau de catégories d'espaces localement annelés** 6
2.1. [I] Variétés topologiques 9
2.1.1. [I] $\mathcal{C}$. Objets et morphismes 9
2.1.1.1. Une équivalence de catégories 9
2.1.2. [I] $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Modèles locaux des variétés topologiques 9
2.2. [II] Variétés différentielles 9
2.2.1. [II] $\mathcal{C}$. Objets et morphismes 9
2.2.2. [II] $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Modèles locaux des variétés différentielles 10
2.2.3. [II] $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}}$. Complexe de de Rham 10
2.2.4. [II] Acyc. Acyclicité de chaque $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}}$ 11
2.2.5. [II] Ampl. Amplitude du complexe de de Rham 11
2.2.6. [II] LPG. Lemme de Poincaré global pour l'espace affine 11
2.2.7. [II] LPL. Lemme de Poincaré local 11
2.2.8. Récapitulatif 11
2.3. [III] Variétés analytiques complexes 11
2.3.1. [III] $\mathcal{C}$. Objets et morphismes 11
2.3.2. [III] $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Modèles locaux 12
2.3.3. [III] $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}}$. Complexe de de Rham 13
2.3.4. [III] Acyc. Acyclicité de chaque $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}}$ 13
2.3.4.1. Exemples d'espaces de Stein 13
2.3.4.2. Critère cohomologique pour être de Stein 13
2.3.5. [III] Ampl. Amplitude du complexe de de Rham 14
2.3.6. [III] LPG. Lemme de Poincaré global pour l'espace affine 14
2.3.7. [III] LPL. Lemme de Poincaré local 14
2.3.8. Récapitulatif 14
2.4. [IV] Variétés algébriques 14
2.4.1. Préliminaires 14
2.4.1.1. Fonctions régulières de l'espace affine 15
2.4.1.2. Ensembles algébriques affines sur k 15
2.4.1.3. Topologie de Zariski de $\boldsymbol{X}$ 15
2.4.1.5. Hypersurfaces et ouverts principaux de $\boldsymbol{X}$ 15
2.4.7. Fonctions régulières sur un ouvert principal de $\boldsymbol{X}$ 16
2.4.8. Faisceau des fonctions régulières sur $\boldsymbol{X}$ 16
2.4.9. Fonctions régulières sur un fermé de Zariski $\boldsymbol{Y}$ de $\mathbb{A}^n_k$ 17
2.4.10. Espace annelé associé à un fermé de Zaiski 17
2.4.1.11. Catégorie des variétés affines sur k 17
2.4.1.12. Une équivalence de catégories 18
2.4.14. Une autre équivalence de catégories 18
2.4.15. Affinité des ouverts principaux d'une variété affine 18
2.4.16. Variétés quasi-affines sur k 19
2.4.2. [IV] $\mathcal{C}$. Objets et morphismes 19
2.4.2.1. Variété algébrique sur k, par atlas 19
2.4.3. [IV] $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Modèles locaux 20
2.4.4. [IV] $\mathcal{M}(\mathcal{C})'$. Modèles locaux (équivalence) 20
2.4.5. [IV] $\underline{\Omega}_{\boldsymbol{X}^*}$. Complexe de Rham 20

2.4.6. [IV] Acyc. Acyclicité de chaque $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}}$ 20
2.4.7. [IV] Ampl. Amplitude du complexe de de Rham 20
2.4.8. [IV] LPL. Lemme de Poincaré local 20
2.4.9. [IV] LPG. Lemme de Poincaré global 21
2.4.10. Récapitulatif 21
2.5. [V] Schémas 21
§3. **Références bibliographiques** **21**
§4. **Index terminologique** **21**

§1. Préliminaires

On décrit les sous-catégories pleines de la catégorie d'espaces localement annelés respectivement des : variétés topologiques, variétés différentielles réelles, variétés analytiques complexes, variétés algébriques sur un corps algébriquement clos, et catégories des schémas sur un anneau.

1.1 Rappel sur les catégories d'objets au-dessus d'un objet donné

Soit $\mathcal{S}$ un objet d'une catégorie $\mathfrak{C}$. La catégorie $\mathfrak{C}_{\mathcal{S}}$ des « *objets de* $\mathfrak{C}$ *de base* $\mathcal{S}$ » ou des « *objets de* $\mathfrak{C}$ *au-dessus de* $\mathcal{S}$ », est la catégorie dont les objets sont les morphismes de but $\mathcal{S}$, *i.e.* les éléments $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{S})$, où $\mathcal{X}$ désigne un objet quelconque de $\mathfrak{C}$, et où les morphismes de $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ vers $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{Y}, \mathcal{S})$ sont les éléments $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ vérifiant $\alpha = \beta \circ \gamma$, soit

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow \\ \mathcal{S} \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix} \mathcal{Y} \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow \\ \mathcal{S} \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow_{\mathrm{def}} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{Y} \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & \oplus & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \mathcal{S} & = & \mathcal{S} \end{array}$$

1.1.1. Remarque. Le foncteur « *source* » de $\mathfrak{C}_{\mathcal{S}}$ vers $\mathfrak{C}$ qui fait correspondre à $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ l'objet $\mathcal{X}$ et à $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}_{\mathcal{S}}}(\alpha, \beta)$ le morphisme $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, est *fidèle*([1]) mais la catégorie $\mathfrak{C}_{\mathcal{S}}$ n'est pas une sous-catégorie de $\mathfrak{C}$.

1.2 Catégories des espaces annelés

On appelle ainsi la catégorie des « *espaces annelés* », *i.e.* des couples $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ où $\boldsymbol{X}$ est un espace topologique et $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est un faisceau d'anneau sur $\boldsymbol{X}$. On dit alors que $\boldsymbol{X}$ est l'« *espace topologique sous-jacent* » et $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ le « *faisceau structural* » de l'espace annelé $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$; on dira aussi que « *l'espace topologique* $\boldsymbol{X}$ *est annelé par le faisceau d'anneaux* $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ ». Un morphisme de $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ vers $(\boldsymbol{Y}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ est la donnée d'un couple $(f, f^\natural)$ où $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est une application continue et $f^\natural = f^{-1}\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ (ou, ce qui revient au même $f_* : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to f_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$) est un morphisme de faisceaux d'anneaux.

[1] Un foncteur « *covariant* » $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \rightsquigarrow \mathfrak{D}$ entre deux catégories est une correspondance qui associe à chaque objet $\boldsymbol{O} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ un objet $\mathcal{F}(\boldsymbol{O}) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{D})$ et a chaque morphisme $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2)$ un morphisme $\mathcal{F}(\alpha) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(\boldsymbol{O}_1), \mathcal{F}(\boldsymbol{O}_2))$ de sorte que $\mathcal{F}(\mathrm{id}_{\mathcal{O}}) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{O})}$ et $\mathcal{F}(\alpha \circ \beta) = \mathcal{F}(\alpha) \circ \mathcal{F}(\beta)$ à chaque fois que la composition a un sens. Le foncteur $\mathcal{F}$ est dit « *fidèle* » (resp. « *plein* », « *pleinement fidèle* ») lorsque l'application $\mathcal{F} : \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2) \to \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(\boldsymbol{O}_1), \mathcal{F}(\boldsymbol{O}_2))$ est injective (resp. surjective, bijective) quels que soient $\boldsymbol{O}_i \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$. Un foncteur $\mathcal{G} : \mathfrak{C} \rightsquigarrow \mathfrak{D}$ est dit « *contravariant* » lorsque la correspondance induite $\mathcal{G}^{\mathrm{op}} : \mathfrak{C} \rightsquigarrow \mathfrak{D}^{\mathrm{op}}$, où $\mathfrak{D}^{\mathrm{op}}$ désigne la catégorie opposée de $\mathfrak{D}$, est un foncteur covariant ; il est alors dit *fidèle, plein, pleinement fidèle* lorsque $\mathcal{G}^{\mathrm{op}}$ l'est.

1.2.1. Exemples. Les exemples suivants représentent deux situations opposées. Dans la première l'espace topologique ne joue aucun rôle tandis que dans la seconde la topologie détermine le faisceau d'anneaux.

a) Le couple $(\bullet\,;\boldsymbol{A})$ où ' $\bullet$ ' désigne l'espace topologique réduit à un point et $\boldsymbol{A}$ est un anneau, est un espace annelé. Dans ce contexte, un morphisme d'espaces annelés de $(\bullet\,;\boldsymbol{A})$ vers $(\bullet\,;\boldsymbol{B})$ est juste un morphisme d'anneaux $\alpha : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$. La correspondance

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &\rightsquigarrow (\bullet\,;\boldsymbol{A}) \\ \big(\alpha : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}\big) &\rightsquigarrow \Big((\mathrm{id}_\bullet\,;\alpha) : (\bullet\,;\boldsymbol{A}) \to (\bullet\,;\boldsymbol{B})\Big) \end{aligned}$$

est un foncteur **contravariant et pleinement fidèle** de la catégorie des anneaux vers la catégorie des espaces annelés.

b) Pour tout espace topologique $\boldsymbol{X}$ notons $\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}}$ le «*faisceau des fonctions localement constantes*» à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Si $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est continue, le faisceau $f^{-1}\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{Y}}$ s'identifie canoniquement à $\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}}$ et la composée d'une section σ de $\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{Y}}$ avec f est une section, notée $f^\natural\sigma$, de $\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}}$; l'application $f^\natural : \underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{Y}} \to \underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}}$ est alors un morphisme de faisceaux d'anneaux canoniquement associé à f. La correspondance

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &\rightsquigarrow (\boldsymbol{X};\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}})\,, \\ (f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}) &\rightsquigarrow \Big((f;f^\natural) : (\boldsymbol{X};\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}}) \to (\boldsymbol{Y};\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{Y}})\Big) \end{aligned}$$

est un foncteur ***covariant* et pleinement fidèle** de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des espaces annelés.

1.2.2. Notation. On notera **Esp-ann** la catégorie des espaces annelés. Si $(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})$ et un espace annelé, on notera $\mathbf{Esp\text{-}ann}_{(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})}$ la catégorie des espaces annelés au-dessus de $(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})$. Pour tout anneau $\boldsymbol{A}$, on note $\mathbf{Esp\text{-}ann}_{\boldsymbol{A}}$ la catégorie des espaces annelés au-dessus de $(\bullet\,;\boldsymbol{A})$ (*cf.* 1.2.1-0a), on l'appelle aussi la «*catégorie des espaces annelés de base* $\boldsymbol{A}$».

1.2.3. Proposition. *Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau. La catégorie* $\mathbf{Esp\text{-}ann}_{\boldsymbol{A}}$ *est équivalente à la catégorie des espaces annelés par un faisceau de $\boldsymbol{A}$-algèbres et où les morphismes $(f, f^\natural) : (\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \to (\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ sont les morphismes d'espaces annelés tels que $f^\natural : f^{-1}\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est un morphisme de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-algèbres.*

Indications. Un morphisme d'espaces annelés $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \to (\bullet\,;\boldsymbol{A})$ est simplement la donnée d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $c^{-1}\boldsymbol{A} \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ où $c : \boldsymbol{X} \to \bullet$ est l'application constante et $c^{-1}(\boldsymbol{A}) = \underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$ est le faisceau constant de fibre $\boldsymbol{A}$. Or, la donnée d'un homomorphisme de faisceaux d'anneaux de $\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$ vers $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ équivaut à la donnée, pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, d'un homomorphisme d'anneaux $\boldsymbol{A} \to \Gamma(U;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$, *i.e.* d'une structure de $\boldsymbol{A}$-algèbre sur $\Gamma(U;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$, de manière compatible aux morphismes de restriction $\Gamma(U;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \to \Gamma(V;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ pour $U \supseteq V$, c'est ce que l'on appelle la donnée d'une structure de faisceau de $\boldsymbol{A}$-algèbres sur $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$. La donnée d'un diagramme commutatif dans la catégorie **Esp-ann**

$$\begin{array}{ccc} (\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{(f,f^\natural)} & (\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}) \\ {\scriptstyle(\alpha,\alpha^\natural)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\beta,\beta^\natural)} \\ (\bullet\,;\boldsymbol{A}) & = & (\bullet\,;\boldsymbol{A}) \end{array}$$

équivaut au fait que le morphisme d'espaces annelés $(f, f^\natural)$ rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}} & = & \underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}} \\ {\scriptstyle f^{-1}(\beta^\natural)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^\natural} \\ f^{-1}\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} & \xrightarrow{f^\natural} & \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \end{array}$$

autrement dit, que $f^\natural$ est un morphisme de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-algèbres. ∎

1.3 Catégories des espaces localement annelés

Un espace annelé $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est dit «*localement annelé*» lorsque, pour tout $x\in\boldsymbol{X}$ l'anneau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$ des germes de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ en x, est un anneau *local*. Un «*morphisme d'espaces localement annelés*» est un morphisme d'espaces annelés $(f,f^\natural):(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\to(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ tel que pour tout $x\in\boldsymbol{X}$ le morphisme induit $f^\natural_x:\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y};f(x)}\to\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$ est *local*, *i.e.* vérifie

$$(f^\natural_x)^{-1}(\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x})=\mathfrak{M}_{\boldsymbol{Y};f(x)}\,,$$

où $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}$ (resp. $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{Y};f(x)}$) désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$ (resp. de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y};f(x)}$).

1.3.1. Notation. On notera **Loc-ann** la catégorie des espaces localement annelés. Si $(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})$ et un espace localement annelé, on notera $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})}$ la catégorie des espaces localement annelés au-dessus de $(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})$. Pour tout anneau local $\boldsymbol{A}$, on note $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{\boldsymbol{A}}$ la catégorie des espaces annelés au-dessus de $(\bullet;\boldsymbol{A})$ (*cf.* 1.2.1-0a), on l'appelle aussi la «*catégorie des espaces localement annelés de base* $\boldsymbol{A}$».

1.3.2. Remarque. Soit $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ un espace localement annelé et, pour $x\in\boldsymbol{X}$, notons $\mathcal{K}_{\boldsymbol{X};x}$ «*le corps résiduel*» de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$, *i.e.* $\mathcal{K}_{\boldsymbol{X};x}:=\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}/\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}$. Alors, le morphisme d'espaces annelés $(f,f^\natural):(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\to(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ est un morphisme de la catégorie **Loc-ann**, si et seulement si, le morphisme de corps $f^\natural_x:\mathcal{K}_{\boldsymbol{Y};f(x)}\to\mathcal{K}_{\boldsymbol{X};x}$, induit par $f^\natural_x:\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y};f(x)}\to\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$, est **injectif**, et ceci quel que soit $x\in\boldsymbol{X}$.

1.3.3. Commentaires. Dans ce qui précède il faut être prudent avec les notations $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}$ et $\mathcal{K}_{\boldsymbol{X};x}$ qui pourraient laisser penser à l'existence d'un sous-faisceau $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X}}$ de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ de fibres $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}$ tel que les fibres du faisceaux quotient $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{X}}=\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}/\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X}}$ s'identifient aux corps $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{X};x}$. Nous donnons à continuation un exemple et un contrexemple à cette propriété.

a) Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{M}$. Pour tout espace topologique $\boldsymbol{X}$ notons $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}:=\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$ le faisceau d'applications localement constantes de $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\boldsymbol{A}$ ([2]). L'espace annelé $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est localement annelé de fibres canoniquement isomorphes à $\boldsymbol{A}$. Montrer que les sections de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ à valeurs dans $\mathfrak{M}$ constituent un faisceau $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X}}$ sur $\boldsymbol{X}$ dont les fibres s'identifient aux idéaux maximaux $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}$ de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$; le quotient $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}/\mathcal{M}_{\boldsymbol{X}}$ est alors le faisceau de corps $\underline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{X}}$, où $\boldsymbol{K}$ désigne le corps résiduel de $\boldsymbol{A}$.

b) Soit $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels muni de sa topologie habituelle. Pour tout espace topologique $\boldsymbol{X}$ notons maintenant $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ le faisceau d'applications continues de $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (des «*fonctions réelles*»). Pour chaque $x\in\boldsymbol{X}$, l'anneau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$ est l'anneaux des germes de fonctions réelles définies au voisinage de x et l'application d'évaluation $\boldsymbol{e}_x:\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}\to\mathbb{R}$, $\boldsymbol{e}_x(g):=g(x)$, est surjective de noyau l'idéal maximal $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}\subseteq\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$. D'autre part, une fonction $f\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$ vérifiant $f(x)\neq 0$ étant inversible au voisinage de x, admet un inverse dans $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$. L'anneau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$ est donc local d'idéal maximal $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}$ et le couple $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est bien un espace *localement* annelé. Soient maintenant U un ouvert de $\boldsymbol{X}$ et $\sigma\in\Gamma(U;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ telle que $\sigma_u\in\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};u}$ pour tout $u\in U$. Compte tenu des définitions on a alors $\sigma(u)=0$ pour tout $u\in U$, autrement dit $\sigma=0$. Il n'existe donc pas de sous-faisceau $\mathfrak{N}_{\boldsymbol{X}}\subseteq\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ tel que $\mathfrak{N}_x=\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}$ pour tout $x\in\boldsymbol{X}$.

[2] On rappelle que l'expression «*faisceau d'applications de* $\boldsymbol{X}$ *à valeurs dans...*» est un raccourci pour «*faisceau des applications définies sur les ouverts de* $\boldsymbol{X}$ *à valeurs dans... dont les morphismes de restriction correspondent à la restriction d'applications*».

1.3.4. Exemples d'espaces localement annelés

a) Un espace topologique muni du faisceau des fonctions continues à valeurs dans un corps muni de la topologie discrète (*cf.* 1.3.3-0a).

b) Une variété différentielle munie du faisceau des fonctions réelles (ou complexes) différentiables.

c) Une variété analytique complexe munie du faisceau des fonctions holomorphes.

d) Une variété algébrique sur un corps algébriquement clos munie du faisceau des fonctions régulières.

Ces exemples relèvent de la propriété générale suivante

1.3.5. Proposition. *Soit k un corps.*

a) *Soit $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ un espace annelé par un sous-faisceau du faisceau de toutes les application ensemblistes de $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans k. On suppose que si g est une fonction de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ définie et non nulle en $x \in \boldsymbol{X}$, il existe une fonction h de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ définie en x et telle que gh est l'application constante égale à 1_k sur un voisinage de x. Alors,*

i) *$(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est localement annelé.*

ii) *Si de plus $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est un faisceau de k-algèbres, les corps résiduels $\mathcal{K}_{\boldsymbol{X},x}$ sont tous canoniquement isomorphes à k, quel que soit $x \in \boldsymbol{X}$.*

b) *Soient $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ et $(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ des espaces annelés au-dessus de k vérifiant les hypothèses de* 0a. *Le couple $(f, f^\natural)$ est un morphisme de $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ vers $(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$, **dans la catégorie** $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{\boldsymbol{k}}$, si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

i) *$f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est continue.*

ii) *Pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{Y}$ et $g \in \Gamma(U;\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$, on a $g \circ f \in \Gamma\big(U; f_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\big)$.*

iii) *$f^\natural$ est un morphisme de faisceaux de k-algèbres et $f^\natural(g) = g \circ f$.*

Démonstration

a) Soit $\boldsymbol{e}_x : \mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x} \to k$ l'application qui évalue une fonction au point x. Lorsque $g \notin \ker(\boldsymbol{e}_x)$, l'hypothèse dit que g est inversible dans $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$. L'anneau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$ est alors local d'idéal maximal $\ker(\boldsymbol{e}_x)$ puisque $\boldsymbol{e}_x$ n'est pas nulle. L'application naturelle $\mathcal{K}_{\boldsymbol{X},x} \to k$ est donc injective, et sera surjective si, de plus, $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est un faisceau de k-algèbres.

b) La suffisance est claire (*cf.* 1.2.3). Réciproquement, pour $x \in \boldsymbol{X}$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y},f(x)} & \xrightarrow{f_x^\natural} & \mathcal{O}_{\boldsymbol{X},x} \\ {\scriptstyle \boldsymbol{e}_{f(x)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{e}_x} \\ k & \xrightarrow{\xi} & k \end{array}$$

et l'existence (et unicité) de ξ résulte de ce que $f_x^\natural$ est local (*cf.* 1.3.2). Lorsque $(f, f^\natural)$ est, en plus, un morphisme d'espaces annelés au-dessus de k, le morphisme ξ est l'identité, on a donc :

$$f_x^\natural(g)(x) = g(f(x))\,,\ \forall x \in \boldsymbol{X}.$$ ∎

1.3.6. Remarque. La proposition 1.3.5 montre que dans le cas d'espaces annelés au-dessus d'un corps k et annelés par un faisceau de fonctions sur le même corps k, un morphisme d'espaces localement annelés est entièrement déterminé par l'application continue sous-jacente. Plus précisément ce théorème dit qu'une application continue $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ dont les composées avec les fonctions de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$ sont des fonctions de $\mathcal{O}_X$ détermine entièrement $f^\natural$. On aura ainsi remarqué la condition habituelle dans la définition des applications

différentiables (resp. holomorphes, algébriques, ...) entre variétés différentielles (resp. analytiques complexes, algébriques, ...) où une telle application est justement une application continue dont la composée avec les fonctions différentiables (resp. holomorphes, algébriques, ...) est du même type.

Le corollaire suivant de 1.3.5 est laissé en exercice.

1.3.7. Corollaire. *Les catégories suivantes sont équivalentes*

a) *La catégorie des espaces topologiques et la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Loc\text{-}ann}_k$ *des espaces annelés par le faisceau des applications localement constantes à valeurs dans le corps* k*.*

b) *La catégorie des variétés différentielles et la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{\mathbb{R}}$ *des variétés différentielles annelées par leur faisceaux des fonctions réelles différentiables.*

c) *La catégorie des variétés analytiques complexes et la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{\mathbb{C}}$ *des variétés analytiques complexes annelées par leur faisceaux des fonctions holomorphes.*

d) *La catégorie des variétés algébriques sur un corps algébriquement clos* k *et la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Loc\text{-}ann}_k$ *des variétés algébriques annelées par leur faisceaux des fonctions régulières.*

§2. Tableau de catégories d'espaces localement annelés

Dans le tableau ci-contre, la ligne **[A]** représente la catégorie des espaces annelés (resp. de base $(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})$) qui a fait l'objet de la section 1.2. La ligne **[B]** est la sous-catégorie des espaces *localement* annelés (resp. de base $(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})$) de la section 1.3. Les autres lignes concernent cinq sous-catégories pleines d'espaces localement annelés qui intéressent notre cours.

Les objets de l'une de ces catégories $\mathcal{C}$ s'obtiennent par recollement d'espaces d'une certaine sous-catégorie pleine $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ que l'on appelle «*sous-catégorie des modèles locaux de* $\mathcal{C}$». Tout ouvert de $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \in \mathcal{C}$ isomorphe à un modèle local est dit «*distingué* (*relativement à* $\mathcal{M}(\mathcal{C})$)». Il y a bien entendu beaucoup de sous-catégories de modèles locaux, et l'intérêt pour l'une ou l'autre dépend fortement des questions que l'on étudie. L'objectif de notre cours étant la comparaison de différentes théories cohomologiques sur chacune des catégories $\mathcal{C}$, le choix des modèles locaux est alors guidé par deux critères :

- "Simplicité" dans le calcul de ces cohomologies ; p.ex. trivialité ou simplifications dues à certaines équivalences de catégories remarquables (ligne $\boldsymbol{\mathcal{M}(\mathcal{C})'}$ du tableau).
- Possibilité de passer fonctoriellement, des cohomologies des modèles locaux (cohomologies locales) aux cohomologies de l'espace tout entier (cohomologies globales), via un formalisme combinatoire commun (cohomologie de Čech en l'occurrence).

  Cette condition se traduira dans notre cas par la recherche de l'acyclicité des termes des complexes de de Rham et par l'existence de recouvrements par des ouverts distingués dont les intersections finies sont également distinguées.

Dans chaque cas où cela a un sens nous indiquons le complexe de de Rham à considérer et en rappelons quelques propriétés importantes.

A	**Espaces annelés**				**(Esp-ann, Esp-ann$_{(S;\mathcal{O}_S)}$, Esp-ann$_A$)**
B	**Espaces *localement* annelés**				**(Loc-ann, Loc-ann$_{(S;\mathcal{O}_S)}$, Loc-ann$_A$)**
	I	**II**	**III**	**IV**	**V**
$\mathfrak{C}$	X^{top} = **variété topologique.** $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{top}}}$ = faisceau des fonctions réelles continues.	X^{diff} = **variété différentielle ; topologie ordinaire.** $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{diff}}}$ = faisceau des fonctions réelles différentiables.	X^{an} = **variété analytique complexe ; topologie ordinaire.** $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ = faisceau des fonctions complexes holomorphes.	X = **variété algébrique sur $k = \bar{k}$; topologie de Zariski.** $\mathcal{O}_X$ = faisceau des fonctions régulières sur k.	X = **schémas algébrique sur un anneau R ; topologie de Zariski.** $\mathcal{O}_X$ = faisceau structural.
$\mathcal{M}(\mathfrak{C})$	**Ouverts de $\mathbb{R}^n$** ——— **L'espace $\mathbb{R}^n$**	**Ouverts de $\mathbb{R}^n$** ——— **L'espace $\mathbb{R}^n$**	**Ouverts de $\mathbb{C}^n$** ——— **L'espace $\mathbb{D}^n$**	**Variétés algébriques affines sur $k = \bar{k}$** ——— **Fermés algébriques de $\mathbb{A}^n_k$**	**Schémas affines sur un anneau R** ——— **Spectre d'un anneau ; topologie de Zariski ; localisation.**
$\mathcal{M}(\mathfrak{C})'$				**k-algèbres réduites de type fini** morphismes de k-algèbres	**R-algèbres** morphismes de R-algèbres
$(\underline{\Omega}^*_X, d_*)$		**Complexe de de Rham** $(\underline{\Omega}^*_{X^{\mathrm{diff}}}; d_*)$ Formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ réelles.	**Complexe de de Rham** $(\underline{\Omega}^*_{X^{\mathrm{an}}}; d_*)$ Formes différentielles *holomorphes* complexes.	**Complexe de de Rham** $(\underline{\Omega}^*_{X/k}; d_*)$ Formes différentielles algébriques relatives à k.	**Complexe de de Rham** $(\underline{\Omega}^*_{X/R}; d_*)$ Formes différentielles algébriques relatives à R.
Acyc. de $\underline{\Omega}^i$		Chaque $\underline{\Omega}^i_{X^{\mathrm{diff}}}$ est acyclique, quelle que soit X^{diff}, puisque module sur le faisceau d'anneaux $\Omega^0_{X^{\mathrm{diff}}}$ qui est «*mou*».	Chaque $\underline{\Omega}^i_{X^{\mathrm{an}}}$ est acyclique si X est une variété de Stein.	Chaque $\underline{\Omega}^d_{X/k}$ est acyclique lorsque X est une variété affine.	Chaque $\underline{\Omega}^d_{X/R}$ est acyclique lorsque X est un schéma affine.
Ampl. de $\underline{\Omega}^*_X$		$\Omega^n_{X^{\mathrm{diff}}} = 0$ **si** $n > \dim_{\mathbb{R}}(X)$	$\Omega^n_{X^{\mathrm{an}}} = 0$ **si** $n > \dim_{\mathbb{C}}(X)$	$\Omega^n_{X/k} = 0$ **si** $n > \dim_k(X)$	$\Omega^n_{X/R} = 0$ **si** $n > \dim_R(X)$
LPG		**vrai**	**vrai**	**vrai si car(k) $\neq 0$**	**vrai si $\mathbb{Q} \subseteq R$**
LPL		**vrai**	**vrai**	**faux**	**faux**

Ampl. : Amplitude du complexe. LPG : Lemme de Poincaré global pour l'espace affine. LPL : Lemme de Poincaré local.

2.1 [I] Variétés topologiques

2.1.1 [I] $\mathcal{C}$. Objets et morphismes. Une «*variété topologique de dimension n*» est la donnée d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ et d'un «*atlas n-dimensionnel continu $\mathcal{A}$ pour $\boldsymbol{X}$*», *i.e.*:

i) D'un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

ii) D'une famille $\{\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ d'homéomorphismes [([3]) telle que les bijections, appelées «*applications de transition*»,

$$\Phi_{\beta,\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha,\beta}) \longrightarrow \phi_\beta(U_{\beta,\alpha})$$

sont *bicontinues* quels que soient $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$.]

Un «*morphisme de variétés topologiques*» $\varphi : (\boldsymbol{X}, \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})$ est alors une application continue $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ [([3]) telle que pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que $x \in U_\alpha$, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$ tel que $\varphi(x) \in U_\beta$, l'application

$$\phi_\beta \circ \varphi \circ \phi_{\alpha^{-1}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,,$$

qui est définie au voisinage de $\phi_\alpha(x)$, est *continue* au voisinage de $\phi_\alpha(x)$.]

2.1.1.1. Une équivalence de catégories. Faisons correspondre à une variété topologique $(\boldsymbol{X}; \mathcal{A})$ le couple $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ où $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est le «*faisceau d'applications continues de $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$*» (les fonctions réelles). On vérifie qu'une application entre variétés topologiques $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est continue, si et seulement si, $f \circ \varphi$ est continue pour toute $f \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$. Le morphisme de faisceaux $\varphi^\natural : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$, $f \mapsto f \circ \varphi$ est alors un morphisme de faisceaux de k-algèbres, et la correspondance

$$(\boldsymbol{X}, \mathcal{A}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{Xg})\,, \qquad \Big(\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}\Big) \rightsquigarrow \Big(\varphi^\natural : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\Big)$$

est fonctorielle et pleinement fidèle dans $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{\mathbb{R}}$, d'après la proposition 1.3.5.

!! *La catégorie des variétés topologiques coïncide avec la catégorie d'espaces localement annelés localement isomorphes à l'espace annelé associé à l'un des espaces topologiques $\mathbb{R}^n$.* !!

2.1.2 [I] $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Modèles locaux des variétés topologiques. Bien évidemment la famille d'espaces affines $\{\mathbb{R}^n \mid n = 0, 1, \ldots\}$ suffit, mais on rajoute souvent les parties ouvertes des $\mathbb{R}^n$ de sorte que si $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ sont des ouverts distingués de $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ l'intersection $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{V}$ l'est aussi.

———————×———————

2.2 [II] Variétés différentielles

2.2.1 [II] $\mathcal{C}$. Objets et morphismes. Une «*variété différentielle de dimension n*» est la donnée d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ et d'un «*atlas n-dimensionnel différentiable $\mathcal{A}$ pour $\boldsymbol{X}$*», *i.e.*:

i) D'un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

ii) D'une famille $\{\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ d'homéomorphismes telle que les bijections, appelées «*applications de transition*»,

$$\Phi_{\beta,\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha,\beta}) \longrightarrow \phi_\beta(U_{\beta,\alpha})$$

sont des *difféomorphismes* de classe $\mathcal{C}^\infty$ quels que soient $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$.

[3] Partie entre parenthèses superflue, on la laisse uniquement pour insister sur l'analogie avec les catégories des variétés différentielles, analytiques complexes, algébriques, ...

Un «*morphisme*» entre variétés différentielles $\varphi : (\boldsymbol{X}, \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})$ est alors la donnée d'une application continue $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ telle que pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que $x \in U_\alpha$, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$ tel que $\varphi(x) \in U_\beta$, l'application

$$\phi_\beta \circ \varphi \circ \phi_{\alpha^{-1}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,,$$

qui est définie au voisinage de $\phi_\alpha(x)$, est *différentiable* au voisinage de $\phi_\alpha(x)$.

2.2.1.1. La structure «*standard*» de variété différentielle sur $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}^n$ est celle donnée par l'atlas $\mathcal{A} = \{\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$. Plus généralement, la structure standard de variété différentielle d'un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est celle induite par la structure standard de $\mathbb{R}^n$.

2.2.1.2. On appelle «*fonction réelle d'une variété* $(\boldsymbol{X}; \mathcal{A})$» tout morphisme de variétés de $(\boldsymbol{X}; \mathcal{A})$ vers $\mathbb{R}$ muni de sa structure standard de variété différentielle. Le «*faisceau* $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ *de fonctions réelles sur* $\boldsymbol{X}$» est le faisceau dont les sections au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ est l'ensemble des fonctions réelles sur U. Comme la multiplication $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application différentiable, le faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est stable par multiplication de fonctions et c'est ainsi un faisceau de $\mathbb{R}$-algèbres.

On vérifie qu'une application continue $\varphi : (\boldsymbol{X}; \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})$ est un morphisme de variétés différentielles, si pour toute fonction réelle $f \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$ la composée $f \circ \varphi$ est une fonction réelle sur $(\boldsymbol{Y}, \mathcal{B})$, *i.e.* $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$. Le morphisme de faisceaux $\varphi^\natural : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_* \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$, $f \mapsto f \circ \varphi$ est alors un morphisme de faisceaux de k-algèbres, et la correspondance

$$(\boldsymbol{X}; \mathcal{A}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\,, \quad \Big(\varphi : (\boldsymbol{X}; \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})\Big) \rightsquigarrow \begin{cases} \varphi \;:\; \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y} \\ \varphi^\natural \;:\; \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_* \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\,, \quad f \mapsto f \circ \varphi \end{cases}$$

est fonctorielle et pleinement fidèle dans la catégorie $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{\mathbb{R}}$, d'après la proposition 1.3.5.

!! *La catégorie des variétés différentielles coïncide avec la catégorie d'espaces localement annelés localement isomorphes à l'espace annelé associé à l'une des variétés* $\mathbb{R}^n$. !!

2.2.2 [II] $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Modèles locaux des variétés différentielles. Comme dans le cas topologique on peut tantôt se limiter à la catégorie des espaces affines $\{\mathbb{R}^n \mid n = 0, 1 \ldots\}$ munis de leur structure standard de variété différentielle pour le cas des variétés séparés, tantôt considérer la catégorie des ouverts des espaces affines munis de leurs structures standard des variétés différentielles.

On démontre que toute variété différentielle connexe séparée localement difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ admet des recouvrements localement finis par des ouverts difféomorphes à $\mathbb{R}^n$ dont les intersections (finies) sont également difféomorphes à $\mathbb{R}^n$. De tels recouvrements sont appelés des «*bons recouvrements*».

2.2.3 [II] $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}}$. Complexe de de Rham. C'est le complexe $(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}}, d_*)$ des «*formes différentielles réelles sur* $\boldsymbol{X}$»; où $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}}$ est le faisceau des sections différentiables de l'«*algèbre extérieure réelle* $\bigwedge^*_{\mathbb{R}}(\mathcal{T}^*\boldsymbol{X})$» du fibré cotangent $\mathcal{T}^*\boldsymbol{X}$, et où d_* est la «*différentielle extérieure*» qui est un morphisme de faisceaux de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $d_i : \underline{\Omega}^i \to \underline{\Omega}^{i+1}$ vérifiant $d_{i+1} \circ d_i = 0$. (Chaps. §**1** et §**2** du cours.)

Pour tout ouvert d'un espace affine $U \subseteq \mathbb{R}^n$, on a $\underline{\Omega}^j_U = \mathcal{O}_U \otimes_{\mathbb{R}} \left(\bigwedge^j_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n\right)$, soit :

$$\underline{\Omega}^j_U = \bigoplus_{0 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant n} \mathcal{O}_U\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_j}$$

2.2.4 [II] Acyc. Acyclicité de chaque $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}}$. Résulte de prouver que le faisceau d'anneaux $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$ est mou, de faire appel au théorème qui affirme que tout $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$-module, par exemple chaque $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}}$, est mou aussi, et enfin à utiliser le théorème qui affirme qu'un faisceau mou est $\Gamma(\boldsymbol{X};_)$-acyclique. On trouvera dans le chapitre §**13** du cours une preuve de l'acyclicité des faisceaux $\underline{\Omega}^k_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$ qui ne fait pas allusion aux faisceaux mous mais qui en utilise les propriétés les plus importantes. Par conséquent, l'application canonique :

$$\boxed{h^\bullet\Gamma(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}) \xrightarrow[\simeq]{} I\!H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}})} \qquad (*_{\mathbb{R}})$$

est **bijective**.

2.2.5 [II] Ampl. Amplitude du complexe de de Rham. ([4]) Dans le cas connexe c'est évidemment l'intervalle $[0, \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{X})]$.

2.2.6 [II] LPG. Lemme de Poincaré global pour l'espace affine. Le lemme est vrai, se reporter au chapitre §**6** du cours.

2.2.7 [II] LPL. Lemme de Poincaré local. Vrai également puisque tout point admet une base de voisinages difféomorphes à l'espace affine.

Par conséquent, si $\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}$ est une variété différentielle de dimension n, le complexe de faisceaux

$$\mathbf{0} \longrightarrow \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}} \xrightarrow{\epsilon} \underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}} \xrightarrow{d_0} \underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}} \xrightarrow{d_1} \underline{\Omega}^2_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}} \xrightarrow{d_2} \cdots \underline{\Omega}^{\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{X})}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}} \longrightarrow \mathbf{0}$$

est exact et l'application induite par ε :

$$\boxed{H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{top}};\mathbb{R}_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow[\simeq]{} I\!H^\bullet(\boldsymbol{X};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}})} \qquad (**_{\mathbb{R}})$$

est **bijective**.

2.2.8 Récapitulatif. Pour les variétés différentielles on a des isomorphismes canoniques :

$$\boxed{\boxed{H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}};\mathbb{R}_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow[\simeq]{} I\!H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}) \xleftarrow[\simeq]{} h^\bullet\Gamma(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}) = \big(\Omega\big(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}\big)^*, d_*\big)}}$$

———————×———————

2.3 [III] Variétés analytiques complexes

2.3.1 [III] $\mathcal{C}$. Objets et morphismes. Les définitions sont identiques à celles des variétés différentielles à quelques différences près ; à savoir :

- Le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ est remplacé par le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. La topologie des espaces affines $\mathbb{C}^n$ est la topologie séparée de la métrique réelle habituelle.
- La « *différentiabilité* » est remplacée par « *différentiabilité complexe* » (ou« *holomorphie* »).

2.3.1.1. Une « *variété analytique complexe de dimension n* » est la donnée d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ et d'un « *atlas n-dimensionnel holomorphe $\mathcal{A}$ pour $\boldsymbol{X}$* », *i.e.* :

i) D'un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

[4] On appelle « *amplitude* » d'un module $\mathbb{Z}$-gradué C^* (et donc d'un complexe (C^*, d_*)) le plus petit intervalle entier $I = [m, n]$ tel que $C^i = 0$ pour tout $i \notin I$. On appelle « *amplitude cohomologique* » d'un complexe (C^*, d_*) l'amplitude du module de cohomologie $\{h^k(C^*, d_*)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

ii) D'une famille $\{\phi_\alpha : U_\alpha \to W_\alpha \subseteq \mathbb{C}^n\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ d'homéomorphismes sur de parties ouvertes W_α de $\mathbb{C}^n$, telle que les bijections, appelées «*applications de transition*», $$\Phi_{\beta,\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha,\beta}) \longrightarrow \phi_\beta(U_{\beta,\alpha})$$ sont des *homéomorphismes biholomorphes* quels que soient $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$.

Un «*morphisme de variétés analytiques complexes*» $\varphi : (\boldsymbol{X}, \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})$ est alors la donnée d'une application continue $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ telle que pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que $x \in U_\alpha$, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$ tel que $f(x) \in U_\beta$, l'application $$\phi_\beta \circ \varphi \circ \phi_{\alpha^{-1}} : W_\alpha \to W_\beta\,,$$ définie *a priori* seulement au voisinage de $\phi_\alpha(x)$, est *holomorphe* en $\phi_\alpha(x)$.

2.3.1.2. La structure «*standard*» de variété analytique complexe sur $\boldsymbol{X} = \mathbb{C}^n$ est celle donnée par l'atlas $\mathcal{A} = \{\mathrm{id} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n\}$. Plus généralement, la structure standard de variété analytique complexe d'un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}^n$ est celle induite par la structure standard de $\mathbb{C}^n$.

2.3.1.3. On appelle «*fonction holomorphe d'une variété* $(\boldsymbol{X}; \mathcal{A})$» tout morphisme de variétés de $(\boldsymbol{X}; \mathcal{A})$ vers $\mathbb{C}$ muni de sa structure standard de variété analytique complexe. Le «*faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ de fonctions holomorphes sur $\boldsymbol{X}$*» est le faisceau dont les sections au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur U. Comme la multiplication $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une application holomorphe, le faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est stable par multiplication de fonctions et c'est donc un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres.

On vérifie qu'une application continue $\varphi : (\boldsymbol{X}; \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})$ est un morphisme de variétés analytiques complexes, si et seulement si pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$ la composée $f \circ \varphi$ est une fonction holomorphe sur $(\boldsymbol{Y}, \mathcal{B})$, *i.e.* $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$. Le morphisme de faisceaux $\varphi^\natural : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_* \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$, $f \mapsto f \circ \varphi$ est alors un morphisme de faisceaux de k-algèbres, et la correspondance $$(\boldsymbol{X}; \mathcal{A}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\,, \quad \Big(\varphi : (\boldsymbol{X}; \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})\Big) \rightsquigarrow \begin{cases} \varphi \;:\; \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y} \\ \varphi^\natural \;:\; \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_* \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\,, \quad f \mapsto f \circ \varphi \end{cases}$$ est fonctorielle et pleinement fidèle dans la catégorie $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{\mathbb{C}}$, d'après la proposition 1.3.5.

!! *La catégorie des variétés analytiques complexes coïncide avec la catégorie d'espaces localement annelés localement isomorphes à l'espace annelé associé à un ouvert de l'une des variétés analytiques complexes $\mathbb{C}^n$.* !!

2.3.2 [III] $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Modèles locaux. Contrairement au cas topologique et différentiel, les espaces affines $\{\mathbb{C}^n \mid n = 0, 1 \ldots\}$ munis de leurs structures standard de variétés analytiques complexes ne suffisent plus à décrire toutes les variétés analytiques complexes. En effet, déjà sur la droite complexe $\mathbb{C}$, on sait d'après le théorème d'uniformisation de Riemann, que le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ n'est pas biholomorphiquement isomorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, mais deux disques bornés sont toujours biholomorphiquement isomorphes. Il s'ensuit que pour les variétés analytiques complexes de dimension 1, *i.e.* les surfaces de Riemann, le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ est un modèle local suffisant. Plus généralement, le produit $\mathbb{D}^n$ est un modèle local pour les variétés analytiques complexes de dimension n. La catégorie des modèles locaux pour les variétés analytiques complexes est la catégorie des ouverts des espaces affines $\mathbb{C}^n$ (où des $\mathbb{D}^n$) munis de leurs structures standard des variétés analytiques complexes.

2.3.3 [III] $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}}$. Complexe de de Rham

- L'algèbre extérieure réelle $\bigwedge_{\mathbb{R}}(\mathcal{T}^*\boldsymbol{X})$ du fibré cotangent est remplacée par algèbre extérieure *complexe* $\bigwedge_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}^*\boldsymbol{X})$. En particulier,

$$\textstyle\bigwedge^j_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}^*\boldsymbol{X}) = 0\,, \qquad \text{si} \quad j > \dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X})\,,$$

à la différence du cas réel où l'on aurait $\bigwedge^j_{\mathbb{R}}(\mathcal{T}^*\boldsymbol{X}) = 0$, seulement pour $j > 2\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X})$.

2.3.3.1. Le complexe de de Rham à considérer est celui des «*formes différentielles holomorphes*», c'est à dire le faisceau $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ des sections holomorphes du fibré $\bigwedge^\bullet_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}^*\boldsymbol{X})$. La «*différentielle extérieure complexe*» est un morphisme de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $d_i : \underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}} \to \underline{\Omega}^{i+1}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ vérifiant $d_{i+1} \circ d_i = 0$.

Pour tout ouvert d'un espace affine $U \subseteq \mathbb{C}^n$, on a $\underline{\Omega}^j_U = \mathcal{O}_U \otimes_{\mathbb{C}} \left(\bigwedge^j_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n\right)$, soit :

$$\underline{\Omega}^j_U = \bigoplus_{0 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant n} \mathcal{O}_U\, dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_j}\,.$$

2.3.3.2. Suite à la remarque précédente, le faisceau $\underline{\Omega}^j_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ est un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$-module cohérent.

2.3.4 [III] Acyc. Acyclicité de chaque $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}}$.

À la différence du cas différentiel réel, il n'existe pas dans le contexte holomorphe des fonctions à support compact non nulles, ni donc pas, non plus, des partitions de l'unité, de sorte que le faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ n'a aucune chance d'être mou. Il existe par contre une vaste catégorie d'espaces annelés sur lesquels les faisceaux $\underline{\Omega}^j_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ sont acycliques, il s'agit des «*espaces de Stein*» ([5]). On a :

Théorème B de Cartan. *Soit $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ un espace de Stein. Soit $\mathcal{M}$ un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules. Alors $H^{>0}(\boldsymbol{X}; \mathcal{M}) = 0$.*

2.3.4.1. Exemples d'espaces de Stein.

- Les espaces affines $\mathbb{C}^n$.
- Les fermés algébriques de $\mathbb{C}^n$ ([6]).
- Les ouverts algébriques principaux de $\mathbb{C}^n$.

2.3.4.2. Critère cohomologique pour être de Stein. Le critère pour être de Stein suivant est l'analogue exact du critère d'affinité de Serre (2.4.6) en géométrie algébrique et en théorie des schémas. C'est une réciproque du théorème **B** de Cartan.

Théorème. *Soit $(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})$ un espace analytique complexe irréductible. Les assertions suivantes sont équivalentes* ([7]).

a) *$(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})$ est un espace de Stein.*

---

[5] Voir chapitres VII et VIII (pp. 209, 243) de [GR]. On pourra s'y reporter également pour la définition de la catégorie d'«*espaces analytiques complexes*», sous-catégorie pleine de **Loc-ann**$_{\mathbb{C}}$ dont les espaces sont plus généraux que les «*variétés analytiques complexes*» en ce sens qu'ils peuvent être singuliers. La définition de la catégorie des espaces analytiques complexes est identique à celle des variétés algébriques complexes à ceci près que l'on remplace l'algébricité des fonctions par leur analyticité. L'article [GaGa] donne un aperçu très rapide de cette catégorie.

[6] La plupart du temps il s'agit d'espaces singuliers.

[7] Voir chap. VIII thm. 20 (p. 246) de [GR].

b) $H^{>0}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\mathcal{M})=0$ *pour tout* $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$*-module cohérent* $\mathcal{M}$.
c) $H^{>0}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\mathcal{I})=0$ *pour tout sous-*$\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$*-module cohérent* $\mathcal{I}$ *de* $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$.

2.3.4.3. La remarque 2.3.3.2 et le théorème **B** de cartan donnent l'acyclicité des $\underline{\Omega}^j_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ lorsque $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$ est un ouvert algébrique principal d'un espace affine complexe. Par conséquent, l'application canonique :

$$\boxed{h^\bullet\Gamma(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})\xrightarrow[\simeq]{}\mathbb{H}^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})}\qquad(*_{\mathbb{C}})$$

est **bijective** pour tout ouvert algébrique principal $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}\subseteq\mathbb{C}^n$.

2.3.5 [III] Ampl. Amplitude du complexe de de Rham. Il s'agit de $[0,\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}})]$. Le complexe de de Rham holomorphe d'une variété analytique complexe a donc une amplitude à priori moitié que celle du complexe de de Rham différentiel réel du même espace vu comme variété différentielle réelle.

2.3.6 [III] LPG. Lemme de Poincaré global pour l'espace affine. Il est vérifié et pour essentiellement les même raisons que dans le cas réel.

2.3.7 [III] LPL. Lemme de Poincaré local. Vrai également puisque tout point admet une base de voisinages isomorphes à l'espace affine.

Par conséquent, si $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$ est une variété analytique complexe, le complexe de faisceaux

$$\mathbf{0}\longrightarrow\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}\xrightarrow{\epsilon}\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}\xrightarrow{d_0}\underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}\xrightarrow{d_1}\underline{\Omega}^2_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}\xrightarrow{d_2}\cdots\underline{\Omega}^{\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X})}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}\longrightarrow\mathbf{0}$$

est exact et l'application induite par ε :

$$\boxed{H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{top}};\mathbb{R}_{\boldsymbol{X}})\xrightarrow[\simeq]{}\mathbb{H}^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})}\qquad(**_{\mathbb{C}})$$

est **bijective**.

2.3.8 Récapitulatif

a) Soit $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$ une variété analytique complexe, notons $\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}$ la variété différentielle réelle sous-jacente. On a des isomorphismes canoniques (*cf.* $(**_{\mathbb{R}})$ et $(**_{\mathbb{C}})$)

$$\boxed{\boxed{\mathbb{H}^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}})\xleftarrow[\simeq]{}H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{top}};\mathbb{R}_{\boldsymbol{X}})\xrightarrow[\simeq]{}\mathbb{H}^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})}}$$

b) Pour les variétés analytiques complexes **de Stein** on a des isomorphismes canoniques :

$$\boxed{\boxed{H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{top}};\mathbb{R}_{\boldsymbol{X}})\xrightarrow[\simeq]{}\mathbb{H}^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})\xleftarrow[\simeq]{}h^\bullet\Gamma(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})=\big(\Omega\big(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}\big)^*,d_*\big)}}$$

Par conséquent : *La cohomologie de de Rham d'une variété différentielle admettant une structure complexe qui en fait une variété analytique complexe de Stein est toujours nulle en degrés supérieurs à la moitié de la dimension.*

———————×———————

2.4 [IV] Variétés algébriques

2.4.1 Préliminaires. À la différence des catégories précédentes, les variétés algébriques ne sont pas *uniquement* des recollements d'un même espace ($\mathbb{R}^n$ dans le cas topologique ou différentiel réels,

$\mathbb{D}^n$ dans le cas analytique complexe) on recolle des espaces plus généraux appelés des «*variétés (algébriques) affines (sur k)*». Les paragraphes suivants rappellent leur définition.

2.4.1.1. Fonctions régulières de l'espace affine. On note $\mathbb{A}^n_k$ le «*k-espace affine de dimension n*». On appelle «*fonction régulière*» sur $\mathbb{A}^n_k$ toute «*application polynomiale*» $f : \mathbb{A}^n_k \to k$. Si nous fixons un repère affine pour $\mathbb{A}^n_k$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ l'application f s'exprime sous la forme d'un polynôme unique $F(X_1, \dots, X_N) \in k[\overline{X}]$ (puisque k est infini). La multiplication des fonctions régulières est une fonction régulière et l'ensemble $\mathcal{R}(\mathbb{A}^n_k)$ de telles applications est muni d'une structure canonique d'anneau isomorphe à l'anneau $k[\overline{X}]$ des polynômes à n variables et coefficients dans k.

! *Dans les sous-paragraphes suivants nous notons* ***provisoirement*** $\boldsymbol{X} := \mathbb{A}^n_k$ *et donc* $\mathcal{R}(\boldsymbol{X}) := \mathcal{R}(\mathbb{A}^n_k)$. !

2.4.1.2. Ensembles algébriques affines sur k. On appelle «*sous-ensemble algébrique de $\boldsymbol{X}$*» toute partie $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X}$ pour laquelle il existe une famille de fonctions $\{f_\alpha \in \mathcal{R}(\boldsymbol{X})\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ telle que :

$$\boldsymbol{Y} = \big\{x \in \boldsymbol{X} \;\big|\; f_\alpha(x) = 0\,, \forall \alpha \in \mathfrak{A}\big\}\,.$$

Il est clair que $\boldsymbol{Y}$ est aussi l'«*ensemble des zéros*» des fonctions de l'idéal $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\rangle$ engendré par la famille $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$; nous pouvons donc tout aussi bien déclarer qu'un sous-ensemble algébrique de $\boldsymbol{X}$ est l'ensemble des «*zéros d'un idéal $\boldsymbol{I}$ de $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})$*» noté :

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I}) = \big\{x \in \boldsymbol{X} \;\big|\; f(x) = 0\,, \forall f \in \boldsymbol{I}\big\}\,.$$

Lemme. *Soient $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{I}_\alpha$ des idéaux. On a* ([8]) *:*

$$\bullet\ \boldsymbol{Z}(\langle 1\rangle) = \varnothing \text{ et } \boldsymbol{Z}(\langle 0\rangle) = \boldsymbol{X}\,, \quad \bullet\ \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I}) \cup \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{IJ})\,, \quad \bullet\ \textstyle\bigcap_\alpha \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I}_\alpha) = \boldsymbol{Z}(\sum_\alpha \boldsymbol{I}_\alpha)$$

Par conséquent, les sous-ensembles algébriques de $\boldsymbol{X}$ sont les fermés d'une topologie.

2.4.1.3. Topologie de Zariski de $\boldsymbol{X}$. On appelle ainsi la topologie de $\boldsymbol{X}$ dont les fermés sont ses sous-ensembles algébriques, appelés dorénavant «*les fermés de Zariski de $\boldsymbol{X}$*».

2.4.1.4. Exercice. Montrer que si k est un corps infini (p.ex. algébriquement clos), la topologie de Zariski de $\boldsymbol{X}$ n'est jamais séparée. Qu'en est-t-il si k est un corps fini ?

2.4.1.5. Hypersurfaces et ouverts principaux de $\boldsymbol{X}$. On appelle «*hypersurface de $\boldsymbol{X}$*» l'ensemble des zéros d'une seule fonction $f \in \mathcal{R}(\boldsymbol{X})$, on la note $\boldsymbol{Z}(f)$, son complémentaire est un «*ouvert principal*» et est noté $D(f)$.

2.4.1.6. Proposition

a) *Pour tous $f, g \in \mathcal{R}(\boldsymbol{X})$ on a $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.*

b) *Les ouverts principaux de $\boldsymbol{X}$ constituent une base d'ouverts pour la topologie de Zariski.*

c) *$\boldsymbol{X}$ est quasi-compacte.*

---

[8] On note $\boldsymbol{IJ}$ l'ensemble des sommes finies $\sum_i f_i g_i$ avec $f_i \in \boldsymbol{I}$ et $g_i \in \boldsymbol{J}$; c'est un idéal de $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})$.
Si $\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{J}$ sont des idéaux, on a $(\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{J} = \boldsymbol{I}_1\boldsymbol{J} + \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{J}$.

d) *Si k est algébriquement clos on a $D(f) \supseteq D(g)$, si et seulement si $g \in \sqrt{\langle f \rangle}$* ([9]). *En particulier, $D(f) = \boldsymbol{X}$, si et seulement si f est inversible.*

Commentaires sur la preuve. L'assertion (a) résulte aussitôt du fait que k est un corps. (b) puisque si $x \notin \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I})$, il existe $f \in \boldsymbol{I}$ telle que $f(x) \neq 0$ auquel cas $x \in D(f) \subseteq \complement\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I})$. (c) Admet deux justifications, la «*quasi-compacité*» est la propriété qui dit que de tout recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini, propriété équivalente à dire que si une famille décroissante de fermés est d'intersection vide alors l'un des fermés de la famille est vide. Or, à une suite décroissante de fermés correspond une suite croissante d'idéaux de $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})$ est comme cet anneau est noethérien, la suite d'idéaux est stationnaire de même alors que la suite de fermés ; etc. Une autre preuve (valable dans le cas non noethérien et plus généralement dans le contexte des schémas affines) repose sur (b), en effet tout recouvrement ouvert admet un raffinement par des ouverts principaux et si $\boldsymbol{X} = \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} D(f_\alpha)$, alors $\varnothing = \boldsymbol{Z}(\langle f_\alpha\rangle)$ et $\langle f_\alpha\rangle = \langle 1\rangle$ (car k est algébriquement clos), mais alors $1 \in \langle f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_r}\rangle$ pour une certaine famille finie $\{f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_r}\}_{\alpha_i\in\mathfrak{A}}$, autrement dit $\boldsymbol{X} = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant r} D(f_{\alpha_i})$. (d) est conséquence du théorème des zéros de Hilbert qui affirme que la correspondance bijective entre les sous-ensembles algébriques de $\boldsymbol{X}$ et les idéaux *radicaux* de $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})$. L'assertion (d) est fausse si k n'est pas algébriquement clos, par exemple dans $\mathbb{R}[X]$ on a $D(X^2+1) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$. ∎

2.4.1.7. Fonctions régulières sur un ouvert principal de $\boldsymbol{X}$. Soit f une fonction régulière non nulle de $\boldsymbol{X}$. Toute fonction régulière $g : \boldsymbol{X} \to k$ donne, par restriction, une application $g : D(f) \to k$ et cette correspondance est injective puisque k est infini. De plus l'application $f : D(f) \to k$ est nulle part nulle. On défini alors l'anneau des «*fonctions régulières sur l'ouvert principal $D(f)$*» comme le localisé de $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})$ en f, on pose donc $\mathcal{R}(D(f)) := \mathcal{R}(\boldsymbol{X})_f$ ([10]). On a ainsi le morphisme canonique de «*restriction de fonctions régulières*» $\rho^1_f : \mathcal{R}(D(1)) \to \mathcal{R}(D(f))$ défini par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(\boldsymbol{X}) & \overset{\rho^1_f}{\dashrightarrow} & \mathcal{R}(D(f)) \\ \| & & \| \\ \mathcal{R}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\nu_f} & \mathcal{R}(\boldsymbol{X})_f\,, \quad x \mapsto \frac{x}{1}. \end{array} \tag{ρ}$$

2.4.1.8. Faisceau des fonctions régulières sur $\boldsymbol{X}$. D'après 2.4.1.6-0d, l'inclusion $D(f) \supseteq D(g)$ implique que f est inversible dans $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})_g$ de sorte que le morphisme canonique de restriction d'algèbres $\rho : \mathcal{R}(\boldsymbol{X}) \to \mathcal{R}(D(g))$ se factorise d'une et une unique manière à travers $\mathcal{R}(D(f))$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}(\boldsymbol{X}) = \mathcal{R}(D(1)) & & \xrightarrow{\qquad\rho^1_g\qquad} & & \mathcal{R}(D(g)) \\ \| & & & & \| \\ \mathcal{R}(D(1)) & \xrightarrow{\rho^1_f} & \mathcal{R}(D(f)) & \xrightarrow{\rho^f_g} & \mathcal{R}(D(g)) \end{array}$$

La correspondance $D(f) \rightsquigarrow \mathcal{R}(\boldsymbol{X})_f$, $\big(D(f) \supseteq D(g)\big) \rightsquigarrow \rho^f_g$ est un préfaisceau de k-algèbres $\mathcal{A}_{\boldsymbol{X}}$ sur la catégorie des ouverts principaux de $\boldsymbol{X}$ et comme ces ouverts sont une base pour la topologie de Zariski de $\boldsymbol{X}$ (2.4.1.6-0b), les germes de $\mathcal{A}_{\boldsymbol{X}}$ définissent un «*espace étalé au-dessus de $\boldsymbol{X}$*» ([11])

[9] Pour tout idéal $\boldsymbol{I}$ on note $\sqrt{\boldsymbol{I}}$ son «*radical*», *i.e.* l'ensemble des f telles que $f^N \in \boldsymbol{I}$ pour $N \gg 0$. On a $\sqrt{\boldsymbol{I}} = \sqrt{\sqrt{\boldsymbol{I}}}$. On appelle «*radical*» tout idéal $\boldsymbol{I}$ tel que $\boldsymbol{I} = \sqrt{\boldsymbol{I}}$.

[10] Se reporter au chapitre § **16** du cours.

[11] Voir [Go] chap. II § **1.2** p. 110.

dont les sections locales continues donnent le «*faisceau des fonctions régulières de* $\boldsymbol{X}$» noté $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$. Le couple $(\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est l'espace annelé associé à l'espace affine $\boldsymbol{X} = \mathbb{A}^n_k$.

2.4.1.9. Fonctions régulières sur un fermé de Zariski $\boldsymbol{Y}$ de $\mathbb{A}^n_k$. On procède comme pour les ouverts principaux 2.4.1.7. Soit $\boldsymbol{Y}$ un fermé de Zariski de $\boldsymbol{X}$. On appelle «*fonction régulière sur* $\boldsymbol{Y}$» et l'on note $\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})$ leur ensemble, toute application de $\boldsymbol{Y}$ vers k induite par une application régulière de $\boldsymbol{X}$. Si nous notons $\mathcal{I}(\boldsymbol{Y})$ l'idéal des fonctions de $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})$ qui s'annulent sur $\boldsymbol{Y}$, on a clairement

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\mathcal{R}(\boldsymbol{X})}{\mathcal{I}(\boldsymbol{Y})} \qquad (\diamond)$$

Proposition. *L'anneau $\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})$ est une k-algèbre de type fini réduite*, i.e. *sans élément nilpotent.*

2.4.1.10. Espace annelé associé à un fermé de Zaiski. La démarche pour définir la topologie de Zariski de $\boldsymbol{Y}$, puis le faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$ des k-algèbres régulières sur $\boldsymbol{Y}$, est rigoureusement la même que celle des paragraphes précédents en remplaçant $\boldsymbol{X}$ par $\boldsymbol{Y}$.

Théorème ([14])

a) *Pour tout ouvert principal $D(f) \subseteq \boldsymbol{Y}$, on a $\Gamma\big(D(f); \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}\big) = \mathcal{R}(\boldsymbol{Y})_f$.*

b) *L'anneau des germes du faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$ en $y \in \boldsymbol{Y}$ est isomorphe à l'anneau local $\mathcal{R}(Y)_{\mathfrak{M}_y}$ où $\mathfrak{M}_y$ désigne l'idéal (maximal) de $\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})$ des fonctions qui s'annulent en y ([15]).*

! *À partir de maintenant la notation '$\boldsymbol{X}$' cesse de référer uniquement aux espaces affines.* !

2.4.1.11. Catégorie des variétés affines sur $\boldsymbol{k}$. Nous appellerons «*variété (algébrique) affine sur* k» la donnée d'un fermé de Zariski d'un espace affine sur k muni de sa topologie de Zariski ([16]). Un «*morphisme de variétés affines de* $\boldsymbol{X}$ *vers* $\boldsymbol{Y}$» est une application continue $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ telle que pour toute fonction régulière $f : \boldsymbol{Y} \to k$ la composée $f \circ \varphi : \boldsymbol{X} \to k$ soit une fonction régulière. On remarquera le lemme suivant qui donne une définition alternative de morphisme entre variétés algébriques affines.

Lemme. *Supposons $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{A}^n_k$ et $\boldsymbol{Y} \subseteq \mathbb{A}^m_k$. Un morphisme de variétés algébriques de $\boldsymbol{X}$ vers $\boldsymbol{Y}$ est la restriction d'une application polynomiale de $\mathbb{A}^n_k$ vers $\mathbb{A}^m_k$.*

Indication. Soit $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ un morphisme de variétés affines. Fixons un repère affine sur $\mathbb{A}^n_k$ (resp. sur $\mathbb{A}^m_k$) de coordonnées $\overline{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ (resp. $\overline{Y} := \{Y_1, \ldots, Y_m\}$). Pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$ on a

$$\varphi(x) = \big(Y_1(\varphi(x)), \ldots, Y_m(\varphi(x))\big)$$

Or, chaque $Y_i \circ \varphi$ étant une fonction régulière de $\boldsymbol{X}$ par définition de morphisme, c'est la restriction d'une fonction régulière de $\mathbb{A}^n_k$ (2.4.1.9-($\diamond$)) par exemple de la fonction polynomiale $P_i(\overline{X}) \in \mathcal{R}(\mathbb{A}^n_k)$.

[14] Voir [**Har**] chap. I §**3** th. **3.2** p. 17, et chap II §**2** prop. **2.2** p. 71.

[15] Ce que nous notions $\mathcal{I}(y)$ en 2.4.1.9.

[16] On défini parfois une variété affine comme un fermé de Zariski *irréductible*, *i.e.* tel qu'il ne peut être réalisé comme réunion de deux fermés plus petits (*cf.* [Har] chap. I §**1** p. 3)

On a donc
$$\varphi(x) = \big((Y_1 \circ \varphi)(x), \dots, (Y_m \circ \varphi)(x)\big) = \big(P_1(\overline{X}(x)), \dots, P_m(\overline{X}(x))\big)\,,$$
où, bien évidemment, l'application $x \mapsto \big(P_1(\overline{X}(x)), \dots, P_m(\overline{X}(x))\big)$ est une application polynomiale de $\mathbb{A}_k^n$ vers $\mathbb{A}_k^m$. ∎

2.4.1.12. Une équivalence de catégories. Dans le paragraphe 2.4.1.10 nous avons associé à chaque variété affine $\boldsymbol{X}$ l'espace localement annelé sur k noté $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$. Si maintenant on se donne un morphisme de variétés algébriques $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, la composition par φ définit, pour chaque $f \in \mathcal{R}(\boldsymbol{Y})$, un morphisme de k-algèbres $\varphi^\sharp(D(f)) : \mathcal{R}(D(f)) \to \mathcal{R}(D(f \circ \varphi)) = \mathcal{R}(\varphi^{-1}(D(f)))$, tel que les diagrammes pour $D(f) \supseteq D(g)$:
$$\begin{array}{ccc} \Gamma\big(D(f); \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}\big) & \xrightarrow{\varphi^\sharp(D(f))} & \Gamma\big(D(f); \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\big) \\ {\scriptstyle \rho_g^f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{g\circ\varphi}^{f\circ\varphi}} \\ \Gamma\big(D(g); \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}\big) & \xrightarrow{\varphi^\sharp(D(g))} & \Gamma\big(D(g); \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\big) \end{array}$$
sont commutatifs. La correspondance $D(f) \rightsquigarrow \varphi^\sharp(D(f))$ est un morphisme de préfaisceaux de k-algèbres de $\mathcal{A}_{\boldsymbol{Y}}$ vers $\varphi_*\mathcal{A}_{\boldsymbol{X}}$ (*cf.* 2.4.1.8) induisant un morphisme de faisceau de k-algèbres $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$.

La proposition suivante résulte d'appliquer la proposition 1.3.5.

2.4.1.13. Proposition. *La correspondance de la catégorie des variétés affines sur k qui associe*
$$\boldsymbol{X} \rightsquigarrow (\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\,, \qquad \Big(\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}\Big) \rightsquigarrow \Big(\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\Big)$$
est un foncteur covariant pleinement fidèle dans la catégorie **Loc-ann**$_k$.

2.4.1.14. Une autre équivalence de catégories

Théorème ([19]). *La correspondance de la catégorie des variétés affines sur k qui associe*
$$\boldsymbol{X} \rightsquigarrow \mathcal{R}(\boldsymbol{X})\,, \qquad \Big(\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}\Big) \rightsquigarrow \Big(\varphi^\sharp(D(1)) : \mathcal{R}(\boldsymbol{Y}) \to \mathcal{R}(\boldsymbol{X})\Big)$$
est une équivalence de catégories sur *la catégorie des k-algèbres de type fini réduites.*

2.4.1.15. Affinité des ouverts principaux d'une variété affine. Étant donnée une variété affine sur k, notée $\boldsymbol{Y}$, d'anneau de fonctions régulières $\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})$, le produit cartésien $\boldsymbol{Y} \times \mathbb{A}_k^1$ est une variété affine et l'on a
$$\mathcal{R}(\boldsymbol{Y} \times \mathbb{A}_k^1) \simeq \mathcal{R}(\boldsymbol{Y})[T]\,.$$
On remarque alors que pour $f \in \mathcal{R}(\boldsymbol{Y})$ non nulle, l'application
$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{Y} & \xrightarrow{\varphi} & \boldsymbol{Y} \times k \\ y & \longmapsto & (y, f(y)) \end{array}$$
est un morphisme de variétés algébriques admettant comme inverse à gauche la projection sur la première coordonnée $p_1 : \boldsymbol{Y} \times k \to \boldsymbol{Y}$, $(y,t) \mapsto y$. Il s'ensuit que φ induit un homéomorphisme entre l'ouvert $D(f) \subseteq \boldsymbol{Y}$ et l'image de φ qui n'est autre que l'hypersurface $\boldsymbol{Z}(Tf - 1) \subseteq \boldsymbol{Y} \times \mathbb{A}_k^1$. Ces remarques prouvent la proposition très utile suivante.

[19] Voir [**Har**] chap. I §**3** cor. **3.8** p. 20, qui montre l'équivalence entre le catégorie des variétés algébriques *irréductibles* et celle des algèbres de type fini *intègres*.

Proposition. *Les ouverts principaux des variétés affines sont des variétés affines.*

2.4.1.16. Variétés quasi-affines sur k. On appelle ainsi tout ouvert d'une variété affine $U \subseteq \boldsymbol{X}$. Étant donnés $U \subseteq \boldsymbol{X}$ et $V \subseteq \boldsymbol{Y}$, un «*morphisme*» $\varphi : U \to V$ est alors une application continue telle que $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}|_V \circ \varphi \subseteq \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}|_U$.

Contrairement au cas affine, les fonctions régulières globales d'une variété quasi-affine ne déterminent pas toujours l'espace. Par exemple, si $\boldsymbol{X} = \mathbb{C}^2$ et $U = \mathbb{C}^2\backslash\{0\}$, l'application de restriction $\mathcal{R}(\boldsymbol{X}) \to \mathcal{R}(U)$ est bijective alors que l'inclusion $U \subseteq \boldsymbol{X}$ est stricte.

2.4.2 [IV] $\mathcal{C}$. Objets et morphismes. L'idée est de recoller les variétés affines, soit en tant qu'espaces annelés, soit à l'aide d'atlas comme pour les catégories des variétés : topologiques, différentiables et analytiques complexes. Mais à la différence de ces catégories, il n'est plus vrai que tout point admette une base de voisinages isomorphes à un espace affine. Cette différence vient non seulement du fait que maintenant nous admettons les singularités, mais aussi parce que, en géométrie algébrique même sans singularités, l'assertion n'est plus vraie. Par exemple, dans la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ avec $\mathcal{R}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}[X]$, le complémentaire d'un point x est isomorphe à l'ouvert principal $U := D(X)$ et c'est une variété affine d'après 2.4.1.15. Mais alors, tout morphisme $\varphi : \mathbb{A}^1 \to U$ est déterminé par le morphisme de k-algèbres $\varphi^\natural : \mathcal{R}(U) \to \mathcal{R}(\mathbb{A}^1_k)$ (2.4.1.14), c'est-à-dire par un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de $\mathbb{C}[X]_X$ vers $\mathbb{C}[X]$. Or, un tel morphisme est entièrement déterminé par l'image du monôme X qui doit être un polynôme *inversible* de $\mathbb{C}[X]$, donc constant non nul. Ceci signifie que les seuls morphismes de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ dans U sont les applications constantes.

2.4.2.1. Variété algébrique sur k, par atlas. Une «*variété algébrique sur k*» est la donnée d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ et d'un «*atlas algébrique affine $\mathcal{A}$ pour $\boldsymbol{X}$*», *i.e.* :

i) D'un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

ii) D'une famille $\{\phi_\alpha : U_\alpha \to \boldsymbol{Y}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ d'homéomorphismes sur des variétés algébriques affines sur k telle que les bijections, appelées «*applications de transition*»,

$$\Phi_{\beta,\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha,\beta}) \longrightarrow \phi_\beta(U_{\beta,\alpha})$$

sont des *isomorphismes de variétés quasi-affines* quels que soient $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$.

Un «*morphisme*» entre variétés algébriques $\varphi : (\boldsymbol{X}, \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})$ est alors la donnée d'une application continue $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ telle que pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que $x \in U_\alpha$, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$ tel que $\varphi(x) \in U_\beta$, l'application

$$\phi_\beta \circ \varphi \circ \phi_{\alpha^{-1}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,,$$

qui est définie au voisinage de $\phi_\alpha(x)$, est un morphisme de variétés quasi-affines au voisinage de $\phi_\alpha(x)$.

On appelle «*fonction régulière d'une variété algébrique $(\boldsymbol{X}; \mathcal{A})$ sur k*» tout morphisme de variétés de $(\boldsymbol{X}; \mathcal{A})$ vers $\mathbb{A}^1_k$. Le «*faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ de fonctions régulières sur $\boldsymbol{X}$*» est le faisceau dont l'ensemble des sections au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ est l'ensemble des fonctions régulières sur U. Comme la multiplication $\cdot : k \times k \to k$ est une application polynomiale, le faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est stable par multiplication de fonctions et c'est ainsi un faisceau de k-algèbres.

Une application continue $\varphi : (\boldsymbol{X}; \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})$ est un morphisme de variétés algébriques, si pour toute fonction régulière $f \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$ la composée $f \circ \varphi$ est une fonction régulière sur $(\boldsymbol{Y}, \mathcal{B})$, *i.e.*

$f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$. Le morphisme de faisceaux $\varphi^\natural : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$, $f \mapsto f \circ \varphi$ est alors un morphisme de faisceaux de k-algèbres, et la correspondance

$$(\boldsymbol{X};\mathcal{A}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\,, \quad \Big(\varphi : (\boldsymbol{X};\mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y};\mathcal{B})\Big) \rightsquigarrow \begin{cases} \varphi \ : \ \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y} \\ \varphi^\natural \ : \ \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\,, \quad f \mapsto f \circ \varphi \end{cases}$$

est fonctorielle et pleinement fidèle dans la catégorie **Loc-ann**$_k$, d'après la proposition 1.3.5.

!! *La catégorie des variétés algébriques coïncide avec la catégorie d'espaces localement annelés localement isomorphes aux espaces annelés associés aux variétés affines.* !!

2.4.3 [IV] $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Modèles locaux. Il s'agit de la catégorie des variétés affines sur k.

2.4.4 [IV] $\mathcal{M}(\mathcal{C})'$. Modèles locaux (équivalence). Catégorie des k-algèbres de type fini réduites, d'après le théorème 2.4.1.14.

2.4.5 [IV] $\underline{\Omega}_{\boldsymbol{X}^*}$. Complexe de de Rham. Soit $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ une variété algébrique sur k. Le foncteur « *complexe des formes différentielles relatives à* k », deRham$_k$: **Alg**$(k) \rightsquigarrow$ **Adg**(k), permet d'associer au faisceau de k-algèbres $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ le complexe de préfaisceaux deRham$_k(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ de faisceau associé noté $(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{R}}, d_*)$ et appelé « *complexe de de Rham (algébrique) de* $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ ».

2.4.6 [IV] Acyc. Acyclicité de chaque $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}}$. Chaque faisceau $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}/k}$ est un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module cohérent (car deRham d'un localisé = localisé du deRham) et l'on dispose du critère d'affinité de Serre ([S$_1$]) :

Théorème ([22]). *Soir $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ une variété algébrique sur k. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\boldsymbol{X}$ *est affine.*

b) $H^{>0}(\boldsymbol{X};\mathcal{M}) = 0$ *pour tout $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module quasi-cohérent $\mathcal{M}$.*

c) $H^{>0}(\boldsymbol{X};\mathcal{I}) = 0$ *pour tout sous-$\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module cohérent $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$.*

2.4.6.1. Par conséquent, l'application canonique :

$$\boxed{h^\bullet\Gamma(\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/k}) \xrightarrow{\ \simeq\ } \mathbb{H}^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/k})} \qquad (*_k)$$

est **bijective** pour toute variété algébrique affine sur k.

2.4.7 [IV] Ampl. Amplitude du complexe de de Rham. Dans le cas affine, si $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{A}^n_k$ on sait que $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/k}$ est un quotient de $\underline{\Omega}^*_{\mathbb{A}^n_k} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_k} \otimes \bigwedge^*_k k^n$. Dans ce cas l'amplitude de $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}}$ est contenue dans l'intervalle $[0, n]$.

2.4.8 [IV] LPL. Lemme de Poincaré local. Il est faux en général, car autrement la cohomologie du complexe de de Rham calculerait la cohomologie du faisceau constant $\underline{k}_{\boldsymbol{X}}$ (si car $k = 0$) sur les variétés affines. Or, le faisceau constant est flasque (si $\boldsymbol{X}$ est irréductible) alors que la cohomologie de de Rham est généralement non nulle en degrés positifs.

[22] Voir [**Har**] chap. III §**3** th. **3.7** p. 215

2.4.9 [IV] LPG. Lemme de Poincaré global. Vrai si $\operatorname{car} k = 0$.

2.4.10 Récapitulatif

a) Soit $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique sur $k = \bar{k}$. Le morphisme canonique :

$$\boxed{H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}}; \underline{k}_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow[\neq]{} \mathbb{H}^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}}; \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})}$$

induit par l'augmentation $\varepsilon : \underline{k}_{\boldsymbol{X}} \to \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/k}$, **n'est pas** toujours un isomorphisme.

b) Pour les variétés **affines** sur k on a un isomorphisme canonique :

$$\boxed{\mathbb{H}^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}}; \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/k}) \xleftarrow[\simeq]{} h^\bullet\Gamma(\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}}; \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/k}) = \left(\textstyle\bigwedge_k^* \Omega(\boldsymbol{X}/k), d_*\right)}$$

———————×———————

2.5 [V] Schémas

Même démarche et théorèmes que dans le cas algébrique.

§ 3. Références bibliographiques

[Go] R. Godement. "*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*" ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

[GR] R.C. Gunning, H. Rossi. "*Analytic functions of several complex variables*" ; Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1965).

[Har] R. Hartshorne. "*Algébraic Geometry*" ; Graduate texts in mathematices **52**. Springer–Verlag, (1977).

[GaGa] J.-P. Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique ; Ann. Inst. Fourier, Grenoble 6, pp. 1–42, (1955–1956).

[S_1] J.-P. Serre. Sur la cohomologie des variétés algébriques ; J. Math. Pures Appl. (9) 36, 1–16, (1957).

§ 4. Index terminologique

algèbre
  extérieure
    complexe, 13
    réelle, 10
  réduite, 17
amplitude, 11
  cohomologique, 11
annelé
  localement, 4
  morphisme d'espace, 4
annelé (espace), 2
application
  de transition
    algébrique, 19
    continue, 9
    différentiable, 9
    holomorphe, 12
  polynomiale, 15
atlas
  algébrique affine, 19
  continu, 9
  différentiel, 9
  holomorphe, 11

base, 2
base (espace annelé de), 3
bon recouvrement, 10

catégorie
  d'espaces localement annelés, 4
  des espaces topologiques, 6
  des variétés algébriques, 6, 19
  des variétés analytiques complexes, 6, 11
  des variétés différentielles, 6, 9
  des variétés topologiques, 9
complexe de de Rham algébrique, 20
contravariant (foncteur), 2
corps résiduel, 4
covariant (foncteur), 2

différentielle extérieure
  complexe, 13
  réelle, 10
distingué (ouvert), 6

ensemble algébrique, 15
ensemble des zéros d'un idéal, 15
espace
  étalé, 17
  affine, 15
  algébrique affine, 15
  analytique complexe, 13
  annelé, 2
    de base, au-dessus de, 3
  de Stein, 13
  localement annelé, 4

faisceau
  d'applications, 4
  de fonctions
    continues, 9
    holomorphes, 12
    localement constantes, 3
    réelles, 10
    régulières, 20
  des fonctions régulières, 17
  structural, 2
fermés de Zariski, 15
fidèle (foncteur), 2
foncteur fidèle, plein, pleinement fidèle, 2
foncteur source, 2
fonction
  holomorphe, 12
  réelle, 5
    continue, 9
    d'une variété différentielle, 10
  régulière, 15
    d'une variété algébrique sur k, 20
    sur un fermé de Zariski, 17
    sur un ouvert principal, 16
formes différentielles
  holomorphes, 13
  réelles, 10

holomorphie, 11
hypersurface, 15

idéal engendré, 15
idéal radical, 16

local (modèle), 6

modèles locaux, 6
module cohérent, 20
morphisme
  d'espace annelé, 4
  de transition
    algébrique, 19
    continu, 9
    différentiable, 9
    holomorphe, 12
  de variétés
    affines, 17
    algébriques, 19
    analytiques complexes, 12
    différentielles, 10
    quasi-affines, 19
    topologiques, 9

objet
  au-dessus de, 2
  de base, 2
ouvert
  principal, 15
ouvert distingué, 6

plein, pleinement fidèle (foncteur), 2

quasi-compacité, 16

résiduel (corps), 4
radical d'un idéal, 16
restriction de fonctions régulières, 16

sous-ensemble algébrique, 15
sous-jacent (espace topologique), 2
standard, 12
  structure de variété, 10
    analytique complexe, 12
Stein, 13
structural (faisceau), 2

topologie de Zariski, 15
transition, 9, 19

variété
  algébrique, 19
    affine, 15, 17
  analytique complexe, 11, 13
  différentielle, 9

quasi-affine, 19
topologique, 9
zéros d'un idéal, 15
Zariski (fermés), 15

———————×———————

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes
2009

Introduction à l'Homologie d'Intersection

Alberto Arabia

(Prépublication. Année 2002)

Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Paris 7 - Denis Diderot
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES
Neuvième étage, plateau D, bureau 9D11.
175, rue du Chevaleret. 75013 Paris.

– Samedi 16 mars 2003 –
(8h:30min)

Notes de cours

Alberto Arabia

Ces notes sont complémentaires des notes "Faisceaux pervers sur les variétés algébriques complexes. Correspondance de Springer (d'après Borho-MacPherson)"

http://www.math.jussieu.fr/~arabia/math/Pervers.pdf

Table des matières

§**1. Rappels** **3**
1.1. Foncteurs dérivés 3
1.1.2. Résolutions 3
1.1.4. Existence des foncteurs dérivés 4
1.1.11. Objets et résolutions acycliques 6
1.1.15. Unicité des foncteurs dérivés 8
1.2. Catégories de faisceaux 10
1.2.1. La suite exacte fondamentale 10
1.2.2. Le triangle exact $\Delta(\boldsymbol{U},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z};\mathscr{F}^\bullet)$ 10
1.2.3. Le triangle exact $\Delta(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X},\boldsymbol{U};\mathscr{F}^\bullet)$ 11
1.3. Suites exactes longues de Mayer-Vietoris 11
1.3.1. Mayer-Vietoris (à supports fermés) 11
1.3.2. Mayer-Vietoris à supports compacts 12
1.4. Faisceaux c-mous et résolutions c-molles 12
1.5. Dimension cohomologique 16
1.6. Premiers théorèmes d'homotopie 20
§**2. Exemples de calculs d'homologie d'intersection** **27**
2.1. Cadre de travail 27
2.2. Complexe d'intersection pour la perversité p 27
2.3. Objet des calculs 28
2.4. Homologie d'intersection du cône d'une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire de son sommet 28
2.4.1. Cône d'un espace topologique 28
2.5. Homologie d'intersection sur des espaces topologiques compacts 32
2.6. Homologie d'intersection du double cône d'une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire des sommets 32
2.6.1. Double cône d'un espace topologique 32
2.7. Homologie d'intersection d'une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire d'un ensemble fini 33
2.8. Homologie d'intersection d'un bouquet de variété topologiques à coefficients dans le complémentaire du point de base 34
2.8.1. Bouquets 34
2.9. Homologie d'intersection d'un espace singulier compact à singularités isolées à coefficients dans sa partie lisse 35
2.10. Homologie d'intersection d'une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire d'une sous-variété fermée 37
2.12. Conclusions 39
§**3. Dualité sur les espaces stratifiés** **41**
3.1. Espace topologiquement stratifié 41
3.1.3. Exemples 43
3.1.4. Espace topologiquement stratifié purement de dimension d 43

Alberto Arabia

3.1.7. Condition d'équisingularité 44
3.2. Constructibilité 44
3.2.1. Faisceaux dérivés 44
3.2.2. Faisceaux dérivés à supports dans une partie localement fermé 45
3.2.3. Le triangle exact fondamental 45
3.2.4. Amplitudes d'un complexe 45
3.2.5. Troncatures intelligentes 46
3.2.7. Complexes $\mathfrak{X}$-cohomologiquement localement constants 47
3.3. Théorème d'homotopie 49
3.3.1. Filtrations fermées 49
3.3.2. Homotopies filtrées 50
3.3.5. Théorème d'homotopie 51
3.4. Dualité de Grothendieck-Verdier 55
3.4.1. Image directe à supports propres 55
3.4.4. Plongements localement fermés 57
3.4.7. Adjonction et dualité de Grothendieck-Verdier 59
3.4.9. Image inverse exceptionnelle 60
3.4.11. Complexe dualisant 61
3.4.12. Définitions 61
3.5. Dualité de Poincaré sur les variétés topologiques 63
3.5.1. Faisceau d'orientations 63
3.5.3. Le cas des variétés différentielles 64
3.5.4. Le cas des variétés topologiques 64
3.6. Stabilité de $D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ par dualité de Grothendieck-Verdier 66
3.6.2. Dualité de Grothendieck-Verdier sur les espaces stratifiés 68
3.7. Produits et théorème de Künneth 70
3.7.2. Produit tensoriel externe 71
3.8. Applications stratifiées 73
§**4. Prolongement intermédiaire, perversité, homologie d'intersection** **76**
4.1. Équivalence de catégories de Deligne 77
4.1.1. Prolongement intermédiaire des faisceaux 77
4.1.4. Prolongement intermédiaire des systèmes locaux 78
4.2. Perversité et pseudovariétés 78
4.3. Homologie d'intersection des pseudovariétés 79
§**5. Caractère intrinsèque de l'homologie d'intersection** **80**
5.1. Filtrations à strates lisses 80
5.2. Raffinements de filtrations 80
5.3. Comparaison de complexes d'intersection 81
5.4. Variétés cohomologiques 84
5.4.4. Une variété cohomologique non topologique 85
5.5. Dualité de Poincaré sur les variétés cohomologiques 86
5.5.1. Espaces cohomologiquement stratifiés 87
5.5.3. Tableau récapitulatif des caractérisations des complexes d'intersection 88
5.6. Filtration associée à une perversité et un système local 88
5.6.3. Système locaux maximaux sur les variétés cohomologiques. 90

5.7. Caractérisation intrinsèque des complexes d'intersection 92
5.7.1. Support cohomologique des complexes de faisceaux 92
5.8. Caractère local des complexes d'intersection 93
§6. **Formule de Künneth pour l'homologie d'intersection** **94**
6.1. Quelques opérations sur les perversités 94
6.2. Homologie d'intersection d'un produit de pseudovariétés 96
§7. **Fonctorialité de l'homologie d'intersection** **98**
7.1. Images inverses par des morphismes lisses 98
7.2. À propos de la fonctorialité de l'homologie d'intersection 99
§8. **Quelques références bibliographiques** **99**

§1. Rappels

1.1 Foncteurs dérivés

Dans cette section nous rappelons assez rapidement des résultats classiques concernant les foncteurs dérivés. Les références [H,KS] sont recommandées.

1.1.1. Notations. Étant donnée une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ et une sous-catégorie pleine et additive $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ ([1]), on note :

- $\mathscr{K}^+(\mathcal{B})$, resp. $\mathscr{K}^-(\mathcal{B})$: catégorie des complexes bornés à gauche, resp. à droite, d'objets de $\mathcal{B}$, où les morphismes sont les morphismes de complexes modulo homotopie.
- $\mathscr{N}^\pm(\mathcal{B})$: classe des complexes acycliques de $\mathscr{K}^\pm(\mathcal{B})$.
- $\mathscr{K}^\pm(\mathcal{B})/\mathscr{N}^\pm(\mathcal{B})$: catégorie quotient.
- $D^+(\mathcal{A})$, resp $D^-(\mathcal{A})$: catégorie dérivée des complexes d'objets de $\mathcal{A}$ bornés à gauche, resp. à droite.
- $\mathscr{Q}(\mathcal{A}) : \mathscr{K}^\pm(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D^\pm(\mathcal{A})$: foncteur de localisation.

On rappelle que le foncteur de localisation $\mathscr{Q}(\mathcal{A}) : \mathscr{K}^\pm(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D^\pm(\mathcal{A})$ est la correspondance qui associe à un objet de $\mathscr{K}^\pm(\mathcal{A})$ le même objet dans $D^\pm(\mathcal{A})$ et à un morphisme $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}^\pm(\mathcal{A})}(\boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2)$ sa classe $\overline{\varphi} \in \mathrm{Mor}_{D^\pm(\mathcal{A})}(\boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2)$ après localisation.

1.1.2. Résolutions. Une «*résolution à droite d'un objet $\boldsymbol{O}$ de $\mathcal{A}$ par des objets de $\mathcal{B}$*» est la donnée d'un complexe $(\boldsymbol{M}^\bullet, d_\bullet)$ de $C^{\geqslant 0}(\mathcal{B})$ et d'un morphisme $\varepsilon : \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{M}^0$ vérifiant $d_0 \circ \varepsilon = 0$ tels que le complexe :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{O} \xrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{M}^0 \xrightarrow{d_0} \boldsymbol{M}^1 \xrightarrow{d_1} \boldsymbol{M}^2 \xrightarrow{d_2} \cdots$$

est exact.

[1] Il revient au même de demander que $\mathcal{B}$ soit une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ stable par sommes directes finies dans $\mathcal{A}$.

Dualement, une «*résolution à gauche d'un objet* $\boldsymbol{O}$ *de* $\mathcal{A}$ *par des objets de* $\mathcal{B}$» est la donnée d'un complexe $(\boldsymbol{M}^\bullet, d_\bullet)$ de $C^{\leqslant 0}(\mathcal{B})$ et d'un morphisme $\varepsilon : \boldsymbol{M}^0 \to \boldsymbol{O}$ vérifiant $\varepsilon \circ d_{-1} = 0$ tels que le complexe :

$$\cdots \xrightarrow{d_{-3}} \boldsymbol{M}^{-2} \xrightarrow{d_{-2}} \boldsymbol{M}^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \boldsymbol{M}^0 \xrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{0}$$

est exact.

La preuve de la proposition suivante est laissée en exercice.

1.1.3. Proposition

a) *Si tout objet de* $\mathcal{A}$ *est sous-objet d'un objet de* $\mathcal{B}$ *:*
   i) *Tout objet de* $\mathcal{A}$ *admet une résolution à droite par des objets de* $\mathcal{B}$.
   ii) *Pour chaque complexe borné à gauche* $\boldsymbol{O}^\bullet$ *d'objets de* $\mathcal{A}$, *il existe un complexe borné à gauche* $\boldsymbol{M}^\bullet$ *d'objets de* $\mathcal{B}$ *et un quasi-isomorphisme* $\varphi_\bullet : \boldsymbol{O}^\bullet \to \boldsymbol{M}^\bullet$.
   iii) *Le foncteur* $\mathscr{Q}_{\mathcal{A}}$ *induit une équivalence de catégories de* $\mathscr{K}^+(\mathcal{B})/\mathscr{N}^+(\mathcal{B})$ *vers* $D^+(\mathcal{A})$.

b) *Si tout objet de* $\mathcal{A}$ *est quotient d'un objet de* $\mathcal{B}$ *:*
   i) *Tout objet de* $\mathcal{A}$ *admet une résolution à gauche par des objets de* $\mathcal{B}$.
   ii) *Pour chaque complexe borné à droite* $\boldsymbol{O}^\bullet$ *d'objets de* $\mathcal{A}$, *il existe un complexe borné à droite* $\boldsymbol{M}^\bullet$ *d'objets de* $\mathcal{B}$ *et un quasi-isomorphisme* $\varphi_\bullet : \boldsymbol{M}^\bullet \to \boldsymbol{O}^\bullet$.
   iii) *Le foncteur* $\mathscr{Q}_{\mathcal{A}}$ *induit une équivalence de catégories de* $\mathscr{K}^-(\mathcal{B})/\mathscr{N}^-(\mathcal{B})$ *vers* $D^-(\mathcal{A})$.

1.1.4. Existence des foncteurs dérivés. Lorsque un foncteur $\boldsymbol{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ entre catégories abéliennes est **additif**, il induit par son action terme à terme, des foncteurs de catégories triangulées notés $\mathscr{K}^\pm(\boldsymbol{F}) : \mathscr{K}^\pm(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathscr{K}^\pm(\mathcal{A}')$.

La proposition suivante est corollaire immédiat de la proposition 1.1.3.

1.1.5. Proposition et définition. *Soit* $\mathcal{B}$ *une sous-catégorie pleine et additive de* $\mathcal{A}$.

a) *Si pour tout* $\boldsymbol{M}^\bullet \in \mathscr{N}^+(\mathcal{B})$, *le complexe* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}^\bullet)$ *est acyclique, le foncteur* $\mathscr{K}^+(\boldsymbol{F}) : \mathscr{K}^+(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathscr{K}^+(\mathcal{A}')$ *induit un foncteur* $\overline{\mathscr{K}}^+(\boldsymbol{F}) : \mathscr{K}^+(\mathcal{B})/\mathscr{N}^+(\mathcal{B}) \rightsquigarrow D^+(\mathcal{A}')$. *Si de plus, tout objet de* $\mathcal{A}$ *est sous-objet d'un objet de* $\mathcal{B}$, *le foncteur* $\overline{\mathscr{K}}^+(\boldsymbol{F})$ *est naturellement défini sur* $D^+(\mathcal{A})$ *où il est noté* $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$ *:*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{K}^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow[\subseteq]{} & \mathscr{K}^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow[\rightsquigarrow]{\mathscr{K}^+(\boldsymbol{F})} & \mathscr{K}^+(\mathcal{A}') \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{Q}(\mathcal{A})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{Q}(\mathcal{A}')} \\
\mathscr{K}^+(\mathcal{B})/\mathscr{N}^+(\mathcal{B}) & \equiv & D^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow[\rightsquigarrow]{\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}} & D^+(\mathcal{A}') \\
 & & \searrow & & \uparrow \\
 & & & {\scriptstyle \overline{\mathscr{K}}^+(\boldsymbol{F})} &
\end{array}$$

Le foncteur $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F} : D^+(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D^+(\mathcal{A}')$ *est un foncteur exact entre catégories triangulées, c'est* «le foncteur dérivé à droite de $\boldsymbol{F}$ relativement à $\mathcal{B}$».

b) *Si pour tout* $\boldsymbol{M}^\bullet \in \mathscr{N}^-(\mathcal{B})$, *le complexe* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}^\bullet)$ *est acyclique, le foncteur* $\mathscr{K}^-(\boldsymbol{F}) : \mathscr{K}^-(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathscr{K}^-(\mathcal{A}')$ *induit un foncteur* $\overline{\mathscr{K}}^-(\boldsymbol{F}) : \mathscr{K}^-(\mathcal{B})/\mathscr{N}^-(\mathcal{B}) \rightsquigarrow D^-(\mathcal{A}')$. *Si de plus,*

tout objet de $\mathcal{A}$ est quotient d'un objet de $\mathcal{B}$, le foncteur $\overline{\mathscr{K}}^-(\boldsymbol{F})$ est naturellement défini sur $D^-(\mathcal{A})$ où il est noté $\mathbb{L}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{K}^-(\mathcal{B}) & \xrightarrow[\subseteq]{} & \mathscr{K}^-(\mathcal{A}) & \xrightarrow[\rightsquigarrow]{\mathscr{K}^-(\boldsymbol{F})} & \mathscr{K}^-(\mathcal{A}') \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{Q}(\mathcal{A})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{Q}(\mathcal{A}')} \\
\mathscr{K}^-(\mathcal{B})/\mathscr{N}^-(\mathcal{B}) \equiv D^-(\mathcal{A}) & & \xrightarrow[\rightsquigarrow]{\mathbb{L}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}} & & D^-(\mathcal{A}') \\
& \searrow^{\overline{\mathscr{K}}^-(\boldsymbol{F})} & & \nearrow &
\end{array}$$

Le foncteur $\mathbb{L}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F} : D^-(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D^-(\mathcal{A}')$ est un foncteur exact entre catégories triangulées, c'est «le foncteur dérivé à gauche de $\boldsymbol{F}$ relativement à $\mathcal{B}$».

1.1.6. Notation. Dans les cas considérés dans 1.1.5, si $\boldsymbol{O}$ est un objet de $\mathcal{A}$ et si $\boldsymbol{O}^{[0]}$ désigne le complexe dont les termes son nuls sauf celui en degré 0 qui vaut $\boldsymbol{O}$, on pose pour $m \in \mathbb{Z}$ ([2])

$$\mathbb{R}^m_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}) := h^m\big[\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{O}^{[0]}\big)\big], \qquad \mathbb{L}^m_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}) := h^m\big[\mathbb{L}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{O}^{[0]}\big)\big].$$

1.1.7. Exercice. En supposant les condition de la proposition 1.1.5 remplies, prouver les assertions suivantes.

a) Le foncteur $\mathbb{R}^0_{\mathcal{B}} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}'$ est exact à gauche et

$$\mathbb{R}^0_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}) \equiv \boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^m_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}) = 0, \text{ pour tout } m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

pour tout objet $\boldsymbol{M}$ de $\mathcal{B}$.

b) Le foncteur $\mathbb{L}^0_{\mathcal{B}} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}'$ est exact à droite et

$$\mathbb{L}^0_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}) \equiv \boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}) \quad \text{et} \quad \mathbb{L}^m_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}) = 0, \text{ pour tout } m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

pour tout objet $\boldsymbol{M}$ de $\mathcal{B}$.

c) Pour toute suite exacte courte $\mathbf{0} \to \boldsymbol{O}_1 \to \boldsymbol{O}_2 \to \boldsymbol{O}_3 \to \mathbf{0}$ d'objets de $\mathcal{A}$, on a des suites exactes longues :

$$\cdots \to \mathbb{R}^{m-1}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}_3) \to \mathbb{R}^m_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}_1) \to \mathbb{R}^m_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}_2) \to \mathbb{R}^m_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}_3) \to \mathbb{R}^{m+1}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}_1) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathbb{L}^{m-1}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}_3) \to \mathbb{L}^m_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}_1) \to \mathbb{L}^m_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}_2) \to \mathbb{L}^m_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}_3) \to \mathbb{L}^{m+1}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}_1) \to \cdots$$

1.1.8. Remarque. Un corollaire de cet exercice qui mérite d'être souligné est que la catégorie $\mathcal{B}$ permet également de définir le foncteur dérivé à droite $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^0_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F})$. Dans ce cas, on a $\mathbb{R}^m_{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^0_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}) \equiv \mathbb{R}^m_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{F})$, pour tout $m > 0$. Autrement dit, les foncteurs dérivés à droite d'ordre supérieur proviennent toujours de dériver un foncteur exact à gauche. Cette même remarque s'applique, dualement, aux foncteurs dérivés à gauche.

[2] Tout au long de ces notes, la notation $h^m[\boldsymbol{C}^\bullet]$ désignera le m-ième objet de cohomologie d'un complexe $(\boldsymbol{C}^\bullet, d_\bullet)$ d'objets d'une catégorie abélienne ; *i.e.* $h^m[\boldsymbol{C}^\bullet] := \ker(d_m)/\mathrm{im}(d_{m-1})$.

1.1.9. Commentaire et terminologie. Notons $\mathscr{I}_{\mathcal{A}}$ (resp. $\mathscr{P}_{\mathcal{A}}$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ dont les objets sont les objets injectifs (resp. projectifs) de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{A}$ «*possède suffisamment d'objets injectifs* (*resp. projectifs*)» si tout objet de $\mathcal{A}$ est sous-objet (resp. objet quotient) d'un objet injectif (resp. projectif).

La sous-catégorie $\mathscr{I}_{\mathcal{A}}$ est une sous-catégorie additive de $\mathcal{A}$ et un théorème de base dans la théorie des résolutions démontre qu'un complexe acyclique $\boldsymbol{I}^{\bullet}$ borné à gauche d'objets injectifs est toujours homotope à zéro. Par conséquent, quel que soit le foncteur additif $\boldsymbol{F}$, le complexe $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{I}^{\bullet})$ est homotope a zéro donc acyclique. Il s'ensuit (1.1.5) que si la catégorie $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'objets injectifs, le foncteur $\mathbb{R}_{\mathscr{I}_{\mathcal{A}}}\boldsymbol{F}$ est toujours défini. C'est le «*foncteur dérivé à droite de* $\boldsymbol{F}$», noté $\mathbb{R}\boldsymbol{F}$.

Ces remarques sont valables, dualement, en remplaçant `injectif´ par `projectif´ et le foncteur $\mathbb{L}_{\mathscr{P}_{\mathcal{A}}}\boldsymbol{F}$ est noté $\mathbb{L}\boldsymbol{F}$.

Par exemple, si $\mathscr{A}$ est un anneau :

- La catégorie $\mathrm{Mod}(\mathscr{A})$ des $\mathscr{A}$-modules possède suffisamment d'objets injectifs et projectifs. Tout foncteur additif défini sur $\mathrm{Mod}(\mathscr{A})$ admet des foncteurs dérivés à droite **et** à gauche.
- Pour tout espace topologique $\boldsymbol{X}$, la catégorie $\mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ des faisceaux de $\mathscr{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$, possède suffisamment d'objets injectifs, mais généralement pas suffisamment d'objets projectifs (*cf.* ex. 1.5.4). Tout foncteur additif sur $\mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ admet donc des foncteurs dérivés à droite, mais pas nécessairement à gauche (*cf.* 1.1.19).

1.1.10. Définition. Une classe $\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$ d'objets de $\mathcal{A}$, est appelée «*classe d'objets* $\boldsymbol{F}$*-injectifs dans* $\mathcal{A}$» lorsqu'elle vérifie les conditions de 1.1.5-(a), *i.e.* :

$\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$-a) Tout objet de $\mathcal{A}$ est sous-objet d'un objet de $\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$.
$\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$-b) Si $\boldsymbol{O}_1$ et $\boldsymbol{O}_2$ sont des objets de $\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$, la somme directe $\boldsymbol{O}_1 \oplus \boldsymbol{O}_2$ est un objet de $\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$.
$\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$-c) $\boldsymbol{F}(\mathscr{N}^{+}(\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}})) \subseteq \mathscr{N}^{+}(\mathcal{A}')$.

Une classe $\mathscr{P}_{\boldsymbol{F}}$ s'objets de $\mathcal{A}$, est appelée «*classe d'objets* $\boldsymbol{F}$*-projectifs dans* $\mathcal{A}$» lorsqu'elle vérifie les conditions de 1.1.5-(b), *i.e.* :

$\mathscr{P}_{\boldsymbol{F}}$-a) Tout objet de $\mathcal{A}$ est quotient d'un objet de $\mathscr{P}_{\boldsymbol{F}}$.
$\mathscr{P}_{\boldsymbol{F}}$-b) Si $\boldsymbol{O}_1$ et $\boldsymbol{O}_2$ sont des objets de $\mathscr{P}_{\boldsymbol{F}}$, la somme directe $\boldsymbol{O}_1 \oplus \boldsymbol{O}_2$ est un objet de $\mathscr{P}_{\boldsymbol{F}}$.
$\mathscr{P}_{\boldsymbol{F}}$-c) $\boldsymbol{F}(\mathscr{N}^{-}(\mathscr{P}_{\boldsymbol{F}})) \subseteq \mathscr{N}^{-}(\mathcal{A}')$.

1.1.11. Objets et résolutions acycliques. On reprend les données du paragraphe précédent en supposant les conditions de la proposition 1.1.5 satisfaites de sorte que les foncteurs dérivés par rapport à $\mathcal{B}$ sont définis. Une question importante se pose alors, à savoir : l'indépendance des foncteurs dérivés relativement à $\mathcal{B}$. Autrement dit, étant données $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ vérifiant les conditions de 1.1.5, à quelle condition les foncteurs $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$ et $\mathbb{R}_{\mathcal{B}'}\boldsymbol{F}$ (resp. $\mathbb{L}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$ et $\mathbb{L}_{\mathcal{B}'}\boldsymbol{F}$) sont-ils canoniquement isomorphes.

Un premier pas dans cette direction passe par la notion d'« *objet acyclique* » que nous allons traiter uniquement dans le cas des foncteurs dérivés à droite d'un foncteur additif exact à gauche (*cf.* 1.1.8) étant entendu que le cas des foncteurs dérivés à gauche se traite de manière parfaitement symétrique.

1.1.12. Définition. Un objet $\boldsymbol{O}$ de $\mathcal{A}$ est dit « $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-*acyclique* » lorsque $I\!R^m_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O})=0$, pour tout $m>0$. Une résolution à droite $\boldsymbol{0}\to\boldsymbol{O}\to\boldsymbol{M}^0\to\boldsymbol{M}^1\to\cdots$ où tous les $\boldsymbol{M}^i$ sont $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-acycliques est « *une résolution* $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-*acyclique de* $\boldsymbol{O}$ ».

1.1.13. Exercice. Montrer qu'un objet injectif de $\mathcal{A}$ est $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-acyclique.

1.1.14. Théorème. *Soit $\boldsymbol{F}:\mathcal{A}\rightsquigarrow\mathcal{A}'$ un foncteur additif entre catégories abéliennes* ***exact à gauche*** *et soit $\mathcal{B}$ une classe d'objets $\boldsymbol{F}$-injectifs dans $\mathcal{A}$. Alors,*

a) *Tout objet de $\mathcal{B}$ est $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-acyclique.*

b) *Étant donnée une suite exacte courte $\boldsymbol{0}\to\boldsymbol{O}_1\to\boldsymbol{O}_2\to\boldsymbol{O}_3\to\boldsymbol{0}$ d'objets de $\mathcal{A}$,*
   i) *Si $\boldsymbol{O}_1$ est $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-acyclique, la suite $\boldsymbol{0}\to\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}_1)\to\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}_2)\to\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}_3)\to\boldsymbol{0}$ est exacte.*
   ii) *Si $\boldsymbol{O}_1$ et $\boldsymbol{O}_2$ sont $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-acycliques, il en est de même de $\boldsymbol{O}_3$.*

c) *Pour tout complexe acyclique borné à gauche $(\boldsymbol{M}^\bullet,d_\bullet)$ d'objets $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-acycliques, le complexe $(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}^\bullet),\boldsymbol{F}(d_\bullet))$ est exact.*

d) *La classe des objets $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-acycliques est une classe d'objets $\boldsymbol{F}$-injectifs dans $\mathcal{A}$. Le foncteur dérivé à droite de $\boldsymbol{F}$ relativement aux objets $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-acycliques est canoniquement isomorphe à $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$.*

e) *Pour tout objet $\boldsymbol{O}\in\mathcal{A}$ et toute résolution $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-acyclique $\boldsymbol{O}\hookrightarrow\boldsymbol{M}^\bullet$, il existe un isomorphisme canonique $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}^\bullet)\to I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O})$ dans $D^+(\mathcal{A}')$. En particulier, on a des isomorphismes canoniques*
$$h^m[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}^\bullet)]\xrightarrow[\equiv]{}I\!R^m_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}).$$

f) *Pour tout complexe $\boldsymbol{M}^\bullet$ borné à gauche d'objets $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-acycliques, il existe un isomorphisme canonique de $D^+(\mathcal{A}')$:*
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}^\bullet)\xrightarrow[\equiv]{}I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}^\bullet).$$

Démonstration

a) Par définition de $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$.

b) Immédiat après inspection de la suite longue de foncteurs $I\!R^*_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$ associée à la suite exacte courte $\boldsymbol{0}\to\boldsymbol{O}_1\to\boldsymbol{O}_2\to\boldsymbol{O}_3\to\boldsymbol{0}$.

c) Il suffit de le vérifier pour un complexe de la forme
$$\boldsymbol{0}\to\boldsymbol{M}^0\xrightarrow{d_0}\boldsymbol{M}^1\xrightarrow{d_1}\boldsymbol{M}^2\xrightarrow{d_2}\cdots\xrightarrow{d_{\ell-1}}\boldsymbol{M}^\ell\xrightarrow{d_\ell}\cdots$$
Comme $\boldsymbol{F}$ est supposé exact à gauche, on a $h^0(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}^\bullet))=h^1(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}^\bullet))=0$. D'autre part,
$$\operatorname{coker}(\boldsymbol{F}(d_0))\underset{1}{=}\boldsymbol{F}(\operatorname{coker}(d_0))=\boldsymbol{F}(\ker(d_2))\underset{2}{=}\ker(\boldsymbol{F}(d_2))$$

$\left(\overline{=}_1\right)$ d'après (b-i) et $\left(\overline{=}_2\right)$ puisque $\boldsymbol{F}$ est exact à gauche. Par conséquent

$$h^r(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}^\bullet)) = 0, \text{ pour tout } r \leqslant 2. \qquad (\diamond)$$

On remarque ensuite que $h^r(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}^\bullet)) = h^{r-1}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{N}^\bullet))$, pour tout $r > 2$ (†), où $\boldsymbol{N}^\bullet$ est le complexe

$$\mathbf{0} \to \ker(d_2) \longrightarrow \boldsymbol{M}^2 \xrightarrow{d_2} \boldsymbol{M}^3 \xrightarrow{d_3} \cdots \xrightarrow{d_{\ell-1}} \boldsymbol{M}^\ell \xrightarrow{d_\ell} \cdots$$

Comme $\ker(d_2)$ est aussi $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-acyclique d'après (b-ii), l'égalité ($\diamond$) s'applique $\boldsymbol{N}^\bullet$ et (†) donne l'annulation de $h^3(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}^\bullet))$. À partir de là, un argument récursif sur r donne l'annulation de tous les $h^r(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}^\bullet))$ avec $r > 0$, CQFD.

d,e,f) Conséquence des assertions précédentes. Détails laissés en exercice. ∎

1.1.15. Unicité des foncteurs dérivés. Le théorème suivant, corollaire de 1.1.14, donne le caractère intrinsèque des foncteurs dérivés.

1.1.16. Corollaire. *On reprend les données du théorème 1.1.14. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux classes d'objets $\boldsymbol{F}$-injectifs dans $\mathcal{A}$. Alors,*

a) *Un objet de $\mathcal{A}$ est $I\!R_{\mathcal{B}'}\boldsymbol{F}$-acyclique, si et seulement si, il est $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-acyclique. En particulier la classe des objets $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-acycliques est indépendante de $\mathcal{B}$.*

b) *Les foncteurs $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$ et $I\!R_{\mathcal{B}'}\boldsymbol{F}$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. Compte tenu de 1.1.14-(d), il suffit de prouver (a). Soit $\boldsymbol{O}'$ un objet $I\!R_{\mathcal{B}'}\boldsymbol{F}$-acyclique et fixons une suite exacte courte $\mathbf{0} \to \boldsymbol{O}' \to \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{Q} \to \mathbf{0}$ (†) avec $\boldsymbol{O}$ dans $\mathcal{B}$. La suite exacte longue des foncteurs $I\!R^*_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$ associée à (†) commence par :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}') \longrightarrow \boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}) \xrightarrow{b} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}) \longrightarrow I\!R^1_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{O}') \longrightarrow I\!R^1_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{O}') = \mathbf{0} \longrightarrow \cdots$$

où b est surjectif par hypothèse sur $\mathcal{B}'$ et d'après 1.1.14-(b-i). On en déduit les égalités :

$$\begin{cases} I\!R^m_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}') \equiv I\!R^{m-1}_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}), \text{ pour tout } m \geqslant 2, \text{ et} \\ I\!R^1_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}') = 0, \end{cases} \qquad (\diamond)$$

et ceci, quel que soit l'objet $I\!R_{\mathcal{B}'}\boldsymbol{F}$-acyclique $\boldsymbol{O}'$.

Fixons une suite exacte courte $\mathbf{0} \to \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{O}'' \to \boldsymbol{R} \to \mathbf{0}$ où $\boldsymbol{O}''$ est $I\!R_{\mathcal{B}'}\boldsymbol{F}$-acyclique. On a le diagramme ($\mathscr{D}$) de lignes et colonnes exactes ci-après où l'objet $\boldsymbol{Q}' := \boldsymbol{O}''/\boldsymbol{O}'$ est $I\!R_{\mathcal{B}'}\boldsymbol{F}$-acyclique d'après 1.1.14-(b-ii).

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{0} \to \boldsymbol{O}' & \longrightarrow & \boldsymbol{O} & \longrightarrow & \boldsymbol{Q} & \to \mathbf{0} & \\ \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{0} \to \boldsymbol{O}' & \longrightarrow & \boldsymbol{O}'' & \longrightarrow & \boldsymbol{Q}' & \to \mathbf{0} & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \boldsymbol{R} & = & \boldsymbol{R} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \end{array} \qquad (\mathscr{D})$$

Comme $\boldsymbol{O}$ est dans $\mathcal{B}$, la suite

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}) \to \boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}'') \to \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) \to \mathbf{0}$$

est exacte ce qui entraîne aussitôt l'exactitude de

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}) \to \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}') \to \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) \to \mathbf{0}. \qquad (*)$$

On en déduit une injection $I\!R^1_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}) \hookrightarrow I\!R^1_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}') = 0$, et alors $I\!R^2_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}') = 0$ par ($\diamond$).

Nous prouvons maintenant, par récurrence sur m, l'égalité $I\!R^m_{\mathcal{B}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}') = 0$, pour tout $m \geqslant 3$ et quel que soit l'objet $I\!R_{\mathcal{B}'}\boldsymbol{F}$-acyclique $\boldsymbol{O}'$. En effet, supposons l'assertion vérifiée pour tout $n < m$. D'après $(\diamond)$, on a $I\!R^m_{\mathcal{B}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}') \equiv I\!R^{m-1}_{\mathcal{B}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q})$, et la suite longue de cohomologie associée à la colonne centrale de $(\mathscr{D})$ montre que $I\!R^{m-2}_{\mathcal{B}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) = 0$. Par conséquent $I\!R^{m-1}_{\mathcal{B}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q})$ est un sous-objet de $I\!R^{m-1}_{\mathcal{B}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}')$ lui-même nul par hypothèse inductive, CQFD. ∎

1.1.17. Notations et terminologies. Compte tenu de 1.1.16-(b), l'indication de $\mathcal{B}$ dans la notation `$I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$´ est superflue et peut donc être effacée. Dans la suite, la notation $I\!R\boldsymbol{F}$ désignera le foncteur dérivé à droite intrinsèque défini à l'aide d'une quelconque classe d'objets $\boldsymbol{F}$-injectifs.

Dans le même ordre d'idées, l'assertion 1.1.16-(a) montre que la notion d'objet $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-acyclique est aussi indépendante de $\mathcal{B}$. L'expression « *objet $I\!R_{\mathcal{B}}\boldsymbol{F}$-acyclique* » sera donc abrégée en « *objet $I\!R\boldsymbol{F}$-acyclique* ». À ce sujet, on trouve souvent dans la littérature l'expression « *objet $\boldsymbol{F}$-acyclique* » ; celle-ci est alors synonyme de « *objet $I\!R\boldsymbol{F}$-acyclique* » lorsque $\boldsymbol{F}$ est exact à gauche, et de « *objet $I\!L\boldsymbol{F}$-acyclique* » lorsque $\boldsymbol{F}$ est exact à droite.

Le critère suivant est souvent utilisé pour démontrer qu'une classe d'objets de $\mathcal{A}$ est une classe d'objets $\boldsymbol{F}$-injectifs.

1.1.18. Proposition. *Soient $\boldsymbol{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}'$ un foncteur additif entre catégories abéliennes* ***exact à gauche****, et $\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$ une classe d'objets de $\mathcal{A}$ vérifiant :*

$\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$-i) *Pour toute suite exacte $\mathbf{0} \to \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{P} \to \mathbf{0}$ d'objets de $\mathcal{A}$ avec $\boldsymbol{O} \in \mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$, la suite $\mathbf{0} \to \boldsymbol{F}(\boldsymbol{O}) \to \boldsymbol{F}(\boldsymbol{N}) \to \boldsymbol{F}(\boldsymbol{P}) \to \mathbf{0}$ est exacte.*

$\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$-ii) *Pour toute suite exacte $\mathbf{0} \to \boldsymbol{O}_1 \to \boldsymbol{O}_2 \to \boldsymbol{P} \to \mathbf{0}$ d'objets de $\mathcal{A}$ avec $\boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2 \in \mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$, on a $\boldsymbol{P} \in \mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$.*

Alors :

a) *Pour toute suite exacte $\mathbf{0} \to \boldsymbol{O}^0 \xrightarrow{d_0} \boldsymbol{O}^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{\ell-1}} \boldsymbol{O}^\ell \xrightarrow{d_\ell} \cdots$ d'objets de $\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$, la suite $(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}^\bullet), \boldsymbol{F}(d_\bullet))$ est exacte.*

b) *On suppose que la classe $\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$ vérifie les conditions supplémentaires suivantes :*

($\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$-iii) *Tout objet de $\mathcal{A}$ s'injecte dans un objet de $\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$.*

($\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$-iv) *La somme directe de deux objets de $\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$ est un objet de $\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$.*

Alors $\mathscr{I}_{\boldsymbol{F}}$ est une classe d'objets $\boldsymbol{F}$-injectifs dans $\mathcal{A}$.

Démonstration

a) Même preuve que pour 1.1.14-(c).

b) Immédiat. ∎

1.1.19. Exemple. La catégorie $\mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ ne possédant généralement pas suffisamment d'objets projectifs (*cf.* ex. 1.5.4), la définition de foncteurs dérivés à **gauche** résultera de

prouver auparavant qu'il existe une classe d'objets projectifs pour le foncteur en question. Un exemple classique en ce sens est celui du foncteur exact à droite «*produit tensoriel*» $\boldsymbol{F} := (_) \otimes \mathscr{M} : \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$, avec $\mathscr{M} \in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$. Il est facile de voir que la classe $\mathscr{P}_{\boldsymbol{F}}$ des faisceaux dont les germes sont des $\mathscr{A}$-modules **plats** est une classe d'objets $\boldsymbol{F}$-projectifs dans $\mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$. Le foncteur $\mathbb{L}\boldsymbol{F} : D^-(\mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})) \rightsquigarrow D^-(\mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X}))$, noté classiquement $(_) \otimes_{\mathbb{L}} \mathscr{M}$, est donc toujours défini.

1.2 Catégories de faisceaux

Dans toute cette partie un espace topologique (noté $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}, \ldots, \boldsymbol{Z}$) sera tacitement supposé métrisable et localement compact. Toute partie localement fermée d'un tel espace est automatiquement métrisable, localement compact et paracompact. On prendra garde du fait que le complémentaire d'un sous-espace localement fermé n'est pas nécessairement localement fermé.

Tous les foncteurs que nous allons considérer dans la suite ont déjà été définis dans les notes de cours [A].

1.2.1. La suite exacte fondamentale. Pour toute partie localement fermée $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{X}$ de complémentaire $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{X} \backslash \boldsymbol{S}$ et tout faisceau $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{X})$, nous avons la suite exacte **à gauche** fondamentale dépendant fonctoriellement de $\mathscr{F}$:

$$0 \to i_{\boldsymbol{S}!}\, \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{S}}(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{q} i_{\boldsymbol{A}*}(\mathscr{F}|_{\boldsymbol{A}}) \to 0\,. \tag{1}$$

Lorsque le faisceau $\mathscr{F}$ est flasque le morphisme q est surjectif, le faisceau $\mathscr{F}$ est $\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{S}}$-acyclique et sa restriction $\mathscr{F}|_{\boldsymbol{A}}$ est flasque (car $\boldsymbol{X}$ métrisable ([3])) donc $i_{\boldsymbol{A}*}$-acyclique. On en déduit un foncteur (exact) de la catégorie dérivée $D^+_k(\boldsymbol{X})$ vers la catégorie (triangulée) des triangles exacts de $D^+_k(\boldsymbol{X})$ associant à un complexe de faisceaux $\mathscr{F}^\bullet$ le triangle exact :

$$\Delta(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}; \mathscr{F}^\bullet) := \left(i_{\boldsymbol{S}!}(\mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}i_{\boldsymbol{A}*}(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{A}}) \xrightarrow{[+1]} \right) \tag{2}$$

et à un morphisme de complexes en catégorie dérivée $\alpha_\bullet : \mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{G}^\bullet$, le morphisme de triangles exacts :

$$\begin{array}{ccccccc}
i_{\boldsymbol{S}!}(\mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^\bullet) & \longrightarrow & \mathscr{F}^\bullet & \longrightarrow & \mathbb{R}i_{\boldsymbol{A}*}(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{A}}) & \xrightarrow{[+1]} & \\
\downarrow{\scriptstyle i_{\boldsymbol{S}!}(\mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{S}}\,\alpha_\bullet)} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{R}i_{\boldsymbol{A}*}(\alpha_\bullet|_{\boldsymbol{A}})} & & \\
i_{\boldsymbol{S}!}(\mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{G}^\bullet) & \longrightarrow & \mathscr{G}^\bullet & \longrightarrow & \mathbb{R}i_{\boldsymbol{A}*}(\mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{A}}) & \xrightarrow{[+1]} &
\end{array}$$

1.2.2. Le triangle exact $\Delta(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}; \mathscr{F}^\bullet)$. Lorsque $\boldsymbol{S}$ et une partie ouverte dans $\boldsymbol{X}$, on note alors $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{Z} := \boldsymbol{X} \backslash \boldsymbol{U}$, la suite fondamentale (1) est exacte à droite quel que soit le faisceau $\mathscr{F}$. De plus, les foncteurs $\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{U}}$ et $i_{\boldsymbol{U}}^{-1}$ sont naturellement isomorphes,

[3] Cf. Godement "Théorie des faisceaux", page 151.

$i_{Z*} = i_{Z!}$, et les quatre foncteurs : $i_{U!}$, i_U^{-1}, $i_{Z!}$ et i_Z^{-1} qui apparaissent maintenant dans la suite fondamentale (1), c'est-à-dire dans la suite :

$$0 \longrightarrow i_{U!}(\mathscr{F}|_U) \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow i_{Z!}(\mathscr{F}|_Z) \longrightarrow 0\,,$$

sont tous exacts. En particulier, le triangle (2) correspond à la suite suite exacte courte de complexes de faisceaux :

$$\Delta(\boldsymbol{U},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z};\mathscr{F}^\bullet) := \Big(0 \longrightarrow i_{U!}(\mathscr{F}^\bullet|_U) \longrightarrow \mathscr{F}^\bullet \longrightarrow i_{Z!}(\mathscr{F}^\bullet|_Z) \longrightarrow 0\Big)\,. \qquad (*)$$

Les foncteurs $\mathbb{R}\Gamma(\boldsymbol{X};_)$ et $\mathbb{R}\Gamma_c(\boldsymbol{X};_)$ appliqués $(*)$ donnent respectivement :

- La suite exacte longue d'hypercohomologies (à supports fermés) :

$$\boxed{\xrightarrow{[+1]} \mathbb{H}^m\big(\boldsymbol{X};i_{U!}(\mathscr{F}^\bullet|_U)\big) \longrightarrow \mathbb{H}^m(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m\big(\boldsymbol{Z};\mathscr{F}^\bullet|_Z\big) \xrightarrow{[+1]}}$$

- La suite exacte longue d'hypercohomologies à support compact :

$$\boxed{\xrightarrow{[+1]} \mathbb{H}^m_c(\boldsymbol{U};\mathscr{F}^\bullet|_U) \longrightarrow \mathbb{H}^m_c(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m_c(\boldsymbol{Z};\mathscr{F}^\bullet|_Z) \xrightarrow{[+1]}}$$

puisque (*cf.* 1.4.5)

$$\mathbb{R}\Gamma_c(\boldsymbol{X};i_{U!}(_)) \equiv \mathbb{R}\Gamma_c(\boldsymbol{U};_) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}\Gamma_c(\boldsymbol{X};i_{Z!}(_)) \equiv \mathbb{R}\Gamma_c(\boldsymbol{Z};_)\,.$$

1.2.3. Le triangle exact $\Delta(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X},\boldsymbol{U};\mathscr{F}^\bullet)$. Lorsque $\boldsymbol{S}$ et une partie fermée dans $\boldsymbol{X}$, on note $\boldsymbol{Z} := \boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{Z}$; le triangle fondamental (2) s'écrit alors :

$$\Delta(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X},\boldsymbol{U};\mathscr{F}^\bullet) := \Big(i_{Z*}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{Z}}\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}i_{U*}(\mathscr{F}^\bullet|_U) \xrightarrow{[+1]}\Big)$$

et donne lieu à la suite exacte longue d'hypercohomologie :

$$\boxed{\xrightarrow{[+1]} \mathbb{H}^m_Z(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m(\boldsymbol{U};\mathscr{F}^\bullet) \xrightarrow{[+1]}}$$

1.3 Suites exactes longues de Mayer-Vietoris

1.3.1. Mayer-Vietoris (à supports fermés). Pour tous ouverts $U_1, U_2 \subseteq \boldsymbol{X}$, notons $U_{12} := U_1 \cap U_2$. Les morphismes de restriction entre les foncteurs des sections

$$\rho^U_{U_i}(_) : \Gamma(U,_) \to \Gamma(U_i,_) \quad \text{et} \quad \rho^{U_i}_{U_{12}}(_) : \Gamma(U_i,_) \to \Gamma(U_{12},_)$$

donnent lieu à une suite exacte **à gauche** :

$$0 \longrightarrow \Gamma(U,_) \xrightarrow{\rho^U_{U_1}\oplus\rho^U_{U_2}} \Gamma(U_1,_)\oplus\Gamma(U_2,_) \xrightarrow{\rho^{U_1}_{U_{12}}-\rho^{U_2}_{U_{12}}} \Gamma(U_{12},_) \longrightarrow 0$$

qui est exacte à droite lorsque elle est appliquée à un faisceau flasque. On a donc un foncteur de la catégorie dérivée $D^+_k(\boldsymbol{X})$ à valeurs dans la catégorie des triangles exacts :

$$\mathscr{F}^\bullet \rightsquigarrow \Big(\mathbb{R}\Gamma(U,\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(U_1,\mathscr{F}^\bullet)\oplus\mathbb{R}\Gamma(U_2,\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(U_{12},\mathscr{F}^\bullet) \xrightarrow{[+1]}\Big)$$

dont on dérive la suite exacte longue de Mayer-Vietoris d'hypercohomologies :

$$\boxed{\xrightarrow{[+1]} \mathbb{H}^m(U;\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m(U_1;\mathscr{F}^\bullet) \oplus \mathbb{H}^m(U_2;\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m(U_{12};\mathscr{F}^\bullet) \xrightarrow{[+1]}}$$

1.3.2. Mayer-Vietoris à supports compacts. De manière tout à fait analogue au paragraphe précédent, on a une suite exacte **à gauche** des sections à supports compacts :

$$0 \longrightarrow \Gamma_c(U_{12}, _) \longrightarrow \Gamma_c(U_1, _) \oplus \Gamma_c(U_2, _) \longrightarrow \Gamma_c(U, _) \longrightarrow 0,$$

qui est exacte lorsque elle est appliquée à un faisceau c-mou (*cf.* 1.4.4), d'où le foncteur de la catégorie dérivée $D_k^+(\boldsymbol{X})$ à valeurs dans la catégorie des triangles exacts :

$$\mathscr{F}^\bullet \rightsquigarrow \left(\mathbb{R}\Gamma_c(U_{12},\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_c(U_1,\mathscr{F}^\bullet) \oplus \mathbb{R}\Gamma_c(U_2,\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_c(U,\mathscr{F}^\bullet) \xrightarrow{[+1]} \right)$$

et la suite exacte longue de Mayer-Vietoris d'hypercohomologies à support compact :

$$\boxed{\xrightarrow{[+1]} \mathbb{H}^m_c(U_{12};\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m_c(U_1;\mathscr{F}^\bullet) \oplus \mathbb{H}^m_c(U_2;\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m_c(U;\mathscr{F}^\bullet) \xrightarrow{[+1]}}$$

1.4 Faisceaux *c*-mous et résolutions *c*-molles

Étant donné un anneau $\mathscr{A}$, on note $\mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ la catégorie des faisceaux de $\mathscr{A}$-modules.

1.4.1. Définition. Un faisceau $\mathscr{F}$ est dit «*flasque*» (resp. «*mou, c-mou*») lorsque le morphisme de restriction $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{F}) \to \Gamma(\boldsymbol{S};\mathscr{F})$ est surjectif pour tout partie $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{X}$ ouverte (resp. fermée, compacte). On a les implications :

$$\text{injectif} \implies \text{flasque} \implies \text{mou} \implies c\text{-mou}$$

1.4.2. Remarque. La classe de faisceaux injectifs (resp. flasques, mous, c-mous) est stable par somme directe finie et tout faisceau est sous-faisceau d'un faisceau injectif (*cf.* 1.1.18).

1.4.3. Proposition. *Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ deux espaces et $\mathscr{M} \in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$.*

a) *Le faisceau $\mathscr{M}$ est c-mou, si et seulement si, pour tout fermé $\boldsymbol{F} \subseteq \boldsymbol{X}$, le morphisme de restriction $\Gamma_c(\boldsymbol{X};\mathscr{M}) \to \Gamma_c(\boldsymbol{F};\mathscr{M})$ est surjectif.*

b) *Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ une application continue. Si $\mathscr{M}$ est c-mou, $f_!\mathscr{M}$ est c-mou.*

Démonstration

a) *Nécessité.* Supposons $\mathscr{M}$ c-mou sur $\boldsymbol{X}$. Pour toute $\sigma \in \Gamma_c(\boldsymbol{F};\mathscr{M})$, il existe un voisinage ouvert $\boldsymbol{U}$ de $\boldsymbol{F}$ et une section $\tilde{\sigma} \in \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{M})$ telle que $\tilde{\sigma}|_{\boldsymbol{F}} = \sigma$. Soit $\boldsymbol{V}$ un voisinage ouvert de $|\sigma|$ relativement compact dans $\boldsymbol{X}$ et tel que $\overline{\boldsymbol{V}} \subseteq \boldsymbol{U}$. La partie $\boldsymbol{K} := \boldsymbol{V}^{\#} \cup (\boldsymbol{F} \cap \overline{\boldsymbol{V}})$ est compacte et il existe $\tau \in \Gamma(\boldsymbol{K};\mathscr{M})$ vérifiant $\tau|_{\boldsymbol{V}^{\#}} = 0$ et $\tau|_{(\boldsymbol{F}\cap\overline{\boldsymbol{V}})} = \sigma|_{(\boldsymbol{F}\cap\overline{\boldsymbol{V}})}$. Comme $\mathscr{M}$ est c-mou, τ est restriction d'une section $\tilde{\tau} \in \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{M})$ qu'on peut supposer à support contenu dans $\boldsymbol{V}$ puisque $\tau|_{\boldsymbol{V}^{\#}} = 0$. Par conséquent, $\tilde{\tau} \in \Gamma_c(\boldsymbol{X};\mathscr{M})$ et $\tilde{\tau}|_{\boldsymbol{F}} = \sigma$.
Suffisance. Si $\boldsymbol{F}$ est compact on a $\Gamma_c(\boldsymbol{F};\mathscr{M}) = \Gamma(\boldsymbol{F};\mathscr{M})$ et la surjectivité du morphisme $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{M}) \to \Gamma(\boldsymbol{F};\mathscr{M})$ résulte de celle de $\Gamma_c(\boldsymbol{X};\mathscr{M}) \twoheadrightarrow \Gamma_c(\boldsymbol{F};\mathscr{M})$.

b) Pour chaque compact $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{Y}$ et chaque $\sigma \in \Gamma(\boldsymbol{K}; f_!\mathscr{M})$ il existe un voisinage ouvert $\boldsymbol{U}$ de $\boldsymbol{K}$ et $\tilde{\sigma} \in \Gamma(\boldsymbol{U}; f_!\mathscr{M})$ vérifiant $\tilde{\sigma}|_{\boldsymbol{K}} = \sigma$. Par définition de $f_!$, on a

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} \in \Gamma(f^{-1}\boldsymbol{U}; \mathscr{M}), \text{ et} \\ f : |\tilde{\sigma}| \to \boldsymbol{U} \text{ est propre.} \end{cases}$$

En particulier, $\tilde{\sigma} \in \Gamma_c(f^{-1}\boldsymbol{K}; \mathscr{M})$ et il existe une section $\tau \in \Gamma_c(\boldsymbol{X}; \mathscr{M})$ telle que $\tau|_{f^{-1}\boldsymbol{K}} = \tilde{\sigma}|_{f^{-1}\boldsymbol{K}}$ (d'après (a)). Comme $\Gamma_c(\boldsymbol{X}; \mathscr{M}) \subseteq \Gamma(\boldsymbol{Y}; f_!\mathscr{M})$, la section σ est bien l'image de τ par le morphisme de restriction $\Gamma(\boldsymbol{Y}; f_!\mathscr{M}) \to \Gamma(\boldsymbol{K}; f_!\mathscr{M})$. ∎

1.4.4. Proposition. *Dans les assertions suivantes $\boldsymbol{X} \xrightarrow{f} \boldsymbol{Y} \xrightarrow{g} \boldsymbol{Z}$ sont des applications continues, $\boldsymbol{U}$ est un ouvert quelconque de $\boldsymbol{X}$, et $\mathbf{0} \to \mathscr{M} \xrightarrow{p} \mathscr{N} \xrightarrow{q} \mathscr{P} \to \mathbf{0}$ est une suite exacte courte de faisceaux de $\mathscr{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$.*

a) *Si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont c-mous, $\mathscr{P}$ est c-mou.*

b) *Si $\mathscr{M}$ est c-mou la suite $\mathbf{0} \to \Gamma_c(\boldsymbol{U}; \mathscr{M}) \to \Gamma_c(\boldsymbol{U}; \mathscr{N}) \to \Gamma_c(\boldsymbol{U}; \mathscr{P}) \to \mathbf{0}$ est exacte.*

c) *Si $\mathscr{M}$ est c-mou la suite de faisceaux $\mathbf{0} \to f_!\mathscr{M} \to f_!\mathscr{N} \to f_!\mathscr{P} \to \mathbf{0}$ est exacte.*

d) *Soit $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$. Pour chaque résolution de $\mathscr{F}$ par des faisceaux c-mous :*

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{M}^0 \xrightarrow{d_0} \mathscr{M}^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{i-1}} \mathscr{M}^i \xrightarrow{d_i} \cdots$$

on a des isomorphismes canoniques pour chaque $m \in \mathbb{Z}$

$$H_c^m(\boldsymbol{U}; \mathscr{M}) \equiv h^m[\mathbf{0} \to \Gamma_c(\boldsymbol{U}; \mathscr{M}^0) \to \Gamma_c(\boldsymbol{U}; \mathscr{M}^1) \to \cdots \to \Gamma_c(\boldsymbol{U}; \mathscr{M}^i) \to \cdots]$$

$$\mathbb{R}^m f_! \mathscr{M} \equiv h^m[\mathbf{0} \to f_!\mathscr{M}^0 \to f_!\mathscr{M}^1 \to \cdots \to f_!\mathscr{M}^i \to \cdots]$$

e) *On a $\mathbb{R}(g \circ f)_! = \mathbb{R}g_! \circ \mathbb{R}f_!$.*

f) *Si l'espace $\boldsymbol{X}$ est en plus dénombrable à l'infini, les assertions* (b,c,d) *restent vraies après substitution de $\Gamma_c(\boldsymbol{U}; _)$ par $\Gamma(\boldsymbol{U}; _)$ et de $f_!$ par f_*.*

Démonstration

a) En supposant uniquement que $\mathscr{M}$ est c-mou, l'application $q(\boldsymbol{K}) : \Gamma(\boldsymbol{K}; \mathscr{N}) \to \Gamma(\boldsymbol{K}; \mathscr{P})$ est surjective, quelle que soit la partie compacte $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{X}$.

En effet, soit $\sigma \in \Gamma(\boldsymbol{K}; \mathscr{P})$. Comme q est surjective et $\boldsymbol{K}$ est compact, il existe une famille finie de parties compactes $\mathscr{K} := \{\boldsymbol{K}_1, \ldots, \boldsymbol{K}_r\}$ recouvrant $\boldsymbol{K}$ et, pour chaque i, une section $\tau_i \in \Gamma(\boldsymbol{K}_i; \mathscr{N})$ vérifiant $q(\tau_i) = \sigma|_{\boldsymbol{K}_i}$. On peut évidemment supposer que $\boldsymbol{K}_i \neq \boldsymbol{K}_j$ et $\boldsymbol{K}_i \cap \boldsymbol{K}_j \neq \varnothing$. Si $r > 1$, on a $\tau_1 - \tau_2 \in \Gamma(\boldsymbol{K}_1 \cap \boldsymbol{K}_2; \mathscr{M})$ et il existe $\nu \in \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathscr{M})$ tel que $\nu|_{\boldsymbol{K}_1 \cap \boldsymbol{K}_2} = \tau_1 - \tau_2$ puisque $\mathscr{M}$ est c-mou. Les sections τ_1 et $\tau_2 - \nu|_{\boldsymbol{K}_2}$ définissent alors une section de $\mathscr{N}$ au-dessus de $\boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2$ qui relève $\sigma|_{\boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2}$. L'itération de cette idée permet de réduire le cardinal r jusqu'à la valeur $r = 1$, CQFD.

Lorsque, en plus, $\mathscr{N}$ est c-mou, il existe $\tilde{\tau} \in \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathscr{G})$ telle que $\tilde{\tau}|_{\boldsymbol{K}} = \tau$ et alors $q(\tilde{\tau})|_{\boldsymbol{K}} = q(\tilde{\tau}|_{\boldsymbol{K}}) = \sigma$. Le faisceau $\mathscr{P}$ est alors bien c-mou.

b) Comme la restriction d'un faisceau c-mou à un ouvert est un faisceau c-mou, il suffit de prouver l'assertion pour $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{X}$.

Étant donné $\sigma \in \Gamma_c(\boldsymbol{X};\mathscr{P})$, on choisit deux compacts $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2 \subseteq \boldsymbol{X}$ tels que

$$|\sigma| \subseteq \boldsymbol{K}_1^\circ \subseteq \boldsymbol{K}_1 \subseteq \boldsymbol{K}_2^\circ \subseteq \boldsymbol{K}_2 .$$

D'après la preuve de (a), il existe $\tau \in \Gamma(\boldsymbol{K}_2;\mathscr{N})$ tel que $q(\tau) = \sigma|_{\boldsymbol{K}_2}$. La restriction $\tau|_{\boldsymbol{K}_2\setminus\boldsymbol{K}_1^\circ}$ appartient alors à $\Gamma(\boldsymbol{K}_2\setminus\boldsymbol{K}_1^\circ;\mathscr{M})$ et comme $\mathscr{M}$ est c-mou, il existe $\nu \in \Gamma(\boldsymbol{K}_2;\mathscr{M})$ vérifiant $\nu|_{\boldsymbol{K}_2\setminus\boldsymbol{K}_1^\circ} = \tau|_{\boldsymbol{K}_2\setminus\boldsymbol{K}_1^\circ}$. La différence $\tau' := \tau - \nu \in \Gamma(\boldsymbol{K}_2;\mathscr{N})$ est un relèvement de $\sigma|_{\boldsymbol{K}_2}$ dont la restriction à $\boldsymbol{K}_2^\circ\setminus\boldsymbol{K}_1$ est nulle par construction. Le prolongement par zéro de τ' appartient alors à $\Gamma_c(\boldsymbol{X};\mathscr{N})$ et relève bien σ.

c) Il suffit de regarder la suite des germes en chaque point $y \in \boldsymbol{Y}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & (f_!\mathscr{M})_y & \longrightarrow & (f_!\mathscr{N})_y & \longrightarrow & (f_!\mathscr{P})_y \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \| & & \| & & \| \\ \mathbf{0} & \to & \Gamma_c(f^{-1}y;\mathscr{M}) & \longrightarrow & \Gamma_c(f^{-1}y;\mathscr{N}) & \longrightarrow & \Gamma_c(f^{-1}y;\mathscr{P}) \to \mathbf{0} \end{array}$$

Les égalités résultent de la proposition classique qui affirme que pour tout $y \in \boldsymbol{Y}$ et tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$, on a $(f_!\mathscr{F})_y = \Gamma_c(f^{-1}y;\mathscr{F}|_{f^{-1}y})$. On est ainsi ramené à (b) et l'exactitude de la suite de faisceaux en question en découle.

d) Comme tout faisceau injectif est c-mou, les assertions (a) et (c) prouvent qu'un faisceau c-mou sur $\boldsymbol{X}$ est $f_!$-acyclique.

e) Pour $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$, on a $\mathbb{R}(g\circ f)_!\mathscr{F} = (g\circ f)_!\mathscr{M}^\bullet = g_!\big(f_!\mathscr{M}^\bullet\big)$ pour toute résolution c-molle $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{M}^\bullet$ (d'après (d)). Or, $f_!\mathscr{M}^\bullet$ est un complexe de faisceaux c-mous sur $\boldsymbol{Y}$ (1.4.3-(b)), donc $g_!$-acycliques. Par conséquent,

$$g_!(f_!\mathscr{M}^\bullet) = \mathbb{R}g_!(f_!\mathscr{M}^\bullet) = \mathbb{R}g_!(\mathbb{R}f_!\mathscr{F}) .$$

f) On réalise $\boldsymbol{X}$ comme réunion d'une famille croissante et dénombrable de compacts $\mathscr{K} := \{\boldsymbol{K}_0 \subseteq \boldsymbol{K}_1 \subseteq \cdots\}$ tels que $\boldsymbol{K}_i \subseteq \boldsymbol{K}_{i+1}^\circ$. Soit $\sigma \in \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{P})$.

En appliquant les mêmes idées de la preuve de (a), les morphismes $\Gamma(\boldsymbol{K}_i;\mathscr{N}) \to \Gamma(\boldsymbol{K}_i;\mathscr{P})$ sont surjectifs, et on construit, par récurrence sur i, une suite $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sections vérifiant

$$\tau_i \in \Gamma(\boldsymbol{K}_i,\mathscr{N}), \qquad \tau_{i+1}|_{\boldsymbol{K}_i} = \tau_i , \qquad q(\tau_i) = \sigma|_{\boldsymbol{K}_i} .$$

La suite $(\tau_i|_{\boldsymbol{K}_i^\circ})_{i\in\mathbb{N}}$ vérifie alors les conditions de recollement de sections d'un faisceau et définit par conséquent une section $\tau \in \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{N})$ qui relève σ. Ceci prouve l'assertion (b) pour le foncteur $\Gamma(\boldsymbol{X};_)$ à la place de $\Gamma_c(\boldsymbol{X};_)$.

L'exactitude de la suite $\mathbf{0} \to f_*\mathscr{M} \to f_*\mathscr{N} \to f_*\mathscr{P} \to \mathbf{0}$ résulte également d'étudier la suite des germes $\mathbf{0} \to (f_*\mathscr{M})_y \to (f_*\mathscr{N})_y \to (f_*\mathscr{P})_y \to \mathbf{0}$ pour tout $y \in \boldsymbol{Y}$, ce qui découle de l'exactitude des suites

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \to & \Gamma(\boldsymbol{U};f_*\mathscr{M}) & \to & \Gamma(\boldsymbol{U};f_*\mathscr{N}) & \to & \Gamma(\boldsymbol{U};f_*\mathscr{P}) \to \mathbf{0} \\ & & \| & & \| & & \| \\ \mathbf{0} & \to & \Gamma(f^{-1}\boldsymbol{U};\mathscr{M}) & \to & \Gamma(f^{-1}\boldsymbol{U};\mathscr{N}) & \to & \Gamma(f^{-1}\boldsymbol{U};\mathscr{P}) \to \mathbf{0} \end{array}$$

pour tout ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{Y}$, ce qui a déjà été prouvé.

A partir de là, le fait qu'un faisceau c-mou est $\Gamma(\boldsymbol{X};_)$ et f_*-acyclique résulte de la même manière que dans la preuve de (c). ∎

1.4.5. Exercice

a) On a $\mathbb{R}\Gamma_c(\boldsymbol{U};\mathscr{G}) \equiv \mathbb{R}\Gamma_c(\boldsymbol{X};i_{\boldsymbol{U}!}\mathscr{G})$, pour tout ouvert $\boldsymbol{U}\subseteq\boldsymbol{X}$, et tout $\mathscr{G}\in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{U})$.

Lorsque l'espace $\boldsymbol{X}$ dénombrable à l'infini.

b) On a $H^*_c(\boldsymbol{U};\mathscr{G}) \equiv H^*(\boldsymbol{X};i_{\boldsymbol{U}!}\mathscr{G})$, pour tout ouvert $\boldsymbol{U}$ relativement compact dans $\boldsymbol{X}$, et tout $\mathscr{G}\in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{U})$.

c) $\mathscr{F}\in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ est c-mou, si et seulement si, $\mathscr{F}$ est mou.

1.4.6. Exercice. Justifier les affirmations du paragraphe 1.3.2.

1.4.7. Exemple. Sur une variété différentielle $\boldsymbol{X}$, le complexe des faisceaux des formes différentielles réelles $\underline{\Omega}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}/\mathbb{R}}$ est une résolution du faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}$ d'après le lemme de Poincaré local. L'existence de partitions de l'unité sur $\boldsymbol{X}$ implique alors que chaque faisceau $\underline{\Omega}^{i}_{\boldsymbol{X}}$ est c-mou, et l'on a des isomorphismes canoniques :

$$H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) \equiv H^*(\boldsymbol{X};\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \quad \text{et} \quad H^*_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{X}) \equiv H^*_c(\boldsymbol{X};\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}})$$

Ceci prouve que la cohomologie de de Rham est un invariant topologique de $\boldsymbol{X}$, autrement dit, indépendant de la structure différentiable dont $\boldsymbol{X}$ est munie.

1.4.8. Proposition. *Soit $\mathscr{M}\in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

a) *$\mathscr{M}$ est un faisceau c-mou.*

b) *Pour tout ouvert $\boldsymbol{U}\subseteq\boldsymbol{X}$, le faisceau $\mathscr{M}|_{\boldsymbol{U}}$ est c-mou.*

c) *Il existe un recouvrement ouvert $\boldsymbol{X}:=\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{U}_\alpha$ tel que les faisceaux $\mathscr{M}|_{\boldsymbol{U}_\alpha}$ sont c-mous.*

d) *Pour tout ouvert $\boldsymbol{U}\subseteq\boldsymbol{X}$, on a $H^1_c(\boldsymbol{U};\mathscr{M})=0$.*

e) *Il existe un recouvrement ouvert $\boldsymbol{X}:=\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{U}_\alpha$ tel que, pour chaque $\alpha\in\mathfrak{A}$ et tout ouvert $\boldsymbol{V}\subseteq\boldsymbol{U}_\alpha$, on ait $H^1_c(\boldsymbol{V};\mathscr{M})=0$.*

Démonstration. Les implications (a)⇒(b)⇒(c) sont évidentes et (a)⇒(d)∧(e) résulte de la proposition précédente.

Pour tout compact $\boldsymbol{K}$ d'un ouvert $\boldsymbol{V}\subseteq\boldsymbol{X}$, la suite longue de cohomologie à supports compacts associée au triangle exact $\Delta\big(\boldsymbol{V}\backslash\boldsymbol{K},\boldsymbol{V},\boldsymbol{K};\mathscr{M}\big)$ commence par :

$$0\to\Gamma_c(\boldsymbol{V}\backslash\boldsymbol{K};\mathscr{M})\longrightarrow\Gamma_c(\boldsymbol{V};\mathscr{M})\xrightarrow{\beta}\Gamma(\boldsymbol{K};\mathscr{M})\longrightarrow H^1_c(\boldsymbol{V}\backslash\boldsymbol{K};\mathscr{M})\longrightarrow\cdots$$

En particulier, si $H^1_c(\boldsymbol{V}\backslash\boldsymbol{K};\mathscr{M})=0$, le morphisme β est surjectif et comme $\Gamma_c(\boldsymbol{V};\mathscr{M})\subseteq\Gamma(\boldsymbol{V};\mathscr{M})$, le morphisme de restriction $\Gamma(\boldsymbol{V};\mathscr{M})\to\Gamma(\boldsymbol{K};\mathscr{M})$ est, lui aussi, surjectif. On en déduit les équivalences (d)⇔(a) et (e)⇔(c). La proposition résultera maintenant de prouver l'implication (c)⇒(d).

La famille $\mathscr{U}$ des ouverts $\boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{U}$ pour lesquels $H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{W};\mathscr{M}) = 0$ est non vide (on a toujours $\varnothing \in \mathscr{U}$), et munie de l'ordre d'inclusion `$\subseteq$´ c'est une famille inductive. En effet, si $\{\boldsymbol{U}_i\}_i \subseteq \mathscr{U}$ est totalement ordonné de réunion $\boldsymbol{W}$, on a $\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{W};_) = \varinjlim_i \Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}_i;_)$ auquel cas $H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{W};\mathscr{M}) = \varinjlim H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}_i;\mathscr{M}) = 0$. Soit $\boldsymbol{U}_0 \in \mathscr{U}$ maximal (Zorn) et supposons $\boldsymbol{U}_0 \neq \boldsymbol{U}$. Si (e) est vérifiée, il existe $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que $\boldsymbol{V} := \boldsymbol{U}_\alpha \cap \boldsymbol{U} \not\subseteq \boldsymbol{U}_0$ et $\boldsymbol{V} \in \mathscr{U}$. Par Mayer-Vietoris à supports compacts, on a

$$\begin{array}{ccccccccc} \to H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V}\cap\boldsymbol{U}_0;\mathscr{M}) & \to & H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V};\mathscr{M}) \oplus H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}_0;\mathscr{M}) & \to & H^1_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V}\cup\boldsymbol{U}_0;\mathscr{M}) & \to & H^2_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V}\cap\boldsymbol{U}_0;\mathscr{M}) & \to \\ \| & & \| \quad\quad \| & & & & \| & \\ 0 & & 0 \quad\quad 0 & & & & 0 & \end{array}$$

puisque $\mathscr{M}|_{\boldsymbol{V}}$ est c-mou. Il s'ensuit que $\boldsymbol{V} \cup \boldsymbol{U}_0 \in \mathscr{U}$, mais ceci contredit la maximalité de $\boldsymbol{U}_0$. Par conséquent, $\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{U}$ et (d) est prouvée. ∎

1.4.9. Exercice. Montrer que la propriété d'être c-mou est locale, autrement dit, prouver que $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ est c-mou, si et seulement si, $\mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}_\alpha}$ est c-mou pour tout ouvert $\boldsymbol{U}_\alpha$ de tout (resp. d'un) recouvrement ouvert $\boldsymbol{X} = \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \boldsymbol{U}_\alpha$.

1.5 Dimension cohomologique

Un espace topologique $\boldsymbol{X}$ est dit de «*dimension cohomologique finie (sur un anneau $\mathscr{A}$)*» lorsqu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$H^m(\boldsymbol{X};\mathscr{F}) = 0, \text{ pour tout faisceau de } \mathscr{A}\text{-modules } \mathscr{F} \text{ et tout } m > N. \qquad (*)$$

Dans ce cas, la «*dimension cohomologique de $\boldsymbol{X}$ (sur $\mathscr{A}$)*», notée $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A})$, est le plus petit des $N \in \mathbb{N}$ vérifiant $(*)$.

1.5.1. Proposition. *On suppose l'espace $\boldsymbol{X}$ dénombrable à l'infini.*

a) *Les assertions suivantes sont équivalentes*

i) $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A}) \leqslant n$.

ii) *Pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ et toute résolution c-molle (en particulier : injective, flasque, molle)*

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{M}^0 \xrightarrow{d_0} \mathscr{M}^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \mathscr{M}^n \xrightarrow{d_n} 0 \longrightarrow \cdots$$

le faisceau $\underline{\ker}(d_n)$ est c-mou. En particulier, tout faisceau admet une résolution c-molle de longueur majorée par n.

b) *Pour toute partie localement fermée $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{X}$, on a $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{S}/\mathscr{A}) \leqslant \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A})$.*

c) *$\mathbb{R}^m f_! \mathscr{F} = 0$, pour tous $m > \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A})$, $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ et $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ continue.*

d) *$H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\mathscr{F}) = 0$, pour tous $m > \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A})$ et $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$.*

e) *Soit $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U} \amalg \boldsymbol{F}$ une partition de $\boldsymbol{X}$ en réunion d'un ouvert $\boldsymbol{U}$ et de son fermé complémentaire $\boldsymbol{F}$. Alors, $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A}) = \sup\{\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{U}/\mathscr{A}), \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{F}/\mathscr{A})\}$.*

Démonstration

a) L'implication (a-ii)⇒(a-i) résulte de 1.4.4-(f). Réciproquement, pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ et chaque une résolution c-molle $\varepsilon : \mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{M}^\bullet$, on a la suite exacte

$$\mathbf{0} \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{M}^0 \xrightarrow{d_0} \mathscr{M}^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \underline{\underline{\ker}}(d_n) \to \mathbf{0} \qquad (\diamond)$$

donnant des isomorphismes canoniques

$$H^r_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V}; \underline{\underline{\ker}}(d_n)) \equiv H^{n+r}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V}; \mathscr{F})$$

pour tout $r > 0$ et tout ouvert $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{X}$. Or, $H^{n+r}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V}; \mathscr{F}) = H^{n+r}(\boldsymbol{X}; i_{\boldsymbol{V}!}\mathscr{F})$ pour tout $\boldsymbol{V}$ relativement compact dans $\boldsymbol{X}$ (1.4.5) ; par conséquent, si $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A}) \leqslant n$, on a

$$H^r_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V}; \underline{\underline{\ker}}(d_n)) = 0\,, \text{ pour tout } r > 0,$$

quel que soit l'ouvert $\boldsymbol{V}$ relativement compact dans $\boldsymbol{X}$. Comme les ouverts relativement compacts recouvrent $\boldsymbol{X}$, le faisceau $\underline{\underline{\ker}}(d_n)$ est c-mou d'après 1.4.8 et $(\diamond)$ est une résolution c-molle de longueur majorée par n.

b) On a $H^*(\boldsymbol{Z}; \mathscr{F}) = H^*(\boldsymbol{X}; i_{\boldsymbol{Z}*}\mathscr{F})$, pour tout plongement fermé $i_{\boldsymbol{Z}} : \boldsymbol{Z} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ et tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{Z})$. L'assertion (b) est donc vérifiée pour $\boldsymbol{S}$ fermé dans $\boldsymbol{X}$.

Pour tout plongement ouvert $i_{\boldsymbol{U}} : \boldsymbol{U} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ et tout $\mathscr{G} \in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{U})$, le faisceau $i_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{G}$ admet une résolution c-molle $\varepsilon : i_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{G} \hookrightarrow \mathscr{M}^\bullet$ de longueur majorée par $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A})$. La restriction $\varepsilon|_{\boldsymbol{U}} : \mathscr{G} \hookrightarrow \mathscr{M}^\bullet|_{\boldsymbol{U}}$ est clairement une résolution c-molle de $\mathscr{G}$ de longueur majorée par $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A})$. Comme $\boldsymbol{U}$ est dénombrable à l'infini, on a donc (1.4.4-(f)) :

$$\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{U}/\mathscr{A}) \leqslant \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A})\,.$$

c,d) Conséquence immédiate de (a-ii) et 1.4.4-(d).

e) Soit $n > \sup\{\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{U}/\mathscr{A}), \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{F}/\mathscr{A})\}$. Pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ la suite longue de cohomologie associée à la suite exacte courte $\mathbf{0} \to i_{\boldsymbol{U}!}(\mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}}) \to \mathscr{F} \to i_{\boldsymbol{F}!}(\mathscr{F}|_{\boldsymbol{F}}) \to \mathbf{0}$ donne l'encadrement :

$$H^n\big(\boldsymbol{X}; i_{\boldsymbol{U}!}\big(\mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}}\big)\big) \longrightarrow H^n\big(\boldsymbol{X}; \mathscr{F}\big) \longrightarrow H^n\big(\boldsymbol{X}; i_{\boldsymbol{F}!}\big(\mathscr{F}|_{\boldsymbol{F}}\big)\big)$$

où $H^n\big(\boldsymbol{X}; i_{\boldsymbol{F}!}\big(\mathscr{F}|_{\boldsymbol{F}}\big)\big) = H^n\big(\boldsymbol{F}; \mathscr{F}|_{\boldsymbol{F}}\big) = 0$. Le faisceau $\mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}}$ admet une résolution c-molle $\varepsilon : \mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}} \hookrightarrow \mathscr{M}^\bullet$ de longueur majorée par $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{U}/\mathscr{A}) < n$ et le foncteur $i_{\boldsymbol{U}!}$ est exact et transforme c-mou en c-mou (1.4.3-(b)), il s'ensuit que $i_{\boldsymbol{U}!}(\varepsilon) : i_{\boldsymbol{U}!}\mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}} \hookrightarrow i_{\boldsymbol{U}!}\mathscr{M}^\bullet$ est une résolution c-molle de $i_{\boldsymbol{U}!}\mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}}$ de longueur strictement majorée par n. Par (a), $H^n\big(\boldsymbol{X}; i_{\boldsymbol{U}!}\big(\mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}}\big)\big) = 0$ et alors $H^n\big(\boldsymbol{X}; \mathscr{F}\big) = 0$. ∎

1.5.2. Exercice. On suppose l'espace $\boldsymbol{X}$ dénombrable à l'infini.

a) Montrer que $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A}) = \sup\{\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{S})\}_{\boldsymbol{S}}$, où $\boldsymbol{S}$ parcourt la famille des parties localement fermées (resp. ouvertes, fermées) de $\boldsymbol{X}$.

b) $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A}) = \sup_i\{\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{S}_i/\mathscr{A})\}$, pour tout recouvrement **fini** $\boldsymbol{X} = \bigcup_{i=1}^r \boldsymbol{S}_i$ par des parties localement fermées dans $\boldsymbol{X}$.

c) $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A}) = \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}}\{\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{U}_\alpha/\mathscr{A})\}$, pour tout recouvrement ouvert $\boldsymbol{X} = \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \boldsymbol{U}_\alpha$.

d) Soit $\{\boldsymbol{S}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ une famille de parties localement fermées de $\boldsymbol{X}$ telle que $\boldsymbol{X} = \bigcup_\alpha \boldsymbol{S}^\circ$, où $\boldsymbol{S}^\circ$ désigne l'intérieur de $\boldsymbol{S}$ dans $\boldsymbol{X}$. Alors

$$\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A}) = \sup\{\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{S}_\alpha/\mathscr{A})\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}\,.$$

En particulier, si $\boldsymbol{X}_1$ et $\boldsymbol{X}_2$ sont des espaces dénombrables à l'infini,

$$\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}_1\times\boldsymbol{X}_2/\mathscr{A}) = \sup\{\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{K}_1\times\boldsymbol{K}_2/\mathscr{A})\}_{(\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_2)}$$

où $\boldsymbol{K}_i$ parcourt la famille des parties compactes de $\boldsymbol{X}_i$.

1.5.3. Exercice

a) Soit $\boldsymbol{X}$ un espace dénombrable à l'infini admettant un plongement localement fermé $f:\boldsymbol{X}\hookrightarrow\boldsymbol{X}$. Alors, pour tout $\boldsymbol{S}$ localement fermé dans $\boldsymbol{X}$ vérifiant $\mathrm{im}(f)\subseteq\boldsymbol{S}$, on a $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{S}/\mathscr{A}) = \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A})$.

b) $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{S}/\mathscr{A}) = \dim_{\mathrm{ch}}(\mathbb{R}^n/\mathscr{A})$, pour tout $\boldsymbol{S}\subseteq\mathbb{R}^n$ localement fermée d'intérieur non vide. En particulier, $\dim_{\mathrm{ch}}([0,1]^n/\mathscr{A}) = \dim_{\mathrm{ch}}(\mathbb{R}^n/\mathscr{A})$.

1.5.4. Exercice. Soit $\mathscr{P}$ un faisceau **projectif** de $\mathscr{A}$-modules sur un espace dénombrable à l'infini et localement connexe $\boldsymbol{X}$.

a) Prouver que pour toute partie fermée $\boldsymbol{F}\subseteq\boldsymbol{X}$, la restriction de $\mathscr{P}|_{\boldsymbol{F}}$ est un faisceau projectif de $\mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{F})$.

b) En remarquant qu'il existe une surjection $\bigoplus_\alpha \underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{U}_\alpha} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathscr{P}$ (*cf.* 3.4.6-(e)), le faisceau $\mathscr{P}$ est facteur direct de $\bigoplus_\alpha \underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{U}_\alpha}$. Montrer alors que l'ensemble $|\mathscr{P}|$ des $x\in\boldsymbol{X}$ tels que $\mathscr{P}_x\neq 0$ est une partie ouverte dans $\boldsymbol{X}$ telle que chaque $x\in|\mathscr{P}|$ admet une base de voisinages fermés $\boldsymbol{V}$ sur lesquels le faisceau constant $\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{V}}$ est projectif dans $\mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{V})$.

c) À l'aide de l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{V}},_) \equiv \Gamma(\boldsymbol{V};_)$, montrer que $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{V}/\mathscr{A}) = 0$.

d) En déduire que $|\mathscr{F}|$ est ouvert de dimension cohomologique nulle sur $\mathscr{A}$.

e) Conclure que $\mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ admet un faisceau projectif non nul, si et seulement si, $\boldsymbol{X}$ contient un ouvert de dimension cohomologique nulle sur $\mathscr{A}$.

f) Montrer à l'aide du théorème 1.6.5 que $\mathbb{R}^n$ n'a pas de faisceau projectif non nul si $n\geqslant 1$.

Le théorème suivant est le point de départ de la plupart des théorèmes de dimension cohomologique et d'homotopie pour les espaces topologiques que nous allons considérer.

1.5.5. Théorème. *Soient $\boldsymbol{I}$ un intervalle réel et $\mathscr{A}$ un anneau.*

a) *On a :*

$$\begin{cases} \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{I}/\mathscr{A}) = 0\,, & \textit{si } \boldsymbol{I} \textit{ est un singleton,} \\ \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{I}/\mathscr{A}) = 1\,, & \textit{autrement.} \end{cases}$$

b) *Soit* $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{I})$ *tel que l'ensemble des* $x \in \boldsymbol{I}$ *pour lesquels le morphisme de restriction* $\Gamma(\boldsymbol{I};\mathscr{F}) \to \mathscr{F}_x$ *est surjectif est partout dense dans* $\boldsymbol{I}$ *; alors*

$$H^m(\boldsymbol{I};\mathscr{F}) = 0\,,\ \textit{pour tout}\ m \geqslant 1\,.$$

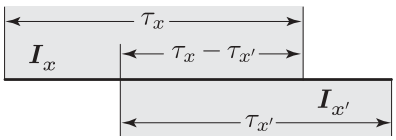
En particulier, $H^m(\boldsymbol{I};\underline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{I}}) = 0$ *pour tout* $\mathscr{A}$*-module* $\boldsymbol{M}$ *et tout* $m \geqslant 1$*.*

Démonstration. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{A}$-modules et

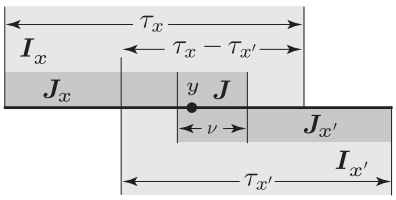
$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{J}^0 \xrightarrow{d_0} \mathscr{J}^1 \xrightarrow{d_1} \cdots\cdots \xrightarrow{d_{\ell-3}} \mathscr{J}^{\ell-2} \xrightarrow{d_{\ell-2}} \mathscr{J}^{\ell-1} \xrightarrow{d_{\ell-1}} \mathscr{J}^{\ell} \xrightarrow{d_{\ell}} \cdots\cdots$$

une résolution de $\mathscr{F}$ par des faisceaux flasques. Supposons $\ell \geqslant 2$ et donnons-nous une section globale $\sigma \in \Gamma(\boldsymbol{I};\mathscr{J}^{\ell})$ vérifiant $d_\ell(\sigma) = 0$. Chaque $x \in \boldsymbol{I}$ admet un voisinage $\boldsymbol{I}_x$ ouvert connexe dans $\boldsymbol{I}$ sur lequel il existe une section $\tau_x \in \Gamma(\boldsymbol{I}_x;\mathscr{J}^{\ell-1})$ telle que $d_{\ell-1}(\tau_x) = \sigma|_{\boldsymbol{I}_x}$. La famille d'intervalles $\{\boldsymbol{I}_x\}_{x\in\boldsymbol{I}}$ est un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{I}$.

Lorsque $\boldsymbol{I}_x \cap \boldsymbol{I}_{x'} = \varnothing$ ou bien $\boldsymbol{I}_x \subseteq \boldsymbol{I}_{x'}$, l'existence de $\tau \in \Gamma(\boldsymbol{I}_x \cup \boldsymbol{I}_{x'};\mathscr{J}^{\ell-1})$ vérifiant $\tau|_{\boldsymbol{I}_x} = \tau_x$, $\tau|_{\boldsymbol{I}_{x'}} = \tau_{x'}$ et $d_{\ell-1}(\tau) = \sigma|_{\boldsymbol{I}_x\cup\boldsymbol{I}_{x'}}$ est claire. Dans le cas contraire on est dans la situation de l'illustration avec $d_{\ell-1}(\tau_x - \tau_{x'}) = 0$ sur $\boldsymbol{I}_x \cap \boldsymbol{I}_{x'}$.



Un élément $y \in \boldsymbol{I}_x \cap \boldsymbol{I}_{x'}$ appartient alors à un intervalle ouvert $\boldsymbol{J} \subseteq \boldsymbol{I}_x \cap \boldsymbol{I}_{x'}$ sur lequel $d_{\ell-2}(\nu) = (\tau_x - \tau_{x'})|_{\boldsymbol{J}}$ pour un certain $\nu \in \Gamma(\boldsymbol{J};\mathscr{J}^{\ell-2})$. Notons $\boldsymbol{J}_x$ (resp. $\boldsymbol{J}_{x'}$) le sous-ensemble de $\boldsymbol{I}_x \cap \boldsymbol{I}_{x'}$ des éléments majorés (resp. minorés) par un élément de $\boldsymbol{J}$. On a clairement $\boldsymbol{I}_x \cup \boldsymbol{I}_{x'} = \boldsymbol{J}_x \cup \boldsymbol{J}_{x'}$ et $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_x \cap \boldsymbol{J}_{x'}$. Comme $\mathscr{J}^{\ell-2}$ est un faisceau flasque, ν est la restriction à $\boldsymbol{J}$ d'une section $\tilde{\nu} \in \Gamma(\boldsymbol{J}_{x'};\mathscr{J}^{\ell-2})$. Les éléments $\tau_x|_{\boldsymbol{J}_x}$ et $\tau_{x'}|_{\boldsymbol{J}_{x'}} + d_{\ell-2}(\tilde{\nu})$, respectivement dans $\Gamma(\boldsymbol{J}_x;\mathscr{J}^{\ell-1})$ et $\Gamma(\boldsymbol{J}_{x'};\mathscr{J}^{\ell-1})$, se recollent alors en une section de $\Gamma(\boldsymbol{I}_x \cup \boldsymbol{I}_{x'};\boldsymbol{I}^{\ell-1})$ qui relève $\sigma|_{(\boldsymbol{I}_x\cup\boldsymbol{I}_{x'})}$.



Lorsque $\boldsymbol{I}$ est compact, l'intervalle $\boldsymbol{I}$ est recouvert par une famille finie d'intervalles $\boldsymbol{I}_x$, et le procédé de recollement successif donne après un nombre fini d'étapes une section $\tau \in \Gamma(\boldsymbol{I};\mathscr{J}^{\ell-1})$ vérifiant $d_{\ell-1}(\tau) = \sigma$. Par conséquent :

$$\text{si } \boldsymbol{I} \text{ est compact, } H^{\ell}(\boldsymbol{I};\mathscr{F}) = 0 \text{ pour tout } \ell \geqslant 2, \qquad (*)$$

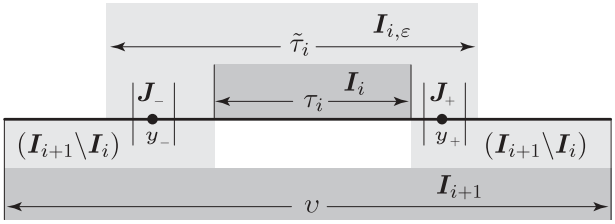
auquel cas $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{I}/\mathscr{A}) \leqslant 1$.

Lorsque $\boldsymbol{I}$ n'est pas compact on le réalise comme réunion croissante dénombrable de sous-intervalles compacts $\boldsymbol{I}_0 \subseteq \boldsymbol{I}_1 \subseteq \cdots \subseteq \boldsymbol{I}_n \subseteq \cdots$, tels que $\boldsymbol{I}_i$ est contenu dans l'intérieur de $\boldsymbol{I}_{i+1}$. En reprenant les données du premier paragraphe et compte tenue du résultat déjà démontré $(*)$, nous construirons une famille de sections $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\tau_i \in \Gamma(\boldsymbol{I}_i;\mathscr{J}^{\ell-1})\,,\quad d_{\ell-1}(\tau_i) = \sigma|_{\boldsymbol{I}_i}\,,\quad \tau_{i+1}|_{\boldsymbol{I}_i} = \tau_i\,. \qquad (\diamond)$$

Les sections τ_i se recollent alors en une section globale τ qui relève σ. Par conséquent, $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{I}/\mathscr{A}) \leqslant 1$ quel que soit l'intervalle réel $\boldsymbol{I}$.

La définition de $\{\tau_i\}$ est récursive : La section τ_0 est un relèvement arbitrairement choisi de $\sigma|_{\boldsymbol{I}_0}$ (garanti par $(*)$). Supposons avoir défini $\{\tau_0,\dots,\tau_i\}$ vérifiant $(\diamond)$. La section τ_i est la restriction d'une section $\tilde{\tau}_i \in \Gamma(\boldsymbol{I}_{i,\varepsilon};\mathscr{I}^{\ell-1})$ vérifiant $d_{\ell-1}(\tilde{\tau}_i) = \sigma|_{\boldsymbol{I}_{i,\varepsilon}}$, où $\boldsymbol{I}_{i,\varepsilon}$ est un voisinage ouvert connexe de $\boldsymbol{I}_i$ contenu dans $\boldsymbol{I}_{i+1}$. Par $(*)$, il existe $\upsilon \in \Gamma(\boldsymbol{I}_{i+1};\mathscr{I}^{\ell-1})$ vérifiant $d_{\ell-1}(\upsilon) = \sigma|_{\boldsymbol{I}_{i+1}}$. On applique alors la procédure de recollement expliquée plus haut à la décomposition $\boldsymbol{I}_{i+1} = \boldsymbol{I}_{i,\varepsilon} \cup (\boldsymbol{I}_{i+1}\backslash\boldsymbol{I}_i)$ et aux sections $\tilde{\tau}_i$ et $\upsilon|_{(\boldsymbol{I}_{i+1}\backslash\boldsymbol{I}_i)}$ en choisissant des intervalles $\boldsymbol{J}_+$ et $\boldsymbol{J}_-$ assez petits pour ne par perturber τ_i. Un recollement ainsi construit, noté τ_{i+1}, vérifie les conditions $(\diamond)$, CQFD.



Les raisonnements précédents utilisent uniquement le fait que le faisceau $\mathscr{I}^{\ell-2}$ est tel que les restrictions $\Gamma(\boldsymbol{I};\mathscr{I}^{\ell-2}) \to \mathscr{I}^{\ell-2}_x$ sont surjectives, quels que soit $x \in \boldsymbol{I}$, ils s'appliqueront par conséquent au cas $\ell = 1$ lorsque le faisceau $\mathscr{F}$ satisfait cette condition, d'où l'assertion (b) du théorème.

Pour terminer, on a clairement $\dim_{\mathrm{ch}}(\{\bullet\}/\mathscr{A}) = 0$ et lorsque $\boldsymbol{I}$ n'est pas réduit à un point, on choisit deux points distincts $x_0, x_1 \in \boldsymbol{I}$, on pose $\boldsymbol{Z} := \{x_0, x_1\}$ et $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}\backslash\boldsymbol{Z}$, et l'on considère la suite longue de cohomologie associé à la suite exacte courte de faisceaux $\Delta\big(\boldsymbol{U},\boldsymbol{I},\boldsymbol{Z};\underline{\underline{\mathscr{A}}}_{\boldsymbol{I}}\big)$ dont les premiers termes sont :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 \to H^0(\boldsymbol{I};i_{\boldsymbol{U}!}\underline{\underline{\mathscr{A}}}_{\boldsymbol{U}}) & \to & H^0(\boldsymbol{I};\underline{\underline{\mathscr{A}}}_{\boldsymbol{I}}) & \to & H^0(\boldsymbol{Z};i_{\boldsymbol{Z}*}\underline{\underline{\mathscr{A}}}_{\boldsymbol{Z}}) & \to & H^1(\boldsymbol{I};i_{\boldsymbol{U}!}\underline{\underline{\mathscr{A}}}_{\boldsymbol{U}}) & \to & H^1(\boldsymbol{I};\underline{\underline{\mathscr{A}}}_{\boldsymbol{I}}) & \to \\ \| & & \| & & \| & & & & \| & \\ \mathbf{0} & & \mathscr{A} & & \mathscr{A}^2 & & & & \mathbf{0} & \end{array}$$

donc $H^1(\boldsymbol{I};i_{\boldsymbol{U}!}\underline{\underline{\mathscr{A}}}_{\boldsymbol{U}}) \equiv \mathscr{A}$ et alors $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{I}/\mathscr{A}) = 1$. ∎

1.5.6. Remarque et exercice. Dans cette démonstration, l'égalité $\dim_{\mathrm{ch}}([0,1]/\mathscr{A}) = 1$ implique immédiatement que $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{I}/\mathscr{A}) = 1$ pour tout $\boldsymbol{I} \neq \{\bullet\}$ moyennant 1.5.3-(b). Les détails supplémentaires de la démonstration concernent uniquement l'acyclicité des faisceaux constants sur $\boldsymbol{I}$ lorsque $\boldsymbol{I}$ n'est pas compact. C'est un résultat que l'on peut obtenir facilement du théorème homotopie de la section suivante (1.6.2-(b)) dont la démonstration utilise uniquement le cas $\boldsymbol{I} = [0,1]$ du théorème 1.5.5.

1.6 Premiers théorèmes d'homotopie

Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ une application continue entre deux espaces topologiques. Pour tout $\mathscr{F}^\bullet \in D^+_k(\boldsymbol{Y})$ on dispose du morphisme d'adjonction $\mathscr{F}^\bullet \to \mathbb{R}f_*f^{-1}\mathscr{F}^\bullet$ et des morphismes entre objets dérivés :

$$H^m(f) : H^m(\boldsymbol{Y},\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow H^m(\boldsymbol{X},f^{-1}\mathscr{F}^\bullet)$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Les théorèmes d'homotopie étudient la manière dont $H^*(f)$ dépend de la classe d'homotopie de f. Le cas le plus simple concerne la situation où $\mathscr{F}^\bullet$ est quasi-

isomorphe à un faisceau localement constant de k-espaces vectoriels sur $\boldsymbol{Y}$ placé en degré 0, ce que nous allons noter $\mathscr{L}$.

Notons $\boldsymbol{I}$ l'intervalle des nombres réels $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$, soit $h : \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ une application continue et $i_t : \boldsymbol{X} \hookrightarrow \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{X}$ le plongement fermé $x \mapsto (t,x)$. Notons $f_t := h \circ i_t$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} & = & \boldsymbol{X} \\ {\scriptstyle i_0}\downarrow\downarrow{\scriptstyle i_1} & & {\scriptstyle f_0}\downarrow\downarrow{\scriptstyle f_1} \\ \boldsymbol{I}\times\boldsymbol{X} & \xrightarrow{\ h\ } & \boldsymbol{Y} \end{array} \qquad (\mathcal{H})$$

Un faisceau localement constant $\mathscr{L}$ sur $\boldsymbol{Y}$ est donné par une représentation du groupe fondamental de chaque composante connexe $\boldsymbol{Y}'_i$ de $\boldsymbol{Y}$, noté $\Pi_1(\boldsymbol{Y}'_i)$, dans la catégorie des k-espaces vectoriels. On a donc une famille de k-espaces vectoriels V_i et une famille de représentations $\rho := \{\rho_i : \Pi_1(\boldsymbol{Y}'_i) \to \mathrm{Iso}_k(V_i)\}$. Comme l'image par une application continue d'un connexe est connexe, les applications f_t induisent des homomorphismes de groupes fondamentaux $\Pi_1(f_t) : \Pi_1(\boldsymbol{X}'_j) \to \Pi_1(\boldsymbol{Y}'_i)$ avec $f_t(\boldsymbol{X}'_j) \subseteq \boldsymbol{Y}'_i$. On note $\Pi_1(f_t)$ la famille de ces homomorphismes. Le faisceau localement constant $f_t^{-1}\mathscr{L}$ correspond alors à la famille de représentations $\rho \circ \Pi_1(f_t)$. Or, on a la factorisation $\Pi_1(f_t) = \Pi_1(h) \circ \Pi_1(i_t)$ où $\Pi_1(i_t) = \Pi_1(i_0)$ puisque $\boldsymbol{I}$ est contractile. Par conséquent, le faisceau localement constant $f_t^{-1}(\mathscr{L})$ est indépendant de t ; il sera noté $f^{-1}(\mathscr{L})$.

1.6.1. Exercice. On complète $(\mathcal{H})$ en rajoutant la projection $p : \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{X} \twoheadrightarrow \boldsymbol{X}$, $p(t,x) = x$.

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} & = & \boldsymbol{X} \\ {\scriptstyle i_0}\downarrow\downarrow{\scriptstyle i_1} & & {\scriptstyle f_0}\downarrow\downarrow{\scriptstyle f_1} \\ \boldsymbol{I}\times\boldsymbol{X} & \xrightarrow{\ h\ } & \boldsymbol{Y} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ \boldsymbol{X} & & \end{array} \qquad (\mathcal{H}')$$

Justifier l'égalité $h^{-1}\mathscr{L} = p^{-1}f^{-1}\mathscr{L}$ à l'aide des remarques du dernier paragraphe.

1.6.2. Théorème. *Avec les données ci-dessus,*

a) *Les deux morphismes suivants coïncident :*

$$H^*(\boldsymbol{Y};\mathscr{L}) \xrightarrow[H^*(f_1)]{H^*(f_0)} H^*(\boldsymbol{X};f^{-1}(\mathscr{L}))\,.$$

b) *Si $\boldsymbol{X}$ est un retract par déformation de $\boldsymbol{Y}$ le morphisme*

$$H^*(\boldsymbol{Y};\mathscr{L}) \xrightarrow{H^*(i_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{Y}})} H^*\big(\boldsymbol{X};\mathscr{L}|_{\boldsymbol{X}}\big)$$

où $i_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ désigne l'application d'inclusion, est un isomorphisme.

c) *Lorsque $\boldsymbol{Y}$ est contractile, $\mathscr{L}$ est un faisceau constant et*

$$H^m(\boldsymbol{Y};\mathscr{L}) = 0\,,\ \textit{pour tout } m > 0\,.$$

Démonstration. On reprend les notations du diagramme $(\mathcal{H}')$.

a) L'idée de la démonstration est de montrer que

$$H^*(\boldsymbol{X}; f^{-1}\mathscr{L}) \xrightarrow{H^*(p)} H^*(\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{X}; p^{-1}f^{-1}\mathscr{L})$$

est l'inverse de

$$H^*(\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{X}; h^{-1}\mathscr{L}) \xrightarrow{H^*(i_t)} H^*(\boldsymbol{X}; f^{-1}\mathscr{L})$$

quel que soit $t\in[0,1]$ (*cf.* 1.6.1), ce qui entraîne l'égalité $H^*(i_0)=H^*(i_1)$ et alors

$$H^*(f_0)=H^*(h)\circ H^*(i_0)=H^*(h)\circ H^*(i_1)=H^*(f_1)\,.$$

Comme $p\circ i_t=\mathrm{id}_{\boldsymbol{X}}$, il suffira même de montrer que

$$H^*(p): H^*(\boldsymbol{X};\mathscr{M})\to H^*(\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{X}; p^{-1}\mathscr{M})$$

est un isomorphisme quel que soit le faisceau localement constant $\mathscr{M}$. Or, $H^*(p)$ est induit par le morphisme d'adjonction $\varepsilon:\mathscr{M}\to \mathbb{R}p_*p^{-1}\mathscr{M}$. Ce morphisme est un quasi-isomorphisme. En effet, il suffit de le vérifier sur les germes de chaque $x\in\boldsymbol{X}$ mais comme p est propre, on sait que

$$h^m\big[\big(\mathbb{R}p_*(p^{-1}\mathscr{M})\big)_x\big]=H^m\big(p^{-1}(x),\underline{\mathscr{M}_x}_{p^{-1}(x)}\big)=\begin{cases}\mathscr{M}_x\,, & \text{si } m=0\\ 0\,, & \text{sinon}\end{cases}$$

puisque, de plus, $p^{-1}(x)=[0,1]$ (1.5.5). Ceci termine la preuve de (a).

b) On rappelle qu'un sous-espace $\boldsymbol{X}\subseteq\boldsymbol{Y}$ est dit « *retract par déformation de* $\boldsymbol{Y}$ » lorsqu'il existe une application continue $h:[0,1]\times\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{Y}$ telle que

$$\begin{cases} h(t,x)=x\,, & \text{pour tous } x\in\boldsymbol{X} \text{ et } t\in[0,1],\\ h(0,y)=y\,, & \text{pour tout } y\in\boldsymbol{Y},\\ h(1,y)\in\boldsymbol{X}\,, & \text{pour tout } y\in\boldsymbol{Y}.\end{cases}$$

Il s'ensuit que la composée $\boldsymbol{Y}\xrightarrow{h_1}\boldsymbol{X}\xhookrightarrow{i_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{Y}}}\boldsymbol{Y}$ où $h_1:\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{X}$ désigne l'application $y\mapsto h(1,y)$, est homotope à $\mathrm{id}_{\boldsymbol{Y}}$ et alors $H^*(h_1)\circ H^*(i_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{Y}})=\mathrm{id}$ d'après (a). Par conséquent, le morphisme

$$H^*(\boldsymbol{Y};\mathscr{L})\xhookrightarrow{H^*(i_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{Y}})} H^*\big(\boldsymbol{X};\mathscr{L}|_{\boldsymbol{X}}\big) \tag{†}$$

est **injectif**. D'autre part, la composée

$$\boldsymbol{X}\xhookrightarrow{i_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{Y}}}\boldsymbol{Y}\xrightarrow{h_1}\boldsymbol{X}$$

est l'identité sur $\boldsymbol{X}$ et alors

$$H^*\big(\boldsymbol{Y};h^{-1}(\mathscr{L}|_{\boldsymbol{X}})\big)\xrightarrow{H^*(i_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{Y}})} H^*(\boldsymbol{X};\mathscr{L}|_{\boldsymbol{X}}) \tag{‡}$$

est **surjective**.

Pour conclure il ne reste qu'à vérifier que les termes de gauche de (†) et (‡) s'identifient naturellement. C'est une conséquence de la définition de retract par déformation qui implique que $\Pi_1(i_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{Y}}):\Pi_1(\boldsymbol{X})\to\Pi_1(\boldsymbol{Y})$ est un isomorphisme d'inverse $\Pi_1(h_1)$.

c) Lorsque $\boldsymbol{Y}$ est contractile $\Pi_1(\boldsymbol{Y})=(0)$ et un faisceau localement constant est toujours constant. De plus, tout point de $\boldsymbol{Y}$ est retract par déformation de $\boldsymbol{Y}$ et l'assertion (b) permet alors de conclure. ∎

1.6.3. Exercice. Soit $\mathscr{F}^\bullet$ un complexe de faisceaux sur $\boldsymbol{Y}$ borné à gauche, *i.e.* $\mathscr{F}^m = 0$ pour tout $m \ll 0$, et tel que les faisceaux des cohomologie $\mathscr{H}^n\mathscr{F}^\bullet$ sont tous des faisceaux localement constants sur $\boldsymbol{X}$. Soient $f_0, f_1 : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ deux applications homotopes.

a) Montrer que les groupes $I\!H^m(\boldsymbol{X}; f_t^{-1}\mathscr{F}^\bullet)$ sont indépendants de t.

b) Généraliser le théorème 1.6.2 en remplaçant $\mathscr{L}$ par $\mathscr{F}^\bullet$.

Indication : Faire une démonstration par récurrence à l'aide de troncatures intelligentes. Attention à l'énoncé de l'assertion (c) qui doit être modifié.

1.6.4. Remarque et exercice. Un corollaire du théorème d'homotopie (1.6.2-(c)) est le théorème de comparaison entre la cohomologie singulière d'une variété différentielle $\boldsymbol{X}$ et la cohomologie de faisceaux des faisceaux constants sur $\boldsymbol{X}$, ce qui est un cas particulier du résultat qui établit l'existence d'un isomorphisme naturel $H^*_{\text{sing}}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{M}) \underset{\equiv}{\to} H^*(\boldsymbol{X};\underline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{X}})$ pour tout espace $\boldsymbol{X}$ localement contractile. Nous indiquons de manière succincte les étapes de la démonstration de ce phénomène. Soit $\boldsymbol{M}$ un module sur un anneau $\mathscr{A}$.

a) Il existe un morphisme canonique $\Xi_*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{M}) : H^*_{\text{sing}}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{M}) \to H^*(\boldsymbol{X};\underline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{X}})$ qui est naturel par rapport à $\boldsymbol{X}$ et à $\boldsymbol{M}$. En effet, la correspondance $\boldsymbol{U} \mapsto S^\bullet(\boldsymbol{U};\boldsymbol{M})$, où $S^i(\boldsymbol{U};\boldsymbol{M})$ désigne le $\mathscr{A}$-module des cochaînes singulières sur $\boldsymbol{U}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$, est un complexe de préfaisceaux sur $\boldsymbol{X}$. Notons-le $\underline{S}^\bullet(\boldsymbol{M})$ et soit $\varepsilon_\bullet : \underline{S}^\bullet(\boldsymbol{M}) \to \underline{\underline{S}}^\bullet(\boldsymbol{M})$ le morphisme canonique vers le complexe de faisceaux associé à $\underline{S}^\bullet(\boldsymbol{M})$. Le complexe $\underline{\underline{S}}^\bullet(\boldsymbol{M})$ est une résolution du faisceau constant $\underline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{X}}$ puisque $\boldsymbol{X}$ est localement contractile (1.6.2-(c)). Par conséquent, pour toute résolution injective $\underline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{X}} \hookrightarrow \mathscr{I}^\bullet$ il existe un morphisme de complexes $\varphi_\bullet : \underline{\underline{S}}^\bullet(\boldsymbol{M}) \to \mathscr{I}^\bullet$, unique à homotopie près, rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
\boldsymbol{0} \to \underline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{X}} & \longrightarrow & \underline{\underline{S}}^0(\boldsymbol{M}) & \longrightarrow & \underline{\underline{S}}^1(\boldsymbol{M}) & \longrightarrow & \underline{\underline{S}}^2(\boldsymbol{M}) & \longrightarrow & \cdots \\
\quad \text{id} \,\big\| & & \quad \varphi_0 \big\downarrow & & \quad \varphi_1 \big\downarrow & & \quad \varphi_2 \big\downarrow & & \\
\boldsymbol{0} \to \underline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{X}} & \longrightarrow & \mathscr{I}^0 & \longrightarrow & \mathscr{I}^1 & \longrightarrow & \mathscr{I}^2 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

La composée $\varphi_\bullet \circ \varepsilon_\bullet : \underline{S}^\bullet(\boldsymbol{M}) \to \mathscr{I}^\bullet$ donne lieu alors à un morphisme canonique et naturel (en catégorie dérivée) : $S^\bullet(\boldsymbol{X};\boldsymbol{M}) \to I\!R\Gamma(\boldsymbol{X};\underline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{X}})$ d'où le morphisme $\Xi_*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{M}) : H^*_{\text{sing}}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{M}) \to H^*(\boldsymbol{X};\underline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{X}})$ annoncé.

b) Le théorème de Mayer-Vietoris (1.3.1) est vérifié aussi bien par la cohomologie de faisceaux que par la cohomologie singulière. Par conséquent, si $\boldsymbol{U}_1$ et $\boldsymbol{U}_2$ sont deux ouverts de $\boldsymbol{X}$ tels que $\Xi_*(\boldsymbol{U}_1;\boldsymbol{M})$, $\Xi_*(\boldsymbol{U}_2;\boldsymbol{M})$ et $\Xi_*(\boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2;\boldsymbol{M})$ sont des isomorphismes, il en sera de même de $\Xi_*(\boldsymbol{U}_1 \cup \boldsymbol{U}_2;\boldsymbol{M})$.

c) Une variété différentielle $\boldsymbol{X}$ de dimension n admet des recouvrements ouverts et localement finis $\mathscr{U} = \{\boldsymbol{U}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ tels que les intersections finies d'ouverts $\boldsymbol{U}_\alpha$ sont homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Par les théorèmes d'homotopie des cohomologies singulière et de faisceaux, les morphismes $\Xi_*(\bigcap_{i=1}^r \boldsymbol{U}_{\alpha_i};\boldsymbol{M})$ sont (trivialement) bijectifs. On en déduit, par un argument récursif sur r à l'aide de Mayer-Vietoris, que les morphismes $\Xi_*(\bigcup_{i=1}^r \boldsymbol{U}_{\alpha_i};\boldsymbol{M})$ sont bijectifs pour toute famille finie $\{\boldsymbol{U}_{\alpha_1},\ldots,\boldsymbol{U}_{\alpha_r}\}$. En particulier, si $\boldsymbol{X}$ est compacte $\Xi_*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{M})$ est bijective quels que soient $\mathscr{A}$ et $\boldsymbol{M}$.

d) Lorsque $\boldsymbol{X}$ n'est pas compacte, les arguments de (b,c) s'intègrent dans un complexe de Čhech relatif au recouvrement $\mathscr{U}$ dont la cohomologie est alors canoniquement isomorphe à la cohomologie de faisceaux de $\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_{\boldsymbol{X}}$ et à la cohomologie singulière $H^*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{M})$.

1.6.5. Proposition *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique métrisable localement compact dénombrable à l'infini. Alors :*

a) $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{I}/\mathscr{A}) = \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A}) + \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{I}/\mathscr{A})$, *pour tout intervalle réel $\boldsymbol{I}$.*

b) $\dim_{\mathrm{ch}}(\mathbb{R}^n/\mathscr{A}) = n$, *quel que soit $\mathscr{A}$.*

c) *Si $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique de dimension n,* $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A}) = n$, *quel que soit $\mathscr{A}$.*

Démonstration. (c) est conséquence de (b) par 1.5.2-(c), et (b) est conséquence immédiate de (a) qu'il suffit de vérifier pour $\boldsymbol{I} = [0,1]$ (*cf.* 1.5.2-(d)). Soit $p : \boldsymbol{X}\times[0,1] \twoheadrightarrow \boldsymbol{X}$ la projection canonique. Pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X}\times[0,1])$ et tout $\ell\in\mathbb{N}$, on a

$$H^\ell(\boldsymbol{X}\times[0,1];\mathscr{F}) = \mathbb{H}^\ell(\boldsymbol{X};\mathbb{R}p_*\mathscr{F}).$$

D'autre part, comme p est propre, on a :

$$h^\ell[(\mathbb{R}p_*\mathscr{F})_x] = H^\ell(p^{-1}x;\mathscr{F}|_{p^{-1}x}),\ \text{pour tout } x\in\boldsymbol{X},$$

et $h^\ell[(\mathbb{R}p_*\mathscr{F})_x] = 0$ pour $\ell\geqslant 2$, puisque $p^{-1}x = [0,1]$ et que $\dim_{\mathrm{ch}}([0,1]/\mathscr{A}) = 1$. Il s'ensuit que le complexe $\tau_{\geqslant 1}\mathbb{R}p_*\mathscr{F}$ est quasi-isomorphe à $(\mathbb{R}^1p_*\mathscr{F})[-1]$, d'où le triangle exact :

$$p_*\mathscr{F} \longrightarrow \mathbb{R}p_*\mathscr{F} \longrightarrow (\mathbb{R}^1p_*\mathscr{F})[-1] \xrightarrow{[+1]}$$

et la suite exacte longue d'hypercohomologies :

$$\longrightarrow \mathbb{H}^\ell(\boldsymbol{X},p_*\mathscr{F}) \longrightarrow \mathbb{H}^\ell(\boldsymbol{X},\mathbb{R}p_*\mathscr{F}) \longrightarrow \mathbb{H}^{\ell-1}(\boldsymbol{X},\mathbb{R}^1p_*\mathscr{F}) \longrightarrow$$

donnant l'égalité

$$\mathbb{H}^\ell(\boldsymbol{X},\mathbb{R}p_*\mathscr{F}) = 0,\ \text{pour tout } \ell\geqslant m+2.$$

Par conséquent $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}\times[0,1]) \leqslant \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}) + 1$.

Pour la majoration inverse on choisit un faisceau $\mathscr{F}\in\mathrm{Fais}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ tel que $H^n(\boldsymbol{X};\mathscr{F})\neq 0$, avec $n := \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A})$. On pose $\mathscr{G} := p^{-1}\mathscr{F}$ et $\boldsymbol{S} := \boldsymbol{X}\times\{0,1\} \subseteq \boldsymbol{X}\times[0,1]$ d'ouvert complémentaire $\boldsymbol{U}$. La suite longue de cohomologie associée à $\Delta\big(\boldsymbol{U},\boldsymbol{X}\times[0,1],\boldsymbol{S};\mathscr{G}\big)$ donne la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} H^n\big(\boldsymbol{X}\times[0,1];i_{U!}\mathscr{G}|_{\boldsymbol{U}}\big) & \longrightarrow & H^n(\boldsymbol{X}\times[0,1];\mathscr{G}) & \xrightarrow{q} & H^n(\boldsymbol{S};\mathscr{G}|_{\boldsymbol{S}}) & \xrightarrow{c} & H^{n+1}\big(\boldsymbol{X}\times[0,1];i_{U!}\mathscr{G}|_{\boldsymbol{U}}\big) \\ & & \| & & \| & & \\ & & H^n(\boldsymbol{X};\mathbb{R}p_*p^{-1}\mathscr{F}) & \xrightarrow{q'} & H^n(\boldsymbol{X};\mathscr{F})^2 & & \end{array}$$

où q' s'identifie au morphisme diagonal $\Delta : H^n(\boldsymbol{X};\mathscr{F}) \hookrightarrow H^n(\boldsymbol{X};\mathscr{F})^2$. Le morphisme c n'est donc pas nul et $H^{n+1}\big(\boldsymbol{X}\times[0,1];i_{U!}\mathscr{G}|_{\boldsymbol{U}}\big)\neq 0$, CQFD. ∎

La proposition précédente est un cas particulier du théorème plus général suivant.

1.6.6. Théorème. *Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ deux espaces topologiques métrisables localement compacts dénombrables à l'infini. Alors :*

$$\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}/\mathscr{A}) = \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A}) + \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{Y}/\mathscr{A})$$

Démonstration. La minoration $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}/\mathscr{A}) \leqslant \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A}) + \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{Y}/\mathscr{A})$ se démontre essentiellement de la même manière que pour 1.6.5. Pour l'inégalité inverse le plus rapide est de supposer $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ compacts et d'appliquer le théorème de Künneth (3.7.5) ∎

§2. Exemples de calculs d'homologie d'intersection

L'homologie d'intersection sera introduite en toute généralité dans la section 4.3, mais auparavant, en guise de motivation et pour avoir quelques contrexemples montant les limites de la théorie, nous en donnons une définition restreinte sur des espaces topologiques très simples où des calculs explicites peuvent être menés à bien par des techniques homologiques élémentaires. Notre but sera d'illustrer la dualité de Poincaré dans l'homologie d'intersection des espaces topologiques *singuliers*.

2.1 Cadre de travail

Pour simplifier, nous allons nous restreindre au cas le plus simple d'espace stratifié après celui des variétés topologiques, à savoir : les filtrations fermées $\boldsymbol{X} \supseteq \boldsymbol{Z} \supseteq \varnothing$ où

- $\boldsymbol{X}$ est un espace topologique métrisable localement compact, localement contractile, dénombrable à l'infini, de dimension cohomologique finie $d_{\boldsymbol{X}}$,
- $\boldsymbol{Z}$ est une sous-variété topologique fermée dans $\boldsymbol{X}$, équidimensionnelle de dimension (cohomologique) $d_{\boldsymbol{Z}}$ (1.6.5-(c)),
- $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{X} \backslash \boldsymbol{Z}$ est une sous-variété topologique ouverte et partout dense dans $\boldsymbol{X}$, équidimensionnelle de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$.

2.2 Complexe d'intersection pour la perversité p

Avec les données du paragraphe précédent, on note, pour chaque $p \in \mathbb{N} = \{0,1,2\ldots\}$

$$\boxed{\underline{\underline{IC}}_p^\bullet := \tau_{\leqslant p}\, I\!R i_{\boldsymbol{U}*}(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}})}$$

où $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}$ désigne le faisceau constant sur $\boldsymbol{U}$ de fibres un corps k donné. Le complexe $\underline{\underline{IC}}_p^\bullet$ est le «*complexe d'intersection de $\boldsymbol{X}$ pour la perversité p (à coefficients dans le système local $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}$)*» ; c'est l'objet de la catégorie dérivée $D_k^b(\boldsymbol{X})$ canoniquement isomorphe à chaque complexe de faisceaux :

$$0 \to i_{\boldsymbol{U}*}\left(\mathcal{J}^0\right) \xrightarrow{i_{\boldsymbol{U}*}(d_0)} i_{\boldsymbol{U}*}\left(\mathcal{J}^1\right) \xrightarrow{i_{\boldsymbol{U}*}(d_1)} \cdots\cdots \xrightarrow{i_{\boldsymbol{U}*}(d_{p-1})} i_{\boldsymbol{U}*}\left(\mathcal{J}^p\right) \xrightarrow{i_{\boldsymbol{U}*}(d_p)} \mathrm{im}(i_{\boldsymbol{U}*}(d_p)) \to 0$$

où

$$0 \to \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{p-1}} \mathcal{J}^p \xrightarrow{d_p} \mathcal{J}^{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} \cdots$$

est une résolution de $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}$ par des faisceaux injectifs, flasques, c-mous, ou plus généralement $i_{\boldsymbol{U}*}$-acycliques. On note alors pour $m \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{I_pH^m(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) := I\!R^m\Gamma(\boldsymbol{X};\underline{\underline{IC}}_p^\bullet)}, \quad \text{resp.} \quad \boxed{I_pH_{\mathrm{c}}^m(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) := I\!R^m\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{IC}}_p^\bullet)},$$

le «*m-ième groupe d'homologie d'intersection (resp. à support compact) de $\boldsymbol{X}$ pour la perversité p (à coefficients dans le système local $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}$)*».

2.2.1. Remarque. On prendra garde du fait que cette définition est un cas particulier de la définition générale de l'homologie d'intersection que nous introduirons dans la section 4.3. Dans la notation `$\underline{\underline{IC}}_p^\bullet$´, la lettre `p´ désigne un nombre et non pas une suite de nombres comme c'est le cas dans la définition générale.

2.3 Objet des calculs

La question que nous allons étudier, proche de la dualité de Poincaré mais non équivalente, est la suivante :

Etudier l'ensemble $\mathscr{P}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{U})$ *des couples* $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *vérifiant*

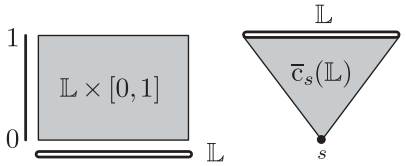
$$\dim_k\left(I_pH^m(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}})\right)=\dim_k\left(I_qH_{\mathrm{c}}^{d_{\boldsymbol{X}}-m}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}})\right)$$

pour tout $m\in\mathbb{Z}$.

2.4 Homologie d'intersection du cône d'une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire de son sommet

2.4.1. Cône d'un espace topologique. Pour tout espace topologique $\mathbb{L}$ on note $\mathrm{c}_s(\mathbb{L})$ et $\overline{\mathrm{c}}_s(\mathbb{L})$ les espaces topologiques quotient :

$$\mathrm{c}_s(\mathbb{L}):=\frac{\mathbb{L}\times[0,1[}{\mathbb{L}\times\{0\}}\quad\text{et}\quad\overline{\mathrm{c}}_s(\mathbb{L}):=\frac{\mathbb{L}\times[0,1]}{\mathbb{L}\times\{0\}}$$



appelés respectivement « *cône (ouvert) de* $\mathbb{L}$ » et « *cône fermé de* $\mathbb{L}$ ». Le « *sommet* » des cônes, noté 's' ici, est la classe $\mathbb{L}\times\{0\}$.

2.4.2. Remarques

- Lorsque $\mathbb{L}$ est localement compact, dénombrable à l'infini et métrisable, il en est de même de ses cônes ; si de plus $\mathbb{L}$ est de dimension cohomologique finie $d_{\mathbb{L}}$, ses cônes sont de dimension cohomologique $d_{\mathbb{L}}+1$.
- Si $\mathbb{L}$ est la sphère $\mathbb{S}^n$ ([4]), $\mathrm{c}_s(\mathbb{L})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n+1}$. En particulier : *tout point d'une variété topologique admet un voisinage homéomorphe au cône d'une variété compacte orientable.*

2.4.3. Soit $\mathbb{L}$ une variété topologique **compacte** de dimension $d_{\mathbb{L}}$ non nécessairement connexe. Le complémentaire du sommet du cône ouvert $\mathrm{c}_s(\mathbb{L})$ est homéomorphe à la variété topologique $\mathbb{L}\times]0,1[$. On notera dans la suite $\boldsymbol{X}:=\mathrm{c}_s(\mathbb{L})$ et $\boldsymbol{U}:=\mathrm{c}_s(\mathbb{L})\backslash\{s\}$. Le couple $(\boldsymbol{X};\{s\})$ est conforme aux cadre de travail que nous avons fixé dans 2.1.

2.4.4. Proposition. *Le tableau suivant donne, pour chaque* $m\in\mathbb{N}$*, un espace vectoriel canoniquement isomorphe au* m*-ième groupe l'homologie d'intersection (resp. à support compact) de* $\boldsymbol{X}$ *pour la perversité* p *et pour le système local* $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}$.

m	0	$\cdots$	p	$p+1$	$p+2$	$\cdots$	$d_{\boldsymbol{X}}$	$d_{\boldsymbol{X}}+1$	$\cdots$
$I_pH^m(\boldsymbol{X},\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}})$	$H^0(\mathbb{L};k)$	$\cdots$	$H^p(\mathbb{L};k)$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$
$I_pH_{\mathrm{c}}^m(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}})$	0	$\cdots$	0	0	$H^{p+1}(\mathbb{L};k)$	$\cdots$	$H^{d_{\mathbb{L}}}(\mathbb{L};k)$	0	$\cdots$

[4] Prendre garde du fait que $\mathbb{S}^n$ est, par définition, l'ensemble des points de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$ dont la distance à l'origine est égale à 1. En particulier, $\mathbb{S}^0$ possède **deux** points.

où $H^*(\mathbb{L};k)$ désigne la cohomologie singulière de $\mathbb{L}$ à coefficients dans k.

En particulier, $$\mathscr{P}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{U}) \supseteq \left\{ (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \;\middle|\; p+q = d_{\boldsymbol{X}} - 2 \right\}$$

Démonstration. Notons $\mathscr{F}^\bullet := \tau_{\leqslant p}\, I\!R i_{\boldsymbol{U}*}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}})$ et $i_s := i_{\{s\}}$.

La suite exacte longue associée au triangle exact $\Delta(\boldsymbol{U},\boldsymbol{X},\{s\},\mathscr{F}^\bullet)$ (1.2) s'écrit :

$$\xrightarrow{[+1]} I\!H^m\left(\boldsymbol{X};i_{\boldsymbol{U}!}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}})\right) \longrightarrow I\!H^m(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet) \xrightarrow{\alpha_m} I\!H^m\left(\{s\};i_s^{-1}(\mathscr{F}^\bullet)\right) \xrightarrow{[+1]} \qquad (\diamond)$$

puisque

$$\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{U}} = \Big(\tau_{\leqslant p}\, I\!R i_{\boldsymbol{U}*}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}})\Big)\Big|_{\boldsymbol{U}} = \tau_{\leqslant p}\Big(\big(I\!R i_{\boldsymbol{U}*}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}})\big)\big|_{\boldsymbol{U}}\Big) = \underline{k}_{\boldsymbol{U}}$$

D'autre part, les groupes d'hypercohomologie $I\!H^m\left(\boldsymbol{X};i_{\boldsymbol{U}!}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}})\right)$ ([5]) interviennent aussi dans la suite exacte longue associée au triangle $\Delta(\boldsymbol{U},\boldsymbol{X},\{s\},\underline{k}_{\boldsymbol{X}})$:

$$\xrightarrow{[+1]} I\!H^m\left(\boldsymbol{X};i_{\boldsymbol{U}!}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}})\right) \longrightarrow I\!H^m(\boldsymbol{X};\underline{k}_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow{\beta_m} I\!H^m\left(\{s\};k\right) \xrightarrow{[+1]}$$

où le morphismes β_m sont tous bijectifs puisque $\boldsymbol{X}$ est contractile. On en déduit l'égalité

$$I\!H^m\left(\boldsymbol{X};i_{\boldsymbol{U}!}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}})\right) = 0$$

pour tout $m\in\mathbb{Z}$, ce qui reporté dans $(\diamond)$ entraîne la **bijectivité** de α_m pour tout $m\in\mathbb{Z}$.

Ceci étant, $\{s\}$ est de dimension cohomologique nulle ([6]) et $I\!H^m\left(\{s\};i_s^{-1}(\mathscr{F}^\bullet)\right)$ est canoniquement isomorphe à l'homologie en degré m du complexe des germes $\mathscr{F}^\bullet_s$ ce qu'on notera $h^m[\mathscr{F}^\bullet_s]$. Par conséquent :

$$I_pH^m(\boldsymbol{X};\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) = I\!H^m(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet) \xrightarrow[\equiv]{\alpha_m} h^m[\mathscr{F}^\bullet_s] = \begin{cases} h^m\big[\big(I\!R i_{\boldsymbol{U}*}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}})\big)_s\big], & \text{si } m\leqslant p\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad (*)$$

Pour la détermination des germes en s on peut considérer la base de voisinages de s de la forme

$$V_n = \frac{\mathbb{L}\times[0,1/n[}{\mathbb{L}\times\{0\}}\,, \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N},$$

auquel cas

$$\begin{aligned} h^m\big[\big(I\!R i_{\boldsymbol{U}*}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}})\big)_s\big] &= \varinjlim{}_{n\to\infty}\; H^m\big(V_n\backslash\{s\};k\big) \\ &= \varinjlim{}_{n\to\infty}\; H^m\big(\mathbb{L}\times]0,1/n[;k\big) = H^m\big(\mathbb{L};k\big) \end{aligned} \qquad (\ddagger)$$

puisque la cohomologie des faisceaux est canoniquement isomorphe à la cohomologie singulière et suite aux théorèmes d'homotopie bien connus (Lemme de Poincaré par exemple). La première ligne de notre tableau résulte alors de $(*)$ et $(\ddagger)$.

[5] Comme $i_{\boldsymbol{U}!}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}})$ est un complexe de faisceaux concentré en degré 0, le groupe $I\!H^m\left(\boldsymbol{X};i_{\boldsymbol{U}!}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}})\right)$ n'est autre que la cohomologie de faisceau en degré m du faisceau $i_{\boldsymbol{U}!}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}})$.

[6] Pour tout anneau $\boldsymbol{A}$, tout faisceau de $\mathrm{Fais}_{\boldsymbol{A}}(\{s\})$ est flasque, mou, c-mou, ... De plus, lorsque $\boldsymbol{A}$ est un corps k tout faisceau de $\mathrm{Fais}_k(\{s\})$ est injectif et projectif.

Pour l'étude de la deuxième ligne du tableau on fait appel à la suite exacte longue associée au triangle exact $\Delta(\boldsymbol{U},\boldsymbol{X},\{s\};\mathscr{F}^\bullet)$ (1.2) :

$$\xrightarrow{[+1]} H_c^m(\boldsymbol{U};\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) \longrightarrow \mathbb{H}_c^m(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow h^m\big[\mathscr{F}_s^\bullet\big] \xrightarrow[[+1]]{c(\mathscr{F})_m} \tag{‡‡}$$

et qui présente l'intérêt que les termes extrêmes sont connus. En effet, celui de droite a déjà été étudié et pour celui de gauche on peut appliquer l'isomorphisme de Künneth à supports compacts : $H_c^m(\boldsymbol{U};k) = H_c^m(\mathbb{L}\times]0,1[;k) \equiv H^{m-1}(\mathbb{L};k)$ moyennant l'isomorphisme $H_c^*(]0,1[;k) \equiv H^{1-*}(]0,1[;k) = k[-1]$ (dualité de Poincaré). Mais ceci ne suffit pas encore à déterminer le terme du milieu de (‡‡) dans la mesure où le morphisme de liaison $c(\mathscr{F})_*$ n'est pas explicite.

Notons $\mathscr{G}^\bullet := \mathbb{R}i_{\boldsymbol{U}*}\underline{k}_{\boldsymbol{U}}$ (pas de troncature !). Le morphisme canonique de complexes $\mathscr{F}^\bullet \hookrightarrow \mathscr{G}^\bullet$ et la fonctorialité de $\Delta(\boldsymbol{U},\boldsymbol{X},\{s\},_)$ donnent lieu à un morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\xrightarrow{[+1]} & H_c^m(\boldsymbol{U};\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) & \longrightarrow & \mathbb{H}_c^m(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet) & \longrightarrow & h^m\big[\mathscr{F}_s^\bullet\big] & \xrightarrow[[+1]]{c(\mathscr{F})_m} & H_c^{m+1}(\boldsymbol{U};\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) & \longrightarrow \\
& \Big\| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_m} & & \Big\| & \\
\xrightarrow{[+1]} & H_c^m(\boldsymbol{U};\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) & \longrightarrow & \mathbb{H}_c^m(\boldsymbol{X};\mathscr{G}^\bullet) & \longrightarrow & h^m\big[\mathscr{G}_s^\bullet\big] & \xrightarrow[[+1]]{c(\mathscr{G})_m} & H_c^{m+1}(\boldsymbol{U};\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) & \longrightarrow
\end{array} \tag{◇◇}$$

On a $\mathbb{H}_c^m(\boldsymbol{X};\mathscr{G}^\bullet) = 0$ pour tout $m\in\mathbb{Z}$. Pour voir ceci on fait appel à l'espace $\overline{\boldsymbol{X}} := \overline{\mathrm{c}}_s(\mathbb{L})$, compactification naturelle de $\boldsymbol{X}$ dont on note $j : \boldsymbol{X} \hookrightarrow \overline{\boldsymbol{X}}$ le plongement (ouvert) donné par l'inclusion. On remarquera l'égalité $\overline{\boldsymbol{X}}\backslash\boldsymbol{X} = \mathbb{L}\times\{1\}$ qui permet d'identifier le fermé complémentaire de $\boldsymbol{X}$ dans $\overline{\boldsymbol{X}}$ à $\mathbb{L}$.

Notons $\mathscr{K}^\bullet := \mathbb{R}j_*\mathscr{G}^\bullet$. La suite exacte longue associée au triangle $\Delta(\boldsymbol{X},\overline{\boldsymbol{X}},\mathbb{L};\mathscr{K}^\bullet)$ s'écrit

$$\xrightarrow{[+1]} \mathbb{H}_c^m(\boldsymbol{X};\mathscr{G}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{K}^\bullet) \xrightarrow{q_m} \mathbb{H}^m(\mathbb{L};\mathscr{K}^\bullet|_{\mathbb{L}}) \xrightarrow{[+1]} \tag{△}$$

puisque $\overline{\boldsymbol{X}}$ et $\mathbb{L}$ sont compacts.

On a $\mathbb{H}^m(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{K}^\bullet) = H^m(\boldsymbol{U};k) = H^m(\mathbb{L}\times]0,1[,k)$ puisque

$$\mathscr{K}^\bullet = \mathbb{R}j_*\,\mathbb{R}i_{\boldsymbol{U}*}^{\boldsymbol{X}}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) = \mathbb{R}i_{\boldsymbol{U}*}^{\overline{\boldsymbol{X}}}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}})\,.$$

En particulier, la restriction à $\mathbb{L}\times\{1\}$ du morphisme d'adjonction $\underline{k}_{\overline{\boldsymbol{X}}} \to \mathbb{R}i_{\boldsymbol{U}*}^{\overline{\boldsymbol{X}}}\big(\underline{k}_{\overline{\boldsymbol{X}}}|_{\boldsymbol{U}}\big)$ donne un morphisme de complexes de faisceaux $\underline{k}_{\mathbb{L}\times\{1\}} \to \mathscr{K}^\bullet|_{\mathbb{L}\times\{1\}}$ dont le germe en chaque $(\ell,1)\in\mathbb{L}\times\{1\}$ est un quasi-isomorphisme puisque la famille des parties

$$V(\ell)_{m,n} := B(\ell,1/m)\times]1-1/n,1]$$

avec $n,m\in\mathbb{N}$ et où $B(\ell,1/m)$ désigne la "boule ouverte centrée en ℓ de rayon $1/m$", est une base de voisinages de $(\ell,1)$ dans $\overline{\boldsymbol{X}}$ telle que $V(\ell)_{m,n}\cap\boldsymbol{U} = B(\ell,1/m)\times]1-1/n,1[$ est contractile, ce qui implique que le complexe $\mathscr{K}^\bullet|_{V(\ell)_{m,n}}$ a son hypercohomologie concentrée en degré 0 où elle est isomorphe à k puisqu'elle calcule $H^*(V(\ell)_{m,n}\cap\boldsymbol{U};k)$, par définition.

Moyennant ces remarques, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^m(\overline{\boldsymbol{X}}\backslash\{s\};k) & = & H^m(\overline{\boldsymbol{X}}\backslash\{s\};k) \\ {\scriptstyle i_U^*}\downarrow & & {\scriptstyle i_{\mathbb{L}}^*}\downarrow \\ H^m(\boldsymbol{U};k) & \xrightarrow{q_m} & H^m(\mathbb{L};k) \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont ceux respectivement associés aux inclusions $\boldsymbol{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}\backslash\{s\}$ et $\mathbb{L}\times\{1\} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}\backslash\{s\}$, ce sont des isomorphismes d'après les théorèmes d'homotopie.

Les morphismes q_m sont donc bijectifs, $I\!H_c^m(\boldsymbol{X};\mathscr{G}^\bullet) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ d'après $(\triangle)$ et les morphismes $c(\mathscr{G})_m$ sont bijectifs d'après la deuxième ligne de $(\diamond\diamond)$.

La suite $(\diamond\diamond)$ devient :

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow I\!H_c^m(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet) & \longrightarrow & h^m\big[\mathscr{F}_s^\bullet\big] & \xrightarrow[[+1]]{c(\mathscr{F})_m} & H_c^{m+1}(\boldsymbol{U};\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) & \longrightarrow \\ & & {\scriptstyle \iota_m}\downarrow & & {\scriptstyle =}\downarrow & \\ & & h^m\big[\mathscr{G}_s^\bullet\big] & \xleftarrow[\equiv]{c(\mathscr{G})_m} & H_c^{m+1}(\boldsymbol{U};\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) & \end{array}$$

On en déduit :

- Lorsque $m \leqslant p$, le morphisme ι_m est bijectif et donc
$$I\!H_c^m(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet) = 0\,,\ \text{pour tout } m \leqslant p.$$
- Le morphisme $c(\mathscr{F})_p$ est surjectif et $h^{p+1}[\mathscr{F}_s^\bullet] = 0$ donc aussi
$$I\!H_c^{p+1}(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet) = 0$$
- Lorsque $m > p+1$ on a $h^{m-1}[\mathscr{F}_s^\bullet] = 0$ et alors $H_c^m(\boldsymbol{U};k) \equiv I\!H_c^m(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet)$ d'où
$$I\!H_c^m(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet) \equiv H^{m-1}(\mathbb{L};k)\,,\ \text{pour tout } m \geqslant p+2$$
puisque d'après la formule de Künneth à supports compacts
$$H_c^*(\boldsymbol{U};k) \equiv H_c^*(\mathbb{L}\times]0,1[;k) \equiv H_c^*(\mathbb{L};k)\otimes H_c^*(]0,1[;k) \equiv H^{*-1}(\mathbb{L};k)\,.$$

Ce qui termine la vérification du tableau de la proposition.

Enfin, la partie concernant l'ensemble $\mathscr{P}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{U})$ résulte d'une vérification rapide à l'aide du tableau moyennant la dualité de Poincaré sur $\mathbb{L}$. ∎

2.4.5. Remarque importante. La proposition montre qu'un espace contractile peut très bien posséder des groupes d'homologie d'intersection non nuls en degrés positifs. L'homologie d'intersection n'est donc pas un invariant homotopique.

2.4.6. Remarques

a) On a $I_qH_c^0(\boldsymbol{X};\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) = I_qH_c^1(\boldsymbol{X};\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) = 0$, quel que soit $q \in \mathbb{N}$, et
$$I_pH^{d_{\mathbb{L}}}(\boldsymbol{X};\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) = H^{d_{\mathbb{L}}}(\mathbb{L};k) \equiv H^0(\mathbb{L};k) \neq 0\,,$$
lorsque $p \geqslant d_{\mathbb{L}}$. On en déduit que $\mathscr{P}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{U})$ ne contient aucun couple (p,q) avec $p \geqslant d_{\mathbb{L}}$.

b) Lorsque $d_{\mathbb{L}} = 0$, $\boldsymbol{X}$ est le cône d'un ensemble fini de points ([7]) et $\mathscr{P}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{U}) = \varnothing$.

c) L'inclusion

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{U}) \supseteq \left\{(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \;\middle|\; p+q = d_{\boldsymbol{X}} - 2\right\}$$

est une égalité lorsque $H^m(\mathbb{L};k) \neq 0$ pour tout $0 < m < d_{\mathbb{L}}$.

d) Lorsque $\mathbb{L}$ est une réunion disjointe de sphères $\mathbb{S}^{d_{\mathbb{L}}}$, le complexe $\left(I\!R i_{U*}(\underline{\underline{k}}_U)\right)_s$ a de la cohomologie uniquement en degrés 0 et $d_{\mathbb{L}}$ et les morphismes canoniques

$$\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_0 \longrightarrow \underline{\underline{IC}}^{\bullet}_1 \longrightarrow \underline{\underline{IC}}^{\bullet}_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{d_{\mathbb{L}}-1}$$

sont tous des quasi-isomorphismes. Par conséquent, lorsque $d_{\mathbb{L}} \geqslant 1$, on a

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{U}) = [0, d_{\boldsymbol{X}} - 2]^2$$

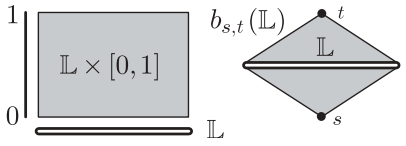
2.5 Homologie d'intersection sur des espaces topologiques compacts

A partir de maintenant $\boldsymbol{X}$ est un espace topologique compact, ce qui nous évitera de distinguer entre les groupes I_pH^m et $I_pH^m_c$.

2.6 Homologie d'intersection du double cône d'une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire des sommets

2.6.1. Double cône d'un espace topologique Pour tout espace topologique $\mathbb{L}$ on note $\mathrm{b}_{s,t}(\mathbb{L})$ l'espace topologique quotient :

$$\mathrm{b}_{s,t}(\mathbb{L}) := \frac{\mathbb{L}\times[0,1]}{(\ell_1,1)\sim(\ell_2,1) \text{ et } (\ell_1,0)\sim(\ell_2,0)}$$



appelé le « *double cône de* $\mathbb{L}$ ». Le « *sommets du double cône* », notés 's,t' ici, désignent respectivement les classes d'équivalence $\mathbb{L}\times\{0\}$ et $\mathbb{L}\times\{1\}$.

2.6.2. On considère, comme dans 2.4, une variété topologique **compacte** $\mathbb{L}$ de dimension $d_{\mathbb{L}}$ non nécessairement connexe. Le complémentaire des sommets du double cône $\mathrm{b}_{s,t}(\mathbb{L})$ est homéomorphe à la variété topologique $\mathbb{L}\times]0,1[$. On notera $\boldsymbol{X} := \mathrm{b}_{s,t}(\mathbb{L})$ et $\boldsymbol{U} := \mathrm{b}_{s,t}(\mathbb{L})\backslash\{s,t\}$.

2.6.3. Proposition. *Le tableau suivant donne, pour chaque $m\in\mathbb{N}$, un espace vectoriel canoniquement isomorphe au m-ième groupe l'homologie d'intersection de $\boldsymbol{X}$ pour la perversité p et pour le système local $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}$.*

m	0	$\cdots$	p	$p+1$	$p+2$	$\cdots$	$d_{\boldsymbol{X}}$	$d_{\boldsymbol{X}}+1$	$\cdots$
$I_pH^m(\boldsymbol{X},\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}})$	$H^0(\mathbb{L};k)$	$\cdots$	$H^p(\mathbb{L};k)$	0	$H^{p+1}(\mathbb{L};k)$	$\cdots$	$H^{d_{\mathbb{L}}}(\mathbb{L};k)$	0	$\cdots$

où $H^*(\mathbb{L};k)$ désigne la cohomologie singulière de $\mathbb{L}$ à coefficients dans k.

[7] $\boldsymbol{X}$ est un bouquet de segments de droite *cf.* 2.8.

En particulier $\mathscr{P}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{U}) \supseteq \left\{(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \;\middle|\; p+q = d_{\boldsymbol{X}}-2\right\}$

Démonstration. Considérons les parties ouvertes $\boldsymbol{U}_t = \boldsymbol{X}\backslash\{s\}$ et $\boldsymbol{U}_s := \boldsymbol{X}\backslash\{t\}$. La suite exacte longue de Mayer-Vietoris (à supports fermés) relative à la décomposition $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}_t \cup \boldsymbol{U}_s$ est clairement :

$$\xrightarrow{[+1]} I_pH^m(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) \longrightarrow I_pH^m(\boldsymbol{U}_t;\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) \oplus I_pH^m(\boldsymbol{U}_s;\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) \xrightarrow{q_m} H^*(\boldsymbol{U}_t\cap\boldsymbol{U}_s;k) \xrightarrow{[+1]}$$

où $\boldsymbol{U}_*$ est homéomorphe à $\mathrm{c}_*(\mathbb{L})$ et $\boldsymbol{U}_t \cap \boldsymbol{U}_s = \boldsymbol{U} = \mathbb{L}\times\,]0,1[$.

Nous pouvons donc appliquer la proposition 2.4.4 qui montre aussitôt que q_m est surjective pour tout $m \leqslant p$ et alors

$$I_pH^m(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) \equiv \Delta\big[I_pH^m(\boldsymbol{U}_t;\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) \oplus I_pH^m(\boldsymbol{U}_s;\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}})\big] \equiv H^m(\mathbb{L};k)\,,\ \text{pour tout } m \leqslant p.$$

Comme q_p est surjective et que $I_pH^{p+1}(\boldsymbol{U}_*;\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) = 0$, on a aussi

$$I_pH^{p+1}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) = 0\,,$$

et, enfin, comme $I_pH^m(\boldsymbol{U}_*;\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) = 0$ pour tout $m \geqslant p+1$, on a :

$$I_pH^m(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) \equiv H^{m-1}(\mathbb{L};k)\,,\ \text{pour tout } m \geqslant p+2.$$

ce qui termine la preuve de la proposition. ∎

2.7 Homologie d'intersection d'une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire d'un ensemble fini

Dans cette partie le couple $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})$ est constitué d'une variété topologique compacte de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$ connexe orientable $\boldsymbol{X}$ et d'un ensemble fini $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}$.

2.7.1. Proposition. *On suppose $d_{\boldsymbol{X}} \geqslant 2$ et $\boldsymbol{Z} \neq \varnothing$. Alors*

$$I_pH^*(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) \equiv H^*(\boldsymbol{X};k)\,,\ \textit{pour tout } p \leqslant d_{\boldsymbol{X}}-2\,,$$

$$I_pH^*(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) \equiv H^*(\boldsymbol{U};k)\,,\ \textit{pour tout } p \geqslant d_{\boldsymbol{X}}-1\,.$$

De plus : $\mathscr{P}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{U}) = [0,d_{\boldsymbol{X}}-2]^2$.

Démonstration. Comme chaque $x \in \boldsymbol{Z}$ admet une base de voisinages homéomorphe à $\mathrm{c}_x(\mathbb{S}^{d_X-1})$ et que $\mathbb{S}^{d_X-1}$ est connexe (car $d_{\boldsymbol{X}} \geqslant 2$), la remarque (d) de 2.4.6 s'applique au cas présent avec comme précision supplémentaire : le fait que le morphisme d'adjonction $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}} \to i_{\boldsymbol{U}*}(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}})$ est un isomorphisme. On a donc

$$\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}} \equiv \underline{\underline{IC}}{}^{\bullet}_p,\ \text{pour tout } p \leqslant d_{\boldsymbol{X}}-2,$$

dans la catégorie dérivée $D^+_k(\boldsymbol{X})$ et la première assertion encadrée résulte.

D'autre part :

$$\underline{\underline{IC}}{}^{\bullet}_p \equiv I\!R i_{\boldsymbol{U}*}(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}})\,,\ \text{pour tout } p \geqslant d_{\boldsymbol{X}}-1,$$

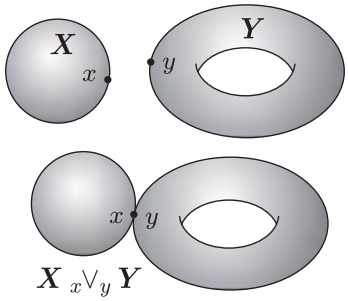
pour des raisons analogues, d'où la deuxième assertion encadrée.

Enfin, l'inclusion $\mathscr{P}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{U}) \subseteq [0, d_{\boldsymbol{X}} - 2]^2$ est claire et sa réciproque résulte de remarquer que $H^{d_X}(\boldsymbol{U};k) = H^0_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U};k) = 0$ par dualité de Poincaré et puisque $\boldsymbol{U}$ est connexe et non compact. ∎

2.8 Homologie d'intersection d'un bouquet de variété topologiques à coefficients dans le complémentaire du point de base

2.8.1. Bouquets. Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ deux espaces topologiques et choisissons des points $x \in \boldsymbol{X}$ et $y \in \boldsymbol{Y}$. On appelle « *bouquet de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ (aux points x et y)* », l'espace topologique quotient

$$\boldsymbol{X}\ {}_x\vee_y\ \boldsymbol{Y} := \frac{\boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y}}{x \sim y}$$



Lorsque $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ sont des variétés topologiques connexes, la classe d'homéomorphie de l'espace $\boldsymbol{X}\ {}_x\vee_y\ \boldsymbol{Y}$ est indépendante du choix des points $x \in \boldsymbol{X}$ et $y \in \boldsymbol{Y}$, le bouquet est alors noté $\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}$. Le point $b := x = y \in \boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}$ est « *le point de base du bouquet* ».

2.8.2. Proposition. *Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ deux variétés topologiques compactes connexes orientables de même dimension $d \geqslant 2$. Soit $\boldsymbol{U}$ l'ouvert complémentaire du point de base b du bouquet $\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}$. Alors :*

$$I_pH^*(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}; \underline{k}_{\boldsymbol{U}}) = H^*(\boldsymbol{X};k) \oplus H^*(\boldsymbol{Y};k)\,,\ \textit{pour tout}\ p \leqslant d-2\,.$$

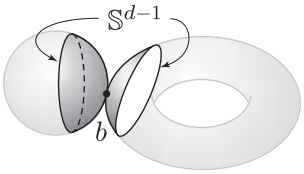
$$I_pH^*(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}; \underline{k}_{\boldsymbol{U}}) = H^*(\boldsymbol{X}';k) \oplus H^*(\boldsymbol{Y}';k)\,,\ \textit{pour tout}\ p \geqslant d-1\,.$$

où $\boldsymbol{X}'$ et $\boldsymbol{Y}'$ désignent les complémentaires d'un point dans $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ respectivement.

De plus

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{U}) = [0, d-2]^2$$

Démonstration. Dans le cas présent le point de base b admet une base de voisinages homéomorphes au cône de deux sphères de dimension $d-1$. Il s'ensuit, comme dans 2.4.6-(d), que les morphismes naturels $\underline{IC}^\bullet_0 \to \underline{IC}^\bullet_1 \to \underline{IC}^\bullet_2 \to \ \cdots\ \to \underline{IC}^\bullet_{d-2}$ sont des quasi-isomorphismes.



D'autre part, $\underline{IC}^\bullet_0 = i_{\boldsymbol{U}*}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) = i_{\boldsymbol{X}'*}(\underline{k}_{\boldsymbol{X}'}) \oplus i_{\boldsymbol{Y}'*}(\underline{k}_{\boldsymbol{Y}'})$ et mieux encore :

$$i_{\boldsymbol{X}'*}(\underline{k}_{\boldsymbol{X}'}) \oplus i_{\boldsymbol{Y}'*}(\underline{k}_{\boldsymbol{Y}'}) = i_{\boldsymbol{X}*}(\underline{k}_{\boldsymbol{X}}) \oplus i_{\boldsymbol{Y}*}(\underline{k}_{\boldsymbol{Y}})$$

puisque $d \geqslant 2$. On a donc :

$$\begin{aligned} I\!H^*(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}; \underline{IC}^\bullet_0) &\equiv I\!H^*\left(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}; i_{\boldsymbol{X}*}(\underline{k}_{\boldsymbol{X}})\right) \oplus I\!H^*\left(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}; i_{\boldsymbol{Y}*}(\underline{k}_{\boldsymbol{Y}})\right) \\ &\equiv H^*(\boldsymbol{X}; \underline{k}_{\boldsymbol{X}}) \oplus H^*(\boldsymbol{Y}; \underline{k}_{\boldsymbol{Y}}) \end{aligned}$$

puisque $i_{\boldsymbol{X}*}$ est un foncteur exact qui transforme injectif en injectif (idem pour $i_{\boldsymbol{Y}*}$).

La première assertion encadrée est ainsi démontrée et le reste de la proposition résulte comme dans 2.7.1. ∎

2.9 Homologie d'intersection d'un espace singulier compact à singularités isolées à coefficients dans sa partie lisse

Nous généralisons dans cette partie les exemples étudiés dans 2.6 et 2.8.

L'espace topologique $\boldsymbol{X}$ est compact et $\boldsymbol{Z}$ est une partie finie non vide de $\boldsymbol{X}$ telle que $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{Z}$ est une variété topologique équidimensionnelle de dimension $d_{\boldsymbol{X}} \geqslant 2$, et telle que, pour chaque $z \in \boldsymbol{Z}$ il existe une variété topologique compacte $\mathbb{L}_z$, de dimension $d_{\boldsymbol{X}} - 1$, et une base de voisinages ouverts de z dans $\boldsymbol{X}$ homéomorphes à $\mathrm{c}_z(\mathbb{L}_z)$. On dit alors que « $\boldsymbol{X}$ *est un espace singulier (compact) à singularités isolées.* »

Comme chaque point $z \in \boldsymbol{Z}$ admet un voisinage ouvert de la forme $V_z = \mathrm{c}_z(\mathbb{L}_z)$ « *aussi petit que l'on veut* », on peut toujours supposer que $V_{z_1} \cap V_{z_2} = \varnothing$ pour $z_1 \neq z_2$. Notons $\boldsymbol{Z}_\varepsilon$ l'ouvert réunion d'un tel choix de voisinages coniques et $\boldsymbol{Z}_{\varepsilon/2}$ la réunion des même voisinages mais de « *hauteur* » moitié. L'espace $\widetilde{\boldsymbol{U}} := \boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{Z}_{\varepsilon/2}$, retract par déformation de $\boldsymbol{U}$, est une variété topologique à bord $\delta(\widetilde{\boldsymbol{U}})$ homéomorphe à $\mathbb{L} := \coprod_{z\in\boldsymbol{Z}} \mathbb{L}_z$. On aura besoin du résultat suivant.

2.9.1. Lemme. *Soit $\boldsymbol{Y}$ un espace topologique compact homéomorphe à une variété topologique à bord. Les nombres de Betti de $\boldsymbol{Y}$ sur k ([8]) sont finis.*

Indication. L'idée est de recoller deux copies de $\boldsymbol{Y}$ en identifiant les points correspondants de leurs bords. Notons $\mathrm{Db}(\boldsymbol{Y})$ l'espace ainsi obtenu (parfois appelé « *le double de* $\boldsymbol{Y}$ »). On vérifie facilement que $\mathrm{Db}(\boldsymbol{Y})$ est une variété topologique compacte et possède, par conséquent, des nombres de Betti finis. D'autre part, on a une suite longue de Mayer-Vietoris

$$\xrightarrow{[+1]} H^*(\mathrm{Db}(\boldsymbol{Y});k) \longrightarrow H^*(\boldsymbol{Y};k) \oplus H^*(\boldsymbol{Y};k) \longrightarrow H^*(\delta(\boldsymbol{Y});k) \xrightarrow{[+1]} \qquad (*)$$

où $\delta(\boldsymbol{Y})$ désigne le bord de $\boldsymbol{Y}$. Comme $\delta(\boldsymbol{Y})$ est une variété topologique compacte, ses nombres de Betti sur k sont également finis. L'exactitude de $(*)$ permet de conclure. ∎

2.9.2. Proposition. *Le tableau suivant donne, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, un espace vectoriel ayant la même dimension que le m-ième groupe l'homologie d'intersection de $\boldsymbol{X}$ pour la perversité p et pour le système local $\underline{k}_{\boldsymbol{U}}$.*

m	0	$\cdots$	p	$p+1$	$p+2$	$\cdots$	$d_{\boldsymbol{X}}$	$d_{\boldsymbol{X}}+1$
$I_pH^m(\boldsymbol{X},\underline{k}_{\boldsymbol{U}})$	$H^0(\boldsymbol{U})$	$\cdots$	$H^p(\boldsymbol{U})$	$\ker(q_{p+1})$	$H_{\mathrm{c}}^{p+2}(\boldsymbol{U})$	$\cdots$	$H_{\mathrm{c}}^{d_X}(\boldsymbol{U})$	0

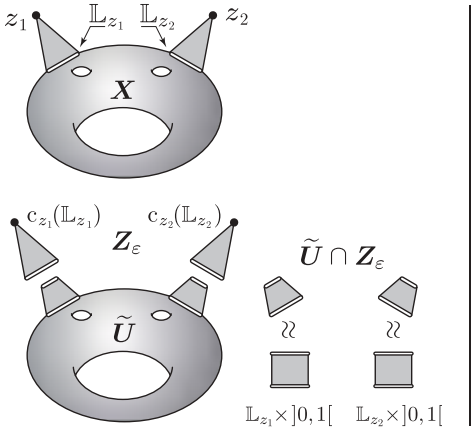
où $H^*(_)$ (resp. $H_{\mathrm{c}}^*(_)$) désigne la cohomologie (resp. à support compact) à coefficients dans k, et $q_{p+1} : H^{p+1}(\widetilde{\boldsymbol{U}}) \to H^{p+1}(\delta(\widetilde{\boldsymbol{U}})) = H^{p+1}(\mathbb{L})$ est le morphisme de restriction. De

[8] On rappelle qu'on appelle ainsi les nombres $B_m(\boldsymbol{Y};k) := \dim_k(H^m(\boldsymbol{Y};k))$.

plus,

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{U}) \supseteq \left\{(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \;\middle|\; p+q = d_{\boldsymbol{X}}-2\right\}$$

Démonstration. On reprend les notations de paragraphes qui précèdent la proposition. La suite exacte longue de Mayer-Vietoris pour la décomposition $\boldsymbol{X} = \widetilde{\boldsymbol{U}} \cup \boldsymbol{Z}_\varepsilon$ et le complexe de faisceaux $\mathscr{I}^\bullet = \tau_{\leqslant p}\, I\!R i_{\boldsymbol{U}*}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}})$ vaut dans notre cas :



$$\begin{array}{c}
\overset{[+1]}{\downarrow} \\
I_pH^m(\boldsymbol{X};\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) \\
\downarrow \\
H^m(\widetilde{\boldsymbol{U}}) \oplus \left(\bigoplus_{z\in\boldsymbol{Z}} I_pH^m(\mathrm{c}_z(\mathbb{L}_z))\right) \\
\overset{\beta_m}{\downarrow} \\
H^m(\widetilde{\boldsymbol{U}}\cap\boldsymbol{Z}_\varepsilon) = H^m(\delta(\widetilde{\boldsymbol{U}})\times]0,1[) \equiv H^m(\mathbb{L}) \\
\overset{[+1]}{\downarrow}
\end{array}$$

Les morphismes β_m sont surjectifs pour tout $m \leqslant p$ (*cf.* 2.4.4), donc :

$$\dim_k\left(I_pH^m(\boldsymbol{X};\underline{k}_{\boldsymbol{U}})\right) = \dim_k\left(H^m(\widetilde{\boldsymbol{U}};k)\right) = \dim_k\left(H^m(\boldsymbol{U};k)\right), \text{ pour tout } m \leqslant p.$$

puisque $\widetilde{\boldsymbol{U}}$ est retract par déformation de $\boldsymbol{U}$ (*cf.* 1.6.2-(b)).

Lorsque $m \geqslant p+1$, on a $I_pH^m(\mathrm{c}_z(\mathbb{L}_z)) = 0$ pour tout $z \in \boldsymbol{Z}$, et β_m s'identifie au morphisme de restriction $\tilde{\beta}_m : H^m(\widetilde{\boldsymbol{U}};k) \to H^m(\mathbb{L};k)$ que l'on retrouve, par ailleurs, dans la suite exacte longue associée au triangle exact $\Delta(\widetilde{\boldsymbol{U}}\backslash\mathbb{L}, \widetilde{\boldsymbol{U}}, \mathbb{L}; \underline{k}_{\widetilde{\boldsymbol{U}}})$:

$$\xrightarrow{[+1]} H^m_{\mathrm{c}}(\widetilde{\boldsymbol{U}}\backslash\mathbb{L};k) \xrightarrow{\alpha_m} H^m(\widetilde{\boldsymbol{U}};k) \xrightarrow{\tilde{\beta}_m} H^m(\mathbb{L};k) \xrightarrow{[+1]} \qquad (\star)$$

On en déduit :

$$\dim_k\left(I_pH^m(\boldsymbol{X};\underline{k}_{\boldsymbol{U}})\right) = \dim_k\left(H^m_{\mathrm{c}}(\widetilde{\boldsymbol{U}}\backslash\mathbb{L};k)\right) = \dim_k\left(H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U};k)\right), \text{ pour } m > p+1.$$

puisque $\widetilde{\boldsymbol{U}}\backslash\mathbb{L}$ est homéomorphe à $\boldsymbol{U}$. Et, pour terminer :

$$I_pH^{p+1}(\boldsymbol{X};\underline{k}_{\boldsymbol{U}})\big) = \ker(\tilde{\beta}_{p+1})$$

puisque β_p est surjective. Ce qui achève la justification du tableau de la proposition.

La deuxième partie de la proposition est conséquence immédiate de la dualité de Poincaré vérifiée par $\boldsymbol{U}$ sauf à un endroit où l'on est conduit à vérifier l'égalité des dimensions $\dim_k\left(\ker(\tilde{q}_{p+1})\right) = \dim_k\left(\ker(\tilde{q}_{d_{\boldsymbol{X}}-(p+1)})\right)$, ou encore, par l'exactitude de $(\star)$, l'égalité :

$$\dim_k\left(\mathrm{im}(\tilde{\alpha}_{p+1})\right) = \dim_k\left(\mathrm{im}(\tilde{\alpha}_{d_{\boldsymbol{X}}-(p+1)})\right) \qquad (\star\star)$$

où

$$H_c^*(\boldsymbol{U};k) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_*} H^*(\boldsymbol{U};k)$$

est la composée de α_* avec le morphisme de restriction $H^*(\widetilde{\boldsymbol{U}};k) \to H^*(\boldsymbol{U};k)$ qui est un isomorphisme pour des raisons d'homotopie. Or, comme $\boldsymbol{U}$ est supposée lisse et orientable, elle vérifie la dualité de Poincaré, *i.e.*

$$H^*(\boldsymbol{U};k) \equiv \mathrm{Hom}(H_c^{d_U-*}(\boldsymbol{U};k);k)\,,$$

et comme les nombres de Betti sur k de $\boldsymbol{U}$ sont finis (lemme 2.9.1), on a aussi :

$$H_c^*(\boldsymbol{U};k) \equiv \mathrm{Hom}(H^{d_U-*}(\boldsymbol{U};k);k)\,.$$

Le morphisme $\tilde{\alpha}_*$ coïncide alors avec son transposé au décalage près, *i.e.* $\tilde{\alpha}_m = {}^{\mathrm{t}}\tilde{\alpha}_{d_{\boldsymbol{X}}-m}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. L'égalité $(\star\star)$ en résulte et la proposition est démontrée. ∎

2.10 Homologie d'intersection d'une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire d'une sous-variété fermée

Cette partie généralise l'étude de la section 2.9 et c'est le premier exemple où le sous-espace $\boldsymbol{Z}$ n'est pas supposée de dimension nulle.

On se donne une variété topologique $\boldsymbol{X}$ compacte de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$ et une sous-variété topologique $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}$ de dimension $d_{\boldsymbol{Z}}$. L'ouvert $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{Z}$ est alors une variété topologique de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$ dont on suppose qu'elle est orientable ([9]). On rappelle que, par définition de sous-variété topologique, pour chaque point $z \in \boldsymbol{Z}$, il existe un voisinage ouvert V_z de z dans $\boldsymbol{X}$ et un homéomorphisme $\varphi_z : V_z \to \mathbb{R}^{d_Z} \times \mathbb{R}^{d_X-d_Z}$ tel que $\varphi_z(V_z \cap \boldsymbol{Z}) = \mathbb{R}^{d_Z} \times \{0\}$. En particulier, $V_z \cap \boldsymbol{U}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{d_Z} \times \big(\mathbb{R}^{d_X-d_Z}\backslash\{0\}\big)$ et on a une homotopie

$$V_z \cap \boldsymbol{U} \sim \mathbb{S}^{d_X-d_Z-1}\,,\ \text{pour tout } z \in \boldsymbol{Z}. \qquad (*)$$

Il est d'autre part clair qu'à partir de la donnée d'un tel voisinage V_z on peut construire une base de voisinages ouverts de z dans $\boldsymbol{X}$ vérifiant la propriété $(*)$. Il s'ensuit que, pour tout $z \in \boldsymbol{Z}$, le complexe $\big(I\!R i_{U*}(\underline{k}_U)\big)_z$ calcule la cohomologie de la sphère $\mathbb{S}^{d_X-d_Z-1}$ (nulle en tous degrés sauf 0 et $d_{\boldsymbol{X}}-d_{\boldsymbol{Z}}-1$). Par conséquent, les morphismes naturels entre troncatures successives suivants sont tous des quasi-isomorphismes.

$$\begin{cases} \underline{IC}_0^\bullet \to \underline{IC}_1^\bullet \to \underline{IC}_2^\bullet \to \ \cdots\cdots\ \to I\!R i_{U*}(\underline{k}_U)\,, & \text{lorsque } d_{\boldsymbol{X}}-d_{\boldsymbol{Z}} \leqslant 1\,; \\ \left.\begin{array}{l} \underline{IC}_0^\bullet \to \underline{IC}_1^\bullet \to \underline{IC}_2^\bullet \to \ \cdots\cdots\ \to \underline{IC}_{d_X-d_Z-2}^\bullet \\ \underline{IC}_{d_X-d_Z-1}^\bullet \to \underline{IC}_{d_X-d_Z}^\bullet \to \ \cdots\ \to I\!R i_{U*}(\underline{k}_U) \end{array}\right\} & \text{lorsque } d_{\boldsymbol{X}}-d_{\boldsymbol{Z}} \geqslant 2. \end{cases}$$

Ces remarques constituent l'essentiel de la démonstration de la proposition suivante dont nous laissons les détails comme exercice.

[9] Lorsque $d_{\boldsymbol{X}}-d_{\boldsymbol{Z}} \geqslant 2$, cette condition équivaut à l'orientabilité de $\boldsymbol{X}$ puisque, dans ce cas, les morphismes d'adjonction $\underline{\mathrm{Or}}_{\boldsymbol{X}} \to i_{U*}\underline{\mathrm{Or}}_U \equiv i_{U*}\underline{k}_U \leftarrow \underline{k}_{\boldsymbol{X}}$ sont des isomorphismes. Par contre, lorsque $d_{\boldsymbol{X}}-d_{\boldsymbol{Z}}=1$, la variété $\boldsymbol{X}$ peut ne pas être orientable comme le montre l'exemple où $\boldsymbol{X}$ est le ruban de Möbius et $\boldsymbol{Z}$ est son cercle médian.

2.10.1. Proposition. *Avec les données précédentes, on a :*

$$I_pH^*(\boldsymbol{X};\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) = \begin{cases} H^*(\boldsymbol{U};k) & \text{lorsque } p \geqslant d_{\boldsymbol{X}} - d_{\boldsymbol{Y}} - 1, \\ H^*(\boldsymbol{X};k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier

$$\begin{cases} \mathscr{P}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{U}) \supseteq [0, d_{\boldsymbol{X}} - d_{\boldsymbol{Y}} - 2]^2, \text{ en général, et} \\ \mathscr{P}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{U}) = \varnothing, \text{ lorsque } d_{\boldsymbol{X}} - d_{\boldsymbol{Z}} = 1. \\ \mathscr{P}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{U}) = \mathbb{N}^2, \text{ lorsque } d_{\boldsymbol{X}} = d_{\boldsymbol{Z}}. \end{cases}$$

2.10.2. Remarque. Les conséquences suivantes méritent d'être relevées.

a) Lorsque $\boldsymbol{Z}$ est de codimension 1 dans $\boldsymbol{X}$ les groupes d'homologie d'intersection ne vérifient jamais la dualité de Poincaré.

b) Lorsque $\boldsymbol{Z}$ est de codimension strictement plus grande que 1 dans $\boldsymbol{X}$, des groupes d'homologie d'intersection vérifiant la dualité de Poincaré existent et s'identifient tous à la cohomologie ordinaire de $\boldsymbol{X}$.

c) Dans (b) l'homologie d'intersection de $\boldsymbol{X}$ ne voit pas la sous-variété $\boldsymbol{Z}$.

2.11 Comparaison des études 2.9 et 2.10

La définition de espace singulier à singularités isolées de 2.9 n'exclu pas le cas où $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique et $\boldsymbol{Z}$ est un sous ensemble fini de $\boldsymbol{X}$ (on dit dans ce cas que les singularités de $\boldsymbol{Z}$ sont « *inessentielles* »). Le cas où $d_{\boldsymbol{X}} \geqslant 2$ est donc commun aux propositions 2.9.2 et 2.10.1. A ce propos 2.9.2 donne le tableau suivant :

m	0	$\cdots$	p	$p+1$	$p+2$	$\cdots$	$d_{\boldsymbol{X}}$	$d_{\boldsymbol{X}}+1$	$\cdots$
$I_pH^m(\boldsymbol{X},\underline{k}_{\boldsymbol{U}})$	$H^0(\boldsymbol{U})$	$\cdots$	$H^p(\boldsymbol{U})$	$\ker\big(H^{p+1}(\widetilde{\boldsymbol{U}}) \to H^{p+1}(\mathbb{L})\big)$	$H_{\mathrm{c}}^{p+2}(\boldsymbol{U})$	$\cdots$	$H_{\mathrm{c}}^{d_{\boldsymbol{X}}}(\boldsymbol{U})$	0	$\cdots$

La suite exacte longue associée au triangle exact $\Delta(\boldsymbol{U},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z};\underline{k}_{\boldsymbol{X}})$ est :

$$\xrightarrow{[+1]} H_{\mathrm{c}}^*(\boldsymbol{U};k) \xrightarrow{\nu_*} H^*(\boldsymbol{X};k) \longrightarrow H^*(\boldsymbol{Z};k) \xrightarrow{[+1]}$$

et comme $H^m(\boldsymbol{Z};k) = 0$, pour tout $m > 0$, on a toujours :

$$\begin{cases} H_{\mathrm{c}}^m(\boldsymbol{U};k) \equiv H^m(\boldsymbol{X};k), & \text{pour tout } m \geqslant 2, \text{ et} \\ H_{\mathrm{c}}^1(\boldsymbol{U};k) \xrightarrow{\nu_1} H^1(\boldsymbol{X};k), & \text{est surjective.} \end{cases} \qquad (\ddagger)$$

D'autre part, la suite exacte longue associée au triangle exact $\Delta(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X},\boldsymbol{U};\underline{k}_{\boldsymbol{X}})$ est :

$$\xrightarrow{[+1]} H_{\boldsymbol{Z}}^*(\boldsymbol{X};k) \longrightarrow H^*(\boldsymbol{X};k) \longrightarrow H^*(\boldsymbol{U};k) \xrightarrow{[+1]}$$

où $H_{\boldsymbol{Z}}^m(\boldsymbol{X};k) = 0$, pour tout $m \neq d_{\boldsymbol{X}}$, puisque $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique. On en déduit :

$$H^m(\boldsymbol{X};k) \equiv H^m(\boldsymbol{U};k), \text{ pour tout } m \leqslant d_{\boldsymbol{X}} - 2.$$

Enfin, $\mathbb{L}$ est maintenant une réunion de sphères de dimension $d_{\boldsymbol{X}} - 1$, donc $H^{p+1}(\mathbb{L};k) = 0$ pour tout $p \leqslant d_{\boldsymbol{X}} - 3$, et alors :

$$\ker\big(H^{p+1}(\widetilde{\boldsymbol{U}}) \to H^{p+1}(\mathbb{L})\big) = H^{p+1}(\widetilde{\boldsymbol{U}}) = H^{p+1}(\boldsymbol{U}) = H^{p+1}(\boldsymbol{X})$$

pour tout $0 \leqslant p \leqslant d_{\boldsymbol{X}} - 3$.

Reste à comprendre $\ker\big(H^{d_{\boldsymbol{X}}-1}(\widetilde{\boldsymbol{U}}) \to H^{d_{\boldsymbol{X}}-1}(\mathbb{L})\big)$.

Le morphisme de triangles exacts $\Delta(\boldsymbol{U}, \widetilde{\boldsymbol{U}}, \mathbb{L}; \underline{\underline{k}}) \to \Delta(\boldsymbol{U} \amalg \boldsymbol{Z}_\varepsilon, \boldsymbol{X}, \mathbb{L}; \underline{\underline{k}})$ associé au plongement fermé $\widetilde{\boldsymbol{U}} \subseteq \boldsymbol{X}$ induit un morphisme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H^{d_{\boldsymbol{X}}-2}(\mathbb{L}) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}^{d_{\boldsymbol{X}}-1}(\boldsymbol{U}) \oplus H_{\mathrm{c}}^{d_{\boldsymbol{X}}-1}(\boldsymbol{Z}_\varepsilon) & \xrightarrow{\beta} & H^{d_{\boldsymbol{X}}-1}(\boldsymbol{X}) & \longrightarrow & H^{d_{\boldsymbol{X}}-1}(\mathbb{L}) & \longrightarrow \\
& \| & & \alpha \downarrow & & \gamma \downarrow & & \| & \\
\longrightarrow & H^{d_{\boldsymbol{X}}-2}(\mathbb{L}) & \longrightarrow & H_{\mathrm{c}}^{d_{\boldsymbol{X}}-1}(\boldsymbol{U}) & \longrightarrow & H^{d_{\boldsymbol{X}}-1}(\widetilde{\boldsymbol{U}}) & \xrightarrow{\delta} & H^{d_{\boldsymbol{X}}-1}(\mathbb{L}) & \longrightarrow
\end{array}$$

où $H_{\mathrm{c}}^{d_{\boldsymbol{X}}-1}(\boldsymbol{Z}_\varepsilon) = 0$ puisque $\boldsymbol{Z}_\varepsilon$ est une réunion disjointe de variétés topologiques homéomorphes à $\mathbb{R}^{\boldsymbol{d_X}}$. Le morphisme α est l'identité et γ est donc bijectif. Enfin, comme $d_{\boldsymbol{X}} - 1 \geqslant 1$, le morphisme β est surjectif (‡) et, par conséquent, $\ker(\delta) = H^{d_{\boldsymbol{X}}-1}(\boldsymbol{X})$.

Ces remarques montrent bien la concordance des propositions en question.

2.12 Conclusions

a) Dans tous les exemples considérés où $\boldsymbol{Z}$ est de codimension supérieure ou égale à 2 dans $\boldsymbol{X}$, on a

$$\dim_k \big(I_p H^m(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}})\big) = \dim_k \big(I_q H_{\mathrm{c}}^{d_{\boldsymbol{X}}-m}(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}})\big), \text{ pour tout } m \in \mathbb{Z}. \qquad (\diamond)$$

pour tous les couples

$$(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad \text{tels que} \quad p + q = d_{\boldsymbol{X}} - 2\,. \qquad (\diamond\diamond)$$

b) Lorsque $\boldsymbol{Z}$ est de codimension 1 dans $\boldsymbol{X}$, il existe des exemples pour les quels ($\diamond$) n'est jamais vérifié.

Une large partie des sections suvantes est consacrée à l'explication et à la généralisation de ces phénomènes.

§3. Dualité sur les espaces stratifiés

L'homologie d'intersection sur les espaces localement compacts concerne la classe d'espaces topologiques connus sous le nom de «*pseudovariétés*». Voici un extrait des articles de Goresky-MacPherson [GoMc$_1$,GoMc$_2$] où la notion est introduite.

> **Definition.** A topological *pseudomanifold* of dimension n is a purely n-dimensional stratified paracompact Hausdorff topological space X which admits a stratification
> $$X = X_n \supseteq \ldots \supseteq X_1 \supseteq X_0$$
> such that $X_{n-1} = X_{n-2}$ (i.e., $S_n = X - X_{n-2}$ is an n-dimensional manifold which is dense in X). We use the symbol $\boldsymbol{\Sigma}$ to denote the singularity subset X_{n-2}.

Le but de cette section est de revoir chaque ingrédient intervenant dans cette définition et aussi de rappeler le formalisme de la «*dualité de Grothendieck-Verdier*» pour les espaces stratifiées et donc pour les pseudovariétés.

3.1 Espace topologiquement stratifié

Dans la définition de «*pseudovariété*» rappelée dans le paragraphe précédent, apparaît l'expression «*purely n-dimensional stratified paracompact Hausdorff topological space*». Les paragraphes qui suivent sont destinés à rappeler sa signification.

Commençons par la notion d'«*espace topologiquement stratifié de dimension d*» dont la définition, de nature inductive (*cf.* [GoMc$_1$,GoMc$_2$]), est la suivante :

a) En dimension 0. Il s'agit des ensembles finis ou dénombrables munis de la topologie discrète ;

b) En dimension positive d, il s'agit d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ muni d'une filtration par des parties fermées :
$$\mathcal{F} := \Big(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_d \supseteq \boldsymbol{X}_{d-1} \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{X}_1 \supseteq \boldsymbol{X}_0 \supseteq \boldsymbol{X}_{-1} = \varnothing\Big),$$
telle que pour chaque $c = 0, \ldots, d$ et chaque $x \in \boldsymbol{X}_{d-c} \backslash \boldsymbol{X}_{d-(c+1)}$, il existe un voisinage ouvert N_x de x dans $\boldsymbol{X}$, un espace **compact** $\mathbb{L}(x)$ topologiquement stratifié de dimension $c-1$:
$$\mathbb{L}(x) = \mathbb{L}(x)_{c-1} \supseteq \mathbb{L}(x)_{c-2} \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{L}(x)_1 \supseteq \mathbb{L}(x)_0 \supseteq \mathbb{L}(x)_{-1} = \varnothing,$$
et un homéomorphisme
$$\phi : \mathbb{R}^{d-c} \times \mathrm{c}(\mathbb{L}(x)) \xrightarrow{\sim} N_x \qquad (\diamond)$$
dont la restriction au sous-espace $\mathbb{R}^{d-c} \times \mathrm{c}(\mathbb{L}(x)_j)$ est bijective sur $N_x \cap \boldsymbol{X}_{d-c+j+1}$, pour tout j vérifiant $c-1 \geqslant j \geqslant -1$. En particulier, $(N_x \cap \boldsymbol{X}_{d-c}) \sim \mathbb{R}^{d-c}$ et le sous-espace $\boldsymbol{S}^c := \boldsymbol{X}_{d-c} \backslash \boldsymbol{X}_{d-(c+1)}$ est une partie localement fermée de $\boldsymbol{X}$ qui est une variété topologique de dimension réelle $d-c$ lorsque elle est non vide.

Les voisinages N_x sont souvent appelés «*distingués*».

Chaque composante connexe de $\boldsymbol{S}^c$ est appelée «*strate (de codimension c)*» de l'espace stratifié $\boldsymbol{X}$.

3.1.1. Remarques complémentaires

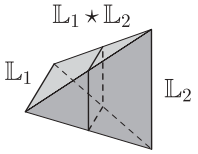
a) Le cône d'un espace topologique $\mathbb{L}$ est le quotient topologique de $[0,1[\,\times\mathbb{L}$ par la relation d'équivalence qui identifie les points de première coordonnée nulle. Il est commode de noter $\mathrm{c}(\mathbb{L})$ par une notation qui rappelle celle du produit d'un scalaire par un vecteur,

$$\mathrm{c}(\mathbb{L}) = \{t{\cdot}\ell \mid \ell\in\mathbb{L};\ t\in[0,1[\}\,.$$

Le produit de deux cônes se décompose en trois parties

$$\mathrm{c}(\mathbb{L})\times\mathrm{c}(\mathbb{M}) = \big\{\big(t{\cdot}\ell, v{\cdot}m\big)\big\} = \begin{cases} t{\cdot}\big(\ell,(v/t){\cdot}m\big) & \text{pour } t>v\geqslant 0\\ t{\cdot}(\ell,m) & \text{pour } t=v\geqslant 0\\ v{\cdot}\big((t/v){\cdot}\ell,m\big) & \text{pour } v>t\geqslant 0\end{cases}$$

qui font apparaître $\mathrm{c}(\mathbb{L})\times\mathrm{c}(\mathbb{M})$ comme le cône d'un nouvel espace topologique : « *la jonction* » (« *the join* » en anglais) de $\mathbb{L}$ et $\mathbb{M}$, notée $\mathbb{L}\star\mathbb{M}$ et définie par $\big\{\big(t{\cdot}\ell,(1-t){\cdot}m\big)\big\}$. On a :



$$\mathrm{c}(\mathbb{L})\times\mathrm{c}(\mathbb{M}) = \mathrm{c}(\mathbb{L}\star\mathbb{M}) \qquad (*)$$

Exercice. Montrer que tout point d'un espace topologiquement stratifiable admet un voisinage homéomorphe au cône d'un espace topologiquement stratifiable.

Lorsque $\mathbb{L}=\mathbb{L}_d\supseteq\mathbb{L}_{d-1}\supseteq\cdots\supseteq\mathbb{L}_0\supseteq\varnothing$ est un espace topologiquement stratifié, le cône $\mathrm{c}(\mathbb{L})$, muni de la filtration :

$$\mathrm{c}(\mathbb{L}_d)\supseteq\mathrm{c}(\mathbb{L}_{d-1})\supseteq\cdots\supseteq\mathrm{c}(\mathbb{L}_0)\supseteq\mathrm{c}(\varnothing)=\mathrm{pt}\supseteq\varnothing$$

est topologiquement stratifié de dimension $d+1$. De même, si $(\mathbb{L},\mathcal{F})$ et $(\mathbb{M},\mathcal{G})$ sont stratifiés de dimensions $d_{\mathbb{L}}$ et $d_{\mathbb{M}}$, l'espace $\mathbb{L}\times\mathbb{M}$ est muni de la filtration $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$ définie par :

$$(\mathbb{L}\times\mathbb{M})_m = \cup_{a+b=m}(\mathbb{L}_a\times\mathbb{M}_b)\,,$$

est stratifié de dimension $d_{\mathbb{L}}+d_{\mathbb{M}}$.

Nous laissons au soin du lecteur d'imaginer la stratification de $\mathbb{L}\star\mathbb{M}$, de se convaincre que l'isomorphisme $(*)$ est bien un isomorphisme d'espaces stratifiés, et de prouver le lemme suivant.

Lemme. *Étant données deux espaces topologiquement stratifiés*

$$\boldsymbol{X}_d\supseteq\boldsymbol{X}_{d-1}\supseteq\cdots\supseteq\boldsymbol{X}_r\supseteq\varnothing \quad \textit{et} \quad \boldsymbol{X}_r\supseteq\boldsymbol{X}_{r-1}\supseteq\cdots\supseteq\boldsymbol{X}_0\supseteq\varnothing\,,$$

la filtration

$$\boldsymbol{X}_d\supseteq\boldsymbol{X}_{d-1}\supseteq\cdots\supseteq\boldsymbol{X}_r\supseteq\boldsymbol{X}_{r-1}\supseteq\cdots\supseteq\boldsymbol{X}_0\supseteq\varnothing$$

est une stratification topologique de $\boldsymbol{X}$.

Exercice. Montrer par un contrexemple que l'implication inverse est fausse en général, même lorsque $\boldsymbol{X}_r$ est une variété topologique.

b) Dans la condition 3.1-(b)-($\diamond$), l'espace $\mathbb{L}(x)$ est localement constant sur la strate contenant x, mais on prendra garde du fait qu'il dépend de manière essentielle de la stratification, par exemple, dans une variété topologique $\boldsymbol{X}$ de dimension d munie de la stratification triviale ($\boldsymbol{X}_{d-1} = \varnothing$), on a $\mathbb{L}(x) = \varnothing$, mais munie de la stratification $\boldsymbol{X} \supseteq \{x\} \supseteq \varnothing$, on a $\mathbb{L}(x) = \mathbb{S}^{d-1}$.

c) On prouve par récurrence sur la dimension qu'un espace topologiquement stratifié est toujours séparé, localement compact, dénombrable à l'infini, métrisable, de dimension cohomologique finie.

d) D'après la condition ($\diamond$) un espace topologiquement stratifié est toujours localement contractile donc localement connexe par arcs.

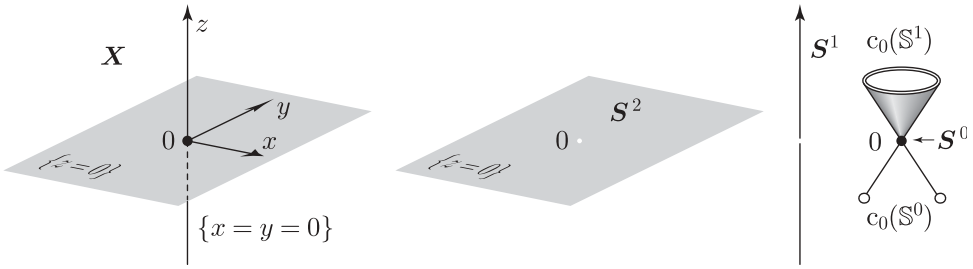
Dans la suite nous allons supposer ces conditions vérifiées par tous les espaces topologiques nous serons amenés à considérer. Ceci ne nous empêchera pourtant pas de le rappeler explicitement dans certains énoncés.

3.1.2. Commentaire. Il faut bien faire attention au fait que dans la définition 3.1 la différence $\boldsymbol{S}^d$ peut être vide, ce qui implique qu'un espace topologiquement stratifié de dimension d est également de dimension d' pour tout $d' > d$.

D'autre part, les espaces $\mathbb{L}(x)$ peuvent eux-aussi être vides, ce qui, dans un autre langage, implique qu'un espace topologiquement stratifié peut être non équidimensionnel. Par exemple, $\boldsymbol{X} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2+y^2) = 0\}$ muni de la filtration

$$\boldsymbol{X} \supseteq \boldsymbol{\Sigma} := \{x = y = 0\} \supseteq \{0\}$$

est un espace topologiquement stratifié de dimension 2, où certains points ont des voisinages de dimension 1. Plus précisément, on a $\mathbb{L}(x) = \varnothing$, pour tout $x \neq 0$ et $\mathbb{L}(0) = \mathbb{S}^1 \amalg \mathbb{S}^0$:



3.1.3. Exemples. Les variétés algébriques $\boldsymbol{X}$ (complexes ou réelles) irréductibles ou non, équidimensionnelles ou non, munies d'une stratification algébrique ([10]) vérifiant les conditions de Whitney, sont des exemples d'espace topologiquement stratifié.

3.1.4. Espace topologiquement stratifié purement de dimension d. Il est facile de voir que si dans un espace topologiquement stratifié $(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$, l'ensemble $\boldsymbol{S}^0$ est non vide et

[10] Chaque $\boldsymbol{X}_i$ est un fermé algébrique de $\boldsymbol{X}$.

partout dense, il en est de même pour les espaces $\mathbb{L}(x)$, quel que soit $x \in \boldsymbol{X}$. Dans un tel cas, la dimension de $\boldsymbol{X}$ est uniquement déterminée (elle coïncide alors avec $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X})$). Cette remarque est à la base de la définition suivante :

Définition. Un espace topologiquement stratifié de dimension d est dit «*purement de dimension d*» lorsque la réunion $\boldsymbol{S}^0$ des strates de codimension nulle est non vide et partout dense dans $\boldsymbol{X}$.

3.1.5. Exercices

1) Montrer que si $(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$ est un espace topologiquement stratifié purement de dimension d, l'espace $\mathbb{L}(x)$ est un espace topologiquement stratifié purement de dimension $d-i+1$, quel que soit $x \in \boldsymbol{S}^i$.
2) Soit $(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$ un espace topologiquement stratifié de dimension d. Montrer que pour tout $\boldsymbol{S}^i$ non vide, son adhérence $\overline{\boldsymbol{S}}^i$ munie de la filtration obtenue en restreignant $\mathcal{F}$ à $\overline{\boldsymbol{S}}^i$ est un espace topologiquement stratifié purement de dimension $d-i$.
3) Montrer qu'un espace topologiquement stratifié de dimension d est réunion d'espaces topologiquement stratifiés purement de dimensions d' avec $d' \leqslant d$.

3.1.6. Commentaire. Il est clair que l'exemple de 3.1.2 n'est pas purement de dimension 2. Dans cet exemple, $\overline{\boldsymbol{S}}^0$ est le plan $\{z=0\}$ et $\overline{\boldsymbol{S}}^1$ est la droite $\{x=y=0\}$.

Dans le même ordre d'idées, les variétés algébriques $\boldsymbol{X}$ (réelles ou complexes) munies de stratifications algébriques sont purement dimensionnelles, si et seulement si, elles sont algébriquement équidimensionnelles ([11]).

3.1.7. Condition d'équisingularité. Dans la définition d'espace topologiquement stratifié, la condition $(\diamond)$ (*cf.* 3.1-(b)) est une condition dite d'«*équisingularité locale*» en ce sens que pour chaque strate $\boldsymbol{S}$ et pour chaque $x \in \boldsymbol{S}$, le type de singularité de x dans $\boldsymbol{X}$ est localement constant par rapport à la strate $\boldsymbol{S}$. Il est important de comprendre que une filtration fermée d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ où les différences $\boldsymbol{X}_i \backslash \boldsymbol{X}_{i-1}$ sont des variétés topologiques, ne vérifie pas nécessairement la condition d'équisingularité. Dans l'exemple 3.1.2, l'ensemble $\boldsymbol{\Sigma} := \boldsymbol{X} \backslash \boldsymbol{S}^0$ est homéomorphe à la droite $\mathbb{R}$ et les strates de la filtration $\boldsymbol{X} \supseteq \boldsymbol{\Sigma} \supseteq \varnothing$ sont des variétés topologiques, pourtant la strate $\boldsymbol{\Sigma}$ ne vérifie pas la condition d'équisingularité locale au point 0.

La condition d'équisingularité locale joue un rôle essentiel dans la constructibilité des complexes de faisceaux, thème que nous développons dans la section suivante.

3.2 Constructibilité

3.2.1. Faisceaux dérivés. Pour tout complexe $\boldsymbol{M}^\bullet$ d'objets d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$:

[11] Toutes ses composantes irréductibles sont de la même dimension algébrique.

$$\boldsymbol{M}^\bullet = \big(\cdots \boldsymbol{M}^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \boldsymbol{M}^m \xrightarrow{d_m} \boldsymbol{M}^{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \cdots\big),$$

et tout $m \in \mathbb{Z}$, on appelle «*m-ième objet dérivé de $\boldsymbol{M}^\bullet$*» l'objet de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ défini par :

$$h^m\boldsymbol{M}^\bullet := \frac{\ker(d_m)}{\mathrm{im}(d_{m-1})}\cdot$$

Dans le même ordre d'idées, si $\alpha_\bullet : \boldsymbol{M}^\bullet \to \boldsymbol{N}^\bullet$ est un morphisme de complexes de catégorie dérivée $D(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, on note $h^m\alpha_\bullet : h^m\boldsymbol{M}^\bullet \to h^m\boldsymbol{N}^\bullet$ le morphisme induit entre les objets dérivés correspondants.

La correspondance $\boldsymbol{M} \rightsquigarrow h^m\boldsymbol{M}^\bullet$, $\alpha_\bullet \rightsquigarrow h^m\alpha_\bullet$ définit un foncteur de la catégorie dérivée $D(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ vers la catégorie $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Lorsque $\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet \in C^*\big(\mathrm{Fais}(\boldsymbol{X})\big)$, on parle plutôt de «*faisceaux dérivés du complexe $\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet$*» et on note $\boldsymbol{\mathscr{H}}^m\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet$ plutôt que $h^m\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet$.

3.2.2. Faisceaux dérivés à supports dans une partie localement fermé. Pour toute partie $\boldsymbol{S}$ localement fermée dans $\boldsymbol{X}$, on note $\boldsymbol{\mathscr{H}}^m_{\boldsymbol{S}}$ la composée des deux foncteurs $i^!_{\boldsymbol{S}} : D^+(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow D^+(\boldsymbol{S})$ et $\boldsymbol{\mathscr{H}}^m : D^+(\boldsymbol{S}) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}(\boldsymbol{S})$:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathscr{H}}^m_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet := \boldsymbol{\mathscr{H}}^m(i^!_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet) \in \mathrm{Fais}(\boldsymbol{S})}$$

Cette définition généralise celle de $\boldsymbol{\mathscr{H}}^m$ puisque $\boldsymbol{\mathscr{H}}^m_{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{\mathscr{H}}^m$ de manière évidente.

3.2.3. Le triangle exact fondamental. Pour toute partie $\boldsymbol{S}$ localement fermée dans $\boldsymbol{X}$, de complémentaire $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{S}$, on a le triangle exact de $D^+(\boldsymbol{X})$:

$$i_{\boldsymbol{S}!}i^!_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet \longrightarrow \boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}i_{\boldsymbol{A}*}i^{-1}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet) \xrightarrow{[+1]},$$

où $i_{\boldsymbol{S}} : \boldsymbol{S} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ et $i_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ désignent les applications d'inclusion, dont on déduit la suite exacte longue :

$$\longrightarrow i_{\boldsymbol{S}!}\boldsymbol{\mathscr{H}}^m_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet \longrightarrow \boldsymbol{\mathscr{H}}^m\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet \longrightarrow \boldsymbol{\mathscr{H}}^m\big(\mathbb{R}i_{\boldsymbol{A}*}(\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet|_{\boldsymbol{A}})\big) \longrightarrow i_{\boldsymbol{S}!}\boldsymbol{\mathscr{H}}^{m+1}_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet \longrightarrow$$

3.2.4. Amplitudes d'un complexe. Soit $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ une catégorie abélienne. Pour tout complexe $\boldsymbol{M}^\bullet \in C^*(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, on appelle

- «*amplitude de $\boldsymbol{M}^\bullet$*», notée $[\![\boldsymbol{M}^\bullet]\!]_{\mathrm{cplx}}$, la réunion des intervalles $[a,b] \subseteq \mathbb{Z}$ tels que $\boldsymbol{M}^a \neq 0$ et $\boldsymbol{M}^b \neq 0$.
- «*amplitude cohomologique de $\boldsymbol{M}^\bullet$*», notée $[\![\boldsymbol{M}^\bullet]\!]_{\mathrm{ch}}$, la réunion des intervalles $[a,b] \subseteq \mathbb{Z}$ tels que $h^a\boldsymbol{M}^\bullet \neq 0$ et $h^b\boldsymbol{M}^\bullet \neq 0$.

Remarques. Pour tout complexe $\boldsymbol{M}^\bullet \in C^*(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, on a :

a) $[\![\boldsymbol{M}^\bullet]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [\![\boldsymbol{M}^\bullet]\!]_{\mathrm{cplx}}$.
b) $[\![\boldsymbol{M}^\bullet[m]]\!]_{\mathrm{ch}} = [\![\boldsymbol{M}^\bullet]\!]_{\mathrm{ch}} - m$ et $[\![\boldsymbol{M}^\bullet[m]]\!]_{\mathrm{cplx}} = [\![\boldsymbol{M}^\bullet]\!]_{\mathrm{cplx}} - m$.

3.2.5. Troncatures intelligentes. Il convient de rappeler les définitions des deux types de troncature intelligentes :

Troncatures τ et τ'. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Pour tout complexe de $C^*(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{rccccccccc} \boldsymbol{M}^\bullet = \Big(\cdots \boldsymbol{M}^{m-1} & \xrightarrow{d_{m-1}} & \boldsymbol{M}^m & \xrightarrow{d_m} & \boldsymbol{M}^{m+1} & \xrightarrow{d_{m+1}} & \boldsymbol{M}^{m+2} & \xrightarrow{d_{m+2}} & \cdots \Big), \\ \text{on pose} \quad \| & & \| & & \subseteq\uparrow & & 0\uparrow & & \\ \tau_{\leqslant m}\boldsymbol{M}^\bullet := \Big(\cdots \boldsymbol{M}^{m-1} & \xrightarrow{d_{m-1}} & \boldsymbol{M}^m & \xrightarrow{d_m} & \mathrm{im}(d_m) & \xrightarrow{0} & \mathbf{0} & \xrightarrow{0} & \cdots \Big), \\ \text{et} \quad \| & & \subseteq\uparrow & & 0\uparrow & & 0\uparrow & & \\ \tau_{\leqslant m}{}'\boldsymbol{M}^\bullet := \Big(\cdots \boldsymbol{M}^{m-1} & \xrightarrow{d_{m-1}} & \ker(d_m) & \xrightarrow{0} & \mathbf{0} & \xrightarrow{0} & \mathbf{0} & \xrightarrow{0} & \cdots \Big), \end{array}$$

On définit ensuite :

$$\boxed{\tau_{>m}\boldsymbol{M}^\bullet := \boldsymbol{M}^\bullet / \tau_{\leqslant m}\boldsymbol{M}^\bullet \quad \text{et} \quad \tau'_{>m}\boldsymbol{M}^\bullet := \boldsymbol{M}^\bullet / \tau'_{\leqslant m}\boldsymbol{M}^\bullet}$$

Remarque. Les notations $\tau^*_{<m}$ et $\tau^*_{\leqslant m-1}$ (resp. $\tau^*_{>m}$ et $\tau^*_{\geqslant m+1}$) seront considérées équivalentes.

Pour tout morphisme de complexes $\alpha_\bullet : \boldsymbol{M}^\bullet \to \boldsymbol{N}^\bullet$, on a les inclusions naturelles

$$\alpha_m(\ker(d_m(\boldsymbol{M}))) \subseteq \ker(d_m(\boldsymbol{N})) \quad \text{et} \quad \alpha_{m+1}(\mathrm{im}(d_m(\boldsymbol{M}))) \subseteq \mathrm{im}(d_m(\boldsymbol{N}))$$

et on peut définir

$$(\tau_{\leqslant m}\alpha_\bullet)_{\mathrm{n}} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_n & \text{si } n \leqslant m \\ \alpha_{m+1}|_{\mathrm{im}(d_m(M))}, & \text{si } n = m+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\} \quad (\tau'_{\leqslant m}\alpha_\bullet)_{\mathrm{n}} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_n & \text{si } n < m \\ \alpha_m|_{\ker(d_m(M))}, & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

On obtient ainsi des correspondances fonctorielles (additives) et des inclusions et surjections naturelles

$$\tau'_{\leqslant m} \subseteq \tau_{\leqslant m} \subseteq \mathrm{id} : C^*(\mathcal{A}) \rightsquigarrow C^*(\mathcal{A}) \quad \text{et} \quad \mathrm{id} \twoheadrightarrow \tau'_{>m} \twoheadrightarrow \tau_{>m} : C^*(\mathcal{A}) \rightsquigarrow C^*(\mathcal{A})$$
$$\tau^*_{\leqslant m} \subseteq \tau^*_{\leqslant n} \quad \text{et} \quad \tau^*_{>m} \twoheadrightarrow \tau^*_{>n}, \quad \text{pour tous } m \leqslant n.$$

le tout compatible au passage en catégorie dérivée.

3.2.6. Lemme. *Pour tout complexe $\boldsymbol{M}^\bullet \in C^*(\mathcal{A})$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, on a :*

a) $h^i(\tau_{\leqslant m}{}^*\boldsymbol{M}^\bullet) = \left\{ \begin{array}{cc} h^i\boldsymbol{M}^\bullet & \textit{si } i \leqslant m\,; \\ 0 & \textit{sinon.} \end{array} \right\}$ *et* $h^i(\tau_{>m}{}^*\boldsymbol{M}^\bullet) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \textit{si } i \leqslant m\,; \\ h^i\boldsymbol{M}^\bullet & \textit{sinon.} \end{array} \right\}$

où τ^* désigne indifféremment τ et τ' ;

b) *des suites exactes courtes (induisant des triangles exacts en catégorie dérivée)*

$$\mathbf{0} \longrightarrow \tau_{\leqslant m}\boldsymbol{M}^\bullet \xrightarrow{\subseteq} \boldsymbol{M}^\bullet \longrightarrow \tau_{>m}\boldsymbol{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{0}$$
$$\mathbf{0} \longrightarrow \tau'_{\leqslant m}\boldsymbol{M}^\bullet \xrightarrow{\subseteq} \boldsymbol{M}^\bullet \longrightarrow \tau'_{>m+1}\boldsymbol{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{0}$$

c) *des inclusions pour les amplitudes des complexes :*

$$[\![\tau_{\geqslant m}\boldsymbol{M}^\bullet]\!]_{\mathrm{cplx}} \subseteq [m,+\infty] \quad et \quad [\![\tau'_{\leqslant m}\boldsymbol{M}^\bullet]\!]_{\mathrm{cplx}} \subseteq [-\infty,m]$$

d) *Pour tous $a \leqslant b \in \mathbb{Z}\cup\{\pm\infty\}$, il existe un complexe $\boldsymbol{N}^\bullet$ vérifiant $[\![\boldsymbol{N}^\bullet]\!]_{\mathrm{cplx}} \subseteq [a,b]$ et un isomorphisme canonique* ***en catégorie dérivée*** *de $\boldsymbol{N}^\bullet$ vers ${\tau_{\geqslant a}}^*\big({\tau_{\leqslant b}}^*\boldsymbol{M}^\bullet\big)$. Un tel complexe sera noté ${}^a\lfloor\boldsymbol{M}^\bullet\rfloor^b$. En particulier,*

i) *$\boldsymbol{M}^\bullet$ est canoniquement isomorphe à un complexe dont l'amplitude en tant que complexe coïncide avec $[\![\boldsymbol{M}^\bullet]\!]_{\mathrm{ch}}$.*

ii) *Pour tous $a \leqslant b < c \in \mathbb{Z}\cup\{\pm\infty\}$ et tout complexe $\boldsymbol{M}^\bullet$, on a un triangle exact en catégorie dérivée :*

$$ {}^a\lfloor\boldsymbol{M}^\bullet\rfloor^b \longrightarrow {}^a\lfloor\boldsymbol{M}^\bullet\rfloor^c \longrightarrow {}^{b+1}\lfloor\boldsymbol{M}^\bullet\rfloor^c \longrightarrow$$

Démonstration. Tout est évident dans la mesure ou ${\tau_{\leqslant m}}'$ préserve la cohomologie en degrés inférieurs ou égaux à m et tue les objets en degrés strictement supérieurs à m (*mutatis mutandis* pour ${\tau_{\leqslant m}}'$). L'assertion (d), dans le cas ${\tau_{\geqslant a}}'\big(\tau_{\leqslant b}\boldsymbol{M}^\bullet\big)$, résulte de composer en catégorie dérivée les quasi-isomorphismes canoniques :

$$\tau'_{\geqslant a}\big(\tau_{\leqslant b}\boldsymbol{M}^\bullet\big) \longleftarrow \tau'_{\geqslant a}\big(\tau'_{\leqslant b}\boldsymbol{M}^\bullet\big) \longrightarrow \tau_{\geqslant a}(\tau'_{\leqslant b}\boldsymbol{M}^\bullet) =: {}^a\lfloor\boldsymbol{M}^\bullet\rfloor^b\,. \qquad \blacksquare$$

3.2.7. Complexes $\mathfrak{X}$-cohomologiquement localement constants

Définitions. Un complexe $\mathscr{F}^\bullet \in C^*(\mathrm{Fais}(\boldsymbol{X}))$ est dit «*cohomologiquement localement constant*», «clc» en bref, lorsque ses faisceaux dérivés $\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet$ sont localement constants.

Plus généralement, soit $\mathfrak{X}$ une partition de $\boldsymbol{X}$. Un complexe $\mathscr{F}^\bullet \in C^*(\mathrm{Fais}(\boldsymbol{X}))$ est dit «$\mathfrak{X}$*-cohomologiquement localement constant*», «$\mathfrak{X}$-clc» en bref, lorsque la restriction $\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{S}}$ est clc, quel que soit $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{X}$. Bien évidemment, il revient au même de demander que les restrictions $\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{S}}$ soient des faisceaux localement constants sur $\boldsymbol{S}$, pour tous $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{X}$ et $m \in \mathbb{Z}$.

Un complexe $\mathfrak{X}$-clc $\mathscr{F}^\bullet$ est dit «$\mathfrak{X}$*-cohomologiquement constructible*», «$\mathfrak{X}$-cc» en bref, si chaque faisceau $\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{S}}$ est un système local.

On dira qu'un faisceau $\mathscr{F}$ est clc, $\mathfrak{X}$-clc, $\mathfrak{X}$-cc, lorsque le complexe $\mathscr{F}[0]$ l'est.

3.2.8. Notations. Les sous-catégories pleines des catégories $D^*(\boldsymbol{X})$ $(*=\{+,-,b\})$ des complexes clc, $\mathfrak{X}$-clc, $\mathfrak{X}$-cc seront notées $D^*_{\mathrm{clc}}(\boldsymbol{X})$, $D^*_{\mathfrak{X}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ $D^*_{\mathfrak{X}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$.

3.2.9. Théorème. *Soit $\mathfrak{X}$ une partition de $\boldsymbol{X}$ en parties localement contractiles. La sous-catégorie $D_{k;\mathfrak{X}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ (resp. $\mathfrak{X}$-cc) munie des triangles exacts de $D_k(\boldsymbol{X})$ dont les sommets sont des complexes $\mathfrak{X}$-clc (resp. $\mathfrak{X}$-cc), est une catégorie triangulée.*

Démonstration. Il suffit de montrer que le cône d'un morphisme de complexes $\mathfrak{X}$-clc est $\mathfrak{X}$-clc. Soit $\alpha_\bullet : \mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{G}^\bullet$ un tel morphisme. Pour tout $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{X}$, on considère la suite exacte longue de faisceaux

$$\xrightarrow{[+1]} \mathscr{H}^m \mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{S}} \xrightarrow{\mathscr{H}^m \alpha_\bullet} \mathscr{H}^m \mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{S}} \longrightarrow \mathscr{H}^m \mathscr{C}(\alpha_\bullet)|_{\boldsymbol{S}} \xrightarrow{[+1]}$$

Nous avons montré que les noyau et conoyau d'un morphisme de faisceaux entre deux faisceaux localement constants sont eux-mêmes localement constants. En particulier, le faisceau $\mathscr{H}^m \mathscr{C}(\alpha_\bullet)|_{\boldsymbol{S}}$ est extension de deux faisceaux localement constants :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathscr{L}_1 \longrightarrow \mathscr{H}^m \mathscr{C}(\alpha_\bullet)|_{\boldsymbol{S}} \xrightarrow{q} \mathscr{L}_2 \longrightarrow \mathbf{0} \tag{‡}$$

Pour $x \in \boldsymbol{S}$ soit W_x un voisinage contractile de x dans $\boldsymbol{S}$. On a la suite longue de cohomologie :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \Gamma(W_x, \mathscr{L}_1) \longrightarrow \Gamma\big(W_x; \mathscr{H}^m \mathscr{C}(\alpha_\bullet)|_{\boldsymbol{S}}\big) \xrightarrow{q(W_x)} \Gamma(W_x, \mathscr{L}_2) \xrightarrow{[+1]} H^1(W_x, \mathscr{L}_1) \longrightarrow$$

où $H^1(W_x; \mathscr{L}_1) = 0$, d'après le théorème d'homotopie sur les espaces contractiles. Le morphisme $q(W_x)$ est alors surjectif et toute section de $q(W_x)$ donne lieu à une section, dans la catégorie des faisceaux, de la restriction de (‡) à W_x. Par conséquent, $\mathscr{H}^m \mathscr{C}(\alpha_\bullet)|_{W_x}$ est isomorphe au faisceau constant $\mathscr{L}_1|_{W_x} \oplus \mathscr{L}_2|_{W_x}$. Tout ceci étant vrai au voisinage de chaque point de $\boldsymbol{S}$, le faisceau $\mathscr{H}^m \mathscr{C}(\alpha_\bullet)|_{\boldsymbol{S}}$ est bien localement constant. ∎

3.2.10. Remarque. Dans le cas «cc», l'hypothèse de locale contractibilité des parties de $\mathfrak{X}$ n'est pas nécessaire. En effet, une surjection de faisceaux sur un système local est de la forme $q : \mathscr{F} \twoheadrightarrow \underline{k}_{\boldsymbol{V}}{}^m$ pour $\boldsymbol{V}$ assez petit. Comme d'autre part, $\mathrm{Hom}(\underline{k}_{\boldsymbol{V}}{}^m, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}(c^m, \Gamma(\boldsymbol{V}; \mathscr{F}))$, le morphisme q admet une section, si et seulement si, on peut relever simultanément les m générateurs canoniques de $\underline{k}_{\boldsymbol{V}}{}^m$, ce qui est toujours possible, quitte à rétrécir $\boldsymbol{V}$, puisque $m < \infty$.

3.2.11. Remarque. Soient $\boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2, \boldsymbol{E}$ trois objets d'une catégorie triangulée $\mathcal{T}$. On dit que «$\boldsymbol{E}$ *est extension de* $\boldsymbol{O}_2$ *par* $\boldsymbol{O}_1$», lorsqu'il existe un triangle exact :

$$\boldsymbol{O}_1 \xrightarrow{u} \boldsymbol{E} \xrightarrow{v} \boldsymbol{O}_2 \xrightarrow[[+1]]{w} \cdot \tag{∗}$$

Une sous catégorie pleine $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, stable par le foncteur de translation de $\mathcal{T}$, est dite «*sous-catégorie triangulée*», lorsque, munie des triangles exacts de $\mathcal{T}$ à sommets dans $\mathcal{T}'$, c'est une catégorie triangulée.

Une sous catégorie triangulée $\mathcal{T}'$ d'une catégorie triangulée $\mathcal{T}$ est toujours «*stable par extensions dans* $\mathcal{T}$». En effet, étant donné un triangle (∗) exact dans $\mathcal{T}$, avec $\boldsymbol{O}_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}')$, le morphisme $\boldsymbol{U}_2 \xrightarrow{w} \boldsymbol{U}_1[1]$ se complète en un triangle exact **de** $\mathcal{T}'$

$$\boldsymbol{O}_2 \xrightarrow{w} \boldsymbol{O}_1[1] \xrightarrow{\overline{u}} \boldsymbol{O}_3 \xrightarrow[[+1]]{\overline{v}}$$

et il existe un morphisme $h : \boldsymbol{E}[1] \to \boldsymbol{O}_3$ tel que

$$\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{O}_2 & \xrightarrow{w} & \boldsymbol{O}_1[1] & \xrightarrow{-u} & \boldsymbol{E}[1] & \xrightarrow[[+1]]{-v} \\ \| & & \| & & \downarrow h & \\ \boldsymbol{O}_2 & \xrightarrow{w} & \boldsymbol{O}_1[1] & \xrightarrow{\overline{u}} & \boldsymbol{O}_3 & \xrightarrow[[+1]]{\overline{v}} \end{array}$$

est un morphisme de triangles exacts de $\mathfrak{T}$. Le morphisme h alors est nécessairement un isomorphisme et $\boldsymbol{E}$ est bien isomorphe à un objet de $\mathfrak{T}'$.

Le théorème 3.2.9 montre donc que les catégories $D^*_{k,\mathfrak{X}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ et $D^*_{k,\mathfrak{X}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$ sont stables par extension dans $D_k(\boldsymbol{X})$. On a donc :

3.2.12. Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique muni d'une partition en parties localement contractiles $\mathfrak{X}$. Pour tout ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ réunion de parties de $\mathfrak{X}$, de fermé complémentaire $\boldsymbol{F} := \boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{U}$, il suffit que deux termes des triangles exacts $\Delta(\boldsymbol{U},\boldsymbol{X},\boldsymbol{F};\mathscr{F}^\bullet)$ et $\Delta(\boldsymbol{F},\boldsymbol{X},\boldsymbol{U};\mathscr{F}^\bullet)$ soient $\mathfrak{X}$-clc (resp. $\mathfrak{X}$-cc) pour que le troisième le soit.*

3.3 Théorème d'homotopie

3.3.1. Filtrations fermées. Pour toute filtration finie $\mathcal{F}$ d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ par des parties fermées $\boldsymbol{X}_i$:

$$\mathcal{F} = \Big(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_d \supseteq \boldsymbol{X}_{d-1} \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{X}_0 \supseteq \boldsymbol{X}_{-1} = \varnothing\Big)$$

on note :

- $\boldsymbol{U}^c_{\mathcal{F}} := \boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{X}_{d-(c+1)}$, et $\boldsymbol{U}^c$ pour $\mathcal{F}$ sous-entendue ; d'où la filtration ouverte :
$$\boldsymbol{U}^0 \xrightarrow[\subseteq]{i_0} \boldsymbol{U}^1 \xrightarrow[\subseteq]{i_1} \cdots \xrightarrow[\subseteq]{i_{d-2}} \boldsymbol{U}^{d-1} \xrightarrow[\subseteq]{i_{d-1}} \boldsymbol{U}^d = \boldsymbol{X}$$
- $\boldsymbol{S}^c_{\mathcal{F}} := \boldsymbol{X}_{d-c}\backslash\boldsymbol{X}_{d-(c+1)}$, et $\boldsymbol{S}^c$ pour $\mathcal{F}$ sous-entendue ; d'où la partition en parties localement fermées :
$$\boldsymbol{U}^c = \boldsymbol{S}^0 \amalg \boldsymbol{S}^1 \amalg \cdots \amalg \boldsymbol{S}^c$$
où l'inclusion $j_c : \boldsymbol{S}^c \hookrightarrow \boldsymbol{U}^c$ est un plongement fermé.
- $\boldsymbol{U}^{c+1} = \boldsymbol{U}^c \amalg \boldsymbol{S}^c$ réunion disjointe d'un ouvert et un fermé de $\boldsymbol{U}^{c+1}$. En particulier, pour tout $\mathscr{F}^\bullet \in D(\boldsymbol{U}^{c+1})$, on a les triangles exacts :
$$\begin{array}{lcl} \Delta(\boldsymbol{U}^c,\boldsymbol{U}^{c+1},\boldsymbol{S}^{c+1};\mathscr{F}^\bullet) & : & i_{c!}\big(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{U}^c}\big) \longrightarrow \mathscr{F}^\bullet \longrightarrow j_{c+1!}\big(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{S}^{c+1}}\big) \xrightarrow{[+1]} \\ \Delta(\boldsymbol{S}^{c+1},\boldsymbol{U}^{c+1},\boldsymbol{U}^c;\mathscr{F}^\bullet) & : & j_{c+1*}\big(j^!_{c+1}\mathscr{F}^\bullet\big) \longrightarrow \mathscr{F}^\bullet \longrightarrow I\!R i_{c*}\big(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{U}^c}\big) \xrightarrow{[+1]} \end{array}$$

Notations et terminologie particulières

- Par analogie avec les espaces stratifiés, chaque composante connexe d'une partie $\boldsymbol{S}^c$ non vide sera appelée « *strate (de codimension c) de $\mathcal{F}$* ».
- La notation $\mathrm{Strat}(\mathcal{F})$ désignera suivant le contexte :
  - l'ensemble de toutes les strates de $\mathcal{F}$,
  - la partition de $\boldsymbol{X}$ définie par les strates de $\mathcal{F}$,
  - l'espace topologique réunion disjointe des strates de $\mathcal{F}$,

• On notera aussi :

$\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$: pour indiquer que $\boldsymbol{U}$ est l'une des parties $\boldsymbol{U}^{\bullet}$.
$\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$: pour indiquer que $\boldsymbol{F}$ est l'une des parties $\boldsymbol{X}_{\bullet}$.
$D^{*}_{\boldsymbol{\mathcal{F}}\text{-clc}}(\boldsymbol{U}^{c})$: clc par rapport à la partition de $\boldsymbol{U}^{c}$ induite par $\mathrm{Strat}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$.
$D^{*}_{\boldsymbol{\mathcal{F}}\text{-cc}}(\boldsymbol{U}^{c})$: cc par rapport à la partition de $\boldsymbol{U}^{c}$ induite par $\mathrm{Strat}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$.

3.3.2. Homotopies filtrées. Étant donnés un espace topologique filtré $(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{\mathcal{F}})$ et une application continue $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, on induit une filtration fermée sur $\boldsymbol{X}$, notée $f^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}}$, en posant $\boldsymbol{X}_i := f^{-1}\boldsymbol{Y}_i$.

Il est clair que la restriction de f à une strate de $f^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est a valeurs dans une unique strate de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. L'application f se relève, par conséquent, en une application continue $\mathrm{Strat}(f) : \mathrm{Strat}(f^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}}) \to \mathrm{Strat}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$.

Homotopie filtrée. Avec les notations précédentes, on dira que deux applications continues $f, g : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ sont «*$\boldsymbol{\mathcal{F}}$-homotopes*» lorsqu'il existe une application continue

$$h : [0,1] \times \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{Y}$$

telle que $h_0 = f$, $h_1 = g$ et $h_t^{-1}\boldsymbol{S} = h_{t'}^{-1}\boldsymbol{S}$ pour tous $t, t' \in [0,1]$ et $\boldsymbol{S} \in \mathrm{Strat}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$. Une telle application est appelée une «*homotopie entre f et g filtrée par $\boldsymbol{\mathcal{F}}$*».

3.3.3. Remarque. Il est clair que si f et g sont $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-homotopes, $\mathrm{Strat}(f^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}}) = \mathrm{Strat}(g^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}})$ et les applications $\mathrm{Strat}(f)$ et $\mathrm{Strat}(g)$ sont homotopes au sens classique du terme.

3.3.4. Exercice. Soit $\boldsymbol{Y} = [0,2] \subseteq \mathbb{R}$ muni de la filtration $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\boldsymbol{Y} \supseteq \{0,1,2\} \supseteq \varnothing)$. Soient $f, g : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ les applications $f(x) = x/2$ et $g(x) = (x+1)/2$. Vérifier les assertions suivantes.

a) f et g sont homotopes au sens classique du terme.
b) $f^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}} = g^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}}$.
c) f et g ne sont pas $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-homotopes.

Déformation de rétraction filtrée. On considère maintenant un sous-espace $\boldsymbol{X}$ de $\boldsymbol{Y}$. On rappelle qu'une «*déformation de rétraction de $\boldsymbol{Y}$ sur $\boldsymbol{X}$*» est une application continue $h : [0,1] \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ telle que

$$h_0 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{Y}}, \quad h_1(\boldsymbol{Y}) \subseteq \boldsymbol{X}, \quad \text{et} \quad h_1|_{\boldsymbol{X}} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{X}}$$

Lorsque, de plus, pour chaque strate $\boldsymbol{S}$ de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ la restriction $h|_{[0,1]\times\boldsymbol{S}}$ est à valeurs dans $\boldsymbol{S}$, on dit que «*h est une déformation de rétraction de $\boldsymbol{Y}$ sur $\boldsymbol{X}$ filtrée par $\boldsymbol{\mathcal{F}}$*», ou encore, que «*$\boldsymbol{X}$ est $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-retract par déformation de $\boldsymbol{Y}$*».

Remarque. Soit $i_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \hookrightarrow \boldsymbol{Y}$ l'inclusion, l'application $\mathrm{Strat}(i_{\boldsymbol{X}}) : \mathrm{Strat}(i_{\boldsymbol{X}}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}}) \to \mathrm{Strat}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$ est un homéomorphisme sur son image et $\mathrm{Strat}(i_{\boldsymbol{X}}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}})$ se voit comme sous-espace de

Strat($\mathcal{F}$). Lorsque $\boldsymbol{X}$ est un $\mathcal{F}$-retract par déformation de $\boldsymbol{Y}$, le sous-espace Strat$(i_{\boldsymbol{X}}^{-1}\mathcal{F})$ est un retract par déformation de Strat($\mathcal{F}$) au sens classique du terme

Commentaire. Ce qu'il faut retenir des définitions précédentes, c'est le fait que les homotopies et déformations que l'on considère lorsque l'on se donne une filtration $\mathcal{F}$, sont *globalement* définies et "respectent" la filtration en ce sens qu'elles se restreignent naturellement aux strates.

3.3.5. Théorème d'homotopie. Le théorème suivant est une généralisation fondamentale du théorème d'homotopie pour les faisceaux localement constants 1.6.2.

Théorème. *Soit $(\boldsymbol{Y};\mathcal{F})$ un espace topologique muni d'une filtration fermée. Alors*

a) *Pour toute application continue $f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$, on a*

$$f^{-1}D^*_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{Y})\subseteq D^*_{f^{-1}\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})\quad\text{et}\quad f^{-1}D^*_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{Y})\subseteq D^*_{f^{-1}\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$$

On suppose maintenant $\mathscr{F}^\bullet\in D^+_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{Y})$.

b) *Si $f_0,f_1:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ sont $\mathcal{F}$-homotopes, il existe un isomorphisme canonique en catégorie dérivée entre les complexes $f_0^{-1}\mathscr{F}^\bullet$ et $f_1^{-1}\mathscr{F}^\bullet$ qui identifie les morphismes*

$$I\!H^*(\boldsymbol{Y};\mathscr{F}^\bullet)\xrightarrow{I\!H^*(f_0)}I\!H^*(\boldsymbol{X};f_0^{-1}\mathscr{F}^\bullet)\quad\text{et}\quad I\!H^*(\boldsymbol{Y};\mathscr{F}^\bullet)\xrightarrow{I\!H^*(f_1)}I\!H^*(\boldsymbol{X};f_1^{-1}\mathscr{F}^\bullet)$$

c) *Si $\boldsymbol{X}$ est $\mathcal{F}$-retract par déformation de $\boldsymbol{Y}$, le morphisme de restriction*

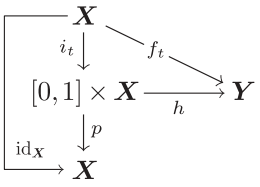
$$I\!H^*(\boldsymbol{Y};\mathscr{F}^\bullet)\longrightarrow I\!H^*\left(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{X}}\right)$$

est un isomorphisme.

Démonstration

a) Affirmation évidente.

b) Soit $h:[0,1]\times\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ une $\mathcal{F}$-homotopie entre f_0 et f_1. Pour chaque $t\in[0,1]$, notons $i_t:\boldsymbol{X}\to[0,1]\times\boldsymbol{X}$ l'application $x\mapsto(t,x)$ et $f_t:=h\circ i_t=h(t,_)$. Soit $p:[0,1]\times\boldsymbol{X}\twoheadrightarrow\boldsymbol{X}$ la projection canonique $(t,x)\mapsto x$, on a $p\circ i_t=\mathrm{id}_{\boldsymbol{X}}$. En appliquant au morphisme d'adjonction $(h^{-1}\mathscr{F}^\bullet)\to i_{t*}i_t^{-1}(h^{-1}\mathscr{F}^\bullet)\equiv i_{t*}\left(f_t^{-1}\mathscr{F}^\bullet\right)$ le foncteur p_*, on obtient un morphisme naturel de foncteurs :



$$\Xi_t(\mathscr{F}^\bullet):p_*(h^{-1}\mathscr{F}^\bullet)\longrightarrow p_*i_{t*}\left(f_t^{-1}\mathscr{F}^\bullet\right)\equiv f_t^{-1}\mathscr{F}^\bullet.$$

Montrons que $I\!R\Xi_t(_):I\!Rp_*h^{-1}(_)\to f_t^{-1}(_)$ est un **isomorphisme naturel** de foncteurs définis sur la catégorie $D^+_{\mathcal{F}_Y\text{-clc}}(\boldsymbol{Y})$ à valeurs dans $D^+(\boldsymbol{X})$.

Réduction au cas des faisceaux $\mathcal{F}$-clc. Soient $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}:\mathcal{A}_1\rightsquigarrow\mathcal{A}_2$ deux foncteurs additifs entre catégories abéliennes dont $\mathcal{A}_1$ possède assez d'injectifs. Soit $\Xi:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{G}$ une

transformation naturelle entre ces foncteurs. Pour tout complexe $\boldsymbol{M}^\bullet \in D(\mathcal{A}_1)$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, on a le triangle exact (*cf.* 3.2.6-(d)) :

$$ {}^{-\infty}\rfloor \boldsymbol{M}^\bullet \lfloor^m \longrightarrow \boldsymbol{M}^\bullet \longrightarrow {}^{m+1}\rfloor \boldsymbol{M}^\bullet \lfloor^\infty \xrightarrow{[+1]} $$

dont on déduit le morphisme de triangles exacts

$$ \begin{array}{ccccc} I\!R\boldsymbol{F}\left({}^{-\infty}\rfloor \boldsymbol{M}^\bullet \lfloor^m\right) & \longrightarrow & I\!R\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{M}^\bullet\right) & \longrightarrow & I\!R\boldsymbol{F}\left({}^{m+1}\rfloor \boldsymbol{M}^\bullet \lfloor^\infty\right) \xrightarrow{[+1]} \\ {\scriptstyle I\!R\Xi({}^{-\infty}\rfloor \boldsymbol{M}^\bullet \lfloor^m)}\downarrow & & {\scriptstyle I\!R\Xi(\boldsymbol{M}^\bullet)}\downarrow & & \downarrow \\ I\!R\boldsymbol{G}\left({}^{-\infty}\rfloor \boldsymbol{M}^\bullet \lfloor^m\right) & \longrightarrow & I\!R\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{M}^\bullet\right) & \longrightarrow & I\!R\boldsymbol{G}\left({}^{m+1}\rfloor \boldsymbol{M}^\bullet \lfloor^\infty\right) \xrightarrow{[+1]} \end{array} $$

Or, $[\![{}^{m+1}\rfloor \boldsymbol{M}^\bullet \lfloor^\infty]\!]_{\text{cplx}} \subseteq [m+1, +\infty]$ et alors, par la définition même de foncteur dérivé à droite, on a

$$ [\![I\!R\boldsymbol{F}\left({}^{m+1}\rfloor \boldsymbol{M}^\bullet \lfloor^\infty\right)]\!]_{\text{cplx}} \subseteq [m+1, +\infty] \,. $$

En particulier, $I\!R^c\Xi(\boldsymbol{M}^\bullet)$ est un isomorphisme pour tout $c \leqslant m$, si et seulement si, il en est de même pour $I\!R^c\Xi({}^{-\infty}\rfloor \boldsymbol{M}^\bullet \lfloor^m)$. Par conséquent, il suffit de s'assurer que $I\!R\Xi({}^{-\infty}\rfloor \boldsymbol{M}^\bullet \lfloor^m)$ est un isomorphisme pour tout $m \in \mathbb{Z}$, pour que $I\!R\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}^\bullet)$ le soit également.

Or, lorsque $\boldsymbol{M}^\bullet \in D^+(\mathcal{A}_1)$, on a $[\![\boldsymbol{M}^\bullet]\!]_{\text{ch}} \subseteq [-N, \infty]$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$ assez grand et le triangle exact de complexes d'amplitude finie (*cf.* 3.2.6-(d)) :

$$ {}^{-N}\rfloor \boldsymbol{M}^\bullet \lfloor^{m-1} \longrightarrow {}^{-N}\rfloor \boldsymbol{M}^\bullet \lfloor^m \longrightarrow {}^{m}\rfloor \boldsymbol{M}^\bullet \lfloor^m = h^m \boldsymbol{M}^\bullet \longrightarrow $$

A partir de là, il est aisé de démontrer par induction sur la taille de l'amplitude des complexes, qu'il suffit que le morphisme $I\!R\Xi(h^c\boldsymbol{M}^\bullet) : I\!R\boldsymbol{F}(h^c\boldsymbol{M}^\bullet) \to I\!R\boldsymbol{G}(h^c\boldsymbol{M}^\bullet)$ soit un isomorphisme pour chaque $c \in \mathbb{Z}$, pour que $I\!R\Xi({}^{-\infty}\rfloor \boldsymbol{M}^\bullet \lfloor^m)$, et alors aussi $I\!R\Xi(\boldsymbol{M}^\bullet)$, le soient.

Dans le cas qui nous occupe, $\mathscr{F}^\bullet \in D^+_{\mathfrak{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{Y})$ et chaque $\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet$ est $\mathfrak{F}$-clc. Nous sommes donc réduits à prouver que $I\!R\Xi_t(\mathscr{F})$ est isomorphisme pour un faisceau $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{F}|_{\boldsymbol{S}}$ est localement constant sur toute strate $\boldsymbol{S}$ de $\mathfrak{F}_{\boldsymbol{Y}}$.

La démonstration est une induction sur le nombre de fermés non vides de la filtration fermée $\mathfrak{F}_{\boldsymbol{Y}}$. Lorsqu'il n'y a qu'un fermé, le faisceau $\mathscr{F}$ est localement constant et on a déjà démontré que $I\!R\Xi_t(\mathscr{F})$ est un isomorphisme. Dans le cas général, on a la partition $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{S}^0 \amalg \boldsymbol{Y}_1$ dont on déduit la partition $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U} \amalg \boldsymbol{F}$, avec $\boldsymbol{U} := f_t^{-1}(\boldsymbol{S}^0)$ et $\boldsymbol{F} := f_t^{-1}(\boldsymbol{Y}_1)$. On note $i_{\boldsymbol{U}} : \boldsymbol{U} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ et $i_{\boldsymbol{F}} : \boldsymbol{F} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ les inclusions respectivement ouverte et fermée d'où la suite exacte courte de foncteurs

$$ \mathbf{0} \longrightarrow i_{\boldsymbol{U}!}\, i_{\boldsymbol{U}}^{-1}(_) \longrightarrow (_) \longrightarrow i_{\boldsymbol{F}!}\, i_{\boldsymbol{F}}^{-1}(_) \longrightarrow \mathbf{0} $$

permettant de « *dévisser* » le morphisme $I\!R\Xi_t(\mathscr{F})$ suivant :

$$ \begin{array}{ccccc} i_{\boldsymbol{U}!}\, i_{\boldsymbol{U}}^{-1}\, I\!Rp_*\, h^{-1}\mathscr{F} & \longrightarrow & I\!Rp_* h^{-1}\mathscr{F} & \longrightarrow & i_{\boldsymbol{F}!}\, i_{\boldsymbol{F}}^{-1}\, I\!Rp_*\, h^{-1}\mathscr{F} \xrightarrow{[+1]} \\ {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & {\scriptstyle I\!R\Xi_t(\mathscr{F})}\downarrow & & {\scriptstyle \beta}\downarrow \\ i_{\boldsymbol{U}!}\, i_{\boldsymbol{U}}^{-1}\, f_t^{-1}\mathscr{F} & \longrightarrow & f_t^{-1}\mathscr{F} & \longrightarrow & i_{\boldsymbol{F}!}\, i_{\boldsymbol{F}}^{-1}\, f_t^{-1}\mathscr{F} \xrightarrow{[+1]} \end{array} \qquad (\diamond) $$

L'homotopie h étant filtrée par $\mathcal{F}$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{S}^0 & \xrightarrow[\subseteq]{i_{\boldsymbol{S}^0}} & \boldsymbol{Y} & \xleftarrow[\supseteq]{i_{\boldsymbol{Y}_1}} & \boldsymbol{Y}_1 \\
{\scriptstyle h_{\boldsymbol{U}}}\uparrow & \oplus & \uparrow{\scriptstyle h} & \oplus & \uparrow{\scriptstyle h_{\boldsymbol{F}}} \\
[0,1]\times\boldsymbol{U} & \xrightarrow[\subseteq]{i_{\boldsymbol{U}}} & [0,1]\times\boldsymbol{X} & \xleftarrow{i_{\boldsymbol{F}}} & [0,1]\times\boldsymbol{F} \\
{\scriptstyle p_{\boldsymbol{U}}}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle p} & \square & \downarrow{\scriptstyle p_{\boldsymbol{F}}} \\
\boldsymbol{U} & \xrightarrow[\subseteq]{i_{\boldsymbol{U}}} & \boldsymbol{X} & \xleftarrow[\supseteq]{i_{\boldsymbol{F}}} & \boldsymbol{F}
\end{array}$$

et, par changement de base sur les sous-diagrammes cartésiennes (p, $p_{\boldsymbol{U}}$ et $p_{\boldsymbol{F}}$, sont propres !),

$$\begin{cases} i_{\boldsymbol{U}}^{-1}\, I\!R p_*\; h^{-1} = I\!R p_{\boldsymbol{U}*}\; i_{\boldsymbol{U}}^{-1}\; h^{-1} = I\!R p_{\boldsymbol{U}*}\; h_{\boldsymbol{U}}^{-1} \\ i_{\boldsymbol{F}}^{-1}\, I\!R p_*\; h^{-1} = I\!R p_{\boldsymbol{F}*}\; i_{\boldsymbol{F}}^{-1}\; h^{-1} = I\!R p_{\boldsymbol{U}*}\; h_{\boldsymbol{F}}^{-1} \end{cases}$$

dont on déduit les identifications

$$\alpha = i_{\boldsymbol{U}!}\left(I\!R\Xi_t(\mathcal{F}|_{\boldsymbol{S}^0})\right) \quad \text{et} \quad \beta = i_{\boldsymbol{F}!}\left(\Xi_t(\mathcal{F}|_{\boldsymbol{Y}_1})\right),$$

qui montrent que α et β sont tous les deux des isomorphismes puisque $\mathcal{F}|_{\boldsymbol{S}^0}$ est localement constant, et par hypothèse inductive pour le second, puisque la filtration que $\mathcal{F}$ induit sur $\boldsymbol{Y}_1$ possède un fermé de moins. Ceci termine la démonstration du fait que $I\!R\Xi_t(\mathcal{F}^\bullet)$ est un isomorphisme en catégorie dérivée. La deuxième affirmation de (b) en découle.

c) On utilise (b) où h est une déformation de rétraction de $\boldsymbol{Y}$ sur $\boldsymbol{X}$ filtrée par $\mathcal{F}$. Comme h_1 est homotope à $\mathrm{id}_{\boldsymbol{Y}}$, le complexe $h_1^{-1}\mathcal{F}^\bullet$ est isomorphe en catégorie dérivée à $h_0^{-1}\mathcal{F}^\bullet = \mathcal{F}^\bullet$ et le morphisme naturel

$$I\!H^*(\boldsymbol{Y},\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow[\equiv]{} I\!H^*(\boldsymbol{X};h_1^{-1}\mathcal{F}^\bullet) \qquad (*)$$

est un isomorphisme. En factorisant h_1 à travers $\boldsymbol{X}$ par $h_1 = i_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{Y}} \circ h_1'$, on obtient la factorisation de $(*)$ en composée d'une injection et une surjection :

$$I\!H^*(\boldsymbol{Y},\mathcal{F}^\bullet) \xhookrightarrow{\nu_*} I\!H^*(\boldsymbol{X};\mathcal{F}^\bullet|_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow{\varepsilon_*} I\!H^*(\boldsymbol{Y};h_1^{-1}\mathcal{F}^\bullet)$$

Or, ε_* est injectif puisque $h_1^{-1}\mathcal{F}^\bullet = {h_1'}^{-1}(\mathcal{F}^\bullet|_{\boldsymbol{X}})$ et que ${h_1'}^{-1} \circ i_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{Y}} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{X}}$. Par conséquent, ν_* est bien bijectif et le théorème est démontré. ∎

3.3.6. Corollaire. *Soit $(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$ un espace topologiquement stratifié. Pour tout $c \in \mathbb{N}$, l'image du foncteur*

$$I\!Ri_{c*} : D^+_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{U}^c) \rightsquigarrow D(\boldsymbol{U}^{c+1})$$

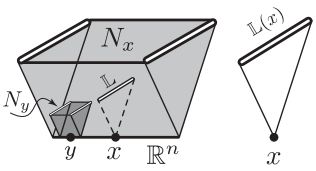
est contenue dans $D^+_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{U}^{c+1})$. En particulier,

$$I\!Ri^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{U}^0*}\left(D^+_{\mathrm{clc}}(\boldsymbol{U}^0)\right) \subseteq D^+_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X}).$$

Démonstration. Soit $\mathscr{F}^\bullet \in D^+_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{U}^c)$. On doit montrer que pour toute strate $\boldsymbol{S}$ de $\mathcal{F}$ contenue dans $\boldsymbol{U}^{c+1}$ et pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, le faisceau $\mathscr{H}^m\big(I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet\big)|_{\boldsymbol{S}}$ est localement constant.

Lorsque $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{U}^c$ on n'a rien à démontrer puisque $\mathscr{H}^m\big(I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet\big)|_{\boldsymbol{S}} = \mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{S}}$.

Lorsque $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{S}^{c+1}$, et puisque la question est de nature locale, on se ramène, grâce à la structure d'espace topologiquement stratifié de $\boldsymbol{U}^{c+1}$, au voisinage de chaque point $x \in \boldsymbol{S}$ de la forme $N_x \sim \mathbb{R}^n \times \mathrm{c}_x(\mathbb{L}(x))$, où $\mathbb{L}(x)$ est un espace topologiquement stratifié compact. La filtration de N_x induite par $\mathcal{F}$ correspond alors à la filtration donnée par les inclusions



$$\mathbb{R}^n \times \mathrm{c}_x(\mathbb{L}(x)_j) \supseteq \mathbb{R}^n \times \mathrm{c}_x(\mathbb{L}(x)_{j-1}) \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{R}^n \times \mathrm{c}_x(\mathbb{L}(x)_{-1}) = \mathbb{R}^n,$$

et $N'_x := \boldsymbol{U}^c \cap N_x$ correspond à $\mathbb{R}^n \times \mathrm{c}_x(\mathbb{L}(x)) \backslash \mathbb{R}^n \times \{x\} = \mathbb{R}^n \times]0,1[\times \mathbb{L}(x)$.

Notons $\mathbb{L} := \{0\} \times \{1/2\} \times \mathbb{L}(x)$. Il est parfaitement clair que chaque $y \in N_x \cap \boldsymbol{S}$ admet une base de voisinages N_y "homothétique" de N_x et tels que les ouverts $N'_y := \boldsymbol{U}^c \cap N(y)$ sont tous $\mathcal{F}$-homotopes à $\mathbb{L}$. Il s'ensuit, grâce au théorème d'homotopie 3.3, que pour tout $\mathscr{F}^\bullet \in D^+_{\mathcal{F}\text{-clc}}(N'_x)$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, les morphismes canoniques de restriction

$$I\!H^m(\mathbb{L}; \mathscr{F}^\bullet|_{\mathbb{L}}) \xleftarrow[\equiv]{} I\!H^m(N'_x; \mathscr{F}^\bullet) \xrightarrow[\equiv]{} I\!H^m(N'_y; \mathscr{F}^\bullet) = I\!H^m(N_y, I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet) = \big[\mathscr{H}^m I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet\big]_y$$

$$\alpha_{N_y} \quad (\equiv)$$

sont des isomorphismes. En particulier, on a une suite naturelle de morphismes dont la composée est bijective pour tout $y \in N_x \cap \boldsymbol{S}$:

$$I\!H^m(\mathbb{L}; \mathscr{F}^\bullet|_{\mathbb{L}}) \xrightarrow[\equiv]{\alpha_{N_x}} I\!H^m(N_x, I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet) \to \Gamma(N_x \cap \boldsymbol{S}; \mathscr{H}^m I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{S}}) \to \big[\mathscr{H}^m I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet\big]_y$$

$$\beta_{N_x}$$

Le morphisme β_{N_x} définit ainsi un morphisme de faisceaux clairement bijectif :

$$\underline{\underline{I\!H^m(\mathbb{L}; \mathscr{F}^\bullet|_{\mathbb{L}})}}_{N_x \cap \boldsymbol{S}} \longrightarrow \mathscr{H}^m I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet|_{N_x \cap \boldsymbol{S}}. \qquad \blacksquare$$

Il convient de relever le résultat suivant prouvé dans cette démonstration.

3.3.7. Corollaire. *On a* $i_c : \boldsymbol{U}^c \hookrightarrow \boldsymbol{U}^{c+1} \supseteq \boldsymbol{S}^{c+1} \ni x$ *et* $\mathscr{F}^\bullet \in D^+_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{U}^c)$.

a) *Il existe un isomorphisme canonique :*

$$\boxed{\big[\mathscr{H}^m I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet\big]_x \equiv I\!H^m\big(\mathbb{L}(x); \mathscr{F}^\bullet|_{\mathbb{L}(x)}\big)}$$

Le sens intrinsèque du complexe $\mathscr{F}^\bullet|_{\mathbb{L}(x)}$ *étant celui donné par le théorème d'homotopie* (3.3-(b)).

b) *Il existe une base de voisinages ouverts* N_x *de* x *dans* U^{c+1} *tels que*

$$\boxed{I\!H^*_{\mathrm{c}}(N_x; I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet) = 0}$$

Démonstration. L'assertion (a) est claire. Pour (b), on considère pour chaque voisinage $N_x \sim \mathbb{R}^n \times \mathrm{c}_x(\mathbb{L})$ de la démonstration, les sous-voisinages

$$N'_x \sim \overline{I\!B}^n \times \mathrm{c}'_x(\mathbb{L}) \subseteq \overline{N}'_x \sim \overline{I\!B}^n \times \overline{\mathrm{c}}'_x(\mathbb{L}),$$

où on a noté $\overline{I\!B}^n$ la boule fermée de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et rayon 1, et

$$\mathrm{c}'_s(\mathbb{L}) := \frac{\mathbb{L} \times [0,1/2[}{\mathbb{L} \times \{0\}} \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{c}}'_s(\mathbb{L}) := \frac{\mathbb{L} \times [0,1/2]}{\mathbb{L} \times \{0\}}.$$

On observera que $\overline{N}'_x$ est un voisinage compact de x réunion disjointe du voisinage ouvert N'_x et du compact $\boldsymbol{Z} := \big(\overline{I\!B}^n \times \mathbb{L} \times \{1/2\}\big)$. La suite d'hypercohomologie à supports compacts relative à cette décomposition et au complexe $I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet$ est :

$$\xrightarrow{[+1]} I\!H^m_c(N'_x; I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow I\!H^m\big(\overline{N}'_x; I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet\big) \xrightarrow{q_m} I\!H^m\big(\boldsymbol{Z}; \big(I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet\big)|_{\boldsymbol{Z}}\big) \xrightarrow{[+1]}$$

où q_m s'identifie au morphisme de restriction de $I\!H^m\big(\overline{N}'_x \cap \boldsymbol{U}^c; \mathscr{F}^\bullet\big)$ vers $I\!H^m\big(\boldsymbol{Z}; \mathscr{F}^\bullet\big)$, car $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{U}^c$. Le morphisme q_m est donc un isomorphisme en vertu théorème d'homotopie (3.3) puisque $\overline{N}'_x \cap \boldsymbol{U}^c$ est $\mathfrak{F}$-homotope à $\boldsymbol{Z}$. On en déduit l'annulation des termes $I\!H^m_c(N'_x; \mathscr{F}^\bullet)$ ce qui termine la preuve du corollaire. ∎

3.4 Dualité de Grothendieck-Verdier

3.4.1. Image directe à supports propres. Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ une application continue entre deux espaces localement compacts. Le foncteur « *image directe à supports propres* » $f_! : \mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{Y})$ associe à un faisceau $\mathscr{F}$ le faisceau :

$$U \subseteq \boldsymbol{Y} \rightsquigarrow f_!\mathscr{F}(U) := \Big\{\sigma \in \Gamma(U;\mathscr{F}) \;\Big|\; f|_{|\sigma|} : |\sigma| \to U \text{ est propre}\Big\};$$

c'est un foncteur additif et exact à gauche. Un faisceau c-mou est $f_!$-acyclique et comme le produit tensoriel par un c-mou est c-mou, le foncteur dérivé $I\!R f_!$ est entièrement déterminé par la donnée d'une résolution c-molle particulière du faisceau constant $\underline{k}_{\boldsymbol{X}}$. En effet, étant donnée une telle résolution $\mathscr{I}^\bullet$:

$$\mathbf{0} \to \underline{k}_{\boldsymbol{X}} \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{I}^0 \longrightarrow \mathscr{I}^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{I}^d \longrightarrow \cdots,$$

le complexe

$$\mathbf{0} \to \mathscr{F} = \mathscr{F} \otimes_{\underline{k}_{\boldsymbol{X}}} \underline{k}_{\boldsymbol{X}} \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{F} \otimes_{\underline{k}_{\boldsymbol{X}}} \mathscr{I}^0 \longrightarrow \mathscr{F} \otimes_{\underline{k}_{\boldsymbol{X}}} \mathscr{I}^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{F} \otimes_{\underline{k}_{\boldsymbol{X}}} \mathscr{I}^d \longrightarrow \cdots \qquad (*)$$

est exact pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{X})$ puisque tout faisceau de k-espaces vectoriels est nécessairement plat. La suite $(*)$ définit donc une résolution c-molle de $\mathscr{F}$ et

$$\boxed{I\!R f_!(\mathscr{F}) \equiv f_!(\mathscr{F} \otimes \mathscr{I}^\bullet)}$$

3.4.2. Remarque importante. Lorsque $\mathscr{F}^\bullet$ est un complexe de faisceaux (illimité), le terme de degré m de $\mathscr{F}^\bullet \otimes \mathscr{I}^\bullet$ est la somme directe $\bigoplus_{a+b=m} \mathscr{F}^a \otimes \mathscr{I}^b$ et c'est un faisceau c-mou ([12]). D'autre part, le foncteur $f_{\mathscr{I}^\bullet,!} : \mathscr{F}^\bullet \rightsquigarrow f_!(\mathscr{F}^\bullet \otimes \mathscr{I}^\bullet)$, étant additif de

[12] Conséquence du fait qu'une limite inductive filtrante de faisceaux c-mous est c-molle

$C_k^*(\boldsymbol{X})$ vers $C_k^*(\boldsymbol{Y})$, définit un foncteur entre les catégories de complexes à homotopie près $\mathscr{K}_k^*(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathscr{K}_k^*(\boldsymbol{Y})$, et induira un foncteur entre catégories dérivées s'il transforme un quasi-isomorphisme en quasi-isomorphisme, ou bien s'il transforme un complexe acyclique en un complexe acyclique (argument du cône d'un morphisme), ou bien encore si $f_!$ transforme un complexe acyclique c-mou en complexe acyclique ; ceci parce que $f_{\mathscr{I}^\bullet,!}$ est la composée du foncteur exact $_ \otimes \mathscr{I}^\bullet$, qui produit de complexes c-mous, par $f_!$. Le domaine de définition du foncteur dérivé $\mathbb{R}f_!$ dans $D_k(\boldsymbol{X})$ dépend de la réponse à cette question.

La théorie générale des foncteurs dérivés à droite prouve l'existence de $\mathbb{R}f_!$ sur $D_k^+(\boldsymbol{X})$ et montre même que $f_{\mathscr{I}^\bullet,!}$ en est une réalisation. Lorsque $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}) = d < \infty$ on peut aller beaucoup plus loin.

En effet, soit $(\mathscr{M}^\bullet; \partial_\bullet)$ un complexe (illimité) acyclique de faisceaux c-mous. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, le complexe $\tau_{\geqslant m-d}\, \mathscr{M}^\bullet$:

$$\mathbf{0} \to \mathscr{N} := \ker(\partial_{m-(d+1)}) \underset{\subseteq}{\hookrightarrow} \mathscr{M}^{m-(d+1)} \xrightarrow{\partial_{m-(d+1)}} \cdots\cdots \xrightarrow{\partial_{m-1}} \mathscr{M}^m \xrightarrow{\partial_m} \cdots$$

est une résolution c-molle de $\mathscr{N}$ et donc

$$h^m[f_!(\mathscr{M}^\bullet)] = \frac{\ker(f_!(\partial_m))}{\mathrm{im}(f_!(\partial_{m-1}))} \equiv \mathbb{R}^{d+1} f_!(\mathscr{N}) = 0$$

puisque, $\boldsymbol{X}$ étant de dimension cohomologique d, le faisceau constant $\underline{k}_{\boldsymbol{X}}$ admet une résolution c-molle de longueur d, et qu'alors le complexe $\mathbb{R}f_!(\mathscr{N}) = f_!(\mathscr{N} \otimes \mathscr{I}^\bullet)$ est nul en degrés supérieurs à d.

Par conséquent, lorsque $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}) < \infty$ (ce que nous supposons désormais), le foncteur $f_{\mathscr{I}^\bullet,!} : \mathscr{K}_k^*(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathscr{K}_k^*(\boldsymbol{Y})$ préserve l'acyclicité des complexes, qu'ils soient limités ou non, et induit un foncteur de $f_{\mathscr{I}^\bullet,!} : D_k(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow D_k(\boldsymbol{Y})$ sans restrictions.

Ce foncteur ne dépend pas de $\mathscr{I}^\bullet$. En effet, soit $\underline{k}_{\boldsymbol{X}} \to \mathscr{Q}^\bullet$ une autre résolution c-molle de $\underline{k}_{\boldsymbol{X}}$. En appliquant le foncteur $_ \otimes \mathscr{Q}^\bullet$ à la résolution $\mathscr{F}^\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{F}^\bullet \otimes \mathscr{I}^\bullet$ on a un quasi-isomorphisme de complexes c-mous $\mathscr{F}^\bullet \otimes \mathscr{Q}^\bullet \to \mathscr{F}^\bullet \otimes \mathscr{I}^\bullet \otimes \mathscr{Q}^\bullet$, dont on déduit le quasi-isomorphisme canonique

$$f_{\mathscr{Q}^\bullet,!}(\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow f_{\mathscr{I}^\bullet \otimes \mathscr{Q}^\bullet,!}(\mathscr{F}^\bullet)$$

puisque $f_!$ préserve les quasi-isomorphismes entre complexes c-mous. On a de même un quasi-isomorphisme canonique $f_{\mathscr{I}^\bullet,!}(\mathscr{F}^\bullet) \to f_{\mathscr{I}^\bullet \otimes \mathscr{Q}^\bullet,!}(\mathscr{F}^\bullet)$ et donc $f_{\mathscr{I}^\bullet,!} \equiv f_{\mathscr{Q}^\bullet,!}$. On note alors

$$\boxed{\mathbb{R}f_! : D_k(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow D_k(\boldsymbol{Y})}$$

le foncteur ainsi défini dont on retiendra la réalisation

$$\mathbb{R}f_!(\mathscr{F}^\bullet) = f_!(\mathscr{F}^\bullet \otimes_{\underline{k}_{\boldsymbol{X}}} \mathscr{I}^\bullet)$$

avec $\underline{k}_{\boldsymbol{X}} \to \mathscr{I}^\bullet$ une résolution c-molle de longueur égale à $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X})$.

3.4.3. Proposition. *Soient $\boldsymbol{X} \xrightarrow{f} \boldsymbol{Y} \xrightarrow{g} \boldsymbol{Z}$ deux application continues entre espaces localement compacts métrisables.*
a) *Si $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{X})$ est c-mou, $f_!\mathscr{F}$ est c-mou.*

b) *Le morphisme canonique* $\mathbb{R}(g\circ f)\to \mathbb{R}g_!\circ\mathbb{R}f_!$ *est un isomorphisme.*

Démonstration

a) Soit K une partie compacte de $\boldsymbol{Y}$ et σ une section de $f_!\mathscr{F}$ au-dessus de K. On sait que cette section est la restriction à K d'une section $\tau\in\Gamma(U;f_!\mathscr{F})$ pour un certain voisinage ouvert U de K. Notons $\tilde{U}:=f^{-1}U$. Par définition de $f_!$, on a $\tau\in\Gamma\big(\tilde{U};\mathscr{F}\big)$ telle que $f|_{|\tau|}:|\tau|\to U$ est propre. Comme $\mathscr{F}$ est c-mou et que $\tilde{K}:=f^{-1}K$ est une partie compacte de $\tilde{U}$ (propreté de $f|_{|\tau|}$), il existe un voisinage compact $\tilde{K}_\epsilon$ de $\tilde{K}$ dans U, et une section $\tilde{\tau}\in\Gamma(\tilde{U};\mathscr{F})$ telle que :

$$|\tilde{\tau}|\subseteq\tilde{K}_\epsilon\quad\text{et}\quad\tilde{\tau}|_{\tilde{K}}=\tau|_{\tilde{K}}$$

Il est clair maintenant que $\tilde{\tau}\in\Gamma(U;f_!\mathscr{F})$ est à support compact contenu dans U et qu'elle prolonge $\tau|_K$. La section $\tilde{\tau}$ se prolongeant par zéro à $\boldsymbol{Y}$ tout entier, ceci prouve que $f_!\mathscr{F}$ est c-mou.

b) Soit $\mathscr{F}\to\mathscr{I}^\bullet$ une résolution injective de $\mathscr{F}\in\mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{X})$. Comme tout injectif est c-mou, le complexe $f_!\mathscr{I}^\bullet$ est un complexe d'objets acycliques pour $g_!$ et le morphisme canonique $g_!(f_!\mathscr{I}^\bullet)\to\mathbb{R}g_!(f_!\mathscr{I}^\bullet)$ est un quasi-isomorphisme. Or le premier terme est précisément $\mathbb{R}(g\circ f)_!(\mathscr{F})$ et le second est $\mathbb{R}g_!(\mathbb{R}f_!\mathscr{F})$. ∎

3.4.4. Plongements localement fermés. Les premiers exemples du foncteur image directe à support propre apparaissent dans le cas des plongements localement fermés $i_{\boldsymbol{S}}:\boldsymbol{S}\hookrightarrow\boldsymbol{X}$, où le foncteur $i_{\boldsymbol{S}!}$ est exact et admet un adjoint à droite : le foncteur des « *sections à support dans* $\boldsymbol{S}$ ». On a un isomorphisme canonique naturel pour tous $\mathscr{F}\in\mathrm{Fais}(\boldsymbol{S})$ et $\mathscr{G}\in\mathrm{Fais}(\boldsymbol{X})$

$$\mathrm{Hom}(i_{\boldsymbol{S}!}\mathscr{F},\mathscr{G})\equiv\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{G})\,.$$

d'où un isomorphisme d'adjonction en catégories dérivées :

$$\mathrm{Hom}_{D_k(\boldsymbol{X})}\big(i_{\boldsymbol{S}!}\,_\,,\,_\,\big)\equiv\mathrm{Hom}_{D_k(\boldsymbol{S})}\big(\,_\,,\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}\,_\,\big)\,.$$

Dans le cas particulier où $\boldsymbol{S}$ est une partie ouverte $\boldsymbol{U}$ de $\boldsymbol{X}$, le foncteur de restriction $i_{\boldsymbol{U}}^{-1}$ est aussi adjoint à droite de $i_{\boldsymbol{U}!}$ et donc $i_{\boldsymbol{U}}^{-1}=\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{U}}$. Par conséquent

$$\Gamma(\boldsymbol{U},\,_\,)=\mathrm{Hom}\big(\underline{k}_{\boldsymbol{U}},i_{\boldsymbol{U}}^{-1}\,_\,\big)\equiv\mathrm{Hom}\big(i_{\boldsymbol{U}!}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}}),\,_\,\big)\,,$$

où le faisceau $i_{\boldsymbol{U}!}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}})$, appelé le « *prolongement par zéro de* $\underline{k}_{\boldsymbol{U}}$ », est traditionnellement noté '$\underline{k}_{\boldsymbol{U}}$' malgré l'ambiguïté manifeste de cette notation.

La dernière équivalence induit une équivalence de foncteurs définis sur $C^*(\boldsymbol{X})$:

$$\Gamma(\boldsymbol{U},\mathscr{F}^\bullet)=\mathrm{Hom}^\bullet\big(\underline{k}_{\boldsymbol{U}},i_{\boldsymbol{U}}^{-1}(\mathscr{F}^\bullet)\big)\equiv\mathrm{Hom}^\bullet\big(i_{\boldsymbol{U}!}(\underline{k}_{\boldsymbol{U}}),\mathscr{F}^\bullet\big)$$

dont on déduit, sur $D_k^+(\boldsymbol{X})$:

$$\boxed{\mathbb{R}\Gamma(\boldsymbol{U},\,_\,)\equiv\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet(\underline{k}_{\boldsymbol{U}};\,_\,)\equiv\mathbb{R}\Gamma\left(\boldsymbol{X};\mathbb{R}\mathscr{H}\!\mathit{om}^\bullet(\underline{k}_{\boldsymbol{U}};\,_\,)\right)}$$

3.4.5. Remarque. Nous nous sommes limités à formuler l'équivalence sur D^+ et non pas sur D. En fait, sous des hypothèses de finitude de $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X})$, les foncteur $I\!R\Gamma(\boldsymbol{U},_)$ et $I\!R\mathrm{Hom}^\bullet(\underline{k}_{\boldsymbol{X}},_)$ sont bien définis sur la catégorie $D_k(\boldsymbol{X})$ tout entière ([13]) et l'équivalence en question est toujours vérifiée. Comme nous n'aurons pas besoin de cette généralité, les foncteurs $I\!R\mathrm{Hom}^\bullet(_,_)$ et $I\!R\mathcal{H}om^\bullet(_,_)$ seront considérés définis uniquement sur les sous-catégories $C^-\times C^+$ et $C^*\times C^b$ dans lesquelles il est facile de vérifier l'acyclicité de $\mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet,\mathscr{I}^\bullet)$ lorsque $\mathscr{F}^\bullet$ ou $\mathscr{I}^\bullet$ (chaque $\mathscr{I}^m$ étant injectif !) est acyclique. En effet, $\mathrm{Hom}^\bullet$ est alors *le complexe simple associé au bicomplexe* $\mathrm{Hom}((_)^\bullet,(_)^\bullet)$ (anti-diagonales finies !) et il sera acyclique lorsque toutes les lignes ou toutes les colonnes du bicomplexe sont exactes.

Pour tous $\mathscr{F}^\bullet,\mathscr{G}^\bullet\in C^-\times C^+$ (resp. $\mathscr{F}^\bullet,\mathscr{G}^\bullet\in C^*\times C^b$), on a donc

$$I\!R\mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet,\mathscr{G}^\bullet)\underset{\epsilon}{\equiv}\mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet,\mathscr{I}^\bullet)$$

où $\epsilon:\mathscr{G}^\bullet\to\mathscr{I}^\bullet$ est une résolution injective avec $\mathscr{I}^\bullet\in C^+$ (resp. $\mathscr{I}^\bullet\in C^b$ ([14]))

3.4.6. Exercices. Pour tout ouvert $\boldsymbol{U}\subseteq\boldsymbol{X}$ et tout faisceau $\mathscr{F}$, on note $\mathscr{F}_{\boldsymbol{U}}:=i_{\boldsymbol{U}!}(\mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}})$. L'application $f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ est continue.

a) Montrer que $\underline{k}_{\boldsymbol{U}}$ est un faisceau d'anneaux (pas nécessairement avec identité multiplicative). Montrer que $\mathscr{F}_{\boldsymbol{U}}$ est muni d'une structure naturelle de $\underline{k}_{\boldsymbol{U}}$-module.

b) Montre l'égalité $f^{-1}\underline{k}_{\boldsymbol{U}}=\underline{k}_{f^{-1}(\boldsymbol{U})}$.

c) Étant données deux ouvert $\boldsymbol{V}\subseteq\boldsymbol{U}$ le morphisme $i_{\boldsymbol{V}!}i_{\boldsymbol{V}}^{-1}\to\mathrm{id}$ donne une injection canonique $\mathscr{F}_{\boldsymbol{V}}\to\mathscr{F}_{\boldsymbol{U}}$. En particulier, pour tous ouverts $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$ on a deux injections canoniques

$$\mathscr{F}_{\boldsymbol{U}_1\cap\boldsymbol{U}_2}\longrightarrow\mathscr{F}_{\boldsymbol{U}_1}\otimes\underline{k}_{\boldsymbol{U}_1}\longleftarrow\mathscr{F}_{\boldsymbol{U}_1}\otimes\underline{k}_{\boldsymbol{U}_2}.$$

Montrer que leurs images coïncident et que $\mathscr{F}_{\boldsymbol{U}_1\cap\boldsymbol{U}_2}\equiv\mathscr{F}_{\boldsymbol{U}_1}\otimes\underline{k}_{\boldsymbol{U}_2}$

d) Comme dans (c), on a des injections :

$$f_!\big(\mathscr{F}_{f^{-1}(\boldsymbol{U})}\big)\longrightarrow f_!\mathscr{F}\longleftarrow\big(f_!\mathscr{F}\big)\otimes\underline{k}_{\boldsymbol{U}}$$

Montrer que leurs images coïncident et qu'on a un isomorphisme canonique

$$f_!(\mathscr{F}\otimes f^{-1}\underline{k}_{\boldsymbol{U}})\equiv\big(f_!\mathscr{F}\big)\otimes\underline{k}_{\boldsymbol{U}}$$

e) Prouver que tout faisceau est le quotient d'une somme directe infinie de faisceaux de la forme $\underline{k}_{\boldsymbol{U}}$. En déduire que pour tout $\mathscr{Q}\in\mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{X})$ il existe une présentation (suite exacte à droite) de la forme :

$$\bigoplus_\beta\underline{k}_{\boldsymbol{U}_\beta}\longrightarrow\bigoplus_\alpha\underline{k}_{\boldsymbol{U}_\alpha}\twoheadrightarrow\mathscr{Q}\to\mathbf{0}$$

[13] *Cf.* [BoAl] §V 5.18 p. 112.

[14] Possible sous l'hypothèse $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X})<\infty$, *cf.* [BoAl] §V 1.18 p. 58.

f) D'après (e), pour tous $\mathscr{M},\mathscr{Q}$ il existe $\mathscr{Q}'$ et une suite exacte courte :

$$\mathbf{0} \to \mathscr{M} \otimes \mathscr{Q}' \longrightarrow \bigoplus\nolimits_{\alpha} \mathscr{M}_{U_\alpha} \longrightarrow\!\!\!\!\to \mathscr{M} \otimes \mathscr{Q} \to \mathbf{0}$$

En supposant $\mathscr{M}$ c-mou, montrer que le terme centrale de cette suite est c-mou, puis que $H^1(\boldsymbol{U},\mathscr{M}\otimes\mathscr{Q}) = H^2(\boldsymbol{U};\mathscr{M}\otimes\mathscr{Q}')$ pour tout ouvert $\boldsymbol{U}\subseteq\boldsymbol{X}$.

En déduire que si $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X})<\infty$, le produit tensoriel $\mathscr{N}\otimes\mathscr{M}$ est c-mou pour tout $\mathscr{N}\in\mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{X})$ pour peu que $\mathscr{M}$ le soit.

Indication. Utiliser le critère qui affirme qu'un faisceau $\mathscr{N}$ est c-mou, si et seulement si, $H^1_c(\boldsymbol{U},\mathscr{N})=0$, pour tout ouvert $\boldsymbol{U}\subseteq\boldsymbol{X}$.

g) Généraliser l'isomorphisme de (d) lorsque $\mathscr{M}$ est c-mou en un isomorphisme

$$f_!(\mathscr{M}\otimes f^{-1}\mathscr{G}) \equiv \big(f_!\mathscr{M}\big)\otimes\mathscr{G} \qquad \text{pour tout } \mathscr{G}\in\mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{X}).$$

Indication. Sous l'hypothèse $\mathscr{M}$ est c-mou, le foncteur $f_!\big(\mathscr{M}\otimes f^{-1}(\,_\,)\big)$ est exact d'après (f). Appliquer alors (d) à une présentation (e) de $\mathscr{G}$.

h) En conclure à l'existence d'un isomorphisme naturel pour tous $\mathscr{F}^\bullet,\mathscr{G}^\bullet\in D^+_k(\boldsymbol{X})$:

$$\boxed{\mathbb{R}f_!(\mathscr{F}^\bullet\otimes f^{-1}\mathscr{G}^\bullet)\equiv\big(\mathbb{R}f_!\mathscr{F}^\bullet\big)\otimes\mathscr{G}^\bullet}$$

3.4.7. Adjonction et dualité de Grothendieck-Verdier. Un exemple fondamental du foncteur d'image directe à supports propres est $c_{\boldsymbol{X}!}$ où $c_{\boldsymbol{X}}:\boldsymbol{X}\to\mathrm{pt}$ est l'application constante. Dans ce cas, $c_{\boldsymbol{X}!}$ est le foncteur de sections à support compact $\Gamma_{\!c}(\boldsymbol{X},\,_\,)$ et alors $\mathbb{R}^m c_{\boldsymbol{X}!}\equiv H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X},\,_\,)$.

Lorsque $\boldsymbol{X}$ est une variété différentiable (réelle) de dimension d, la dualité de Poincaré exprime l'existence d'un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_k\big(H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};k),k\big)\equiv H^{d-*}\big(\boldsymbol{X};\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}(k)\big)$$

que nous pouvons réécrire en termes de foncteurs dérivés comme une équivalence de la forme :

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet\big(\mathbb{R}c_{\boldsymbol{X}!}(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}),k\big)\equiv\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet\big(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}},\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}[d]\big)\,. \qquad (\diamond)$$

À ce sujet, l'une des contributions majeures de Grothendieck a été de réaliser que l'équivalence $(\diamond)$ était le reflet l'existence d'un adjoint à droite pour le foncteur $c_{\boldsymbol{X}!}$, non pas dans la catégorie des faisceaux, ce qui est généralement impossible, mais en catégories dérivées. Intéressé à l'époque par les conjectures de Weil et travaillant dans la cohomologie étale des schémas, Grothendieck démontre l'existence de l'adjoint à droite de $\mathbb{R}f_!$ lorsque f est un plongement fermé ou un morphisme lisse (suffisant dans la pratique), et demande à J.-L. Verdier d'étudier l'analogue dans le contexte des espaces localement compacts. Dans sa thèse, Verdier définit, pour *toute* application continue $f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$, le foncteur « *image inverse exceptionnelle* » :

$$f^!: D^+_k(\boldsymbol{Y})\rightsquigarrow D^+_k(\boldsymbol{X})$$

et démontre l'existence d'un isomorphisme canonique :

$$\boxed{\mathbb{R}f_*\,\mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet\big(\mathscr{F}^\bullet, f^!\mathscr{G}^\bullet\big) \equiv \mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet\big(\mathbb{R}f_!\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet\big)} \qquad (\diamond\diamond)$$

naturel par rapport à $\mathscr{F}^\bullet \in D_k^-(\boldsymbol{X})$ et $\mathscr{G}^\bullet \in D_k^+(\boldsymbol{X})$, auquel on réfère souvent par « *dualité de Grothendieck-Verdier* ».

En appliquant $\mathbb{R}\Gamma(\boldsymbol{Y}, _\,)$ à chaque membre de $(\diamond\diamond)$, on obtient la forme globale

$$\boxed{\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet\big(\mathscr{F}^\bullet, f^!\mathscr{G}^\bullet\big) \equiv \mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet\big(\mathbb{R}f_!\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet\big)} \qquad (\star\star)$$

dont la cohomologie en degré 0 donne l'adjonction des foncteurs $(\mathbb{R}f_!, f^!)$

$$\mathrm{Hom}_{D(\boldsymbol{X})}\big(\mathscr{F}^\bullet, f^!\mathscr{G}^\bullet\big) \equiv \mathrm{Hom}_{D(\boldsymbol{Y})}\big(\mathbb{R}f_!\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet\big)$$

3.4.8. Exercice. Démontrer à l'aide de la formule de dualité $(\diamond\diamond)$ et de l'isomorphisme 3.4.6-(h) l'existence d'un isomorphisme canonique :

$$\boxed{f^!\,\mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \equiv \mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet(f^{-1}\mathscr{F}^\bullet, f^!\mathscr{G}^\bullet)} \qquad (\dagger\dagger)$$

3.4.9. Image inverse exceptionnelle. On remarquera que la simple égalité *formelle* $(\star\star)$ renseigne par elle-même de la définition de $f^!$. En effet, si cette égalité est vérifiée, on doit avoir pour chaque ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ et tout $\mathscr{G}^\bullet \in D_k^+(\boldsymbol{Y})$ (*cf.* 3.4.4) :

$$\Gamma(\boldsymbol{U}; f^!\mathscr{G}^\bullet) = \mathrm{Hom}^\bullet\big(\underline{k}_{\boldsymbol{U}}, f^!\mathscr{G}^\bullet\big) \equiv \mathrm{Hom}^\bullet\big(\mathbb{R}f_!(\underline{k}_{\boldsymbol{U}}); \mathscr{G}^\bullet\big)\,,$$

pour peu que $\mathscr{G}^\bullet$ et $f^!\mathscr{G}^\bullet$ soient tous les deux des complexes de faisceaux injectifs. Par conséquent, pour toute résolution c-molle $\underline{k}_{\boldsymbol{X}} \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{I}^\bullet$de longueur $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X})$, on a

$$\Gamma(\boldsymbol{U}; f^!\mathscr{G}^\bullet) \equiv \mathrm{Hom}^\bullet\big(f_!(\underline{k}_{\boldsymbol{U}} \otimes \mathscr{I}^\bullet), \mathscr{G}^\bullet\big) = \mathrm{Hom}^\bullet\big(f_!(\mathscr{I}^\bullet_{\boldsymbol{U}}), \mathscr{G}^\bullet\big)\,.$$

Réciproquement, si on prend cette dernière équivalence comme définition d'un complexe de préfaisceaux sur $\boldsymbol{X}$, *i.e.*, si on pose pour tout $\mathscr{G}^\bullet \in D_k^+(\boldsymbol{Y})$:

$$f^!_{\mathscr{I}^\bullet}\mathscr{G}^\bullet : \boldsymbol{U} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}^\bullet\big(f_!(\mathscr{I}^\bullet_{\boldsymbol{U}}), \mathscr{G}^\bullet\big)\,, \qquad (\ddagger)$$

on obtient un complexe de *faisceaux* qui est injectif lorsque $\mathscr{G}^\bullet$ l'est ([15]). Le foncteur additif $f^!_{\mathscr{I}^\bullet} : C^+(\boldsymbol{Y}) \rightsquigarrow C^+(\boldsymbol{X})$ ainsi défini vérifie $f^!_{\mathscr{I}^\bullet}\big(C^b(\boldsymbol{Y})\big) \subseteq C^b(\boldsymbol{X})$ et induit un foncteur de $D_k^+(\boldsymbol{Y})$ vers $D_k^+(\boldsymbol{X})$ (*cf.* 3.4.5) indépendant de la résolution (finie) $\mathscr{I}^\bullet$, autrement dit, si $\mathscr{K}^\bullet$ est une autre résolution c-molle de $\underline{k}_{\boldsymbol{X}}$ les foncteurs $f^!_{\mathscr{I}^\bullet}$ et $f^!_{\mathscr{K}^\bullet}$ sont canoniquement isomorphes en catégorie dérivée (*loc.cit.*). Ce foncteur canonique, noté :

$$f^! : D_k^+(\boldsymbol{Y}) \rightsquigarrow D_k^+(\boldsymbol{X})\,,$$

est « *l'image inverse exceptionnelle* ». On a :

[15] *Cf.* [BoAl] §7.14 p. 129

$$f^!\big(D^b_k(\boldsymbol{Y})\big) \subseteq D^b_k(\boldsymbol{X})\,.$$

Les ingrédients de la formule de dualité de Grothendieck-Verdier étant maintenant explicites, la validité de l'équivalence naturelle ($\diamond\diamond$) dans le cas général se réduit à une vérification (*loc.cit.*).

3.4.10. Remarque. Dans le cas d'une composition $\boldsymbol{X} \xrightarrow{f} \boldsymbol{Y} \xrightarrow{g} \boldsymbol{Z}$ d'applications continues, on a un isomorphisme canonique $g^! \circ f^! \equiv (g \circ f)^!$, obtenu par adjonction de l'isomorphisme $I\!R(g \circ f)_! \equiv I\!R g_! \circ I\!R f_!$ (3.4.3-(b)).

3.4.11. Complexe dualisant. En appliquant la formule de dualité de Grothendieck-Verdier (3.4-($\diamond\diamond$)) à $f = c_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \to \mathrm{pt}$, on a $c^!_{\boldsymbol{X}}\, k \in D^b(\boldsymbol{X})$ et

$$\mathrm{Hom}^\bullet_k(I\!R c_{\boldsymbol{X}!}\mathscr{F}^\bullet, k) \equiv I\!R\mathrm{Hom}^\bullet\big(\mathscr{F}^\bullet, c^!_{\boldsymbol{X}}\, k\big) \equiv I\!R\Gamma\big(\boldsymbol{X}; I\!R\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, c^!_{\boldsymbol{X}}\, k)\big) \qquad (*)$$

d'où

$$\mathrm{Hom}_k\big(I\!H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet), k\big) \equiv I\!H^{-*}\big(\boldsymbol{X}; I\!R\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, c^!_{\boldsymbol{X}}\, k)\big)$$

qui montre que : *le dual de l'hypercohomologie à support compact d'un complexe s'identifie à l'hypercohomologie d'un autre complexe : son dual de Verdier.*

3.4.12. Définitions

a) Pour tout $\mathscr{F}^\bullet \in D_k(\boldsymbol{X})$ on appelle « *dual de Verdier de* $\mathscr{F}^\bullet$ » l'objet de $D_k(\boldsymbol{X})$:

$$\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X},k}\mathscr{F}^\bullet := I\!R\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, c^!_{\boldsymbol{X}}\, k)\,, \qquad (\diamond)$$

On note plutôt $\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}$ pour k sous-entendu. La première équivalence de ($*$) s'écrit alors : $\mathfrak{D}^\bullet_{\mathrm{pt}} \circ I\!R c_{\boldsymbol{X}!} = I\!R c_{\boldsymbol{X}*} \circ \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}$.

b) Le « (*complexe*) *dualisant de* $\boldsymbol{X}$ » est le dual de Verdier du faisceau constant :

$$I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X},k} := \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}(\underline{k}_{\boldsymbol{X}}) = c^!_{\boldsymbol{X}}\, k\,.$$

On a, par construction,

$$\boxed{[\![I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X},k}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [-\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}), 0]}$$

On note plutôt $I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X}}$ pour k sous-entendu, p. e. : $\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet := I\!R\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X}})$.

La proposition suivante donne une liste de conséquences *formelles* de la dualité de Grothendieck-Verdier.

3.4.13. Proposition. *On suppose* $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}) < \infty$ *et* $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{Y}) < \infty$.

a) *Le foncteur* $\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} : D_k(\boldsymbol{X}) \to D_k(\boldsymbol{X})$ *est additif, contravariant et exact. De plus, il vérifie* $\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}(D^b_k(\boldsymbol{X})) \subseteq D^b_k(\boldsymbol{X})$, *et est autoadjoint sur* $D^b_k(\boldsymbol{X})$, i.e. *:*

$$I\!R\mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{G}^\bullet) \equiv I\!R\mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{G}^\bullet, \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)$$

pour tous $\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet \in D^b_k(\boldsymbol{X})$. *En particulier, l'adjoint de* $\mathrm{id} : \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \to \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}$ *est un morphisme canonique de foncteurs sur* $D^b_k(\boldsymbol{X})$ *:*

$$\mathrm{id} \rightsquigarrow \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \circ \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\,.$$

b) *Le foncteur (contravariant)* $\mathrm{Hom}_k\big(I\!H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};_),k\big) : D_k(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Vect}(k)$ *est représentable quel que soit* $m \in \mathbb{Z}$. *Plus précisément :*

$$\mathrm{Hom}_k\big(I\!H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};_),k\big) \equiv \mathrm{Hom}_{D_k(\boldsymbol{X})}\big(_\,, I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X}}[-m]\big)$$

c) *Pour toute application continue* $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, *on a :*

$$\begin{cases} \text{i)} & I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X}} \equiv f^!\, I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X}} \\ \text{ii)} & \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}} \circ I\!R f_! \equiv I\!R f_* \circ \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} : D^b_k(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow D^b_k(\boldsymbol{Y}) \\ \text{iii)} & \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \circ f^{-1} \equiv f^! \circ \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}} \quad : D^b_k(\boldsymbol{Y}) \rightsquigarrow D^b_k(\boldsymbol{X}) \end{cases}$$

En particulier, la dualité de Grothendieck-Verdier commute à la restriction à un ouvert et à l'image directe d'un fermé.

d) *Soit* $\boldsymbol{U}$ *une parte ouverte de* $\boldsymbol{X}$ *de complémentaire* $\boldsymbol{F} := \boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{U}$. *Le foncteur* $\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}$ *transforme le triangle fondamental :*

$$i_{\boldsymbol{U}!}\, i_{\boldsymbol{U}}^{-1}\, \mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathscr{F}^\bullet \longrightarrow i_{\boldsymbol{F}!}\, i_{\boldsymbol{F}}^{-1}\, \mathscr{F}^\bullet \xrightarrow{[+1]}$$

en un triangle exact

$$\begin{array}{ccccccc} i_{\boldsymbol{F}!}\, \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{F}}\big(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{F}}\big) & \longrightarrow & \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet & \longrightarrow & I\!R i_{\boldsymbol{U}*}\, \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{U}}\big(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{U}}\big) & \xrightarrow{[+1]} \\ \| & & \| & & \| & \\ i_{\boldsymbol{F}!}\, i^!_{\boldsymbol{F}}\, \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet & \longrightarrow & \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet & \longrightarrow & I\!R i_{\boldsymbol{U}*}\, i_{\boldsymbol{U}}^{-1}\, \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet & \xrightarrow{[+1]} \end{array}$$

naturellement isomorphe au deuxième triangle fondamental pour $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U} \amalg \boldsymbol{F}$, *soit*

$$\boxed{\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\big(\Delta(\boldsymbol{U},\boldsymbol{X},\boldsymbol{F};_)\big) \equiv \Delta\big(\boldsymbol{F},\boldsymbol{X},\boldsymbol{U};\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\,_\big)}$$

Démonstration. Les endroits où la dualité de Grothendieck-Verdier (3.4) est utilisée sont indiqués par le signe 'GV'.

a) Découle des identifications naturelles

$$I\!R\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{G}^\bullet) = I\!R\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, I\!R\mathscr{H}om(\mathscr{G}^\bullet, I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X}})) \equiv I\!R\mathscr{H}om(\mathscr{F}^\bullet \otimes_{\underline{k}_{\boldsymbol{X}}} \mathscr{G}^\bullet, I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X}})$$

où le rôles de $\mathscr{F}^\bullet$ et $\mathscr{G}^\bullet$ peuvent être interchangés.

b)
$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}\big(H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};_),k\big) &= h^{-m}\big[\mathrm{Hom}^\bullet\big(I\!R\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};_),k\big)\big] \\ &\overset{\mathrm{GV}}{=\!=\!=} h^{-m}\big[I\!R\mathrm{Hom}^\bullet\big(_\,, I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X}}\big)\big] \\ &\| \\ &h^0\big[I\!R\mathrm{Hom}^\bullet\big(_\,, I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X}}[-m]\big)\big] = \mathrm{Hom}_{D(\boldsymbol{X})}\big(_\,, I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X}}[-m]\big) \end{aligned}$$

c) (i) $f^!\, I\!D^\bullet_{\boldsymbol{Y}} = f^!\, c^!_{\boldsymbol{Y}}\, k = c^!_{\boldsymbol{X}} k$, d'après 3.4.10.

(ii)
$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}} \circ I\!R f_!(_) &\underset{1}{=} I\!R\mathscr{H}om^\bullet(I\!R f_!(_), I\!D^\bullet_{\boldsymbol{Y}}) \underset{\mathrm{GV}}{\equiv} I\!R f_*\, I\!R\mathscr{H}om^\bullet((_), f^!\, I\!D^\bullet_{\boldsymbol{Y}}) \\ &\underset{2}{\equiv} I\!R f_*\, I\!R\mathscr{H}om^\bullet((_), I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X}}) \underset{3}{=} I\!R f_*\, \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}(_) \end{aligned}$$

$\underset{1}{=}, \underset{3}{=}$ par définition, $\underset{2}{\equiv}$ d'après (i).

(iii) Par adjonctions, d'après (ii) et (a).

d) Exercice. ∎

3.4.14. Remarque. Le morphisme de foncteurs $\mathrm{id} \to \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \circ \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}$ de 3.4.13-(a) peut être défini plus généralement sur tout $D_k(\boldsymbol{X})$, mais nous n'avons pas besoin de cette généralité (*cf.* [BoAl] §V 8.9 p. 138).

3.5 Dualité de Poincaré sur les variétés topologiques

On rappelle qu'une « *variété topologique de dimension d* » est un espace topologique métrisable, dénombrable à l'infini et tel que tout point admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^d$. Une variété topologique de dimension d est de dimension cohomologique égale à d. Une variété topologique peut ne pas admettre de structure différentielle.

3.5.1. Faisceau d'orientations. Sur une variété topologique $\boldsymbol{X}$ de dimension d, la correspondance :

$$\boldsymbol{U} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^d_c(\boldsymbol{U};\mathbb{Z});\mathbb{Z})$$

défini un préfaisceau sur $\boldsymbol{X}$ localement constant de fibres $H^{d-1}(\mathbb{S}^{d-1};\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, puisque tout point admet une base de voisinages homéomorphes à $\mathbb{R}^d$. Le faisceau engendré par ce préfaisceau, noté $\underline{\mathrm{Or}}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$, est « *le faisceau d'orientations de* $\boldsymbol{X}$ » ; c'est un $\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}}$-module localement libre de rang 1. Plus généralement, le faisceau $\underline{\mathrm{Or}}_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{A})$ construit par ce procédé en remplaçant $\mathbb{Z}$ par un anneau $\mathscr{A}$ est « *le faisceau des* $\mathscr{A}$*-orientations de* $\boldsymbol{X}$ ». Il existe un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Or}}_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{A}) \equiv \underline{\mathrm{Or}}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z}) \otimes_{\underline{k}_{\boldsymbol{X}}} \underline{\underline{\mathscr{A}}}_{\boldsymbol{X}}\,.$$

On dit que $\boldsymbol{X}$ est « *orientable sur* $\mathscr{A}$ » lorsque $\underline{\mathrm{Or}}_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{A})$ est isomorphe au faisceau constant $\underline{\underline{\mathscr{A}}}_{\boldsymbol{X}}$. Dans ce cas, « *choisir une orientation* » signifie fixer un isomorphisme particulier $\underline{\mathrm{Or}}_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{A}) \equiv \underline{\underline{\mathscr{A}}}_{\boldsymbol{X}}$.

3.5.2. Exercice. Soit k un corps. Montrer que sur un espace topologique connexe, un faisceau localement constant de fibres isomorphes à k et isomorphe à $\underline{k}_{\boldsymbol{X}}$, si et seulement si, il admet une section globale non nulle.

D'un point de vue heuristique, orienter une variété topologique sur $\mathbb{Z}$ revient à fixer, de manière cohérente sur $\boldsymbol{X}$, un générateur de $H^{d-1}(\mathbb{S}^{d-1};\mathbb{Z})$ pour chaque sphère assez petite ; chaque générateur correspondant alors à l'une des deux orientations possibles de la sphère.

Exemples. Comme le faisceau $\underline{\mathrm{Or}}_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{A})$ est localement constant sur $\boldsymbol{X}$, il correspond à une famille de représentations $\{\rho_i : \pi_1(\boldsymbol{X}_i) \to \mathrm{Iso}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A})\}$, où $\{\boldsymbol{X}_i\}$ est la famille des composantes connexes de $\boldsymbol{X}$. Par conséquent :

- Si $\boldsymbol{X}$ est connexe et simplement connexe, elle est toujours orientable.
- Si $\mathscr{A}$ est le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$, on a $\mathrm{Iso}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2) = \mathrm{id}$ et les représentations ρ_i sont triviales. Toute variété topologique est donc orientable sur $\mathbb{F}_2$.

3.5.3. Le cas des variétés différentielles. Lorsque $\boldsymbol{X}$ est une variété différentielle connexe de dimension d, le complexe des faisceaux des formes différentielles réelles (complexe de de Rham) $\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}}$ est une résolution du faisceau constant $\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\boldsymbol{X}}$ (lemme de Poincaré) où chaque faisceau $\underline{\underline{\Omega}}^r_{\boldsymbol{X}}$ est c-mou puisque $\boldsymbol{X}$ admet des partitions de l'unité $\mathscr{C}^\infty$. Il s'ensuit que $I\!R\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U};\underline{k}_{\mathbb{R}}) = \Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U};\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}}) = \Omega^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U})$ et la correspondance

$$\boldsymbol{U} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U});\mathbb{R})$$

est un complexe de faisceaux (!) injectifs d'amplitude $[-d,0]$ et d'amplitude cohomologique concentrée en $[-d]$:

$$\mathbf{0} \to \mathscr{I}^{-d} \xrightarrow{\delta_{-d+1}} \mathscr{I}^{-d+1} \xrightarrow{\delta_{-d+2}} \cdots\cdots \xrightarrow{\delta_{-1}} \mathscr{I}^{-1} \xrightarrow{\delta_0} \mathscr{I}^0 \to \mathbf{0}$$

Comme le préfaisceau $\ker(\delta_{-d+1})$ est toujours un faisceau et qu'il s'agit précisément de $\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{R})$, les sections de $\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{R})$ au-dessus de un ouvert $\boldsymbol{U}$ sont données par

$$\Gamma(\boldsymbol{U};\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{R})) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H^d_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{U}),\mathbb{R}) \qquad (\textstyle\int_{\boldsymbol{U}})$$

et, en particulier :

$$\Gamma(\boldsymbol{X};\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{R})) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H^d_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{X}),\mathbb{R})$$

dont on déduit les équivalences

$$\boldsymbol{X} \text{ est orientable} \iff \dim_k(H^d_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{X})) = 1 \iff \dim_k(H^d_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{X})) \neq 0$$

Enfin, les égalités $(\int_{\boldsymbol{U}})$ montrent aussi que choisir une orientation revient à se donner une famille d'« *intégrales* »

$$\int_{\boldsymbol{U}} : H^d_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{U}) \to \mathbb{R}$$

"compatibles" en ce sens que si $\mu \in H^d_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{V})$ et que $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{U}$, on a $\int_{\boldsymbol{V}} \mu = \int_{\boldsymbol{U}} \mu$. À partir de là, il est aisé de retrouver d'autres notions d'orientabilité pour les variétés différentielles habituellement introduites à l'occasion de l'intégration.

3.5.4. Le cas des variétés topologiques. Tout ce que nous venons de dire pour les variétés différentielles est vrai pour les variétés topologiques moyennant les changements suivants :

- $\mathbb{R}$ est remplacé par un corps k.
- $\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}}$ est remplacé par une résolution c-molle de $\underline{k}_{\boldsymbol{X}}$ d'amplitude $[0,d]$.
- $H_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{U})$ est remplacé par $H_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U};\underline{k}_{\boldsymbol{U}})$.

3.5.5. Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ une variété topologique.*

a) $\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X},k}\underline{k}_{\boldsymbol{X}} \equiv \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}(k)[\dim(\boldsymbol{X})]$.

b) $\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X},k}\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}(k) \equiv \underline{k}_{\boldsymbol{X}}[\dim(\boldsymbol{X})]$.

Démonstration. L'assertion (a) se démontre de manière tout à fait analogue au cas différentiable (*cf.* 3.5). Pour (b), on a

$$\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}} = I\!R\mathcal{H}om^{\bullet}(\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}},\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}})[\dim(\boldsymbol{X})]\,,$$

par définition de $\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}$ et d'après (a). D'autre part

$$I\!R\mathcal{H}om^{\bullet}(\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}},\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}})[\dim(\boldsymbol{X})] = \mathcal{H}om(\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}},\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}})[\dim(\boldsymbol{X})]$$

puisque pour tout système local $\mathscr{L}$ on a $I\!R\mathcal{H}om^{\bullet}(\mathscr{L},_) = \mathcal{H}om^{\bullet}(\mathscr{L},_)$. Enfin, le faisceau $\mathcal{H}om(\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}},\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}})$ est un système local de fibre k ayant une section globale nulle part nulle, à savoir $\mathrm{id}:\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}\to\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}$, donc $\mathcal{H}om(\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}},\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}) \equiv \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$ (*cf.* ex. 3.5.2). ∎

3.5.6. Théorème. *Soit $\boldsymbol{X}$ une variété topologique.*

a) *Pour tous $\mathscr{F}^{\bullet},\mathscr{G}^{\bullet}\in D^b_{\mathrm{clc}}(\boldsymbol{X})$ et tout $x\in\boldsymbol{X}$, le morphisme canonique*
$$\big[I\!R\mathcal{H}om^{\bullet}(\mathscr{F}^{\bullet},\mathscr{G}^{\bullet})\big]_x \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\bullet}_k(\mathscr{F}^{\bullet}_x,\mathscr{G}^{\bullet}_x)$$
est un isomorphisme.

b) $I\!R\mathcal{H}om^{\bullet}\big(D^b_{\mathrm{clc}}(\boldsymbol{X}),D^b_{\mathrm{clc}}(\boldsymbol{X})\big)\subseteq D^b_{\mathrm{clc}}(\boldsymbol{X})$ *et de même pour* $D^b_{\mathrm{cc}}(\boldsymbol{X})$.

c) $\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\big(D^b_{\mathrm{clc}}(\boldsymbol{X})\big)\subseteq D^b_{\mathrm{clc}}(\boldsymbol{X})$ *et* $\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\big(D^b_{\mathrm{cc}}(\boldsymbol{X})\big)\subseteq D^b_{\mathrm{cc}}(\boldsymbol{X})$.

d) *Pour tout $\mathscr{F}^{\bullet}\in D^b_{\mathrm{clc}}(\boldsymbol{X})$, on a $[\![\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^{\bullet}]\!]_{\mathrm{ch}} = -[\![\mathscr{F}^{\bullet}]\!]_{\mathrm{ch}} - \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X})$.*

e) *Le morphisme de bidualité $\mathscr{F}^{\bullet}\to\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\circ\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{F}^{\bullet})$ (3.4.13-(a)) est un isomorphisme pour tout $\mathscr{F}^{\bullet}\in D^b_{\mathrm{cc}}(\boldsymbol{X})$.*

f) *Si $\boldsymbol{X}$ est équidimensionnelle et orientable elle vérifie la dualité de Poincaré.*

g) *Si $\boldsymbol{X}$ est compacte, $\dim_k\big(I\!H^*(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^{\bullet})\big)<\infty$, pour tout $\mathscr{F}^{\bullet}\in D^b_{\mathrm{cc}}(\boldsymbol{X})$. En particulier, les nombres de Betti de $\boldsymbol{X}$ sont finis.*

Démonstration. On notera $(_)^{\vee} := \mathrm{Hom}_k(_,k)$.

a,b) Comme les catégories $D^b_{\mathrm{clc}}(\boldsymbol{X})$ et $D^b_{\mathrm{cc}}(\boldsymbol{X})$ sont triangulées stables par troncature et décalage, et que $I\!R\mathcal{H}om^{\bullet}(_,_)$, $[I\!R\mathcal{H}om^{\bullet}(_,_)]_x$ et $\mathrm{Hom}_k\big((_)_x,(_)_x\big)$ sont des (bi)foncteurs exacts, on se ramène par troncatures et décalages successifs à vérifier que pour tous $\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2$, faisceaux localement constants, on a

$$\begin{cases}\text{a-loc) } \big[I\!R\mathcal{H}om^{\bullet}(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2)\big]_x \to \mathrm{Hom}^{\bullet}_k(\mathscr{L}_{1,x},\mathscr{L}_{2,x}) \text{ est un isomorphisme}\\ \text{b-loc) } I\!R\mathcal{H}om(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2) \text{ est clc (resp. cc si les } \mathscr{L}_i \text{ le sont)}\end{cases}$$

On commence par remarquer que pour toute résolution injective $\epsilon:\mathscr{L}_2\to\mathscr{I}^{\bullet}$ le morphisme induit

$$\mathcal{H}om(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2)\xrightarrow[(\epsilon)]{}\mathcal{H}om(\mathscr{L}_1,\mathscr{I}^{\bullet})$$

est un quasi-isomorphisme. En effet, pour tout ouvert contractile $\boldsymbol{V}\subseteq\boldsymbol{X}$, on a

$$\Gamma\big(\boldsymbol{V};\mathcal{H}om(\mathscr{L}_1,\mathscr{I}^{\bullet})\big) = \mathrm{Hom}_k\big(\Gamma(\boldsymbol{V};\mathscr{L}_1),\Gamma(\boldsymbol{V};\mathscr{I}^{\bullet})\big)$$

puisque $\mathscr{L}_1|_{\boldsymbol{V}}$ est isomorphe au faisceau constant $\underline{\underline{\Gamma(\boldsymbol{V};\mathscr{L}_1)}}_{\boldsymbol{V}}$. D'autre part, le complexe $\Gamma(\boldsymbol{V};\mathscr{I}^{\bullet})$ calcule la cohomologie $H^*(\boldsymbol{V};\mathscr{L}_2)$ dont on sait qu'elle nulle en degrés posi-

tifs puisque $\boldsymbol{V}$ est contractile et que $\mathscr{L}_2$ est localement constant. Par exactitude de $\mathrm{Hom}_k(_\,,_\,)$ ($kdim_k$ est un corps), on conclut que

$$h^m\big[\Gamma\big(\boldsymbol{V};\mathscr{H}om(\mathscr{L}_1,\mathscr{I}^\bullet)\big)\big]=0\,,\qquad\qquad\text{pour tout } m>0.$$

On a donc bien

$$\begin{cases}\mathscr{H}^m\mathscr{H}om(\mathscr{L}_1,\mathscr{I}^\bullet)=0 & \text{pour } m>0,\text{ et}\\ \mathscr{H}om(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2)\xrightarrow[(\epsilon)]{}\mathscr{H}^0\mathscr{H}om(\mathscr{L}_1,\mathscr{I}^\bullet) & \text{est un isomorphisme}\end{cases}$$

Par conséquent, $\mathbb{R}\mathscr{H}om(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2)=\mathscr{H}om(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2)$, où ce dernier faisceau est localement constant puisque sa restriction à tout ouvert contractile $\boldsymbol{V}$ vérifie :

$$\mathscr{H}om(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2)|_{\boldsymbol{V}}\equiv\underline{\underline{\mathrm{Hom}_k(\mathscr{L}_1(\boldsymbol{V}),\mathscr{L}_2(\boldsymbol{V}))}}_{\boldsymbol{V}}\,,$$

et les assertions (a-loc) et (b-loc) suivent.

c) Conséquence immédiate de (b) puisque $\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}$ est un système local sur une variété topologique (3.5.5).

d) Le complexe $\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet$ est clc d'après (c) et on peut appliquer (a). Pour $x\in\boldsymbol{X}$, on a donc $(\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)_x\equiv\mathrm{Hom}^\bullet_k(\mathscr{F}^\bullet_x,(\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}})_x)\equiv\mathrm{Hom}^\bullet_k(\mathscr{F}^\bullet_x,k)[\dim_{\mathrm{ch}}\boldsymbol{X}]$, d'où l'égalité voulue.

e) Comme dans (a) et (b), on se ramène par troncatures et décalage à vérifier que pour tout système local $\mathscr{L}$ le morphisme canonique $\epsilon:\mathscr{L}\to\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\circ\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{L}$ est bien bijectif. Par (c), le complexe $\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\circ\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{L}$ est clc et on peut appliquer (a). Pour chaque $x\in\boldsymbol{X}$ le morphisme $\epsilon_x:\mathscr{L}_x\to(\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\circ\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{L})_x$ s'identifie alors à l'injection canonique $\mathscr{L}_x\hookrightarrow\mathscr{L}_x^{\vee\vee}$, bijective lorsque $\mathscr{L}_x$ est de dimension finie.

f) Par dualité de Grothendieck-Verdier et 3.5.5, on a

$$H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})^\vee\equiv H^{-*}\big(\boldsymbol{X},\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X},k}\big)\equiv H^{\dim(\boldsymbol{X})-*}\big(\boldsymbol{X};\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}(k)\big)\,,$$

et comme $\boldsymbol{X}$ est orientable, $\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}(k)\simeq\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$.

g) Lorsque $\boldsymbol{X}$ est compacte, on peut effacer l'indice 'c' dans la cohomologie et alors

$$\mathbb{H}^*(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet)^{\vee\vee}\equiv\mathbb{H}^{-*}\left(\boldsymbol{X};\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet\right)^\vee\equiv\mathbb{H}^*\left(\boldsymbol{X};\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet\right)\equiv\mathbb{H}^*(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet)\,,$$

d'après (d). Ceci prouve la finitude des dimensions des espaces $\mathbb{H}^m(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet)$. ∎

3.6 Stabilité de $D^b_{\mathscr{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ par dualité de Grothendieck-Verdier

Nous démontrons les principales propriétés de la dualité de Grothendieck-Verdier (sur un corps k) sur les catégories triangulées $D^b_{\mathscr{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ et $D^b_{\mathscr{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$, où $(\boldsymbol{X};\mathscr{F})$ est un espace topologiquement stratifié.

3.6.1. Lemme technique. *On reprend les notations de 3.3.7 pour l'espace topologiquement stratifié $(\boldsymbol{X},\mathscr{F})$ de dimension d. On note*

$$\boldsymbol{U}^c\xrightarrow[\subseteq]{i_c}\boldsymbol{U}^{c+1}\xleftarrow[\supseteq]{j_{c+1}}\boldsymbol{S}^{c+1},\quad\text{et}\quad\boldsymbol{Z}^c:=\boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{U}^c=\boldsymbol{S}^{c+1}\amalg\boldsymbol{S}^{c+2}\amalg\cdots\amalg\boldsymbol{S}^d.$$

a) *Il existe un isomorphisme naturel de foncteurs définis sur $D^b_{\mathscr{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{U}^c)$*

$$i_{c!}\circ\mathcal{D}^\bullet_{U^c}\xrightarrow[\equiv]{}\mathcal{D}^\bullet_{U^{c+1}}\circ I\!R i_{c*}$$

En particulier, $(i^{\boldsymbol{X}}_{U^c})_!\circ\mathcal{D}^\bullet_{U^c}\xrightarrow[\equiv]{}\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\circ I\!R(i^{\boldsymbol{X}}_{U^c})_*$.

b) *Il existe un isomorphisme de foncteurs de* $D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ *vers* $D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{Z}^c)$

$$i^{-1}_{\boldsymbol{Z}^c}\circ\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\xrightarrow[\equiv]{}\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{Z}^c}\circ i^!_{\boldsymbol{Z}^c}$$

En particulier,

$$i^{-1}_{\boldsymbol{S}}\circ\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\xrightarrow[\equiv]{}\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{S}}\circ i^!_{\boldsymbol{S}},\ \textit{pour toute strate}\ \boldsymbol{S}\in\mathcal{F}.$$

c) *Les isomorphismes de (a) et (b) induisent un isomorphisme de triangles exacts :*

$$\boxed{\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\big(\Delta(\boldsymbol{Z}^c,\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}^c;_)\big)\equiv\Delta\big(\boldsymbol{U}^c,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}^c;\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}(_)\big)}\qquad \textit{sur}\ D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X}).$$

En particulier, on a des isomorphismes de foncteurs définis sur $D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$

$$\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\circ\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\big(\Delta\big(\boldsymbol{U}^c,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}^c;(_)\big)\equiv\Delta\big(\boldsymbol{U}^c,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}^c;\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\circ\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}(_)\big),$$
$$\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\circ\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\big(\Delta\big(\boldsymbol{Z}^c,\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}^c;(_)\big)\equiv\Delta\big(\boldsymbol{Z}^c,\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}^c;\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\circ\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}(_)\big).$$

Démonstration

a) Le morphisme en question, qu'on va noter γ, est obtenu par composition de morphismes déjà rencontrés :

$$i_{c!}\circ\mathcal{D}^\bullet_{U^c}\xleftrightarrow[\equiv]{}i_{c!}\circ\mathcal{D}^\bullet_{U^c}\circ i_c^{-1}\circ I\!R i_{c*}\xleftrightarrow[\equiv]{}i_{U^c!}\circ i_c^{-1}\circ\mathcal{D}^\bullet_{U^{c+1}}\circ I\!R i_{c*}\longrightarrow\mathcal{D}^\bullet_{U^{c+1}}\circ I\!R i_{c*}$$
$$\uparrow\qquad\qquad\qquad\qquad\gamma\qquad\qquad\qquad\qquad\uparrow$$

Comme $\gamma|_{\boldsymbol{U}}$ est l'identité, γ sera un isomorphisme, si et seulement si, le germe γ_x est un quasi-isomorphisme pour tout $x\in\boldsymbol{S}^{c+1}$, ou encore, comme $i_x^{-1}\circ i_{c!}=0$ par changement de base, si et seulement si, les cohomologies suivantes sont nulles :

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^*[\mathcal{D}^\bullet_{U^{c+1}}I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet]_x&=\varinjlim\nolimits_{\boldsymbol{V}\ni x}\ h^*[I\!R\Gamma(\boldsymbol{V};\mathcal{D}^\bullet_{U^{c+1}}I\!R i_{c*}\mathscr{F}^\bullet)]\\&=\varinjlim\nolimits_{\boldsymbol{V}\ni x}\ \mathrm{Hom}_k\big(I\!H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{V}\cap\boldsymbol{U}^c;\mathscr{F}^\bullet);k\big)\end{aligned}$$

Or, c'est ce qui a été prouvé dans 3.3.7-(b).

La deuxième assertion découle par itération de la première sur l'égalité

$$(i^{\boldsymbol{X}}_{U^c})_!\circ\mathcal{D}^\bullet_{U^c}=i_{d-1!}\circ\cdots\circ i_{c+1!}\circ i_{c!}\circ\mathcal{D}^\bullet_{U^c}$$

b,c) À l'aide de l'isomorphisme de (a) nous construisons un morphisme de triangles de $\Delta(\boldsymbol{U}^c,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}^c;\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{F}^\bullet))$ vers $\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\big(\Delta(\boldsymbol{Z}^c,\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}^c;\mathscr{F}^\bullet)\big)$:

$$\begin{array}{ccccccc}\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\,I\!R i^{\boldsymbol{X}}_{U^c*}\,i^{\boldsymbol{X}^{-1}}_{U^c}\,\mathscr{F}^\bullet&\longrightarrow&\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet&\longrightarrow&\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\,i^{\boldsymbol{X}}_{Z^c!}\,i^{\boldsymbol{X}!}_{Z^c}\mathscr{F}^\bullet&\xrightarrow{[+1]}\\ \uparrow\alpha&(\mathrm{I})&\|&(\mathrm{II})&\uparrow\beta&&\\ i^{\boldsymbol{X}}_{U^c!}\,i^{\boldsymbol{X}^{-1}}_{U^c}\,\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\,\mathscr{F}^\bullet&\longrightarrow&\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet&\longrightarrow&i^{\boldsymbol{X}}_{Z^c!}\,i^{\boldsymbol{X}^{-1}}_{Z^c}\,\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\,\mathscr{F}^\bullet&\xrightarrow{[+1]}\end{array}$$

Le morphisme α composé des isomorphes

$$i^{\boldsymbol{X}}_{U^c!}\,i^{\boldsymbol{X}^{-1}}_{U^c}\,\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\,\mathscr{F}^\bullet\equiv i^{\boldsymbol{X}}_{U^c!}\,\mathcal{D}^\bullet_{U^c}\big(i^{\boldsymbol{X}^{-1}}_{U^c}\,\mathscr{F}^\bullet\big)\underset{\gamma}{\equiv}\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\,I\!R i^{\boldsymbol{X}}_{U^c*}\big(i^{\boldsymbol{X}^{-1}}_{U^c}\,\mathscr{F}^\bullet\big)$$

le premier général et le second donné dans (a). Comme, d'autre part la construction de γ est fonctorielle et ne repose sur "rien" elle se fait également sur $\boldsymbol{X}$ auquel cas il est immédiat de constater son identification à id. Il s'ensuit que le sous-diagramme (I) est commutatif. Par conséquent, il existe un morphisme β en catégorie dérivée rendant (II) commutatif. Ce morphisme est nécessairement un isomorphisme et comme $\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} \circ i^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{Z}^c!} \equiv i^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{Z}^c!} \circ \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{Z}^c}$, il induit, par restriction à $\boldsymbol{Z}^c$, l'isomorphisme ([16])

$$i^{\boldsymbol{X}\,-1}_{\boldsymbol{Z}^c}\, \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\, \mathscr{F}^{\bullet} \xrightarrow{\beta|_{\boldsymbol{Z}^c}} \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{Z}^c}\, i^{\boldsymbol{X}!}_{\boldsymbol{Z}^c}\, \mathscr{F}^{\bullet}$$

annoncé dans (b) et (c).

Ceci étant, comme $\boldsymbol{S}^{c+1}$ est ouvert dans $\boldsymbol{Z}^c$, on a $(i^{\boldsymbol{Z}^c}_{\boldsymbol{S}^{c+1}})^! = (i^{\boldsymbol{Z}^c}_{\boldsymbol{S}^{c+1}})^{-1}$ et la deuxième partie de (b) suit.

la preuve de la deuxième partie de (c) utilise 3.4.13-(d). ∎

3.6.2. Dualité de Grothendieck-Verdier sur les espaces stratifiés. Le théorème suivant, généralisation de 3.5.6, est l'une des conséquences majeures du théorème d'homotopie 3.3, notamment de ses corollaires 3.3.6, 3.3.7 et de 3.6.1.

3.6.3. Théorème. *Soit $(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$ un espace topologiquement stratifié.*

a) $\mathbb{R}\mathscr{H}om^{\bullet}\big(D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X}), D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})\big) \subseteq D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ *et de même pour* $D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$.

b) $\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\big(D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})\big) \subseteq D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ *et* $\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\big(D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})\big) \subseteq D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$.

c) *Pour tout* $\mathscr{F}^{\bullet} \in D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$, *on a* $[\![\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^{\bullet}]\!]_{\mathrm{ch}} = \bigcup_{\boldsymbol{S}\in\mathcal{F}} \big(-[\![i^!_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^{\bullet}]\!]_{\mathrm{ch}} - \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{S})\big)$.

d) *Le morphisme de bidualité* $\mathscr{F}^{\bullet} \to \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} \circ \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{F}^{\bullet})$ (3.4.13-(a)) *est un isomorphisme pour tout* $\mathscr{F}^{\bullet} \in D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$.

e) *Si $\boldsymbol{X}$ est compact,* $\dim_k\big(\mathbb{H}^*(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^{\bullet})\big) < \infty$, *pour tout* $\mathscr{F} \in D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$. *En particulier, les nombres de Betti de $\boldsymbol{X}$ sont finis.*

Démonstration. Par récurrence sur le nombre de fermés non vides qui interviennent dans la filtration $\mathcal{F}$. Lorsqu'il n'y a qu'un seul fermé, $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique et le théorème a déjà été démontré (3.5.6).

Dans le cas général, on considère la décomposition $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U} \amalg \boldsymbol{\Sigma}$ dans laquelle $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{S}^0$ est une variété topologique et $(\boldsymbol{\Sigma};\mathcal{F})$ est stratifié par une filtration possédant un fermé de moins que celle de $\boldsymbol{X}$. Le théorème pourra donc être considéré vérifié pour $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$.

a) Pout tout $\mathscr{G}^{\bullet} \in D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$, on a $\mathscr{G}^{\bullet}|_{\boldsymbol{U}} \in D^b_{\mathrm{clc}}(\boldsymbol{U})$ et alors $\mathbb{R}i_{\boldsymbol{U}*}\big(\mathscr{G}^{\bullet}|_{\boldsymbol{U}}\big) \in D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$, d'après la corollaire 3.3.6. On a donc le triangle exact de $D^b(\boldsymbol{X})$:

$$i_{\boldsymbol{\Sigma}*}\, i^!_{\boldsymbol{\Sigma}}\, \mathscr{G}^{\bullet} \longrightarrow \mathscr{G}^{\bullet} \longrightarrow \mathbb{R}i_{\boldsymbol{U}*}\big(\mathscr{G}^{\bullet}|_{\boldsymbol{U}}\big) \xrightarrow{[+1]} \qquad (*)$$

où deux termes appartiennent à $D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$. Comme $D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ est stable par extension dans $D(\boldsymbol{X})$ (3.2.12), on a aussitôt $i_{\boldsymbol{\Sigma}*}\, i^!_{\boldsymbol{\Sigma}}\mathscr{G}^{\bullet} \in D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ mais aussi $i^*_{\boldsymbol{\Sigma}}\mathscr{G}^{\bullet} \in D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{\Sigma})$ puisque $i_{\boldsymbol{\Sigma}*}$ est exact et préserve les strates.

[16] On peut prouver que ce morphisme est l'inverse en catégorie dérivée du morphisme obtenu en composant $\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{Z}}\, i^!_{\boldsymbol{Z}} = i^{-1}_{\boldsymbol{Z}}\, i_{\boldsymbol{Z}!}$ $\quad \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{Z}}\, i^!_{\boldsymbol{Z}} = i^{-1}_{\boldsymbol{Z}}\, \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\, i_{\boldsymbol{Z}!}$ $\quad i^!_{\boldsymbol{Z}} \to i^{-1}_{\boldsymbol{Z}}\, \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}$.

Ceci étant, soit $\mathscr{F}^\bullet \in D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$. On a, par l'adjonction ordinaire,

$$\begin{cases} I\!R\mathscr{H}om^\bullet\big(\mathscr{F}^\bullet, i_{\boldsymbol{\Sigma}*}\, i^!_{\boldsymbol{\Sigma}}\mathscr{G}^\bullet\big) \equiv i_{\boldsymbol{\Sigma}*}\, I\!R\mathscr{H}om^\bullet\big(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{\Sigma}}, i^!_{\boldsymbol{\Sigma}}\mathscr{G}^\bullet\big) \\ I\!R\mathscr{H}om^\bullet\big(\mathscr{F}^\bullet, I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{U}}\big) \equiv I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\, I\!R\mathscr{H}om^\bullet\big(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{U}}, \mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{U}}\big) \end{cases}$$

et donc, par l'hypothèse inductive sur $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$, grâce au fait que $i^!_{\boldsymbol{\Sigma}}\mathscr{G}^\bullet \in D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{\Sigma})$ et comme $I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\big(D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{U})\big) \subseteq \big(D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})\big)$ (3.3.6), on conclut que les deux termes appartiennent bien à $D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$. Or, ces termes sont sommets d'un triangle exact de $D(\boldsymbol{X})$ de troisième sommet $I\!R\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet)$, de sorte que, en invoquant, une fois de plus, la stabilité de $D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ par extensions dans $D(\boldsymbol{X})$, on a montré que

$$I\!R\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \in D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$$

Pour que les raisonnements précédents restent vrais en remplaçant «clc» par «cc», il suffit de prouver l'inclusion $I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\big(D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{U})\big) \subseteq \big(D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})\big)$, où encore, pour chaque c, l'inclusion :

$$I\!Ri_{c*}\big(D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{U}^c)\big) \subseteq \big(D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{U}^{c+1})\big) \qquad (\diamond)$$

au sujet de laquelle laquelle on sait que, pour tout $\mathscr{F}^\bullet \in D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{U}^c)$ et tout $x \in \boldsymbol{S}^{c+1}$, on a (3.3.7) :

$$\mathscr{H}^m(I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{F}^\bullet)_x \equiv I\!H^m(\mathbb{L}(x); \mathscr{F}^\bullet|_{\mathbb{L}})$$

Comme les liens $\mathbb{L}(x)$ sont compacts et que la filtration induite par $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{L}(x)$ possède un fermé de moins que celle de $\boldsymbol{X}$, l'assertion (e) est vérifiée par le couple $(\mathbb{L}(x), \mathscr{F}^\bullet|_{\mathbb{L}(x)})$, par hypothèse inductive, et les fibres $\mathscr{H}^m(I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{F}^\bullet)_x$ sont bien de dimension finie, d'où $(\diamond)$ et la fin de la preuve de (a).

b) D'après (a), il suffit de vérifier que $I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X}} \in D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$. Or la suite $(*)$ ci-dessus, pour $\mathscr{G}^\bullet := I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X}}$, donne (*cf.* 3.4.13-(c)) :

$$i_{\boldsymbol{\Sigma}*}\, I\!D^\bullet_{\boldsymbol{\Sigma}} \longrightarrow I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X}} \longrightarrow I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\, I\!D^\bullet_{\boldsymbol{U}} \xrightarrow{[+1]}$$

où les termes extrêmes, et donc $I\!D^\bullet_{\boldsymbol{X}}$, appartiennent à $D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$.

c) Pour tout $\mathscr{F}^\bullet \in D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$, on a

$$\begin{aligned} [\![\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{ch}} &= \bigcup_{\boldsymbol{S}\subseteq\mathcal{F}} [\![i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)]\!]_{\mathrm{ch}} \underset{1}{=} \bigcup_{\boldsymbol{S}\subseteq\mathcal{F}} [\![\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{S}}(i^!_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^\bullet))]\!]_{\mathrm{ch}} \\ &\underset{2}{=} \bigcup_{\boldsymbol{S}\subseteq\mathcal{F}} \Big(- [\![i^!_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{ch}} - \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{S})\Big) \end{aligned}$$

$\big(\underset{1}{=}\big)$ par 3.6.1-(b), et $\big(\underset{2}{=}\big)$ par 3.5.6-(d) puisque $\boldsymbol{S}$ est une variété topologique.

d) On a un morphisme de triangles (3.6.1-(c))

$$\Delta(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Sigma}; \mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \Delta(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Sigma}; \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \circ \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet) \equiv \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \circ \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\Delta(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Sigma}; \mathscr{F}^\bullet)$$

associé au morphisme canonique $\mathscr{F}^\bullet \to \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \circ \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet$. Comme $\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}$ commute aux foncteurs $i_{\boldsymbol{U}!}$ et $i_{\boldsymbol{\Sigma}!}$, on est réduit à prouver que

$$\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{U}} \longrightarrow \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{U}} \circ \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{U}}(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{U}}) \quad \text{et} \quad \mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{\Sigma}} \longrightarrow \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{U}} \circ \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{U}}(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{\Sigma}})$$

sont des isomorphismes ce qui résulte de l'hypothèse inductive.

e) Se démontre exactement comme dans le cas des variétés topologiques (3.5.6-(g)). ∎

3.6.4. Remarque importante. Dans le cas des variétés topologiques on a démontré que pour tous $\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet \in D^b_{\mathrm{clc}}(\boldsymbol{X})$ et tout $x \in \boldsymbol{X}$, le morphisme canonique

$$\left[\mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet)\right]_x \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet_k(\mathscr{F}^\bullet_x, \mathscr{G}^\bullet_x)$$

est un isomorphisme. Ce résultat est **faux en général** dans le cas des espaces stratifiés. Par exemple, si x est un point d'une strate de dimension 0, le faisceau gratte-ciel $i_{x!}k$ appartient à $D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$ et par dualité de Grothendieck-Verdier :

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet(i_{x!}\,k, \mathscr{G}^\bullet)_x \equiv \left(i_{x*}\,\mathrm{Hom}^\bullet_k(k, i^!_x\,\mathscr{G}^\bullet)\right)_x = \mathrm{Hom}^\bullet_k(k, i^!_x\,\mathscr{G}^\bullet) = i^!_x\,\mathscr{G}^\bullet$$

Or, il n'y a aucune raison pour que $i^!_x\mathscr{G}^\bullet = i^{-1}_x\mathscr{G}^\bullet$, comme le montre le cas où $\boldsymbol{X}$ est une variété topologique de dimension $d > 0$ (ce qui n'empêche pas qu'elle admette une stratification avec des strates ponctuelles) et que $\mathscr{G}^\bullet = \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}$, auquel cas, $i^{-1}_x\mathscr{G}^\bullet_x = k[d]$ mais $i^!_x\,\mathscr{G}^\bullet_x = k$.

Les propriétés de finitude obtenues dans la preuve du théorème 3.6.3 nous permettent maintenant de renforcer le lemme technique 3.6.1.

3.6.5. Proposition. *Soient $(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$ un espace topologiquement stratifié et $\boldsymbol{Z}$ une partie localement fermée de $\boldsymbol{X}$ réunion de strates de $\mathcal{F}$. Alors :*

$$i^!_{\boldsymbol{Z}}\left(D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})\right) \subseteq D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{Z}) \quad et \quad i^{-1}_{\boldsymbol{Z}}\left(D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})\right) \subseteq D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{Z})$$
$$i_{\boldsymbol{Z}!}\left(D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{Z})\right) \subseteq D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X}) \quad et \quad \mathbb{R}i_{\boldsymbol{Z}*}\left(D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{Z})\right) \subseteq D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$$

Et de même en remplaçant «clc» par «cc». On a aussi :

$$i^!_{\boldsymbol{Z}} \circ \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} = \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{Z}} \circ i^{-1}_{\boldsymbol{Z}}, \qquad i^{-1}_{\boldsymbol{Z}} \circ \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} = \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{Z}} \circ i^!_{\boldsymbol{Z}},$$
$$i_{\boldsymbol{Z}!} \circ \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{Z}} = \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \circ \mathbb{R}i_{\boldsymbol{Z}*}, \qquad \mathbb{R}i_{\boldsymbol{Z}*} \circ \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{Z}} = \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \circ i_{\boldsymbol{Z}!}$$

Démonstration. On factorise l'injection $i_{\boldsymbol{Z}}$ à travers l'adhérence $\overline{\boldsymbol{Z}}$ qui est, elle aussi, réunion de strates de $\mathcal{F}$. Il suffit alors de vérifier la proposition pour $\boldsymbol{Z}$ tantôt ouverte tantôt fermée. Lorsque $\boldsymbol{Z}$ est ouverte, la proposition a été démontrée dans lemme technique pour «clc», et dans la preuve de 3.6.3 pour «cc». À partir de là, le cas "fermé" s'en déduit à l'aide des triangles $\Delta(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}; _)$ et $\Delta(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}; _)$. ∎

3.7 Produits et théorème de Künneth

3.7.1. Dans cette section on fera souvent référence au diagramme cartésien ci-après où $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ sont métrisables, localement compacts et contractiles, de dimension cohomologique finie, et où où p et q désignent les projections canoniques.

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y} & \xrightarrow{\;q\;} & \boldsymbol{Y} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle c_{\boldsymbol{Y}}} \\ \boldsymbol{X} & \xrightarrow[c_{\boldsymbol{X}}]{} & \mathrm{pt} \end{array}$$

Le théorème de changement de base affirme, dans ce cas, que le morphisme naturel des foncteurs :

$$c_{\boldsymbol{X}}^{-1} \circ I\!R c_{\boldsymbol{Y}!} \xrightarrow[\equiv]{} I\!R p_! \circ q^{-1}$$

est un isomorphisme, et donc de même, par adjonction,

$$I\!R p_* \circ q^! \equiv c_{\boldsymbol{X}}^! \circ I\!R c_{\boldsymbol{Y}*} \ .$$

3.7.2. Produit tensoriel externe. Pour $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{X})$, $\mathscr{G} \in \mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{Y})$, on note

$$\mathscr{F} \boxtimes \mathscr{G} := p^{-1}\mathscr{F} \otimes_{\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}}} q^{-1}\mathscr{G} \in \mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y})$$

On vérifie que $\mathscr{F} \boxtimes \mathscr{G}$ est le faisceau sur $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$ engendré par le préfaisceau défini, sur la base de la topologie produit donnée par les produits d'ouverts, par :

$$\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V} \rightsquigarrow \mathscr{F}(\boldsymbol{U}) \otimes_k \mathscr{G}(\boldsymbol{V}) .$$

De même si $\alpha : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ et $\beta : \mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2$ sont des morphismes de faisceaux, on note $\alpha \boxtimes \beta : \mathscr{F}_1 \boxtimes \mathscr{G}_1 \to \mathscr{F}_2 \boxtimes \mathscr{G}_2$ le morphisme de faisceaux associé au morphisme de préfaisceaux :

$$\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V} \rightsquigarrow \alpha(\boldsymbol{U}) \otimes_k \beta(\boldsymbol{V}) .$$

On obtient ainsi un bifoncteur $\boxtimes : \mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{X}) \times \mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{Y}) \rightsquigarrow \mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y})$ clairement covariant, additif et exact par rapport à chaque variable.

3.7.3. Exercice. Donner un sens et prouver les égalités suivantes :

a) $(\mathscr{F}_1 \boxtimes \mathscr{G}_1) \otimes (\mathscr{F}_2 \boxtimes \mathscr{G}_2) = (\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2) \boxtimes (\mathscr{G}_1 \otimes \mathscr{G}_2)$.

b) $\mathscr{H}\!om(\mathscr{F}_1, \mathscr{G}_1) \boxtimes \mathscr{H}\!om(\mathscr{F}_2, \mathscr{G}_2) = \mathscr{H}\!om(\mathscr{F}_1 \boxtimes \mathscr{F}_2, \mathscr{G}_1 \boxtimes \mathscr{G}_2)$.

c) $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}} \boxtimes \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{V}} = \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}}$, pour tous ouverts $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{Y}$.

d) (c-mou) $\boxtimes$ (c-mou) est c-mou.

e) Étant données des partitions $\mathfrak{X}$ de $\boldsymbol{X}$ et $\mathfrak{Y}$ de $\boldsymbol{Y}$, on note $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$ la partition produit de $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$. Alors (*cf.* 3.2) :

$$(\mathfrak{X}\text{-clc}) \boxtimes (\mathfrak{Y}\text{-clc}) \text{ est } (\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y})\text{-clc} \quad \text{et} \quad (\mathfrak{X}\text{-cc}) \boxtimes (\mathfrak{Y}\text{-cc}) \text{ est } (\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y})\text{-cc} .$$

f) $I\!R p_!(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}} \boxtimes \mathscr{G}^\bullet) = \underline{\underline{I\!R\Gamma_c(\boldsymbol{Y}; \mathscr{G}^\bullet)}}_{\boldsymbol{X}}$.

3.7.4. Théorème. *Les notations étant celles des paragraphes précédents, on suppose $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ munis de stratifications $\mathfrak{F}_{\boldsymbol{X}}$ et $\mathfrak{F}_{\boldsymbol{Y}}$. Alors :*

a) *Il existe un isomorphisme canonique de foncteurs de $D_k^+(\boldsymbol{X})$ vers $D_k^+(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y})$:*

$$\boxed{(_) \boxtimes I\!D_{\boldsymbol{Y}}^\bullet \to p^!(_)}$$

b) $p^!\big(D^b_{\mathfrak{F}_{\boldsymbol{X}}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})\big) \subseteq D^b_{(\mathfrak{F}_{\boldsymbol{X}}\times\mathfrak{F}_{\boldsymbol{Y}})\text{-clc}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y})$ *et de même pour «cc».*

c) $I\!D_{\boldsymbol{X}}^\bullet \boxtimes I\!D_{\boldsymbol{Y}}^\bullet \equiv I\!D_{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}}^\bullet$ *et* $(I\!D_{\boldsymbol{X}}^\bullet)_x \otimes (I\!D_{\boldsymbol{Y}}^\bullet)_y \equiv (I\!D_{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}}^\bullet)_{(x,t)}$.

d) *Pour tous* $\mathscr{F}^\bullet \in D^b_k(\boldsymbol{X})$, $\mathscr{G}^\bullet \in D^b_k(\boldsymbol{Y})$, *on a*

$$\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}}(\mathscr{F}^\bullet \boxtimes \mathscr{G}^\bullet) \equiv \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet \boxtimes \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}}\mathscr{G}^\bullet .$$

En particulier,

$$\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}}\big(D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}\text{-clc}}(\boldsymbol{X}) \boxtimes D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}}\text{-clc}}(\boldsymbol{Y})\big) \subseteq D^b_{(\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}\times\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}})\text{-clc}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}),$$

*et de même pour «*cc*».*

e) *On a des isomorphismes canoniques de foncteurs de* $D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ *:*

$$\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}} \circ p^{-1} \equiv p^! \circ \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \quad \textit{et} \quad \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}} \circ p^! \equiv p^{-1} \circ \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} .$$

Démonstration

a) La construction du morphisme se fait au niveau des préfaisceaux sur les ouverts de la forme $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}$. Soit $\mathscr{I}^\bullet$ un complexe borné à gauche de faisceaux injectifs sur $\boldsymbol{X}$. On a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}; p^!\mathscr{I}^\bullet) &\underset{0}{=} \mathrm{Hom}^\bullet\big(\mathbb{R}p_!(\underline{k}_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}}), \mathscr{I}^\bullet\big)\\
&= \mathrm{Hom}^\bullet\big(\mathbb{R}p_!(p^{-1}\underline{k}_{\boldsymbol{U}} \otimes q^{-1}\underline{k}_{\boldsymbol{V}}), \mathscr{I}^\bullet\big)\\
&\underset{1}{=} \mathrm{Hom}^\bullet\big(\underline{k}_{\boldsymbol{U}} \otimes \mathbb{R}p_!\, q^{-1}\underline{k}_{\boldsymbol{V}}, \mathscr{I}^\bullet\big) \underset{2}{=} \mathrm{Hom}^\bullet\big(\underline{k}_{\boldsymbol{U}} \otimes c_{\boldsymbol{X}}^{-1}\mathbb{R}c_{\boldsymbol{Y}!}\underline{k}_{\boldsymbol{V}}, \mathscr{I}^\bullet\big)\\
&= \mathrm{Hom}^\bullet\big(c_{\boldsymbol{X}}^{-1}\mathbb{R}c_{\boldsymbol{Y}!}\underline{k}_{\boldsymbol{V}}, \mathscr{Hom}^\bullet(\underline{k}_{\boldsymbol{U}}, \mathscr{I}^\bullet)\big)\\
&\underset{3}{=} \mathrm{Hom}^\bullet\big(\mathbb{R}c_{\boldsymbol{Y}!}\underline{k}_{\boldsymbol{V}}, c_{\boldsymbol{X}*}\mathscr{Hom}^\bullet(\underline{k}_{\boldsymbol{U}}, \mathscr{I}^\bullet)\big)\\
&\underset{4}{=} \mathrm{Hom}^\bullet\big(\mathbb{R}c_{\boldsymbol{Y}!}\underline{k}_{\boldsymbol{V}}, \Gamma(\boldsymbol{U}; \mathscr{I}^\bullet)\big) \underset{\epsilon}{\longleftarrow} \Gamma(\boldsymbol{U}; \mathscr{I}^\bullet) \otimes \mathrm{Hom}^\bullet\big(\mathbb{R}c_{\boldsymbol{Y}!}\underline{k}_{\boldsymbol{V}}, k\big)\\
&\underset{5}{=} \Gamma(\boldsymbol{U}; \mathscr{I}^\bullet) \otimes \Gamma(\boldsymbol{V}; \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}})
\end{aligned}$$

avec : $\big(\overline{=}_0\big)$ par définition de $p^!$; $\big(\overline{=}_1\big)$ par 3.4.6-(h) ; $\big(\overline{=}_2\big)$ par changement de base ; $\big(\overline{=}_3\big)$ par adjonction ordinaire ; $\big(\overline{=}_4\big)$ par 3.4 et $\big(\overline{=}_5\big)$ par définition, de $\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}}$.

D'où la définition du morphisme $(_)\boxtimes\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}} \to p^!(_)$ qui sera, en plus, un isomorphisme, lorsque ϵ l'est. Or, il est bien connu que ϵ est un quasi-isomorphisme si l'un ou l'autre des facteurs est «cc», c'est là qu'on a besoin d'une condition de finitude, et c'est là qu'il est naturel de se restreindre au cas des espaces topologiquement stratifiés car alors on peut prendre à la place de $\boldsymbol{U}$ des voisinages distingués N_y, auquel cas

$$\mathbb{H}^m(N_y; \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}}) \equiv \mathbb{H}^{-m}_{\mathrm{c}}(N_y; k)^\vee \equiv H^{1-m}\big(\mathbb{L}(y); k\big)^\vee$$

est de dimension finie d'après 3.6.3-(e).

b,c) Immédiats d'après (a) et 3.7.3-(e).

d) On a (*cf.* 3.7.3-(b)) :

$$\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}}(\mathscr{F}^\bullet \boxtimes \mathscr{G}^\bullet) = \mathbb{R}\mathscr{Hom}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet \boxtimes \mathscr{G}^\bullet, \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \boxtimes \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}}) \equiv \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet \boxtimes \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}}\mathscr{G}^\bullet$$

e) La première équivalence est générale (3.4.13-(c)), la seconde résulte de (a) et (d). ∎

3.7.5. Exercice

a) **Künneth à supports compacts.** Prouver qu'il existe un isomorphisme naturel

$$I\!H^*_c(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y};\mathscr{F}^\bullet\boxtimes\mathscr{G}^\bullet)\equiv I\!H^*_c(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet)\otimes I\!H^*_c(\boldsymbol{Y};\mathscr{G}^\bullet)$$

pour tous, $\mathscr{F}^\bullet\in D^+(\boldsymbol{X})$ et $\mathscr{G}^\bullet\in D^+(\boldsymbol{Y})$.

Indication. Penser à l'isomorphisme $I\!Rp_!(\mathscr{F}^\bullet\boxtimes\mathscr{G}^\bullet)\equiv\mathscr{F}^\bullet\otimes c_{\boldsymbol{X}}^{-1}\,I\!Rc_{\boldsymbol{Y}!}\,\mathscr{G}^\bullet$ (3.4.6-(h)).

b) Prouver qu'il existe un isomorphisme naturel

$$I\!H^*_{(x,y)}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y};\mathscr{F}^\bullet\boxtimes\mathscr{G}^\bullet)\equiv I\!H^*_x(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet)\otimes I\!H^*_y(\boldsymbol{Y};\mathscr{G}^\bullet)$$

pour tous, $\mathscr{F}^\bullet\in D^+(\boldsymbol{X})$ et $\mathscr{G}^\bullet\in D^+(\boldsymbol{Y})$.

3.7.6. Remarque. Il faut se méfier du foncteur $p_!$ qui demandera, en général, plus de conditions pour conserver la constructibilité. Par exemple, l'équivalence :

$$I\!Rp!(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}})=I\!Rp!(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}\boxtimes\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{Y}})=c_{\boldsymbol{X}}^{-1}\circ I\!Rc_{\boldsymbol{Y}!}(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{Y}})$$

montre qu'une condition nécessaire pour conserver cette propriété sera la finitude de la cohomologie à supports compacts de $\boldsymbol{Y}$.

3.8 Applications stratifiées

Soient $(\boldsymbol{X};\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}})$ $(\boldsymbol{Y},\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}})$ deux espaces topologiquement stratifiés. Une application continue $f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ sera dite « *stratifiée* », on note alors $f:(\boldsymbol{X};\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}})\to(\boldsymbol{Y},\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}})$, lorsque :

Str(i) Pour toute strate $\boldsymbol{S}\in\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}}$, l'ensemble $f^{-1}\boldsymbol{S}$ est réunion de strates de $\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}$.

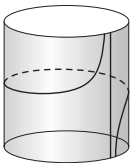
Str(ii) Pour toute strate $\boldsymbol{S}\in\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}}$ et pour tout $y\in\boldsymbol{S}$, il existe un voisinage V_y de y dans $\boldsymbol{S}$, un espace stratifié $(\boldsymbol{Z},\mathcal{F}_{\boldsymbol{Z}})$, et un homéomorphisme d'espaces stratifiés $h:(f^{-1}V_y,\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}})\to V_y\times(\boldsymbol{Z},\mathcal{F}_{\boldsymbol{Z}})$, tels que $f|_{f^{-1}V_y}=p_1\circ h$. Un tel voisinage sera appelé « *f-distingué* ».

Enfin, l'application $f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ sera dite « *stratifiable* » s'il existe des structures d'espace stratifié pour $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ rendant f stratifiée.

3.8.1. Exemples et commentaires

- Une application stratifiable est surjective et ouverte.
- Dans un espace topologiquement stratifié $(\boldsymbol{Y},\mathcal{F})$, toute réunion $\boldsymbol{X}$ de strates de $\mathcal{F}$, localement fermée dans $\boldsymbol{Y}$, munie de la filtration induite par $\mathcal{F}$, est un espace stratifié. L'inclusion $(\boldsymbol{X},\mathcal{F})\subseteq(\boldsymbol{Y},\mathcal{F})$ est alors une application stratifiée.
- Un morphisme propre et algébrique entre deux variétés algébriques complexes est (algébriquement) stratifiable.
- Si $(\boldsymbol{X};\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}})$ et $(\boldsymbol{Y};\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}})$ sont topologiquement stratifiés, le produit des strates définit une structure d'espace topologiquement stratifié sur $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$ notée $\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}\times\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}}$. La projection canonique $p:(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y};\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}\times\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}})\twoheadrightarrow(\boldsymbol{X};\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}})$ est stratifiée.

- Le sous-espace $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ des couples (s,t) avec $s=-1$ ou bien de la forme $(e^{i\pi t/2}, t/(t^2-1))$ est une sous-variété différentiable fermée de dimension 1 de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.



Les projections canoniques $p_1 : \boldsymbol{X} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$, $p_2 : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ sont toutes les deux stratifiables. La première par rapport à toute stratification de $\mathbb{S}^1$ dans laquelle $\{-1\}$ est une strate de dimension 0, la seconde sans aucune restriction puisque revêtement à deux feuillets de $\mathbb{R}$.

Le théorème suivant généralise 3.7.4 au cas des applications stratifiées.

3.8.2. Théorème. *Soit $f : (\boldsymbol{X};\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}) \to (\boldsymbol{Y};\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}})$ une application continue stratifiée. Alors :*

a) $$I\!R f^! \big(D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}}\text{-clc}}(\boldsymbol{Y})\big) \subseteq D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}\text{-clc}}(\boldsymbol{X}) \supseteq f^{-1}\big(D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}}\text{-clc}}(\boldsymbol{Y})\big)$$

b) *On a des isomorphismes naturels de foncteurs de $D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}\text{-clc}}(\boldsymbol{Y})$ vers $D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$:*

$$\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} \circ f^! \equiv f^{-1} \circ \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{Y}} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} \circ f^{-1} \equiv f^! \circ \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{Y}}$$

*Et de même en remplaçant «*clc*» par «*cc*».*

Démonstration. Lorsque le cardinal de l'ensemble des parties fermées non vides de $\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}$ vaut 1 on se retrouve (localement sur $\boldsymbol{Y}$) dans les hypothèses du théorème 3.7.4 et on peut conclure. Dans le cas général, on note $\boldsymbol{Z}$ le plus petit des fermés non vides de $\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}$ et $\boldsymbol{U}$ l'ouvert complémentaire. Pour tout $\mathscr{F}^{\bullet} \in D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}}\text{-clc}}(\boldsymbol{Y})$, on a le triangle exact :

$$i_{\boldsymbol{Z}*} i_{\boldsymbol{Z}}^! \mathscr{F}^{\bullet} \longrightarrow \mathscr{F}^{\bullet} \longrightarrow I\!R i_{\boldsymbol{U}*} \mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{U}} \xrightarrow{[+1]}$$

Par changement de base, $f^!$ «*commute*» à $I\!R i_*$ et donc

$$i_{f^{-1}\boldsymbol{Z}*}\, f^!_{\boldsymbol{Z}}(i^!_{\boldsymbol{Z}} \mathscr{F}^{\bullet}) \longrightarrow f^! \mathscr{F}^{\bullet} \longrightarrow I\!R i_{f^{-1}\boldsymbol{U}*}\, f^!_{\boldsymbol{U}}(\mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{U}}) \xrightarrow{[+1]} \qquad (\diamond)$$

où $f_{\boldsymbol{Z}}$ et $f_{\boldsymbol{U}}$ désignent les restrictions de f respectivement à $f^{-1}\boldsymbol{Z}$ et $f^{-1}\boldsymbol{U}$.

On a $i^!_{\boldsymbol{Z}} \mathscr{F}^{\bullet} \in D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}}\text{-clc}}(\boldsymbol{Z})$ (3.6.5) et $\mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{U}} \in D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}}\text{-clc}}(\boldsymbol{U})$ et, par induction, $f^!_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{Z}})$ et $f^!_{\boldsymbol{U}}(\mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{U}})$ sont $\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}$-clc respectivement sur $f^{-1}\boldsymbol{Z}$ et $f^{-1}\boldsymbol{U}$. Les termes extrêmes de $(\diamond)$ sont alors dans $D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ (3.6.5) et de même pour $f^! \mathscr{F}^{\bullet} \in D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ car extension de $\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}$-clc. Mêmes arguments pour «cc», d'où (a).

L'assertion (b) se démontre de la même manière à l'aide de 3.6.5. ∎

3.8.3. Remarque à propos de la bidualité. On observera que l'isomorphisme de droite dans l'assertion (b) est vérifié sans hypothèse sur l'application f (3.4.13-(c)). Dans le cas «cc», il suffit alors de vérifier que $f^{-1}\big(D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}}\text{-cc}}(\boldsymbol{Y})\big) \subseteq D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$, ce qui est immédiat, pour que l'isomorphisme de gauche soit automatiquement vérifié. En effet, dans ce cas, on a par bidualité sur $D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}}\text{-cc}}(\boldsymbol{Y})$ et $D^b_{\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$:

$$f^{-1} \circ \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{Y}} \equiv \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} \circ \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} \circ f^{-1} \circ \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{Y}} = \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} \circ f^! \circ \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{Y}} \circ \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{Y}} = \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} \circ f^!$$

D'où l'intérêt pratique de travailler dans la catégorie $\mathcal{F}$-cc plutôt que dans $\mathcal{F}$-clc.

On aura compris que sur $D^b_{\mathcal{F}_Y\text{-cc}}(\boldsymbol{Y})$, on a :

- ***quelle que soit l'application continue*** $\boldsymbol{f : X \to Y}$,
$$\begin{cases} f^! \circ \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}} = \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \circ f^{-1} \\ f^! = \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \circ f^{-1} \circ \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}} \end{cases}$$
- de même que ***l'équivalence*** des assertions suivantes :
$$\begin{cases} f^{-1}\big(D^b_{\mathcal{F}_Y\text{-cc}}(\boldsymbol{Y})\big) \subseteq D^b_{\mathcal{F}_X\text{-cc}}(\boldsymbol{X}) ; \\ f^!\big(D^b_{\mathcal{F}_Y\text{-cc}}(\boldsymbol{Y})\big) \subseteq D^b_{\mathcal{F}_X\text{-cc}}(\boldsymbol{X}) ; \\ f^{-1} = \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \circ f^! \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}} ; \\ f^{-1} \circ \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}} = \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \circ f^! . \end{cases}$$

Il suffit donc de vérifier l'une quelconque des assertions de la deuxième liste pour les avoir toutes.

Nous laissons en exercice l'étude du cas des foncteurs $\mathbb{R}f_!$ et $\mathbb{R}f_*$ pour lesquels on a le même phénomène. La proposition suivante en est un exemple.

3.8.4. Proposition. *Soit* $f : (\boldsymbol{X};\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}) \to (\boldsymbol{Y},\mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}})$ *une application continue stratifiée à fibres* ***compactes****. Alors :*

a) $$\mathbb{R}f_!\big(D^b_{\mathcal{F}_X\text{-cc}}(\boldsymbol{X})\big) \subseteq D^b_{\mathcal{F}_Y\text{-cc}}(\boldsymbol{Y}) \supseteq \mathbb{R}f_*\big(D^b_{\mathcal{F}_X\text{-cc}}(\boldsymbol{X})\big)$$

b) *On a des isomorphismes naturels sur* $D^b_{\mathcal{F}_Y\text{-cc}}(\boldsymbol{Y})$ *:*
$$\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}} \circ \mathbb{R}f_! \equiv \mathbb{R}f_* \circ \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}} \circ \mathbb{R}f_* \equiv \mathbb{R}f_! \circ \mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}$$

Indications. D'après la remarque précédente, tout résulte de vérifier l'inclusion
$$\mathbb{R}f_!\big(D^b_{\mathcal{F}_X\text{-cc}}(\boldsymbol{X})\big) \subseteq D^b_{\mathcal{F}_Y\text{-cc}}(\boldsymbol{Y})$$
Or, pour toute strate $\boldsymbol{S} \subseteq \mathcal{F}_{\boldsymbol{Y}}$ et chaque $y \in \boldsymbol{S}$, il existe un voisinage V_y de y dans $\boldsymbol{S}$ qui est contractile et f-distingué. Par changement de base, on a
$$\big(\mathbb{R}f_!\mathscr{F}^\bullet\big)|_{V_y} = \mathbb{R}f_{V_y,!}\big(\mathscr{F}^\bullet|_{f^{-1}V_y}\big)$$
où $f_{V_y} := f|_{f^{-1}V_y}$. Ce qui nous conduit à considérer le cas d'un diagramme cartésien de projections canoniques
$$\begin{array}{ccc} V_y \times (\boldsymbol{F};\mathcal{F}) & \xrightarrow{q} & (\boldsymbol{F};\mathcal{F}) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_{\boldsymbol{F}}} \\ V_y & \xrightarrow{c_{V_y}} & \mathrm{pt} \end{array}$$
où $(\boldsymbol{F},\mathcal{F})$ est un espace stratifié et d'un complexe $\mathscr{F}^\bullet \in D^b(V_y \times \boldsymbol{F})$ cohomologiquement constructible par rapport à la filtration de $V_y \times \mathcal{F}$. Comme V_y est contractile, on a $\mathscr{F}^\bullet \equiv q^{-1}(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{F}})$ et donc (3.7.3-(f))
$$\mathbb{R}p_!\mathscr{F}^\bullet = \mathbb{R}p_!\Big(\underline{k}_{V_y} \boxtimes (\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{F}})\Big) = \underline{\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F};\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{F}})}_{V_y},$$
et $\mathbb{R}p_!\mathscr{F}^\bullet \in D^b_{\mathrm{cc}}(V_y)$ puisque $\boldsymbol{F} = f^{-1}y$ est compact par hypothèse (3.6.3-(e)). ∎

3.8.5. Remarque. On prendra garde du fait que dans l'énoncé de la proposition précédente, l'hypothèse qui demande aux fibres de f d'être compactes n'est pas équivalente à la propreté de f. Par exemple, l'inclusion $i_{\boldsymbol{U}} : \boldsymbol{U} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ d'un ouvert vérifie bien cette l'hypothèse alors $i_{\boldsymbol{U}}$ n'est généralement pas propre.

On remarquera aussi que la compacité des fibres n'intervient que pour garantir la finitude des groupes $I\!H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F};\mathscr{F}^\bullet)$. Or, lorsque $\boldsymbol{F}$ est un ouvert d'un espace **compact** topologiquement stratifié $(\overline{\boldsymbol{F}};\mathcal{G})$ tel que la trace sur $\boldsymbol{F}$ de la filtration $\mathcal{G}$ raffine celle de $\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}}$, on dit alors que $(\boldsymbol{F};\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}})$ est **compactifiable**, on a $\mathscr{G}^\bullet := i^{\overline{\boldsymbol{F}}}_{\boldsymbol{F}!}(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{F}}) \in D^b_{\mathcal{G}\text{-cc}}(\overline{\boldsymbol{F}})$ et la suite exacte longue associée au triangle exact $\Delta(\boldsymbol{F},\overline{\boldsymbol{F}},\overline{\boldsymbol{F}}\backslash\boldsymbol{F};\mathscr{G}^\bullet)$ donne un encadrement de $I\!H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F};\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{F}})$ par $I\!H^{m-1}(\overline{\boldsymbol{F}}\backslash\boldsymbol{F};\mathscr{G}^\bullet)$ et $I\!H^m(\overline{\boldsymbol{F}};\mathscr{G}^\bullet)$ tous les deux de dimension finie puisque $\overline{\boldsymbol{F}}$ et $\overline{\boldsymbol{F}}\backslash\boldsymbol{F}$ sont compacts (3.6.3-(e)). Il s'ensuit que l'hypothèse « *à fibres compactes* » peut être remplacée par « *à fibres compactifiables* » ([17]). Dans le cas algébrique complexe cette hypothèse peut même être effacée puisque si $f,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ sont algébriques complexes, les fibres de f sont des variétés algébriques stratifiées et il est bien connu qu'elles sont compactifiables.

§4. Prolongement intermédiaire, perversité, homologie d'intersection

La notion de «*perversité*» a été introduite par Goresky-MacPherson dans [GoMc$_1$] comme une "mesure" de l'impossibilité de rendre transverses deux simplexes sur un espace topologique singulier, ce qui est à la base de l'obstruction pour la dualité de Poincaré sur de tels espaces. En voici un extrait de [GoMc$_2$] où la notion est définie.

> A *perversity* is a sequence of integers $\bar{p} = (p_2, p_3, \ldots, p_n)$ with $p_2 = 0$ and $p_c \leqslant p_{c+1} \leqslant p_c + 1$. We shall often write $p(c)$ instead of p_c. There are several perversities of particular importance:
>
> the zero perversity $\bar{0} = (0,0,0,....,0)$
> the lower middle perversity $\overline{m} = (0,0,1,1,2,2,3,\ldots)$
> the upper middle perversity $\overline{n} = (0,1,1,2,2,3,3,\ldots)$
> the logarithmic perversity $\bar{l} = (0,1,2,2,3,3,4,4,\ldots)$
> the sublogarithmic perversity $\bar{s} = (0,0,1,1,2,2,3,\ldots)$
> the top perversity $\bar{t} = (0,1,2,3,4,5,\ldots)$.
> For any perversity $\bar{p}$, the *complementary* perversity is defined to be
>
> $$\bar{t} - \bar{p} = (0, 1-p_3, 2-p_4, 3-p_5, \ldots).$$
>
> For example, $\bar{0}$ and $\bar{t}$ are complementary, as are $\overline{m}$ and $\overline{n}$.

On aura remarqué dans les définitions de «*pseudovariété*» et de «*perversité*» un certain nombre de restrictions, notamment :

Res-i) La contrainte $\mathrm{codim}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\Sigma}) \geqslant 2$ dans la définition de pseudovariété.
Res-ii) Le type de croissance imposée à une perversité $\bar{p}$.
Res-iii) L'égalité $p_2 = 0$.

[17] *Cf.* [BoAl] §V 10.6 p. 167.

Dans cette section et les suivantes, nous verrons que ces restrictions s'imposent naturellement pour étendre la dualité de Poincaré sur les variétés topologiques aux pseudovariétés, mais aussi, plus profondément, pour garantir l'indépendance de l'homologie d'intersection vis-à-vis des stratifications.

Rappelons pour terminer que dans nos calculs explicites autour de la dualité de Poincaré (numérique) de l'homologie d'intersection des espaces topologiques très simples, nous avons déjà rencontré (Res-i) comme nécessaire à la dualité de Poincaré, et souligné que (Res-iii) était imposée sur tous les "bons" exemples.

Nous reprenons dans ce qui suit les paragraphes des notes [A] concernant le prolongement intermédiaire et les complexes d'intersections pour la «*perversité moyenne*» pour les replacer dans le contexte des perversités générales.

4.1 Équivalence de catégories de Deligne

On reprend les notations de 3.3 concernant la donnée d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ muni d'une filtration fermée $\boldsymbol{\mathcal{F}}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \Big(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_d \supseteq \boldsymbol{X}_{d-1} \supseteq \boldsymbol{X}_{d-2} \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{X}_0 \supseteq \boldsymbol{X}_{-1} = \varnothing\Big)$$
$$\Big(\varnothing = \boldsymbol{U}^{-1} \underset{i_{-1}}{\subseteq} \boldsymbol{U}^0 \underset{i_0}{\subseteq} \boldsymbol{U}^1 \underset{i_1}{\subseteq} \cdots \underset{i_{d-2}}{\subseteq} \boldsymbol{U}^{d-1} \underset{i_{d-1}}{\subseteq} \boldsymbol{U}^d = \boldsymbol{X}\Big)$$

où $\boldsymbol{U}^c := \boldsymbol{X} \backslash \boldsymbol{X}_{d-(c+1)}$. On note aussi $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{X}_{d-1}$ et $\boldsymbol{S}^c := \boldsymbol{X}_{d-c} \backslash \boldsymbol{X}_{d-(c+1)}$.

4.1.1. Prolongement intermédiaire des faisceaux. Pour toute suite croissante d'entiers naturels $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3 \ldots)$, le «*prolongement intermédiaire relatif à* $(\boldsymbol{\mathcal{F}}, \bar{p})$», est le foncteur :

$$i_{!*}^{\boldsymbol{\mathcal{F}},\bar{p}} : \mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{U}^0) \rightsquigarrow D^b(\boldsymbol{X})$$

défini par :

$$\boxed{i_{!*}^{\boldsymbol{\mathcal{F}},\bar{p}} := \big(\tau_{\leqslant p_n} I\!R\iota_{n-1*}\big) \circ \cdots \circ \big(\tau_{\leqslant p_2} I\!R\iota_{1*}\big) \circ \big(\tau_{\leqslant p_1} I\!R\iota_{0*}\big)}$$

4.1.2. Exercice

a) Montrer que lorsque $\boldsymbol{S}^{c+1}$ est vide, la troncature $\tau_{\leqslant c+1}$ est inoffensive et la composée $\big(\tau_{\leqslant p_{c+2}} I\!Ri_{c+1*}\big) \circ \big(\tau_{\leqslant p_{c+1}} I\!Ri_{c*}\big)$ peut être remplacée par $\big(\tau_{\leqslant p_{c+2}} I\!R(i_{c+1} \circ i_c)_*\big)$.

b) Montrer, plus généralement, que si $\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet \in D^+(\boldsymbol{U}^c)$ est tel que

$$\begin{cases} [\![\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [0, p_c] \\ [\![(I\!Ri_{c*}\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet)|_{\boldsymbol{S}^{c+1}}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [0, p_c] \end{cases}$$

alors $\tau_{\leqslant p_{c+1}} I\!Ri_{c*}\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet \equiv I\!Ri_{c*}\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet$.

c) Soit $(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{\mathcal{F}}|_{\boldsymbol{V}})$ la donnée d'un ouvert de $\boldsymbol{X}$ muni de la filtration induite par $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. Alors

$$i_{\boldsymbol{V}}^{-1} \circ i_{!*}^{\boldsymbol{\mathcal{F}};\bar{p}} \equiv i_{!*}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}|_{\boldsymbol{V}};\bar{p}} \circ i_{\boldsymbol{V}}^{-1}$$

4.1.3. Théorème (Deligne). *Le prolongement intermédiaire* $i_{!*}^{\boldsymbol{\mathcal{F}},\bar{p}}$ *établit une équivalence de catégories entre* $\mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{U}^0)$ *et la sous-catégorie pleine de* $D_k^b(\boldsymbol{X})$ *des complexes de faisceaux* $\boldsymbol{\mathscr{F}}^\bullet$ *vérifiant les trois conditions suivantes.*

(0) $\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet|_{U^0}=0$, *pour tout* $m\neq 0$;

et pour chaque $c\geqslant 1$, *les conditions de «support»* (S) *et de «cosupport»* (S') :

(S) $\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet|_{S^c}=0$, *pour tout* $m>p_c$; (S') $\mathscr{H}^m_{S^c}\mathscr{F}^\bullet=0$, *pour tout* $m<p_c+2$.

L'image essentielle de $i_{!*}^{\mathcal{F},\bar{p}}$ *est une sous-catégorie pleine abélienne de* $D^b_k(\boldsymbol{X})$.

4.1.4. Prolongement intermédiaire des systèmes locaux. Lorsque $(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$ est un espace topologiquement stratifié, la restriction du foncteur de prolongement intermédiaire à la sous-catégorie $\mathrm{Loc}_k(\boldsymbol{U}^0)$, a son image essentielle, notée dorénavant :

$$\mathfrak{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X}):=i_{!*}^{\mathcal{F},\bar{p}}\big(\mathrm{Loc}_k(\boldsymbol{U}^0)\big)\,,$$

contenue dans $D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$ (application itérée de 3.6.5 et troncatures) où la bidualité de Grothendieck-Verdier est satisfaite. Le théorème de Deligne se formule alors de la manière suivante.

Théorème. *Lorsque* $(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$ *est un espace topologiquement stratifié purement de dimension* $d_{\boldsymbol{X}}$, *on a*

$$\boxed{\mathfrak{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X}):=i_{!*}^{\mathcal{F},\bar{p}}(\mathrm{Loc}(\boldsymbol{U}^0))\subseteq D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})}$$

et les objets de $\mathfrak{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X})$ *sont les complexes* $\mathscr{F}^\bullet\in D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$ *vérifiant*

$$\begin{cases}\text{(a)} & [\![\mathscr{F}^\bullet|_{U^0}]\!]_{\mathrm{ch}}\subseteq\{0\}\,;\\ \text{(b)} & [\![\mathscr{F}^\bullet|_{S^c}]\!]_{\mathrm{ch}}\subseteq\,]-\infty,p_c]\,;\\ \text{(c)} & [\![(\mathcal{D}_{\boldsymbol{X}}^\bullet\mathscr{F}^\bullet)[-d_{\boldsymbol{X}}]|_{S^c}]\!]_{\mathrm{ch}}\subseteq\,]-\infty,p'_c]\,.\end{cases}$$

où, nous avons noté $p'_c:=(c-2)-p_c$.

Démonstration. Immédiat d'après 3.6.3, le théorème de Deligne 4.1.3, et en appliquant l'estimation d'amplitudes 3.6.3-(c). ∎

4.2 Perversité et pseudovariétés

4.2.1. Définition. Une application $\bar{p}:\{2,3,\ldots\}\to\mathbb{N}$ croissante est une «*perversité*» lorsque l'application $\bar{p}':c\mapsto p'_c:=(c-2)-p_c$ est croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Dans ce cas $\bar{p}'$ est la «*perversité complémentaire de* $\bar{p}$». On a

$$(\bar{p}+\bar{p}')(k)=c-2\,,\qquad(\diamond)$$

et $\bar{p}$ est la perversité complémentaire de $\bar{p}'$.

4.2.2. Remarques et exercices

a) Les perversités sont les applications $\bar{p}:\{2,3,\ldots\}\to\mathbb{N}$ vérifiant

$$p_2=0\quad\text{et}\quad p_c\leqslant p_{c+1}\leqslant p_c+1\,.$$

b) L'idée dans la définition 4.2.1 est d'assurer les conditions d'application du théorème de Deligne pour la suite $\bar{p}'$. La disparition de 1 dans le domaine de $\bar{p}$ s'explique alors par le fait que l'égalité ($\diamond$) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$ pour $c=1$. Il faudra alors exclure l'appel à l'indice $c=1$ dans le prolongement intermédiaire, autrement dit, les stratifications que nous devrons considérer doivent être dépourvues de strates de codimension 1, *i.e.* $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{X}_{d-2}$.

c) Étant données deux perversités $\bar{p},\bar{q}$, on note $\bar{p}\leqslant\bar{q}$ lorsque $p_c\leqslant q_c$ pour tout c. L'ensemble des perversités et partiellement ordonné par cette relation et possède deux éléments extrémaux, à savoir :

$$\begin{cases} \bar{0} : c\mapsto 0\,, & \text{la perversité nulle} \quad (\text{« } \textit{zero perversity} \text{ » en anglais}),\\ \bar{t} : c\mapsto c-2\,, & \text{la perversité maximum} \quad (\text{« } \textit{top perversity} \text{ » en anglais}). \end{cases}$$

Si $\bar{p},\bar{q}$ sont des perversités, les applications $c\mapsto \sup(p_c,q_c)$ et $c\mapsto \inf(p_c,q_c)$ sont des perversités. En particulier, l'ordre partiel `$\leqslant$´ est filtrant supérieurement et inférieurement.

4.2.3. Définition. Une « *pseudovariété de dimension d* » est un espace topologiquement stratifié $(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$, purement de dimension d, dans lequel $\boldsymbol{S}^1=\varnothing$. La pseudovariété est « *orientable* » (resp. « *orientée* ») lorsque la variété topologique $\boldsymbol{U}^0$ l'est.

L'expression « $\boldsymbol{X}$ *est une pseudovariété (orientable, orientée)* », sans préciser la stratification, sera synonyme de « *il existe une stratification de pseudovariété (orientable, orientée) pour* $\boldsymbol{X}$ ».

4.2.4. Exercice. Prouver que si $(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$ est une pseudovariété dans laquelle $\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}$ est orientable, l'ouvert $\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{G}}$ de toute stratification de pseudovariété $\mathcal{G}$ de $\boldsymbol{X}$ l'est également. Enfin, si $\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}$ est orienté, il existe une unique orientation sur $\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{G}}$ compatible à celle de $\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}$.

4.3 Homologie d'intersection des pseudovariétés

Soient $(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$ une pseudovariété et $\mathscr{L}\in\mathrm{Loc}(\boldsymbol{U}^0)$. On appelle « *complexe d'intersection pour la perversité $\bar{p}$, à coefficients dans $\mathscr{L}$* », le complexe de faisceaux

$$\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\mathcal{F},\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L}) := i^{\mathcal{F},\bar{p}}_{!*}(\mathscr{L})$$

On note alors pour $m\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} I_{\mathcal{F},\bar{p}}H^m(\boldsymbol{X};\mathscr{L}) = I\!R^m\,\Gamma(\boldsymbol{X};\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\mathcal{F},\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L}))\\ I_{\mathcal{F},\bar{p}}H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L}) = I\!R^m\,\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\mathcal{F},\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})) \end{cases}$$

le « *m-ième groupe d'homologie d'intersection (resp. à support compact) de $\boldsymbol{X}$ pour la perversité $\bar{p}$, à coefficients dans le système local $\mathscr{L}$* ».

4.3.1. Théorème. *Soient* $(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$ *une pseudovariété et* $\bar{p}$ *une perversité.*

a) *Pour tout système local* $\mathscr{L}\in\mathrm{Loc}(\boldsymbol{U}^0)$, *on a :*

$$\boxed{\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\big(\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\mathcal{F},\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})\big)\equiv\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\mathcal{F},\bar{p}'}\big(\boldsymbol{X};(\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{U}^0}\mathscr{L}[-\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X})])\big)[\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X})]}$$

b) *En particulier*

$$I_{\mathcal{F},\bar{p}}H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})\equiv I_{\mathcal{F},\bar{p}'}H^{d_X-m}\big(\boldsymbol{X};\mathscr{H}\!\mathscr{o}\mathscr{m}(\mathscr{L},\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{U}^0})\big)$$

et

$$\boxed{I_{\mathcal{F},\bar{p}}H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})=I_{\mathcal{F},\bar{p}}H^m(\boldsymbol{X};\mathscr{L})=0\,,\ \textit{pour } m\notin[0,\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X})]}$$

c) *Si* $\boldsymbol{X}$ *est en plus orientable,*

$$\boxed{I_{\mathcal{F},\bar{p}}H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})\equiv I_{\mathcal{F},\bar{p}'}H^{d_X-m}\big(\boldsymbol{X};\mathscr{L}^{\vee}\big)}$$

d) *Les conditions* (4.1.4-(b,c)) *caractérisant* $\mathscr{T}^{\bullet}\in\mathcal{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X})$ *deviennent :*

$$\text{(b')}\ [\![\mathscr{T}^{\bullet}|_{\boldsymbol{S}^c}]\!]_{\mathrm{ch}}\subseteq[0,p_c]\quad\textit{et}\quad\text{(c')}\ [\![(\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{T}^{\bullet})[-d_{\boldsymbol{X}}]|_{\boldsymbol{S}^c}]\!]_{\mathrm{ch}}\subseteq[0,p'_c]\,.$$

Démonstration. Corollaire immédiat de 4.1.4 et du théorème de Deligne 4.1.3. ∎

§5. Caractère intrinsèque de l'homologie d'intersection

5.1 Filtrations à strates lisses

Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique. On rappelle que dans une filtration fermée $\mathcal{F}=\big(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_d\supseteq\boldsymbol{X}_{d-1}\supseteq\cdots\supseteq\boldsymbol{X}_1\supseteq\boldsymbol{X}_0\supseteq\varnothing\big)$ on appelle (par abus) « *strate de codimension* c » chaque composante connexe non vide de $\boldsymbol{S}^c=\boldsymbol{X}_{d-c}\backslash\boldsymbol{X}_{d-c-1}$.

5.1.1. Définition. Lorsque $\boldsymbol{X}$ est de dimension cohomologique d, la filtration sera dite « *à strates lisses* » lorsque $\boldsymbol{S}^c$ est une variété topologique de dimension $d-c$.

5.1.2. Remarque. Une stratification purement dimensionnelle est une filtration à strates lisses vérifiant, en plus, la condition d'équisingularité locale.

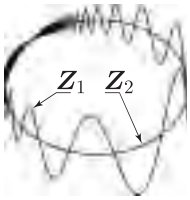
5.2 Raffinements de filtrations

5.2.1. Définition. Étant données deux filtrations fermées $\mathcal{F},\mathcal{G}$ de $\boldsymbol{X}$, on dira que « $\mathcal{G}$ *raffine* $\mathcal{F}$ », et on note $\mathcal{F}\preccurlyeq\mathcal{G}$, lorsque $\boldsymbol{U}^c_{\mathcal{F}}\supseteq\boldsymbol{U}^c_{\mathcal{G}}$ pour tout c. En particulier, chaque strate de $\mathcal{F}$ est réunion de strates de $\mathcal{G}$. La relation `$\preccurlyeq$´ est un ordre partiel sur l'ensemble des filtrations fermées de $\boldsymbol{X}$.

Lorsque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des filtrations à strates lisses, $\mathcal{F}\preccurlyeq\mathcal{G}$, si et seulement si, chaque strate de $\mathcal{F}$ est réunion de strates de $\mathcal{G}$.

5.2.2. Remarques et notations

a) On notera $\mathrm{Str}_{\mathrm{psv}}(\boldsymbol{X})$ l'ensemble des stratifications de pseudovariété de $\boldsymbol{X}$. Le système $(\mathrm{Str}_{\mathrm{psv}}(\boldsymbol{X});\preccurlyeq)$ **n'est pas toujours** filtrant supérieurement. Par exemple, si $\boldsymbol{Z}$ est une sous-variété topologique de $\mathbb{R}^3$ compacte de dimension 1 (un cercle), la filtration $\boldsymbol{X}\supseteq\boldsymbol{Z}\supseteq\varnothing$ est une stratification de pseudovariété de $\boldsymbol{X}$. Dans l'exemple illustré ci-après, un raffinement $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ des stratifications $\boldsymbol{X}\supseteq\boldsymbol{Z}_i\supseteq\varnothing$ doit nécessairement vérifier $\boldsymbol{Z}_1\cap\boldsymbol{Z}_2\subseteq\boldsymbol{S}^3_{\mathcal{F}}$. Mais $\boldsymbol{S}^3_{\mathcal{F}}$, muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^3$, est une variété topologique de dimension 0, et alors $\boldsymbol{Z}_1\cap\boldsymbol{Z}_2$ est discret donc fini puisque compact, ce qui n'est évidemment pas le cas.



b) Lorsque $\boldsymbol{X}$ est une variété algébrique complexe, l'ensemble $\boldsymbol{X}_{\mathrm{reg}}$ des points réguliers est un ouvert de Zariski de $\boldsymbol{X}$ et c'est une variété différentielle, son complémentaire $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\Sigma}}:=\boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{X}_{\mathrm{reg}}$ est une variété algébrique de codimension positive. L'itération de cette idée donne une filtration canonique $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{\Sigma}}$ de $\boldsymbol{X}$ par de fermés de Zariski dont les différences successives sont des variétés différentielles de dimensions paires, c'est « *la filtration par lieux singuliers de* $\boldsymbol{X}$ ». Cette filtration est à strates lisses mais ne vérifie pas toujours la condition d'équisingularité locale (3.1-(b)) comme le montre l'exemple classique du parapluie de Whitney. En géométrie algébrique on démontre qu'il existe néanmoins un raffinement $\boldsymbol{\mathcal{F}}_W\succcurlyeq\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{\Sigma}}$ vérifiant les conditions de Whitney qui garantissent, elles, la condition d'équisingularité locale. On note $\mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ l'ensemble des stratifications algébriques de $\boldsymbol{X}$ vérifiant ces conditions, on a

$$\varnothing\neq\mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})\subseteq\mathrm{Str}_{\mathrm{psv}}(\boldsymbol{X})\,.$$

Le système $(\mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X});\preccurlyeq)$ est filtrant supérieurement.

5.3 Comparaison de complexes d'intersection

Un des aspects du problème de l'indépendance des complexes d'intersection relativement aux filtrations concerne leur comportement vis-à-vis des raffinements. Étant données deux filtrations fermées $\boldsymbol{\mathcal{F}}\preccurlyeq\boldsymbol{\mathcal{G}}$ de $\boldsymbol{X}$ et une perversité $\bar{p}$, on a, pour chaque c, un morphisme canonique de foncteurs définis sur $D^+(\boldsymbol{U}^c_{\mathcal{F}})$:

$$\big(\tau_{\leqslant p_{c+1}}\mathbb{R}i^{\mathcal{F}}_{c*}(_)\big)|_{\boldsymbol{U}^{c+1}_{\mathcal{G}}}\longrightarrow\tau_{\leqslant p_{c+1}}\mathbb{R}i^{\mathcal{G}}_{c*}\big(_|_{\boldsymbol{U}^c_{\mathcal{G}}}\big)$$

$$\begin{array}{ccc} U^c_{\mathcal{F}} & \xrightarrow[\subseteq]{i^{\mathcal{F}}_c} & U^{c+1}_{\mathcal{F}} \\ \cup\uparrow & & \uparrow\cup \\ U^c_{\mathcal{G}} & \xrightarrow[\subseteq]{i^{\mathcal{G}}_c} & U^{c+1}_{\mathcal{G}} \end{array}$$

qui n'est pas nécessairement un isomorphisme dans la mesure où le diagramme de droite n'est pas toujours cartésien (*cf.* 4.1.2), mais qui permet de construire, de proche en proche, un morphisme canonique

$$i^{\mathcal{F},\bar{p}}_{!*}(_)\xrightarrow{\Xi(_)}i^{\mathcal{G},\bar{p}}_{!*}(_)$$

qui prolonge le morphisme de restriction $\mathrm{Fais}(\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}})\to\mathrm{Fais}(\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{G}})$.

Le théorème suivant affirme que $\Xi(\mathscr{L})$ est un isomorphisme lorsque $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ sont des filtrations lisses et **lorsque** $i^{\mathcal{F},\bar{p}}_{!*}(\mathscr{L})$ est $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-cc. Cette dernière condition étant vérifiée dans

le cas des pseudovariétés, le théorème établit donc l'invariance du complexe d'intersection lors d'un raffinement lisse d'une stratification de pseudovariété.

Le contexte en apparence inutilement général dans lequel nous énonçons le théorème trouvera toute sa motivation lors de l'étude de l'indépendance des complexes d'intersection vis-à-vis des stratifications, qu'elles admettent ou non des raffinements communs.

5.3.1. Théorème. *Soient $\boldsymbol{X}$ un espace topologique et $\bar{p}$ une perversité.*

a) *Si $\mathcal{F} \preccurlyeq \mathcal{G}$ sont deux filtrations fermées à strates lisses de $\boldsymbol{X}$ ne possédant pas de strates de codimension 1, on a*

$$\boxed{\mathcal{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X}) \cap D^d_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{IC}_{\mathcal{G};\bar{p}}(\boldsymbol{X})}$$

b) *Si $\mathcal{F} \preccurlyeq \mathcal{G}$ sont deux stratifications de pseudovariété de $\boldsymbol{X}$, on a*

$$\boxed{\mathcal{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{IC}_{\mathcal{G};\bar{p}}(\boldsymbol{X})}$$

et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Loc}(\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow[\simeq]{i^{\mathcal{F},\bar{p}}_{!*}} & \mathcal{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X}) \\ {\scriptstyle\text{restriction}}\downarrow & \bigoplus & \downarrow{\scriptstyle\subseteq} \\ \mathrm{Loc}(\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{G}}) & \xrightarrow[i^{\mathcal{G},\bar{p}}_{!*}]{\simeq} & \mathcal{IC}_{\mathcal{G};\bar{p}}(\boldsymbol{X}) \end{array}$$

est commutatif.

c) *Soient $\mathcal{F}_1 \preccurlyeq \mathcal{G} \succcurlyeq \mathcal{F}_2$ trois stratifications de pseudovariété de $\boldsymbol{X}$.*
Étant donnés $\mathscr{L}_i \in \mathrm{Loc}(\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}_i})$ vérifiant $\mathscr{L}_1|_{\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{G}}} \equiv \mathscr{L}_2|_{\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{G}}}$, il existe un isomorphisme canonique

$$\boxed{\underline{IC}^{\bullet}_{\mathcal{F}_1,\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L}_1) \equiv \underline{IC}^{\bullet}_{\mathcal{F}_2,\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L}_2)}$$

Démonstration

a) Les filtration $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ étant uniquement des filtrations lisses, il n'y a aucune raison pour que le critère de cosupport de 4.1.4 s'applique, nous utilisons donc le critère général du théorème de Deligne 4.1.3 valable pour toute filtration fermée.

Soit $\mathscr{F}^{\bullet} \in \mathcal{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X}) \cap D^d_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$. Comme $\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}} \supseteq \boldsymbol{U}^0_{\mathcal{G}}$ on a trivialement

$$[\![\mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{G}}}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [\![\mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq \{0\} \tag{0}$$

Pour toute strate $\boldsymbol{T}$ de $\mathcal{G}$ de codimension $\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}} > 0$ deux cas peuvent se produire :

i) $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}$, alors

$$\begin{cases} [\![\mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{T}}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [\![\mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq \{0\} \\ [\![i^!_{\boldsymbol{T}}\mathscr{F}^{\bullet}]\!]_{\mathrm{ch}} = [\![i^!_{\boldsymbol{T}}(\mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}})]\!]_{\mathrm{ch}} = [\![\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{T}} i^{-1}_{\boldsymbol{T}} \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{G}}}(\mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}})]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq \{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}\} \end{cases}$$

ii) $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{S}$, où $\boldsymbol{S}$ est une strate de codimension $\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}} > 0$ de $\mathcal{F}$, alors

$$\begin{cases} [\![\mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{T}}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [\![\mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{S}}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq]-\infty, p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}}] \\ [\![i^!_{\boldsymbol{T}}\mathscr{F}^{\bullet}]\!]_{\mathrm{ch}} = [\![i^!_{\boldsymbol{T}}(i^!_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^{\bullet})]\!]_{\mathrm{ch}} = [\![\mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{T}} i^{-1}_{\boldsymbol{T}} \mathcal{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{S}}(i^!_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^{\bullet})]\!]_{\mathrm{ch}} \\ \qquad\qquad \subseteq [p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}} + 2 + \mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}} - \mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}, +\infty[\end{cases}$$

Tandis que les conditions pour que $\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{JC}_{\mathcal{G};\bar{p}}(\boldsymbol{X})$ sont, dans les deux cas,

$$[\![\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{T}}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq]-\infty, p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}}] \quad \text{et} \quad [\![i_{\boldsymbol{T}}^! \mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}}+2, +\infty[\,,$$

et résultent de (i) et (ii) des inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leqslant p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}} \leqslant \mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}-2\,, & \text{si } \boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}, \\ p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}} \leqslant p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}} \leqslant p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}} + \mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}} - \mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}\,, & \text{si } \boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{S} \text{ et } \mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}} > 0, \end{cases}$$

toutes caractéristiques des perversités.

b) Conséquence immédiate de (a) puisque $\mathcal{JC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X}) \subseteq D^d_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$.

c) Car $\underline{IC}^\bullet_{\mathcal{F}_i,\bar{p}}\big(\boldsymbol{X};\mathscr{L}_i\big) \equiv \underline{IC}^\bullet_{\mathcal{G},\bar{p}}\big(\boldsymbol{X};\mathscr{L}_i|_{U^0_{\mathcal{G}}}\big)$ d'après (a). ∎

5.3.2. Remarque. Lorsque l'on se place dans le contexte général d'un espace topologiquement stratifié $(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$ purement de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$ et pour une suite croissante de nombres naturels quelconque $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots)$, on a, pour tout raffinement $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, tout $\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{JC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X})$ **tel que** $\mathscr{F}^\bullet|_{U^0_{\mathcal{F}}}$ **est nulle part nul**, et toute strate $\boldsymbol{T} \in \mathcal{G}$ contenue dans $\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$,

$$[\![\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{T}}]\!]_{\mathrm{ch}} = [\![(\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)[-d_{\boldsymbol{X}}]|_{\boldsymbol{T}}]\!]_{\mathrm{ch}} = \{0\}\,,$$

D'autre part, la condition de cosupport pour $\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{JC}_{\mathcal{G},\bar{p}}(\boldsymbol{X})$ sur $\boldsymbol{T}$ avec $\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}} > 0$ est

$$[\![(\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)[-d_{\boldsymbol{X}}]|_{\boldsymbol{T}}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq]-\infty, p'_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}}]\,.$$

Par conséquent, si $\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}} > 0$ et si $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}$, on doit avoir

$$0 \leqslant p'_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}} = \mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}} - 2 - p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}}\,.$$

En particulier $\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}} \geqslant 2$. Il s'ensuit que si l'on recherche des conditions générales garantissant l'invariance par raffinement, il faut exclure dans les stratifications les strates de codimension 1. Ceci donne une deuxième raison pour se limiter aux «*pseudovariétés*» (*cf.* 4.2.2-(a)).

L'exercice suivant est destiné à justifier la notion de perversité.

5.3.3. Exercice. Notons $\mathbb{T}^n$ le tore n-dimensionnel $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ dont on rappelle que les nombres de Betti sont tous non nuls entre les degrés 0 et n. Soient $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}^m \times \mathrm{c}_s(\mathbb{T}^n)$ et $\boldsymbol{\Sigma} := \mathbb{R}^m \times \{s\}$. La filtration fermée $\mathcal{F} = \boldsymbol{X} \supseteq \boldsymbol{\Sigma} \supseteq \varnothing$ définit une structure de pseudo-variété de dimension $m+n+1$ sur $\boldsymbol{X}$.

a) Montrer que pour toute suite croissante d'entiers naturels $\bar{p}$ (pas forcément une perversité !), on a l'**égalité** :

$$[\![(\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\,\underline{IC}^\bullet_{\mathcal{F},\bar{p}}(\boldsymbol{X};\underline{k}_{\boldsymbol{U}^0}))[-d_{\boldsymbol{X}}]|_{\boldsymbol{\Sigma}}]\!]_{\mathrm{ch}} = [0, p'_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{X}}}]\,.$$

b) Soit $\mathcal{G}$ une filtration fermée

$$\boldsymbol{X} \supseteq \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_m \supseteq \boldsymbol{\Sigma}_{m-1} \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{\Sigma}_0 \supseteq \varnothing$$

obtenue en rajoutant les fermés d'une filtration d'espace topologiquement stratifié pour $\mathbb{R}^m$ (*cf.* lemme de 3.1.1-(a)). Montrer que **si** $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\mathcal{F},\bar{p}}(\boldsymbol{X};\underline{k}_{\boldsymbol{U}^0})) \in \mathcal{IC}_{\mathcal{G},\bar{p}}(\boldsymbol{X})$ quelle que soit la filtration $\mathcal{G}$ ainsi définie, alors

$$p'_{c+1} \leqslant p'_c, \text{ pour tout } c+1 \leqslant c \leqslant c+1+m.$$

c) En déduire l'équivalence entre les deux assertions suivantes concernant une suite croissante de nombres naturels $\bar{p}$:

- Pour toute pseudovariété $(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$ et toute stratification de pseudovariété $\mathcal{G}$ de $\boldsymbol{X}$, telle que $\mathcal{F} \preccurlyeq \mathcal{G}$, on a $\mathcal{IC}_{\mathcal{F},\bar{p}}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{IC}_{\mathcal{G},\bar{p}}(\boldsymbol{X})$.
- $\bar{p}$ est une perversité.

5.3.4. Remarque. Le théorème de comparaison 5.3.1 est très bien adapté au contexte algébrique puisque $\mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ est filtrant supérieurement, par contre il ne peut être appliqué tel quel au cas topologique (*cf.* 5.2.2-(a)). Pour cela, on aura besoin de pousser plus loin la notion de variété topologique, plus précisément, on aura besoin de la notion de variété cohomologique.

5.4 Variétés cohomologiques

5.4.1. Définition. Par analogie au cas des variétés topologiques, un espace topologique $\boldsymbol{X}$, métrisable, dénombrable à l'infini, localement compact, localement contractile, de dimension cohomologique finie, sera dit «*variété cohomologique (sur k) de dimension d*» lorsque

$$\begin{cases} [\![\mathbb{D}^{\bullet}_{k;\boldsymbol{X}}]\!]_{\mathrm{ch}} = \{-d\}\,; \text{ et que} \\ \mathscr{H}^{-d}\,\mathbb{D}^{\bullet}_{k;\boldsymbol{X}} \text{ est localement libre de rang 1.} \end{cases}$$

Le faisceau $\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{k;\boldsymbol{X}} := \mathscr{H}^{-d}\,\mathbb{D}^{\bullet}_{k;\boldsymbol{X}}$ est le «*faisceau d'orientations*» de la variété cohomologique.

Dans tout espace topologique $\boldsymbol{Y}$, une partie $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Y}$ sera dite «*sous-variété cohomologique (de dimension d) de $\boldsymbol{Y}$*» si elle est localement fermée dans $\boldsymbol{Y}$ et si, munie de la topologie induite, c'est une variété cohomologique (de dimension d).

5.4.2. Proposition. *La dimension d'une variété cohomologique sur k est la dimension cohomologique sur k de l'espace topologique sous-jacent.*

Démonstration. Soit $\boldsymbol{X}$ une variété cohomologique de dimension d. Les propriétés topologiques de $\boldsymbol{X}$ permettent d'affirmer que

$$\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}) \leqslant d \iff H^{d+m}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U};k) = 0 \quad \begin{cases} \text{pour tout } \boldsymbol{U} \text{ contractile}\,; \\ \text{pour tout } m \geqslant 1. \end{cases}$$

La raison de cette équivalence est, de manière succincte, la suivante :

- Un faisceau c-mou est $\Gamma(\boldsymbol{X}, _)$-acyclique, essentiellement parce que $\boldsymbol{X}$ est dénombrable à l'infini.
- L'inégalité $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}) \leqslant d$ résulte alors de montrer que tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}_k(\boldsymbol{X})$ admet une résolution c-molle de longueur d, et comme $\mathscr{F}$ est plat (k est un corps !), il suffit même que $\underline{k}_{\boldsymbol{X}}$ admette une telle résolution (*cf.* 3.4.1, 3.4.6-(f)).
- Pour toute résolution injective

$$\mathbf{0} \to \underline{k}_{\boldsymbol{X}} \to \mathscr{I}^0 \to \mathscr{I}^1 \to \cdots \xrightarrow{d-1} \mathscr{I}^d \xrightarrow{d},$$

on a $H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}; \ker(d)) \equiv H^{d+m}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}; \underline{k}_{\boldsymbol{X}})$, pour $m \geqslant 1$. Il s'ensuit que $\ker(d)$ est c-mou lorsque $H^{d+m}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}; k) = 0$ pour toute ouvert dans une base de la topologie de $\boldsymbol{X}$, en particulier, pour tout ouvert contractile.

Dans notre cas, on a par dualité de Grothendieck-Verdier :

$$H^{d+m}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}, \underline{k}_{\boldsymbol{X}})^{\vee} \equiv \mathbb{H}^{-d-m}(\boldsymbol{U}; \mathbb{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{U}}) \equiv \mathbb{H}^{-d-m}(\boldsymbol{U}; \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{k;\boldsymbol{U}}[d]) \equiv H^{-m}(\mathrm{pt}; k)$$

puisque $\boldsymbol{U}$ est contractile et que $\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{k;\boldsymbol{X}}$ est localement libre de rang 1. Alors :

$$H^{d+m}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}, k) = \begin{cases} k & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et par conséquent $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}; k) \leqslant d$. D'autre part, si $\boldsymbol{U}$ est contractile et relativement compact dans $\boldsymbol{X}$, on a $H^*(\boldsymbol{X}; i_{\boldsymbol{U}!}\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) \equiv H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U}; k)$, d'où $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}; k) \geqslant d$. ∎

5.4.3. Exercice

a) Montrer qu'une variété cohomologique de dimension nulle est un espace topologique discret au plus dénombrable.

b) Montrer qu'un espace topologiquement stratifiable qui est une variété cohomologique de dimension 1 est une réunion disjointe au plus dénombrable d'espaces homéomorphes à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^1$.

5.4.4. Une variété cohomologique non topologique. Soit $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ l'espace projectif réel de dimension n. On rappelle que sa cohomologie sur un corps k de caractéristique différente de 2 vérifie :

$$H^m(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); k) = \begin{cases} k & \text{si m=0} \\ 0 & \text{si } 0 < m < n \end{cases} \quad \text{et} \quad H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); k) = \begin{cases} k & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} > 0 \end{cases}$$

de sorte que $\mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{R})$ à les mêmes nombres de Betti que la sphère $\mathbb{S}^{2n+1}$ ([18]). On rappelle aussi que ce qui distingue les projectifs réels de dimension impaires des autres c'est le fait qu'ils sont orientables, leurs faisceaux d'orientations sont donc constants.

[18] Le morphisme $H^*(\mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{R}); k) \to H^*(\mathbb{S}^{2n+1}; k)$ induit par la projection canonique $\mathbb{S}^{2n+1} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{R})$ est déjà un isomorphisme ($\mathrm{char}(k) \neq 2$).

Notons $\mathbb{L} := \mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{X} := \mathrm{c}_0\big(\mathbb{L}\big)$. D'après 3.7.4-(c) le germes du dualisant vérifient, pour tous $t \in \boldsymbol{I} := [0,1[$ et $\ell \in \mathbb{L}$,

$$(I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{X}})_{t\cdot\ell} = \begin{cases} (I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{I}})_t \otimes (I\!D^{\bullet}_{\mathbb{L}})_\ell \equiv k[1] \otimes k[d_{\mathbb{L}}] \text{ si } t \neq 0, \\ \mathrm{Hom}_k(I\!R\Gamma_{\mathrm{c}}(\mathrm{c}(\mathbb{L});k),k) \equiv \mathrm{Hom}_k(\overline{H}(\mathbb{L},k)[-1],k) \text{ autrement.} \end{cases}$$

et donc $[\![I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}]\!]_{\mathrm{ch}} = \{-d_{\mathbb{L}} - 1\}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{X}$ est une variété cohomologique de dimension $d_{\mathbb{L}}+1$, si et seulement si, $I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}$ est localement constant, et même constant car $\boldsymbol{X}$ est contractile.

Notons $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{X}\backslash\{0\}$ et considérons le triangle exact $\Delta(\{0\},\boldsymbol{X},\boldsymbol{U};I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{X}})$:

$$i_{0*}\,i_0^{!}\,I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} \longrightarrow I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} \longrightarrow I\!R i_{\boldsymbol{U}*}\,I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{U}} \xrightarrow{[+1]}$$

Comme $i_0^{!}\,I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} = k$, le terme de gauche n'intervient pas en degrés < 1 dans la suite longue des faisceaux dérivés et alors

$$\mathscr{H}^{-1-d_{\mathbb{L}}}\,I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} \equiv \mathscr{H}^{-1-d_{\mathbb{L}}}\,I\!R i_{\boldsymbol{U}*}\,I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{U}} \underset{1}{\equiv} i_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{H}^{-1-d_{\mathbb{L}}}\,I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{U}} \underset{2}{\equiv} i_{\boldsymbol{U}*}\underline{k}_{\boldsymbol{U}} \underset{3}{\equiv} \underline{k}_{\boldsymbol{X}}$$

où $\big(\underset{1}{\equiv}\big)$ s'explique par l'exactitude à gauche de $i_{\boldsymbol{U}*}$ et le fait que $I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{U}}$ est cohomologiquement nul en degrés $< -1 - d_{\mathbb{L}}$, $\big(\underset{2}{\equiv}\big)$ résulte de l'équivalence $I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{U}} \equiv I\!D^{\bullet}_{]0,1[} \boxtimes I\!D^{\bullet}_{\mathbb{L}} \equiv \underline{k}_{\boldsymbol{U}}[1+d_{\mathbb{L}}]$ puisque $\mathbb{L}$ est orientable, et $\big(\underset{3}{\equiv}\big)$ car 0 de codimension $\geqslant 2$ dans $\boldsymbol{X}$.

Ces remarques prouvent que $\boldsymbol{X} = \mathrm{c}_0(\mathbb{P}^{2n+1})(\mathbb{R})$ est une variété cohomologique orientable de dimension $2(n+1)$ sur tout corps de caractéristique $\neq 2$. L'espace topologique topologique $\boldsymbol{X}$ **n'est pourtant pas** une variété topologique. En effet, si tel en était le cas, on devrait avoir pour $k = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$H_0^*(\boldsymbol{X};\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[-2(n+1)]$$

alors que

$$H_0^*(\boldsymbol{X};\mathbb{F}_2) = \overline{H}^{*-1}\big(\mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{R});\mathbb{F}_2\big) = \mathbf{0}^{[0]} \oplus \mathbf{0}^{[1]} \oplus \mathbb{F}_2^{[2]} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}_2^{[2n+2]}$$

d'après des résultats classiques en topologie algébrique sur le projectif réel ([19]).

5.4.5. Exercice. Remarquer que ce qui fait marcher l'exemple précédent c'est essentiellement le fait que $\mathbb{L}$ *est une variété cohomologique dont la cohomologie globale est celle de la sphère de dimension* $\dim_{\mathrm{ch}}(\mathbb{L})$, c'est ce que l'on appelle une « *sphère cohomologique* »

En déduire que les espaces $\mathrm{c}_0(\mathbb{P}^{2n})$ et $\mathrm{c}_0(\mathbb{P}^{2n} \amalg \mathbb{P}^{2m})$ $(m,n>0)$ ne sont pas des variétés cohomologiques sur un corps, quelle que soit la caractéristique de celui-ci.

5.5 Dualité de Poincaré sur les variétés cohomologiques

Les conditions de 5.4.1 qui définissent une variété cohomologique sur un corps k sont tout ce dont on a besoin pour suivre les raisonnements de la section "Dualité de Poincaré sur les variétés topologiques" (3.5). Le théorème 3.5.6 est donc vérifié par les variétés cohomologiques sur un corps k.

[19] *Cf.* Greenberg-Harper. *Algebraic topology*, th. 19.27, p. 121.

5.5.1. Espaces cohomologiquement stratifiés. Maintenant que nous disposons de la classe des variétés cohomologiques sur k, nous pouvons étendre la classe d'espaces topologiquement stratifiables par la notion d'« *espace* ***cohomologiquement*** *stratifié (sur k)* » dont la définition est la suivante (*cf.* 3.1) :

a) En dimension 0. Il s'agit des ensembles finis ou dénombrables munis de la topologie discrète ;

b) En dimension positive d, il s'agit d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ muni d'une filtration par des parties fermées : $\mathcal{F} := \big(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_d \supseteq \boldsymbol{X}_{d-1} \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{X}_0 \supseteq \varnothing\big)$, telle que pour chaque $c = 0, \ldots, d$, l'espace $\boldsymbol{S}^c = \boldsymbol{X}_{d-c} \backslash \boldsymbol{X}_{d-(c+1)}$, lorsqu'il n'est pas vide, est une variété *cohomologique* de dimension $d-c$ telle que, pour chaque $x \in \boldsymbol{S}^c$, il existe un voisinage ouvert N_x de x dans $\boldsymbol{X}$, un espace compact $\mathbb{L}(x)$ *cohomologiquement* stratifié de dimension $c-1$, et un homéomorphisme

$$\phi : (\boldsymbol{S}^c \cap N_x) \times \mathrm{c}(\mathbb{L}(x)) \xrightarrow{\sim} N_x \qquad (\diamond)$$

qui respecte les filtrations. Lorsque N_x est tel que $\boldsymbol{S}^c \cap N_x$ est contractile (toujours possible car $\boldsymbol{S}^c$ est localement contractile), il est dit « *distingué* ».

On notera $(\mathrm{Str}_{\text{psv-ch}}(\boldsymbol{X}); \preccurlyeq)$ l'ensemble des stratifications de pseudovariété cohomologique de $\boldsymbol{X}$ muni de l'ordre partiel de raffinement.

Un espace cohomologiquement stratifié sera dit « *purement dimensionnel de dimension d* », resp. « *pseudovariété cohomologique* », lorsqu'il vérifie les conditions analogues du cas topologique 3.1.4, resp. 4.2.3.

Lorsque la condition d'équisingularité $(\diamond)$ n'est pas garantie, on parlera de « *filtration à strates cohomologiquement lisses* » ce qui généralise la notion topologique correspondante 5.1.1.

5.5.2. Commentaire. On peut imaginer des définitions beaucoup plus générales que celles des sections précédentes pour passer des objets « *topologiques* » aux objets « *cohomologiques* », mais celles que nous avons données nous suffiront pour l'application que nous avons en vue, à savoir : l'étude de l'indépendance des stratifications dans l'homologie d'intersection.

Les théorèmes : d'homotopie 3.3.6, de cohomologie des liens 3.3.7, de stabilité des catégories $\mathcal{F}$-cc et de bidualité 3.6.3, continuent d'être vrais pour les espaces cohomologiquement stratifiés. Le prolongement intermédiaire et le théorème de Deligne 4.1.3 qui ne parlent que des filtrations fermées restent évidemment valables, de même, pour terminer, que la dualité de Poincaré pour l'homologie d'intersection 4.3.1 et le théorème de comparaison 5.3.1.

Dans ces généralisations le gain n'est pas négligeable. Par exemple, dans 5.4.4 nous avons montré que l'espace $\boldsymbol{X} := \mathrm{c}_0\big(\mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{R})\big)$ est une variété cohomologique qui n'est pas une variété topologique. Il admet clairement une structure de pseudovariété $\mathcal{F}$ d'où les

complexes d'intersection pour les différentes perversités $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X};\underline{k}_{U^0})$. Or, comme $\boldsymbol{X}$ est une variété cohomologique, on a $\underline{k}_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{IC}_{\bar{p}}(\boldsymbol{X})$ quelle que soit $\bar{p}$, et comme toute stratification topologique est cohomologique et raffine la stratification triviale, le théorème de comparaison 5.3.1, donne aussitôt : $\underline{k}_{\boldsymbol{X}} \equiv \underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X};\underline{k}_{U^0})$, quelle que soit $\bar{p}$.

5.5.3. Tableau récapitulatif des caractérisations des complexes d'intersection. Le tableau suivant indique pour chaque type de filtration fermée d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ les résultats déjà établis dans le cadre « *topologique* » et qui restent valables dans le cadre « *cohomologique* ».

Filtrations $\mathcal{F} \preccurlyeq \mathcal{G}$	Propriétés
Fermées	Le prolongement intermédiare est défini pour toute suite croissante d'entiers naturels $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$ $i_{!*}^{\mathcal{F};\bar{p}} : \mathrm{Loc}(\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}) \underset{\equiv}{\rightsquigarrow} \mathcal{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X}) \subseteq D^+(\boldsymbol{X})$ Condition de (co)supports pour $\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X})$: $[\![i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq]-\infty, p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}}]$; $[\![i_{\boldsymbol{S}}^{!}\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}}+2, +\infty[$
À strates lisses. Sans strate de codimension 1.	Pour toute perversité $\bar{p} = (p_2, p_3, \ldots)$: $\mathcal{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X}) \cap D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{IC}_{\mathcal{G};\bar{p}}(\boldsymbol{X})$
Stratifications	Pour toute suite croissante $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$ $\mathcal{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X}) \subseteq D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$ Condition de (co)supports pour $\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X})$: $[\![i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq]-\infty, p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}}]$; $[\![i_{\boldsymbol{S}}^{-1}(\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)[-d_{\boldsymbol{X}}]]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq]-\infty, p'_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}}]$
Pseudovariétés	Pour toute perversité $\bar{p} = (p_2, p_3, \ldots)$ $\mathcal{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{IC}_{\mathcal{G};\bar{p}}(\boldsymbol{X})$ Condition de (co)supports pour $\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X})$: $[\![i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [0, p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}}]$; $[\![i_{\boldsymbol{S}}^{-1}(\mathcal{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)[-d_{\boldsymbol{X}}]]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [0, p'_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}}]$ Pour tout système local $\mathscr{L}$ au-dessus de $\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}$: $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L}) \equiv \underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\mathcal{G};\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})$ Dualité de Poincaré : $I_{\bar{p}}H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})^\vee \equiv I_{\bar{p}'}H^{d_{\boldsymbol{X}}-m}(\boldsymbol{X};\mathscr{L}^\vee)$ Si $\boldsymbol{X}$ compacte, $\dim(I_{\bar{p}}H^*(\boldsymbol{X};\mathscr{L})) < \infty$.

5.6 Filtration associée à une perversité et un système local

Étant donné un faisceau $\mathscr{F}$ sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$, il existe toujours un plus grand ouvert $\lambda(\mathscr{F})$ tel que $\mathscr{F}|_{\lambda(\mathscr{F})}$ est un système local. Il en est évidemment de même pour la famille (finie) des faisceaux dérivés d'un complexe à cohomologie bornée $\mathscr{F}^\bullet \in D^b(\boldsymbol{X})$, au-

quel cas on note $\lambda(\mathscr{F}^\bullet) = \cap_m \lambda(\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet)$; c'est le plus grand ouvert de $\boldsymbol{X}$ tel que $\mathscr{F}^\bullet|_{\lambda(\mathscr{F}^\bullet)}$ est cohomologiquement constructible.

Dans le même ordre d'idées lorsque $\boldsymbol{X}$ est localement contractile et de dimension cohomologique finie $d_{\boldsymbol{X}}$, il existe un plus grand ouvert $\boldsymbol{X}_{\mathrm{reg}} \subseteq \boldsymbol{X}$ qui soit une variété cohomologique de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$; c'est l'ouvert contenu dans $\lambda(\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}})$ sur lequel $\mathscr{H}^{-d_X}\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}$ est de rang 1 et $\mathscr{H}^m\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} = 0$ pour $m \neq -d_{\boldsymbol{X}}$.

Ainsi, pour tout $\mathscr{F}^\bullet \in D^b(\boldsymbol{X})$, l'ensemble $\lambda(\mathscr{F}^\bullet)_{\mathrm{reg}}$ est la plus grande sous-variété cohomologique de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$ sur laquelle $\mathscr{F}^\bullet$ est cohomologiquement constructible. Bien évidemment, sans hypothèses supplémentaires cet ensemble est généralement vide.

5.6.1. Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ une variété cohomologique de dimension $d_{\boldsymbol{X}} \geqslant 2$. Pour tout système local $\mathscr{L}$ défini sur $\boldsymbol{X}$ tout entier et tout fermé $\boldsymbol{F} \subseteq \boldsymbol{X}$ de dimension cohomologique $d_{\boldsymbol{F}} \leqslant d_{\boldsymbol{X}} - 2$ d'ouvert complémentaire $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{F}$, le morphisme d'adjonction $\mathscr{L} \to i^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{U}*}\left(\mathscr{L}|_{\boldsymbol{U}}\right)$ est un isomorphisme de faisceaux.*

En particulier, tout point de $\boldsymbol{F}$ admet une base de voisinages ouverts dans $\boldsymbol{X}$ dont l'intersection avec $\boldsymbol{U}$ est connexe.

Démonstration. La suite exacte longue de faisceaux dérivés associée à $\Delta(\boldsymbol{F},\boldsymbol{X},\boldsymbol{U};\mathscr{L})$ place le morphisme $\mathscr{L} \to i_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{L}|_{\boldsymbol{U}}$ entre les faisceaux $\mathscr{H}^m_{\boldsymbol{F}}\mathscr{L}$ pour $m = 0,1$. Ces faisceaux sont engendrés par les préfaisceaux sur $\boldsymbol{X}$

$$\boldsymbol{V} \rightsquigarrow H^m_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{V};\mathscr{L}) = \mathbb{H}^m(\boldsymbol{V};i^!_{\boldsymbol{F}}\mathscr{L}) = \mathbb{H}^m(\boldsymbol{V};i^!_{\boldsymbol{F}}\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \circ \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{L}) = \mathbb{H}^m(\boldsymbol{V};\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{F}}\, i^{-1}_{\boldsymbol{F}}\,\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{L})$$

Or, comme $\mathscr{L}$ est un système local sur une variété cohomologique, $\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{L}$ est cc et est concentré en degré $-d_{\boldsymbol{X}}$. D'autre part, on a :

$$\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{F}}(i^{-1}_{\boldsymbol{F}}\,\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{L}) = \mathscr{H}om(i^{-1}_{\boldsymbol{F}}\,\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{L}, \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{F}})$$

avec $[\![\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{F}}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [-d_{\boldsymbol{F}}, 0]$ (3.4-(b)), et par conséquent :

$$[\![\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{F}}\, i^{-1}_{\boldsymbol{F}}\,\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{L}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [d_{\boldsymbol{X}} - d_{\boldsymbol{F}}, d_{\boldsymbol{X}}]\,.$$

On en déduit l'annulation de $\mathscr{H}^m_{\boldsymbol{F}}\mathscr{L}$ pour $m = 0,1$. Le morphisme $\mathscr{L} \to i_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{L}|_{\boldsymbol{U}}$ est donc bien un isomorphisme.

Lorsque $\mathscr{L} = \underline{k}_{\boldsymbol{X}}$, on a $\underline{k}_{\boldsymbol{X}} \equiv i_{\boldsymbol{U}*}\underline{k}_{\boldsymbol{U}}$ et pour tout $x \in \boldsymbol{F}$ et tout ouvert contractile $\boldsymbol{V} \ni x$, on a $k = \Gamma(\boldsymbol{V};\underline{k}_{\boldsymbol{X}}) = \Gamma(\boldsymbol{V};i_{\boldsymbol{U}*}\underline{k}_{\boldsymbol{U}}) = \Gamma(\boldsymbol{V}\cap\boldsymbol{U};\underline{k}_{\boldsymbol{U}})$, d'où la deuxième partie du lemme. ∎

5.6.2. Remarques et exercices

a) La proposition précédente est généralement fausse si $\boldsymbol{X}$ n'est pas une variété cohomologique. Montrer que le bouquet de deux sphères de dimension 2 où $\boldsymbol{U}$ est le complémentaire du point de base, en est un contrexemple.

b) Donner un contrexemple avec $\boldsymbol{F}$ de codimension 1.

5.6.3. Système locaux maximaux sur les variétés cohomologiques .Contrairement au paragraphe précédent où nous avions des données globalement définies sur $\boldsymbol{X}$, nous nous intéressons maintenant à des données partielles.

Étant donnés, un espace topologique $\boldsymbol{X}$ de dimension cohomologique $d_{\boldsymbol{X}}$ et un système local $\mathscr{L}$ défini sur une sous-variété cohomologique ouverte $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ telle que $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{U}) \leqslant d_{\boldsymbol{X}} - 2$, la famille $\mathscr{R}(\mathscr{L})$, des couples $(\boldsymbol{V};\mathscr{M})$ vérifiant

$$\begin{cases} \boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{V} \text{ et } \boldsymbol{V} \text{ est une sous-variété cohomologique ouverte de } \boldsymbol{X}, \\ \mathscr{M} \text{ est un système local sur } \boldsymbol{V} \text{ tel que } \mathscr{M}|_{\boldsymbol{U}} \simeq \mathscr{L}, \end{cases}$$

ordonnée par la relation : $(\boldsymbol{V};\mathscr{M}) \preccurlyeq (\boldsymbol{V}';\mathscr{M}')$ lorsque $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{V}'$ et $\mathscr{M} \simeq \mathscr{M}'|_{\boldsymbol{V}}$, possède un unique élément maximal à isomorphisme canonique près, c'est le «*prolongement maximal de* $\mathscr{L}$», noté $(\boldsymbol{W}_{\mathscr{L}}, \widetilde{\mathscr{L}})$.

En effet, supposons l'assertion vérifiée, comme $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{U}) \leqslant d_{\boldsymbol{X}} - 2$, il en sera de même $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{U}_{\mathscr{L}}\backslash\boldsymbol{U})$ et le morphisme d'adjonction

$$\widetilde{\mathscr{L}} \longrightarrow i^{\boldsymbol{U}_{\mathscr{L}}}_{\boldsymbol{U}*}(\widetilde{\mathscr{L}}|_{\boldsymbol{U}})$$

est un isomorphisme (5.6.1). Comme $\widetilde{\mathscr{L}}|_{\boldsymbol{U}} \sim \mathscr{L}$, on voit que $\boldsymbol{W}_{\mathscr{L}} = \lambda(i^{\boldsymbol{U}_{\mathscr{L}}}_{\boldsymbol{U}*}(\widetilde{\mathscr{L}}|_{\boldsymbol{U}}))_{\mathrm{reg}}$ et $\widetilde{\mathscr{L}} := (i^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{L})|_{\boldsymbol{W}_{\mathscr{L}}}$ est l'élément maximum de la famille $\mathscr{R}(\mathscr{L})$.

Un système local $(\boldsymbol{W};\mathscr{L})$ est dit «*maximal dans* $\boldsymbol{X}$» lorsque $\boldsymbol{W}$ est une sous-variété ouverte de $\boldsymbol{X}$ et que $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}_{\mathscr{L}}$.

5.6.4. Proposition. *Soient $(\boldsymbol{V}_1;\mathscr{L}_1)$ et $(\boldsymbol{V}_2;\mathscr{L}_2)$ des systèmes locaux définis sur des sous-variétés cohomologiques ouvertes dans $\boldsymbol{X}$ et dont les complémentaires sont de codimension $\geqslant 2$. Notons $(\boldsymbol{W}_1;\widetilde{\mathscr{L}}_1)$, $(\boldsymbol{W}_2;\widetilde{\mathscr{L}}_2)$ leurs prolongements maximaux. Alors, pour tout morphisme $\varphi : \mathscr{L}_1|_{\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2} \to \mathscr{L}_2|_{\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2}$, il existe un et seul morphisme $\tilde{\varphi} : \widetilde{\mathscr{L}}_1|_{\boldsymbol{W}_1\cap\boldsymbol{W}_2} \to \widetilde{\mathscr{L}}_2|_{\boldsymbol{W}_1\cap\boldsymbol{W}_2}$ qui prolonge φ.*

Démonstration. Le complémentaire de $\boldsymbol{V}_{12} := \boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2$ dans $\boldsymbol{W}_{12} := \boldsymbol{W}_1 \cap \boldsymbol{W}_2$ étant de codimension $\geqslant 2$, on a nécessairement $\tilde{\varphi} = i^{\boldsymbol{W}_{12}}_{\boldsymbol{V}_{12}*}(\varphi)$. ∎

5.6.5. Exercice. Soit $\boldsymbol{X}$ une pseudovariété. Soit $(\boldsymbol{V};\mathscr{L})$ un système local. Montrer que pour toute filtration $\mathcal{F}$ de pseudovariété cohomologique de $\boldsymbol{X}$ telle que $\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}} \subseteq \boldsymbol{V}$, l'ouvert de définition du prolongement maximal de $\mathscr{L}$ et réunion de strates de $\mathcal{F}$.

5.6.6. Théorème. *Étant donnés : une pseudovariété $(\boldsymbol{X};\mathcal{F})$, un système local maximal $(\boldsymbol{W};\mathscr{M})$ tel que $\boldsymbol{W} \supseteq \boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}$, et une perversité $\bar{p}$, il existe une filtration fermée canonique à strates cohomologiquement lisses $\mathcal{F}(\mathscr{M},\bar{p})$ de $\boldsymbol{X}$, dépendant uniquement de $\mathscr{M}$ et de $\bar{p}$, telle que*

a) *$\mathcal{F}$ est un raffinement de $\mathcal{F}(\mathscr{M};\bar{p})$.*

b) *$\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\mathcal{F}(\mathscr{M},\bar{p});\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{M}) \equiv \underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\mathcal{G};\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{M})$ de manière canonique.*

Démonstration. L'idée est de construire la filtration $\mathcal{F}(\mathscr{M},\bar{p})$ en même temps que le prolongement intermédiaire. Notons $d := \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X})$.

D'après 5.6.5, l'ouvert $\boldsymbol{W}$ est une réunion de strates de $\mathcal{F}$. Notons $\boldsymbol{X}_d := \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{W}^0 := \boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{S}^0 := \boldsymbol{W}$, et $\boldsymbol{X}_{d-c_1} := \boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{W}$, où

$$c_1 := d - \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}_d\backslash\boldsymbol{S}^0) \geqslant 2\,.$$

Soit $i_0^{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{W}^0 \subseteq \boldsymbol{X}$ l'inclusion. Comme le complexe

$$\mathscr{P}_{c_1} := \tau_{\leqslant p_{c_1}}\left(\mathbb{R}i_{0*}^{\boldsymbol{X}}\mathscr{M}\right)|_{\boldsymbol{X}_{d-c_1}}$$

est $\mathcal{F}$-cc sur $\boldsymbol{X}_{d-c_1}$ ($\boldsymbol{X}_{d-c_1}$ est stratifié par $\mathcal{F}$), il existe une plus grande sous-variété ouverte $\boldsymbol{S}^{c_1} \subseteq \boldsymbol{X}_{d-c_1}$, non vide de dimension $d-c_1$ et sur laquelle $\mathscr{P}_{c_1}$ est cc. Cette sous-variété contient clairement toutes les strates de $\mathcal{F}$ de dimension $d-c_1$ qui sont contenues dans $\boldsymbol{X}_{d-c_1}$ de sorte que

$$c_2 := d - \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}_{d-c_1}\backslash\boldsymbol{S}^{c_1}) > c_1$$

On note alors $\boldsymbol{W}^{c_1} := \boldsymbol{S}^0 \amalg \boldsymbol{S}^{c_1}$ et $\boldsymbol{X}_{d-c_2} := \boldsymbol{X}_{d-c_1}\backslash\boldsymbol{S}^{c_1}$

Soit $i_{c_1}^{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{W}^{c_1} \subseteq \boldsymbol{X}$ l'inclusion. Comme le complexe

$$\mathscr{P}_{c_2} := \tau_{\leqslant p_{c_2}}\left(\mathbb{R}i_{c_1*}^{\boldsymbol{X}}\,\mathscr{P}_{c_1}\right)|_{\boldsymbol{X}_{d-c_2}}$$

est $\mathcal{F}$-cc sur $\boldsymbol{X}_{d-c_2}$ ($\boldsymbol{X}_{d-c_2}$ est stratifié par $\mathcal{F}$), il existe une plus grande sous-variété ouverte $\boldsymbol{S}^{c_2} \subseteq \boldsymbol{X}_{d-c_2}$, non vide de dimension $d-c_2$ et sur laquelle $\mathscr{P}_{c_2}$ est cc. Cette sous-variété contient clairement toutes les strates de $\mathcal{F}$ de dimension $d-c_2$ qui sont contenues dans $\boldsymbol{X}_{d-c_2}$ de sorte que

$$c_3 := d - \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}_{d-c_2}\backslash\boldsymbol{S}^{c_2}) > c_2$$

On note alors $\boldsymbol{W}^{c_2} := \boldsymbol{S}^0 \amalg \boldsymbol{S}^{c_1} \amalg \boldsymbol{S}^{c_2}$ et $\boldsymbol{X}_{d-c_3} := \boldsymbol{X}_{d-c_2}\backslash\boldsymbol{S}^{c_2}$

L'itération de ce processus aboutit clairement à la construction de la filtration à strates cohomologiquement lisses $\mathcal{F}(\mathscr{M};\bar{p})$ et au complexe $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\mathcal{F}(\mathscr{M},\bar{p});\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{M})$ annoncés. L'assertion (a) est claire par construction, et (b) résulte de la version cohomologique du théorème de comparaison 5.3.1-(a). ∎

5.6.7. Notations. Comme la filtration $\mathcal{F}(\mathscr{M};\bar{p})$ ne dépend que de $\mathscr{M}$ et de $\bar{p}$, la notation $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\mathcal{F}(\mathscr{M};\bar{p});\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{M})$ est redondante et sera simplifiée à $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{M})$.

Le théorème précédent montre que pour tout système local $\mathscr{L}$ dont le domaine de définition contient l'ouvert $\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}$ pour une certaine stratification de pseudovariété de $\boldsymbol{X}$, le complexe $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})$ est canoniquement isomorphe à $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{p}}(\boldsymbol{X};\widetilde{\mathscr{L}})$ et la notation $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})$ a un sens intrinsèque pour de tels systèmes locaux.

5.6.8. Mise en garde. Il n'est pas vrai en général qu'un système local maximal $(\boldsymbol{W},\mathscr{M})$ soit défini sur les strates de codimension 0 d'une stratification de pseudovariété de $\boldsymbol{X}$, même si le complémentaire de $\boldsymbol{W}$ est de codimension $\geqslant 2$. L'exemple classique consiste à considérer sur $\{0,1\}\times\mathbb{R}^2$ la relation d'équivalence qui identifie $(0,0,1/n) \sim (1,0,1/n)$ et $(0,0,0) \sim (1,0,0)$. On note $\boldsymbol{Z}$ le quotient topologique de $\{0,1\}\times\mathbb{R}^2$ par « $\sim$ ». La projection canonique $p_2 : \{0,1\}\times\mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2$ induit alors l'application $\bar{p}_2 : \boldsymbol{X} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2$ (propre de fibres

finies) et le faisceaux $\bar{p}_{2*}\underline{k}_{\boldsymbol{X}}$ est un système local maximal de rang 2 sur $\mathbb{R}^2\backslash\overline{\{(0,1/n)\}}$. Comme le sous-espace $\overline{\{(0,1/n)\}}$ n'est pas discret, il ne peut être contenu dans aucune sous-variété de dimension 0 de $\mathbb{R}^2$.

5.6.9. Théorème. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtrations de pseudovariété (cohomologique) pour $\boldsymbol{X}$. Soient $(\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}};\mathscr{L})$ et $(\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{G}},\mathscr{M})$ deux systèmes locaux et $\varphi : \mathscr{L}|_{\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}\cap\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{G}}} \to \mathscr{M}|_{\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}\cap\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{G}}}$ un morphisme. Il existe alors un unique morphisme*

$$\underline{\underline{IC}}^\bullet_{\bar{p}}(\varphi) : \underline{\underline{IC}}^\bullet_{\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L}) \longrightarrow \underline{\underline{IC}}^\bullet_{\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{M})$$

qui prolonge φ.

En particulier, si φ est un isomorphisme, $\underline{\underline{IC}}^\bullet_{\bar{p}}(\varphi)$ l'est aussi.

Démonstration. Le prolongement maximal $\widetilde{\mathscr{L}}$ de $\mathscr{L}$ est également un prolongement maximal de $\mathscr{M}$, les complexes d'intersection sont donc tous les deux canoniquement isomorphes au complexe $\underline{\underline{IC}}^\bullet_{\mathcal{F}(\bar{p}}(\boldsymbol{X};\widetilde{\mathscr{L}})$ et l'équivalence de catégories de Deligne termine la démonstration. ∎

5.7 Caractérisation intrinsèque des complexes d'intersection

5.7.1. Support cohomologique des complexes de faisceaux. Pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Fais}(\boldsymbol{X})$, on appelle « *support de $\mathscr{F}$* » l'ensemble $|\mathscr{F}| := \{x \in \boldsymbol{X} \mid \mathscr{F}_x \neq 0\}$. On prendra garde du fait que dans notre définition $|\mathscr{F}|$ n'est généralement pas une partiel localement fermée de $\boldsymbol{X}$, contrairement à la définition que l'on rencontre dans la littérature où le support est *l'adhérence* de notre ensemble $|\mathscr{F}|$.

Plus généralement, si $\mathscr{F}^\bullet \in D(\boldsymbol{X})$, on appelle « *support cohomologique de $\mathscr{F}^\bullet$* » l'ensemble $|\mathscr{F}^\bullet|_{\mathrm{ch}} := \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} |\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet|$

Lorsque $\mathscr{F}^\bullet \in D^b_{\mathcal{F}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$, $|\mathscr{F}^\bullet|_{\mathrm{ch}}$ est une réunion finie de strates de $\mathcal{F}$.

5.7.2. Notation. Pour toute perversité $\bar{p}$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, on note

$$p^{-1}(\ell) := \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell > p_c \text{ pour tout } c \in \mathbb{N}\,; \\ \inf\{c \mid p_c \geqslant \ell\} & \text{autrement.} \end{cases}$$

Le théorème suivant donne une caractérisation des complexes d'intersection pour une pseudovariété $\boldsymbol{X}$, indépendante du choix d'une stratification pour $\boldsymbol{X}$.

5.7.3. Théorème. *Soit $\boldsymbol{X}$ une pseudovariété de dimension $d_{\boldsymbol{X}} := \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X})$. Un complexe de faisceaux $\mathscr{F}^\bullet \in D(\boldsymbol{X})$ est un complexe d'intersection pour la perversité $\bar{p}$, si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

a) *$\mathscr{F}^\bullet \in D^b_{\mathcal{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$ pour une certaine stratification $\mathcal{F}$ de pseudovariété cohomologique.*

b) *$\mathscr{H}^i\mathscr{F}^\bullet = \mathbf{0}$ pour tout $i < 0$ et il existe une sous-variété cohomologique ouverte $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$, de complémentaire de codimension minorée par 2, telle que $\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{U}}$ est un système local.*

c) *Pour tout* $\ell > 0$, *on a :*

$$\begin{cases} \dim_{\mathrm{ch}} \overline{|\mathscr{H}^\ell \mathscr{F}^\bullet|} \leqslant d_{\boldsymbol{X}} - p^{-1}(\ell), \\ \dim_{\mathrm{ch}} \overline{|\mathscr{H}^{\ell - d_{\boldsymbol{X}}} \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}} \mathscr{F}^\bullet|} \leqslant d_{\boldsymbol{X}} - p'^{-1}(\ell). \end{cases}$$

La condition (c) *peut être remplacée par :*

c') $$\begin{cases} \dim_{\mathrm{ch}} \overline{\{x \mid h^\ell[i_x^{-1}\mathscr{F}^\bullet] \neq 0\}} \leqslant d_{\boldsymbol{X}} - p^{-1}(\ell), \text{ pour tout } \ell > 0, \\ \dim_{\mathrm{ch}} \overline{\{x \mid h^\ell[i_x^{!}\mathscr{F}^\bullet] \neq 0\}} \leqslant d_{\boldsymbol{X}} - p'^{-1}(d_{\boldsymbol{X}} - \ell), \text{ pour tout } \ell < d_{\boldsymbol{X}}. \end{cases}$$

Démonstration. Il est clair que tout complexe d'intersection pour la perversité $\bar{p}$ vérifie les conditions. Réciproquement, la filtration $\mathcal{F}$ étant fixée, le complexe $\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}}$ est cohomologiquement localement constant. Notons $i : \boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}} \cap \boldsymbol{U} \hookrightarrow \boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}$ l'inclusion. Pour chaque $\ell \in \mathbb{Z}$, le morphisme d'adjonction $\mathscr{H}^\ell \mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}} \to i_* \mathscr{H}^\ell \mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}} \cap \boldsymbol{U}}$ est un isomorphisme de systèmes locaux d'après 5.6.1 et donc $\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}}$ est quasi-isomorphe à un système local d'après (b). Les conditions (c) (resp. (c')) jointes au fait que $\mathscr{F}^\bullet$ est $\mathcal{F}$-clc donnent alors les conditions de support et cosupport pour que $\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X})$. Les détails sont laissés en exercice. ∎

5.8 Caractère local des complexes d'intersection

Proposition. *Soit* $\boldsymbol{X}$ *une pseudovariété. Pour tout complexe de faisceaux* $\mathscr{F}^\bullet \in D(\boldsymbol{X})$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathscr{F}^\bullet$ *est un complexe d'intersection pour la perversité* $\bar{p}$.

b) $\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{U}}$ *est un complexe d'intersection pour la perversité* $\bar{p}$ *quel que soit l'ouvert* $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$.

c) $\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{U}_\alpha}$ *est un complexe d'intersection pour la perversité* $\bar{p}$, *pour chaque ouvert* $\boldsymbol{U}_\alpha$ *d'un certain recouvrement ouvert* $\boldsymbol{X} := \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \boldsymbol{U}_\alpha$.

Démonstration. Les implications (a)⇒(b)⇒(c) sont immédiates. Lorsque (c) est vérifiée, il existe sur chaque ouvert $\boldsymbol{U}_\alpha$ un système local maximal $(\boldsymbol{W}_\alpha; \mathscr{L}_\alpha)$, une filtration fermée canonique à strates cohomologiquement lisses $\mathcal{F}(\mathscr{L}_\alpha, \bar{p})$ et un isomorphisme canonique $\underline{IC}^\bullet_{\mathcal{F}(\mathscr{L}_\alpha,\bar{p});\bar{p}}(\boldsymbol{X}; \mathscr{L}_\alpha) \equiv \mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{U}_\alpha}$ (5.6.6). Le caractère intrinsèque des constructions garantit l'égalité des filtrations induites sur $\boldsymbol{U}_\alpha \cap \boldsymbol{U}_\beta$, *i.e.* :

$$\mathcal{F}(\mathscr{L}_\alpha, \bar{p}) \cap \big(\boldsymbol{U}_\alpha \cap \boldsymbol{U}_\beta\big) = \mathcal{F}(\mathscr{L}_\beta, \bar{p}) \cap \big(\boldsymbol{U}_\alpha \cap \boldsymbol{U}_\beta\big)$$

de sorte que la famille de filtrations fermées $\{\mathcal{F}(\mathscr{L}_\alpha, \bar{p})\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ définit (par recollement) une filtration fermée $\mathcal{F}(\mathscr{L}; \bar{p})$ à strates cohomologiquement lisses où $\mathscr{L}$ est le système local maximal associé au recollement des systèmes locaux $\mathscr{L}_\alpha$. Le complémentaire de l'ouvert de définition de $\mathscr{L}$ est de codimension > 1.

Ceci étant, les condition de 5.7.3 sont satisfaites par $\underline{IC}^\bullet_{\mathcal{F}(\mathscr{L},\bar{p});\bar{p}}(\boldsymbol{X}; \mathscr{L})$ puisqu'il en est ainsi de ses restrictions sur les $\boldsymbol{U}_\alpha$ où la condition 5.7.3-(a) fait référence à la restriction d'une stratification de pseudovariété de $\boldsymbol{X}$ fixe, *i.e.* indépendante de $\alpha \in \mathfrak{A}$; la validité de cette condition est assurée par le théorème 5.6.6-(a). Par conséquent, $\underline{IC}^\bullet_{\mathcal{F}(\mathscr{L},\bar{p});\bar{p}}(\boldsymbol{X}; \mathscr{L})$ est un complexe d'intersection sur $\boldsymbol{X}$ pour la perversité $\bar{p}$.

Enfin, les conditions 5.7.3 sont vérifiées par $\mathscr{F}^\bullet$ puisque localement canoniquement isomorphes (en catégories dérivées) à $\underline{\underline{IC}}^\bullet_{\mathfrak{F}(\mathscr{L},\overline{p});\overline{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})$. Le complexe $\mathscr{F}^\bullet$ est donc *globalement* isomorphe au complexe d'intersection $\underline{\underline{IC}}^\bullet_{\mathfrak{F}(\mathscr{L},\overline{p});\overline{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})$, CQFD. ∎

§6. Formule de Künneth pour l'homologie d'intersection

6.1 Quelques opérations sur les perversités

Notons $\mathscr{P}$ l'ensemble des « *perversités* » $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, *i.e.* des applications vérifiant

$$0=p(0)=p(1)=p(2)\quad\text{et}\quad p(c)\leqslant p(c+1)\leqslant p(c)+1,\ \text{pour tout } c\in\mathbb{N}.$$

Les propriétés suivantes sont élémentaires :

$\mathscr{P}$-a) La relation `$\preccurlyeq$´ définie dans $\mathscr{P}$ par

$$p\preccurlyeq q\Longleftrightarrow p(c)\leqslant q(c),\ \text{pour tout } c\in\mathbb{N}.$$

est un ordre partiel qui est filtrant supérieurement et inférieurement.

$\mathscr{P}$-b) Étant données deux perversités p,q, on note $p\wedge q$ et $p\vee q$ les perversités :

$$c\mapsto(p\wedge q)(c):=\inf(p(c),q(c))\quad\text{et}\quad c\mapsto(p\vee q)(c):=\sup(p(c),q(c))$$

On a $p\vee q=\inf\{r\in\mathscr{P}\mid p\preccurlyeq r\ \&\ q\preccurlyeq r\}$ et $p\wedge q=\sup\{r\in\mathscr{P}\mid r\preccurlyeq p\ \&\ r\preccurlyeq q\}$.

$\mathscr{P}$-c) Les applications $\mathbf{0}:c\mapsto 0$ et $\boldsymbol{t}:c\mapsto\sup(c-2,0)$ sont les éléments respectivement plus petit et plus grand de $(\mathscr{P},\preccurlyeq)$.

$\mathscr{P}$-d) Le système $(\mathscr{P},\vee,\wedge,\mathbf{0},\boldsymbol{t})$ est une algèbre de Boole.

$\mathscr{P}$-e) Pour tout $p\in\mathscr{P}$, l'application $p':=\boldsymbol{t}-p$ appartient à $\mathscr{P}$. L'application $(_)':\mathscr{P}\to\mathscr{P}$ est une involution sans point fixe qui échange $\vee\leftrightarrow\wedge$, et $\preccurlyeq\leftrightarrow\succcurlyeq$.

$\mathscr{P}$-f) Pour chaque $\theta\in[0,1]$, les applications « *affines* » :

$$0\leqslant c\xmapsto[\Lambda_\theta]{\lambda_\theta}\begin{cases}\lambda_\theta(c):=\lfloor\theta(c-2)\rfloor,\\ \Lambda_\theta(c):=\lceil\theta(c-2)\rceil,\end{cases}$$

où, $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière de x et $\lceil x\rceil=\lfloor x\rfloor+1$, sont des perversités. On a

$$\boldsymbol{t}:=\Lambda_1=\lambda_1,\quad\mathbf{0}=\Lambda_0=\lambda_0,\quad\lambda'_\theta=\Lambda_{1-\theta},\quad\Lambda'_\theta=\lambda_{1-\theta}$$

6.1.1. Définition. On dira qu'une perversité p est « *de Künneth* » lorsque

$$\boxed{p(a)+p(b)\leqslant p(a+b)\leqslant p(a)+p(b)+2}\qquad(\diamond)$$

pour tous $a,b\in\mathbb{N}$.

6.1.2. Remarque. Les inégalités $(\diamond)$ sont vérifiées par toute perversité p lorsque $a\leqslant 2$ ou $b\leqslant 2$. Par conséquent, p est de Künneth, si et seulement si, $(\diamond)$ est vérifiée pour tous $a,b>2$.

6.1.3. Proposition

a) *p est de Künneth, si et seulement si, p' l'est.*

b) *La perversité λ_θ est de Künneth si et seulement si :*

$$\begin{cases} \text{(b-1)} & \theta \in [0,1/2]\,, \quad \textit{ou bien} \\ \text{(b-2)} & \theta = \dfrac{x}{2x-1}\,, \quad \textit{pour un certain } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

En particulier, λ_θ n'est pas de Künneth pour $\theta \in]2/3,1[$.

Démonstration. L'assertion (a) résulte d'une vérification immédiate (*cf.* 6.1.2).

Les inégalités ($\diamond$) à tester sont

$$\lfloor\theta(a-2)\rfloor + \lfloor\theta(b-2)\rfloor \underset{1}{\leqslant} \lfloor\theta(a+b)-2\rfloor \underset{2}{\leqslant} \lfloor\theta(a-2)\rfloor + \lfloor\theta(b-2)\rfloor + 2\,,$$

pour tous $a>2$ et $b>2$.

$\left(\underset{\mathbf{1}}{\leqslant}\right)$**.** Immédiate car $\theta(a-2)+\theta(b-2) = \theta(a+b-2) - 2\theta \leqslant \theta(a+b-2)$. L'inégalité est satisfaite quelle que soit la valeur de $\theta \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

$\left(\underset{\mathbf{2}}{\leqslant}\right)$**.** Pour $m \in \mathbb{N}$, notons $\varepsilon_m := \theta m - \lfloor\theta m\rfloor \in [0,1[\subseteq \mathbb{R}$. On a :

$$\lfloor\theta m + \theta n + 2\theta\rfloor = \lfloor\theta m\rfloor + \lfloor\theta n\rfloor + \lfloor\varepsilon_m + \varepsilon_n + 2\theta\rfloor\,, \tag{$*$}$$

où $\varepsilon_m + \varepsilon_n < 2$, et l'inégalité $\left(\underset{2}{\leqslant}\right)$ est équivalente à :

$$\varepsilon_m + \varepsilon_n + 2\theta < 3\,, \text{ pour tous } m,n \in \mathbb{N}. \tag{$\dagger$}$$

On a (b-1) puisque $\varepsilon_m + \varepsilon_n + 2\theta \leqslant \varepsilon_m + \varepsilon_n + 1 < 3$.

Si $\theta > 1/2$ est irrationnel, la somme $\varepsilon_m + \varepsilon_n$ prendra des valeurs aussi proche que l'on veut de 2, auxquels cas $\varepsilon_m + \varepsilon_n + 2\theta > 3$ et λ_θ n'est pas de Künneth.

Si $\theta > 1/2$ est rationnel, on pose $\theta = x/y$ avec $\operatorname{pgcd}(x,y) = 1$. La plus grande valeur atteinte de ε_m vaut $1 - 1/y$ et le terme de gauche dans ($\dagger$) atteint la valeur $2(1-1/y) + 2x/y$. Nous cherchons à vérifier l'inégalité $2(1-1/y) + 2x/y < 3$, ou, ce qui revient au même,

$$2x \leqslant y + 1 \tag{$\ddagger$}$$

Or, comme $\theta > 1/2$, on a aussi $2x \geqslant y+1$ et donc $\theta = x/(2x-1)$, CQFD. ∎

6.1.4. Remarque. Dans ce qui précède on a justifié les assertions suivantes :

a) Pour toute perversité p il y a équivalence entre

i) $p(a) + p(b) \leqslant p(a+b)$, pour tous $a,b \in \mathbb{N}$;

ii) $p'(a+b) \leqslant p'(a) + p'(b) + 2$, pour tous $a,b \in \mathbb{N}$;

b) $\lambda_\theta(a) + \lambda_\theta(b) \leqslant \lambda_\theta(a+b)$, pour tous $a,b \in \mathbb{N}$ et $\theta \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

6.1.5. Proposition. *Étant données deux perversités p,q, l'application*

$$\mathbb{N} \ni c \longmapsto (p \star q)(c) := \sup\left\{p(a) + q(b) \;\middle|\; a+b=c\right\}$$

est une perversité.

L'opération $\star : \mathscr{P} \times \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ *vérifie pour tous* $p, q \in \mathscr{P}$ *et* $\theta \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ *:*

(a) $(p \star q) \star r = p \star (q \star r)$, (b) $p \star \mathbf{0} = p$, (c) $p \star \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}$,
(d) $(\lambda_\theta \star \lambda_\theta) = \lambda_\theta$, (e) $p \vee q \preccurlyeq p \star q$, (f) $(p \star q)' \preccurlyeq p' \star q'$,

g) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $(p \star q)' = p' \star q'$,
ii) $p = q$, $p \star p = p$ *et* $p' \star p' = p'$,
iii) $p = q$ *et* p *est de Künneth.*

Démonstration. Les assertions (a,b,c,e) sont presque immédiates. L'assertion (d) est équivalente à 6.1.4. L'assertion (f) résulte de (e) qui implique $(p \star q)' \preccurlyeq p' \wedge q'$ et donc :

$$(p \star q)' \preccurlyeq p' \wedge q' \preccurlyeq p' \vee q' \preccurlyeq p' \star q' \qquad (*)$$

Lorsque (g-i) est vérifié, les inégalités $(*)$ montrent que $p' \wedge q' = p' \vee q'$ et alors

$$p = q \quad \text{et} \quad p' = p' \star p' \quad \text{et} \quad p \star p = p;$$

des conditions qui impliquent immédiatement (g-i). Comme d'autre part les conditions $p = p \star p$ et $p' = p' \star p'$ sont équivalentes à $p(a) + p(b) \leqslant p(a+b) \leqslant p(a) + p(b) + 2$, on a aussitôt (g-ii)⇔(g-iii). ∎

6.1.6. Remarque exercice. Si $\lambda_\theta = \lambda_\theta \star \lambda_\theta$ est valable quel que soit $\theta \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, il n'en est pas de même pour Λ_θ.

a) Montrer l'équivalence

$$\Lambda_\theta = \Lambda_\theta \star \Lambda_\theta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left\{ \frac{m}{m + (m+1)} \;\middle|\; m \in \mathbb{N} \right\}$$

b) Les deux perversités moyennes sont de Künneth.

6.2 Homologie d'intersection d'un produit de pseudovariétés

Théorème. *Soient* $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ *deux pseudovariétés et* $\mathscr{L}, \mathscr{M}$ *deux systèmes locaux définis sur les ouverts lisses de certaines stratifications de pseudovariété de* $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{Y}$*. Pour toute perversité de Künneth* $\bar{p}$*, p.e. l'une des perversités moyennes, il existe un isomorphisme canonique*

$$\underline{\underline{IC}}^\bullet_{\bar{p}}(\boldsymbol{X}; \mathscr{L}) \boxtimes \underline{\underline{IC}}^\bullet_{\bar{p}}(\boldsymbol{Y}; \mathscr{M}) \equiv \underline{\underline{IC}}^\bullet_{\bar{p}}(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}; \mathscr{L} \boxtimes \mathscr{M})$$

et donc

$$\boxed{I_{\bar{p}}H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}; \mathscr{L}) \otimes I_{\bar{p}}H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}; \mathscr{M}) \equiv I_{\bar{p}}H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}; \mathscr{L} \boxtimes \mathscr{M})}$$

Si, de plus, $I_{\bar{p}}H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}, \mathscr{L})$ *est de dimension finie pour tout* m *(p.e. si* $\boldsymbol{X}$ *est compacte)*

$$\boxed{I_{\bar{p}}H^*(\boldsymbol{X}; \mathscr{L}) \otimes I_{\bar{p}}H^*(\boldsymbol{Y}; \mathscr{M}) \equiv I_{\bar{p}}H^*(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}; \mathscr{L} \boxtimes \mathscr{M})}$$

Démonstration. On fixe des stratifications $\mathcal{F}$ de $\boldsymbol{X}$ et $\mathcal{G}$ de $\boldsymbol{Y}$ adaptées aux systèmes locaux $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ respectivement. On munit $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$ de la stratification produit $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$.

Étant données des strates $\boldsymbol{S}\in\mathcal{F}$ et $\boldsymbol{T}\in\mathcal{G}$, on a la condition de support :

$$\begin{aligned}\llbracket \underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})\boxtimes\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{p}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})|_{\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}}\rrbracket_{\mathrm{ch}} &= \llbracket \underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})|_{\boldsymbol{S}}\rrbracket_{\mathrm{ch}}+\llbracket \underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{p}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})|_{\boldsymbol{T}}\rrbracket_{\mathrm{ch}}\\ &\subseteq [0,p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}}+p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}}]\subseteq[0,(\bar{p}\star\bar{p})(\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}})]\end{aligned}$$

et la condition de cosupport, par 3.7.4-(d),

$$\begin{aligned}\llbracket \underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{p}'}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})\boxtimes\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{p}'}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})|_{\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}}\rrbracket_{\mathrm{ch}} &= \llbracket \underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{p}'}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})|_{\boldsymbol{S}}\rrbracket_{\mathrm{ch}}+\llbracket \underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{p}'}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})|_{\boldsymbol{T}}\rrbracket_{\mathrm{ch}}\\ &\subseteq [0,p'_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}}+p'_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}}]\subseteq[0,(\bar{p}'\star\bar{p}')(\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}})]\end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque $\bar{p}$ est de Künneth, on a $\bar{p}=\bar{p}\star\bar{p}$ et $\bar{p}'=\bar{p}'\star\bar{p}'$ et le complexe $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})\boxtimes\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{p}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$ est bien d'intersection pour la perversité $\bar{p}$, donc canoniquement isomorphe à $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{p}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y};\mathscr{L}\boxtimes\mathscr{M})$.

La deuxième partie est conséquence du théorème de Künneth à supports compacts pour les complexes de faisceaux 3.7.5. La formule de Künneth à supports fermés pour la perversité $\bar{p}$ résulte de dualiser la formule de Künneth à supports compacts pour la perversité $\bar{p}'$ dont on sait qu'elle est aussi de Künneth (6.1.3-(a)). L'hypothèse à propos de la finitude des nombres de Betti intervient uniquement pour assurer que le dual du produit tensoriel est bien le produit tensoriel des duaux. ∎

6.2.1. Remarque. Le théorème précédent est en quelque sorte générique par rapport à la perversité et aux pseudovariétés. En effet, l'opération `$\star$´ entre perversités est une borne grossière des sommes $p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}}+q_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}}$ qui interviennent dans l'étude des conditions de support d'un complexe donné $\underline{IC}^{\bullet}_{\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})\boxtimes\underline{IC}^{\bullet}_{\bar{q}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$ ce pourquoi une meilleure borne serait :

$$\mathbb{N}\ni c\longmapsto \sup\left\{p_a+q_b\;\middle|\; a+b=c\;\&\; a\leqslant d_{\boldsymbol{X}},\; b\leqslant d_{\boldsymbol{Y}}\right\}$$

De même, lorsque les pseudovariétés $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ admettent des stratifications où il n'existe pas de strates dans certaines codimensions, la borne en question peut à nouveau être améliorée et les restrictions concernant la perversité dans la formule de Künneth peuvent être allégées. En ce sens, un cas qui mérite d'être relevé est celui où $\boldsymbol{X}$ est une variété cohomologique munie d'un système local $\mathscr{L}$ globalement défini ; dans ce cas, on vérifie aisément l'existence d'un isomorphisme

$$\mathscr{L}\boxtimes\underline{IC}^{\bullet}_{\bar{p}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})\equiv\underline{IC}^{\bullet}_{\bar{p}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y};\mathscr{L}\boxtimes\mathscr{M})$$

quelle que soit la perversité $\bar{p}$.

Nous rassemblons ces remarques sous la forme de théorème.

6.2.2. Théorème. *Étant donnés une variété cohomologique $\boldsymbol{X}$, une pseudovariété $\boldsymbol{Y}$, un système local globalement défini $\mathscr{L}\in\mathrm{Loc}(\boldsymbol{X})$ et un système local $\mathscr{M}$ défini sur l'ouvert lisse d'une stratification de pseudovariété de $\boldsymbol{Y}$, il existe un isomorphisme canonique*

$$\boxed{H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})\otimes I_{\bar{p}}H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})\equiv I_{\bar{p}}H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y};\mathscr{L}\boxtimes\mathscr{M})}$$

quelle que soit la perversité $\bar{p}$. Si, de plus, $H_c^m(\boldsymbol{X};\mathscr{L})$ (resp. $I_{\bar{p}}H_c^m(\boldsymbol{Y},\mathscr{L})$) est de dimension finie pour tout m (p.e. si $\boldsymbol{X}$ (resp. $\boldsymbol{Y}$) est compacte), on a un isomorphisme canonique

$$\boxed{H^*(\boldsymbol{X};\mathscr{L})\otimes I_{\bar{p}}H^*(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})\equiv I_{\bar{p}}H^*(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y};\mathscr{L}\boxtimes\mathscr{M})}$$

§ 7. Fonctorialité de l'homologie d'intersection

7.1 Images inverses par des morphismes lisses

7.1.1. Proposition. *Soit $\pi:\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{M}\twoheadrightarrow\boldsymbol{Y}$ la projection canonique où $\boldsymbol{Y}$ est une pseudo-variété et où $\boldsymbol{M}$ est une variété cohomologique. Alors :*

a) $\pi^{-1}\mathcal{IC}_{\bar{p}}(\boldsymbol{Y})\subseteq\mathcal{IC}_{\bar{p}}(\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{M})$ *et* $\pi^!\mathcal{IC}_{\bar{p}}(\boldsymbol{Y})[-d_{\boldsymbol{M}}]\subseteq\mathcal{IC}_{\bar{p}}(\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{M})$.

b) *Il existe un morphisme naturel $I_{\bar{p}}H^*(\pi):I_{\bar{p}}H^*(\boldsymbol{Y},\mathscr{L})\to I_{\bar{p}}H^*(\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{M};\pi^{-1}\mathscr{L})$.*

Démonstration. On munit $\boldsymbol{X}:=\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{M}$ de la stratification dont les strates sont le produit d'une strate de $\boldsymbol{Y}$ par $\boldsymbol{M}$. Soit $\mathscr{F}^\bullet\in\mathcal{IC}_{\bar{p}}(\boldsymbol{Y})$. Il est clair que $\pi^{-1}\mathscr{F}^\bullet$ est un système local sur un ouvert partout dense de $\boldsymbol{X}$ de complémentaire de codimension >1. Soit $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{M}$ une strate de codimension positive $\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}$ dans $\boldsymbol{X}$, on a $\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}=\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}$, où $\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}$ dénote la codimension de $\boldsymbol{S}$ dans $\boldsymbol{Y}$. Les conditions de support sont immédiates, on a par exactitude de π^{-1} :

$$[\![(\pi^{-1}\mathscr{F}^\bullet)|_{\boldsymbol{T}}]\!]_{\mathrm{ch}}=[\![(\pi^{-1}\mathscr{F}^\bullet)|_{\boldsymbol{S}}]\!]_{\mathrm{ch}}\subseteq[0,p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}}]=[0,p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}}]$$

Les conditions de cosupport résultent d'appliquer les résultats de la section 3.7 notamment le théorème 3.7.4. On a :

$$\begin{aligned}[\![\mathcal{D}_{\boldsymbol{X}}^\bullet(\pi^{-1}\mathscr{F}^\bullet)[-d_{\boldsymbol{X}}]|_{\boldsymbol{T}}]\!]_{\mathrm{ch}}&=[\![(\mathcal{D}_{\boldsymbol{Y}}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet)[-d_{\boldsymbol{Y}}]\boxtimes I\!D_{\boldsymbol{M}}^\bullet[-d_{\boldsymbol{M}}])|_{\boldsymbol{T}}]\!]_{\mathrm{ch}}\\&=[\![\mathcal{D}_{\boldsymbol{Y}}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet)[-d_{\boldsymbol{Y}}]|_{\boldsymbol{S}}]\!]_{\mathrm{ch}}\subseteq[0,p'_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}}]=[0,p'_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{T}}}].\end{aligned}$$

Ce qui prouve la première partie de (a). On en déduit par dualité de Grothendieck-Verdier :

$$\pi^!\mathcal{IC}_{\bar{p}'}(\boldsymbol{Y})[-d_{\boldsymbol{M}}]=\mathcal{D}_{\boldsymbol{X}}^\bullet\big(\pi^{-1}\mathcal{IC}_{\bar{p}}(\boldsymbol{Y})\big)[-d_{\boldsymbol{X}}]\subseteq\big(\mathcal{D}_{\boldsymbol{X}}^\bullet\mathcal{IC}_{\bar{p}}(\boldsymbol{X})\big)[-d_{\boldsymbol{X}}]=\mathcal{IC}_{\bar{p}'}(\boldsymbol{X})$$

Enfin, l'assertion (b) résulte alors du morphisme d'adjonction $\mathscr{F}^\bullet\to I\!R\pi_*\pi^{-1}\mathscr{F}^\bullet$. ∎

7.1.2. Définition. Une application continue $f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ est un « *morphisme lisse* » si pour tout $x\in\boldsymbol{X}$, il existe un voisinage ouvert $\boldsymbol{U}_x$ de x dans $\boldsymbol{X}$, un voisinage ouvert $\boldsymbol{V}_{f(x)}$ de $f(x)$ dans $\boldsymbol{Y}$, une variété cohomologique $\boldsymbol{F}_x$ et un homéomorphisme $h:\boldsymbol{U}_x\to\boldsymbol{V}_{f(x)}\times\boldsymbol{F}_x$ tels que $f|_{\boldsymbol{U}_x}=\pi\circ h$.

7.1.3. Exemples. Une fibration localement triviale de fibre une variété cohomologique. Une composée de telles applications (qui n'est pas toujours une fibration localement triviale !).

7.1.4. Corollaire. *Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ un morphisme lisse entre pseudovariétés. Alors :*
a) $\pi^{-1}\mathcal{IC}_{\bar{p}}(\boldsymbol{Y}) \subseteq \mathcal{IC}_{\bar{p}}(\boldsymbol{X})$.
b) *Il existe un morphisme naturel* $I_{\bar{p}}H^*(\pi) : I_{\bar{p}}H^*(\boldsymbol{Y}, \mathscr{L}) \to I_{\bar{p}}H^*(\boldsymbol{X}; \pi^{-1}\mathscr{L})$.
c) *Si les fibres de f sont de dimension n, on a* $\pi^!\mathcal{IC}_{\bar{p}}(\boldsymbol{Y})[-n] \subseteq \mathcal{IC}_{\bar{p}}(\boldsymbol{X})$.

Démonstration. Exercice (utiliser 5.8 pour "recoller" 7.1.1). ∎

7.2 À propos de la fonctorialité de l'homologie d'intersection

Étant donnée une application stratifiée $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ entre deux pseudovariétés, il n'est généralement pas vrai que le foncteur f_* transforme un système local défini sur les strates de codimension nulle d'une stratification de pseudovariété de $\boldsymbol{X}$ en un système local sur $\boldsymbol{Y}$ vérifiant cette dernière propriété (*mutatis mutandis* pour f^{-1}). C'est là une obstruction sérieuse à la fonctorialité de la correspondance $\boldsymbol{X} \rightsquigarrow \mathcal{IC}_{\bar{p}}(\boldsymbol{X})$ sur la catégorie des pseudovariétés.

Des énoncés du même style que 7.1.4 concernant des classes d'applications plus larges que les morphismes lisses apparaissent dès que l'on se restreint aux seuls complexes d'intersection associés aux faisceaux constants. C'est le cas des applications propres « *(semi)petites* » (*cf.* [A], p. 50) et des applications « *normalement non singulières* » (*cf.* [GoMc$_2$], §5.4.3), les première vis-à-vis des images directes et les secondes vis-à-vis des images inverses.

La proposition suivante est prouvée dans la section §5.4.3 de l'article [GoMc$_2$] auquel nous renvoyons pour plus de détails.

7.2.1. Proposition. *Pour chaque perversité $\bar{p}$ l'homologie d'intersection $I_{\bar{p}}H^*(_\,; k)$ est un foncteur covariant (via f_*) et contravariant (via f^{-1}) sur la catégorie des pseudovariétés et des applications normalement non singulières.*

§8. Quelques références bibliographiques

[A] Arabia. "*Faisceaux pervers sur les variétés algébriques complexes. Correspondance de Springer (d'après Borho-MacPherson)*" ; Notes de cours (63 pages), *prépublication* (mai 2001) http://www.math.jussieu.fr/~arabia/math/Pervers.pdf.

[Bo$_2$] Borel. Introduction to middle intersection cohomology and perverse sheaves ; Algebraic groups and their generalizations : classical methods (University Park, PA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., 56, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 25–52 (1994).

[BoAl] Borel et al. "*Intersection Cohomology*" ; Progress in mathematics 50. Birkhäuser (1984).

[CGJ] Cohen, Goresky, Ji. On the Künneth formula for intersection cohomology ; Trans. Amer. Math. Soc. 333, no. 1, 63–69 (1992).

[Go] Godement. "*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*" ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

[GoMc$_1$] Goresky, MacPherson. Intersection homology theory; Topology 19, no. 2, 135–162 (1980).

[GoMc$_2$] Goresky, MacPherson. Intersection homology II; Inventiones Mathematicae 71, 77–129 (1983).

[H] Hartshorne. "*Residues and duality*"; Lect. notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20 Springer-Verlag, Berlin-New York (1966).

[KS] Kashiwara, Schapira. "*Sheaves on manifolds*"; Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292. Springer-Verlag, Berlin, (1990).

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes
Samedi 16 mars 2003

Faisceaux pervers sur les variétés algébriques complexes

–

Correspondance de Springer

Alberto Arabia

(Prépublication)

Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Paris 7 - Denis Diderot
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES
Sixième étage, plateau D, bureau 6D15.
175, rue du Chevaleret
75013 Paris

– 15 mars 2003 –

Faisceaux pervers sur les variétés algébriques complexes

Correspondance de Springer

§0. Table des matières détaillée

§0. Introduction **3**

§1. Préliminaires **3**

1.1. Anneaux et espaces topologiques 3

1.2. Catégories de faisceaux 4

1.2.1. Quelques notations 4

1.2.2. Foncteurs associés aux sous-espaces de $\boldsymbol{X}$ 4

1.2.3. Exactitudes de foncteurs 5

1.2.4. Adjonctions 5

1.2.6. Suite exacte courte fondamentale 6

1.2.7. Foncteurs dérivés à droite 6

1.2.8. Résolutions 6

1.2.10. Dimension cohomologique d'un espace topologique 7

1.2.11. Dimension injective de $\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ 7

1.2.13. Le bifoncteur $\mathscr{H}om$ sur $\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ 8

1.3. Catégorie des complexes de faisceaux 8

1.3.1. Catégorie des complexes 8

1.3.2. Foncteur de translation 9

1.3.3. Complexes concentrés en un seul degré 9

1.3.5. Foncteurs induits 9

1.3.6. Objets dérivés 9

1.3.9. Troncatures intelligentes 10

1.3.12. Cône d'un morphisme de complexes 11

1.4. Catégorie dérivée 11

1.4.4. Triangles exacts 12

1.4.6. Catégories triangulées 12

1.4.9. Amplitude cohomologique d'un complexe 13

1.4.10. Support cohomologique d'un complexe de faisceaux 13

1.4.14. Foncteurs dérivés à droite 13

1.4.19. Changement de base pour les inclusions localement fermées 14

1.4.20. Faisceaux dérivés à supports dans un localement fermé 15

1.4.24. Un triangle exact fondamental 16

1.4.25. Troncatures intelligentes dans $D(\boldsymbol{X})$ 16

1.4.27. Complexes cohomologiquement concentrés en un seul degré 16

1.4.28. Le bifoncteur $\mathscr{H}om^{\bullet}$ sur $D_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ 17

1.5. Dualité de Grothendieck-Verdier 17

1.5.1. Image directe à supports propres 17

1.5.3. Image inverse exceptionnelle 18

1.6. Complexes dualisants 19

1.6.6. Dual d'un complexe de faisceaux 20

1.7. Pseudovariétés et bidualité 20

1.7.1. Espace topologique stratifié 20

1.7.2. Pseudovariétés 21

1.7.5. Stabilité de la catégorie $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ 21

1.7.9. Amplitude cohomologique des complexes dualisants 22

1.8. Homologie de Borel-Moore sur les pseudovariétés ... 23
1.8.1. Constructions explicites de $c^!\mathscr{M}$ ... 23
1.8.2. Homologie de Borel-Moore à coefficients dans un $\mathscr{A}$-module ... 23
1.8.3. Subdivision barycentrique du simplexe standard ... 24
1.8.4. Faisceau des chaînes singulières localement finies ... 24
1.9. Stratifications algébriques, conditions de Whitney et pseudovariétés ... 27
1.9.1. Stratifications ... 27
1.9.2. Filtration associée à une stratification ... 27
1.9.6. Instabilité de la catégorie $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ ... 29
1.9.7. A propos des conditions de Whitney ... 30
1.10. Complexes à cohomologie constructible sur les variétés algébriques complexes ... 30
1.11. Systèmes locaux sur une variété topologique ... 31
1.11.7. Invariance de la monodromie ... 33
§**2. Prolongement intermédiaire relatif à une filtration fermée** ... **33**
2.1. Filtrations fermées ... 33
2.2. L'équivalence de catégories de Deligne ... 34
§**3. Homologie d'intersection sur une variété algébrique complexe** ... **37**
3.1. Complexes d'intersection sur une variété algébrique complexe ... 37
3.1.8. Description intrinsèque des complexes d'intersection ... 40
3.1.9. Généralisation de la dualité de Poincaré ... 40
3.1.10. A propos du $IH^0(\boldsymbol{X};\mathscr{A})$ ... 40
3.2. Homologie d'intersection du parapluie de Whitney ... 40
§**4. Faisceaux pervers sur une variété algébrique complexe** ... **41**
4.1. Complexes de Deligne-Goresky-MacPherson ... 41
4.1.1. Images directes des complexes d'intersection ... 41
4.1.2. Complexes de Deligne-Goresky-MacPherson ... 42
4.2. Faisceaux $\mathfrak{X}$-pervers ... 42
4.2.3. Supports et amplitude cohomologiques des faisceaux $\mathfrak{X}$-pervers ... 42
4.2.7. Restrictions et prolongements de faisceaux $\mathfrak{X}$-pervers ... 43
4.2.9. Complexes d'intersection et faisceaux $\mathfrak{X}$-pervers ... 44
4.2.10. Théorème de structure de la catégorie des faisceaux $\mathfrak{X}$-pervers ... 45
4.2.11. Simplicité des complexes de $\mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ dans $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ ... 47
4.3. Faisceaux pervers ... 47
4.3.2. Théorème de structure de la catégorie des faisceaux pervers ... 48
4.4. Image directe des faisceaux pervers par un morphisme propre ... 49
4.4.1. Morphismes stratifiés ... 49
4.4.4. Morphismes (semi-)petits ... 50
4.4.10. Théorème de décomposition ... 51
§**5. Correspondance de Springer** ... **52**
5.1. Notations et données ... 52
5.2. Stratifications de $\mathscr{N}$ et de $\mathfrak{g}$ ... 53
5.2.1. Stratification de $\mathscr{N}$ ... 53
5.2.2. Stratification de $\mathfrak{g}$ ... 53
5.3. Résolution de Springer du cône nilpotent ... 54
5.4. Décomposition de $\mathbb{R}\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathscr{N}}}$ ... 55
5.4.1. Quelques égalités de dimensions ... 55
5.5. Représentations du groupe de Weyl d'après Lusztig ... 58
5.5.2. Représentations du groupe de Weyl ... 59
5.5.3. Représentations du groupe de Weyl dans la cohomologie des variétés de Steinberg ... 59
5.6. Correspondance de Springer d'après Borho-MacPherson ... 60
5.6.4. Autres constructions ... 61
§**6. Références bibliographiques** ... **61**

– Samedi 30 juillet 2018 –

§0. Introduction

Ces notes traitent des sujets abordés dans la série d'exposés que j'ai donnés dans le Groupe de travail "*Correspondance de Springer*" organisé par MICHEL DUFLO, CAROLINE GRUSON et MARC ROSSO à l'Institut de Mathématiques de Jussieu (février-mars 2001).

Les quatre premières sections constituent une introduction à la théorie des faisceaux pervers sur les espaces localement compacts singuliers (pseudovariétés, espaces analytiques, variétés algébriques complexes, ...) et pour la perversité moyenne. Dans la dernière section on donne les détails de la démarche suivie par WALTER BORHO et ROBERT MACPHERSON dans [BoMc$_1$] pour démontrer la « *Correspondance de Springer* ».

Dans la préparation de ces notes j'ai bénéficié de la lecture de nombreux articles, certains de nature informelle mais très intéressants pour un aperçu rapide à la fois de l'histoire et des possibilités des faisceaux pervers. L'article de STEVEN KLEIMAN [Kl] en est le meilleur exemple, ceux de JEAN-LUC BRYLINSKI [Bry] et ARMAND BOREL [Bo$_2$] brossent les grands traits de la théorie, enfin celui de TONNY SPRINGER [Spr$_B$] parle des applications à la théorie des groupes. Dans un tout autre registre, les "*Notes du Séminaire d'homologie d'intersection*" [BoAl] et bien évidemment la référence incontournable : l'Astérisque N^{ro} 100 de BEĬLINSON, BERNSTEIN ET DELIGNE [BBD], donnent respectivement, en détail, les fondements de l'homologie d'intersection sur les espaces localement compacts et des faisceaux pervers.

§1. Préliminaires

Cette première section est destinée uniquement à fixer des notations, rappeler des définitions et faire quelques rappels, en ce sens, elle n'a aucune prétention d'exhaustivité dans les explications et indications des quelques démonstrations que nous donnons. Pour plus de détails, nous renvoyons aux deux références qui nous semblent le mieux couvrir l'ensemble des sujets abordés, à savoir : [BoAl] et [KS], et à [Ha$_1$] pour une introduction rapide et efficace aux catégories dérivées.

1.1 Anneaux et espaces topologiques

Bien de constructions et résultats dans ces notes sont valables pour des anneaux et espaces topologiques très généraux, mais plutôt que d'alourdir le texte en précisant à chaque fois les limitations d'un énoncé, nous préférons nous placer d'emblée dans un cadre restreint, mais néanmoins très large, garantissant sans plus leur validité.

- Un anneau $\mathscr{A}, \mathscr{B} \ldots$ est supposé commutatif, muni d'une identité multiplicative, nœthérien et de dimension cohomologique finie.
- Un espace topologique $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \ldots$ sera *localement compact (donc séparé), dénombrable à l'infini, métrisable* ([1]) *et de dimension cohomologique finie* (1.2.10).

[1] Les deux premières conditions impliquent la paracompacité des parties fermés et la dernière la paracompacité de ses ouverts ; on dit alors que l'espace est *totalement paracompact* (*cf.* [Go] §3.2 p. 149). Lorsque un espace topologique $\boldsymbol{X}$ vérifie ces trois conditions, toute partie localement fermée $\boldsymbol{S}$ de $\boldsymbol{X}$ les vérifie également et, de plus, la dimension cohomologique de $\boldsymbol{S}$ est bornée par celle de $\boldsymbol{X}$ (*cf.* 1.2.10).

Lorsque $\boldsymbol{X}$ désigne une variété algébrique complexe, la topologie induite sur un ouvert affine $U \subseteq \boldsymbol{X}$ par un plongement algébrique fermé $\varphi : U \hookrightarrow \mathbb{C}^m$, où $\mathbb{C}^m$ est muni de la topologie de la métrique hermitienne usuelle de $\mathbb{C}^m$, est indépendante de φ ; on note alors U^{an} l'ensemble U muni de cette topologie. On appelle « *topologie transcendante sur* $\boldsymbol{X}$ » la topologie engendrée par les U^{an}, où U parcourt l'ensemble des ouverts affines de $\boldsymbol{X}$. La topologie transcendante sur $\boldsymbol{X}$ vérifie les conditions du paragraphe précédent et est plus fine que la topologie de Zariski de $\boldsymbol{X}$. On note $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$ la variété algébrique complexe $\boldsymbol{X}$ munie de sa topologie transcendante. Tous les énoncés topologiques sur une variété algébrique complexe seront relatifs à sa topologie transcendante sauf mention explicite du contraire.

- Un foncteur $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{\mathcal{A}} \rightsquigarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ entre deux catégories additives est dit « *additif* » si l'application induite $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \xrightarrow{F} \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{FA}, \boldsymbol{FB})$ est un homomorphisme de groupes (abéliens) pour tous $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$; ce sera le cas de tous les foncteurs que nous allons considérer. Les catégories abéliennes $\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \ldots$ sont supposées posséder suffisamment d'objets injectifs.

1.2 Catégories de faisceaux

1.2.1 Quelques notations. Pour tout anneau $\mathscr{A}$ et tout espace topologique $\boldsymbol{X}$, on note $\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ la catégorie des faisceaux de $\mathscr{A}$-modules sur $\boldsymbol{X}$. Le faisceau constant de fibre $\mathscr{A}$ sera noté $\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}$. On note $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ l'ensemble des morphismes de faisceaux de $\mathscr{A}$-modules de source $\mathscr{F}$ et de but $\mathscr{G}$; cet ensemble est muni d'une structure naturelle de $\mathscr{A}$-module. La catégorie $\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ est abélienne et possède suffisamment d'injectifs.

On omettra souvent de préciser l'anneau $\mathscr{A}$ dans ces notations et lorsque $\boldsymbol{X}$ sera réduit à un point, la notation $\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\bullet)$ sera remplacée par $\mathrm{Mod}(\mathscr{A})$ pour des raisons évidentes.

Pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Faisc}(\boldsymbol{X})$ et toute section $\sigma \in \Gamma(U; \mathscr{F})$, on appelle « *support de* σ » : l'ensemble $|\sigma|$ des points $x \in U$ tels que le germe σ_x de σ en x est non nul. Le support de σ est toujours fermé dans U. Dans le même ordre d'idées, on appelle « *support de* $\mathscr{F}$ » : l'ensemble $|\mathscr{F}|$ des points $x \in \boldsymbol{X}$ tels que le module $\mathscr{F}_x$ des germes des sections de $\mathscr{F}$ en x, appelé aussi « *la fibre de* $\mathscr{F}$ *en* x », est non nul. Contrairement aux supports des sections, le support d'un faisceau n'est généralement pas localement fermé dans $\boldsymbol{X}$.

1.2.2 Foncteurs associés aux sous-espaces de $\boldsymbol{X}$. Pour toute partie $\boldsymbol{A}$ d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$, on note $\imath_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{A} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ l'inclusion (on omettra souvent certains indices). On rappelle maintenant les définitions de quatre foncteurs additifs très courants en indiquant brièvement leur action sur les faisceaux.

$\imath_{\boldsymbol{A}*}$: Faisc($\boldsymbol{A}$) $\rightsquigarrow$ Faisc($\boldsymbol{X}$) est le foncteur « *image directe* » qui associe à un faisceau $\mathscr{F}$ sur $\boldsymbol{A}$, le faisceau $\imath_{\boldsymbol{A}*}\mathscr{F}$:

$$\boldsymbol{X} \supseteq U \rightsquigarrow \Gamma\big(\boldsymbol{A} \cap U; \mathscr{F}\big) =: \Gamma\big(U; \imath_{\boldsymbol{A}*}\mathscr{F}\big)$$

Pour $\boldsymbol{A}_1 \subseteq \boldsymbol{A}_2$, on a $\imath_{\boldsymbol{A}_1*}^{\boldsymbol{X}} = \imath_{\boldsymbol{A}_2*}^{\boldsymbol{X}} \circ \imath_{\boldsymbol{A}_1*}^{\boldsymbol{A}_2}$.

$\imath_{\boldsymbol{A}}^{-1}$: Faisc($\boldsymbol{X}$) $\rightsquigarrow$ Faisc($\boldsymbol{A}$) est le foncteur « *image inverse* » qui associe à un faisceau $\mathscr{G}$ sur $\boldsymbol{X}$, le faisceau $\imath^{-1}\mathscr{G}$ *associé au préfaisceau* :

$$\boldsymbol{A} \supseteq V \rightsquigarrow \varinjlim_{V \subseteq U} \Gamma(U; \mathscr{G})$$

Le foncteur $\imath_{\boldsymbol{A}}^{-1}\mathscr{G}$ est également noté $\mathscr{G}|_{\boldsymbol{A}}$ et appelé « *restriction de* $\mathscr{G}$ *à* $\boldsymbol{A}$ ».

Pour $\boldsymbol{A}_1 \subseteq \boldsymbol{A}_2$, on a $\imath_{\boldsymbol{A}_1}^{\boldsymbol{X}\,-1} = \imath_{\boldsymbol{A}_1}^{\boldsymbol{A}_2\,-1} \circ \imath_{\boldsymbol{A}_2}^{\boldsymbol{X}\,-1}$.

Et pour tout sous-espace $\boldsymbol{S}$, *localement fermé* dans $\boldsymbol{X}$:

$\imath_{\boldsymbol{S}!}$: Faisc$(\boldsymbol{S})$ $\rightsquigarrow$ Faisc$(\boldsymbol{X})$ est le foncteur «*image directe à supports fermés*» qui associe à un faisceau $\mathscr{F}$ sur $\boldsymbol{S}$, le faisceau $\imath_{\boldsymbol{S}!}\mathscr{F}$:

$$\boldsymbol{X} \supseteq U \rightsquigarrow \big\{\sigma \in \Gamma\big(\boldsymbol{S} \cap U; \mathscr{F}\big) \mid |\sigma| \text{ est fermé } \textit{dans } U\big\} =: \Gamma\big(U; \imath_{\boldsymbol{S}!}\mathscr{F}\big)$$

On a une inclusion naturelle de foncteurs $\imath_{\boldsymbol{S}!} \subseteq \imath_{\boldsymbol{S}*}$ qui est une égalité lorsque $\boldsymbol{S}$ est fermé. Pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, on a $(\imath_{\boldsymbol{S}!}\mathscr{F})_x = 0$ pour $x \notin \boldsymbol{S}$ et $(\imath_{\boldsymbol{S}!}\mathscr{F})_x = \mathscr{F}_x$ autrement, raison pour laquelle on appelle $\imath_{\boldsymbol{S}!}\mathscr{F}$ «*le prolongement par zéro de* $\mathscr{F}$».
Pour $\boldsymbol{S}_1 \subseteq \boldsymbol{S}_2$, on a $\imath_{\boldsymbol{S}_1!}^{\boldsymbol{X}} = \imath_{\boldsymbol{S}_2!}^{\boldsymbol{X}} \circ \imath_{\boldsymbol{S}_1!}^{\boldsymbol{S}_2}$.

$\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}$: Faisc$(\boldsymbol{X})$ $\rightsquigarrow$ Faisc$(\boldsymbol{S})$ est le foncteur «*sections à supports dans* $\boldsymbol{S}$» qui associe à un faisceau $\mathscr{G}$ sur $\boldsymbol{X}$, le faisceau $\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{G}$:

$$\boldsymbol{S} \supseteq V \rightsquigarrow \Gamma_{\boldsymbol{S}}\big(W; \mathscr{G}\big) = \big\{\sigma \in \Gamma(W; \mathscr{G}) \mid |\sigma| \subseteq \boldsymbol{S}\big\} =: \Gamma(V; \underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{G})$$

où W est un ouvert dans $\boldsymbol{X}$ tel que V est fermé dans W et $V = \boldsymbol{S} \cap W$ (le terme de droite est alors indépendant du choix d'un tel W).

Remarque. Un ouvert V de $\boldsymbol{S}$ admet toujours une base de voisinages W ouverts dans $\boldsymbol{X}$ tels que V est fermé dans W et $V = \boldsymbol{S} \cap W$; on a donc

$$\Gamma(V; \imath_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathscr{G}) = \varinjlim_{V \subseteq W} \Gamma(W; \mathscr{G})$$

d'où une injection canonique de foncteurs $\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}} \hookrightarrow \imath_{\boldsymbol{S}}^{-1}$ qui est bijective lorsque $\boldsymbol{S}$ est ouvert.
Pour $\boldsymbol{S}_1 \subseteq \boldsymbol{S}_2$, on a $\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}_1} = \underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}_1} \circ \underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}_2}$.

1.2.3 Exactitudes de foncteurs. Avec les notations précédentes :

$$\begin{cases} \imath_{\boldsymbol{S}!}, \imath_{\boldsymbol{A}}^{-1} & \text{exacts ;} \\ \underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}, \imath_{\boldsymbol{A}*} & \text{exacts à gauche ;} \\ \underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}} = \imath_{\boldsymbol{S}}^{-1} & \text{lorsque } \boldsymbol{S} \text{ est ouverte, donc } \underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}} \text{ est exact dans ce cas.} \\ \imath_{\boldsymbol{S}*} = \imath_{\boldsymbol{S}!} & \text{lorsque } \boldsymbol{S} \text{ est fermée, donc } \imath_{\boldsymbol{S}*} \text{ est exact dans ce cas.} \end{cases}$$

1.2.4 Adjonctions. On a des isomorphismes naturels ([2]) :

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\imath_{\boldsymbol{S}!}-, -) \equiv \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{S}}}(-, \underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}-) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{A}}}(\imath_{\boldsymbol{A}}^{-1}-, -) \equiv \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(-, \imath_{\boldsymbol{A}*}-)$$

et $\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}$ (resp. $\imath_{\boldsymbol{A}*}$) est adjoint à droite de $\imath_{\boldsymbol{S}!}$ (resp. $\imath_{\boldsymbol{A}}^{-1}$). En particulier, pour tout $\mathscr{G} \in \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$, l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{S}}}(\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{G}, \underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{G}) \equiv \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\imath_{\boldsymbol{S}!}\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{G}, \mathscr{G})$ fait correspondre à $\mathrm{id}_{\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{G}}$ un morphisme de faisceaux $\imath_{\boldsymbol{S}!}\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{G} \to \mathscr{G}$ dit «*d'adjonction*». On obtient par ce procédé quatre morphismes d'adjonction dont deux sont *a priori* des isomorphismes :

$$\begin{array}{rcrcl} \imath_{\boldsymbol{S}!}\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}} & \longrightarrow & \mathrm{id}_{\mathrm{Faisc}(\boldsymbol{X})} & \text{et} & \mathrm{id}_{\mathrm{Faisc}(\boldsymbol{X})} \longrightarrow \imath_{\boldsymbol{A}*}\imath_{\boldsymbol{A}}^{-1} \\ \mathrm{id}_{\mathrm{Faisc}(\boldsymbol{S})} & \underset{\equiv}{\longrightarrow} & \underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}\imath_{\boldsymbol{S}!} & \text{et} & \imath_{\boldsymbol{A}}^{-1}\imath_{\boldsymbol{A}*} \underset{\equiv}{\longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathrm{Faisc}(\boldsymbol{A})} \end{array} \qquad (*)$$

[2] Le terme "naturel" est employé au sens de "transformation naturelle entre foncteurs". Les isomorphismes naturels seront indiqués par le symbole '$\equiv$'.

1.2.5 Compte tenu de l'exactitude des foncteurs $\imath_{S!}$ et $\imath_A^{-1}$, leurs adjoints à droite $\underline{\Gamma}_S$ et $\imath_{A*}$ transforment un faisceau injectif en faisceau injectif. En effet, un faisceau $\mathscr{I} \in \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(X)$ est injectif si et seulement si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_X}(_, \mathscr{I}) : \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(X) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathscr{A})$ est exact. En composant ce foncteur avec le foncteur exact $\imath_{S!} : \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(S) \rightsquigarrow \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(X)$, on obtient un foncteur exact $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_X}(\imath_{S!}_, \mathscr{I}) : \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(X) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathscr{A})$ qui est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_S}(_, \underline{\Gamma}_S\mathscr{I})$. Par conséquent $\underline{\Gamma}_S\mathscr{I}$ est injectif dans $\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(S)$. La même idée s'applique pour $\imath_{A*}$.

1.2.6 Suite exacte courte fondamentale. Pour toute partie localement fermée S dans X de complémentaire noté $A := X \backslash S$, les morphismes d'adjonction 1.2.4-$(*)$ donnent lieu, pour $\mathscr{F} \in \mathrm{Faisc}(X)$, à une suite exacte **à gauche** :

$$0 \to \imath_{S!}\underline{\Gamma}_S(\mathscr{F}) \to \mathscr{F} \to \imath_{A*}\imath_A^{-1}(\mathscr{F}) \to 0 \qquad (\star)$$

qui est exacte lorsque S est ouverte dans X, ou bien pour tout S, lorsque $\mathscr{F}$ est *injectif* (plus généralement *flasque*).

1.2.7 Foncteurs dérivés à droite. Pour tout foncteur additif $F : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ entre deux catégories abéliennes, et pour chaque $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}^m F : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ le «*m-ième foncteur dérivé à droite de* F ». On rappelle que pour tout $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et toute suite exacte :

$$0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} \cdots\cdots \xrightarrow{d_{m-1}} I^m \xrightarrow{d_m} \cdots, \qquad (\ddagger)$$

où les I^k sont injectifs, l'objet $\mathbb{R}^m F A$ est canoniquement isomorphe au m-ième objet de cohomologie, appelé aussi «*m-ième objet dérivé*», du complexe

$$0 \to FI^0 \xrightarrow{Fd_0} FI^1 \xrightarrow{Fd_1} \cdots\cdots \xrightarrow{Fd_{m-1}} FI^m \xrightarrow{Fd_m} \cdots,$$

soit :

$$\mathbb{R}^m F A \equiv H^m(FI^\bullet) := \frac{\ker Fd_m}{\mathrm{im}\, Fd_{m-1}}.$$

Lorsque F est exact à gauche on a toujours $\mathbb{R}^0 F \equiv F$, et lorsque F est exact on a, en plus, $\mathbb{R}^m F = 0$ pour tout $m > 0$.

1.2.8 Résolutions. Les suites exactes $(\ddagger)$, notées $A \xhookrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$, sont appelés «*résolutions injectives de* A » et le morphisme ε l'«*augmentation* » de la résolution. Lorsque les termes I^k sont F-acycliques, *i.e.* tels que $\mathbb{R}^m F I^k = 0$ pour tout $m > 0$, la résolution est dite «F-*acyclique* ». Un théorème de Leray démontre que $\mathbb{R}^m FA$ est également canoniquement isomorphe au m-ième objet de cohomologie du complexe $FK^\bullet$ pour toute résolution F-acyclique $A \hookrightarrow K^\bullet$.

1.2.9 Les foncteurs dérivés du foncteur des sections globales $\Gamma(X;_) : \mathrm{Faisc}_{\mathbb{Z}}(X) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ sont notés $H^m(X;_)$. Il est important d'observer que dans la mesure où pour tout anneau $\mathscr{A}$ on a l'inclusion de catégories abéliennes $\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(X) \subseteq \mathrm{Faisc}_{\mathbb{Z}}(X)$, le foncteur $\Gamma(X;_)$ est aussi naturellement défini sur $\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(X)$ et a des foncteurs dérivés par rapport à cette catégorie qui sont canoniquement isomorphes aux foncteurs $H^m(X;_)$; c'est une conséquence du fait que tout faisceau injectif de $\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(X)$ est flasque donc $\Gamma(X;_)$-acyclique dans $\mathrm{Faisc}_{\mathbb{Z}}(X)$.

1.2.10 Dimension cohomologique d'un espace topologique.([3]) Un espace topologique $\boldsymbol{X}$ général (*i.e.* non soumis aux conditions 1.1) est dit «*de dimension cohomologique finie*» lorsqu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que pour **tout** faisceau $\mathscr{F} \in \mathrm{Faisc}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{X})$ on ait :

$$H^m(\boldsymbol{X}; \mathscr{F}) = 0\,, \text{ pour tout } m > n.$$

Le plus petit de tels entiers n est «*la dimension cohomologique de* $\boldsymbol{X}$» notée $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X})$.

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème.([4]) *Soit* $\boldsymbol{X}$ *une variété topologique de dimension* n([5])*. Pour tout* $\mathscr{F} \in \mathrm{Faisc}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{X})$ *:*
a) *Il existe une résolution* $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{K}^0 \to \mathscr{K}^1 \to \cdots \twoheadrightarrow \mathscr{K}^n$ *où chaque* $\mathscr{K}^j$ *est un faisceau c-mou* ([6])*.*
b) *Il existe une résolution* $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{G}^0 \to \mathscr{G}^1 \to \cdots \twoheadrightarrow \mathscr{G}^{n+1}$ *où chaque* $\mathscr{G}^j$ *est un faisceau flasque.*
c) $H^m(\boldsymbol{X}; \mathscr{F}) = 0 = H^m_c(\boldsymbol{X}; \mathscr{F})$ *pour tout* $m > n$*.*

On en déduit :

Proposition. *Soit* $\boldsymbol{X}$ *un espace topologique admettant une filtration fermée finie :*

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 \supseteq \boldsymbol{X}_1 \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{X}_r \supseteq \boldsymbol{X}_{r+1} = \varnothing$$

où, $\boldsymbol{X}_i \backslash \boldsymbol{X}_{i+1}$ *est une variété topologique de dimension* d_i*. Alors* $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}) = \sup\{d_i\}$.

Indications. En raisonnant par récurrence, on suppose la proposition vérifiée pour $\boldsymbol{X}_1$. Notons $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{X} \backslash \boldsymbol{X}_1$. La suite exacte à gauche 1.2.6-($\star$) avec $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{F}$, donne lieu a une suite exacte longue de cohomologie :

$$H^{i-1}(\boldsymbol{X}_1; \mathscr{F}|_{\boldsymbol{X}_1}) \to H^i\big(\boldsymbol{X}; \imath_{\boldsymbol{U}!}\mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}}\big) \to H^i(\boldsymbol{X}; \mathscr{F}) \to H^i(\boldsymbol{X}_1; \mathscr{F}|_{\boldsymbol{X}_1}) \to H^{i+1}\big(\boldsymbol{X}; \imath_{\boldsymbol{U}!}\mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}}\big)$$

Il suffit donc de montrer que $H^i\big(\boldsymbol{X}; \imath_{\boldsymbol{U}!}\mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}}\big) = 0$ pour $i > d_0$. Or, $\mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}}$ admet une résolution c-molle $\mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}} \hookrightarrow \mathscr{K}^\bullet$ de longueur d_0 d'après le théorème précédent ; $\imath_{\boldsymbol{U}!}$ et exact et transforme c-mou en c-mou (*loc.cit.* §2.5.7) ; et, pour terminer, un faisceau c-mou sur $\boldsymbol{X}$ est acyclique pour le foncteur des sections globales (*loc.cit.* §2.5.10). Par conséquent $H^i(\boldsymbol{X}; \imath_{\boldsymbol{U}!}\mathscr{F}|_{\boldsymbol{U}})$ est isomorphe au i-ième groupe de cohomologie du complexe $\Gamma(\boldsymbol{X}; \imath_{\boldsymbol{U}!}\mathscr{K}^\bullet)$ dont les termes sont nuls en tout degré supérieur à d_0. On en déduit que $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}) \leqslant \sup\{d_i\}$. La majoration inverse est laissée au soins du lecteur. ∎

1.2.11 Dimension injective de $\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$. On dit qu'une catégorie abélienne $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est de «*dimension injective finie*» lorsqu'il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que **tout** objet $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ admet une résolution injective finie : $\boldsymbol{A} \hookrightarrow \boldsymbol{I}^0 \to \boldsymbol{I}^1 \to \cdots \twoheadrightarrow \boldsymbol{I}_r$ avec $r \leqslant d$. Le plus petit des tels

[3] *Cf.* [Go] §4.13–14 pp. 194–197.

[4] *Cf.* [KS] prop. §3.2.2 p. 149.

[5] On appellera «*variété topologique de dimension* n» tout espace topologique dénombrable à l'infini et localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

[6] On rappelle que un faisceau $\mathscr{F}$ sur $\boldsymbol{X}$ est dit «*c-mou*» lorsque pour toute partie compacte $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{X}$, le morphisme de restriction $\Gamma(\boldsymbol{X}; \mathscr{F}) \to \Gamma(\boldsymbol{K}; \mathscr{F})$ est *surjectif* ([KS] def. §2.5.5 p. 104). Une application continue $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ entre deux espaces métrisables et localement compacts respecte la propriété d'être c-mou, autrement dit $f_!(c\text{-mou}) = c\text{-mou}$, et un faisceau c-mou sur $\boldsymbol{X}$ est toujours $f_!$-acyclique (*cf.* 1.5.1 puis [BoAl] Grivel §2.10 et suivants). Enfin, si $\boldsymbol{X}$ est en plus dénombrable à l'infini, un faisceau c-mou est aussi f_*-acyclique ([KS] prop. §2.5.10, p. 106).

entiers d est «*la dimension injective de* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$» notée $\dim_{\mathrm{inj}}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$. Dans le cas où $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$, on notera $\dim_{\mathrm{inj}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A})$ plutôt que $\dim_{\mathrm{inj}}(\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X}))$.

Théorème.([7]) $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}) \leqslant \dim_{\mathrm{inj}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A}) \leqslant \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}) + \dim_{\mathrm{ch}} \mathscr{A} + 1$.

1.2.12 Remarque. Soulignons que lorsque une catégorie abélienne $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est de dimension injective finie d, on a $\mathbb{R}^m \boldsymbol{F} = 0$ pour tout $m > d$ et pour **tout foncteur additif** $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{\mathcal{A}} \rightsquigarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$. Dans le cas où $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ on a mieux : si le foncteur $\boldsymbol{F}$ est de «*nature topologique*», par exemple $\Gamma_\Phi(\boldsymbol{X}; _)$ où Φ désigne une famille de supports, la dimension cohomologique de $\boldsymbol{X}$ donne des conditions d'annulation des foncteurs dérivés *a priori* plus fortes et indépendantes de l'anneau $\mathscr{A}$ dans la mesure où $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}) \leqslant \dim_{\mathrm{inj}}(\boldsymbol{X}/\mathscr{A})$ d'après le théorème précédent([8]).

1.2.13 Le bifoncteur $\mathscr{Hom}$ sur $\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$. Pour $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$, on note $\mathscr{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ (et même $\mathscr{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ lorsque $\mathscr{A}$ est sous-entendu) le faisceau associé au préfaisceau qui fait correspondre à un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ le $\mathscr{A}$-module $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$. On obtient ainsi un bifoncteur biadditif $\mathscr{Hom} : \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X}) \times \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ contravariant par rapport à la première coordonnée et covariant par rapport à la seconde coordonnée. Pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$, le foncteur $\mathscr{Hom}(\mathscr{F}, _) : \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ est exact à gauche et inversement pour $\mathscr{Hom}(_, \mathscr{F})$.

1.2.14 On prendra garde du fait que pour $x \in \boldsymbol{X}$, le morphisme naturel :

$$\mathscr{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})_x \xrightarrow{\varepsilon_x(\mathscr{F}, \mathscr{G})} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}_x, \mathscr{G}_x)$$

n'est généralement pas un isomorphisme, mais il l'est lorsque $\mathscr{F}$ est un faisceau localement constant de fibres de type fini sur $\mathscr{A}$([9]), ce qu'on appellera un «*système local*». En effet, si $\mathscr{L}$ est un système local, il admet des présentations finies locales ($\mathscr{A}$ est supposé nœthérien !), *i.e.* pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, il existe un voisinage ouvert $x \in U \subseteq \boldsymbol{X}$ et une suite exacte à droite $\underline{\mathscr{A}}_U^r \to \underline{\mathscr{A}}_U^s \to \mathscr{L}|_U \to 0$; d'autre part, les foncteurs $\mathscr{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_U}(_, \mathscr{G})_x$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(_x, \mathscr{G}_x)$ sont exacts à droite et alors $\varepsilon_x(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ est un isomorphisme si $\varepsilon_x(\underline{\mathscr{A}}_U^n, \mathscr{G}|_U)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui est évident puisque $\mathscr{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_U}(\underline{\mathscr{A}}_U^n, \mathscr{G}|_U) = (\mathscr{G}|_U)^n$ (*cf.* 1.11.2).

1.2.15 Dans le même ordre d'idées, on démontre (*cf.* [Go] §7.4 p. 265) que pour tout système local $\mathscr{L}$ *localement libre*, le foncteur $\mathscr{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{L}, _) : \mathrm{Faisc}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Faisc}(\boldsymbol{X})$ est exact, donc

$$\mathbb{R}^m \mathscr{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{L}, \mathscr{G}) = \mathscr{Ext}^m_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{L}, \mathscr{G}) = 0\,, \quad \text{pour tout } m > 0,$$

et alors $\mathbb{R}\mathscr{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{L}, _) \equiv \mathscr{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{L}, _)$.

1.3 Catégorie des complexes de faisceaux

1.3.1 Catégorie des complexes. Soit $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ une catégorie additive. On note $C(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ la catégorie dont les objets sont les «*complexes d'objets de* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$» :

$$\boldsymbol{A}^\bullet = (\boldsymbol{A}^m; d_{\boldsymbol{A},m})_{m\in\mathbb{Z}} \ : \ \left(\cdots \xrightarrow{d_{\boldsymbol{A},m-1}} \boldsymbol{A}^m \xrightarrow{d_{\boldsymbol{A},m}} \boldsymbol{A}^{m+1} \xrightarrow{d_{\boldsymbol{A},m+1}} \boldsymbol{A}^{m+2} \xrightarrow{d_{\boldsymbol{A},m+2}} \cdots \right)$$

[7] *Cf.* [BoAl] Borel §V.1.17–18 pp. 55–59, et [Ha$_1$] §I.4.6 p. 42.

[8] Voir l'exercice §II.9, p. 132 de [KS].

[9] Ce qui n'est pas sans rappeler les faisceaux $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$-cohérents sur les variétés algébriques, auquel cas l'assertion est vraie pour les mêmes raisons.

où $d_{\boldsymbol{A},m} \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{A}^m, \boldsymbol{A}^{m+1})$ et $d_{\boldsymbol{A},m} \circ d_{\boldsymbol{A},m-1} = 0$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Un «*morphisme de complexes*» $\alpha_\bullet : \boldsymbol{A}^\bullet \to \boldsymbol{B}^\bullet$ est une famille $\{\alpha_m \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{A}^m, \boldsymbol{B}^m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ vérifiant $\alpha_{m+1} \circ d_{\boldsymbol{A},m} = d_{\boldsymbol{B},m} \circ \alpha_m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$; on note $\mathrm{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\boldsymbol{A}^\bullet, \boldsymbol{B}^\bullet)$ l'ensemble de tels morphismes muni de sa structure naturelle de groupe abélien. La catégorie $C(\mathcal{A})$ est abélienne lorsque $\mathcal{A}$ l'est.

Dans le cas où $\mathcal{A} = \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$, on notera $C_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ plutôt que $C(\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X}))$. Le groupe abélien $\mathrm{Mor}_{C_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet)$ est muni d'une structure naturelle de $\mathscr{A}$-module. On omettra souvent de préciser l'anneau $\mathscr{A}$ dans ces notations et lorsque $\boldsymbol{X}$ sera réduit à un point, la notation $C_{\mathscr{A}}(\bullet)$ sera abrégée à $C_{\mathscr{A}}$.

1.3.2 Foncteur de translation. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. Le foncteur de «*translation*» $\boldsymbol{T} : C(\mathcal{A}) \rightsquigarrow C(\mathcal{A})$ associe à $\boldsymbol{A}^\bullet = (\boldsymbol{A}^m; d_{\boldsymbol{A},m})_{m\in\mathbb{Z}}$ le complexe $\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^\bullet = (\boldsymbol{B}^m; d_{\boldsymbol{B},m})_{m\in\mathbb{Z}}$, avec $\boldsymbol{B}^m = \boldsymbol{A}^{m+1}$ et $d_{\boldsymbol{B},m} = -d_{\boldsymbol{A},m+1}$, et à $\alpha_\bullet \in \mathrm{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\boldsymbol{A}^\bullet, \boldsymbol{B}^\bullet)$ le morphisme de complexes $\boldsymbol{T}\alpha_\bullet := \beta_\bullet : \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^\bullet \to \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}^\bullet$, avec $\beta_m = \alpha_{m+1}$.

Nous adoptons la notation très répandue suivante pour l'itération $\boldsymbol{T}^d = \overbrace{\boldsymbol{T} \circ \cdots \circ \boldsymbol{T}}^{d}$:

$$\boldsymbol{A}^\bullet[d] := \boldsymbol{T}^d\boldsymbol{A}^\bullet \quad \text{et} \quad \alpha_\bullet[d] := \boldsymbol{T}^d\alpha_\bullet$$

L'entier d est le «*décalage*» (vers la gauche si $d > 0$) de la translation $\boldsymbol{T}^d$.

1.3.3 Complexes concentrés en un seul degré. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive et $d \in \mathbb{Z}$. Un complexe $\boldsymbol{A}^\bullet$ de $C(\mathcal{A})$ est dit «*concentré en degré d*», lorsque $\boldsymbol{A}^m = 0$ pour tout $m \neq d$.

1.3.4 Remarque et notation. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive et $d \in \mathbb{Z}$. Pour tout $\boldsymbol{A} \in \mathcal{A}$, on note $\boldsymbol{A}[d]$ le complexe $(\boldsymbol{A}^m; d_m)$ où $\boldsymbol{A}^{-d} = \boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}^m = 0$ pour tout $m \neq -d$, puis $d_m = 0$, pour tout m. Pour $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, on note $\alpha[d] : \boldsymbol{A}[d] \to \boldsymbol{B}[d]$ le morphisme de complexes nul en tous degrés sauf en $-d$ où il est égal à α. On obtient ainsi un foncteur pleinement fidèle $(_)[d] : \mathcal{A} \rightsquigarrow C(\mathcal{A})$ d'inverse à gauche le foncteur $(_)^{-d} : C(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}$ qui fait correspondre $\boldsymbol{A}^\bullet \rightsquigarrow \boldsymbol{A}^{-d}$ et $\alpha_\bullet \rightsquigarrow \alpha_{-d}$. L'image essentielle du foncteur $(_)[d]$ est la sous-catégorie pleine des complexes concentrés en degré $-d$. Lorsque $d = 0$, on omettra souvent la notation ; par exemple, on écrira $\mathrm{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^\bullet)$ à la place de $\mathrm{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\boldsymbol{A}[0], \boldsymbol{B}^\bullet)$.

1.3.5 Foncteurs induits. Un foncteur additif entre deux catégories additives $\boldsymbol{F} : \mathcal{A}_1 \rightsquigarrow \mathcal{A}_2$ induit naturellement un foncteur additif entre les catégories des complexes $C(\mathcal{A}_i)$. En effet, si $\boldsymbol{A}^\bullet := (\boldsymbol{A}^m, d_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ est un complexe d'objets de $\mathcal{A}_1$, la famille $\boldsymbol{F}\boldsymbol{A}^\bullet := (\boldsymbol{F}\boldsymbol{A}^m, \boldsymbol{F}d_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ est un complexe d'objets de $\mathcal{A}_2$ et si $\varphi_\bullet := \{\varphi_m : \boldsymbol{A}_1^m \to \boldsymbol{A}_2^m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ est un morphisme de complexes, il en est de même de $\boldsymbol{F}\varphi_\bullet := \{\boldsymbol{F}\varphi_m : \boldsymbol{F}\boldsymbol{A}_1^m \to \boldsymbol{F}\boldsymbol{A}_2^m\}_{m\in\mathbb{Z}}$. Le foncteur ainsi défini sera désigné (par abus) par la même notation $\boldsymbol{F} : C(\mathcal{A}_1) \rightsquigarrow C(\mathcal{A}_2)$; c'est un foncteur additif qui a le même type d'exactitude que $\boldsymbol{F} : \mathcal{A}_1 \rightsquigarrow \mathcal{A}_2$ lorsque les catégories $\mathcal{A}_i$ sont abéliennes.

1.3.6 Objets dérivés. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Pour tout complexe de $C(\mathcal{A})$:

$$\boldsymbol{A}^\bullet = \left(\cdots \boldsymbol{A}^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \boldsymbol{A}^m \xrightarrow{d_m} \boldsymbol{A}^{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \cdots\right),$$

et tout $m \in \mathbb{Z}$, on appelle «*m-ième objet dérivé de* $\boldsymbol{A}^\bullet$» l'objet :

$$H^m\boldsymbol{A}^\bullet := \frac{\ker(d_m)}{\mathrm{im}(d_{m-1})}$$

Pour tout morphisme de complexes (de degré 0) $\alpha_\bullet : \boldsymbol{A}^\bullet \to \boldsymbol{B}^\bullet$, on note

$$H^m\alpha_\bullet : H^m\boldsymbol{A}^\bullet \longrightarrow H^m\boldsymbol{B}^\bullet$$

le morphisme induit en cohomologie par $\alpha_\bullet$. Ces définitions font de $H^m : C(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}$ un foncteur additif.

Dans le cas où $\mathcal{A} = \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$, on note $\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet$ plutôt que $H^m\mathscr{F}^\bullet$ pour insister sur le fait que $\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet$ est un faisceau sur $\boldsymbol{X}$ et pour éviter une éventuelle confusion avec $H^m(\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{F}^\bullet))$.

1.3.7 Définitions. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive.

1) Un morphisme $\alpha_\bullet \in \mathrm{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\boldsymbol{A}^\bullet, \boldsymbol{B}^\bullet)$ est dit «*homotope à zéro*» lorsqu'il existe une famille de morphismes $\big\{h_m \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{A}^m, \boldsymbol{B}^{m-1})\big\}_{m\in\mathbb{Z}}$, telle que

$$\alpha_m = h_{m+1}\circ d_{\boldsymbol{A},m} - d_{\boldsymbol{B},m-1}\circ h_m\,,\ \text{pour tout } m \in \mathbb{Z}.$$

Deux morphismes $\alpha_\bullet, \beta_\bullet \in \mathrm{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\boldsymbol{A}^\bullet, \boldsymbol{B}^\bullet)$ sont dits «*homotopes*» lorsque leur différence $(\alpha_\bullet - \beta_\bullet)$ est homotope à zéro, on note alors $\alpha_\bullet \sim \beta_\bullet$. La relation '$\sim$' est une congruence de groupe abélien sur $\mathrm{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\boldsymbol{A}^\bullet, \boldsymbol{B}^\bullet)$ qui possède deux propriétés fondamentales :

a) *Si* $\alpha_\bullet \sim \beta_\bullet \in \mathrm{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\boldsymbol{A}^\bullet, \boldsymbol{B}^\bullet)$ *alors* $\boldsymbol{F}(\alpha_\bullet) \sim \boldsymbol{F}(\beta_\bullet) \in \mathrm{Mor}_{C(\mathcal{B})}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{A}^\bullet, \boldsymbol{F}\boldsymbol{B}^\bullet)$, *pour* ***tout*** *foncteur additif* $\boldsymbol{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$.

b) *Lorsque* $\mathcal{A}$ *est abélienne, si* $\alpha_\bullet \sim \beta_\bullet \in \mathrm{Mor}_{C(\boldsymbol{X})}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet)$ *alors* $H^m\alpha_\bullet = H^m\beta_\bullet$ *pour tout* $m \in \mathbb{Z}$.

2) Lorsque $\mathcal{A}$ est abélienne, deux complexes $\boldsymbol{A}^\bullet$ et $\boldsymbol{B}^\bullet$ sont dits «*quasi-isomorphes*» s'il existe $\alpha_\bullet \in \mathrm{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\boldsymbol{A}^\bullet, \boldsymbol{B}^\bullet)$ tel que $H^m\alpha_\bullet : H^m\boldsymbol{A}^\bullet \to H^m\boldsymbol{B}^\bullet$ est un isomorphisme pour tout m. Un tel morphisme est appelé «*un quasi-isomorphisme*».

3) Lorsque $\mathcal{A}$ est abélienne, un quasi-morphisme $\alpha_\bullet \in \mathrm{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\boldsymbol{A}^\bullet, \boldsymbol{B}^\bullet)$ où chaque terme de $\mathscr{G}^\bullet$ est injectif est appelé «*une résolution injective de* $\boldsymbol{A}^\bullet$».
Lorsque $\mathcal{A} = \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$, un quasi-morphisme $\alpha_\bullet \in \mathrm{Mor}_{C(\boldsymbol{X})}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet)$ où chaque terme de $\mathscr{G}^\bullet$ est flasque, c-mou, ..., est appelé «*une résolution flasque, c-molle, ..., de* $\mathscr{F}^\bullet$»

1.3.8 Pour tout foncteur additif et **exact** entre catégories abéliennes $\boldsymbol{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$, le foncteur induit $\boldsymbol{F} : C(\mathcal{A}) \rightsquigarrow C(\mathcal{B})$ transforme morphismes homotopes en morphismes homotopes et quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes.

1.3.9 Troncatures intelligentes. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On rappelle la définition du foncteur de «*troncature (intelligente) à l'ordre* m», noté $\tau_{\leqslant m} : C(\mathcal{A}) \rightsquigarrow C(\mathcal{A})$, pour $m \in \mathbb{Z}$.

Pour tout complexe de $C(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{rccccccccc}
\boldsymbol{A}^\bullet = & \Big(\cdots \boldsymbol{A}^{m-1} & \xrightarrow{d_{m-1}} & \boldsymbol{A}^m & \xrightarrow{d_m} & \boldsymbol{A}^{m+1} & \xrightarrow{d_{m+1}} & \boldsymbol{A}^{m+2} & \xrightarrow{d_{m+2}} & \cdots\Big)\,, \\
\text{on pose :} & \| & & \| & & \subseteq\uparrow & & 0\uparrow & & \\
\tau_{\leqslant m}\boldsymbol{A}^\bullet := & \Big(\cdots \boldsymbol{A}^{m-1} & \xrightarrow{d_{m-1}} & \boldsymbol{A}^m & \xrightarrow{d_m} & \mathrm{im}(d_m) & \xrightarrow{0} & \mathbf{0} & \xrightarrow{0} & \cdots\Big)\,,
\end{array}$$

([10]). Pour tout morphisme de complexes $\alpha_\bullet : \boldsymbol{A}^\bullet \to \boldsymbol{B}^\bullet$, on note $\tau_{\leqslant m}\alpha_\bullet : \tau_{\leqslant m}\boldsymbol{A}^\bullet \to \tau_{\leqslant m}\boldsymbol{B}^\bullet$ le morphisme de complexes défini par :

$$\begin{cases} (\tau_{\leqslant m}\alpha_\bullet)_k &= \alpha_k & \text{si } k \leqslant m, \\ (\tau_{\leqslant m}\alpha_\bullet)_{m+1} &= \alpha_{m+1}|_{\mathrm{im}(d_m)} & \\ (\tau_{\leqslant m}\alpha_\bullet)_k &= 0 & \text{si } k > m+1. \end{cases}$$

1.3.10 Le complexe $\tau_{\leqslant m}\boldsymbol{A}^\bullet$ est un sous-complexe de $\boldsymbol{A}^\bullet$ qui vérifie par construction

$$\begin{cases} H^k(\tau_{\leqslant m}\boldsymbol{A}^\bullet) \equiv H^k\boldsymbol{A}^\bullet, & \text{si } k \leqslant m, \\ H^k(\tau_{\leqslant m}\boldsymbol{A}^\bullet) = 0\,, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'injection $\tau_{\leqslant m}\boldsymbol{A}^\bullet \subseteq \boldsymbol{A}^\bullet$ est naturelle par rapport à $\boldsymbol{A}^\bullet$, *i.e.* provient d'un morphisme de foncteurs qu'on notera '$\subseteq\ : \tau_{\leqslant m} \to \mathrm{id}$'.

1.3.11 Les foncteurs de troncature *ne sont pas exacts* ; en effet, après troncature des termes d'une suite exacte de complexes la suite de complexes obtenue n'est pas toujours exacte.

1.3.12 Cône d'un morphisme de complexes. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. Pour tout $\alpha_\bullet \in \mathrm{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\boldsymbol{A}^\bullet, \boldsymbol{B}^\bullet)$, on appelle « *cône de* $\alpha_\bullet$ », la donnée du complexe $\boldsymbol{C}(\alpha_\bullet)^\bullet$ de termes $\boldsymbol{C}(\alpha_\bullet)^k = \boldsymbol{A}^k \oplus \boldsymbol{B}^{k+1}$ et de différentielle $(f,e) \mapsto \big(d_{\boldsymbol{A}}(f) - \alpha(e), -d_{\boldsymbol{B}}(e)\big)$, et des morphismes de complexes $\beta_\bullet : \boldsymbol{B}^\bullet \to \boldsymbol{C}(\alpha_\bullet)^\bullet$, $\beta(f) = (f,0)$, et $\gamma_\bullet : \boldsymbol{C}(\alpha_\bullet)^\bullet \to \boldsymbol{A}^\bullet[1]$, $\gamma(f,e) = e$. On représente ces données sous la forme :

$$\boldsymbol{A}^\bullet \xrightarrow{\alpha_\bullet} \boldsymbol{B}^\bullet \xrightarrow{\beta_\bullet} \boldsymbol{C}(\alpha_\bullet)^\bullet \xrightarrow[[+1]]{\gamma_\bullet} \boldsymbol{A}^\bullet[1] \qquad (\diamond)$$

Deux propriétés du cône d'un morphisme de complexes :

- $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{C}(\alpha_\bullet)^\bullet) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{F}\alpha_\bullet)^\bullet$, pour tout foncteur additif $\boldsymbol{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$.
- Lorsque $\mathcal{A}$ est abélienne, la suite longue qui se déduit de $(\diamond)$:

  $$H^{m-1}\boldsymbol{C}(\alpha_\bullet)^\bullet \xrightarrow[[+1]]{H^{m-1}\gamma_\bullet} H^m\boldsymbol{A}^\bullet \xrightarrow{H^m\alpha_\bullet} H^m\boldsymbol{B}^\bullet \xrightarrow{H^m\beta_\bullet} H^m\boldsymbol{C}(\alpha_\bullet)^\bullet \xrightarrow[[+1]]{H^m\gamma_\bullet} H^{m+1}\boldsymbol{A}^\bullet$$

  est **exacte**.

1.4 Catégorie dérivée([11])

1.4.1 Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On note $D(\mathcal{A})$ la catégorie dérivée de $\mathcal{A}$. On rappelle que les objets de $D(\mathcal{A})$ sont les mêmes que pour $C(\mathcal{A})$ et que $\mathrm{Mor}_{D(\mathcal{A})}(\boldsymbol{A}^\bullet, \boldsymbol{B}^\bullet)$ est défini à partir de $\mathrm{Mor}_{C(\mathcal{A})}(\boldsymbol{A}^\bullet, \boldsymbol{B}^\bullet)$ en identifiant les morphismes homotopes et en inversant formellement ses quasi-isomorphismes. Les quasi-isomorphismes de complexes sont donc des isomorphismes en catégorie dérivée.

Lorsque $\mathcal{A} = \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$, on notera $D_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ plutôt que $D(\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X}))$. Le groupe abélien $\mathrm{Mor}_{D_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet)$ est muni d'une structure de $\mathscr{A}$-module. On omettra souvent de préciser l'anneau $\mathscr{A}$ dans ces notations et lorsque $\boldsymbol{X}$ sera réduit à un point, la notation $D_{\mathscr{A}}(\bullet)$ sera abrégée à $D_{\mathscr{A}}$.

---

[10] L'appellation de « *troncature intelligente* » est par opposition à la troncature dite « *bête* » qui diffère de $\tau_{\leqslant m}\boldsymbol{A}^\bullet$ par le fait que tous les termes en degrés supérieurs à m sont nuls.

[11] *Cf.* [Ha$_1$] chapitre I, pp. 19–84.

1.4.2 Le foncteur de translation $\boldsymbol{T} : C(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \rightsquigarrow C(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ est clairement une équivalence de catégories qui passe en catégorie dérivée $\boldsymbol{T} : D(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \rightsquigarrow D(\boldsymbol{\mathcal{A}})$.

1.4.3 Lorsque $\alpha_\bullet, \beta_\bullet : \boldsymbol{A}^\bullet \to \boldsymbol{B}^\bullet$ sont deux morphismes homotopes, on a $H^m\alpha_\bullet = H^m\beta_\bullet$ et comme H^m transforme (par définition) un quasi-isomorphisme en isomorphisme, le foncteur $H^m : C(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \rightsquigarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$ induit un foncteur $H^m : D(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \rightsquigarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$.

1.4.4 Triangles exacts. Un «*triangle*» de $D(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ est la donnée d'un triplet $(\alpha_\bullet, \beta_\bullet, \gamma_\bullet)$ de morphismes de $D(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ dont les sources et buts se correspondent de la manière suivante :

$$\boldsymbol{A}^\bullet \xrightarrow{\alpha_\bullet} \boldsymbol{B}^\bullet \xrightarrow{\beta_\bullet} \boldsymbol{C}^\bullet \xrightarrow[[+1]]{\gamma_\bullet} \boldsymbol{A}^\bullet[1]$$

Les complexes $\boldsymbol{A}^\bullet, \boldsymbol{B}^\bullet, \boldsymbol{C}^\bullet$ sont appelés les «*sommets*» du triangle. Un morphisme d'un triangle $(\alpha_{1\bullet}, \beta_{1\bullet}, \gamma_{1\bullet})$ vers un triangle $(\alpha_{2\bullet}, \beta_{2\bullet}, \gamma_{2\bullet})$ est la donnée d'un triplet $(a_\bullet, b_\bullet, c_\bullet)$ de morphismes de $D(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ dont les sources et buts correspondent au diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
\boldsymbol{A}_1^\bullet & \xrightarrow{\alpha_{1\bullet}} & \boldsymbol{B}_1^\bullet & \xrightarrow{\beta_{1\bullet}} & \boldsymbol{C}_1^\bullet & \xrightarrow[[+1]]{\gamma_{1\bullet}} & \boldsymbol{A}_1^\bullet[1] \\
\downarrow{\scriptstyle a_\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle b_\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle c_\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle a_\bullet[1]} \\
\boldsymbol{A}_2^\bullet & \xrightarrow{\alpha_{2\bullet}} & \boldsymbol{B}_2^\bullet & \xrightarrow{\beta_{2\bullet}} & \boldsymbol{C}_2^\bullet & \xrightarrow[[+1]]{\gamma_{2\bullet}} & \boldsymbol{A}_2^\bullet[1]
\end{array}$$

et tels que ce diagramme est commutatif (dans $D(\boldsymbol{\mathcal{A}})$). Le morphisme $(a_\bullet, b_\bullet, c_\bullet)$ est un «*isomorphisme de triangles*» lorsque ses composantes sont des isomorphismes (dans $D(\boldsymbol{\mathcal{A}})$).

Définition. Un triangle de $D(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ est dit «*exact*» (ou «*distingué*») s'il est isomorphe au triangle associé au cône d'un morphisme de $C(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ (1.3.12-($\diamond$)).

1.4.5 Dans un triangle exact $(\alpha_\bullet, \beta_\bullet, \gamma_\bullet)$ la composition de deux morphismes consécutifs est toujours nulle et dans un morphisme de triangles exacts $(a_\bullet, b_\bullet, c_\bullet)$, il suffit que deux morphismes soient des isomorphismes pour que le troisième le soit.

1.4.6 Catégories triangulées. On rappelle de manière très succincte que l'on appelle «*catégorie triangulée*» une catégorie additive munie d'un automorphisme de «*translation*» $\boldsymbol{T}$ et d'une classe de «*triangles exacts*» le tout satisfaisant quatre axiomes (*cf.* [Ha$_1$] ch. I §1 p. 20). La catégorie $D(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ munie de la classe des "triangles exacts" est une catégorie triangulée (*loc.cit.* I §2 p. 25).

1.4.7 Un foncteur additif entre deux catégories triangulées est dit «*exact*» lorsque : (a) il commute aux foncteur de translation, et (b) il transforme un triangle exact en un triangle exact.

1.4.8 Comme dans 1.3.12, tout triangle exact de $D(\boldsymbol{\mathcal{A}})$:

$$\boldsymbol{A}^\bullet \xrightarrow{\alpha_\bullet} \boldsymbol{B}^\bullet \xrightarrow{\beta_\bullet} \boldsymbol{C}^\bullet \xrightarrow[[+1]]{\gamma_\bullet}$$

donne lieu à une suite exacte longue de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$:

$$\cdots \xrightarrow{H^{m-1}\gamma_\bullet} H^m\boldsymbol{A}^\bullet \xrightarrow{H^m\alpha_\bullet} H^m\boldsymbol{B}^\bullet \xrightarrow{H^m\beta_\bullet} H^m\boldsymbol{C}^\bullet \xrightarrow{H^m\gamma_\bullet} \mathscr{H}^{m+1}\boldsymbol{A}^\bullet \xrightarrow{H^{m+1}\alpha_\bullet} \cdots$$

Propriété qui est également vérifiée par les foncteurs $\mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{\mathcal{A}})}(\boldsymbol{M}^\bullet, _)$ et $\mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{\mathcal{A}})}(_, \boldsymbol{M}^\bullet)$ pour tout $\boldsymbol{M}^\bullet \in D(\boldsymbol{\mathcal{A}})$; a savoir, la suite longue :

$$\cdots \to \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{\mathcal{A}})}(\boldsymbol{M}^\bullet, \boldsymbol{A}^\bullet) \to \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{\mathcal{A}})}(\boldsymbol{M}^\bullet, \boldsymbol{B}^\bullet) \to \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{\mathcal{A}})}(\boldsymbol{M}^\bullet, \boldsymbol{C}^\bullet) \to \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{\mathcal{A}})}(\boldsymbol{M}^\bullet, \boldsymbol{A}^\bullet[1]) \to \cdots$$

est exacte de même que celle (contravariante) associée à $\mathrm{Mor}_{D(\mathcal{A})}(_, \boldsymbol{M}^\bullet)$.

1.4.9 Amplitude cohomologique d'un complexe. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Pour tout $\boldsymbol{A}^\bullet \in D(\mathcal{A})$, on appelle «*amplitude cohomologique de* $\boldsymbol{A}^\bullet$», notée $[\![\boldsymbol{A}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}}$, le plus grand intervalle $[\![a,b]\!] \subseteq \mathbb{Z}$ tel que $H^a\boldsymbol{A}^\bullet \neq 0$ et $H^b\boldsymbol{A}^\bullet \neq 0$. On a

$$[\![\boldsymbol{A}^\bullet[m]]\!]_{\mathrm{coh}} + m = [\![\boldsymbol{A}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}}\,.$$

1.4.10 Support cohomologique d'un complexe de faisceaux. Pour tout $\mathscr{F}^\bullet \in D(\boldsymbol{X})$, on appelle «*support cohomologique de* $\mathscr{F}^\bullet$»: l'ensemble $|\mathscr{F}^\bullet| := \cup_{m\in\mathbb{Z}}|\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet|$ (1.2.1). Comme dans le cas des faisceaux, le support cohomologique d'un complexe de faisceaux n'a aucune raison *a priori* d'être localement fermé.

1.4.11 Lorsque $\boldsymbol{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ est un foncteur additif et exact, son action sur les complexes passe en catégories dérivées $\boldsymbol{F} : D(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D(\mathcal{B})$ (1.3.8) et l'on a un diagramme commutatif de foncteurs:

$$\begin{array}{ccc} D(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\boldsymbol{F}} & D(\mathcal{B}) \\ {\scriptstyle H^m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H^m} \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\boldsymbol{F}} & \mathcal{B} \end{array}$$

En particulier, lorsque $\mathcal{A} = \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$, on a pour toute partie $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$ et tout localement fermé $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{X}$:

$$\boxed{\imath_{\boldsymbol{S}!}\big(\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet\big) \equiv \mathscr{H}^m\big(\imath_{\boldsymbol{S}!}\mathscr{F}^\bullet\big)} \quad \text{et} \quad \boxed{\big(\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet\big)|_{\boldsymbol{A}} \equiv \mathscr{H}^m\big(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{A}}\big)}$$

(La notation $\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{A}}$ sera donc non ambiguë.)

1.4.12 Notation. Pour toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$, on note on note $D^+(\mathcal{A})$ (resp. $D^-(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$ dont les objets sont les complexes $\boldsymbol{A}^\bullet$ vérifiant $H^m\boldsymbol{A}^\bullet = 0$, pour $m \ll 0$ (resp. $m \gg 0$). On pose alors $D^b(\mathcal{A}) := D^+(\mathcal{A}) \cap D^-(\mathcal{A})$.

1.4.13 La catégorie $D^+(\mathcal{A})$ est clairement stable par le foncteur de translation de $D(\mathcal{A})$ et, munie des triangles exacts de $D(\mathcal{A})$ à sommets dans $D^+(\mathcal{A})$, c'est une catégorie triangulée et même une «*sous-catégorie triangulée de* $D(\mathcal{A})$», ce qui signifie que si deux sommets d'un triangle exact de $D(\mathcal{A})$ appartiennent à $D^+(\mathcal{A})$, le troisième sommet lui appartient également. Cette remarque s'applique également aux sous-catégories $D^-(\mathcal{A})$ et $D^b(\mathcal{A})$.

1.4.14 Foncteurs dérivés à droite. Pour tout foncteur $\boldsymbol{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$, additif et exact à gauche entre catégories abéliennes, il existe un «*le foncteur dérivé à droite de* $\boldsymbol{F}$», noté $\mathbb{R}\boldsymbol{F}$, défini de $D^+(\mathcal{A})$ vers $D^+(\mathcal{B})$. Le foncteur $\mathbb{R}\boldsymbol{F} : D^+(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D^+(\mathcal{B})$ est caractérisé par les deux propriétés suivantes:

$\mathbb{R}$-i) $\mathbb{R}\boldsymbol{F}$ *est exact entre catégories triangulées* (1.4.7,1.4.13).

$\mathbb{R}$-ii) $\mathbb{R}\boldsymbol{F}$ *"prolonge" les foncteurs* $\mathbb{R}^m\boldsymbol{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$, *i.e. il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathbb{R}^m\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}) \equiv H^m\mathbb{R}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}[0])\,,$$

pour tout $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ (1.2.7,1.3.4).

Pour tout complexe $\boldsymbol{I}^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$ à termes injectifs, on a $\mathbb{R}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{I}^\bullet) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{I}^\bullet)$. En particulier pour chaque $\boldsymbol{A}^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$, tout quasi-isomorphisme de complexes $\varepsilon : \boldsymbol{A}^\bullet \to \boldsymbol{I}^\bullet$ détermine un isomorphisme :

$$\mathbb{R}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}^\bullet) \xrightarrow[(\varepsilon)]{\sim} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{I}^\bullet) \in D^+(\mathcal{A}).$$

De même, un quasi-isomorphisme $\varepsilon : \boldsymbol{A}^\bullet \to \boldsymbol{K}^\bullet$, où $\boldsymbol{K}^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$ et où chaque terme de $\boldsymbol{K}^\bullet$ est $\boldsymbol{F}$-acyclique (1.2.8), donne lieu à un isomorphisme $(\varepsilon) : \mathbb{R}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}^\bullet) \sim \boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}^\bullet)$.

1.4.15 L'exactitude des foncteurs $\mathbb{R}\boldsymbol{F}$ à une conséquence pratique très utile qui relève de la propriété générale suivante. Étant donné un morphisme $\Xi : \boldsymbol{F}_1 \to \boldsymbol{F}_2$ entre deux foncteurs exacts de catégories triangulées $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2 : D^+(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D(\mathcal{B})$, le morphisme Ξ est un isomorphisme si et seulement si $\Xi(\boldsymbol{A}[0]) : \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{A}[0]) \to \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{A}[0])$ est un isomorphisme pour tout $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, et même pour tout $\boldsymbol{A} \in \mathcal{A}$ *injectif*.

1.4.16 Subtilité. Soient $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ deux foncteurs additfs exacts à gauche entre catégories abéliennes. Il existe un morphisme naturel de foncteurs $\mathbb{R}(\boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{F}) \to \mathbb{R}\boldsymbol{G} \circ \mathbb{R}\boldsymbol{F}$. Ce morphisme est un isomorphisme si et seulement si $\boldsymbol{F}$ transforme un objet injectif de $\mathcal{A}$ en un objet $\boldsymbol{G}$-acyclique de $\mathcal{B}$.

1.4.17 Lorsque $\mathcal{A}$ est de dimension injective finie d (1.2.11), tout objet de $\mathcal{A}$ admet des résolutions injectives de longueur bornées par d. On en déduit que tout complexe de $C(\mathcal{A})$ à cohomologie bornée est isomorphe dans $D(\mathcal{A})$ à un complexe de longueur finie à termes injectifs. Dans ce cas, pour **tout** foncteur additif exact à gauche $\boldsymbol{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$, le foncteur dérivé $\mathbb{R}\boldsymbol{F} : D^+(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D^+(\mathcal{B})$ vérifie $\mathbb{R}\boldsymbol{F}(D^b(\mathcal{A})) \subseteq D^b(\mathcal{B})$.

1.4.18 Comme conséquence des deux dernières remarques, les foncteurs additifs exacts à gauche $\imath_{\boldsymbol{A}*} : \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ et $\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}} : \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{S})$ (1.2.3), vérifient pour tous $\boldsymbol{F} : \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathcal{A}$ et $\boldsymbol{G} : \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{S}) \rightsquigarrow \mathcal{A}$ additifs et exacts à gauche :

$$\begin{cases} \text{i) } \mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{A}*} : D^+(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow D^+(\boldsymbol{X}) \\ \text{ii) } \mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{A}*}(D^b(\boldsymbol{A})) \subseteq D^b(\boldsymbol{X}) \\ \text{iii) } \mathbb{R}\boldsymbol{F} \circ \mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{A}*} \equiv \mathbb{R}(\boldsymbol{F} \circ \imath_{\boldsymbol{A}*}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{i) } \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}} : D^+(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow D^+(\boldsymbol{S}) \\ \text{ii) } \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}\big(D^b(\boldsymbol{X})\big) \subseteq D^b(\boldsymbol{S}) \\ \text{iii) } \mathbb{R}\boldsymbol{G} \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}} \equiv \mathbb{R}(\boldsymbol{G} \circ \underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}) \end{cases}$$

puisque les foncteurs $\imath_{\boldsymbol{A}*}$ et $\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}$ transforment injectifs en injectifs (1.2.5) et compte tenu des hypothèses de finitude cohomologique imposées à $\boldsymbol{X}$ (1.1).

Notation. Le foncteur dérivé $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}$ sera noté $\imath^!_{\boldsymbol{S}}$ conformément à l'usage (*cf.* 1.5.4).

1.4.19 Changement de base pour les inclusions localement fermées. On reprend les notations de 1.2.2. Soient $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{T}$ deux parties localement fermées de $\boldsymbol{X}$ et considérons le diagramme d'inclusions :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{T} & \xhookrightarrow{\imath^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}}} & \boldsymbol{T} \\ {\scriptstyle \imath^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}}}\downarrow \subseteq & \square & \subseteq \downarrow{\scriptstyle \imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}} \\ \boldsymbol{S} & \xhookrightarrow[\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{S}}]{} & \boldsymbol{X} \end{array}$$

Pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Faisc}(\boldsymbol{S})$ la restriction d'une section de $\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{S}!}\mathscr{F}$ à $\boldsymbol{T}$ est clairement, par définition, une section de $\imath^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}!}(\mathscr{F}|_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}})$. On a ainsi un morphisme naturel dans $\mathrm{Faisc}(\boldsymbol{T})$:

$$\imath^{\boldsymbol{X}\,-1}_{\boldsymbol{T}}\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{S}!}\mathscr{F} \xrightarrow[\equiv]{\diamond!} \imath^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}!}\imath^{\boldsymbol{S}\,-1}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}}\mathscr{F}$$

qui est bijectif d'après l'inspection de son action sur les fibres (les foncteurs $\imath_!$ sont des prolongements par zéro !). On a donc un isomorphisme naturel, pour tout $\mathscr{G} \in \mathrm{Faisc}(\boldsymbol{T})$:

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{T}}}\big(\imath^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}!}\imath^{\boldsymbol{S}\,-1}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}}\mathscr{F},\,\mathscr{G}\big) \xrightarrow[\equiv]{} \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{T}}}\big(\imath^{\boldsymbol{X}\,-1}_{\boldsymbol{T}}\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{S}!}\mathscr{F},\,\mathscr{G}\big)$$

et par adjonction :

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{S}}}\big(\mathscr{F},\,\imath^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}*}\underline{\Gamma}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}}\mathscr{G}\big) \xrightarrow[\equiv]{} \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{S}}}\big(\mathscr{F},\,\underline{\Gamma}^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{S}}\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}*}\mathscr{G}\big)$$

d'où un isomorphisme naturel dans $\mathrm{Faisc}(\boldsymbol{S})$:

$$\imath^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}*}\underline{\Gamma}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}}\,\mathscr{G} \xrightarrow[\equiv]{\diamond_*} \underline{\Gamma}^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{S}}\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}*}\mathscr{G}$$

Proposition. *Les parties $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{T}$ étant localement fermées dans $\boldsymbol{X}$:*
a) *Les morphismes $(\diamond_*)$ et $(\diamond_!)$ induisent des isomorphismes de foncteurs de catégories dérivées :*

$$\mathbb{R}\imath^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}*}\circ\imath^{\boldsymbol{T}\,!}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}} \equiv \imath^{\boldsymbol{X}\,!}_{\boldsymbol{S}}\circ\mathbb{R}\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}*} \qquad \text{et} \qquad \imath^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}!}\circ\imath^{\boldsymbol{T}\,-1}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}} \equiv \imath^{\boldsymbol{X}\,-1}_{\boldsymbol{S}}\circ\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}!}$$

b) $\imath^{\boldsymbol{X}\,!}_{\boldsymbol{S}}\circ\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}!} = \mathbf{0}$ *lorsque* $\boldsymbol{S}\cap\overline{\boldsymbol{T}} = \varnothing$.
c) $\imath^{\boldsymbol{X}\,!}_{\boldsymbol{S}}\circ\mathbb{R}\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}*} = \mathbf{0}$ *lorsque* $\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T} = \varnothing$.
d) *On a un isomorphisme canonique* $\imath^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}!}\circ\imath^{\boldsymbol{T}\,!}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}} \equiv \imath^{\boldsymbol{X}\,!}_{\boldsymbol{S}}\circ\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}!}$, *lorsque $\boldsymbol{T}$ est fermé, ou bien lorsque $\boldsymbol{S}$ est ouvert.*

Indications. D'après 1.4.15, il suffit de vérifier chaque isomorphisme en calculant sur un complexe concentré en degré 0, *i.e.* sur un faisceau. La première équivalence est conséquence immédiate de 1.4.18-(iii) ; la seconde est un relettrage de $(\diamond_!)$. L'assertion (c) en découle aussitôt. Pour (b), on a $\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}!} = \imath^{\boldsymbol{X}}_{\overline{\boldsymbol{T}}*}\circ\imath^{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T}!}$ et donc $\imath^{\boldsymbol{X}\,!}_{\boldsymbol{S}}\circ\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}!} = \big(\imath^{\boldsymbol{X}\,!}_{\boldsymbol{S}}\circ\imath^{\boldsymbol{X}}_{\overline{\boldsymbol{T}}*}\big)\circ\imath^{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T}!}$; on applique alors (c). Enfin pour (d), si $\boldsymbol{T}$ est fermé, on a $\imath^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}!} = \imath^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}*}$ et $\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}!} = \imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}*}$; et si $\boldsymbol{S}$ est ouvert, on a $\imath^{\boldsymbol{T}!}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}} = \imath^{\boldsymbol{T}\,-1}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}}$ et $\imath^{\boldsymbol{X}\,!}_{\boldsymbol{S}} = \imath^{\boldsymbol{X}\,-1}_{\boldsymbol{S}}$, dans les deux cas on est ramené à (a). ∎

1.4.20 Faisceaux dérivés à supports dans un localement fermé. Pour toute partie $\boldsymbol{S}$ localement fermée dans $\boldsymbol{X}$, on note $\mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{S}}$ la composée des deux foncteurs $\imath^!_{\boldsymbol{S}} : D^+(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow D^+(\boldsymbol{S})$ et $\mathscr{H}^{\,m} : D^+(\boldsymbol{S}) \rightsquigarrow \mathrm{Faisc}(\boldsymbol{S})$:

$$\boxed{\mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^\bullet := \mathscr{H}^{\,m}(\imath^!_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^\bullet) \in \mathrm{Faisc}(\boldsymbol{S})}$$

Cette définition généralise celle de $\mathscr{H}^{\,m}$ puisque $\mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{X}} = \mathscr{H}^{\,m}$ de manière évidente.

1.4.21 Comme dans le cas des foncteurs $\mathscr{H}^{\,m}$ (1.4.8), tout triangle exact de $D^+(\boldsymbol{X})$:

$$\mathscr{E}^\bullet \longrightarrow \mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathscr{G}^\bullet \xrightarrow[[+1]]{},$$

donne lieu à une suite exacte longue de $\mathrm{Faisc}(\boldsymbol{S})$:

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{H}^{\,m-1}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{G}^\bullet \longrightarrow \mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{E}^\bullet \longrightarrow \mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{G}^\bullet \longrightarrow \mathscr{H}^{\,m+1}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{E}^\bullet \longrightarrow \cdots$$

1.4.22 Soit $\boldsymbol{U}$ un ouvert de $\boldsymbol{X}$ contenant $\boldsymbol{S}$. L'inclusion $\imath_{\boldsymbol{S}} : \boldsymbol{S} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ se factorise à travers $\boldsymbol{U}$ en deux inclusions localement fermées $\boldsymbol{S} \overset{\imath_1}{\hookrightarrow} \boldsymbol{U} \overset{\imath_2}{\hookrightarrow} \boldsymbol{X}$, et $\imath^!_{\boldsymbol{S}} = \imath^!_1\imath_2^{-1}$ car $\imath_2$ est ouvert (1.2.3). Par conséquent, pour tout $\mathscr{F}^\bullet \in D^+(\boldsymbol{X})$:

$$\boxed{\mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^\bullet \equiv \mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{S}}\big(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{U}}\big)\,,\ \text{lorsque } \boldsymbol{S}\subseteq\boldsymbol{U}\subseteq\boldsymbol{X}}$$

Et lorsque $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}$:

$$\boxed{\mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{U}}\mathscr{F}^{\bullet} \equiv \mathscr{H}^{\,m}\big(\mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{U}}\big) \equiv \mathscr{H}^{\,m}\big(\mathscr{F}^{\bullet}\big)|_{\boldsymbol{U}}}$$

1.4.23 Soient $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{T}$ deux parties localement fermées de $\boldsymbol{X}$. D'après 1.4.19, on a, pour tout $\mathscr{F}^{\bullet} \in D^{+}(\boldsymbol{X})$ et tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{S}}(\mathbb{R}\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}*}\mathscr{F}^{\bullet}) \equiv \mathbb{R}\imath^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}\,*}\mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}}\mathscr{F}^{\bullet}; \\ \mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{S}}(\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}!}\mathscr{F}^{\bullet}) = 0\,, \quad \text{lorsque } \boldsymbol{S}\cap\overline{\boldsymbol{T}} = \varnothing\,; \\ \mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{S}}(\mathbb{R}\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}*}\mathscr{F}^{\bullet}) = 0\,, \quad \text{lorsque } \boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T} = \varnothing\,; \end{cases}$$

de même qu'un isomorphisme naturel :

$$\mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{S}}(\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}!}\mathscr{F}^{\bullet}) \equiv \imath^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}\,!}\mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T}}\mathscr{F}^{\bullet}$$

lorsque $\boldsymbol{T}$ est fermée ou bien lorsque $\boldsymbol{S}$ est ouverte.

1.4.24 Un triangle exact fondamental. Soient $\boldsymbol{S}$ une partie localement fermée de $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{S}$ et $\imath_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ l'inclusion. La suite 1.2.6-($\star$) donne lieu, en catégorie dérivée maintenant, au triangle exact de $D^{+}(\boldsymbol{X})$:

$$\imath_{\boldsymbol{S}\,!}\imath^{!}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^{\bullet} \longrightarrow \mathscr{F}^{\bullet} \longrightarrow \mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{A}*}\imath^{-1}_{\boldsymbol{A}}(\mathscr{F}^{\bullet}) \xrightarrow[[+1]]{}\,, \qquad (*)$$

dont on déduit la suite exacte longue (1.4.11) :

$$\to \mathscr{H}^{\,m-1}\big(\mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{A}*}(\mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{A}})\big) \to \imath_{\boldsymbol{S}\,!}\mathscr{H}^{\,m}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^{\bullet} \to \mathscr{H}^{\,m}\mathscr{F}^{\bullet} \to \mathscr{H}^{\,m}\big(\mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{A}*}(\mathscr{F}^{\bullet}|_{\boldsymbol{A}})\big) \to \imath_{\boldsymbol{S}\,!}\mathscr{H}^{\,m+1}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^{\bullet} \to \qquad (\diamond)$$

1.4.25 Troncatures intelligentes dans $\boldsymbol{D(X)}$. Comme la troncature de deux morphismes de complexes homotopes donne des morphismes homotopes et que deux complexes quasi-isomorphes restent quasi-isomorphes après troncature, le foncteur $\tau_{\leqslant m} : C(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow C(\boldsymbol{X})$ induit bien un foncteur $\tau_{\leqslant m} : D(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow D(\boldsymbol{X})$.

1.4.26 Les foncteurs de troncature *ne sont pas exacts*, en effet, après troncature des sommets d'un triangle exact le triangle obtenu n'est pas toujours exact (*cf.* 1.3.11).

1.4.27 Complexes cohomologiquement concentrés en un seul degré. Soit $d \in \mathbb{Z}$. Un complexe $\mathscr{F}^{\bullet} \in C(\boldsymbol{X})$ est dit « *cohomologiquement concentré en degré* d », lorsque $\mathscr{H}^{\,m}\mathscr{F}^{\bullet} = 0$ pour tout $m \neq d$, autrement dit lorsque, $[\![\mathscr{F}^{\bullet}]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![d]\!]$.

La composée du foncteur $(_)[0] : \mathrm{Faisc}(\boldsymbol{X}) \to C(\boldsymbol{X})$ (1.3.4) et de l'inclusion $C(\boldsymbol{X}) \subseteq D(\boldsymbol{X})$ donne le foncteur $(_)[0] : \mathrm{Faisc}(\boldsymbol{X}) \to D(\boldsymbol{X})$ pleinement fidèle d'inverse à gauche $\mathscr{H}^{\,0}$ et d'image essentielle : la sous-catégorie pleine des complexes cohomologiquement concentrés en degré 0. En effet, pour tout $\mathscr{F}^{\bullet} \in C(\boldsymbol{X})$ on a la suite exacte de complexes :

$$0 \to \tau_{\leqslant -1}\mathscr{F}^{\bullet} \xrightarrow{\subseteq} \mathscr{F}^{\bullet} \xrightarrow{q} \tau_{\geqslant 0}\mathscr{F}^{\bullet} := \frac{\mathscr{F}^{\bullet}}{\tau_{\leqslant -1}\mathscr{F}^{\bullet}} \to 0$$

où q désigne la surjection canonique, et un morphisme de complexes ε

$$\begin{array}{ccccccccc}
\tau_{\geqslant 0}\mathscr{F}^\bullet & = & \Big(0 \to & \dfrac{\mathscr{F}^0}{\mathrm{im}(d_{-1})} & \xrightarrow{\bar{d}_0} & \mathscr{F}^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathscr{F}^2 & \xrightarrow{d_2} \cdots\Big) \\
\varepsilon\uparrow & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\big(\mathscr{H}^0\mathscr{F}^\bullet\big)[0] & = & \Big(0 \to & \dfrac{\ker(d_0)}{\mathrm{im}(d_{-1})} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots\Big)
\end{array}$$

induit par l'inclusion $\ker(d_0) \subseteq \mathscr{F}^0$. On a donc, dans la catégorie $C(\boldsymbol{X})$:

$$\mathscr{F}^\bullet \xrightarrow{\ q\ } \tau_{\geqslant 0}\mathscr{F}^\bullet \xleftarrow{\ \varepsilon\ } \big(\mathscr{H}^0\mathscr{F}^\bullet\big)[0]\,.$$

Cela étant, lorsque $\mathscr{F}^\bullet$ est cohomologiquement concentré en degré 0, les morphismes q et ε sont des quasi-isomorphismes et $\mathscr{F}^\bullet$ et $\big(\mathscr{H}^0\mathscr{F}^\bullet\big)[0]$ sont isomorphes **dans la catégorie $\boldsymbol{D(X)}$**.

1.4.28 Le bifoncteur $\mathscr{H}om^\bullet$ sur $D_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$. Soient $(\mathscr{F}^\bullet, d(\mathscr{F})_\bullet)$ et $(\mathscr{G}^\bullet, d(\mathscr{G})_\bullet)$ deux complexes de faisceaux. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on note :

$$\mathscr{H}om^m_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) := \prod\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{H}om_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{F}^k, \mathscr{G}^{m+k})\,,$$

et l'on définit les morphismes de faisceaux :

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{H}om^m_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) & \xrightarrow{\qquad D(\mathscr{F},\mathscr{G})_m \qquad} & \mathscr{H}om^{m+1}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \\
\big(k \mapsto \alpha_k\big) & \longmapsto & \big(k \mapsto d(\mathscr{G})_{m+k} \circ \alpha_k\big) - (-1)^m\big(k \mapsto \alpha_{k+1} \circ d(\mathscr{F})_k\big)
\end{array}$$

qui vérifient $D(\mathscr{F},\mathscr{G})_m \circ D(\mathscr{F},\mathscr{G})_{m-1} = 0$. On obtient par ce procédé un complexe de faisceaux $\big(\mathscr{H}om^\bullet_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet), D(\mathscr{F},\mathscr{G})_\bullet\big)$ et un bifoncteur $\mathscr{H}om^\bullet_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}} : C(\boldsymbol{X}) \times C(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow C(\boldsymbol{X})$ induisant, en catégories dérivées, un bifoncteur

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}} : D_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X}) \times D^+_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow D_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$$

'défini' par $\mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) = \mathscr{H}om^\bullet_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{F}^\bullet, \boldsymbol{I}^\bullet(\mathscr{G}))$, où $\mathscr{G}^\bullet \to \boldsymbol{I}^\bullet(\mathscr{G})$ est une résolution injective. Il existe alors un isomorphisme naturel, pour tous $\mathscr{F}^\bullet \in D_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ et $\mathscr{G}^\bullet \in D^+_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$[12] :

$$\boxed{\mathrm{Mor}_{D_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \equiv H^0\Big(\mathbb{R}\Gamma\big(\boldsymbol{X}, \mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet)\big)\Big)} \qquad (\diamond)$$

1.5 Dualité de Grothendieck-Verdier

Dans cette section on rappelle l'extension des définitions des foncteurs $f_!$ et $f^!$, du cas où $f : \boldsymbol{S} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ est une inclusion localement fermée, au cas où f est uniquement supposée continue.

1.5.1 Image directe à supports propres.[13] Soit $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ une application continue. Pour $\mathscr{F} \in \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{Y})$, la correspondance qui associe à un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, le module des sections $\sigma \in \Gamma(f^{-1}(U); \mathscr{F})$ telles que $f|_{|\sigma|} : |\sigma| \to U$ est propre, est un faisceau sur $\boldsymbol{X}$ noté $f_!\mathscr{F}$. On obtient ainsi un foncteur $f_! : \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{Y}) \rightsquigarrow \mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$.

---

[12] *Cf.* [Ha$_1$] §I.6 th. 6.4 (Yoneda) p. 66, et [BoAl] Borel §5.16–18 pp. 110–112. D'après [Spa$_2$] le complexe $\mathscr{G}^\bullet$ pourrait être illimité grâce aux restrictions imposées aux anneaux et espaces topologiques, mais cette généralisation n'est pas triviale et nous n'en aurons par ailleurs pas besoin.

[13] *Cf.* [BoAl] Grivel et Borel §V.10.4–7. Egalement, [KS] §2.5 pp. 102–109 et §3.1 pp. 140–149.

1.5.2 Dans le cas de l'application constante $c_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \to \{\bullet\}$, on a $c_{\boldsymbol{X}!}\,\mathscr{F} = \Gamma_c(\boldsymbol{X}; \mathscr{F}) \in \mathrm{Mod}(\mathscr{A})$.

1.5.3 Image inverse exceptionnelle. La proposition suivante rappelle (*cf. loc.cit.*) les principales propriétés du foncteur $f_!$ et introduit l'adjoint à droite **en catégorie dérivée** du foncteur $\mathbb{R}f_!$, noté $f^!$ et appelé «*image inverse exceptionnelle*».

Proposition. Soient $g : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}$ et $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ des applications continues.

a) Le foncteur $f_! : \mathrm{Faisc}(\boldsymbol{Y}) \rightsquigarrow \mathrm{Faisc}(\boldsymbol{X})$ est additif et exact à gauche.

b) Le foncteur $\mathbb{R}f_! : D^+(\boldsymbol{Y}) \rightsquigarrow D^+(\boldsymbol{X})$ vérifie $\mathbb{R}f_!(D^b(\boldsymbol{Y})) \subseteq D^b(\boldsymbol{X})$.

c) Pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Faisc}(\boldsymbol{Y})$ et tout $x \in \boldsymbol{X}$, on a un isomorphisme naturel

$$(\mathbb{R}^m f_!(\mathscr{F}))_x \equiv H^m_{\mathrm{c}}\big(f^{-1}(x); \mathscr{F}|_{f^{-1}(x)}\big)\,.$$

d) Il existe un foncteur additif et exact $f^! : D^+(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow D^+(\boldsymbol{Y})$, appelé «*image inverse exceptionnelle*» vérifiant $f^!(D^b(\boldsymbol{X})) \subseteq D^b(\boldsymbol{Y})$, et un morphisme naturel :

$$\mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{X})}\big(\mathbb{R}f_!\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet\big) \xleftarrow[(\equiv)]{} \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{Y})}\big(\mathscr{F}^\bullet; f^!\mathscr{G}^\bullet\big)\,,$$

qui est un isomorphisme pour tous $\mathscr{F}^\bullet \in D^b(\boldsymbol{Y})$ et $\mathscr{G}^\bullet \in D^+(\boldsymbol{X})$([14]). Le foncteur $f^!$ est unique à isomorphisme canonique près.

e) $$\mathbb{R}(f \circ g)_! = \mathbb{R}f_! \circ \mathbb{R}g_! \qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}(f \circ g)^! = \mathbb{R}g^! \circ \mathbb{R}f^!.$$

f) **Changement de base.** Étant donné un diagramme cartésien([15]) d'applications continues :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{Y}' & \xrightarrow{g'} & \boldsymbol{Y} \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \boldsymbol{X}' & \xrightarrow{g} & \boldsymbol{X} \end{array}$$

on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{cases} g^{-1} \circ \mathbb{R}f_! \equiv \mathbb{R}f'_! \circ g'^{-1} \;:\; D^+(\boldsymbol{Y}) \rightsquigarrow D^+(\boldsymbol{X}') \\ \mathbb{R}g'_* \circ f'^{\,!} \equiv\; f^! \circ \mathbb{R}g_* \;:\; D^+(\boldsymbol{X}') \rightsquigarrow D^+(\boldsymbol{Y}) \end{cases}$$

1.5.4 Lorsque $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ est une inclusion fermée, le foncteur des section à support $\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{Y}}$ est adjoint à droite de $f_!$, il existe donc un isomorphisme naturel de foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{Y}} \equiv f^!$.

1.5.5 L'isomorphisme (d) de la proposition précédente est obtenu *via* l'isomorphisme naturel $\mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{X})}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \equiv H^0\Gamma(\boldsymbol{X}, \mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet))$ (1.4.28), à partir d'un isomorphisme naturel plus fin connu sous le nom de «*dualité de Grothendieck-Verdier*» ([14]), à savoir :

$$\boxed{\mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet(\mathbb{R}f_!\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \equiv \mathbb{R}f_*\mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, f^!\mathscr{G}^\bullet)}$$

dont on déduit :

$$\boxed{f^!\mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \equiv \mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet(f^{-1}\mathscr{F}^\bullet, f^!\mathscr{G}^\bullet)}$$

---

[14] Le théorème est démontré pour $\mathscr{F}^\bullet \in D(\boldsymbol{Y})$ et $\mathscr{G}^\bullet \in D^b(\boldsymbol{X})$ dans [BoAl] (Borel §7.17, p. 130) et pour $\mathscr{F}^\bullet \in D^-(\boldsymbol{Y})$ et $\mathscr{G}^\bullet \in D^+(\boldsymbol{X})$ dans [Ha$_1$] (§III.11 p. 210) sans les restrictions 1.1 mais uniquement sous réserve que le foncteur $\mathbb{R}f_!$ est de dimension cohomologique finie. Enfin, Spaltenstein donne un sens et démontre la formule sans aucune restriction sur les complexes dans [Spa$_2$] prop. 6.15 p. 151.

[15] Par «*cartésien*» on signifie que ce diagramme est isomorphe au diagramme analogue du produit fibré $\boldsymbol{X}' \times_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y} = \{(x', y) \mid g(x') = f(y)\}$. Le diagramme est commutatif et l'application induite $g' : f'^{-1}(x') \to f^{-1}(g(x'))$ est un homéomorphisme pour tout $x' \in \boldsymbol{X}'$. Le diagramme de 1.4.19 est cartésien.

1.5.6 Soit U un ouvert de $\boldsymbol{X}$. Pour tout $\mathscr{F}^\bullet \in D^+(\boldsymbol{X})$, on a des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\Gamma(U;\mathscr{F}^\bullet) &\equiv \mathbb{R}c_{U*}\iota_U^{\boldsymbol{X}\,-1}\mathscr{F}^\bullet \equiv \mathbb{R}c_{U*}\mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet(\underline{\mathscr{A}}_U, \iota_U^{\boldsymbol{X}\,-1}\mathscr{F}^\bullet)\\ &\equiv \mathbb{R}c_{\boldsymbol{X}*}\mathbb{R}\iota_{U*}^{\boldsymbol{X}}\mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet(\underline{\mathscr{A}}_U, \iota_U^{\boldsymbol{X}\,-1}\mathscr{F}^\bullet) \equiv \mathbb{R}c_{\boldsymbol{X}*}\mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet(\iota_{U!}^{\boldsymbol{X}}\underline{\mathscr{A}}_U, \mathscr{F}^\bullet)\end{aligned}$$

où la deuxième ligne est un cas particulier de la dualité de Grothendieck-Verdier.

1.6 Complexes dualisants[16]

1.6.1 Définition. On appelle «*complexe dualisant à coefficients dans* $\mathscr{A}$» tout complexe de $D^b_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ isomorphe à $c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{A}$, où $c_{\boldsymbol{X}}$ désigne l'application constante $c_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \twoheadrightarrow \{\bullet\}$. On désigne par $\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}|\mathscr{A}}$ (et $\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}$ lorsque $\mathscr{A}$ est sous-entendu) un tel complexe.

1.6.2 Pour toute application continue $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$, on a $c_{\boldsymbol{Y}} = c_{\boldsymbol{X}} \circ f$, donc $c^!_{\boldsymbol{Y}}\mathscr{A} \equiv f^!(c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{A})$ (1.5.3-(e)), autrement dit $\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{Y}} = f^!\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}$.

1.6.3 Soit $\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}|\mathscr{A}}$ un complexe dualisant à termes injectifs. Pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ d'inclusion notée $\iota_U : U \hookrightarrow \boldsymbol{X}$, on a (1.5.6) :

$$\Gamma(U;\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}|\mathscr{A}}) \equiv \mathbb{R}c_{\boldsymbol{X}*}\mathbb{R}\mathscr{H}om^\bullet(\iota_{U!}\underline{\mathscr{A}}_U, c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{A}) \equiv \mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet(\mathbb{R}c_{U!}\underline{\mathscr{A}}_U, \mathscr{A}) \equiv \mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma_c(U;\mathscr{I}^\bullet), \boldsymbol{I}^\bullet)$$

où le premier isomorphisme est 1.5.6 puisque $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}|\mathscr{A}}) = \mathbb{R}\Gamma(\boldsymbol{X};\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}|\mathscr{A}})$ ($\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}|\mathscr{A}}$ est à termes injectifs !), le deuxième est la dualité de Grothendieck-Verdier et le troisième est déterminé par un choix de résolutions injectives de longueur finie $\mathscr{A} \hookrightarrow \boldsymbol{I}^\bullet$ et $\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}} \hookrightarrow \mathscr{I}^\bullet$ respectivement dans $\mathrm{Mod}(\mathscr{A})$ et $\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ (1.2.11,1.4.17).

Cette explicitation de $\Gamma(U;\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}|\mathscr{A}})$ est à la base des constructions explicites de complexes dualisants. En effet, on montre aisément que pour tout faisceau injectif $\mathscr{I}$ et tout $\mathscr{A}$-module injectif $\boldsymbol{I}$, le préfaisceau

$$\boxed{\mathscr{P}(\mathscr{I};\boldsymbol{I}) : U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\Gamma_c(U;\mathscr{I});\boldsymbol{I})}$$

est un faisceau injectif. Par conséquent, étant données des résolutions injectives de longueur finie $\mathscr{A} \hookrightarrow \boldsymbol{I}^\bullet$ et $\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}} \hookrightarrow \mathscr{I}^\bullet$, le complexe simple associé au bicomplexe de faisceaux $\mathscr{P}(\mathscr{I}^\bullet, \boldsymbol{I}^\bullet)$ est dualisant à termes injectifs.

1.6.4 La description 1.6.3 montre que pour une variété topologique $\boldsymbol{M}$ de dimension $d_{\boldsymbol{M}}$, le complexe de $\mathbb{Z}$-modules des germes de $\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{M}|\mathbb{Z}}$ en chaque point $x \in \boldsymbol{M}$ est concentré en degré $-d_{\boldsymbol{M}}$. En effet, pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{M}$, l'équivalence $\Gamma(U;\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{M}|\mathbb{Z}}) \equiv \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbb{Z}}(\Gamma_c(U;\mathscr{I}^\bullet), \boldsymbol{I}^\bullet)$ de 1.6.3 est à l'origine d'une suite spectrale :

$$\mathbb{E}_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_{\mathbb{Z}}(H_c^{-q}(U;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \Longrightarrow H^{p+q}(U;\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{M}|\mathbb{Z}}) \qquad (*)$$

et l'on sait que $H_c^{d_M}(U;\mathbb{Z}) \sim \mathbb{Z}$ et $H_c^i(U;\mathbb{Z}) = 0$ si $i \neq d_{\boldsymbol{M}}$, pour tout ouvert U homéomorphe à $\mathbb{R}^{d_M}$. La conclusion s'ensuit puisque $\mathscr{H}^m\big(\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{M}|\mathbb{Z}}\big)_x = \varinjlim_{U \ni x} H^m(U;\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{M}|\mathbb{Z}})$, où U parcourt une base de voisinages de x homéomorphes à $\mathbb{R}^{d_M}$.

[16] *Cf.* [BoAl] exposé de Borel §V-7 p. 119.

Le faisceau $\underline{\mathrm{Or}}_{M|\mathbb{Z}} := \mathscr{H}^{-d_M}\mathbb{D}^{\bullet}_{M|\mathbb{Z}}$ est donc un $\underline{\mathbb{Z}}_M$-module localement libre de rang 1 et

$$\boxed{\mathbb{D}^{\bullet}_{M|\mathbb{Z}} \equiv \underline{\mathrm{Or}}_{M|\mathbb{Z}}\big[\dim_{\mathbb{R}}(M)\big]}$$

Par ailleurs, la même suite spectrale $(*)$ sert à calculer le groupe des sections globales de $\underline{\mathrm{Or}}_{M|\mathbb{Z}}$. On obtient $H^0(X;\underline{\mathrm{Or}}_{M|\mathbb{Z}}) \equiv H^{-d_M}(X;\mathbb{D}^{\bullet}_{M|\mathbb{Z}}) \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_c^{d_M}(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ et l'on sait par ailleurs que $H_c^{d_M}(M;\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ lorsque M est connexe et orientable, et est nul sinon. Autrement dit, $\underline{\mathrm{Or}}_{M|\mathbb{Z}}$ est isomorphe au faisceau $\underline{\mathbb{Z}}_M$ si et seulement si M est orientable. On a donc toujours :

$$\mathbb{D}^{\bullet}_{M|\mathscr{A}} \equiv \underline{\mathscr{A}}_M\big[\dim_{\mathbb{R}}(M)\big]$$

lorsque M est orientable et pour tout anneau de coefficients $\mathscr{A}$. Le faisceau $\underline{\mathrm{Or}}_{M|\mathbb{Z}}$ est appelé « *le faisceau d'orientation de* M ».

1.6.5 Ce qui précède s'applique également pour le complexe $c^!_X\mathscr{M}$ où $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{A}$-module de type fini. Lorsque M est orientable on a donc $c^!_X\mathscr{M} \equiv \underline{\mathscr{M}}_X[\dim_{\mathbb{R}}(M)]$.

1.6.6 Dual d'un complexe de faisceaux. Pour $\mathscr{F}^{\bullet} \in D^b(X)$, on note :

$$\boxed{\mathbb{D}_X\mathscr{F}^{\bullet} := \mathbb{R}\mathscr{H}om^{\bullet}(\mathscr{F}^{\bullet}, \mathbb{D}^{\bullet}_X)}$$

On définit ainsi un foncteur *contravariant* exact $\mathbb{D}_X : D^b(X) \to D^b(X)$. D'après 1.5.5 et 1.6.2, on a pour toute application continue $f : Y \to X$:

$$\boxed{\mathbb{D}_X \circ \mathbb{R}f_! \equiv \mathbb{R}f_* \circ \mathbb{D}_Y \quad \text{et} \quad f^! \circ \mathbb{D}_X \equiv \mathbb{D}_Y \circ f^{-1}}$$

En particulier,

$$\begin{cases} \mathbb{D}_X \circ \mathbb{R}f_* \equiv \mathbb{R}f_* \circ \mathbb{D}_Y\,, & \text{si } f \text{ est propre ;} \\ f^{-1} \circ \mathbb{D}_X \equiv \mathbb{D}_Y \circ f^{-1}\,, & \text{si } f \text{ est un plongement ouvert.} \end{cases}$$

1.7 Pseudovariétés et bidualité

1.7.1 Espace topologique stratifié. La définition d'« *espace topologique stratifié de dimension* d » est de nature inductive (*cf.* [GoMc$_1$,GoMc$_2$]) :

a) En dimension 0. Il s'agit des ensembles finis ou dénombrables munis de la topologie discrète ;

b) En dimension positive d, un « *espace topologique stratifié de dimension* d » est la donnée d'un espace topologique X muni d'une filtration par des parties fermées :

$$X = X_d \supseteq X_{d-1} \supseteq \cdots \supseteq X_1 \supseteq X_0 \supseteq X_{-1} = \varnothing\,,$$

telle que pour chaque $i = 0,\ldots,d$ tel que $X_i \backslash X_{i-1} \neq \varnothing$ et chaque $x \in X_i \backslash X_{i-1}$, il existe un voisinage N_x de x dans X, un espace topologique *compact* $\mathbb{L}(x)$ stratifié de dimension $d-i-1$:

$$\mathbb{L}(x) = \mathbb{L}(x)_{d-i-1} \supseteq \mathbb{L}(x)_{d-i-2} \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{L}(x)_1 \supseteq \mathbb{L}(x)_0 \supseteq \mathbb{L}(x)_{-1} = \varnothing\,,$$

et un homéomorphisme

$$\phi : \mathbb{R}^i \times \mathring{\mathrm{cone}}(\mathbb{L}(x)) \xrightarrow{\sim} N_x$$

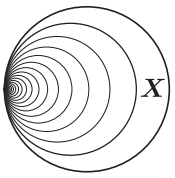
dont la restriction à chaque sous-espace $\mathbb{R}^i \times \mathring{\mathrm{cone}}(\mathbb{L}(x)_j)$ est une bijection sur $N_x \cap \boldsymbol{X}_{i+j+1}$.([17]) En particulier, on a $(N_x \cap \boldsymbol{X}_i) \sim \mathbb{R}^i$.

Le sous-espace $S_i := \boldsymbol{X}_i \backslash \boldsymbol{X}_{i-1}$ est donc une partie localement fermée de $\boldsymbol{X}$ qui est une variété topologique de dimension réelle i lorsque non vide.

Les composantes connexes des S_i sont les « *strates* (i-*dimensionnelles*) » de l'espace topologique stratifié $\boldsymbol{X}$ (*cf.* 1.9.1).

1.7.2 Pseudovariétés. On appelle « *pseudovariété de dimension* d » la donnée d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ admettant une structure d'espace topologique stratifié de dimension d ([18]). L'ensemble des strates $\mathfrak{X} := \{S_i\}$ est appelé (par abus) « *la stratification de la pseudovariété* ». La pseudovariété sera notée $(\boldsymbol{X}; \mathfrak{X})$ lorsque l'on aura besoin de désigner sa stratification. Enfin, on note $\mathrm{Str}_{\mathrm{psv}}(\boldsymbol{X})$ l'ensemble des stratifications des structures de pseudovariété sur $\boldsymbol{X}$.

1.7.3 Remarque. Une pseudovariété de dimension d est de dimension cohomologique égale à d (*cf.* 1.2.10) ; un espace topologique ne peut donc pas admettre des structures de pseudovariété de dimensions différentes. La cohomologie (singulière) d'une pseudovariété compacte est toujours de dimension finie. L'espace topologique $\boldsymbol{X} := \cup_{n \in \mathbb{N}^+} \mathbb{S}^1(1/n, 1/n)$ n'admet donc pas de structure de pseudovariété et alors $\mathrm{Str}_{\mathrm{psv}}(\boldsymbol{X}) = \varnothing$. Par contre, les variétés algébriques ou analytiques complexes, les variétés analytiques réelles, les ensembles semi-algébriques, semi-analytiques ou sous-analytiques, les espaces linéaires par morceaux, sont des exemples d'espaces topologiques admettant des structures de pseudovariété.



1.7.4 Notation. Soit $\mathfrak{X}$ une stratification de pseudovariété de $\boldsymbol{X}$. Pour toute partie $\boldsymbol{Y}$ localement fermée dans $\boldsymbol{X}$ et réunion de strates de $\mathfrak{X}$, l'ensemble $\mathfrak{X}|_{\boldsymbol{Y}}$ des strates de $\mathfrak{X}$ contenues dans $\boldsymbol{Y}$ définit une structure de pseudovariété sur $\boldsymbol{Y}$ que nous noterons simplement $(\boldsymbol{Y}; \mathfrak{X})$.

1.7.5 Stabilité de la catégorie $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$

Définition. Pour toute stratification $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{psv}}(\boldsymbol{X})$, on note $D^b_{\mathscr{A};\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ la sous-catégorie pleine de $D^b_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ des complexes de faisceaux $\mathscr{F}^\bullet$ dont les faisceaux dérivés $\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet$ sont localement constants de fibres de type fini sur chaque strate de $\mathfrak{X}$. On omettra souvent de préciser l'anneau $\mathscr{A}$ dans la notation $D^b_{\mathscr{A};\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$.

1.7.6 Le cône d'un morphisme de complexes $\mathscr{F}^\bullet$, $\mathscr{G}^\bullet \in D^b_{\mathscr{A};\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ (1.3.12) appartient à $D^b_{\mathscr{A};\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$. La catégorie $D^b_{\mathscr{A};\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ est une sous-catégorie triangulée de $D^b_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ (1.4.13,1.11.2).

---

[17] On a noté $\mathring{\mathrm{cone}}(\mathbb{L})$ le « *cône ouvert* » : $(\mathbb{L} \times [\![0,1[\![)/(\mathbb{L} \times \{0\})$ et pris par convention $\mathring{\mathrm{cone}}(\varnothing) = \mathrm{pt}$.
On notera $\overline{\mathrm{cone}}(\mathbb{L})$ le « *cône fermé* » : $(\mathbb{L} \times [\![0,1]\!])/(\mathbb{L} \times \{0\})$.

[18] Dans [GoMc$_1$,GoMc$_2$] Goresky et MacPherson définissent une structure de pseudovariété de la même manière mais en exigeant, en plus, l'égalité que $\boldsymbol{X}_{d-1} = \boldsymbol{X}_{d-2}$. C'est une hypothèse qui sera automatiquement vérifiée dans le cas des variétés algébriques complexes et qui n'est pas nécessaire pour bien de résultats généraux concernant les catégories $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ (1.7.5). Nous reviendrons sur cette question dans le bas de page (41).

1.7.7 Théorème.([19]) *Soit $\mathfrak{X}$ une stratification de pseudovariété de $\boldsymbol{X}$.*
a) *La catégorie $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ est stable par dualité de Grothendieck-Verdier, i.e.*

$$\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}(D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})) \subseteq D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})\,.$$

b) *$\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}} : D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ est une équivalence de catégories contravariante.*
c) *La restriction de $\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}} \circ \mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}$ à $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ est isomorphe au foncteur identité.*

1.7.8 Théorème. *Soient $\mathfrak{X}$ une stratification de pseudovariété de $\boldsymbol{X}$ et $\imath_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ l'inclusion d'une partie localement fermée réunion de strates de $\mathfrak{X}$. Alors, $(\boldsymbol{Y}, \mathfrak{X})$ est une pseudovariété et l'on a des isomorphismes canoniques :*

$$\mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{Y}!} \equiv \mathbb{D}_{\boldsymbol{X}} \circ \mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{Y}*} \circ \mathbb{D}_{\boldsymbol{Y}} \qquad \mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{Y}*} \equiv \mathbb{D}_{\boldsymbol{X}} \circ \mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{Y}!} \circ \mathbb{D}_{\boldsymbol{Y}}$$
$$\mathbb{R}\imath^!_{\boldsymbol{Y}} \equiv \mathbb{D}_{\boldsymbol{Y}} \circ \mathbb{R}\imath^{-1}_{\boldsymbol{Y}} \circ \mathbb{D}_{\boldsymbol{X}} \qquad \mathbb{R}\imath^{-1}_{\boldsymbol{Y}} \equiv \mathbb{D}_{\boldsymbol{Y}} \circ \mathbb{R}\imath^!_{\boldsymbol{Y}} \circ \mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}$$

respectivement sur les catégories $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{Y})$ et $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$.

1.7.9 Amplitude cohomologique des complexes dualisants

Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique admettant une structure de pseudovariété de dimension d. Alors*

$$\boxed{[\![\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}|\mathscr{A}}]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-d, 0]\!]}$$

Démonstration. Par induction croissante sur $d := \dim_{\mathbb{R}} \boldsymbol{X}$. Le résultat est évident lorsque $d = 0$. dans le cas général on a le triangle exact associé à la donnée d'un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ de complémentaire le fermé F :

$$\imath_{F!}\imath_F^! \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}|\mathscr{A}} \longrightarrow \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}|\mathscr{A}} \longrightarrow \mathbb{R}\imath_{U*}\imath_U^{-1}\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}|\mathscr{A}} \xrightarrow{[+1]} \qquad (*)$$

où $\mathbb{D}^\bullet_{F|\mathscr{A}} = \imath_F^! \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}|\mathscr{A}}$ et $\mathbb{D}^\bullet_{U|\mathscr{A}} = \imath_U^! \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}|\mathscr{A}} = \imath_U^{-1}\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}|\mathscr{A}}$ d'après 1.6.2 et puisque $\imath_U^{-1} = \imath_U^!$ car U est ouvert.

Soit maintenant $\mathfrak{X}$ une stratification de pseudovariété de dimension d sur $\boldsymbol{X}$. Lorsque U est la réunion des strates de dimension d de $\mathfrak{X}$, on a $[\![\mathbb{D}^\bullet_{U|\mathscr{A}}]\!]_{\mathrm{coh}} = [\![-d]\!]$ puisque $\mathbb{D}^\bullet_{U|\mathscr{A}} \equiv \underline{\mathrm{Or}}_{U|\mathscr{A}}[d]$ (1.6.4) ; en particulier $[\![\mathbb{R}\imath_{U*}\mathbb{D}^\bullet_{U|\mathscr{A}}]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-d, 0]\!]$. En effet, pour $x \in \boldsymbol{X}$, le germe $(\mathbb{R}^m\imath_{U*}\underline{\mathrm{Or}}_{U|\mathscr{A}})_x$ est la limite inductive des groupes $H^m(U \cap V; \underline{\mathrm{Or}}_{U|\mathscr{A}})$ avec $x \in V$ et V ouvert dans $\boldsymbol{X}$; or, $H^m(U \cap V; \underline{\mathrm{Or}}_{U|\mathscr{A}}) = 0$, pour tout $m > d$, car $U \cap V$ est de dimension cohomologique d (1.2.10). D'autre part, F est une pseudovariété de dimension $d' < d$ et alors $[\![\mathbb{D}^\bullet_{F|\mathscr{A}}]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-d'; 0]\!]$ par hypothèse de récurrence. En reportant ces encadrements sur le triangle $(*)$, la proposition résulte. ∎

1.7.10 La démonstration précédente prouve également l'inclusion $[\![c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{M}]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-d, 0]\!]$ pour tout $\mathscr{A}$-module de type fini $\mathscr{M}$ (*cf.* 1.6.5).

[19] Les deux théorèmes sont démontrés dans le §8 de l'exposé de Borel de [BoAl] pp. 133–142..

1.8 Homologie de Borel-Moore sur les pseudovariétés

Les résultats de cette section, dont le seul but est de rappeler le lien existant entre l'homologie de Borel-Moore et la cohomologie du complexe dualisant sur une pseudovariété (1.8.6), ne seront pas utilisés dans les autres sections.([20])

1.8.1 Constructions explicites de $c^!\mathscr{M}$. Les remarques de 1.6.3 à propos des constructions explicites des complexes dualisants s'appliquent également à $c^!\mathscr{M}$ pour tout $\mathscr{A}$-module de type fini $\mathscr{M}$. De plus, la résolution injective $\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}} \to \mathscr{I}^\bullet$ peut être remplacée (*cf.* [BoAl] V-§7-B p. 129) par une résolution $\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}} \hookrightarrow \mathscr{K}^\bullet$ où chaque $\mathscr{K}^m$ est plat et c-mou ; par exemple : la résolution par le complexe de faisceaux des cochaînes singulières $\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}} \hookrightarrow \underline{C}^\bullet_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}}$, où $\underline{C}^\bullet_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}}$ est engendré par le complexe de préfaisceaux ([21]) :

$$\begin{array}{ccccccccc} U & \longmapsto & C^0(U;\mathscr{A}) & \xrightarrow{d_0} & C^1(U;\mathscr{A}) & \xrightarrow{d_1} & C^2(U;\mathscr{A}) & \xrightarrow{d_2} & \\ \subseteq\uparrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ V & \longmapsto & C^0(V;\mathscr{A}) & \xrightarrow{d_0} & C^1(V;\mathscr{A}) & \xrightarrow{d_1} & C^2(V;\mathscr{A}) & \xrightarrow{d_2} & \end{array}$$

où $C^p(U;\mathscr{A})$ désigne le groupe des p-cochaînes singulières sur U et a coefficients dans $\mathscr{A}$. La correspondance $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\Gamma_c(U;\underline{C}^p_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}});\mathscr{M})$ est alors un faisceau qui est injectif lorsque $\mathscr{M}$ l'est (*cf.* [BoAl] *loc.cit.*). Le complexe de faisceaux injectifs :

$$\mathscr{Q}(\boldsymbol{I}^\bullet(\mathscr{M})) : U \longmapsto \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathscr{A}}(\Gamma_c(U;\underline{C}^\bullet_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}});\boldsymbol{I}^\bullet(\mathscr{M}))$$

est ainsi une réalisation de $c^!\mathscr{M}$ pour chaque résolution injective de $\mathscr{A}$-module $\mathscr{M} \hookrightarrow \boldsymbol{I}^\bullet(\mathscr{M})$.

1.8.2 Homologie de Borel-Moore à coefficients dans un $\mathscr{A}$-module. Notons Δ_p le p-simplexe standard et, pour tout espace topologique $\boldsymbol{Y}$, soit $\Delta_p(\boldsymbol{Y})$ l'ensemble des «*p-simplexes singuliers de $\boldsymbol{Y}$*», *i.e.* des applications *continues* $\sigma : \Delta_p \to \boldsymbol{Y}$. Pour tout $\mathscr{A}$-module de type fini $\mathscr{M}$, on note $A_p(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$ le $\mathscr{A}$-module de toutes les applications de l'ensemble $\Delta_p(\boldsymbol{Y})$ vers $\mathscr{M}$ (somme et produit étant définis point par point).

Avec ces données, le $\mathscr{A}$-module des «*p-chaînes singulières sur $\boldsymbol{Y}$ à coefficients dans $\mathscr{M}$*», noté $S_p(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$, est le sous-$\mathscr{A}$-module de $A_p(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$ des applications à support fini. On notera $S_p^{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$ le sous-$\mathscr{A}$-module de $A_p(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$ des application $\gamma : \Delta_p(\boldsymbol{Y}) \to \mathscr{M}$ vérifiant la propriété suivante :

> **LF.** *Pour tout $u \in \boldsymbol{Y}$, il existe un voisinage ouvert $V_u \subseteq \boldsymbol{Y}$ tel que l'ensemble des éléments $\sigma \in \Delta_p(\boldsymbol{Y})$ vérifiant $\gamma(\sigma) \neq 0$ et $\mathrm{im}(\sigma) \cap V_u \neq \varnothing$ est fini.*

On appellera «*constituant de γ*» tout simplexe singulier $\sigma \in \Delta_p(\boldsymbol{Y})$ tel que $\gamma(\sigma) \neq 0$.

Les éléments de $S_p^{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$ sont appelés les *p-chaînes singulières localement finies sur $\boldsymbol{Y}$ à coefficients dans $\mathscr{M}$*. On a une inclusion évidente $S_p(\boldsymbol{Y};\mathscr{M}) \subseteq S_p^{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$ qui est une égalité lorsque $\boldsymbol{Y}$ est compact.

---

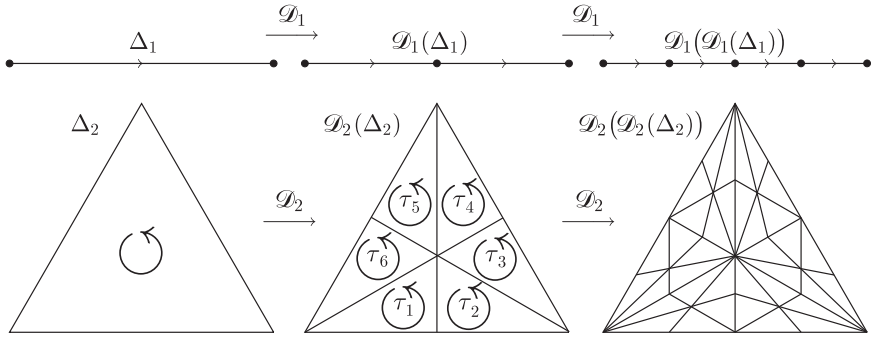
[20] Il existe au moins trois constructions de l'homologie de Borel-Moore : par des chaînes singulières (que nous allons rappeler), par des chaînes simpliciales géométriques ([BoAl] Haefliger §I.2 p. 5), et par des chaînes sous-analytiques ([KS] §9.2 p. 366). Chaque construction donne une réalisation différente du complexe dualisant.

[21] *Cf.* [Go] §3.9.1, pp. 159–161. On rappelle que pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ l'application canonique $C^\bullet(U;\mathscr{A}) \to \Gamma(U,\underline{C}^\bullet_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}})$ est une *surjection* de complexes et un quasi-isomorphisme (*loc.cit.*).

Le morphisme «*bord*» habituel $\delta_p : S_p(\boldsymbol{Y};\mathscr{M}) \to S_{p-1}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$ se prolonge naturellement en un morphisme $\delta_p : S_p^{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M}) \to S_{p-1}^{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$ que vérifie $\delta_{p-1}\circ\delta_p = 0$.

Définition. On appelle «*homologie de Borel-Moore de* $\boldsymbol{Y}$ *à coefficients dans* $\mathscr{M}$ » l'homologie du complexe $(S_*^{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M}),\delta_*)$; elle sera notée $H_*^{\mathrm{BM}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$.

1.8.3 Subdivision barycentrique du simplexe standard. Il s'agit de l'opération $\mathscr{D}_p$ qui subdivise le p-simplexe standard en réunion de p-simplexes standard plus petits. Plutôt que de donner la définition précise pour tout p, nous indiquons dans une illustration l'effet de cette opération sur les 1 et 2-simplexes standard.



Étant donné un p-simplexe singulier $\sigma : \Delta_p \to \boldsymbol{Y}$ on obtient, par restriction à chaque composante τ_i de $\mathscr{D}_p(\Delta_p)$, un p-simplexe $\sigma_i : \tau_i \to \boldsymbol{Y}$. Un élément $\gamma \in A_p(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$ est représenté par une somme formelle infinie $\gamma = \sum_{\sigma\in\Delta_p(\boldsymbol{Y})} m_\sigma\cdot\sigma$ et il est facile de voir que la somme

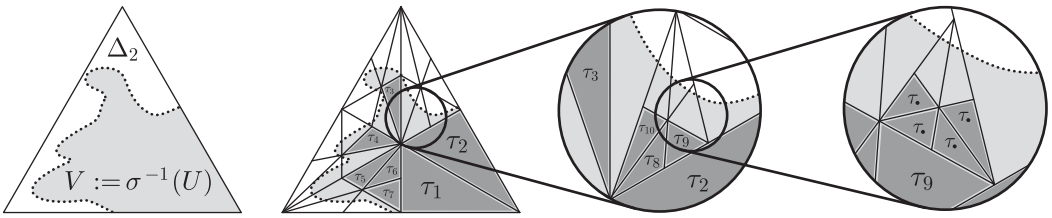
$$\mathscr{D}_p(\gamma) = \sum\nolimits_{\sigma\in\Delta_p(\boldsymbol{Y})} m_\sigma\cdot\big(\textstyle\sum_i \sigma_i\big)$$

représente encore un élément de $A_p(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$ lorsque γ vérifie la condition **LF**. On obtient de cette manière un opérateur de $\mathscr{A}$-module $\mathscr{D}_p : S_p^{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M}) \to S_p^{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$ qui laisse stable le sous-module $S_p(\boldsymbol{Y};\mathscr{M})$. On a $\delta_p\mathscr{D}_p = \mathscr{D}_{p-1}\delta_p$.

1.8.4 Faisceau des chaînes singulières localement finies. L'intérêt principal des chaînes localement finies réside dans le fait que l'on peut définir un morphisme de restriction à un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{Y}$:

$$\rho_{U*}^{\boldsymbol{Y}} : (S_*^{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{Y};\mathscr{M}),\delta_*) \xrightarrow[\text{de } \boldsymbol{Y} \text{ à } U]{\text{restriction}} (S_*^{\mathrm{loc}}(U;\mathscr{M}),\delta_*)$$

De manière succincte, l'idée est la suivante : Pour $\sigma : \Delta_p \to \boldsymbol{Y}$ continue, $V := \sigma^{-1}(U)$ est un ouvert de Δ_p qui admet une décomposition canonique en réunion de simplexes des décompositions barycentriques successives. Plutôt que donner des formules, nous illustrons le procédé sur Δ_2.



Recette : à chaque division barycentrique on garde (en gris foncé) les sous-simplexes τ_i complètement contenus dans V. On continue tant qu'il reste des points de V non couverts.

Au bout du procédé on obtient un recouvrement $V = \cup_n \tau_n$ dénombrable *localement fini* en sous-p-simplexes τ_n de Δ_p, et si l'on note σ_n la restriction de σ à τ_n, la p-chaîne singulière infinie $\rho^{\boldsymbol{Y}}_{Up}(\sigma) = \sum_n \sigma_n$ appartient à $S^{\mathrm{loc}}_p(U;\mathscr{M})$. Par linéarité, et moyennant de petites vérifications, on obtient le morphisme annoncé $\rho^{\boldsymbol{Y}}_{U*} : (S^{\mathrm{loc}}_*(\boldsymbol{Y};\mathscr{M}),\delta_*) \to (S^{\mathrm{loc}}_*(U;\mathscr{M}),\delta_*)$. Il convient de souligner que lorsque l'image d'un simplexe singulier $\sigma : \Delta_p \to \boldsymbol{Y}$ est contenue dans l'ouvert U, la subdivision barycentrique est inutile et alors $\rho^{\boldsymbol{Y}}_{Up}(\sigma) = \sigma$.

On a $\rho^{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{Y}*} = \mathrm{id}$, et $\rho^{\boldsymbol{Y}}_{U_1*} = \rho^{U_2}_{U_1*} \circ \rho^{\boldsymbol{Y}}_{U_2*}$, pour tous ouverts $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \boldsymbol{Y}$, ce qui définit un préfaisceau de complexes $\underline{S}^{\mathrm{loc}}_{\boldsymbol{Y};\mathscr{M},*}$ (de différentielle de degré -1) sur $\boldsymbol{Y}$. On vérifie que le préfaisceau $\underline{S}^{\mathrm{loc}}_{\boldsymbol{Y};\mathscr{M},p}$ est un faisceau (exercice) c-mou et donc $\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U};_)$ et $\Gamma(\boldsymbol{U};_)$-acyclique pour tout ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{Y}$ (*cf.* ([6])). En effet, les sections de $\underline{S}^{\mathrm{loc}}_{\boldsymbol{Y};\mathscr{M},*}$ au-dessus d'un compact sont représentées par des chaînes singulières **finies** définies sur un voisinage du compact en question et donc sur $\boldsymbol{Y}$ tout entier ([22]). On remarquera que pour tout ouvert $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{Y}$, le complexe $\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U};\underline{S}^{\mathrm{loc}}_{\boldsymbol{Y};\mathscr{M},*})$ coïncide avec le complexe des chaînes singulières sur $\boldsymbol{U}$ à coefficients dans $\mathscr{M}$.

1.8.5 On note $\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{Y};\mathscr{M}}$ le complexe de faisceaux de différentielle de degré $+1$ obtenu par rénumérotation $\underline{S}^{\mathrm{loc},-p}_{\boldsymbol{Y};\mathscr{M}} := \underline{S}^{\mathrm{loc}}_{\boldsymbol{Y};\mathscr{M},p}$.

Exercice

a) Montrer que le foncteur $\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{Y};_} : \mathrm{Mod}_{\mathrm{t.f.}}(\mathscr{A}) \rightsquigarrow D^+_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{Y})$, $\mathscr{M} \mapsto \underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{Y};\mathscr{M}}$, transforme une suite exacte de modules en un triangle exact.

b) Montrer que $\underline{S}^{\mathrm{loc},p}_{\boldsymbol{Y};\mathscr{M}}$ est un $\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{Y}}$-module plat pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

c) Donner un isomorphisme canonique naturel $\underline{S}^{\mathrm{loc},p}_{\boldsymbol{Y};\mathscr{M}} \equiv \underline{S}^{\mathrm{loc},p}_{\boldsymbol{Y};\mathscr{A}} \otimes^{\mathbb{L}} c^{-1}_{\boldsymbol{Y}}\mathscr{M}$.

1.8.6 Théorème. *Soient $(\boldsymbol{X};\mathfrak{X})$ une pseudovariété, $\mathscr{A}$ un anneau nœthérien de dimension homologique finie et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{A}$-module de type fini.*

a) *Le complexe $\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{M}}$ appartient à $D^b_{\mathfrak{X}\text{-clc}}(\boldsymbol{X})$ et :*

$$\boxed{\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{M}} \equiv c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{M}}$$

En particulier, $\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}} \simeq \mathbb{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}|\mathscr{A}}$, et $[\![\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}}]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-\dim_{\mathbb{R}}\boldsymbol{X},0]\!]$;

b) *Il existe une suite spectrale canonique :*

$$\boxed{\mathbb{E}_2^{p,-q} = \mathrm{Ext}^p_{\mathscr{A}}(H^q_c(\boldsymbol{X};\mathscr{A}),\mathscr{M}) \Longrightarrow H^{\mathrm{BM}}_{q-p}(\boldsymbol{X};\mathscr{M})}$$

c) *Lorsque $\mathscr{A}$ est un corps k, on a*

$$\boxed{H^{\mathrm{BM}}_m(\boldsymbol{X};k) \equiv \mathrm{Hom}_k(H^m_c(\boldsymbol{X};k),k)}$$

[22] On démontre plus généralement que $\underline{S}^{\mathrm{loc}}_{\boldsymbol{Y};\mathscr{M},p}$ est Φ-mou pour toute famille paracompactifiante Φ.

Indications. Soit U un ouvert de $\boldsymbol{X}$. D'après la description des sections du faisceau $\underline{C}^p_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}}$ ([Go] *loc.cit.*), une section $\lambda \in \Gamma_c(U;\underline{C}^p_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}})$ s'annule sur tout p-simplexe singulier dont l'image n'est pas entièrement contenue dans $|\lambda|$. En particulier, si $\xi = \sum_{\sigma\in\Delta_p(U)} m_\sigma \cdot \sigma$ est un élément de $S^{\mathrm{loc}}_p(U;\mathscr{M})$, seul un nombre fini de valeurs $\lambda(\sigma)$ seront non nulles et l'expression

$$\langle \lambda, \xi\rangle = \sum\nolimits_{\sigma\in\Delta_p(U)} \lambda(\sigma) m_\sigma \in \mathscr{M}$$

est bien définie. On obtient ainsi des morphismes de $\mathscr{A}$-modules pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc} S^{\mathrm{loc}}_p(U;\mathscr{M}) & \xrightarrow{\alpha_p(U)} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\Gamma_c(U;\underline{C}^p_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}});\mathscr{M}) \\ \xi & \longmapsto & \langle _, \xi\rangle \end{array}$$

compatibles aux différentielles.

Soit $V \subseteq U$ et $\mu \in \Gamma_c(V;\underline{C}^p_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}})$. L'inclusion $\Gamma_c(V;\underline{C}^p_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}}) \subseteq \Gamma_c(U;\underline{C}^p_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}})$ est donnée par prolongement par zéro, de sorte que lorsque $\xi \in S^{\mathrm{loc}}_p(U;\mathscr{M})$, la valeur $\langle \mu, \xi\rangle$ est déterminée uniquement par les constituants de ξ dont l'image est entièrement contenue dans $|\mu| \subseteq V$; en particulier, $\rho^U_V(\sigma) = \sigma$ pour de tels constituants et alors :

$$\langle \mu, \xi\rangle = \langle \mu, \rho^U_V \xi\rangle\,, \qquad \text{pour tout } \mu \in \Gamma_c(V;\underline{C}^p_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}}).$$

Autrement dit, la famille de morphismes $\alpha_\bullet(U)$ est un morphisme de faisceaux (1.8.1) ; il sera noté $\underline{\alpha}_\bullet$. En composant $\underline{\alpha}_\bullet$ avec le morphisme $\underline{\varepsilon}$ induit par l'augmentation $\varepsilon : \mathscr{M} \to \boldsymbol{I}^\bullet(\mathscr{M})$, on obtient un morphisme de complexes de faisceaux $\underline{\beta}_\bullet$:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{M}} & \xrightarrow{\underline{\alpha}_\bullet} & \mathscr{Q}^\bullet\big(\underline{C}^\bullet_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}};\mathscr{M}\big) & \xrightarrow{\underline{\varepsilon}} & \mathscr{Q}^\bullet\big(\underline{C}^\bullet_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}};\boldsymbol{I}^\bullet(\mathscr{M})\big) = c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{M} \\ & \searrow^{\underline{\beta}_{\boldsymbol{X}\bullet}} & & & \uparrow \end{array}$$

(1.8.1) pour toute résolution injective de $\mathscr{A}$-module $\mathscr{M} \hookrightarrow \boldsymbol{I}^\bullet(\mathscr{M})$.

Nous avons ainsi construit un morphisme $\underline{\beta}_{\boldsymbol{X};\mathscr{M},\bullet} : \underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{M}} \to c^!_{\boldsymbol{X}}\,\mathscr{M}$ **naturel**, à la fois par rapport à $\mathscr{M}$ et à $\boldsymbol{X}$.

Ceci étant, on a déjà signalé l'existence d'un quasi-isomorphisme $\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{M}} \otimes^{\mathbb{L}} c^{-1}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{M} \to \underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{M}}$ et des raisonnements généraux donnent un morphisme canonique $c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{A} \otimes^{\mathbb{L}} c^{-1}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{M} \to c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{M}$ qui est un quasi-isomorphisme dans notre cas puisque $\mathscr{A}$ est supposé nœthérien et que $\mathscr{M}$ est de type fini ([23]). On en déduit (après vérification de compatibilités des constructions) un isomorphisme de foncteurs

$$\underline{\beta}_{\boldsymbol{X};_,\bullet} \equiv \underline{\beta}_{\boldsymbol{X};\mathscr{A},\bullet} \otimes^{\mathbb{L}} \mathrm{id}_{c^{-1}_{\boldsymbol{X}}(_)}\,.$$

Par conséquent, $\underline{\beta}_{\boldsymbol{X};\mathscr{M},\bullet}$ est un isomorphisme si $\underline{\beta}_{\boldsymbol{X};\mathscr{A},\bullet}$ l'est.

---

[23] Le morphisme en question provient de $\mathrm{id}\otimes\mathrm{id} \in I\!R\mathrm{Hom}(c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{A}, c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{A}) \otimes^{\mathbb{L}} I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{M},\mathscr{M})$ par les équivalences en catégories dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} I\!R\mathrm{Hom}(c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{A} \otimes^{\mathbb{L}} c^{-1}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{M}, c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{M}) &\equiv I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(c_{\boldsymbol{X}!}(c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{A} \otimes^{\mathbb{L}} c^{-1}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{M}), \mathscr{M}) \equiv I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(c_{\boldsymbol{X}!}c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{A} \otimes^{\mathbb{L}} \mathscr{M}, \mathscr{M}) \equiv \\ &\equiv I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(c_{\boldsymbol{X}!}c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{A}, \mathscr{A}) \otimes^{\mathbb{L}} I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{M},\mathscr{M}) \equiv I\!R\mathrm{Hom}(c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{A}, c^!_{\boldsymbol{X}}\mathscr{A}) \otimes^{\mathbb{L}} I\!R\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{M},\mathscr{M})\,. \end{aligned}$$

L'inspection de l'action de ce morphisme au niveau des germes en $x \in \boldsymbol{X}$, conduit au morphisme canonique (‡) $I\!R\mathrm{Hom}(I\!R\underline{\Gamma}_x\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}, \mathscr{A}) \otimes^{\mathbb{L}} \mathscr{M} \to I\!R\mathrm{Hom}(I\!R\underline{\Gamma}_x\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}, \mathscr{M})$ qui est un quasi-isomorphisme dans notre cas puisque $\mathscr{M}$ admet une résolution à gauche par des $\mathscr{A}$-modules libres de rang fini ($\mathscr{A}$ est nœthérien !) et alors (‡) est réduit à l'équivalence $\mathrm{Hom}(_, \mathscr{A}^r) \equiv \mathrm{Hom}(_,\mathscr{A}) \otimes \mathscr{A}^r$.

La condition d'équisingularité locale vérifiée par $\boldsymbol{X}$ montre aussitôt que le complexe $\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}}$ est $\mathfrak{X}$-cohomologiquement localement constant. D'autre part, le dual $\mathbb{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\big(\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}}\big)$ est le complexe de faisceau :

$$\boldsymbol{U} \mapsto \mathbb{R}\mathrm{Hom}^{\bullet}\big(\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U};\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}}),\boldsymbol{I}^{\bullet}\big)$$

où $\mathscr{A} \xrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{I}^{\bullet}$ est une résolution injective (de longueur finie) de $\mathscr{A}$ ([24]).

On a $\mathbb{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\big(\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}}\big) \equiv \underline{\mathbb{D}^{\bullet}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}^{[0]})}_{\boldsymbol{X}} \equiv \underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}$ puisque $\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U};\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}})$ calcule l'homologie singulière de $\boldsymbol{U}$ à coefficients dans $\mathscr{A}$ et que $\boldsymbol{X}$ est localement contractile. En particulier, $\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}}$ est $\mathfrak{X}$-cohomologiquement constructible puisque sont dual l'est. Par bidualité on a donc un isomorphisme canonique

$$\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{A}} \equiv c^{!}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{A} \qquad (*)$$

qui coïncide avec $\underline{\beta}_{\boldsymbol{X};\mathscr{A};\bullet}$ modulo des équivalences naturelles.

L'assertion concernant $[\![\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{M}}]\!]_{\mathrm{coh}}$ est maintenant claire (*cf.* 1.7.9) et la suite spectrale annoncée dans (b) résulte de dualité de Grothendieck-Verdier (tout comme dans 1.6.4) :

$$\mathbb{R}\Gamma(\boldsymbol{X};\underline{S}^{\mathrm{loc},\bullet}_{\boldsymbol{X};\mathscr{M}}) \equiv \mathbb{R}\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}}(\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}}, c^{!}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{M}) \equiv \mathbb{R}\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathscr{A}}(\mathbb{R}c!\,\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{X}},\mathscr{M})\,. \qquad \blacksquare$$

1.9 Stratifications algébriques, conditions de Whitney et pseudovariétés

Soit $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique complexe de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$ ([25]). La notation $\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ sera synonyme de $\mathrm{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}})$.

1.9.1 Stratifications. Suivant Whitney ([26]) on appelle « *stratification de* $\boldsymbol{X}$ » la donnée '$\mathfrak{X}$' d'une partition $\boldsymbol{X} = S_0 \amalg \ldots \amalg S_{\dim \boldsymbol{X}}$, où chaque $S_k \neq \varnothing$ est une sous-variété algébrique non singulière localement fermé de $\boldsymbol{X}$ de codimension k dans $\boldsymbol{X}$, et telle que si C_i est une composante connexe de S_i vérifiant $C_i \cap \overline{S}_k \neq \varnothing$ pour un certain k, alors $C_i \subseteq \overline{S}_k$ et $i > k$ ([27]).

Les composantes connexes des S_k sont appelés les « *strates* (*de codimension* k) *de* $\mathfrak{X}$ » ([28]). On notera $\mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ l'ensemble des stratifications de $\boldsymbol{X}$.

1.9.2 Filtration associée à une stratification. Pour chaque $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}$ on appellera « *filtration associée à* $\mathfrak{X}$ », la filtration croissante :

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{X}} := \Big(\varnothing = \boldsymbol{F}_{-1} \subseteq \boldsymbol{F}_0 \subseteq \boldsymbol{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \boldsymbol{F}_{d_{\boldsymbol{X}}-1} \subseteq \boldsymbol{F}_{d_{\boldsymbol{X}}} = \boldsymbol{X}\Big)$$

où $\boldsymbol{F}_k$ est la réunion des strates de $\mathfrak{X}$ de dimension inférieure ou égale à k. La condition frontière assure que chaque $\boldsymbol{F}_k$ est un fermé de Zariski de $\boldsymbol{X}$.

---

[24] *Cf.* [BoAl] §V.7.7, p. 121.

[25] Dans le cadre de variétés algébriques complexes toute dimension ou codimension sera relative à la structure complexe à moins que la notation précise une interprétation différente, p. ex. $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{X}) = 2d_{\boldsymbol{X}}$.

[26] [W] §18 p. 535.

[27] Whitney appelle cette condition « *la condition frontière* » ; lorsqu'elle est satisfaite, la frontière d'une strate de codimension k est réunion de strates de codimension supérieure à k.

[28] On identifie souvent $\mathfrak{X}$ et l'ensemble de ses strates.

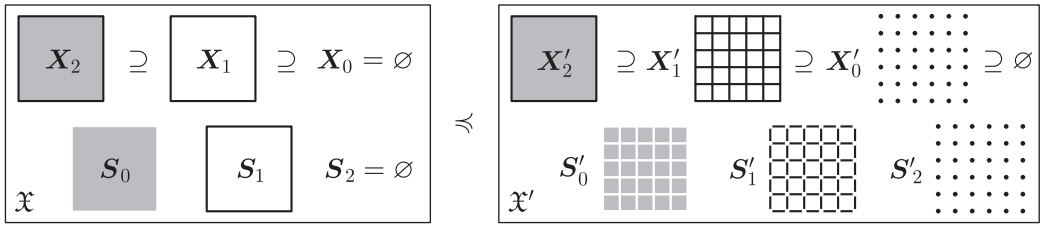
1.9.3 Exemple. L'ensemble $\Sigma(\boldsymbol{X})$ des points singuliers de $\boldsymbol{X}$ est un fermé de Zariski qui vérifie $\operatorname{codim}_{\boldsymbol{X}} \Sigma(\boldsymbol{X}) > 0$ ([29]). La stratification associée à la filtration fermée $\boldsymbol{X} \supseteq \Sigma(\boldsymbol{X}) \supseteq \Sigma(\Sigma(\boldsymbol{X})) \cdots$ appartient clairement à $\mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$, on l'appellera la stratification «*par lieu singulier de* $\boldsymbol{X}$» et sera notée $\mathfrak{X}_\Sigma$. En particulier $\mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X}) \neq \varnothing$ (*cf.* 1.7.3).

1.9.4 Définitions

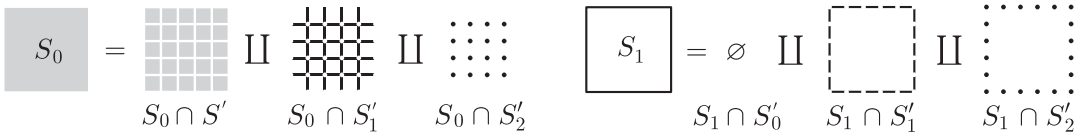
- Soient $\boldsymbol{Z}$ un fermé de Zariski de $\boldsymbol{X}$, $\mathfrak{Z} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{Z})$ et $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$. On dit que «$\mathfrak{X}$ *est un raffinement de* $\mathfrak{Z}$», et l'on note $\mathfrak{Z} \preccurlyeq \mathfrak{X}$, lorsque chaque strate de $\mathfrak{Z}$ est réunion (disjointe) de strates de $\mathfrak{X}$.
- Plus généralement, si $\mathcal{F} := \{\boldsymbol{F}_i\}$ et $\mathcal{G} := \{\boldsymbol{G}_i\}$ sont deux suites croissantes de fermés de $\boldsymbol{X}$, on notera $\mathcal{F} \preccurlyeq \mathcal{G}$ lorsque chaque partie $\boldsymbol{F}_i \backslash \boldsymbol{F}_{i-1}$ est réunion de composantes connexes des parties $\mathcal{G}_k \backslash \mathcal{G}_{k-1}$.

  En reprenant les données de l'alinéa précédent, on a donc $\mathfrak{Z} \preccurlyeq \mathfrak{X} \Leftrightarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{Z}} \preccurlyeq \mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$.

Les figures suivantes illustrent cette définition dans le cas réel où $\boldsymbol{X}$ est la pseudovariété compacte $\boldsymbol{X} = [0,1] \times [0,1]$ et où $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}$.



On a les décomposions :



1.9.5 Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique complexe.*

a) *Pour toute suite finie et croissante de fermés de Zariski $\varnothing = \boldsymbol{F}_{-1} \subseteq \boldsymbol{F}_0 \subseteq \boldsymbol{F}_1 \subseteq \boldsymbol{F}_2 \subseteq \cdots \boldsymbol{X}$ il existe une stratification $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$, telle que pour chaque i, l'ensemble $\boldsymbol{F}_i \backslash \boldsymbol{F}_{i-1}$ est réunion de strates de $\mathfrak{X}$. En particulier, pour tout fermé de Zariski $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}$ et toute $\mathfrak{Z} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{Z})$, il existe $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ telle que $\mathfrak{Z} \preccurlyeq \mathfrak{X}$.*

b) *Soient $\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2$ deux fermés de Zariski de $\boldsymbol{X}$ et $\mathfrak{Z}_i \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{Z}_i)$. Il existe $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ raffinement commun des $\mathfrak{Z}_i$, i.e. $\mathfrak{Z}_i \preccurlyeq \mathfrak{X}$.*

c) *L'ensemble $\mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ est partiellement ordonné filtrant supérieurement par la relation "$\preccurlyeq$".*

Indications

a) On raisonnera par récurrence sur $\dim \boldsymbol{X}$; l'assertion est clairement vérifiée pour $\dim \boldsymbol{X} = 0$. Dans le cas général, notons $\boldsymbol{X} =: \boldsymbol{F}_m$. Pour chaque $i = 0, \ldots, m$, U_i désigne l'intérieur de $(\boldsymbol{F}_i \backslash \boldsymbol{F}_{i-1}) \cap (\boldsymbol{X} \backslash \Sigma(\boldsymbol{X}))$. Les U_i sont des ouverts de Zariski de $\boldsymbol{X}$, deux-à-deux disjoints et

[29] [Ha$_2$] p. 33.

ne sont pas tous vides. Chaque composantes connexe de $S_0 := \amalg_i U_i$ est donc entièrement contenue dans l'un des U_i. Comme $\boldsymbol{Y} := \boldsymbol{X}\backslash S_0$ est de codimension positive dans $\boldsymbol{X}$, l'hypothèse de récurrence s'applique à $\boldsymbol{Y}$ muni de la filtration induite $(\boldsymbol{F}_i \cap \boldsymbol{Y})_i$ et donne une stratification $\mathfrak{Y} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{Y})$. L'ensemble $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} \cup \Pi_0(S_0)$ est alors, par construction, une stratification de $\mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ vérifiant (a).

b) Notons $\boldsymbol{Y} := \boldsymbol{Z}_1 \cup \boldsymbol{Z}_2$, $m := \dim \boldsymbol{Y}$ et $S_{i,0}$ $(i = 1, 2)$ la réunion des strates de dimension m de $\mathfrak{Z}_i$; $S_{i,0}$ est un ouvert de points non singuliers de $\boldsymbol{Y}$. Soit

$$S_0 := (S_{1,0}\backslash \boldsymbol{Z}_2) \quad \amalg \quad U_{12} \quad \amalg \quad (S_{2,0}\backslash \boldsymbol{Z}_1)\,, \tag{$*$}$$

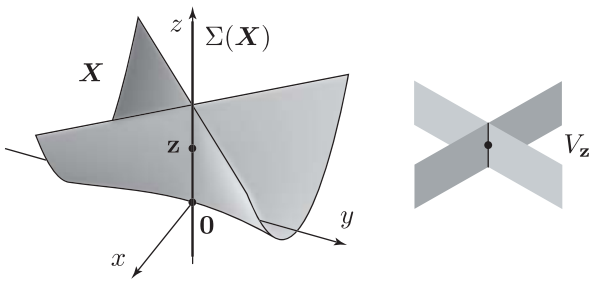
où U_{12} désigne l'intérieur de $S_{1,0} \cap S_{2,0} \cap (\boldsymbol{Y}\backslash\Sigma(\boldsymbol{Y}))$. Chaque composante connexe de S_0 est alors entièrement contenue dans l'un des trois termes de $(*)$ puisque S_0 est la réunion disjointe des ces trois ouverts. La stratification $\mathfrak{Z}_i$ induit une filtration fermée sur $\boldsymbol{Z}'_i := \boldsymbol{Z}_i\backslash S_0$. On note $\mathfrak{Z}'_i \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{Z}'_i)$ la stratification donnée par (a) appliquée à cette filtration. Cela étant, comme $\boldsymbol{Y}' := \boldsymbol{Z}'_1 \cup \boldsymbol{Z}'_2$ est de codimension positive dans $\boldsymbol{Y}$, on peut raisonner par récurrence et supposer (b) vérifiée par les nouvelles données $\boldsymbol{Y}'$, $\boldsymbol{Z}'_i$ et $\mathfrak{Z}'_i$. Il existe donc une stratification $\mathfrak{Y}' \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{Y}')$ telle que $\mathfrak{Z}'_i \preccurlyeq \mathfrak{Y}'$. Alors $\mathfrak{Y} := \mathfrak{Y}' \cup \Pi_0(S_0)$ appartient à $\mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{Y})$ et vérifie par construction $\mathfrak{Z}_i \preccurlyeq \mathfrak{Y}$. L'assertion (b) découle alors d'une nouvelle application de la dernière partie (a) appliquée à $\mathfrak{Y}$.

c) Conséquence immédiate de (b) en prenant $\boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{X}$. ∎

1.9.6 Instabilité de la catégorie $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$. Soient $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ et $\imath_{\boldsymbol{S}} : \boldsymbol{S} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ l'inclusion d'une partie localement fermée réunion de strates de $\mathfrak{X}$. L'ensemble $\mathfrak{X}|_{\boldsymbol{S}}$ de strates de $\mathfrak{X}$ contenues dans $\boldsymbol{S}$ appartient évidemment à $\mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{S})$; on notera $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{S}) := D^b_{\mathfrak{X}|_{\boldsymbol{S}}\text{-c}}(\boldsymbol{S})$.

Les foncteurs $\imath_{\boldsymbol{S}}^{-1}, \imath_{\boldsymbol{S}!}$ sont bien définis entre les catégories $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{S})$ et $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$, mais l'image du foncteur $\mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{S}*} : D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{S}) \rightsquigarrow D^b(\boldsymbol{X})$ n'est généralement pas contenue dans $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ lorsque $\mathfrak{X}$ n'est pas une stratification de pseudovariété pour $\boldsymbol{X}$. C'est une conséquence du fait que $\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}(D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})) \not\subseteq D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$, raison pour laquelle nous qualifions ce phénomène d'instabilité de $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ par dualité de Grothendieck-Verdier (1.7.8). Un contrexemple classique est celui du «*parapluie de Whitney*» ([30]) que nous rappelons maintenant.

Parapluie de Whitney



Dans cette figure, $\boldsymbol{X}$ est la sous-variété algébrique de $\mathbb{C}^3$ définie par les zéros du polynôme $P(x, y, z) = zy^2 - x^2$. Le lieu des points singuliers de $\boldsymbol{X}$ est la droite $\Sigma(\boldsymbol{X}) = (x = 0, z = 0)$. Pour tout $z \neq 0$, le polynôme P se factorise en $P = (uy - x)(uy + x)$, où $z = u^2$. Il s'ensuit que le point $\mathbf{z} = (0, 0, z)$ admet une base de voisinages $V_{\mathbf{z}}$ dans $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$ homéomorphes à $\mathbb{R}^2 \times \boldsymbol{Y}$, où $\boldsymbol{Y}$

[30] [W] ex. 18.7 p. 537.

est l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{C}^2$ vérifiant $xy=0$; de plus, $V_{\mathbf{z}}\backslash\Sigma(\boldsymbol{X})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2\times(\mathbb{C}^*\amalg\mathbb{C}^*)$. On vérifie également que l'origine $\mathbf{0}=(0,0,0)$ admet une base de voisinages $V_{\mathbf{0}}$ tels que $V_{\mathbf{0}}\backslash\Sigma(\boldsymbol{X})$ est connexe.

Soient $\mathfrak{X}_\Sigma=\{\boldsymbol{S},\Sigma(\boldsymbol{X})\}$ la stratification par lieu singulier de $\boldsymbol{X}$ et $\imath:\boldsymbol{S}\hookrightarrow\boldsymbol{X}$ l'inclusion. Il résulte des remarques précédentes que l'espace vectoriel des germes du faisceau $\mathscr{H}^0\mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{S}*}\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{S}}=\imath_{\boldsymbol{S}*}\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{S}}$ au point $\mathbf{z}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}^2$ lorsque $\mathbf{z}\neq\mathbf{0}$ et à $\mathbb{Q}$ autrement. Le faisceau $\imath_{\boldsymbol{S}*}\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{S}}$ n'est donc pas localement constant sur $\Sigma(\boldsymbol{X})$ et $\mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{S}*}\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{X}}$ n'appartient pas à $D_{\mathfrak{X}_\Sigma\text{-c}}(\boldsymbol{X})$.

1.9.7 A propos des conditions de Whitney. C'est par ces conditions, connues sous le nom des « *conditions* (a) *et* (b) *de Whitney* » ([31]), que Whitney introduit la notion de « *stratification régulière* » (aujourd'hui appelée « *stratification de Whitney* »). Ces conditions énoncent des propriétés géométriques d'une stratification $\mathfrak{X}\in\mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ suffisantes pour que $\mathfrak{X}$ définisse une structure de pseudovariété sur toute partie localement fermée $\boldsymbol{S}$ de $\boldsymbol{X}$ réunion de strates de $\mathfrak{X}$. La proposition suivante est démontrée dans [BoAl] (A'Campo §IV.2 p. 43) :

1.9.8 Proposition. *Toute stratification de Whitney d'une variété algébrique complexe $\boldsymbol{X}$ munit l'espace topologique $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$ d'une structure de pseudovariété à strates de dimension paire.*

1.9.9 Notre principal intérêt dans les stratification de Whitney réside dans la validité des théorèmes de stabilité des catégories $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ et $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{S})$ par les foncteurs image directe, inverse, et dualité de Grothendieck-Verdier (1.7.7,1.7.8).

Dans l'exemple du parapluie de Whitney, la stratification $\mathfrak{X}_\Sigma$ ne vérifie donc pas les conditions de Whitney. On voit bien que c'est l'origine qui pose un problème et le complexe $\mathbb{R}\imath_*\underline{\mathbb{Q}}_{S_0}$ appartient à $D^b_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$, où $\mathfrak{X}$ est le raffinement de $\mathfrak{X}_\Sigma$ défini par $\mathfrak{X}=\{S_0,\Sigma(\boldsymbol{X})\backslash\{\mathbf{0}\},\{\mathbf{0}\}\}$. ([32])

Notons $\mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ le sous-ensemble de $\mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ des stratifications vérifiant les conditions de Whitney. Le théorème suivant est dû à Whitney.

1.9.10 Théorème.([33]) *Pour toute $\mathfrak{X}\in\mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$, il existe $\mathfrak{X}'\in\mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ telle que $\mathfrak{X}\preccurlyeq\mathfrak{X}'$. Autrement dit, $\mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ est une partie cofinale dans $\big(\mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X}),\preccurlyeq\big)$.*

1.9.11 Par conséquent, on a $\mathrm{Str}_{\mathrm{psv}}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}})\supseteq\mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})\neq\varnothing$ pour toute variété algébrique complexe $\boldsymbol{X}$ (comparer à 1.7.3).

1.10 Complexes à cohomologie constructible sur les variétés algébriques complexes

1.10.1 Soient $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique complexe et $\mathfrak{X}_1\preccurlyeq\mathfrak{X}_2$ un raffinement de stratifications de $\boldsymbol{X}$. L'inclusion

$$D^b_{\mathfrak{X}_1\text{-c}}(\boldsymbol{X})\subseteq D^b_{\mathfrak{X}_2\text{-c}}(\boldsymbol{X})$$

[31] [W] §19 p. 540, ou bien [BoAl] A'Campo §IV.1 p. 41, ou le très joli article de Lipman [Li] §1–2.

[32] On peut aisément vérifier que la stratification $\mathfrak{X}$ vérifie les conditions de Whitney ; il est par ailleurs clair qu'elle définit une structure de pseudovariété sur $\boldsymbol{X}$.

[33] [W] Th. 19.2 p. 540.

est immédiate d'après la définition même des catégories $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ (1.7.5). On pose alors :

$$\boxed{D_{\text{c}}(\boldsymbol{X}) := \varinjlim_{\mathfrak{X}\in \text{Str}_{\text{alg}}(\boldsymbol{X})} D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})}$$

c'est la sous-catégorie triangulée et pleine de $D(\boldsymbol{X})$ des complexes de faisceaux à cohomologie « *constructible* », *i.e.* localement constante sur les strates d'une stratification de $\text{Str}_{\text{alg}}(\boldsymbol{X})$.

1.10.2 Suite au théorème (1.9.10), on a aussi $D_{\text{c}}(\boldsymbol{X}) = \varinjlim_{\mathfrak{X}\in \text{Str}^{\text{Wh}}_{\text{alg}}(\boldsymbol{X})} D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$.

1.10.3 Les analogues des théorèmes 1.7.7 et 1.7.8 sont évidemment vérifiés sur $D_{\text{c}}(\boldsymbol{X})$.

1.10.4 On insiste sur le fait que, étant donnés $\mathfrak{X} \in \text{Str}_{\text{alg}}(\boldsymbol{X})$ et $\mathscr{F}^\bullet \in D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$, le dual $\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet$ **n'appartient pas forcément** à $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$, mais il existe toujours un raffinement $\mathfrak{X}'$ de $\mathfrak{X}$ définissant une structure de pseudovariété sur $\boldsymbol{X}$ (1.9.10, 1.9.8), auquel cas $\mathscr{F}^\bullet \in D^b_{\mathfrak{X}'\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ et :

$$\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet \in \mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\big(D^b_{\mathfrak{X}'\text{-c}}(\boldsymbol{X})\big) = D^b_{\mathfrak{X}'\text{-c}}(\boldsymbol{X}) \subseteq D_{\text{c}}(\boldsymbol{X})\,,$$

d'après 1.7.7.

Le fait que nous disposions de "suffisamment" de catégories $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ stables par la dualité de Grothendieck-Verdier jouera un rôle important dans l'étude des catégories des complexes d'intersection et de faisceaux pervers.

1.11 Systèmes locaux sur une variété topologique

1.11.1 Définition. Soient $\mathscr{A}$ un anneau et $\boldsymbol{M}$ une variété topologique. On appelle « *système local de $\mathscr{A}$-modules sur $\boldsymbol{M}$* » tout faisceau localement constant de $\mathscr{A}$-modules sur $\boldsymbol{M}$ de fibres de type fini. On notera $\text{Loc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{M})$ la sous-catégorie pleine de $\text{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{M})$ dont les objets sont les systèmes locaux sur $\boldsymbol{M}$.

1.11.2 Supposons $\boldsymbol{M}$ connexe (pour simplifier) et choisissons un point de base $x \in \boldsymbol{M}$. Il est facile de voir que pour tout $\mathscr{L} \in \text{Loc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{M})$, l'espace étalé $\widetilde{\mathscr{L}}$ au-dessus de $\boldsymbol{M}$ est un revêtement de fibre en x le $\mathscr{A}$-module $\mathscr{L}_x$. Le groupe fondamental $\Pi_1(\boldsymbol{M};x)$ agit sur $\mathscr{L}_x$ par une représentation $\rho_{\mathscr{L}} : \Pi_1(\boldsymbol{M};x) \to \text{End}_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}_x)$ dite « *de monodromie* ». Un morphisme de faisceaux entre deux systèmes locaux $\alpha : \mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_2$ induit de même le morphisme $\alpha_x : \mathscr{L}_{1\,x} \to \mathscr{L}_{2\,x}$ de $\Pi_1(\boldsymbol{M};x)$-modules à coefficients dans $\mathscr{A}$. La correspondance $\mathscr{L} \rightsquigarrow \rho_{\mathscr{L}}$ est un équivalence de catégories entre $\text{Loc}(\boldsymbol{M})$ et la catégorie $\text{Mod}_{\mathscr{A}}(\Pi_1(\boldsymbol{M};x))$([34]). Pour tous $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2 \in \text{Loc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{M})$, cette équivalence donne un isomorphisme :

$$\text{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{M}}}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathscr{A},\Pi_1(\boldsymbol{M};x)}(\mathscr{L}_{1\,x}, \mathscr{L}_{2\,x}) = \text{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{L}_{1\,x}, \mathscr{L}_{2\,x})^{\Pi_1(\boldsymbol{M};x)}\,.$$

Comme d'habitude, le choix du point de base est inessentiel et nous pouvons effacer la référence à x dans ce qui précède ; on écrira donc $\text{Loc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{M}) \sim \text{Mod}_{\mathscr{A}}(\Pi_1(\boldsymbol{M}))$.

Lorsque $\boldsymbol{M}$ n'est pas connexe, $\text{Loc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{M})$ est clairement équivalente au produit des catégories $\text{Mod}_{\mathscr{A}}(\Pi_1(\boldsymbol{M}_i))$ où $\boldsymbol{M}_i$ décrit $\Pi_0(\boldsymbol{M})$. La catégorie $\text{Loc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{M})$ est une sous-catégorie pleine et abélienne de $\text{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$ qui est, en plus, stable par extensions dans $\text{Faisc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{X})$([35]).

---

[34] *Cf.* [C] article de Mebkhout-Narváez-Macarro : "*Le théorème de constructibilité de Kashiwara*", §I.1–2, pp. 50–57, pour une démonstration détaillée de cette équivalence de catégories.

[35] *cf.* [C] *loc.cit.* prop. I.1.11 p. 53.

1.11.3 Une variété topologique est une pseudovariété relativement à la stratification triviale $\mathfrak{M}_0 = \{\boldsymbol{M}\}$ et le théorème 1.7.7 s'applique au couple $(\boldsymbol{M};\mathfrak{M})$. Les objets de la catégorie $D^b_{\mathfrak{M}_0\text{-c}}(\boldsymbol{M})$ sont alors les complexes de faisceaux $\mathscr{F}^\bullet$ sur $\boldsymbol{M}$ dont les faisceaux dérivés $\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet$ sont des systèmes locaux sur $\boldsymbol{M}$ et sont presque tous nuls. Il faut prendre garde du fait que les termes $\mathscr{F}^k$ de $\mathscr{F}^\bullet$ peuvent, non seulement ne pas être des systèmes locaux, mais peuvent également être non nuls pour une infinité de valeurs de k.

1.11.4 Proposition. *Soit $\boldsymbol{M}$ une variété topologique équidimensionnelle. Alors, pour tout corps k et tout $\mathscr{F}^\bullet \in D^b_{k;\mathfrak{M}_0\text{-c}}(\boldsymbol{M})$:*

$$\boxed{[\![\mathbb{D}_{\boldsymbol{M}}\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} = -[\![\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} - \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M})} \qquad (\diamond)$$

Démonstration. Lorsque $[\![\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} = [\![a]\!]$, on a $\mathscr{H}^a\mathscr{F}^\bullet[-a] \equiv \mathscr{F}^\bullet$ dans $\mathrm{D}(\boldsymbol{M})$ (1.4.27) et donc

$$\mathbb{D}_{\boldsymbol{M}}\mathscr{F}^\bullet \equiv \mathbb{R}\mathscr{H}om(\mathscr{H}^a\mathscr{F}^\bullet[-a], \underline{\mathrm{Or}}_{\boldsymbol{M}|k}[\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M})]) = \mathscr{H}om(\mathscr{H}^a\mathscr{F}^\bullet, \underline{\mathrm{Or}}_{\boldsymbol{M}|k})[\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M}) + a]\,,$$

d'après 1.2.13 puisque un système local de k-espaces vectoriels est localement libre. Dans le cas général, supposons $[\![\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} = [\![a,b]\!]$ avec $a < b$. Le triangle exact :

$$\tau_{\leqslant b-1}\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathscr{H}^b\mathscr{F}^\bullet[-b] \xrightarrow[[+1]]{}$$

donne lieu au triangle exact :

$$\mathbb{D}_{\boldsymbol{M}}(\mathscr{H}^b\mathscr{F}^\bullet[-b]) \longrightarrow \mathbb{D}_{\boldsymbol{M}}\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathbb{D}_{\boldsymbol{M}}(\tau_{\leqslant b-1}\mathscr{F}^\bullet) \xrightarrow[[+1]]{}$$

d'où :

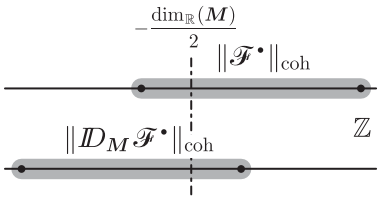
$$[\![\mathbb{D}_{\boldsymbol{M}}\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![\mathbb{D}_{\boldsymbol{M}}(\mathscr{H}^b\mathscr{F}^\bullet[-b])]\!]_{\mathrm{coh}} \cup [\![\mathbb{D}_{\boldsymbol{M}}(\tau_{\leqslant b-1}\mathscr{F}^\bullet)]\!]_{\mathrm{coh}}$$

et donc $[\![\mathbb{D}_{\boldsymbol{M}}\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq -[\![\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} - \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M})$, en raisonnant par induction sur $b-a$. La proposition résulte alors de l'involutivité de $\mathbb{D}_{\boldsymbol{M}}$. ∎

1.11.5 Pour $\mathscr{G}^\bullet \in D^b_{k;\mathfrak{M}\text{-c}}(\boldsymbol{M})$ notons $[\![\mathscr{G}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} = [\![a(\mathscr{G}^\bullet), b(\mathscr{G}^\bullet)]\!]$. L'égalité $(\diamond)$ s'écrit de la manière plus suggestive suivante :

$$\frac{a(\mathbb{D}_{\boldsymbol{M}}\mathscr{F}^\bullet) + b(\mathscr{F}^\bullet)}{2} = \frac{b(\mathbb{D}_{\boldsymbol{M}}\mathscr{F}^\bullet) + a(\mathscr{F}^\bullet)}{2} = -\frac{\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M})}{2}$$

qui montre que $\mathbb{D}_{\boldsymbol{M}}$ opère comme une symétrie par rapport à $-\frac{\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M})}{2}$.



On prendra garde du fait que toutes ces remarques sont uniquement valables sur une variété topologique et pour des complexes de faisceaux à cohomologie bornée et dont les faisceaux dérivés sont localement constants de fibres vectorielles de dimension finie.

1.11.6 Pour toute variété topologique $\boldsymbol{M}$ de dimension paire et orientable, $\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{M}}[\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M})/2]$ est isomorphe à son dual $\mathbb{D}_{\boldsymbol{M}}(\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{M}}[\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M})/2])$ (*cf.* 1.6.4).

1.11.7 Invariance de la monodromie. Dans cette partie $\boldsymbol{M}$ est un ouvert non singulier d'une variété algébrique complexe et $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{M}$ est un fermé de Zariski de codimension positive d'ouvert complémentaire noté $\boldsymbol{U}$([36]).

1.11.8 Lemme. *Soit $\mathscr{L} \in \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{M})$. Le morphisme d'adjonction $\mathscr{L} \to \imath_{U*}\big(\mathscr{L}|_{\boldsymbol{U}}\big)$ est un isomorphisme de faisceaux.*

Démonstration. En effet, on a la suite exacte longue fondamentale :

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}_{\boldsymbol{Z}}\mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow \imath_{\boldsymbol{U}*}\big(\mathscr{L}|_{\boldsymbol{U}}\big) \longrightarrow \mathscr{H}^1_{\boldsymbol{Z}}\mathscr{L} \longrightarrow \cdots$$

où $\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{Z}}\mathscr{L} = 0$ par vérification directe à partir de la définition du foncteur $\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{Z}}$. Le lemme résulte de prouver que $\big(\mathscr{H}^1_{\boldsymbol{Z}}\mathscr{L}\big)_z = 0$, pour tout système local $\mathscr{L}$ et tout $z \in \boldsymbol{Z}$. Or, au voisinage de z dans $\boldsymbol{M}$ le système local est trivial et nous pouvons supposer que $\mathscr{L} = c^!_{\boldsymbol{M}}\mathscr{M}[-\dim_{\mathbb{R}}\boldsymbol{M}]$ pour un certain $\mathscr{A}$-module de type fini $\mathscr{M}$ (1.6.5). Dans ce cas $\imath^!_{\boldsymbol{Z}}\mathscr{L} = c^!_{\boldsymbol{Z}}\mathscr{M}[-\dim_{\mathbb{R}}\boldsymbol{M}]$ (1.6.2) et alors $[\![\imath^!_{\boldsymbol{Z}}\mathscr{L}]\!]_{\mathrm{coh}} = [\![c^!_{\boldsymbol{Z}}\mathscr{M}]\!]_{\mathrm{coh}} + \dim_{\mathbb{R}}\boldsymbol{M} \subseteq [\![\dim_{\mathbb{R}}\boldsymbol{M} - \dim_{\mathbb{R}}\boldsymbol{Z}, \dim_{\mathbb{R}}\boldsymbol{M}]\!]$ (1.7.10). Le lemme résulte maintenant de la minoration $1 < \dim_{\mathbb{R}}\boldsymbol{M} - \dim_{\mathbb{R}}\boldsymbol{Z}$. ∎

1.11.9 Proposition. *Les données étant comme ci-dessus, le foncteur $\imath_{\boldsymbol{U}}^{-1} : \mathrm{Loc}(\boldsymbol{M}) \rightsquigarrow \mathrm{Loc}(\boldsymbol{U})$ est pleinement fidèle et transforme irréductible en irréductible.*

Démonstration. Pour $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2 \in \mathrm{Loc}(\boldsymbol{M})$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{U}}}\big(\mathscr{L}_1|_{\boldsymbol{U}}, \mathscr{L}_2|_{\boldsymbol{U}}\big) &= \Gamma\big(\boldsymbol{U}; \mathscr{H}\!\mathit{om}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)|_{\boldsymbol{U}}\big)\\ &= \Gamma\big(\boldsymbol{M}; \imath_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{H}\!\mathit{om}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)|_{\boldsymbol{U}}\big)\\ &= \Gamma\big(\boldsymbol{M}; \mathscr{H}\!\mathit{om}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)\big) = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{M}}}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)\end{aligned}$$

puisque $\mathscr{H}\!\mathit{om}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ est un système local sur $\boldsymbol{M}$ et grâce au lemme précédent. La pleine fidélité de $\imath_{\boldsymbol{U}}^{-1}$ en découle.

Soient $\mathscr{L} \in \mathrm{Loc}(\boldsymbol{M})$ un système local irréductible, et $\mathscr{L}' \in \mathrm{Loc}(\boldsymbol{U})$ tel que $\mathscr{L}' \subseteq \mathscr{L}|_{\boldsymbol{U}}$. Pour tout $z \in \boldsymbol{Z}$, il existe un voisinage ouvert connexe V_z au-dessus duquel $\mathscr{L}$ est trivial. L'ouvert $V'_z = V_z \cap \boldsymbol{U}$ est connexe et l'inclusion $\mathscr{L}'|_{V'_z} \subseteq \mathscr{L}|_{V'_z}$ est un inclusion de systèmes locaux triviaux (penser aux espaces étalés). Il existe alors un et un seul système local trivial $\overline{\mathscr{L}}'_z \in \mathrm{Loc}(V_z)$ tel que $\mathscr{L}'|_{V'_z} = \overline{\mathscr{L}}'_z|_{V'_z}$ et $\overline{\mathscr{L}}'_z \subseteq \mathscr{L}|_{V_z}$; autrement dit le système local $\mathscr{L}'$ admet des prolongements locaux *uniques* autour des points de $\boldsymbol{Z}$. C'est tout ce qu'il faut pour montrer que le système local $\mathscr{L}'$ admet un prolongement global en un sous-système local de $\mathscr{L}$, mais comme $\mathscr{L}$ est supposé irréductible ceci n'est possible que si $\mathscr{L}' = 0$ ou si $\mathscr{L}' = \mathscr{L}|_{\boldsymbol{U}}$. ∎

§ 2. Prolongement intermédiaire relatif à une filtration fermée

2.1 Filtrations fermées

Soit $\mathscr{F}$ une filtration finie d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ par des parties fermées :

$$\mathscr{F} = \Big(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_n \supseteq \boldsymbol{X}_{n-1} \supseteq \boldsymbol{X}_{n-2} \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{X}_1 \supseteq \boldsymbol{X}_0 \supseteq \boldsymbol{X}_{-1} = \varnothing\Big) \qquad (*)$$

[36] Il suffirait de supposer que $\boldsymbol{M}$ est une variété topologique de dimension d et que $\boldsymbol{Z}$ est une partie fermée de $\boldsymbol{M}$ admettant une structure de pseudovariété de dimension au plus $d-2$.

Chaque partie $\boldsymbol{S}_k := \boldsymbol{X}_{n-k}\backslash\boldsymbol{X}_{n-(k+1)}$ $(k=0,\dots,n)$ est localement fermée. On note :

$$\boldsymbol{U}_k := \boldsymbol{X}_n\backslash\boldsymbol{X}_{n-(k+1)} = \boldsymbol{S}_0 \amalg \boldsymbol{S}_1 \amalg \cdots \amalg \boldsymbol{S}_k\,, \quad \text{pour } k=0,\dots,n.$$

(en part. $\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{S}_0$) ; on a donc $\boldsymbol{U}_{k+1} = \boldsymbol{U}_k \amalg \boldsymbol{S}_{k+1}$ et les inclusions $\imath_k$ et $\jmath_{k+1}$(resp. ouverte et fermée) :

$$\boldsymbol{U}_k \xrightarrow[\subseteq]{\imath_k} \boldsymbol{U}_{k+1} \xleftarrow[\supseteq]{\jmath_{k+1}} \boldsymbol{S}_{k+1}\,.$$

2.2 L'équivalence de catégories de Deligne

2.2.1 Définition. Les données étant comme ci-dessus, on appelle «*prolongement intermédiaire relatif à la filtration* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$», le foncteur :

$$\imath^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{!*} : \mathrm{Faisc}(\boldsymbol{S}_0) \rightsquigarrow D^b(\boldsymbol{X})$$

défini par :

$$\boxed{\imath^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{!*} := \left(\tau_{\leqslant n-1}\, I\!R\imath_{n-1*}\right)\circ\cdots\circ\left(\tau_{\leqslant 1}\, I\!R\imath_{1*}\right)\circ\left(\tau_{\leqslant 0}\, I\!R\imath_{0*}\right)}$$

2.2.2 Théorème (Deligne).[37] *Le foncteur* $\imath^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{!*}$ *établit une équivalence de catégories entre* $\mathrm{Faisc}(\boldsymbol{S}_0)$ *et la sous-catégorie pleine* $\mathfrak{IC}_{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(\boldsymbol{X}) \subseteq D^b(\boldsymbol{X})$ *des complexes de faisceaux* $\boldsymbol{\mathcal{F}}^\bullet$ *vérifiant les trois conditions suivantes.*

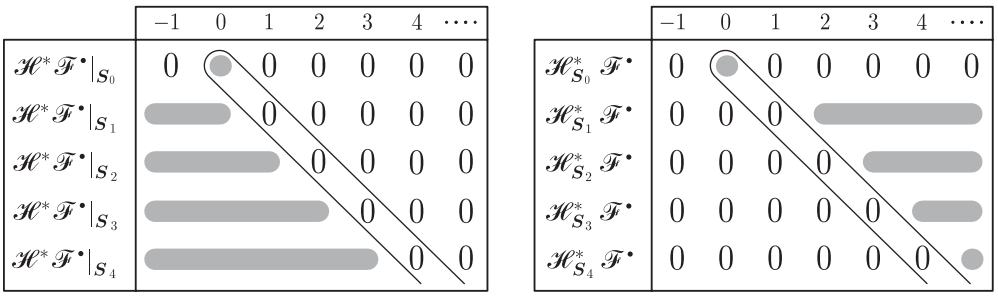
(0) $\mathscr{H}^m\boldsymbol{\mathcal{F}}^\bullet|_{\boldsymbol{S}_0} = 0$, *pour tout* $m \neq 0$;

et pour chaque $k = 1,2,\dots,n$, *les conditions de «support»* (S) *et de «cosupport»* (S') :

(S) $\mathscr{H}^m\boldsymbol{\mathcal{F}}^\bullet|_{\boldsymbol{S}_k} = 0$, *pour tout* $m \geqslant k$; (S') $\mathscr{H}^m_{\boldsymbol{S}_k}\boldsymbol{\mathcal{F}}^\bullet = 0$, *pour tout* $m \leqslant k$.

En particulier, l'image essentielle [38] *de* $\imath^{\mathfrak{X}}_{!*}$ *est une sous-catégorie pleine abélienne de* $D^b(\boldsymbol{X})$.

Le tableaux ci-dessous illustrent ces conditions ; les parties grisées correspondent aux degrés cohomologiques où les faisceaux dérivés peuvent être a priori non nuls.



Démonstration. Considérons chaque ouvert $\boldsymbol{U}_k$ muni de la filtration $\boldsymbol{\mathcal{F}}_k$ induite par $\boldsymbol{\mathcal{F}}$:

$$\boldsymbol{U}_k = \boldsymbol{S}_0 \amalg \cdots \amalg \boldsymbol{S}_k$$

et notons $\mathfrak{C}_k$ la sous-catégorie pleine de $D^b(\boldsymbol{U}_k)$ des complexes de faisceaux sur $\boldsymbol{U}_k$ vérifiant les conditions (0), (S) et (S') pour $\boldsymbol{\mathcal{F}}_k$. On a clairement $\mathfrak{C}_0 \equiv \mathrm{Faisc}(\boldsymbol{S}_0)$ (1.4.27) et le théorème résultera

[37] *Cf.* [GoMc$_2$] §3.5.

[38] On rappelle qu'on appelle «*image essentielle*» d'un foncteur $\boldsymbol{F} : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_2$ la classe d'objets de $\mathfrak{C}_2$ isomorphes aux objets de la forme $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{O})$ où $\boldsymbol{O} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C}_1)$.

de prouver que chaque foncteur

$$\tau_{\leqslant k}\, I\!R\imath_{k*} : \mathcal{C}_k \rightsquigarrow \mathcal{C}_{k+1}$$

est une équivalence de catégorie.

Commençons par vérifier qu'ils sont bien définis. Fixons l'entier $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Soit $\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{C}_k$ et notons $\mathscr{G}^\bullet := \tau_{\leqslant k}\, I\!R\imath_{k*}\mathscr{F}^\bullet \in D^b(\boldsymbol{U}_{k+1})$. Le foncteur de restriction $\imath_k^{-1}$ étant exact, il commute à la troncature, donc :

$$\mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{U}_k} = \tau_{\leqslant k}\, \imath_k^{-1} I\!R\imath_{k*}\mathscr{F}^\bullet \underset{\text{q-i}}{=} \mathscr{F}^\bullet. \tag{$*$}$$

En particulier,

$$\mathscr{H}^m\mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{U}_k} = \mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet \quad \text{et} \quad \mathscr{H}^m_{\boldsymbol{S}}\mathscr{G}^\bullet = \mathscr{H}^m_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^\bullet, \text{ pour tout } m \in \mathbb{Z},$$

où $\boldsymbol{S}$ désigne une partie localement fermée de $\boldsymbol{U}_{k+1}$ contenue dans $\boldsymbol{U}_k$. Les conditions (0), (S) et (S') sont donc bien vérifiées par les parties $\boldsymbol{S}_0, \boldsymbol{S}_1, \dots, \boldsymbol{S}_k$ et il ne reste qu'à vérifier les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (\mathrm{S}_{k+1}) & \mathscr{H}^m\mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{S}_{k+1}} = 0\,, \quad \text{pour } m \geqslant k+1, \\ (\mathrm{S'}_{k+1}) & \mathscr{H}^m_{\boldsymbol{S}_{k+1}}\mathscr{G}^\bullet = 0\,, \quad \text{pour } m \leqslant k+1, \end{cases}$$

La condition (S_{k+1}) est trivialement satisfaite car $\mathscr{G}^\bullet$ est donné par la troncature $\tau_{\leqslant k}$.
La condition $(\mathrm{S'}_{k+1})$ sera testée à l'aide du triangle exact de $D^+(\boldsymbol{U}_{k+1})$ associé à la décomposition $\boldsymbol{U}_{k+1} = \boldsymbol{U}_k \amalg \boldsymbol{S}_{k+1}$:

$$\jmath_{k+1!}\jmath_{k+1}^!\mathscr{G}^\bullet \longrightarrow \mathscr{G}^\bullet \longrightarrow I\!R\imath_{k*}\big(\mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{U}_k}\big)\mathscr{G}^\bullet \xrightarrow[+1]{}\,, \tag{$**$}$$

où le terme de droite n'est autre que $I\!R\imath_{k*}\mathscr{F}^\bullet$ d'après $(*)$. On a donc dans $D^+(\boldsymbol{U}_{k+1})$:

$$\jmath_{k+1!}\jmath_{k+1}^!\mathscr{G}^\bullet \longrightarrow \mathscr{G}^\bullet = \tau_{\leqslant k}\, I\!R\imath_{k*}\mathscr{F}^\bullet \xrightarrow[\subseteq]{\xi} I\!R\imath_{k*}\mathscr{F}^\bullet \xrightarrow[+1]{}\,,$$

où ξ s'identifie au morphisme canonique du complexe tronqué dans le complexe total. Comme ξ est un quasi-isomorphisme en degrés $\leqslant k$, on a aussitôt par la suite exacte longue de cohomologie (1.4.24-($\diamond$)) :

$$\begin{cases} \jmath_{k+1!}\mathscr{H}^m_{\boldsymbol{S}_{k+1}}\mathscr{G}^\bullet = \mathbf{0}\,, \text{ pour tout } m \leqslant k, \\ \jmath_{k+1!}\mathscr{H}^{k+1}_{\boldsymbol{S}_{k+1}}\mathscr{G}^\bullet \subseteq \mathscr{H}^{k+1}\mathscr{G}^\bullet = 0\,, \end{cases}$$

et la condition $(\mathrm{S'}_{k+1})$ résulte par restriction à $\boldsymbol{S}_{k+1}$ (en effet, comme cette partie est fermée dans $\boldsymbol{U}_{k+1}$, on a $\jmath_{k+1!} = \jmath_{k+1*}$ et $\jmath_{k+1}^{-1}\jmath_{k+1!} = \mathrm{id}$. Le foncteur $\tau_{\leqslant k}\, I\!R\imath_{k*} : \mathcal{C}_k \rightsquigarrow \mathcal{C}_{k+1}$ est donc bien défini.

Dans ce qui précède, nous avons montré que le foncteur $\imath_k^{-1} : \mathcal{C}_{k+1} \rightsquigarrow \mathcal{C}_k$ est également bien défini et que la composée

$$\mathcal{C}_k \overset{\tau_{\leqslant k}\, I\!R\imath_{k*}}{\rightsquigarrow} \mathcal{C}_{k+1} \overset{\imath_k^{-1}}{\rightsquigarrow} \mathcal{C}_k$$

s'identifie naturellement au foncteur identité. Ceci implique que $\tau_{\leqslant k}\, I\!R\imath_{k*}$ est *fidèle*, *i.e.* que le morphisme

$$\mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{U}_k)}(\mathscr{F}_1^\bullet, \mathscr{F}_2^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{U}_{k+1})}(\tau_{\leqslant k}\, I\!R\imath_{k*}\mathscr{F}_1^\bullet, \tau_{\leqslant k}\, I\!R\imath_{k*}\mathscr{F}_2^\bullet) \tag{$\ddagger$}$$

défini par le foncteur $\tau_{\leqslant k}\, I\!R\imath_{k*}$, est *injectif* pour tous $\mathscr{F}_1^\bullet, \mathscr{F}_2^\bullet \in \mathcal{C}_k$.

Nous allons étudier maintenant la composée :

$$\mathcal{C}_{k+1} \overset{\imath_k^{-1}}{\rightsquigarrow} \mathcal{C}_k \overset{\tau_{\leqslant k}\, I\!R\imath_{k*}}{\rightsquigarrow} \mathcal{C}_{k+1}.$$

Soit $\mathscr{G}^\bullet \in \mathcal{C}_{k+1}$ et considérons à nouveau le triangle exact de $D^+(\boldsymbol{U}_{k+1})$ $(**)$:

$$\jmath_{k+1!}\jmath_{k+1}^!\mathscr{G}^\bullet \longrightarrow \mathscr{G}^\bullet \xrightarrow{\zeta} I\!R\imath_{k*}\big(\mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{U}_k}\big) \xrightarrow[+1]{}$$

Comme $\mathscr{H}^m\big(\jmath_{k+1!}\jmath_{k+1}^!\mathscr{G}^\bullet\big)$ $(=\jmath_{k+1!}\mathscr{H}^m_{\boldsymbol{S}_{k+1}}\mathscr{G}^\bullet)$ est nul pour $m\leqslant k+1$ (puisqu'il en est ainsi de $\mathscr{H}^m_{\boldsymbol{S}_{k+1}}\mathscr{G}^\bullet$ par hypothèse), le morphisme ζ est un quasi-isomorphisme en degrés $\leqslant k$ et induit un quasi-isomorphisme $\tau_{\leqslant k}\,\mathscr{G}^\bullet\sim\tau_{\leqslant k}\,\mathbb{R}\imath_{k*}(\mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{U}_k})$.

On a un diagramme de morphismes de complexes (bornés) :

$$\begin{array}{ccc} & \tau_{\leqslant k}\,\mathscr{G}^\bullet & \\ {\scriptstyle\supseteq}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\zeta} \\ \mathscr{G}^\bullet & \xrightarrow{\quad T(\mathscr{G}^\bullet)\quad} & \tau_{\leqslant k}\,\mathbb{R}\imath_{k*}(\mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{U}_k}) \end{array}$$

où l'inclusion $\tau_{\leqslant k}\,\mathscr{G}^\bullet\subseteq\mathscr{G}^\bullet$ est un quasi-isomorphisme puisque $\mathscr{H}^m\mathscr{G}^\bullet=\mathbf{0}$ pour tout $m\geqslant k+1$; car $\mathscr{H}^m\mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{S}_*}=\mathbf{0}$, indépendamment de la partie $\boldsymbol{S}_*$ de U_{k+1}. Nous faisons donc correspondre à chaque $\mathscr{G}^\bullet\in\mathfrak{C}_{k+1}$ l'isomorphisme ([39]) :

$$T(\mathscr{G}^\bullet):=(\zeta\circ\supseteq^{-1})\in\mathrm{Mor}_{D^+(\boldsymbol{U}_{k+1})}\big(\mathscr{G}^\bullet,\tau_{\leqslant k}\,\mathbb{R}\imath_{k*}\imath_k^{-1}\mathscr{G}^\bullet)\big)\,.$$

En particulier, le foncteur $\tau_{\leqslant k}\,\mathbb{R}\imath_{k*}:\mathfrak{C}_k\rightsquigarrow\mathfrak{C}_{k+1}$ est *surjectif*.

La transformation $T:\mathrm{id}_{\mathfrak{C}_{k+1}}\to(\tau_{\leqslant k}\,\mathbb{R}\imath_{k*})\circ\imath_k^{-1}$ est *naturelle*.

En effet, étant donnés $\mathscr{G}_1^\bullet,\mathscr{G}_2^\bullet\in\mathfrak{C}_{k+1}$ et un morphisme **de complexes** $\alpha_\bullet:\mathscr{G}_1^\bullet\to\mathscr{G}_2^\bullet$ avec $\mathscr{G}_i^\bullet\in\mathfrak{C}_{k+1}$, nous devons vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}_1^\bullet & \xrightarrow[\sim]{T(\mathscr{G}_1^\bullet)} & \tau_{\leqslant k}\,\mathbb{R}\imath_{k*}\imath_k^{-1}\mathscr{G}_1^\bullet \\ {\scriptstyle\alpha_\bullet}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau_{\leqslant k}\,\mathbb{R}\imath_{k*}\imath_k^{-1}\alpha_\bullet} \\ \mathscr{G}_2^\bullet & \xrightarrow[\sim]{T(\mathscr{G}_2^\bullet)} & \tau_{\leqslant k}\,\mathbb{R}\imath_{k*}\imath_k^{-1}\mathscr{G}_2^\bullet \end{array}\qquad(\diamond)$$

est commutatif dans $D^+(\boldsymbol{U}_{k+1})$. Ceci est conséquence immédiate du fait que $(\diamond)$ se factorise **naturellement** en deux diagrammes commutatifs **dans la catégorie des complexes**, à savoir :

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{G}_1^\bullet & \xleftarrow[\sim]{\supseteq_1} & \tau_{\leqslant k}\,\mathscr{G}_1^\bullet & \xrightarrow{\zeta_1} & \tau_{\leqslant k}\,\mathbb{R}\imath_{k*}\imath_k^{-1}\mathscr{G}_1 \\ {\scriptstyle\alpha_\bullet}\downarrow & \oplus & \downarrow{\scriptstyle\tau_{\leqslant k}\alpha_\bullet} & \oplus & \downarrow{\scriptstyle\tau_{\leqslant k}\,\mathbb{R}\imath_{k*}\imath_k^{-1}\alpha_\bullet} \\ \mathscr{G}_2^\bullet & \xleftarrow[\sim]{\supseteq_2} & \tau_{\leqslant k}\,\mathscr{G}_2^\bullet & \xrightarrow{\zeta_2} & \tau_{\leqslant k}\,\mathbb{R}\imath_{k*}\imath_k^{-1}\mathscr{G}_2 \end{array}$$

On en déduit que la composée des morphismes :

$$\begin{array}{c} \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{U}_{k+1})}(\mathscr{G}_1^\bullet,\mathscr{G}_2^\bullet) \\ \downarrow{\scriptstyle\imath_k^{-1}} \\ \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{U}_k)}(\imath_k^{-1}\mathscr{G}_1^\bullet,\imath_k^{-1}\mathscr{G}_2^\bullet) \\ \downarrow{\scriptstyle\tau_{\leqslant k}\,\mathbb{R}\imath_{k*}} \\ \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{U}_{k+1})}(\tau_{\leqslant k}\,\mathbb{R}\imath_{k*}\imath_k^{-1}\mathscr{G}_1^\bullet,\tau_{\leqslant k}\,\mathbb{R}\imath_{k*}\imath_k^{-1}\mathscr{G}_2^\bullet) \end{array}$$

est bijective. Le morphisme $(\ddagger)$ est par conséquent *bijectif* et ceci termine la démonstration du théorème. ∎

[39] On rappelle que la notation « $\supseteq^{-1}$ » n'a de sens qu'en catégorie dérivée.

§3. Homologie d'intersection sur une variété algébrique complexe

3.1 Complexes d'intersection sur une variété algébrique complexe

Le théorème 2.2.2 est trop général pour que l'on puisse raisonnablement comparer les images essentielles dans $D^b(\boldsymbol{X})$ des prolongements intermédiaires $\imath_{!*}^{\mathcal{F}_1}$ et $\imath_{!*}^{\mathcal{F}_2}$ lorsque $\mathcal{F}_1 \preccurlyeq \mathcal{F}_2$ (1.9.4). En effet, s'il est immédiat de constater que les conditions de support relatives au raffinement $\mathcal{F}_2$ sont satisfaites par tout $\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{JC}_{\mathcal{F}_1}(\boldsymbol{X}) := \mathrm{im}_{\mathrm{ess}}(\imath_{!*}^{\mathcal{F}_1})$, il n'en est pas de même en général des conditions de cosupport. Cette situation se simplifie de manière remarquable lorsque l'on se restreint aux filtrations fermées associées aux stratifications de Whitney d'une variété algébrique complexe et aux systèmes locaux sur les strates ouvertes.

3.1.1 A partir de maintenant $\boldsymbol{X}$ désigne une variété algébrique complexe. L'anneau $\mathscr{A}$ sera le corps de nombres rationnels $\mathbb{Q}$. Pour tout $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{X}$ localement fermé pour la topologie de Zariski de $\boldsymbol{X}$, on note $d_{\boldsymbol{S}} := \dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{S})$. Les notations $\mathrm{Faisc}(\boldsymbol{S})$ et $\mathrm{Loc}(\boldsymbol{S})$ seront synonymes de $\mathrm{Faisc}_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{S}^{\mathrm{an}})$ et $\mathrm{Loc}_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{S}^{\mathrm{an}})$ respectivement. Enfin, pour toute stratification $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$, on notera $\imath_{!*}^{\mathfrak{X}}$ le foncteur de prolongement intermédiaire relatif à la filtration fermée associée à $\mathfrak{X}$.

3.1.2 Théorème. *Soit $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}^{\mathrm{Wh}}(\boldsymbol{X})$. Notons $\boldsymbol{S}_0$ la réunion des strates de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$. Le prolongement intermédiaire $\imath_{!*}^{\mathfrak{X}}$ établit une équivalence de catégories entre $\mathrm{Loc}(\boldsymbol{S}_0)$ et la sous-catégorie pleine de $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ des complexes de faisceaux $\mathscr{F}^\bullet$ tels que $\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet = 0$ pour $m < 0$ et qui vérifient les trois conditions suivantes :*

(0) $\quad \mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet[d_{\boldsymbol{X}}]|_{\boldsymbol{S}_0} = 0$, *pour tout* $m > -d_{\boldsymbol{X}}$, *et* $\mathscr{H}^0\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{Loc}(\boldsymbol{S}_0)$,

et pour chaque strate $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{X}$ de codimension positive dans $\boldsymbol{X}$:

(S) $\quad \mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet[d_{\boldsymbol{X}}]|_{\boldsymbol{S}} = 0$, *pour tout* $m \geqslant -d_{\boldsymbol{S}}$;

(S') $\quad \mathscr{H}^m(\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{F}^\bullet[d_{\boldsymbol{X}}]))|_{\boldsymbol{S}} = 0$, *pour tout* $m \geqslant -d_{\boldsymbol{S}}$.

Démonstration. L'assertion $[\![\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![0, +\infty[\![$ résulte de ce que $\imath_{!*}^{\mathfrak{X}}$ est composée de foncteurs dérivés de foncteurs exact à gauche et de troncatures. D'après les résultats de stabilité des catégories $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{S})$ par rapport à la dualité de Grothendieck-Verdier et aux différents foncteurs d'image directe ou image inverse (*cf.* 1.9.6), le théorème 2.2.2 donne l'équivalence de catégories annoncée mais avec la condition de cosupport pour chaque $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{X}$ de codimension positive :

$$\mathscr{H}^m_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^\bullet = 0, \quad \text{pour tout } m \leqslant d_{\boldsymbol{X}} - d_{\boldsymbol{S}}.$$

Or, $\mathscr{H}^m_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^\bullet = \mathscr{H}^m\imath^!_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^\bullet = \mathscr{H}^m\mathbb{D}_{\boldsymbol{S}}\imath_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet$ (1.7.8), et alors (1.11.4)

$$]\!]d_{\boldsymbol{X}} - d_{\boldsymbol{S}}, +\infty[\![\supseteq [\![\imath^!_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} = [\![\mathbb{D}_{\boldsymbol{S}}\imath_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} = -[\![\imath_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} - \boxed{2d_{\boldsymbol{S}}},$$

([40]) de sorte que

$$[\![\imath_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq]\!] - \infty, -d_{\boldsymbol{X}} - d_{\boldsymbol{S}}[\![=]\!] - \infty, -d_{\boldsymbol{S}}[\![- d_{\boldsymbol{X}}\,.$$

[40] Il est opportun de remarquer que le terme encadré provient de la dualité de Grothendieck-Verdier sur $\boldsymbol{S}$ et sa valeur $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{S})$ est fixée par la géométrie de $\boldsymbol{S}$ (1.11.4). Il en est de même, par ailleurs, du nombre $d_{\boldsymbol{X}}$ qui vaut $\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{X})$ (1.11.5). Dans le théorème de Deligne (2.2.2) les indices qui contrôlent les troncatures sont les indices des différences $\boldsymbol{S}_k := \boldsymbol{X}_{n-k}\backslash\boldsymbol{X}_{n-(k+1)}$ *a priori* sans rapport avec leur dimension. Dans ce contexte, *i.e.* si l'on pose $d_{\boldsymbol{S}_k} = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{X}) - k$, le présent théorème reste inchangé sauf pour la condition de cosupport qui devient : (S") $\mathscr{H}^m(\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{F}^\bullet[d_{\boldsymbol{X}}]))|_{\boldsymbol{S}_k} = 0$, pour tout $m \geqslant d_{\boldsymbol{S}_k} - \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{S}_k)$.

La condition (S') résulte alors simplement des égalités (1.4.9) :

$$[\![i_S^{-1}\mathbb{D}_X(\mathscr{F}^\bullet[d_X])]\!]_{\mathrm{coh}} = [\![i_S^{-1}\mathbb{D}_X(\mathscr{F}^\bullet)[-d_X]]\!]_{\mathrm{coh}} = [\![i_S^{-1}\mathbb{D}_X(\mathscr{F}^\bullet)]\!]_{\mathrm{coh}} + d_X\,. \qquad \blacksquare$$

3.1.3 Notations et remarques. On note $\underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(X;\mathscr{L})$ le complexe $i^{\mathfrak{X}}_{!*}\mathscr{L}$ où $\mathscr{L}\in \mathrm{Loc}(S_0)$. On note $\mathfrak{IC}_{\mathfrak{X}}(X)$ l'image essentielle de $i^{\mathfrak{X}}_{!*}$ dans $D(X)$. Le théorème précédent prouve que si $Y := \cup_i Y_i$ est la réunion des composantes irréductibles de X de dimension d_X, alors :

$$\mathfrak{IC}_{\mathfrak{X}}(X) \equiv \mathfrak{IC}_{\mathfrak{X}}(Y) = \bigoplus\nolimits_i \mathfrak{IC}_{\mathfrak{X}}(Y_i)\,.$$

Le théorème montre également l'intérêt d'introduire un décalage dans nos constructions. On notera $i^{\mathfrak{X}}_{!*}[d_X]$ le foncteur de prolongement intermédiaire suivi du décalage (vers la gauche) de longueur d_X ; l'image essentielle de $i^{\mathfrak{X}}_{!*}[d_X]$ sera alors notée $\mathfrak{IC}_{\mathfrak{X}}(X)[d_X]$. Le tableau ci-dessous illustre les conditions de support vérifiées par $\mathscr{F}^\bullet \in \mathfrak{IC}_{\mathfrak{X}}(X)[d_X]$.

$\mathscr{F}^\bullet \in \mathfrak{IC}_{\mathfrak{X}}(X)[d_X]$	$-d_X-1$	$-d_X$	$-d_X+1$	$-d_X+2$	$-d_X+3$	$-d_X+4$	$\cdots$
$\mathscr{H}^*\mathbb{D}_X(\mathscr{F}^\bullet)\vert_{S_0}$ et $\mathscr{H}^*\mathscr{F}^\bullet\vert_{S_0}$	0	●	0	0	0	0	0
$\mathscr{H}^*\mathbb{D}_X(\mathscr{F}^\bullet)\vert_{S_1}$ et $\mathscr{H}^*\mathscr{F}^\bullet\vert_{S_1}$	0	●	0	0	0	0	0
$\mathscr{H}^*\mathbb{D}_X(\mathscr{F}^\bullet)\vert_{S_2}$ et $\mathscr{H}^*\mathscr{F}^\bullet\vert_{S_2}$	0	▬	0	0	0	0	0
$\mathscr{H}^*\mathbb{D}_X(\mathscr{F}^\bullet)\vert_{S_3}$ et $\mathscr{H}^*\mathscr{F}^\bullet\vert_{S_3}$	0	▬	▬	0	0	0	0
$\mathscr{H}^*\mathbb{D}_X(\mathscr{F}^\bullet)\vert_{S_4}$ et $\mathscr{H}^*\mathscr{F}^\bullet\vert_{S_4}$	0	▬	▬	▬	0	0	0

3.1.4 Corollaire. *Soit X une variété algébrique complexe.*

a) *Pour $\mathfrak{X} \preccurlyeq \mathfrak{X}' \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(X)$, notons $\jmath : S'_0 \hookrightarrow S_0$ l'inclusion de la réunion des strates de dimension d_X de $\mathfrak{X}'$ dans celle de $\mathfrak{X}$. On a $\mathfrak{IC}_{\mathfrak{X}_1}(X) \subseteq \mathfrak{IC}_{\mathfrak{X}_2}(X)$ et le diagramme de foncteurs :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Loc}(S_0) & \xrightarrow[\sim]{i^{\mathfrak{X}}_{!*}} & \mathfrak{IC}_{\mathfrak{X}}(X) \\ {\scriptstyle \jmath^{-1}}\downarrow & \bigoplus & \downarrow{\scriptstyle \subseteq} \\ \mathrm{Loc}(S'_0) & \xrightarrow[\sim]{i^{\mathfrak{X}'}_{!*}} & \mathfrak{IC}_{\mathfrak{X}'}(X) \end{array}$$

est commutatif.

b) *Pour toute $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(X)$ la sous-catégorie $\mathfrak{IC}_{\mathfrak{X}}(X)[d_X]$ de $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(X)$ est abélienne et stable sous l'action du foncteur de dualité $\mathbb{D}_X$.*

c) *Pour $\mathfrak{X} \preccurlyeq \mathfrak{X}' \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(X)$, l'inclusion $\mathfrak{IC}_{\mathfrak{X}}(X)[d_X] \subseteq \mathfrak{IC}_{\mathfrak{X}'}(X)[d_X]$ est un foncteur pleinement fidèle et exact de catégories abéliennes.*

d) *Pour chaque système local $\mathscr{L} \in \mathrm{Loc}(S_0)$, on a un isomorphisme canonique :*

$$\boxed{\mathbb{D}_X\big(\underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(X;\mathscr{L})[d_X]\big) \equiv \underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(X;\mathscr{L}^\vee)[d_X]}$$

où $\mathscr{L}^\vee$ désigne le système local $\mathscr{H}om(\mathscr{L};\underline{\mathbb{Q}}_{S_0}) \in \mathrm{Loc}(S_0)$.

Démonstration. (a) résulte de ce que les conditions (0), (S) et (S'), étant de conditions de support, elles sont *a fortiori* vérifiées par les strates d'un raffinement ([41]). La commutativité du diagramme est alors claire puisque $i_{!*}^{\mathfrak{X}}$ et $i_{!*}^{\mathfrak{X}'}$ sont des équivalences de catégories.

La catégorie $\mathcal{IC}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ est abélienne puisque équivalente à une catégorie abélienne et l'inclusion $\mathcal{IC}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{IC}_{\mathfrak{X}'}(\boldsymbol{X})$ est un foncteur exact puisqu'il correspond par l'équivalence de catégories au foncteur exact de restriction $\jmath^{-1} : \mathrm{Loc}(S_0) \rightsquigarrow \mathrm{Loc}(S_0')$.

La stabilité de $\mathcal{IC}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}}]$ par $\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}$ est évidente d'après l'énoncé même du théorème 3.1.2, on a donc $\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}(\underline{IC}^{\bullet}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})[d_{\boldsymbol{X}}]) \equiv \underline{IC}^{\bullet}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X};\mathscr{M})[d_{\boldsymbol{X}}]$ pour un certain $\mathscr{M} \in \mathrm{Loc}(\boldsymbol{X})$ et alors

$$(\mathbb{D}_{S_0}\mathscr{L})[-d_{\boldsymbol{X}}] = \mathbb{D}_{S_0}(\mathscr{L}[d_{\boldsymbol{X}}]) \equiv \mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}(\underline{IC}^{\bullet}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})[d_{\boldsymbol{X}}])|_{S_0} \equiv \underline{IC}^{\bullet}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X};\mathscr{M})[d_{\boldsymbol{X}}]|_{S_0} \equiv \mathscr{M}[d_{\boldsymbol{X}}]\,.$$

Par conséquent, $\mathscr{M} \equiv \mathscr{H}om(\mathscr{L};\mathbb{D}^{\bullet}_{S_0})[-2d_{\boldsymbol{X}}] \equiv \mathscr{H}om(\mathscr{L};\underline{\mathbb{Q}}_{S_0}) = \mathscr{L}^{\vee}$ puisque S_0 est orientable car ouvert non singulier d'une variété algébrique complexe. ∎

3.1.5 Il est important d'observer que d'après ce corollaire, lorsque $\boldsymbol{X}$ est non singulière, le faisceau constant $\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{X}}$ est canoniquement isomorphe à chaque complexe $\underline{IC}^{\bullet}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X};\underline{\mathbb{Q}}|_{S_0})$, quelle que soit $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$. Plus généralement, si $\mathscr{L}$ est un système local sur un ouvert de Zariski U de $\boldsymbol{X}$, il défini un système local sur la réunion des strates de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$ de toute stratification $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ telle que U est réunion de strates de $\mathfrak{X}$ ([42]). Le corollaire précédent montre que les complexes $\underline{IC}^{\bullet}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L}_{S_0})$ ainsi obtenus sont deux-à-deux canoniquement isomorphes et définissent un objet de $D_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ *indépendant de la stratification* ; on pourra donc effacer toute référence à la stratification et noter simplement $\underline{IC}^{\bullet}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})$.

3.1.6 Définitions

1) La « *catégorie des complexes d'intersection sur* $\boldsymbol{X}$ » est la sous-catégorie pleine de $D_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$:

$$\boxed{\mathcal{IC}(\boldsymbol{X}) := \varinjlim_{\mathfrak{X}\in\mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})} \mathcal{IC}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})}$$

2) Pour tout système local $\mathscr{L}$ sur un ouvert de Zariski de $\boldsymbol{X}$, on appelle « *complexe d'intersection de* $\boldsymbol{X}$ *à coefficients dans* $\mathscr{L}$ » le complexe $\underline{IC}^{\bullet}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})$ du paragraphe précédent.

---

[41] Reprenons la discussion générale du bas de page ([40]). Comme les conditions (0) et (S) concernent le nombre $d_{\boldsymbol{S}}$ qui ne peut que diminuer lors d'un raffinement, elles seront effectivement automatiquement vérifiées par les strates d'un raffinement. Par contre la condition (S") dépend du nombre $d_{\boldsymbol{S}_k} - \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{S}_k)$ et l'inclusion $\mathcal{IC}_{\mathfrak{X}_1}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{IC}_{\mathfrak{X}_2}(\boldsymbol{X})$ n'est assurée que lorsque :

$$\begin{cases} \text{a)} \quad -\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{X}) < d_{\boldsymbol{T}_k} - \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T}_k)\,, & \text{pour tout } \boldsymbol{T}_k \in \mathfrak{X}_2 \text{ et } \boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{S}_0 \in \mathfrak{X}_1\,; \\ \text{b)}\ d_{\boldsymbol{S}_\ell} - \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{S}_\ell) \leqslant d_{\boldsymbol{T}_k} - \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T}_k)\,, & \text{pour tout } \boldsymbol{T}_k \in \mathfrak{X}_2 \text{ et } \boldsymbol{T}_k \subseteq \boldsymbol{S}_\ell \in \mathfrak{X}_1. \end{cases}$$

La condition (a) implique que la codimension réelle de $\boldsymbol{T}_1$ doit être strictement plus grande que 1, c'est là l'origine de la restriction imposée aux structures de pseudovariété par Goresky-MacPherson (*cf.* bas de page ([18])). La condition (b) est, quand à elle, à l'origine des conditions de croissance imposées aux perversités générales, *i.e.* autres que la perversité moyenne. On peut dire de manière heuristique que l'indépendance de l'homologie d'intersection par rapport aux stratifications repose, pour l'essentiel, sur la validité des ces conditions.

[42] De telles stratifications existent toujours d'après 1.9.5.

3) Pour $\mathscr{L}$ comme dans (2), on appelle «*homologie d'intersection de* $\boldsymbol{X}$ *à coefficients dans* $\mathscr{L}$ », l'hypercohomologie de $\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{X};\mathscr{L})$. On note :

$$IH^\bullet(\boldsymbol{X};\mathscr{L}) := \mathbb{R}^\bullet\Gamma(\boldsymbol{X};\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{X};\mathscr{L})) \quad \text{et} \quad IH^\bullet_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L}) := \mathbb{R}^\bullet\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{X};\mathscr{L}))$$

3.1.7 Remarque. La catégorie $\mathfrak{IC}(\boldsymbol{X})$ est une sous-catégorie strictement pleine (*cf.* ([47])) de $D^b(\boldsymbol{X})$ et c'est une catégorie abélienne puisque limite d'un système inductif filtrant supérieurement de foncteurs pleinement fidèles et exacts entre catégories abéliennes (3.1.4-(c)).

3.1.8 Description intrinsèque des complexes d'intersection. Les objets de $\mathfrak{IC}(\boldsymbol{X})$ admettent une description indépendante des choix de stratifications. La proposition suivante, laissée en exercice, donne une telle description.

Proposition. *Soit* $\boldsymbol{X}$ *une variété algébrique complexe. Un complexe* $\mathscr{F}^\bullet \in D_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ *appartient à* $\mathfrak{IC}(\boldsymbol{X})$ *si et seulement si, il existe un ouvert non singulier* $U \subseteq \boldsymbol{X}$ *tel que :*

(0) $\mathscr{F}^\bullet|_U$ *est cohomologiquement concentré en degré* 0 *et* $\mathscr{H}^0\mathscr{F}^\bullet|_U$ *est un système local.*

(S) *Pour chaque fermé de Zariski irréductible* $\boldsymbol{Z}$ *tel que* $\boldsymbol{Z} \cap U = \varnothing$, *il existe* $V \subseteq \boldsymbol{Z}$, *ouvert et dense dans* $\boldsymbol{Z}$, *tel que*

$$\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet[d_{\boldsymbol{X}}]|_V = \mathscr{H}^m\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{F}^\bullet[d_{\boldsymbol{X}}])|_V = 0\,, \qquad \text{pour tout } m \geqslant -d_{\boldsymbol{Z}}.$$

3.1.9 Généralisation de la dualité de Poincaré. L'assertion (b) du corollaire 3.1.4 donne un isomorphisme canonique : $IH^k_c(\boldsymbol{X};\mathscr{L}) \equiv IH^{2d_{\boldsymbol{X}}-k}(\boldsymbol{X};\mathscr{L}^\vee)$. Lorsque $\mathscr{L} = \underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{X}}$ cet isomorphisme généralise la dualité de Poincaré aux les variétés algébriques complexes, **même singulières** !

$$\boxed{IH^k_c(\boldsymbol{X};\mathbb{Q}) \equiv IH^{2d_{\boldsymbol{X}}-k}(\boldsymbol{X};\mathbb{Q})}$$

3.1.10 A propos du $IH^0(\boldsymbol{X};\mathscr{A})$. Soit $\boldsymbol{X}$ est une variété algébrique complexe. Étant donnée $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$, notons $\boldsymbol{S}$ la réunion des strates de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$ de $\mathfrak{X}$. On vérifie aisément, par induction sur le nombre de strates par exemple, que

$$H^0\big(\boldsymbol{X};\underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})\big) = \mathbb{R}^0\Gamma(\boldsymbol{X};\imath^{\mathfrak{X}}_{!*}\mathscr{L}) = \Gamma(\boldsymbol{X};\imath_*\mathscr{L}) = \Gamma(\boldsymbol{S};\mathscr{L})$$

pour tout système local $\mathscr{L} \in \mathrm{Loc}(\boldsymbol{S})$. En particulier, si r désigne le nombre des composantes irréductibles de $\boldsymbol{X}$ de dimension égale à $d_{\boldsymbol{X}}$, on a un isomorphisme

$$\boxed{IH^0(\boldsymbol{X};\underline{\mathscr{A}}_{\boldsymbol{S}}) \equiv \mathscr{A}^r}$$

pour tout anneau $\mathscr{A}$.

3.2 Homologie d'intersection du parapluie de Whitney

Le parapluie de Whitney est l'hypersurface $\boldsymbol{X}$ de $\mathbb{C}^3$ d'équation $zy^2 = x^2$ (*cf.* p. 29). On vérifie aisément que l'application $\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, définie par $\pi(u,y) = (uy, y, u^2)$, se surjecte sur $\boldsymbol{X}$ et que pour tout $\boldsymbol{x} = (x,y,z) \in \boldsymbol{X}$ la fibre $\pi^{-1}(\boldsymbol{x})$ est réduite à un point sauf si $y = 0$ et $x \neq 0$ auquel cas elle possède deux points. L'application $\pi : \mathbb{C}^2 \twoheadrightarrow \boldsymbol{X}$ est donc une désingularisation propre et finie de $\boldsymbol{X}$; en particulier $\pi_* = \pi_!$ est un foncteur exact et

$$\pi_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2]) \equiv \mathbb{R}\pi_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2]) \quad \text{et} \quad \pi_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2])|_{\boldsymbol{X}\setminus\Sigma(\boldsymbol{X})} \equiv \underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{X}\setminus\Sigma(\boldsymbol{X})}[2]\,.$$

D'autre part, le complexe $I\!R\pi_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2])$ est autodual dans $D^b(\boldsymbol{X})$ puisque :

$$\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}} I\!R\pi_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2]) \equiv I\!R\pi_! I\!D_{\mathbb{C}^2}(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2]) \equiv I\!R\pi_!(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2]) = I\!R\pi_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2])\,.$$

et comme il est par ailleurs évident que $\mathscr{H}^m\pi_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}[2]) = 0$, pour tout $m > 0$, on a (3.1.2)

$$\boxed{\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{X};\mathbb{Q}) \equiv \pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2}}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} IH^\bullet(\boldsymbol{X};\mathbb{Q}) = H^\bullet(\mathbb{C}^2;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[0] \\ IH^\bullet_{\rm c}(\boldsymbol{X};\mathbb{Q}) = H^\bullet_{\rm c}(\mathbb{C}^2;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[-4] \end{cases}$$

3.2.1 Il faut se méfier de cet exemple qui est trompeur dans le fait que nous avons

$$\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{X};\mathbb{Q}) = \pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}^2} = \imath_*\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{X}\setminus\Sigma(\boldsymbol{X})} = \imath_{!*}^{\mathfrak{X}_\Sigma}\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{X}\setminus\Sigma(\boldsymbol{X})}$$

alors que $\mathfrak{X}_\Sigma$ ne vérifie pas les conditions de Whitney. En règle générale, $\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{X};\mathbb{Q})$ doit être défini par des stratifications dans $\mathrm{Str}^{\rm Wh}_{\rm alg}(\boldsymbol{X})$.

§4. Faisceaux pervers sur une variété algébrique complexe

4.1 Complexes de Deligne-Goresky-MacPherson

4.1.1 Images directes des complexes d'intersection. Dans 3.1.5 nous avons défini le complexe $\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{Z};\mathscr{L})$ pour tout fermé de Zariski $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}$ et tout système local $\mathscr{L}$ sur un ouvert non singulier de $\boldsymbol{Z}$. Notons $\imath_{\boldsymbol{Z}} : \boldsymbol{Z} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ l'inclusion. Comme $\imath_{\boldsymbol{Z}}$ est un plongement fermé le foncteur image directe commute à la dualité (1.6.6) et le complexe $\imath_{\boldsymbol{Z}*}\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{Z};\mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Z}}] \in D_{\rm c}(\boldsymbol{X})$ vérifie des conditions identiques à celles qui caractérisent les objets de $\mathfrak{IC}(\boldsymbol{X})$ (*cf.* 3.1.2) à l'exception des strates de dimension supérieure ou égale à $d_{\boldsymbol{Z}}$. Le tableau suivant illustre les contributions des faisceaux dérivés de $\imath_{\boldsymbol{Z}*}\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{Z};\mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Z}}]$ sur les strates d'un raffinement $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}^{\rm Wh}_{\rm alg}(\boldsymbol{X})$ d'une stratification $\mathfrak{Z} \in \mathrm{Str}^{\rm Wh}_{\rm alg}(\boldsymbol{Z})$ telle que $\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{Z};\mathscr{L}) = \underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{Z}}(\boldsymbol{Z};\mathscr{L})$.

$\imath_{\boldsymbol{Z}*}\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{Z};\mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Z}}]$	$-d_X$	$-d_X+1$	$-d_Z$	$-d_Z+1$	$-d_Z+2$	$\cdots$
$\mathscr{H}^*\mathscr{F}^\bullet\vert_{\boldsymbol{S}_0}$	0	0	0	0	0	0
$\mathscr{H}^*\mathscr{F}^\bullet\vert_{\boldsymbol{S}_1}$	0	0	0	0	0	0
$\mathscr{H}^*\mathscr{F}^\bullet\vert_{\boldsymbol{S}_{d_X-d_Z}}$	0	0	●	0	0	0
$\mathscr{H}^*\mathscr{F}^\bullet\vert_{\boldsymbol{S}_{d_X-d_Z+1}}$	0	0	●	0	0	0
$\mathscr{H}^*\mathscr{F}^\bullet\vert_{\boldsymbol{S}_{d_X-d_Z+2}}$	0	0	▬	▬	0	0
$\mathscr{H}^*\mathscr{F}\ \vert_{\boldsymbol{S}_{d_X-d_Z+3}}$	0	0	▬	▬	▬	0

($\mathscr{F}^\bullet$ désigne à la fois $\imath_{\boldsymbol{Z}*}\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{Z};\mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Z}}]$ et son dual dans $D_{\rm c}(\boldsymbol{X})$.)

On peut dire de manière heuristique que l'image directe décalée d'un complexe d'intersection d'un fermé de Zariski $\boldsymbol{Z}$ de $\boldsymbol{X}$ comble le zéro correspondant à la dimension de $\boldsymbol{Z}$ de la diagonale du tableau .

4.1.2 Complexes de Deligne-Goresky-MacPherson. Un complexe $\mathscr{F}^\bullet \in D_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ est dit «*de Deligne-Goresky-MacPherson de* $\boldsymbol{X}$ *relatif à* $\mathfrak{X}$», et l'on note $\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ s'il est quasi-isomorphe à un complexe de la forme $\imath_{\boldsymbol{Z}*}\underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Z};\mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Z}}]$, où $\boldsymbol{Z}$ est un fermé irréductible de $\boldsymbol{X}$ réunion de strates de $\mathfrak{X}$, et où $\mathscr{L}$ est un système local **irréductible** sur un ouvert non singulier de $\boldsymbol{Z}$. Lorsque $\mathfrak{X} \preccurlyeq \mathfrak{X}'$, tout objet de $\mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ appartient aussi à $\mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}'}(\boldsymbol{X})$ puisque la restriction d'un système local irréductible d'un ouvert non singulier d'une variété algébrique complexe à un sous-ouvert reste irréductible ! (1.11.9).

4.2 Faisceaux $\mathfrak{X}$-pervers([43])

4.2.1 Définition. *Soient* $\boldsymbol{X}$ *une variété algébrique complexe et* $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$. *Un complexe de faisceaux* $\mathscr{F}^\bullet$ *de* $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ *est dit «*$\mathfrak{X}$*-pervers» lorsque pour chaque strate* $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{X}$ *on a :*

(S) $\quad \mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet[d_{\boldsymbol{X}}]|_{\boldsymbol{S}} = 0$, *pour tout* $m > -d_{\boldsymbol{S}}$;

(S') $\mathscr{H}^m\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{F}^\bullet[d_{\boldsymbol{X}}])|_{\boldsymbol{S}} = 0$, *pour tout* $m > -d_{\boldsymbol{S}}$.

La sous-catégorie pleine de $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ *des faisceaux* $\mathfrak{X}$*-pervers est notée* $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$.

4.2.2 La définition précédente est à comparer avec la caractérisation des objets de $\mathcal{IC}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ du théorème 3.1.2 où les inégalités dans les conditions (S) (S') apparaissaient au sens large. En particulier, si $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}$ est un fermé réunion de strates de $\mathfrak{X}$, on a

$$\boxed{\imath_{\boldsymbol{Z}*}\mathcal{IC}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Z})[d_{\boldsymbol{Y}}] \subseteq \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})}$$

4.2.3 Supports et amplitude cohomologiques des faisceaux $\mathfrak{X}$-pervers. Le tableau ci-dessous illustre les conditions de support qui caractérisent les objets de $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$. Le fait qu'un faisceau $\mathfrak{X}$-pervers n'ait pas de cohomologie en degrés inférieurs à $-d_{\boldsymbol{X}}$ est prouvé dans 4.2.5.

$\mathscr{F}^\bullet \in \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$	$-d_{\boldsymbol{X}}-1$	$-d_{\boldsymbol{X}}$	$-d_{\boldsymbol{X}}+1$	$-d_{\boldsymbol{X}}+2$	$-d_{\boldsymbol{X}}+3$	$-d_{\boldsymbol{X}}+4$	$\cdots$
$\mathscr{H}^*\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{F}^\bullet)\vert_{\boldsymbol{S}_0}$ et $\mathscr{H}^*\mathscr{F}^\bullet\vert_{\boldsymbol{S}_0}$	0	●	0	0	0	0	0
$\mathscr{H}^*\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{F}^\bullet)\vert_{\boldsymbol{S}_1}$ et $\mathscr{H}^*\mathscr{F}^\bullet\vert_{\boldsymbol{S}_1}$	0	▬	0	0	0	0	0
$\mathscr{H}^*\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{F}^\bullet)\vert_{\boldsymbol{S}_2}$ et $\mathscr{H}^*\mathscr{F}^\bullet\vert_{\boldsymbol{S}_2}$	0	▬	▬	0	0	0	0
$\mathscr{H}^*\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}(\mathscr{F}^\bullet)\vert_{\boldsymbol{S}_3}$ et $\mathscr{H}^*\mathscr{F}^\bullet\vert_{\boldsymbol{S}_3}$	0	▬	▬	▬	0	0	0

4.2.4 Notations. Pour tout $\mathscr{F}^\bullet \in \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$, le support cohomologique $|\mathscr{F}^\bullet|$ (1.4.10) est une réunion de strates de $\mathfrak{X}$. On notera $d_{|\mathscr{F}^\bullet|}$ (resp. $\varepsilon_{|\mathscr{F}^\bullet|}$) la plus grande (resp. petite) des dimensions des strates de $\mathfrak{X}$ contenues dans $|\mathscr{F}^\bullet|$.

4.2.5 Proposition. *Pour tout* $\mathscr{F}^\bullet \in \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ *on a :*

$$\boxed{\big[\!\big[\mathscr{F}^\bullet\big]\!\big]_{\mathrm{coh}} \subseteq \big[\!\big[-d_{|\mathscr{F}^\bullet|}, -\varepsilon_{|\mathscr{F}^\bullet|}\big]\!\big]}$$

[43] *Cf.* [BBD] §2.1 p. 56.

Démonstration. Par induction sur $\#\mathfrak{X}$. Lorsque $\#\mathfrak{X}=1$, $\boldsymbol{X}$ est non singulier et $[\![\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-d_{\boldsymbol{X}}]\!]$ d'après 1.11.4, et il est par ailleurs clair que $|\mathscr{F}^\bullet| = \boldsymbol{X}$ si et seulement si $\mathscr{F}^\bullet \neq \mathbf{0}$ dans $D(\boldsymbol{X})$. Dans le cas général, on note $\boldsymbol{Y}$ l'adhérence de $|\mathscr{F}^\bullet|$ dans $\boldsymbol{X}$ qui est clairement une réunion de strates de $\mathfrak{X}$. Soit $\imath : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ l'inclusion ; le morphisme d'adjonction $\mathscr{F}^\bullet \to \imath_*\imath^{-1}\mathscr{F}^\bullet$ est un quasi-isomorphisme et donc $\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet \equiv \imath_*\mathbb{D}_{\boldsymbol{Y}}\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{Y}}$ (1.6.6). Par conséquent $\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{Y}} \in \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Y})$ et $\mathscr{F}^\bullet$ vérifie la proposition lorsque $\boldsymbol{Y} \neq \boldsymbol{X}$, par hypothèse inductive.

Supposons maintenant $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}$ et $\#\mathfrak{X} > 1$. On sait, par définition de faisceau pervers, que $[\![\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-\infty, \varepsilon_{\boldsymbol{X}}]\!]$; nous avons donc à vérifier uniquement que $\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet = 0$ pour $m < d_{\boldsymbol{X}}$. Soit $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{X}$ une strate de dimension minimum donc fermée dans $\boldsymbol{X}$ d'ouvert complémentaire U. Comme $\mathbb{D}_U\big(\mathscr{F}^\bullet|_U\big) = (\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)|_U$ (1.6.6) et que U est réunion de strates de $\mathfrak{X}$, on a $\mathscr{F}^\bullet|_U \in \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(U)$ et donc $[\![\mathscr{F}^\bullet|_U]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-d_{\boldsymbol{X}}, -d_{\boldsymbol{S}}]\!]$ ($\diamond$) par hypothèse inductive. Le triangle exact fondamental :

$$\imath_{\boldsymbol{S}*}\imath_{\boldsymbol{S}}^!\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}\imath_{U*}\mathscr{F}^\bullet|_U \xrightarrow[[+1]]{} ,$$

donne, par dualité :

$$\imath_{U!}\mathbb{D}_U\big(\mathscr{F}^\bullet|_U\big) \longrightarrow \mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \imath_{\boldsymbol{S}*}\mathbb{D}_{\boldsymbol{S}}\imath_{\boldsymbol{S}}^!\mathscr{F}^\bullet \xrightarrow[[+1]]{}$$

et $\big[\!\big[\imath_{U!}\mathbb{D}_U\big(\mathscr{F}^\bullet|_U\big)\big]\!\big]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-d_{\boldsymbol{X}}, -d_{\boldsymbol{S}}]\!]$ par exactitude de $\imath_{U!}$. On en déduit une surjection

$$\mathscr{H}^m\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet \twoheadrightarrow \imath_{\boldsymbol{S}*}\mathscr{H}^m\mathbb{D}_{\boldsymbol{S}}\imath_{\boldsymbol{S}}^!\mathscr{F}^\bullet, \text{ pour tout } m \geqslant -d_{\boldsymbol{S}},$$

et $[\![\mathbb{D}_{\boldsymbol{S}}\imath_{\boldsymbol{S}}^!\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-\infty, -d_{\boldsymbol{S}}]\!]$, puisque $\mathscr{F}^\bullet$ vérifie la condition de cosupport. Par conséquent $[\![\imath_{\boldsymbol{S}}^!\mathscr{F}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-d_{\boldsymbol{S}}, \infty[\![$ (1.11.4). Or, le morphisme naturel $\mathscr{H}^m\imath_{\boldsymbol{S}}^!\tau_{<-d_{\boldsymbol{X}}}\mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{H}^m\imath_{\boldsymbol{S}}^!\mathscr{F}^\bullet$ est un isomorphisme pour tout $m < -d_{\boldsymbol{X}}$ puisque $\imath_{\boldsymbol{S}}^! = \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}$ et que $\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{S}}$ est exact à gauche, de sorte que $\mathscr{H}^m\imath_{\boldsymbol{S}}^!\tau_{<-d_{\boldsymbol{X}}}\mathscr{F}^\bullet = 0$, pour $m < -d_{\boldsymbol{X}}$. D'autre part, le morphisme canonique $\imath_{\boldsymbol{S}}^!\tau_{<-d_{\boldsymbol{X}}}\mathscr{F}^\bullet \to \imath_{\boldsymbol{S}}^{-1}\tau_{<-d_{\boldsymbol{X}}}\mathscr{F}^\bullet$ est un isomorphisme puisque $|\tau_{<-d_{\boldsymbol{X}}}\mathscr{F}^\bullet| \subseteq \boldsymbol{S}$, d'après ($\diamond$). Par conséquent, $\mathscr{H}^m\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{S}} = \mathscr{H}^m\imath_{\boldsymbol{S}}^!\tau_{<-d_{\boldsymbol{X}}}\mathscr{F}^\bullet = 0$, pour tout $m < -d_{\boldsymbol{X}}$. ∎

4.2.6 Remarque. On prendra garde du fait que si le support d'un faisceau $\mathfrak{X}$-pervers est toujours une réunion de strates, il n'est pas nécessairement localement fermé (*cf.* 4.2.8).

4.2.7 Restrictions et prolongements de faisceaux $\mathfrak{X}$-pervers

Proposition. *Soit $\boldsymbol{Z}$ une partie localement fermée dans $\boldsymbol{X}$ réunion de strates de $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$.*

a) *Si $\boldsymbol{Z}$ est fermé $\imath_{\boldsymbol{Z}*}(\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Z})) \subseteq \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$.*

b) *Si $\boldsymbol{Z}$ est ouvert $\imath_{\boldsymbol{Z}}^{-1}(\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})) \subseteq \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Z})$.*

c) *Soit $\boldsymbol{Z} = \amalg_i S_i$ une réunion de strates S_i ouvertes dans $\boldsymbol{X}$. Alors, pour tout $\mathscr{F}^\bullet \in \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$, on a $\imath^{-1}\mathscr{F}^\bullet \equiv \bigoplus_i \mathscr{L}_i[d_{S_i}]$, où $\mathscr{L}_i$ est un système local sur S_i.*

d) *Lorsque $\mathscr{F}^\bullet \in \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ vérifie $|\mathscr{F}^\bullet| \subseteq \boldsymbol{Z}$, on a $\imath_{\boldsymbol{Z}}^{-1}\mathscr{F}^\bullet = \imath_{\boldsymbol{Z}}^!\mathscr{F}^\bullet \in \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Z})$.*

e) *Soit $\boldsymbol{Z}$ un ouvert* **affine** *et non singulier de $\boldsymbol{X}$. On a :*

$$\mathbb{R}\imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{Z}*}\big(\mathrm{Loc}(\boldsymbol{Z})[d_{\boldsymbol{Z}}]\big) \subseteq \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X}) \quad \textit{et} \quad \imath^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{Z}!}\big(\mathrm{Loc}(\boldsymbol{Z})[d_{\boldsymbol{Z}}]\big) \subseteq \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X}).$$

Démonstration

a,b) Résulte de la commutation du foncteur $\imath_{\boldsymbol{Z}*}$ (resp. $\imath_{\boldsymbol{Z}}^{-1}$) avec la dualité de Grothendieck-Verdier (1.6.6) pour $\boldsymbol{Z}$ fermée (resp. ouverte).

c) Conséquence de (b) et 4.2.5.

d) Lorsque $|\mathscr{F}^\bullet| \subseteq \boldsymbol{Z}$, on prouve facilement que le morphisme canonique $\imath_{\boldsymbol{T}}^! \mathscr{F}^\bullet \to \imath_{\boldsymbol{T}}^{-1} \mathscr{F}^\bullet$ est un isomorphisme pour tout $\boldsymbol{T} \supseteq \boldsymbol{Z}$ ouvert ou fermé dans $\boldsymbol{X}$, en donc pour $\boldsymbol{T}$ localement fermé. Le reste est immédiat.

e) Il suffit de prouver l'énoncé concernant $\mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{Z}*}$ puisque $\imath_{\boldsymbol{Z}!} = \mathbb{D}_{\boldsymbol{X}} \mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{Z}*} \mathbb{D}_{\boldsymbol{Z}}$ (1.6.6).

Soit $\mathscr{L} \in \mathrm{Loc}(\boldsymbol{Z})$ et notons $\mathscr{F}^\bullet := \mathbb{R}\imath_{\boldsymbol{Z}*}\mathscr{L}[d_{\boldsymbol{Z}}]$. La condition de cosupport sur $\mathscr{F}^\bullet$ est la condition de support pour le prolongement par zéro $\imath_{\boldsymbol{Z}!}\mathscr{L}[d_{\boldsymbol{Z}}]$ qui est immédiate. La condition de support sur $\mathscr{F}^\bullet$ dit que pour toute strate $S \in \mathfrak{X}$ on doit avoir $[\![\mathscr{F}^\bullet|_S]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-d_{\boldsymbol{X}}, -d_S]\!]$ ce qui est clair lorsque $S \cap \overline{\boldsymbol{Z}} = \varnothing$ car alors $\mathscr{F}^\bullet|_S = 0$, ou bien lorsque $S \subseteq \boldsymbol{Z}$ car alors $[\![\mathscr{F}^\bullet|_S]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-d_{\boldsymbol{X}}]\!]$.

Lorsque $S \subseteq \overline{\boldsymbol{Z}} \backslash \boldsymbol{Z}$ la structure de pseudovariété définie par $\mathfrak{X}$ donne pour chaque $t \in S$, un voisinage V_t ouvert dans $\overline{\boldsymbol{Z}}$ homéomorphe à $\mathbb{C}^{d_S} \times N(t)$ où $N(t)$ est un espace analytique complexe de dimension $d_{\boldsymbol{Z}} - d_S$ (*cf.* [BoAl] A'Campo). L'intersection $V_t \cap \boldsymbol{Z}$ est alors homéomorphe à $\mathbb{C}^{d_S} \times N'(t)$, où $N'(t)$ est une sous-variété analytique (non singulière) de $N(t)$ de dimension $d_{\boldsymbol{Z}} - d_S$ admettant des plongements fermés dans $\mathbb{C}^m$ (pour m assez grand) puisque $\boldsymbol{Z}$ est supposée affine. En appliquant le théorème de Lefschetz :

([44]) *Une variété analytique complexe de dimension k admettant un plongement fermé analytique dans un $\mathbb{C}^m$ possède le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension k.*

on conclut que $N'(t)$ est homotope à un espace de dimension cohomologique $d_{\boldsymbol{Z}} - d_S$. Alors :

$$H^m(V_t, \mathscr{F}^\bullet) \simeq H^m(V_t \cap \boldsymbol{Z}, \mathscr{L}[d_{\boldsymbol{Z}}]) \simeq H^m(\mathbb{C}^{d_S} \times N'(t), \mathscr{L}[d_{\boldsymbol{Z}}]) \simeq H^m\big(N'(t), \mathscr{L}[d_{\boldsymbol{Z}}]|_{N'(t)}\big) = 0$$

pour tout $m > -d_S$, autrement dit $[\![\mathscr{F}^\bullet|_S]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-d_{\boldsymbol{Z}}, -d_S]\!]$. ∎

4.2.8 Remarque. Pour $\boldsymbol{X} := \mathbb{C}^2$, soient $\boldsymbol{X}_1 = (y = 0)$ et $\boldsymbol{X}_0 = \{0\}$, puis $\boldsymbol{S}_0 := \boldsymbol{X} \backslash \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{S}_1 := \boldsymbol{X}_1 \backslash \boldsymbol{X}_0$ et $\boldsymbol{S}_2 := \boldsymbol{X}_0$. La stratification $\mathfrak{X} := \{\boldsymbol{S}_0, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2\}$ est de Whitney et les strates sont affines. Le complexe de faisceaux $\mathscr{F}^\bullet := \imath_{\boldsymbol{S}_0!}\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{S}_0}[2] \oplus \imath_{\boldsymbol{S}_2*}\mathbb{Q}$ est $\mathfrak{X}$-pervers puisque chaque facteur l'est d'après la proposition précédente. Le support $|\mathscr{F}^\bullet| = \boldsymbol{S}_0 \amalg \boldsymbol{S}_2$ n'est pas localement fermé.

4.2.9 Complexes d'intersection et faisceaux $\mathfrak{X}$-pervers. La proposition suivante sera utilisée pour prouver que les complexes de $\mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ sont des faisceaux pervers **simples**.

Proposition. *Soient $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ et $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}$ un fermé réunion de strates de $\mathfrak{X}$. Notons $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{Z},0}$ la réunion des strates de $\mathfrak{X}$ de dimension $d_{\boldsymbol{Z}}$ contenues $\boldsymbol{Z}$. Alors, pour tout $\mathscr{L} \in \mathrm{Loc}(\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{Z},0})$ et pour tout $\mathscr{F}^\bullet \in \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$, les morphismes canoniques :*

$$\begin{cases} \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{X})}\big(\mathscr{F}^\bullet, \imath_{\boldsymbol{Z}*}\underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Z}; \mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Z}}]\big) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{Z},0})}\big(\imath_{\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{Z},0}}^{-1}\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{L}[d_{\boldsymbol{Z}}]\big) \\ \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{X})}\big(\imath_{\boldsymbol{Z}*}\underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Z}; \mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Z}}], \mathscr{F}^\bullet\big) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{Z},0})}\big(\mathscr{L}[d_{\boldsymbol{Z}}], \imath_{\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{Z},0}}^!\mathscr{F}^\bullet\big) \end{cases} \qquad (*)$$

sont injectifs.

En particulier, si $\overline{|\mathscr{F}|} \cap \boldsymbol{Z}$ est de codimension positive dans $\boldsymbol{Z}$,

$$\mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{X})}\big(\mathscr{F}^\bullet, \imath_{\boldsymbol{Z}*}\underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Z}; \mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Z}}]\big) = \mathbf{0} = \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{X})}\big(\imath_{\boldsymbol{Z}*}\underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Z}; \mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Z}}], \mathscr{F}^\bullet\big)\,.$$

[44] *Cf.* [Mi] §7 théorème 7.2.

Démonstration. Il suffit de vérifier l'injectivité de la première ligne de $(*)$, l'autre s'en déduira alors par dualité. Notons pour simplifier $\mathscr{G}^\bullet := \imath_{Z*}\,\underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Z};\mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Z}}]$, puis $\boldsymbol{Z}' := \boldsymbol{Z}\backslash\boldsymbol{S}_{Z,0}$. Soit $\boldsymbol{F}$ une strate fermée de $\boldsymbol{Z}'$, donc de $\boldsymbol{X}$, notons $U := \boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{F}$, et considérons le triangle exact :

$$\imath_{\boldsymbol{F}*}\imath_{\boldsymbol{F}}^!\mathscr{G}^\bullet \longrightarrow \mathscr{G}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}\imath_{U*}\mathscr{G}^\bullet|_U \xrightarrow[[+1]]{} . \qquad (\diamond)$$

On a

$$\mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{X})}(\mathscr{F}^\bullet, \imath_{\boldsymbol{F}*}\imath_{\boldsymbol{F}}^!\mathscr{G}^\bullet) \equiv \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{F})}(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{F}}, \imath_{\boldsymbol{F}}^!\mathscr{G}^\bullet) \equiv \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{F})}(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{F}}, \mathbb{D}_{\boldsymbol{F}}\imath_{\boldsymbol{F}}^{-1}\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{G}^\bullet) . \qquad (\ddagger)$$

Or, d'après 3.1.4-(b)

$$\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{G}^\bullet \equiv \imath_{\boldsymbol{Z}*}\mathbb{D}_{\boldsymbol{Z}}(\underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Z};\mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Z}}]) \equiv \imath_{\boldsymbol{Z}*}\,\underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Z};\mathscr{L}^\vee)[d_{\boldsymbol{Z}}]$$

et alors $[\![\imath_{\boldsymbol{F}}^{-1}\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{G}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-\infty, -d_{\boldsymbol{F}}-1]\!]$. Donc $[\![\imath_{\boldsymbol{F}}^!\mathscr{G}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-d_{\boldsymbol{F}}+1, +\infty[\![$ (1.11.4), et comme d'autre part $[\![\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{F}}]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-\infty, -d_{\boldsymbol{F}}]\!]$, on conclut que $\mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{F})}(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{F}}, \imath_{\boldsymbol{F}}^!\mathscr{G}^\bullet) = \mathbf{0}$ dans $(\ddagger)$ et alors la suite exacte longue des $\mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{X})}(\mathscr{F}^\bullet, _)$ associée au triangle $(\diamond)$ s'annule en $\imath_{\boldsymbol{F}*}\imath_{\boldsymbol{F}}^!\mathscr{G}^\bullet$, d'où une injection :

$$\mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{X})}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \hookrightarrow \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{X})}(\mathscr{F}^\bullet, \mathbb{R}\imath_{U*}\mathscr{G}^\bullet|_U) \equiv \mathrm{Mor}_{D(U)}(\mathscr{F}^\bullet|_U, \mathscr{G}^\bullet|_U)$$

L'itération de cette idée donné l'injection :

$$\mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{X})}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \hookrightarrow \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{Z}')}(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{Z}'}, \mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{Z}'})$$

dont on déduit aussitôt la proposition. ∎

4.2.10 Théorème de structure de la catégorie des faisceaux $\mathfrak{X}$-pervers.

Théorème [BBD]. *Soit $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique complexe. Pour toute stratification $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}^W_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$, la sous-catégorie pleine $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X}) \subseteq D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ est abélienne admissible, stable par extensions et par dualité de Grothendieck-Verdier dans $D^b(\boldsymbol{X})$.*

Rappelons la terminologie utilisée dans cet énoncé :

- **Stable par extensions dans $\boldsymbol{D(X)}$.** Ceci signifie que pour tout triangle exact de $D(\boldsymbol{X})$: $\mathscr{E}^\bullet \to \mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{G}^\bullet \to$ avec $\mathscr{E}^\bullet$ et $\mathscr{G}^\bullet$ dans $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$, le complexe $\mathscr{F}^\bullet$ appartient aussi à $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$.
- **Sous-catégorie abélienne admissible de $\boldsymbol{D(X)}$.**[45] Ceci signifie que $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ est abélienne et que une suite $0 \to \mathscr{E}^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F}^\bullet \xrightarrow{\beta} \mathscr{G}^\bullet \to 0$ avec $\beta\circ\alpha = 0$, est exacte dans $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ si et seulement si, il existe $\gamma \in \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{X})}(\mathscr{G}^\bullet, \mathscr{E}^\bullet[1])$ telle que

  $$\mathscr{E}^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F}^\bullet \xrightarrow{\beta} \mathscr{G}^\bullet \xrightarrow[[+1]]{\gamma}$$

  est un triangle exact de $D(\boldsymbol{X})$. Autrement dit, les suites exactes courtes de $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ proviennent des triangles exacts de $D(\boldsymbol{X})$ à sommets dans $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ en effaçant le morphisme de degré $+1$.

Démonstration. Nous allons nous limiter à rappeler les étapes de la démonstration.

1) LES t-STRUCTURES. On appelle ainsi ([46]) la donnée d'une catégorie triangulée $\mathfrak{D}$ munie de deux sous-catégories strictement pleines([47]) $\mathfrak{D}^{\leqslant 0}$ et $\mathfrak{D}^{\geqslant 0}$, telles que, posant $\mathfrak{D}^{\leqslant n} := \mathfrak{D}^{\leqslant 0}[-n]$ et

[45] [BBD] §1.2.5 p. 28.

[46] [BBD] §1.3 p. 29.

[47] Une sous-catégorie $\mathfrak{C}'$ d'une catégorie $\mathfrak{C}$ est dite « *strictement pleine* » lorsqu'elle est pleine et que tout objet de $\mathfrak{C}$ isomorphe à un objet de $\mathfrak{C}'$ est un objet de $\mathfrak{C}'$.

$\mathcal{D}^{\geqslant n} := \mathcal{D}^{\geqslant 0}[-n]$, on ait :

$$\begin{cases} \text{a) } \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{\leqslant 0}, \mathcal{D}^{\geqslant 1}) = 0. \\ \text{b) } \mathcal{D}^{\leqslant 0} \subseteq \mathcal{D}^{\leqslant 1} \text{ et } \mathcal{D}^{\geqslant 0} \supseteq \mathcal{D}^{\geqslant 1}. \\ \text{c) Pour tout } X \in \mathcal{D} \text{ il existe un triangle exact } (A, X, B) \\ \quad \text{avec } A \in \mathcal{D}^{\leqslant 0} \text{ et } B \in \mathcal{D}^{\geqslant 1}. \end{cases}$$

On note $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}, \mathcal{D}^{\geqslant 0})$ la t-structure. On appelle « *cœur de la t-structure* » la sous-catégorie pleine $\mathcal{C} = \mathcal{D}^{\leqslant 0} \cap \mathcal{D}^{\geqslant 0}$.

Théorème (loc.cit. 1.3.6 p. 31). Le cœur $\mathcal{C}$ d'une t-structure $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}, \mathcal{D}^{\geqslant 0})$ est une sous-catégorie abélienne admissible stable par extensions dans $\mathcal{D}$.

2) RECOLLEMENT DE t-STRUCTURES. Soit U un ouvert de $\boldsymbol{X}$ réunion de strates de $\mathfrak{X}$ et notons F le fermé complémentaire. Soient $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X},U}, \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X},U})$ et $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X},F}, \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X},F})$ des t-structures sur $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(U)$ et $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(F)$ respectivement. Posons :

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{X}} := \left\{ \mathscr{F}^\bullet \in D(\boldsymbol{X}) \;\middle|\; \imath_U^{-1}\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{\leqslant 0}_U \quad \text{et} \quad \imath_F^{-1}\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{\leqslant 0}_F \right\} \\ \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{X}} := \left\{ \mathscr{F}^\bullet \in D(\boldsymbol{X}) \;\middle|\; \imath_U^{!}\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{\geqslant 0}_U \quad \text{et} \quad \imath_F^{!}\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{\geqslant 0}_F \right\} \end{cases}$$

Le couple $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{X}}, \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{X}})$ est appelé « *le recollement de* $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X},U}, \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X},U})$ *et* $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X},F}, \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X},F})$ ».

Théorème (loc.cit. 1.4.10 p. 48). Avec les données ci-dessus, le recollement $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{X}}, \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{X}})$ est une t-structure sur $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$.

3) PREUVE DU THÉORÈME. Pour toute partie $\boldsymbol{S}$ localement fermée dans $\boldsymbol{X}$ réunion de strates de $\mathfrak{X}$, on pose :

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{S}} := \left\{ \mathscr{F}^\bullet \in D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{S}) \;\middle|\; \mathscr{H}^m\mathscr{F}|_T = 0\,, \text{ pour tout } m > -d_T \text{ et tout } T \in \mathfrak{X}|_{\boldsymbol{S}} \right\} \\ \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{S}} := \left\{ \mathscr{F}^\bullet \in D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{S}) \;\middle|\; \mathscr{H}^m(\mathbb{D}_{\boldsymbol{S}}\mathscr{F})|_T = 0\,, \text{ pour tout } m > -d_T \text{ et tout } T \in \mathfrak{X}|_{\boldsymbol{S}} \right\} \end{cases}$$

On a donc $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{S}) = \mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{S}} \cap \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{S}} =: \mathcal{C}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{S}}$.

Théorème (loc.cit. 2.1.3 p. 57). Le couple $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{S}}, \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{S}})$ est une t-structure sur $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{S})$.

Démonstration. Par récurrence sur le nombre de strates de $\mathfrak{X}|_{\boldsymbol{S}}$. Lorsque $\#\mathfrak{X}|_{\boldsymbol{S}} = 1$, la catégorie $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{S})$ est la catégorie des complexes de $\Pi_1(\boldsymbol{S})$-$\mathbb{Q}$-modules cohomologiquement bornés et à cohomologie de dimension finie. La sous-catégorie $\mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{S}}$ (resp. $\mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{S}}$) est celle des complexes $\mathscr{M}^\bullet$ vérifiant $[\![\mathscr{M}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-\infty, -d_{\boldsymbol{S}}]\!]$ (resp. $[\![\mathscr{M}^\bullet]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-d_{\boldsymbol{S}}, \infty[\![$). La vérification des axiomes d'une t-structure de (1) est élémentaire.([48])

Dans le cas général $\#\mathfrak{X}|_{\boldsymbol{S}} > 1$, on choisit une strate fermée F d'ouvert complémentaire U. Les couples $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X},U}, \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X},U})$ et $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X},F}, \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X},F})$ sont alors des t-structures sur $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(U)$ et $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(F)$ respectivement, par hypothèse inductive. On a d'autre part les équivalences :

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X}) &\iff \imath_U^{-1}\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X}\text{-c}}(U) \quad \text{et} \quad \imath_F^{-1}\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X}\text{-c}}(F) \\ \mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X}) &\iff \imath_U^{!}\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X}\text{-c}}(U) \quad \text{et} \quad \imath_F^{!}\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X}\text{-c}}(F) \end{aligned}$$

[48] Le cœur de cette t-structure est la sous-catégorie des complexes concentrés en degré $-d_{\boldsymbol{S}}$. Le foncteur $H^{-d_{\boldsymbol{S}}} : \mathcal{C}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{S}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}}(\Pi(\boldsymbol{S}))$ est une équivalence de catégories.

où la première ligne est évidente et la seconde résulte des égalités :

$$\begin{cases} (\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)|_T = (\imath_U^{-1}\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)|_T = (\mathbb{D}_U\imath_U^!\mathscr{F}^\bullet)|_T\,, & \text{si } T \subseteq U, \\ (\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)|_T = (\imath_F^{-1}\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)|_T = (\mathbb{D}_F\imath_F^!\mathscr{F}^\bullet)|_T\,, & \text{si } T \subseteq F. \end{cases}$$

Il s'ensuit que le couple $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{S}}, \mathcal{D}^{\geqslant 0}_{\mathfrak{X},\boldsymbol{S}})$ est une t-structure d'après le théorème de (2).

En particulier, si $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{X}$ la catégorie $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ est une sous-catégorie abélienne admissible stable par extensions dans $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$ d'après le théorème de (1). ∎

4.2.11 Simplicité des complexes de $\mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ dans $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$

Proposition. *Soient $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique complexe et $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}^W_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$.*

a) *Pour toute suite exacte de $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$: $0 \to \mathscr{E}^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F}^\bullet \xrightarrow{\beta} \mathscr{G}^\bullet \to 0$, on a $\overline{|\mathscr{F}^\bullet|} = \overline{|\mathscr{E}^\bullet|} \cup \overline{|\mathscr{G}^\bullet|}$.*

b) *Un complexe de $\mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ est un objet simple de $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$.*

Démonstration

a) Par admissibilité de la catégorie $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$, il existe $\gamma \in \mathrm{Mor}_{D(\boldsymbol{X})}(\mathscr{G}^\bullet, \mathscr{E}^\bullet[1])$ tel que

$$\mathscr{E}^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F}^\bullet \xrightarrow{\beta} \mathscr{G}^\bullet \xrightarrow[[+1]]{\gamma} \qquad (\ddagger)$$

est un triangle exact. Notons U l'ouvert complémentaire de $|\mathscr{F}^\bullet|$. Par restriction à U le triangle $(\ddagger)$ donne un isomorphisme $\gamma|_U : \mathscr{G}^\bullet|_U \simeq \mathscr{F}^\bullet[1]|_U$ dans $D(U)$ et $\mathscr{E}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet \in \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(U)$ (4.2.7). Or, $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(U)$ est le cœur d'une t-structure et donc $\gamma = 0$ par l'axiome (a) des t-structures (*cf.* dem. p. 45). Par conséquent $\mathscr{E}^\bullet|_U = \mathscr{G}^\bullet|_U = 0$ et donc $\overline{|\mathscr{F}^\bullet|} \supseteq |\mathscr{E}^\bullet| \cup |\mathscr{G}^\bullet|$. La même idée appliquée à l'ouvert complémentaire de $\overline{|\mathscr{E}^\bullet|}$ donne l'inclusion réciproque.

b) Soit $\mathscr{F}^\bullet \in \mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$. D'après (a) les complexes d'une suite exacte de faisceaux pervers

$$0 \to \mathscr{E}^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F}^\bullet \xrightarrow{\beta} \mathscr{G}^\bullet \to 0$$

sont à cohomologie à support dans $\boldsymbol{Z} := \overline{|\mathscr{F}^\bullet|}$, et la suite $0 \to \mathscr{E}^\bullet|_{\boldsymbol{Z}} \xrightarrow{\alpha|_{\boldsymbol{Z}}} \mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{Z}} \xrightarrow{\beta|_{\boldsymbol{Z}}} \mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{Z}} \to 0$ $(*)$ est une suite exacte de $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Z})$ par admissibilité et d'après 4.2.7-(d). D'autre part, on a $\mathscr{F}^\bullet = \imath_{\boldsymbol{Z}*}\,\underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Z}; \mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Z}}]$ et $(*)$ s'écrit aussi :

$$0 \to \mathscr{E}^\bullet|_{\boldsymbol{Z}} \xrightarrow{\alpha|_{\boldsymbol{Z}}} \underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Z}; \mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Z}}] \xrightarrow{\beta|_{\boldsymbol{Z}}} \mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{Z}} \to 0$$

Notons $\boldsymbol{S}$ la strate de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$. Comme $\boldsymbol{S}$ est ouverte dans $\boldsymbol{Z}$ la restriction à $\boldsymbol{S}$ donne une suite exacte de systèmes locaux :

$$0 \to \mathscr{E}^\bullet|_{\boldsymbol{S}} \xrightarrow{\alpha|_{\boldsymbol{S}}} \mathscr{L}[d_{\boldsymbol{Z}}] \xrightarrow{\beta|_{\boldsymbol{S}}} \mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{S}} \to 0$$

et comme $\mathscr{L}$ est simple, ou bien $\alpha|_{\boldsymbol{S}} = 0$ ou bien $\beta|_{\boldsymbol{S}} = 0$. La proposition 4.2.9 affirme alors que $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ et donc β ou α est un isomorphisme puisque $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ est une catégorie abélienne. ∎

4.3 Faisceaux pervers

Soient $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique complexe et $\mathfrak{X} \preccurlyeq \mathfrak{X}' \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$. Il est immédiat d'après la définition de faisceau pervers que tout objet de $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ appartient à $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}'}(\boldsymbol{X})$. L'inclusion

de catégories $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathscr{P}_{\mathfrak{X}'}(\boldsymbol{X})$ est un foncteur pleinement fidèle qui "prolonge" les inclusions $\mathcal{IC}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{IC}_{\mathfrak{X}'}(\boldsymbol{X})$ et $\mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}'}(\boldsymbol{X})$ (*cf.* 3.1.4-(a) et 4.1.2).

4.3.1. Définitions. Soit $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique complexe.

- On appelle « *catégorie des faisceaux pervers sur* $\boldsymbol{X}$ » la sous-catégorie pleine de $D_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ définie par :
$$\boxed{\mathscr{P}(\boldsymbol{X}) := \varinjlim_{\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})} \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})}$$
- On appelle « *complexe de Deligne-Goresky-MacPherson de* $\boldsymbol{X}$ » tout objet de
$$\mathcal{DGM}(\boldsymbol{X}) := \varinjlim_{\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})} \mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})\,.$$

La proposition suivante, à rapprocher de 3.1.8, donne des caractérisations des faisceaux pervers indépendantes des stratifications ; sa démonstration est laissée en exercice.

4.3.1 Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique complexe. Un complexe $\mathscr{F}^\bullet \in D_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ est pervers si et seulement si il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes.*

a) *Dans tout fermé de Zariski irréductible $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}$, il existe une partie U ouverte et dense dans $\boldsymbol{Z}$, telle que :*
$$\mathscr{H}^m \mathscr{F}|_U = \mathscr{H}^m \mathbb{D}_{\boldsymbol{X}} \mathscr{F}^\bullet|_U = 0\,, \text{ pour tout } m > -d_{\boldsymbol{Z}}.$$

b) *Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\dim_{\mathbb{C}} \left(\overline{|\mathscr{H}^{-m}\mathscr{F}^\bullet|}\right) \leqslant m$ et $\dim_{\mathbb{C}} \left(\overline{|\mathscr{H}^{-m}\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet|}\right) \leqslant m$.*

4.3.2 Théorème de structure de la catégorie des faisceaux pervers

Théorème [BBD]([49])**.** *Soit $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique complexe.*

a) *La catégorie $\mathscr{P}(\boldsymbol{X})$ est une sous-catégorie pleine de $D_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ abélienne admissible, nœthérienne, artinienne, stable par extensions et par dualité de Grothendieck-Verdier dans $D^b(\boldsymbol{X})$.*

b) *Pour tout fermé irréductible $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}$ et tout système local irréductible $\mathscr{L}$ sur un ouvert non singulier dense dans $\boldsymbol{Z}$, le complexe $\imath_{\boldsymbol{Z}*}\, \underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{Z}; \mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Z}}]$ est un objet irréductible dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{X})$ et tout objet irréductible de $\mathscr{P}(\boldsymbol{X})$ est de cette forme. Autrement dit,* $\mathrm{Simples}(\mathscr{P}(\boldsymbol{X})) = \mathcal{DGM}(\boldsymbol{X})$.

c) *Tout objet de $\mathscr{P}(\boldsymbol{X})$ est extension finie successive d'objets de $\mathcal{DGM}(\boldsymbol{X})$.*

Démonstration. Pour $\mathfrak{X} \preccurlyeq \mathfrak{X}' \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ le foncteur d'inclusion $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathscr{P}_{\mathfrak{X}'}(\boldsymbol{X})$ est un foncteur exact de catégories abéliennes. En effet, par l'admissibilité de $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ (4.2.10), toute suite exacte courte de $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ se complète en un triangle exact de $D(\boldsymbol{X})$ dont les objets appartiennent également à la sous-catégorie abélienne admissible $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}'}(\boldsymbol{X})$, la suite en question est donc exacte dans $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}'}(\boldsymbol{X})$. On conclut que $\mathscr{P}(\boldsymbol{X})$ est une sous-catégorie abélienne admissible de $D(\boldsymbol{X})$ puisque limite d'un système inductif filtrant supérieurement de foncteurs pleinement fidèles et exacts entre sous-catégories pleines abéliennes admissibles de $D(\boldsymbol{X})$.

Soient maintenant $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ et $\mathscr{F}^\bullet \in \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$ et notons $\boldsymbol{Y} := \overline{|\mathscr{F}^\bullet|}$ et $\mathscr{G}^\bullet := \mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{Y}}$. On a $\mathscr{G}^\bullet \in \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Y})$ d'après 4.2.7-(d). Soit $U \subseteq \boldsymbol{Y}$ ouvert et dense dans $\boldsymbol{Y}$, **affine** et contenu dans la réunion des strates de dimension $d_{\boldsymbol{Y}}$. Fixons un raffinement $\mathfrak{X}|_{\boldsymbol{Y}} \preccurlyeq \mathfrak{Y} \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{Y})$ tel que U est une réunion des strates de $\mathfrak{Y}$. Alors, dans le morphisme d'adjonction : $\mathscr{G}^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}\imath^{\boldsymbol{Y}}_{U*} \mathscr{G}^\bullet|_U$, les complexes

[49] [BBD]. §4.3.1 p. 112.

$\mathscr{G}^\bullet$ et $I\!R i_{U*}^{\boldsymbol{Y}} \mathscr{G}^\bullet|_U$ sont des objets de $\mathscr{P}_{\mathfrak{Y}}(\boldsymbol{Y})$ (4.2.7-(e)) et nous avons le diagramme ci-après, où $\boldsymbol{S}$ désigne la réunion des strates de $\mathfrak{Y}$ de dimension $d_{\boldsymbol{Y}}$, et β est la composée des morphismes

$$\underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{Y}}(\boldsymbol{Y}; \mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{S}}) \xrightarrow{(1)} I\!R i_{U*}^{\boldsymbol{Y}} \underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{Y}}(\boldsymbol{Y}; \mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{S}})|_U$$
$$I\!R i_{U*}^{\boldsymbol{Y}} \underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{Y}}(\boldsymbol{Y}; \mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{S}})|_U \xrightarrow[\equiv]{(2)} I\!R i_{U*}^{\boldsymbol{Y}} \mathscr{G}^\bullet|_U$$

(1) d'adjonction et (2) induit par l'isomorphisme canonique $\underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{Y}}(\boldsymbol{Y}; \mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{S}})|_U \equiv \mathscr{G}^\bullet|_U$ qui résulte du fait que U est non singulier (*cf.* 3.1.4-(a), 3.1.5).

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \\ & & \operatorname{coker}\beta & & \\ & & \uparrow & & \\ \ker\alpha & \hookrightarrow \mathscr{G}^\bullet & \xrightarrow{\alpha} & I\!R i_{U*}^{\boldsymbol{Y}} \mathscr{G}^\bullet|_U & \xrightarrow{\gamma} \operatorname{coker}\alpha \\ & & \beta\uparrow & & \\ & & \underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{Y}}(\boldsymbol{Y}; \mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{S}})[d_{\boldsymbol{Y}}] & & \\ & & \uparrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

Le morphisme β est un monomorphisme dans la catégorie abélienne $\mathscr{P}_{\mathfrak{Y}}(\boldsymbol{Y})$. En effet, par admissibilité, il suffit de prouver que son cône $\boldsymbol{C}(\beta)^\bullet$ est pervers (1.3.12). La condition de support sur $\boldsymbol{C}(\beta)^\bullet$ est immédiate et celle de cosupport résulte des conditions d'annulation cohomologique renforcées des complexes d'intersection.

On conclut que $\ker\alpha$, $\operatorname{coker}\alpha$ et $\operatorname{coker}\beta$ sont des faisceaux pervers de $\mathscr{P}_{\mathfrak{Y}}(\boldsymbol{Y})$ à support dans le fermé de codimension positive $\boldsymbol{Y}' := \boldsymbol{Y}\backslash U$ puisque les restrictions de α et β à U sont des isomorphismes. Ces remarques démontrent, en raisonnant par récurrence sur la dimension des supports des faisceaux pervers, que tout faisceau pervers de $\boldsymbol{X}$ admet une suite de décomposition finie à quotients dans $\mathcal{DGM}(\boldsymbol{X})$, en particulier un faisceau pervers simple appartient à $\mathcal{DGM}(\boldsymbol{X})$. Le reste des énoncés de ce théorème résulte alors aisément. ∎

4.3.3 Remarque importante. Dans la démonstration précédente, notons $\boldsymbol{S}_{\mathfrak{X}}$ la réunion des strates de $\mathfrak{X}|_{\boldsymbol{Y}}$ dimension $d_{\boldsymbol{Y}}$. On a les inclusions $\boldsymbol{S} \subseteq U \subseteq \boldsymbol{S}_{\mathfrak{X}}$ d'ouverts non singuliers de $\boldsymbol{Y}$, d'où un isomorphisme canonique $\underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{Y}}(\boldsymbol{Y}; \mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{S}}) \equiv \underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Y}; \mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{S}_{\mathfrak{X}}})$ (*cf.* 3.1.4-(a), 3.1.5). En particulier, lorsque $\mathscr{G}^\bullet$ est un faisceau pervers simple de $\mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Y})$, le morphisme α est injectif, la composée $q \circ \beta$ est nulle d'après 4.2.9 et donc β se relève en un morphisme $\beta' : \underline{IC}^\bullet_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Y}; \mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{S}_{\mathfrak{X}}}) \to \mathscr{G}^\bullet$ qui est nécessairement un isomorphisme. Par conséquent, $\mathscr{G}^\bullet$ est bien dans $\mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Y})$, pour la même stratification $\mathfrak{X}|_{\boldsymbol{Y}}$! A partir de là, il est aisé de prouver par induction sur la longueur des faisceaux pervers que les constituants irréductibles de $\mathscr{G}^\bullet \in \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{Y})$ sont tous dans $\mathcal{DGM}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$. Les analogues des assertions (b) et (c) de 4.3.2 sont donc également vrais dans le cadre du théorème 4.2.10 relatif à une stratification fixe.

4.4 Image directe des faisceaux pervers par un morphisme propre

4.4.1 Morphismes stratifiés.[50] Soit $(\boldsymbol{Y}, \mathfrak{Y})$ et $(\boldsymbol{X}, \mathfrak{X})$ deux pseudovariétés (1.7.1). Une application continue $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ est dite «*stratifiée relativement à* $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$» lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

a) Pour chaque strate $S_X \in \mathfrak{X}$, l'ensemble $f^{-1}(S_X)$ est une réunion de strates de $\mathfrak{Y}$.

b) Pour chaque $S_X \in \mathfrak{X}$ et tout $x \in S_X$, il existe un voisinage N_x de x dans S_X, une pseudovariété $(\boldsymbol{F}, \mathfrak{F})$ et un homéomorphisme $h : \boldsymbol{F} \times N_x \xrightarrow{\sim} f^{-1}N_x$, tels que :

i) $f \circ h : \boldsymbol{F} \times N_x \to N_x$ est la projection canonique sur la deuxième coordonnée ;

[50] [GoMc$_2$] §1.2, [BoAl] Borel §V.10.B p. 163.

ii) pour chaque strate $S_F \in \mathfrak{F}$, il existe $S_Y \in \mathfrak{Y}$ telle que $h(S_F \times N_x) = f^{-1}(N_x) \cap S_Y$.

La proposition suivante est conséquence du "premier lemme d'isotopie de Thom".([51])

4.4.2 Proposition. *Étant donnés deux variétés algébriques complexes $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$, des stratifications $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$, $\mathfrak{Y} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{Y})$, et un morphisme **algébrique et propre** $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$, il existe des stratifications $\mathfrak{Y}' \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{Y})$ et $\mathfrak{X}' \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ telles que :*

$$\begin{cases} 1)\ \mathfrak{X} \preccurlyeq \mathfrak{X}',\ \mathfrak{Y} \preccurlyeq \mathfrak{Y}' ; \\ 2)\ f \text{ est stratifiée relativement à } (\mathfrak{Y}', \mathfrak{X}'). \end{cases}$$

La conséquence la plus importante de cette proposition dans notre contexte, démontrée dans [BoAl] (Borel §V.10.17 p. 168), est la suivante.

4.4.3 Théorème. *Soit $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ un morphisme algébrique et propre entre deux variétés algébriques complexes. Soient $\mathfrak{Y} \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{Y})$ et $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ telles que f est stratifiée relativement à $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$. Alors*

$$f^{-1} D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X}) \subseteq D^b_{\mathfrak{Y}\text{-c}}(\boldsymbol{Y}), \qquad f^! D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X}) \subseteq D^b_{\mathfrak{Y}\text{-c}}(\boldsymbol{Y})$$
$$\mathbb{R}f_* D^b_{\mathfrak{Y}\text{-c}}(\boldsymbol{Y}) \subseteq D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X}), \qquad \mathbb{R}f_! D^b_{\mathfrak{Y}\text{-c}}(\boldsymbol{Y}) \subseteq D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}(\boldsymbol{X})$$

et (donc) de même en remplaçant $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}$ et $D^b_{\mathfrak{X}\text{-c}}$ par D_{c}.

4.4.4 Morphismes (semi-)petits.([52]) Soit $\pi : \boldsymbol{Y}^{\mathrm{an}} \to \boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$ une application continue entre deux variétés algébriques complexes. Soit $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ telle pour chaque $s \in \boldsymbol{S} \in \mathfrak{X}$, la dimension de la fibre $\pi^{-1}s$ ne dépende pas de $s \in \boldsymbol{S}$, on note alors $d_\pi(\boldsymbol{S}) := \dim(\pi^{-1}s)$ pour un $s \in \boldsymbol{S}$ quelconque.

Définition. Avec les données ci-dessus, on dit que l'application π est «*semi-petite*» lorsque pour toute $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{X}$ on a :

$$\boxed{2d_\pi(\boldsymbol{S}) \leqslant \dim \boldsymbol{X} - \dim \boldsymbol{S}} \qquad (\diamond)$$

On dit que π est «*petite*» lorsqu'elle est semi-petite et que l'égalité $(\diamond)$ se produit uniquement lorsque $\dim \boldsymbol{X} = \dim \boldsymbol{S}$.

4.4.5 Reprenons les données de 4.4.4. Lorsque l'application $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ est un morphisme algébrique et propre, il existe des stratifications $\mathfrak{Y} \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{Y})$ et $\mathfrak{X}' \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ telles que $\mathfrak{X} \preccurlyeq \mathfrak{X}'$ et telles que f est stratifiée relativement à $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}')$ (4.4.2). La condition $(\diamond)$ ci-dessus est alors *a fortiori* vérifiée par les strates $\boldsymbol{S}' \in \mathfrak{X}'$. Or, f est une fibration localement triviale au-dessus de $\boldsymbol{S}' \in \mathfrak{X}'$ et si f est semi-petite, c'est un revêtement fini sur chaque strate de $\mathfrak{X}'$ de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$; en particulier, lorsque f est en plus surjective on a $\dim \boldsymbol{Y} = \dim \boldsymbol{X}$. La proposition suivante est conséquence facile de ces remarques.

---

[51] Le lemme d'isotopie apparaît pour la première fois dans [Th] ; il est repris dans beaucoup d'autres articles généralement cités, p.ex. [Ma,Hd,GWPL]. Le livre de Dimca donne un aperçu rapide du lemme d'isotopie et une esquisse de démonstration pour la proposition 4.4.2 ([Di] §1.3 p. 14–16, prop. 3.6) sous une forme à peine plus faible ; sa démonstration prouve que pour toute stratification $\mathfrak{Y} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{Y})$ il existe un raffinement $\mathfrak{Y} \preccurlyeq \mathfrak{Y}' \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{Y})$ et une stratification $\mathfrak{X}' \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ tels que f est stratifiée relativement à $(\mathfrak{Y}', \mathfrak{X}')$. Dans 4.4.2 on se donne une stratification supplémentaire $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$, mais il est clair que pour toute stratification $\mathfrak{X}'' \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$, raffinement commun de $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'$, f est *a fortiori* stratifiée relativement à $(\mathfrak{Y}', \mathfrak{X}'')$.

[52] [GoMc$_2$] §6.2, [BoMc$_2$] §1.1 p. 30.

4.4.6 Proposition. *Un morphisme algébrique surjectif et propre entre deux variétés algébriques complexes $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ est semi-petit si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

a) $\dim \{x \in \boldsymbol{X} \mid \dim f^{-1}(x) \geqslant i\} \leqslant \dim \boldsymbol{X} - 2i$, *pour tout* $i \in \mathbb{N}$.

b) *Il existe une filtration par des fermés algébriques* $\boldsymbol{X} := \boldsymbol{F}_0 \supseteq \boldsymbol{F}_1 \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{F}_r = \varnothing$ *telle que pour tout* $i = 0, \ldots, r$ *et tout* $x \in \boldsymbol{F}_i \backslash \boldsymbol{F}_{i+1}$ *on a* $2 \dim f^{-1}(x) \leqslant \dim \boldsymbol{X} - \dim \boldsymbol{F}_i$.

Voici maintenant un complément au théorème 4.4.3.

4.4.7 Proposition. *Soit $\pi : \widetilde{\boldsymbol{X}} \to \boldsymbol{X}$ un morphisme algébrique surjectif et propre entre deux variétés algébriques complexes où $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ est non singulière. Alors,*

a) *si π est semi-petit : $\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}}[d_{\boldsymbol{X}}] \in \mathscr{P}(\boldsymbol{X})$,*

b) *si π est petit : $\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}} \equiv \underline{IC}^{\bullet}(\boldsymbol{X}; \pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}}|_U)$, pour tout ouvert non singulier $U \subseteq \boldsymbol{X}$ tel que π est un revêtement au-dessus de U.*

Démonstration. Il suffit de vérifier les conditions de support pour $\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{X}}[d_{\boldsymbol{X}}]$ dans la mesure où $\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}} \mathbb{R}\pi_* = \mathbb{R}\pi_* \mathbb{D}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}}$ puisque π est propre, et que $\mathbb{D}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}}(\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}}[d_{\boldsymbol{X}}]) \equiv \underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}}[d_{\boldsymbol{X}}]$ (1.11.6).

Soient $\widetilde{\mathfrak{X}} \in \mathrm{Str}^{\mathrm{Wh}}_{\mathrm{alg}}(\widetilde{\boldsymbol{X}})$ et $\mathfrak{X} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\boldsymbol{X})$ telles que π est stratifiée relativement à $(\widetilde{\mathfrak{X}}, \mathfrak{X})$ et telles que l'inégalité $(\diamond)$ de la définition de 4.4.4 soit vérifiée pour les strates de $\mathfrak{X}$. Comme π est propre, on a $\big(\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}}\big)_s \equiv \mathbb{R}\Gamma\big(\pi^{-1}s; \underline{\mathbb{Q}}_{\pi^{-1}s}\big)$ (prop. 1.5.3-(c)), pour $s \in \boldsymbol{S} \in \mathfrak{X}$, et donc

$$[\![(\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}})_s[d_{\boldsymbol{X}}]]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-d_{\boldsymbol{X}}, -d_{\boldsymbol{X}} + 2\dim \pi^{-1}s]\!] \subseteq [\![-d_{\boldsymbol{X}}, -d_{\boldsymbol{S}}]\!] \qquad (*)$$

puisque $\dim_{\mathbb{R}} \pi^{-1}s \leqslant (\dim \boldsymbol{X} - \dim \boldsymbol{S})$. On a donc $\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{X}}[d_{\boldsymbol{X}}] \in \mathscr{P}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X})$, d'où l'assertion (a).

Lorsque π est petite l'inclusion $(*)$ devient

$$[\![(\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}})_s[d_{\boldsymbol{X}}]]\!]_{\mathrm{coh}} \subseteq [\![-d_{\boldsymbol{X}}, -d_{\boldsymbol{S}} - 1]\!]$$

pour toute strate $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{X}$ de codimension positive. D'autre part, si $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{X}$ est de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$, le morphisme π est un revêtement fini au-dessus de $\boldsymbol{S}$ et $\pi_* : \mathrm{Faisc}(\pi^{-1}(\boldsymbol{S})) \rightsquigarrow \mathrm{Faisc}(\boldsymbol{S})$ est un foncteur exact. Dans ce cas $\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}}|_{\boldsymbol{S}} \equiv \pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}}|_{\boldsymbol{S}} \in \mathrm{Loc}(\boldsymbol{S})$ et alors

$$\mathbb{R}\pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}} \equiv \underline{IC}^{\bullet}_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{X}; \pi_* \underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{X}}|_{S_0}),$$

où S_0 est la réunion des strates de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$ dans $\mathfrak{X}$. L'assertion (b) en découle (3.1.5). ∎

4.4.8 La proposition précédente est également vraie si l'on remplace $\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{X}}}$ par un système local $\mathscr{L}$ défini sur l'espace $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ **tout entier**.

4.4.9 Exercice

Proposition. *Soit $\pi : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ un morphisme algébrique surjectif, propre et fini entre deux variétés algébriques complexes. Alors $\mathbb{R}\pi_* \mathscr{P}(\boldsymbol{Y}) \subseteq \mathscr{P}(\boldsymbol{X})$ et $\mathbb{R}\pi_* \mathcal{IC}(\boldsymbol{Y}) \subseteq \mathcal{IC}(\boldsymbol{X})$.*

4.4.10 Théorème de décomposition. Le théorème suivant, connu sous le nom de « *théorème de décomposition* » reprend l'assertion (a) de 4.4.7 dans la situation plus générale où le morphisme π est supposé uniquement propre. Il s'agit probablement du théorème le plus profond de la théorie

des faisceaux pervers à l'heure actuelle. Il est démontré dans [BBD] (§6.2.5 p. 163) par des techniques de cohomologie étale qui dépassent largement le cadre de ces notes ([53]) ; nous nous limitons à l'énoncer.

4.4.11 Théorème [BBD]. *Soit $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ un morphisme algébrique propre entre deux variétés algébriques complexes. Pour tout faisceau pervers simple $\imath_{\boldsymbol{Y}*}\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{Y};\mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Y}}] \in \mathscr{P}(\boldsymbol{Y})$ il existe une famille finie $\{\imath_{\boldsymbol{Z}_i}\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{Z}_i;\mathscr{L}_i)\}_{i=1,\dots,r}$ de faisceaux pervers simples de $\mathscr{P}(\boldsymbol{X})$ et des nombres entiers $c_1,\dots,c_r \in \mathbb{Z}$ tels que l'on a dans $D_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$:*

$$\boxed{\mathbb{R}f_*\imath_{\boldsymbol{Y}*}\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{Y};\mathscr{L})[d_{\boldsymbol{Y}}] \simeq \bigoplus_{i=1}^r \imath_{\boldsymbol{Z}_i*}\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{Z}_i;\mathscr{L}_i)[c_i]} \qquad (\star)$$

4.4.12 Remarque. Ce théorème renforce la proposition 4.4.7, en effet, comme $\mathbb{R}\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\boldsymbol{X}}}[d_{\boldsymbol{X}}]$ est pervers, chaque facteur $\imath_{\boldsymbol{Z}_i*}\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{Z}_i;\mathscr{L}_i)[c_i]$ dans $(\star)$ est nécéssairement pervers et $c_i = d_{\boldsymbol{Z}_i}$. Le faisceau pervers $\mathbb{R}\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\boldsymbol{X}}}[d_{\boldsymbol{X}}]$ est donc une **somme directe** d'objets de $\mathcal{DGM}(\boldsymbol{X})$. En dehors de ce cas, le théorème ne prévoit aucune valeur *a priori* pour les décalages $[c_i]$, en particulier l'image directe d'un faisceau pervers simple peut ne pas être un faisceau pervers.

§ 5. Correspondance de Springer

Dans cette dernière section nous introduisons les représentations du groupe de Weyl d'un groupe algébrique semisimple complexe connexe sur les variétés de Steinberg à l'aide du foncteur prolongement intermédiaire d'après une idée de Lusztig ([Lu] §3 p. 176). Nous explicitons également la démarche suivie par Borho-MacPherson dans [BoMc$_1$] pour démontrer, par les techniques de la théorie des faisceaux pervers, le théorème de Springer ([54]) connu sous le nom de « *correspondance de Springer* ».

5.1 Notations et données

- $\boldsymbol{G}$: groupe algébrique sur $\mathbb{C}$, semisimple et connexe ;
- $\boldsymbol{B}$: un sous-groupe de Borel de $\boldsymbol{G}$, de tore maximal $\boldsymbol{H}$ et radical unipotent $\boldsymbol{U}$.
- $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{h}, \mathfrak{n}$: algèbres de Lie de $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{U}$;
- $\boldsymbol{W} = N_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{H})/\boldsymbol{H}$: le groupe de Weyl correspondant aux choix précédents.
- $\widehat{\boldsymbol{W}}_k$: caractères irréductibles de $\boldsymbol{W}$ sur un corps k
- $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$: ouvert des éléments semisimples réguliers de $\mathfrak{g}$.
- $\boldsymbol{G}$ opère à gauche sur $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe, et de même pour $\boldsymbol{B}$ sur $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{n}$;
- $\mathscr{B} := \boldsymbol{G}/\boldsymbol{B}$: variété des sous-groupes de Borel de $\boldsymbol{G}$;
- $\widetilde{\mathfrak{g}} := \boldsymbol{G} \times_{\boldsymbol{B}} \mathfrak{b}$, $\widetilde{\mathscr{N}} := \boldsymbol{G} \times_{\boldsymbol{B}} \mathfrak{n}$: quotients de $\boldsymbol{G} \times \mathfrak{b}$ et de $\boldsymbol{G} \times \mathfrak{n}$ par l'action de $\boldsymbol{B}$ à droite : $(g, X) \cdot b := (gb, \operatorname{Ad} b^{-1}(x))$. Ces espaces sont munis de l'action naturelle de $\boldsymbol{G}$ à gauche, *i.e.* $g' \cdot \overline{(g,x)} := \overline{(g'g, x)}$.
- $p_1 : \widetilde{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow \mathscr{B}$, $p_1 : \widetilde{\mathscr{N}} \twoheadrightarrow \mathscr{B}$: projections canoniques $p_1\overline{(g,x)} = g \cdot \boldsymbol{B}$.
- $Z_{\boldsymbol{G}}(X)$: le centralisateur dans $\boldsymbol{G}$ de $X \in \mathfrak{g}$, *i.e.* $\{g \in \boldsymbol{G} \mid \operatorname{Ad} g(X) = X\}$.

[53] Saito démontre le théorème de décomposition dans [Sa] à l'aide de la notion de modules de Hodge polarisables dans le cas d'un morphisme propre entre variétés analytiques complexes irréductibles en supposant que l'espace de départ est l'image d'une variété de Kähler par un morphisme propre et surjectif.

[54] [Spr$_1$] §6 th. 6.10 p. 198 et [Spr$_2$] §1 th. 1.13 p. 283 et §3.11 p. 290.

- $Z^0_{\boldsymbol{G}}(X)$: la composante connexe de l'élément neutre de $Z_{\boldsymbol{G}}(X)$.
- $Z_{\mathfrak{g}}(X)$: le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de $X \in \mathfrak{g}$, *i.e.* $\{Y \in \mathfrak{g} \mid [X,Y]=0\}$.
- $\mathscr{N}$: cône des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$ muni de l'action de $\boldsymbol{G}$ à gauche : $g \cdot X := \operatorname{Ad} g(X)$; c'est un fermé de Zariski irréductible de $\mathfrak{g}$ de dimension $\dim \mathfrak{g} - \operatorname{rang} \mathfrak{g}$.
- $\operatorname{Irr}(\boldsymbol{X})$: l'ensemble des composantes irréductibles d'une variété algébrique $\boldsymbol{X}$.
- $\operatorname{irr}(\boldsymbol{X})$: cardinal de $\operatorname{Irr}(\boldsymbol{X})$.

5.2 Stratifications de $\mathscr{N}$ et de $\mathfrak{g}$

5.2.1 Stratification de $\mathscr{N}$. La décomposition de $\mathscr{N}$ est $\boldsymbol{G}$-orbites est une partition finie en parties localement fermées pour la topologie de Zariski de $\mathscr{N}$. On notera $\mathfrak{N} := \{\mathscr{O}_\xi\}_\xi$ l'ensemble des $\boldsymbol{G}$-orbites de $\mathscr{N}$, chaque orbite étant indexée par un de ses éléments arbitrairement choisi. L'orbite $\mathscr{O}_\xi$ est évidemment non singulière de dimension $\dim \boldsymbol{G} - \dim Z_{\boldsymbol{G}}(\xi)$ et l'adhérence $\overline{\mathscr{O}}_\xi$ est un fermé de Zariski irréductible de $\mathscr{N}$ ($\boldsymbol{G}$ est connexe !) et c'est une réunion d'orbites, on a donc $\mathfrak{N} \in \operatorname{Str}_{\text{alg}}(\mathscr{N})$. Nous donnons une explication heuristique du fait que $\mathfrak{N} \in \operatorname{Str}^{\text{Wh}}_{\text{alg}}(\mathscr{N})$. Soit $\mathfrak{N}' \in \operatorname{Str}^{\text{Wh}}_{\text{alg}}(\mathscr{N})$ un raffinement de $\mathfrak{N}$. Pour toute orbite $\mathscr{O}_\xi$ il existe une strate $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{N}'$ telle que $\boldsymbol{S} \subseteq \mathscr{O}_\xi$, $d_{\boldsymbol{S}} = \dim \mathscr{O}_\xi$ et telle que les conditions de Whitney pour le couple $(\mathscr{O}_\xi, \mathscr{N})$ sont vérifiées en chaque point de $\boldsymbol{S}$. Comme $\boldsymbol{G}$ opère algébriquement sur $\mathscr{N}$, le domaine de validité des ces conditions est $\boldsymbol{G}$-stable et contient donc $\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{S} = \mathscr{O}_\xi$.

5.2.2 Stratification de $\mathfrak{g}$. ([55])Dans ce cas, la décomposition de $\mathfrak{g}$ en $\boldsymbol{G}$-orbites ne convient pas puisque il y a une infinité d'orbites. Pour chaque $x \in \mathfrak{g}$ on sait que $\dim Z_{\mathfrak{g}}(x) \geqslant \operatorname{rang} \mathfrak{g}$. Nous notons alors $\boldsymbol{K}_m := \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim Z_{\mathfrak{g}}(x) \geqslant \operatorname{rang} \mathfrak{g} + m\}$ pour $m \in \mathbb{N}$. Les éléments de $\boldsymbol{K}_m$ sont les $x \in \mathfrak{g}$ tels que l'opérateur linéaire $\operatorname{ad} x$ est de rang majoré par $\dim \mathfrak{g} - \operatorname{rang} \mathfrak{g} - m$. On obtient ainsi une suite décroissante de fermés de Zariski :

$$\mathfrak{g} = \boldsymbol{K}_0 \supseteq \boldsymbol{K}_1 \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{K}_{\dim \mathfrak{g} - \operatorname{rang} \mathfrak{g}} = \{0\}\,.$$

Notons de même $\boldsymbol{L}_m := \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim(\ker(\operatorname{ad} x)^{\dim \mathfrak{g}}) \geqslant \operatorname{rang} \mathfrak{g} + m\}$. On a $\boldsymbol{K}_m \subseteq \boldsymbol{L}_m$ et $\boldsymbol{L}_m$ est un fermé de Zariski vérifiant $\operatorname{codim}_{\mathfrak{g}} \boldsymbol{L}_m \geqslant m$ (penser aux coefficients du polynôme caractéristique de $\operatorname{ad} x$). On a donc la filtration fermée :

$$\mathfrak{g} = \boldsymbol{L}_0 \supseteq \boldsymbol{L}_1 \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{L}_{\dim \mathfrak{g} - \operatorname{rang} \mathfrak{g}} = \mathscr{N}\,,$$

où

$$x \in \boldsymbol{L}_m \backslash \boldsymbol{L}_{m+1} \Longrightarrow \Big(\dim Z_{\mathfrak{g}}(x) - \operatorname{rang} \mathfrak{g} \underset{(\star)}{\leqslant} \dim \mathfrak{g} - \dim \boldsymbol{L}_m \Big)\,,$$

et l'inégalité $(\star)$ est une égalité si et seulement si

$$\dim \big(\ker \operatorname{ad}(x) \big) = \dim \big(\ker \operatorname{ad}(x)^{\dim \mathfrak{g}} \big)\,, \tag{$\diamond$}$$

auquel cas $Z_{\mathfrak{g}}(x) = Z_{\mathfrak{g}}(x_{\text{s}})$, où x_{s} désigne la partie semisimple de x. En effet, on a $Z_{\mathfrak{g}}(x) \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(x_{\text{s}})$ et $\ker \operatorname{ad} x_{\text{s}} \subseteq \ker(\operatorname{ad} x)^{\dim \mathfrak{g}}$ puisque $\operatorname{ad} x_{\text{s}}$ est facteur à droite de $(\operatorname{ad} x)^{\dim \mathfrak{g}}$, on conclut alors grâce à l'égalité $\ker(\operatorname{ad} x)^{\dim \mathfrak{g}} = \ker(\operatorname{ad} x)$ d'après $(\diamond)$. Il s'ensuit que $Z_{\mathfrak{g}}(x)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ réductive de dimension $\operatorname{rang} \mathfrak{g} + m$ et contient, par conséquent, des éléments nilpotents non

[55] Je remercie Olaf M. Schnürer de m'avoir indiqué la présence de quelques erreurs dans une version précédente de ces paragraphes. Il a également attiré mon attention sur le premiers paragraphes de §I.1 de [Sh] qui donnent une autre justification de ces stratifications.

centraux **lorsque** $m > 0$. Dans ce cas, soit η un tel élément nilpotent. On a alors $x + \varepsilon\eta \in \boldsymbol{L}_m$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et

$$Z_{\mathfrak{g}}(x + \varepsilon\eta) \subsetneqq Z_{\mathfrak{g}}(x)\,, \quad \forall \varepsilon \neq 0\,.$$

En effet, $Z_{\mathfrak{g}}(x+\varepsilon\eta) \subseteq Z_{\mathfrak{g}}((x+\varepsilon\eta)_{\mathrm{s}}) = Z_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{s}}) = Z_{\mathfrak{g}}(x)$ et l'inclusion est stricte puisque η n'est pas central dans $Z_{\mathfrak{g}}(x)$.

Ces remarques montrent que pour toute strate $\boldsymbol{S}$ de toute stratification algébrique de $\mathfrak{g}\backslash\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ subordonnée aux filtration $\boldsymbol{K}_*$ et $\boldsymbol{L}_*$, on aura

$$x \in \boldsymbol{S} \Longrightarrow \Big(\dim Z_{\mathfrak{g}}(x) - \operatorname{rang}\mathfrak{g} < \dim\mathfrak{g} - \dim \boldsymbol{S} \Big)\,.$$

Énonçons ceci sous forme de proposition pour future référence.

5.2.3 Proposition. *Il existe une stratification $\mathfrak{S} \in \mathrm{Str}_{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g})$ dont la strate ouverte est $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ et telle que pour toute strate $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{S}$ de codimension positive et tout $x \in \boldsymbol{S}$ on ait :*

$$\dim Z_{\mathfrak{g}}(x) - \operatorname{rang}\mathfrak{g} < \dim\mathfrak{g} - \dim \boldsymbol{S}\,.$$

5.3 Résolution de Springer du cône nilpotent

Soit $\imath_{\widetilde{\mathcal{N}}} : \boldsymbol{G} \times_{\boldsymbol{B}} \mathfrak{n} \hookrightarrow \boldsymbol{G} \times_{\boldsymbol{B}} \mathfrak{b}$ le morphisme de fibrés au-dessus de $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{B}$ associé à l'inclusion de $\boldsymbol{B}$-modules $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{b}$. Soit $\phi : \boldsymbol{G} \times_{\boldsymbol{B}} \mathfrak{b} \to \mathfrak{g}$ le morphisme $\phi(g, X) := \operatorname{Ad} g(X)$; la composée $\pi := \phi \circ \imath_{\widetilde{\mathcal{N}}}$ est donc à valeurs dans $\mathcal{N}$ et nous avons un diagramme cartésien de morphismes $\boldsymbol{G}$-équivariants :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{N}} := \boldsymbol{G} \times_{\boldsymbol{B}} \mathfrak{n} & \xhookrightarrow[\text{fermé}]{\imath_{\widetilde{\mathcal{N}}}} & \boldsymbol{G} \times_{\boldsymbol{B}} \mathfrak{b} =: \widetilde{\mathfrak{g}} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & \square & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi} \\ \mathcal{N} & \xhookrightarrow[\text{fermé}]{\imath_{\mathcal{N}}} & \mathfrak{g} \end{array} \qquad (\mathscr{D})$$

5.3.1 Notation et terminologie. Pour chaque $x \in \mathfrak{g}$, on note $\mathscr{B}_x := \phi^{-1}x$. Cette variété algébrique est connue dans la littérature sous les noms de « *variété de Springer* » (généralement lorsque $x \in \mathcal{N}$), « *variété de Steinberg* » et « *variété des points fixes de x dans $\mathscr{B}$* ».

5.3.2 Proposition. *Les données étant comme ci-dessus,*

a) *π est propre surjective et désingularise $\mathcal{N}$.*

b) *ϕ est propre surjective et c'est un revêtement galoisien* ([56]) *de groupe $\boldsymbol{W}$ au-dessus de $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$.*

c) *Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, la variété $\mathscr{B}_x$ est équidimensionnelle et $\dim \mathscr{B}_x = \frac{1}{2}\big(\dim Z_{\mathfrak{g}}(x) - \operatorname{rang}\mathfrak{g}\big)$.*

d) *Le morphisme $\pi : \widetilde{\mathcal{N}} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ est semi-petit et :*

$$\boxed{\mathbb{R}\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\mathcal{N}}}[d_{\mathcal{N}}] \in \mathscr{P}(\mathcal{N})}$$

[56] Rappel : un revêtement $p : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{B}$ est dit « *galoisien* » lorsque $\boldsymbol{E}$ est connexe et que le groupe $\mathrm{Aut}(p)$ des automorphismes du revêtement agit transitivement sur les fibres de p. On démontre que lorsque un groupe discret $\boldsymbol{W}$ opère de manière proprement discontinue et sans point fixe sur une variété topologique connexe $\boldsymbol{E}$, la projection canonique $p : \boldsymbol{E} \twoheadrightarrow \boldsymbol{E}/\boldsymbol{W}$ est un revêtement galoisien et $\mathrm{Aut}(p) = \boldsymbol{W}$.

e) *Le morphisme* $\phi : \widetilde{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$ *est petit et :*

$$\boxed{\mathbb{R}\phi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\mathfrak{g}}} = \underline{IC}^\bullet\left(\mathfrak{g}; \phi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\mathfrak{g}}}|_{\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}}\right) \in \mathfrak{IC}(\mathfrak{g})}$$

Démonstration

a) Résultat bien connu et documenté (*cf.* [Sl$_2$] p.43). Le morphisme π est «*la résolution de singularités de Springer de* $\mathcal{N}$ ». C'est également une conséquence du fait que π est semi-petit (d) et que π est bijective au-dessus de la $\boldsymbol{G}$-orbite dense de $\mathcal{N}$.

b) (D'après [Spr$_B$] p. 18). Soit $\psi : \boldsymbol{G} \times \mathfrak{h} \to \boldsymbol{G} \times_{\boldsymbol{B}} \mathfrak{b}$ l'application $\psi(g,h) = \overline{(g,h)}$. Notons $\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{h}$ dont le stabilisateur dans $\boldsymbol{W}$ est trivial. Pour $x \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ donné, fixons un élément $g_0 \in \boldsymbol{G}$ tel que $\mathrm{Ad}\, g_0(x) \in \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$. L'ensemble des éléments $g \in \boldsymbol{G}$ vérifiant $g \cdot x \in \mathfrak{b}$ est alors $N_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{h})g_0$ puisque x est semisimple régulier. En particulier, la fibre $\phi^{-1}(x)$ est contenue dans l'image de ψ et $\psi^{-1}\phi^{-1}(x) = \{(g_0^{-1}n^{-1}, ng_0x) \mid n \in N_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{h})\}$. L'hypothèse de régularité intervient une fois de plus pour montrer que ψ induit un isomorphisme $\overline{\psi} : \boldsymbol{G}/\boldsymbol{H} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}} \equiv \widetilde{\mathfrak{g}}_{\mathrm{reg}}$. En faisant opérer le groupe de Weyl à droite sur $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$ et diagonalement sur $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$ on obtient le diagramme commutatif ci-après.

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{G}/\boldsymbol{H} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}} & \xrightarrow[\equiv]{\overline{\psi}} & \widetilde{\mathfrak{g}}_{\mathrm{reg}} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{mod}\ \boldsymbol{W}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi|_{\widetilde{\mathfrak{g}}_{\mathrm{reg}}}} \\ \boldsymbol{G}/\boldsymbol{H} \times_{\boldsymbol{W}} \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}} & \xrightarrow[\equiv]{} & \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \end{array}$$

c) Ce résultat est dû à Spaltenstein ([Spa$_1$,Spa$_0$]) (on ne le redémontre pas), mais non pas pour $\mathscr{B}_\xi$ mais plutôt pour sa projection $p_1(\mathscr{B}_x)$ dans $\mathscr{B}$. Or, on vérifie aisément que $p_1|_{\mathscr{B}_x}$ est injective et donc $\mathscr{B}_x \simeq p_1\mathscr{B}_x$.

d) π est semi-petit puisque : $2\dim \pi^{-1}\xi = \dim \boldsymbol{G} - \dim \mathscr{O}_\xi - \mathrm{rang}\,\mathfrak{g} = \dim \mathcal{N} - \dim \mathscr{O}_\xi$, d'après l'assertion (c). On conclut par 4.4.7-(a).

e) En appliquant (c) et en considérant la stratification $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{g}$ de la proposition 5.2.3-(b), on obtient aussitôt la majoration $2\dim \phi^{-1}x < \dim \mathfrak{g} - \dim \boldsymbol{S}$, pour toute strate de codimension positive $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{G}$ et tout $x \in \boldsymbol{S}$. Les fibres au-dessus de $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ sont de dimension nulle d'après (c) et la condition ($\diamond$) de 4.4.4 est alors vérifiée par $\mathfrak{G}$. Ceci prouve que ϕ est petite. On conclut par 4.4.7-(b). ∎

5.4 Décomposition de $\mathbb{R}\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\mathcal{N}}}$ [57]

5.4.1 Quelques égalités de dimensions. On a

$$\begin{cases} \dim \mathcal{N} = \dim \boldsymbol{G} - \mathrm{rang}\,\mathfrak{g}\,, \\ \dim \mathscr{O}_\xi = \dim \boldsymbol{G} - \dim Z_{\boldsymbol{G}}(\xi)\,, \\ 2\dim \mathscr{B}_\xi = \dim Z_{\boldsymbol{G}}(\xi) - \mathrm{rang}\,\mathfrak{g} = \mathrm{codim}_{\mathcal{N}}\, \mathscr{O}_\xi\,. \end{cases}$$

5.4.2 Théorème ([BoMc]). *On note* $\jmath_\xi : \overline{\mathscr{O}}_\xi \hookrightarrow \mathcal{N}$ *l'inclusion.*

a) *Le complexe* $\mathbb{R}\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\mathcal{N}}}$ *se décompose dans* $D(\mathcal{N})$ *en une somme directe :*

$$\boxed{\mathbb{R}\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\mathcal{N}}} = \bigoplus_{\xi,\phi_\xi} \jmath_{\xi*}\, \underline{IC}^\bullet(\overline{\mathscr{O}}_\xi; \phi_\xi)[-2\dim \mathscr{B}_\xi] \otimes_{\mathbb{Q}} V_{\xi,\phi_\xi}}$$

où la sommation est indexée par tous les couples (ξ, ϕ_ξ) *où* ξ *parcourt les points de base des orbites nilpotentes, et pour chaque* ξ *donné* ϕ_ξ *est une représentation irréductible intervenant*

[57] [BoMc$_1$] théorème 2-(c) et théorème 3-(a). Voir aussi [BoMc$_2$] §1–2.

dans la représentation par monodromie de $\Pi_1(\mathscr{O}_\xi)$ *sur* $H^{2\dim \mathscr{B}_\xi}(\mathscr{B}_\xi;\mathbb{Q})$ *avec multiplicité égale à la dimension de l'espace vectoriel* V_{ξ,ϕ_ξ}.

b) *Pour chaque* ξ, *les représentations irréductibles intervenant dans la représentation naturelle de* $Z_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi)/Z^0_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi)$ *sur* $H^{2\dim \mathscr{B}_\xi}(\mathscr{B}_\xi;\mathbb{Q})$, *de même que leur multiplicité, correspondent bijectivement à celles de la représentation par monodromie de* $\Pi_1(\mathscr{O}_\xi)$. *La correspondance est donnée par* $\phi \mapsto \phi\circ\alpha$ *où* α *est l'homomorphisme de groupes d'homotopie* $\alpha : \Pi_1(\mathscr{O}_\xi) \to \Pi_0(Z_{\boldsymbol{G}}(\xi)) = Z_{\boldsymbol{G}}(\xi)/Z^0_{\boldsymbol{G}}(\xi)$ *associé à la fibration* $Z_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi) \to \mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G} \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathscr{O}_\xi$, *où* $\beta(g) = g\cdot\xi$.

c)
$$\boxed{\dim_{\mathbb{Q}}\left(\mathrm{End}_{D(\mathscr{N})}(I\!R\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathscr{N}}})\right) = |\boldsymbol{W}|}$$

Démonstration

a) Par le théorème de décomposition (4.4.11) il existe une famille finie $\{\boldsymbol{Z}_i\}$ de fermés irréductibles de $\mathscr{N}$ et pour chaque i un système local irréductible $\mathscr{L}_i$ défini sur un ouvert non singulier de $\boldsymbol{Z}_i$ tels que :
$$I\!R\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\mathscr{N}}[d_{\mathscr{N}}] \equiv \bigoplus_i \imath_{\boldsymbol{Z}_i}\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{Z}_i,\mathscr{L}_i)[d_{\boldsymbol{Z}_i}] \qquad (\ddagger)$$
où les décalages correspondent exactement aux dimensions des fermés en question puisque le complexe $I\!R\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\mathscr{N}}[d_{\mathscr{N}}]$ est un faisceau pervers d'après 5.3.2-(d).

Ceci étant, pour chaque $g\in\boldsymbol{G}$ notons $\mu_g : \mathscr{N}\to\mathscr{N}$, l'application $\mu_g n := g\cdot n$ induite par l'action de $\boldsymbol{G}$. Le foncteur $\mu_{g*} : \mathrm{Faisc}(\mathscr{N}) \rightsquigarrow \mathrm{Faisc}(\mathscr{N})$ est un automorphisme de catégories abéliennes et
$$\mu_{g*}\imath_{\boldsymbol{Z}_i}\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{Z}_i,\mathscr{L}_i) \equiv \imath_{g\cdot\boldsymbol{Z}_i}\underline{IC}^\bullet(g\cdot\boldsymbol{Z}_i,\mu_{g*}\mathscr{L}_i)$$
d'autre part $\mu_{g*}I\!R\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathscr{N}}} \equiv I\!R\pi_*\mu_{g*}\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathscr{N}}}$ puisque π est $\boldsymbol{G}$-équivariante et $\mu_{g*}\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathscr{N}}} \equiv \underline{\mathbb{Q}}_{t\mathscr{N}}$ bien évidemment. On a donc, pour chaque $g\in\boldsymbol{G}$ un isomorphisme de faisceaux pervers semisimples :
$$\bigoplus_i \imath_{\boldsymbol{Z}_i}\underline{IC}^\bullet(\boldsymbol{Z}_i,\mathscr{L}_i)[d_{\boldsymbol{Z}_i}] \equiv \bigoplus_i \imath_{g\cdot\boldsymbol{Z}_i}\underline{IC}^\bullet(g\cdot\boldsymbol{Z}_i,\mu_{g*}\mathscr{L}_i)[d_{\boldsymbol{Z}_i}] \qquad (*)$$
Par conséquent, pour chaque $g\in\boldsymbol{G}$ et chaque i il existe j tel que $g\cdot\boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{Z}_j$; autrement dit, le groupe $\boldsymbol{G}$ opère sur l'ensemble *fini* des fermés de la famille $\{\boldsymbol{Z}_i\}_i$. Comme $\boldsymbol{G}$ est connexe cette action est triviale et chaque $\boldsymbol{Z}_i$ est un fermé irréductible $\boldsymbol{G}$-stable de $\mathscr{N}$, *i.e.* l'adhérence d'une orbite nilpotente $\mathscr{O}_i$. En reportant cette information sur $(*)$ on voit que pour chaque $\mathscr{L}_i$ il existe $\mathscr{L}_j$ tel que $\boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{Z}_j$ et $\mathscr{L}_i \equiv \mu_{g*}\mathscr{L}_j$ sur l'ouvert commun de définition ; en particulier, chaque système local $\mathscr{L}_i$ est défini sur l'orbite dense $\mathscr{O}_i$ toute entière et équivaut à la donnée d'une représentation ϕ_i de $\Pi_1(\mathscr{O}_i)$ irréductible sur $\mathbb{Q}$ (1.11.9). La décomposition $(\ddagger)$ se réécrit alors sous la forme :
$$I\!R\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\mathscr{N}}[d_{\mathscr{N}}] \equiv \bigoplus_{\xi,\phi_\xi} \jmath_{\xi*}\underline{IC}^\bullet(\overline{\mathscr{O}}_\xi,\phi_\xi)[\dim\mathscr{O}_\xi]\otimes_{\mathbb{Q}} V_{\xi,\phi_\xi}\,,$$
où V_{ξ,ϕ_ξ} est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ dont la dimension rend compte de la multiplicité de $\jmath_{\xi*}\underline{IC}^\bullet(\overline{\mathscr{O}}_\xi,\phi_\xi)[\dim\mathscr{O}_\xi]$ dans $I\!R\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\mathscr{N}}[d_{\mathscr{N}}]$. Nous allons identifier maintenant les représentations ϕ_ξ. Pour toute orbite nilpotente $\mathscr{O}$, on a :
$$\begin{cases} \text{(i)} & \left(\jmath_{\xi*}\underline{IC}^\bullet(\overline{\mathscr{O}}_\xi,\phi_\xi)[\dim\mathscr{O}_\xi]\right)|_{\mathscr{O}} = 0\,, \quad \text{lorsque } \mathscr{O}\not\subseteq\overline{\mathscr{O}}_\xi\,;\\ \text{(ii)} & \mathscr{H}^{-\dim\mathscr{O}}\left(\jmath_{\xi*}\underline{IC}^\bullet(\overline{\mathscr{O}}_\xi,\phi_\xi)[\dim\mathscr{O}_\xi]\right)|_{\mathscr{O}} = 0\,, \quad \text{lorsque } \overline{\mathscr{O}}\subsetneq\overline{\mathscr{O}}_\xi\,; \end{cases}$$
(i) pour une simple raison de supports et (ii) d'après la propriété des images directes des complexes d'intersection (4.1.1). On en déduit l'égalité suivante pour chaque orbite $\mathscr{O}_\xi$:
$$\left(I\!R^{-\dim\mathscr{O}_\xi}\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\mathscr{N}}[d_{\mathscr{N}}]\right)|_{\mathscr{O}_\xi} \equiv \bigoplus_{\phi_\xi}\phi_\xi\otimes_{\mathbb{Q}} V_{\xi,\phi_\xi}\,.$$

Le terme de gauche est un système local sur $\mathscr{O}_\xi$ et comme π est propre, sa fibre en ξ est donnée par la cohomologie de $\mathscr{B}_\xi$ (1.5.3-(c)) ; nous avons donc :

$$\big(I\!R^{-\dim \mathscr{O}_\xi}\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{N}}[d_{\mathcal{N}}]\big)_\xi \equiv H^{d_{\mathcal{N}}-\dim \mathscr{O}_\xi}(\mathscr{B}_\xi;\mathbb{Q}) = H^{2\dim \mathscr{B}_\xi}(\mathscr{B}_\xi;\mathbb{Q})\,,$$

et l'assertion (a) est prouvée.

b,c) Par semisimplicité dans $\mathscr{P}(\mathcal{N})$ et compte tenu de précisions apportées par (a), on a

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_{D(\mathcal{N})}\big(I\!R\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{N}}[d_{\mathcal{N}}]\big) &\underset{1}{=} \bigoplus\nolimits_\xi \mathrm{End}_{D(\mathcal{N})}\big(\bigoplus\nolimits_{\phi_\xi} \jmath_{\xi*}\,\underline{IC}^\bullet(\overline{\mathscr{O}}_\xi,\phi_\xi)[\dim \mathscr{O}_\xi]\otimes_{\mathbb{Q}} V_{\xi,\phi_\xi}\big)\\ &\underset{2}{=} \bigoplus\nolimits_\xi \mathrm{End}_{D(\overline{\mathscr{O}}_\xi)}\big(\bigoplus\nolimits_{\phi_\xi} \underline{IC}^\bullet(\overline{\mathscr{O}}_\xi,\phi_\xi)\otimes_{\mathbb{Q}} V_{\xi,\phi_\xi}\big)\\ &\underset{3}{=} \bigoplus\nolimits_\xi \mathrm{End}_{\mathbb{Q},\Pi_1(\mathscr{O}_\xi)}\big(\bigoplus\nolimits_{\phi_\xi} \phi_\xi\otimes_{\mathbb{Q}} V_{\xi,\phi_\xi}\big)\\ &\underset{4}{=} \bigoplus\nolimits_\xi \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}\big(H^{2\dim \mathscr{B}_\xi}(\mathscr{B}_\xi;\mathbb{Q})\big)^{\Pi_1(\mathscr{O}_\xi)}\end{aligned}$$

par les égalités :

$$\begin{cases} \text{`}\underset{1}{=}\text{'} \text{ décomposition par rapport aux supports irréductibles ;}\\ \text{`}\underset{2}{=}\text{'} \text{ puisque } \jmath_{\xi*}:\mathrm{Faisc}(\overline{\mathscr{O}}_\xi)\rightsquigarrow\mathrm{Faisc}(\mathcal{N}) \text{ est pleinement fidèle ;}\\ \text{`}\underset{3}{=}\text{'} \text{ par les équivalences des catégories (3.1.4-(a)) :}\\ \qquad\qquad \mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}}(\Pi_1(\mathscr{O}_\xi)) \equiv \mathrm{Loc}(\mathscr{O}_\xi) \equiv \mathfrak{JC}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathscr{O}}_\xi)\,;\\ \text{`}\underset{4}{=}\text{'} \text{ évident (1.11.2).}\end{cases}$$

Soit $\mathscr{B}_\xi = \mathscr{B}_{\xi,1}\cup\cdots\cup\mathscr{B}_{\xi,r}$ la décomposition de $\mathscr{B}_\xi$ en composantes irréductibles. Pour chaque $i=1,\dots,r$, soit U_i la partie (ouverte) non singulière de $\mathscr{B}_{\xi,i}\backslash(\cup_{j\neq i}\mathscr{B}_{\xi,j})$. Les ouverts U_i sont les composantes connexes de $\mathscr{B}^0_\xi := \cup_i U_i$ et comme le fermé $\mathscr{B}_\xi\backslash\mathscr{B}^0_\xi$ est algébrique et de codimension positive dans $\mathscr{B}_\xi$, il est de dimension cohomologique majorée par $2\dim\mathscr{B}_\xi - 2$. Le morphisme naturel $H_c^{2\dim\mathscr{B}_\xi}(\mathscr{B}^0_\xi;\mathbb{Q})\to H^{2\dim\mathscr{B}_\xi}(\mathscr{B}_\xi;\mathbb{Q})$ est donc bijectif et $H_c^{2\dim\mathscr{B}_\xi}(\mathscr{B}^0_\xi;\mathbb{Q})\equiv H^0(\mathscr{B}^0_\xi;\mathbb{Q})\equiv\mathbb{Q}^{\mathrm{Irr}(\mathscr{B}_\xi)}$ par dualité de Poincaré. Ces équivalences munissent $\mathbb{Q}^{\mathrm{Irr}(\mathscr{B}_\xi)}$ d'une structure de $\Pi_1(\mathscr{O}_\xi)$-module que nous explicitons.

La suite longue de groupes d'homotopie associée à la fibration $Z_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi)\hookrightarrow \mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}\overset{\beta}{\twoheadrightarrow}\mathscr{O}_\xi$, avec $\beta(g)=g\cdot\xi$, donne la suite exacte

$$\Pi_1(\boldsymbol{G})\xrightarrow{\gamma}\Pi_1(\mathscr{O}_\xi)\xrightarrow{\alpha}\Pi_0(Z_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi)) = Z_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi)/Z^0_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi)\,.$$

En composant l'action de $\Pi_1(\mathscr{O}_\xi)$ sur $H^*(\mathscr{B}_\xi,\mathbb{Q})$ avec l'homomorphisme γ on obtient une action de $\Pi_1(\boldsymbol{G})$ sur $H^*(\mathscr{B}_\xi,\mathbb{Q})$ qui est triviale puisqu'elle provient de l'action de $\boldsymbol{G}$ sur $\widetilde{\mathcal{N}}$ (π est $\boldsymbol{G}$-équivariante) qui fait décrire à $\mathscr{B}_\xi$ le chemin $g\cdot\mathscr{B}_\xi$ où g parcourt un lacet de $\boldsymbol{G}$ basé en $\mathbf{1}_{\boldsymbol{G}}$.

La conclusion de ces derniers paragraphes est que les représentations irréductibles et leur multiplicité qui interviennent dans la formule de décomposition sont celles le l'action naturelle du groupe $Z_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi)/Z^0_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi)$ sur $\mathbb{Q}^{\mathrm{Irr}(\mathscr{B}_\xi)}$.

Notons $\{\mathbf{e}_{\mathscr{B}_{\xi,i}}\}_{i=1,\dots,r}$ la base canonique de $\mathbb{Q}^{\mathrm{Irr}(\mathscr{B}_\xi)}$ de base duale $\{\mathbf{e}^{\mathscr{B}_{\xi,i}}\}_{i=1,\dots,r}$. Un élément $\lambda\in\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}\big(\mathbb{Q}^{\mathrm{Irr}(\mathscr{B}_\xi)}\big)$ se décompose alors en $\lambda=\sum_{i,j}\ell_{ij}\,\mathbf{e}_{\mathscr{B}_{\xi,i}}\otimes\mathbf{e}^{\mathscr{B}_{\xi,j}}$ avec $\ell_{i,j}\in\mathbb{Q}$, et nous avons $g\cdot\lambda=\sum_{i,j}\ell_{ij}\,\mathbf{e}_{g\cdot\mathscr{B}_{\xi,i}}\otimes\mathbf{e}^{g\cdot\mathscr{B}_{\xi,j}}$ pour tout $g\in Z_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}\big(H^{2\dim\mathscr{B}_\xi}(\mathscr{B}_\xi;\mathbb{Q})\big)^{\Pi_1(\mathscr{O}_\xi)} &= \dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}\big(\mathbb{Q}^{\mathrm{Irr}(\mathscr{B}_\xi)}\big)^{Z_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi)}\\ &= \#\big(\mathrm{Irr}(\mathscr{B}_\xi)\times\mathrm{Irr}(\mathscr{B}_\xi)/Z_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi)\big)\end{aligned}$$

ce qui reporté dans `$\underset{4}{=}$' donne :

$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{End}_{D(\mathcal{N})}\big(I\!R\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\mathcal{N}}[d_{\mathcal{N}}]\big)\underset{5}{=}\sum\nolimits_\xi\#\big(\mathrm{Irr}(\mathscr{B}_\xi)\times\mathrm{Irr}(\mathscr{B}_\xi)/Z_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi)\big)\,.$$

Considérons le diagramme d'applications $\boldsymbol{G}$-équivariantes :

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{m} & \big(\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{B}}\mathfrak{n}\big)\times\big(\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{B}}\mathfrak{n}\big) & \xrightarrow{p_1\times p_1} & \boldsymbol{\mathscr{B}}\times\boldsymbol{\mathscr{B}} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathscr{N} & \xhookrightarrow{\Delta} & \mathscr{N}\times\mathscr{N} & & \end{array}$$

où $\Delta(n)=(n,n)$ et $q:=\Delta^{-1}(\pi\times\pi)$. Pour chaque $\xi\in\mathscr{N}$, on a $q^{-1}\xi=\boldsymbol{\mathscr{B}}_\xi\times\boldsymbol{\mathscr{B}}_\xi$ de composantes irréductibles les produits $\boldsymbol{\mathscr{B}}_{\xi,i}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}_{\xi,j}$. On note alors

$$S(\xi,i,j):=\overline{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\mathscr{B}}_{\xi,i}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}_{\xi,j})}\subseteq S$$

où l'on remarque que $S(\xi,i,j)=S(\xi,i',j')$ si et seulement si le couple $(\boldsymbol{\mathscr{B}}_{\xi,i},\boldsymbol{\mathscr{B}}_{\xi,j})$ est dans la même $Z_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi)$-orbite que $(\boldsymbol{\mathscr{B}}_{\xi,i'},\boldsymbol{\mathscr{B}}_{\xi,j'})$. A ce propos Steinberg démontre ([St] §3.1 et §3.3 p. 213) que $S(\xi,i,j)$ est une composante irréductible de S, que les composantes irréductibles de S sont de cette forme et, enfin, que $\mathrm{irr}(S)=|\boldsymbol{W}|$. Par conséquent, l'égalité '$\underset{5}{=}$' donne :

$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{End}_{D(\mathscr{N})}\big(I\!R\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\mathscr{N}}[d_{\mathscr{N}}]\big)=\mathrm{irr}(S)=|\boldsymbol{W}|\,,$$

ce qui termine la démonstration du théorème. ∎

5.5 Représentations du groupe de Weyl d'après Lusztig[58]

Reprenons le diagramme $\mathscr{D}$ de 5.3 en le complétant à droite par les plongements ouverts :

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\mathscr{N}} & \xrightarrow[\subseteq\text{ fermée}]{\imath_{\widetilde{\mathscr{N}}}} & \widetilde{\mathfrak{g}} & \xleftarrow[\supseteq\text{ ouverte}]{\tilde{\jmath}} & \widetilde{\mathfrak{g}}_{\mathrm{reg}} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle\phi} & \square & \downarrow{\scriptstyle\phi_{\mathrm{reg}}} \\ \mathscr{N} & \xrightarrow[\subseteq\text{ fermée}]{\imath_{\mathscr{N}}} & \mathfrak{g} & \xleftarrow[\supseteq\text{ ouverte}]{\jmath} & \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \end{array} \qquad (\mathscr{D}')$$

Comme ϕ_{reg} est un revêtement galoisien de groupe $\boldsymbol{W}$ (5.3.2(b)), on a une représentation ρ_0 de $\boldsymbol{W}$ dans le système local $\phi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\mathfrak{g}}_{\mathrm{reg}}}$ et, suite à l'équivalence de catégories 3.1.4 et à 5.3.2-(e), une représentation $\rho:\boldsymbol{W}\to\mathrm{End}_{D(\mathfrak{g})}\big(I\!R\phi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big)$ en composant ρ_0 avec les isomorphismes :

$$\boldsymbol{W}\xrightarrow{\rho_0}\mathrm{End}_{\underline{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}}}\big(\phi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\mathfrak{g}}_{\mathrm{reg}}}\big)\equiv\mathrm{End}_{D(\mathfrak{g})}\big(\underline{IC}^{\bullet}\big(\mathfrak{g};\phi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\mathfrak{g}}}|_{\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}}\big)\big)\equiv\mathrm{End}_{D(\mathfrak{g})}\big(I\!R\phi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big)\uparrow\rho$$

5.5.1 Pour toute partie $\boldsymbol{S}\subseteq\mathfrak{g}$, notons $\widetilde{\boldsymbol{S}}=\phi^{-1}\boldsymbol{S}$ et $\phi_{\boldsymbol{S}}:\widetilde{\boldsymbol{S}}\twoheadrightarrow\boldsymbol{S}$ la restriction de ϕ à $\widetilde{\boldsymbol{S}}$. Lorsque $\boldsymbol{S}$ est localement fermé, on a l'isomorphisme de changement de base (1.5.3-(f)) :

$$\imath_{\boldsymbol{S}}^{-1}\circ I\!R\phi_*\xrightarrow[(\equiv)]{}I\!R\phi_{\boldsymbol{S}*}\circ\imath_{\widetilde{\boldsymbol{S}}}^{-1}\,,$$

[58] *Cf.* [Lu] §3 p. 176.

et donc des homomorphismes d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}_{D(\mathfrak{g})}\big(I\!R\phi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big) & \longrightarrow & \mathrm{End}_{D(\boldsymbol{S})}\big(\imath_{\boldsymbol{S}}^{-1}I\!R\phi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big) \\ & & \downarrow\equiv \\ & & \mathrm{End}_{D(\boldsymbol{S})}\big(I\!R\phi_{\boldsymbol{S}*}\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{S}}}\big) \\ & & \downarrow \\ & & \prod_{m\in\mathbb{Z}}\mathrm{End}_{\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{S}}}\big(I\!R^m\phi_{\boldsymbol{S}*}\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{S}}}\big) \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \xrightarrow{I\!R\Gamma_c}\prod_{m\in\mathbb{Z}}\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(H^m_c(\widetilde{\boldsymbol{S}};\mathbb{Q})) \\ \xrightarrow{I\!R\Gamma}\prod_{m\in\mathbb{Z}}\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(H^m(\widetilde{\boldsymbol{S}};\mathbb{Q})) \end{array}\right. \end{array} \qquad (\mathscr{L})$$

5.5.2 Représentations du groupe de Weyl. Pour toute partie localement fermée $\boldsymbol{S}\subseteq\mathfrak{g}$, on note :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathscr{L}(\boldsymbol{S}):\mathbb{Q}[\boldsymbol{W}]\to\mathrm{End}_{D(\boldsymbol{S})}\big(I\!R\phi_{\boldsymbol{S}*}\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{S}}}\big) \\ L^m(\boldsymbol{S}):\mathbb{Q}[\boldsymbol{W}]\to\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(H^m(\widetilde{\boldsymbol{S}};\mathbb{Q})) \\ L^m_c(\boldsymbol{S}):\mathbb{Q}[\boldsymbol{W}]\to\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(H^m_c(\widetilde{\boldsymbol{S}};\mathbb{Q})) \end{array}\right.$$

les homomorphismes qui résultent de composer $\rho:\boldsymbol{W}\to\mathrm{End}_{D(\mathfrak{g})}\big(I\!R\phi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big)$ avec la suite d'homomorphisme correspondants dans le diagramme $(\mathscr{L})$ ci-dessus.

5.5.3 Représentations du groupe de Weyl dans la cohomologie des variétés de Steinberg. Un cas particulier des constructions précédentes est celui où $\boldsymbol{S}=\mathscr{O}_\xi$ pour $\xi\in\mathscr{N}$. Dans ce cas $\phi_{\mathscr{O}_\xi}$ est une fibration localement triviale $\boldsymbol{G}$ équivariante de fibre $\mathscr{B}_\xi$ et le faisceau dérivé $I\!R^m\phi_{\mathscr{O}_\xi,*}\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathscr{O}}_\xi}$ est un système local de fibre $H^m(\mathscr{B}_\xi,\mathbb{Q})$. Le terme $\mathrm{End}_{\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{S}}}\big(I\!R^m\phi_{\boldsymbol{S}*}\underline{\mathbb{Q}}_{\widetilde{\boldsymbol{S}}}\big)$ du diagramme $(\mathscr{L})$ est donc isomorphe à $\mathrm{End}_{\mathbb{Q},\Pi_1(\mathscr{O}_\xi)}\big(H^m(\mathscr{B}_\xi;\mathbb{Q})\big)$ ce qui permet de préciser l'image de l'homomorphisme $L^m(\mathscr{O}_\xi)$; on a :

$$\boxed{L^m(\mathscr{O}_\xi):\mathbb{Q}[\boldsymbol{W}]\to\mathrm{End}_{\mathbb{Q},\Pi_1(\mathscr{O}_\xi)}(H^m(\mathscr{B}_\xi;\mathbb{Q}))}$$

Par conséquent, **la représentation du groupe de Weyl sur chaque $\boldsymbol{H^m(\mathscr{B}_\xi;\mathbb{Q})}$ commute à la représentation par monodromie de $\boldsymbol{\Pi_1(\mathscr{O}_\xi)}$.**

5.5.4 Proposition. *La représentation $L^*(\{0\}):\mathbb{Q}[\boldsymbol{W}]\to\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(H^*(\mathscr{B}_0;\mathbb{Q}))$ est isomorphe à la représentation régulière de $\boldsymbol{W}$. En particulier, $\mathscr{L}(\mathscr{N})$ est injective.*

Démonstration. Munissons $\mathfrak{g}$ d'une métrique euclidienne ; soit $B(0,\varepsilon)$ la boule ouverte de rayon $\varepsilon>0$ centrée en 0 et notons $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg},\varepsilon}:=B(0,\varepsilon)\cap\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. La représentation $L^*(\mathfrak{g}_{\mathrm{reg},\varepsilon})$ est isomorphe à la représentation $L^*(\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}})$ puisque $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg},\varepsilon}$ est un retract de $\mathfrak{g}$ et $L^*(\mathfrak{g}_{\mathrm{reg},\varepsilon})$ se factorise à travers $L^*(B(0,\varepsilon))$. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} H^*(\mathscr{B}_0;\mathbb{Q}) & \xleftarrow[(\boldsymbol{W})]{\equiv_1} & H^*(\widetilde{B}(0,\varepsilon);\mathbb{Q}) & \xrightarrow[(\boldsymbol{W})]{r^*} & H^*(\widetilde{\mathfrak{g}}_{\mathrm{reg},\varepsilon};\mathbb{Q}) \xleftarrow[(\boldsymbol{W})]{\equiv_2} H^*(\widetilde{\mathfrak{g}}_{\mathrm{reg}};\mathbb{Q}) \\ & & \equiv_4\uparrow p^* & & \equiv_3\uparrow(\boldsymbol{W}) \\ & & & & H^*(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}\times\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}};\mathbb{Q}) \\ & & & & q^*\uparrow[\boldsymbol{W}] \\ & & H^*(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{B};\mathbb{Q}) & \xleftarrow[[\boldsymbol{W}]]{=} & H^*(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{B};\mathbb{Q}) \end{array}$$

Tous les morphismes proviennent des inclusions d'ensembles à l'exception de l'équivalence '$\equiv_3$' qui résulte de 5.3.2-(b), de p^* qui correspond à l'application $p:\widetilde{B}(0,\varepsilon)\twoheadrightarrow\boldsymbol{G}/\boldsymbol{B}$ restriction de la projection $p_1:\widetilde{\mathfrak{g}}=\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{B}}\mathfrak{b}\twoheadrightarrow\boldsymbol{G}/\boldsymbol{B}$ et de q^* qui correspond à $q:\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}\times\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}\twoheadrightarrow\boldsymbol{G}/\boldsymbol{B}$, définie par

$q(x,h)=\bar{x}$. Nous indiquons par '$(\boldsymbol{W})$' les applications compatibles aux actions du groupe de Weyl données par les représentations $\mathscr{L}$ et par '$[\boldsymbol{W}]$' celles compatibles à l'action de $\boldsymbol{W}$ à droite sur $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{B}$. Enfin, $\equiv_1$ et $\equiv_4$ sont bijectives puisque $\mathscr{B}_0$ est retract de $\widetilde{B}(0,\varepsilon)$.

Cela étant, le morphisme q^* (et donc r^*) est **injectif**. En effet, l'application q se factorise à travers les projections $\pi_1 : \boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}\times\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}} \twoheadrightarrow \boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$ et $\pi_2 : \boldsymbol{G}/\boldsymbol{H} \twoheadrightarrow \boldsymbol{G}/\boldsymbol{B}$. Le morphisme π_1^* est injectif d'après la formule de Künneth (par exemple) et π_2^* est bijectif car π_2 est de fibre $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{H}$ acyclique.

Par conséquent, le morphisme p^* du diagramme est compatible aux actions de $\boldsymbol{W}$ et la structure de $\boldsymbol{W}$-module de $H^*(\mathscr{B}_0;\mathbb{Q})$ est celle qui provient de l'action à droite de $\boldsymbol{W}$ sur $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{B}$. Il est bien connu que cette représentation est isomorphe à la représentation régulière de $\boldsymbol{W}$([59]) ; en particulier, l'homomorphisme $L^*(\{0\}) : \mathbb{Q}[\boldsymbol{W}] \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(H^*(\mathscr{B}_0;\mathbb{Q}))$ est injectif.

L'injectivité de $\mathscr{L}(\mathscr{N})$ résulte de ce que $L^*(\{0\})$ se factorise à travers $\mathscr{L}(\mathscr{N})$. ∎

5.5.5 ***Corollaire. L'homomorphisme*** $\mathscr{L}(\mathscr{N}) : \mathbb{Q}[\boldsymbol{W}] \to \mathbf{End}_{D(\mathscr{N})}\big(I\!R\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathscr{N}}}\big)$ ***est bijectif.***

Démonstration. $\mathscr{L}(\mathscr{N})$ est une injection (5.5.4) entre deux espaces vectoriels de même dimension (5.4.2-(c)). ∎

5.6 Correspondance de Springer d'après Borho-MacPherson

D'après l'égalité '$\overset{\sim}{=}$' de démonstration du théorème 5.4.2, et compte tenu du corollaire précédent, on a les isomorphismes d'anneaux :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{Q}[\boldsymbol{W}] \xrightarrow[\equiv]{\mathscr{L}(\mathscr{N})} \mathrm{End}_{D(\mathscr{N})}\big(I\!R\pi_*\underline{\mathbb{Q}}_{\tilde{\mathscr{N}}}\big) \underset{3}{=} \bigoplus_{\xi} \mathrm{End}_{\mathbb{Q},\Pi_1(\mathscr{O}_\xi)}\big(\bigoplus_{\phi_\xi}\phi_\xi\otimes_{\mathbb{Q}} V_{\xi,\phi_\xi}\big) \\ \| \\ \bigoplus_{\xi,\phi_\xi}\mathrm{End}_{\mathbb{Q},\Pi_1(\mathscr{O}_\xi)}(\phi_\xi)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V_{\xi,\phi_\xi}) \\ \|* \\ \bigoplus_{\xi,\phi_\xi}\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V_{\xi,\phi_\xi})\end{array}$$

où l'égalité marquée d'un astérisque résulte de ce que les représentations ϕ_ξ sont des représentations irréductibles sur $\mathbb{Q}$ du groupe $Z_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi)/Z_{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{G}}(\xi)^0$ (5.4.2-(b)) et sont donc absolument irréductibles([60]). Par conséquent chaque espace vectoriel V_{ξ,ϕ_ξ} apparaît muni d'une représentations du groupe de Weyl que l'on note $\rho_{(\xi,\phi_\xi)}$.

5.6.1 Définition. L'application

$$\left\{(\xi,\phi_\xi)\;\middle|\;\begin{array}{l}\mathscr{O}_\xi \text{ est une orbite nilpotente de } \mathfrak{g} \text{ et } \phi_\xi \text{ est une re-}\\ \text{présentation irréductible de } \Pi_1(\mathscr{O}_\xi) \text{ dont la mul-}\\ \text{tiplicité dans la représentation par monodromie}\\ \text{de } \Pi_1(\mathscr{O}_\xi) \text{ dans } H^{2\dim(\mathscr{B}_\xi)}(\mathscr{B}_\xi,\mathbb{Q}) \text{ est non nulle}\end{array}\right\} \xrightarrow{\quad\rho\quad} \mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{W})$$

définie par $(\xi,\phi_\xi)\mapsto\rho_{(\xi,\phi_\xi)}$ est appelée «*la correspondance de Springer*».

---

[59] *Cf.* la thèse de Borel [Bo$_1$] lemme 27.1 p. 193.

[60] *Cf.* [Spr$_B$] p. 589-21, où Springer écrit : "*Si* $\boldsymbol{G}$ *est adjoint et* $\xi\in\mathscr{N}$ *le groupe* $Z_{\boldsymbol{G}}(\xi)/Z^0_{\boldsymbol{G}}(\xi)$ *a la propriété que toutes ses représentations irréductibles sont définies sur* $\mathbb{Q}$. *C'est démontré par une analyse cas par cas dans* [BoAl$_0$] (*E* 4) *et dans* [Al] *pour les types exceptionnels.*"

5.6.2 La formule (c) de 5.4.2 s'écrit maintenant :

$$\boxed{|\boldsymbol{W}| = \sum_{(\xi,\phi_\xi)} \dim\left(\rho_{(\xi,\phi_\xi)}\right)^2} \qquad (\diamond)$$

et comme $\mathscr{L}(\mathscr{N})$ est injective, chaque représentation de $\boldsymbol{W}$ irréductible sur $\mathbb{Q}$ intervient avec multiplicité non nulle dans au moins une représentation $\rho_{(\xi,\phi_\xi)}$.

Cela étant, tout ce que nous avons fait en travaillant sur la catégorie de faisceaux de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, se transpose *sans autre changement que l'extension de scalaires* au contexte des faisceaux des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. En particulier la formule $(\diamond)$ reste essentiellement inchangée et nous avons maintenant

$$\boxed{\sum_{\chi\in\widehat{\boldsymbol{W}}_{\mathbb{C}}} \dim(\chi)^2 = |\boldsymbol{W}| = \sum_{(\xi,\phi_\xi)} \dim\left(\rho_{(\xi,\phi_\xi)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}\right)^2} \qquad (\diamond\diamond)$$

où, encore une fois, chaque $\chi \in \widehat{\boldsymbol{W}}_{\mathbb{C}}$ intervient avec multiplicité non nulle dans au moins une représentations $\rho_{\xi,\phi_\xi}\otimes\mathbb{C}$.

L'égalité de gauche dans $(\diamond\diamond)$ est bien connue et correspond à la décomposition de $\mathbb{C}[\boldsymbol{W}]$ en composantes isotypiques sous l'action de la représentation régulière de $\boldsymbol{W}$. On comprend alors aisément que $(\diamond\diamond)$ n'est possible que si chaque représentation $\rho_{\xi,\phi_\xi}\otimes\mathbb{C}$ est elle-même irréductible et si la correspondance de Springer est une bijection sur $\widehat{\boldsymbol{W}}_{\mathbb{C}}$. L'égalité $(\diamond\diamond)$ donne alors un renseignement supplémentaire important, a savoir : les caractères irréductibles sur $\mathbb{C}$ de $\boldsymbol{W}$ sont définis sur $\mathbb{Q}$; ou encore : les représentations $\rho_{(\xi,\phi_\xi)}$ (définies sur $\mathbb{Q}$) sont absolument irréductibles.

5.6.3 Les remarques précédentes prouvent le célèbre théorème de Springer([61]) :

Théorème. *Soit $\boldsymbol{W}$ le groupe de Weyl d'un groupe algébrique complexe semisimple connexe.*

a) *La correspondance de Springer est une bijection sur $\widehat{\boldsymbol{W}}_{\mathbb{Q}}$.*

b) *Les représentation irréductibles sur $\mathbb{Q}$ de $\boldsymbol{W}$ sont absolument irréductibles.*

5.6.4 Autres constructions. En dehors de Springer ([Spr$_1$] '76, [Spr$_2$] '78), les auteurs suivants ont construit des représentations de $\boldsymbol{W}$ dans $H^*(\mathscr{B}_\xi;\mathbb{Q})$ par des méthodes ou des approches différentes : Kazhdan-Lusztig ([Ka] '80), Slodowy ([Sl$_1$] '80), Luzstig ([Lu] '81), Rossmann ([Ro] '91). Les représentations obtenues par ces dernières méthodes coïncident entre elles et diffèrent de celles de Springer par le caractère signature (*cf.* [Ho]).

§6. Références bibliographiques

[Al] ALEXEEVSKY. Groupe des composantes de centralisateurs d'éléments unipotents dans les groupes algébriques semisimples ; (En russe). Pub. Inst. Math. Tbilisi 52, 5–27, (1979).

[BBD] BEĬLINSON, BERNSTEIN, DELIGNE. "*Faisceaux pervers*" ; Analyse et topologie sur les espaces singuliers, I (Luminy, 1981). Astérisque, 100, Soc. Math. France, Paris, (1982).

[Bo$_1$] BOREL. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts ; Ann. of Math. (2) 57, (1953).

[61] [Spr$_1$] §6 th. 6.10 p. 198 et [Spr$_2$] §1 th. 1.13 p. 283 et §3.11 p. 290.

[Bo_2] Borel. Introduction to middle intersection cohomology and perverse sheaves ; Algebraic groups and their generalizations : classical methods (University Park, PA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., 56, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 25–52 (1994).

[$BoAl_0$] Borel et al. "*Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups*" ; (The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1968/69). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 131 Springer, Berlin (1970).

[BoAl] Borel et al. "*Intersection Cohomology*" ; Progress in mathematics 50. Birkhäuser (1984).

[BoMo] Borel, Moore. Homology theory for locally compact spaces ; Michigan Math. J. 7, 137–159 (1960).

[$BoMc_1$] Borho, MacPherson. Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés nilpotentes ; C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292, no. 15, 707–710 (1981).

[$BoMc_2$] Borho, MacPherson. Partial resolutions of nilpotent varieties ; Analysis and topology on singular spaces, II, III (Luminy, 1981), Astérisque, 101-102, Soc. Math. France, Paris, (23–74) (1983).

[Br] Bredon. "*Sheaf theory*" ; Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 170. Springer-Verlag, New York, (1997).

[Bry] Brylinski. (Co)-homologie d'intersection et faisceaux pervers ; Séminaire Bourbaki, 34^e année, 1981/82 n^o 585, février (1982).

[C] Les cours du cimpa. "*Images directes et constructibilité. Éléments de la théorie des systèmes différentiels*" ; Papers from the CIMPA Summer School held in Nice, August and September 1990. Edited by Philippe Maisonobe and Claude Sabbah. Travaux en Cours, 46. Hermann, Paris, (1993).

[Di] Dimca. "*Singularities and topology of hypersurfaces*" ; Universitext. Springer-Verlag, New York, (1992).

[GWPL] Gibson, Wirthmüller, du Plessis, Looijenga. "*Topological stability of smooth mappings*" ; Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1976).

[Go] Godement. "*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*" ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

[$GoMc_1$] Goresky, MacPherson. Intersection homology theory ; Topology 19, no. 2, 135–162 (1980).

[$GoMc_2$] Goresky, MacPherson. Intersection homology II ; Inventiones Mathematicae 71, 77–129 (1983).

[Hd] Hardt. Semi-algebraic local-triviality in semi-algebraic mappings ; Amer. J. Math. 102, no. 2, 291–302 (1980).

[Ha_1] Hartshorne. "*Residues and duality*" ; Lect. notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20 Springer-Verlag, Berlin-New York (1966).

[Ha_2] Hartshorne. "*Algébraic Geometry*" ; Graduate texts in mathematics 52. Springer–Verlag (1977).

[Ho] Hotta. On Springer's representations ; J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 28 (1981), no. 3, 863–876 (1982)

[KS] Kashiwara, Schapira. "*Sheaves on manifolds*" ; Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292. Springer-Verlag, Berlin, (1990).

[Ka] Kazhdan, Lusztig. A topological approach to Springer's representations ; Adv. in Math. 38, no. 2, 222–228 (1980).

[Kl] Kleiman. The development of intersection homology theory ; A century of mathematics in America, Part II, 543–585, Hist. Math., 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1989).

[Li] Lipman. Equisingularity and simultaneous resolution of singularities ; Resolution of singularities (Obergurgl, 1997). Progr. Math., 181, Birkhäuser, Basel, 485–505 (2000).

[Lu] Lusztig. Green polynomials and singularities of unipotent classes ; Adv. in Math. 42, no. 2, 169–178 (1981).

[Ma] Mather. Stratifications and mappings ; Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971), pp. 195–232. Academic Press, New York, (1973).

[Mi] Milnor. "*Morse theory.*" ; Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963 vi+153 pp.

[Ro] Rossmann. Invariant eigendistributions on a semisimple Lie algebra and homology classes on the conormal variety. II. Representations of Weyl groups ; J. Funct. Anal. 96, no. 1, 155–193 (1991).

[Sa] Saito. Decomposition theorem for proper Kähler morphisms ; Tohoku Math. J. (2) 42, no. 2, 127–147 (1990).

[Sh] Shoji. Geometry of orbits and Springer correspondence. ; Orbites unipotentes et représentations, I. Astérisque No. 168, 9, 61–14 (1988).

[Sl_1] Slodowy. "*Four lectures on simple groups and singularities*" ; Communications of the Math. Institute, Rijksuniversiteit Utrecht, 11. Rijksuniversiteit Utrecht, Mathematical Institute, Utrecht, (1980).

[Sl_1] Slodowy. "*Four lectures on simple groups and singularities*" ; Communications of the Math. Institute, Rijksuniversiteit Utrecht, 11. Rijksuniversiteit Utrecht, Mathematical Institute, Utrecht, (1980).

[Sl_2] Slodowy. "*Simple singularities and simple algebraic groups*" ; Lecture Notes in Mathematics, 815. Springer, Berlin, (1980).

[Spa_0] Spaltenstein. The fixed point set of a unipotent transformation on the flag manifold ; Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 79. Indag. Math. 38, no. 5, 452–456 (1976).

[Spa_1] Spaltenstein. On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroups ; Topology 16, no. 2, 203–204 (1977).

[Spa_2] Spaltenstein. Resolutions of unbounded complexes ; Compositio Math. 65, no. 2, 121–154 (1988).

[Spr_1] Springer. Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups ; Invent. Math. 36, 173–207 (1976).

[Spr_2] Springer. A construction of representations of Weyl groups ; Invent. Math. 44, no. 3, 279–293 (1978).

[Spr_B] Springer. Quelques applications de la cohomologie d'intersection ; Séminaire Bourbaki, 34^{e} année, 1981/82 n^{o} 589, février (1982).

[St] Steinberg. On the desingularization of the unipotent variety ; Invent. Math. 36, 209–224 (1976).

[Te_1] Teissier. Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney ; Algebraic geometry (La Rabida, 1981), Lecture Notes in Math., 961, Springer, Berlin, 314–491 (1982).

[Te_2] Teissier. Sur la classification des singularités des espaces analytiques complexes ; Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983), 763–781, PWN, Warsaw, (1984).

[Th] Thom. Ensembles et morphismes stratifiés. ; Bull. Amer. Math. Soc. 75, 240–284 (1969).

[W] Whitney. Tangents to an analytic variety ; Ann. of Math. (2) 81, 496–549 (1965).

———————×———————

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes
Samedi 30 juillet 2018