UFR de Mathématiques, Université de Paris 7 - Denis Diderot Samedi 6 juillet 2002
DEA 2001/02 deuxième semestre
"Introduction à l'homologie d'intersection et aux faisceaux pervers"
Alberto Arabia

Corrigé de l'examen final du 14 juin 2002

Notations. • k : un corps ; • $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$: le faisceaux constant de fibre k sur $\boldsymbol{X}$; • $d_{\boldsymbol{X}} = \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X})$; • $\mathrm{c}_{\mathrm{pt}}(\mathbb{L})$: cône ouvert de $\mathbb{L}$ de sommet pt : • $\bar{p}, \bar{q}$: perversités ; • $\bar{p}'$: perversité complémentaire de $\bar{p}$, donc $p_k + p'_k = k-2$; • $\boldsymbol{U}^0_{\mathfrak{F}}$: réunion des strates ouvertes d'une stratification $\mathfrak{F}$; • $\boldsymbol{S}^k_{\mathfrak{F}}$: réunion des strates de codimension k d'une stratification $\mathfrak{F}$.

1) Homologie d'intersection du cône ouvert d'un tore

Soient $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ le tore réel de dimension $n \geqslant 1$ et $\boldsymbol{X} := \mathrm{c}_{\mathbf{s}}(\mathbb{T}^n)$ son cône ouvert.
a) Montrer qu'il existe au plus n homologies d'intersection distinctes à coefficients dans $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$.
b) Expliciter pour chacune des perversités possibles, les groupes $I_{\bar{p}}H^*(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})$.
c) Expliciter pour $\bar{p} \leqslant \bar{q}$ le morphisme naturel $I_{\bar{p}}H^*(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) \to I_{\bar{q}}H^*(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})$.

$\boxed{\text{a}}$ L'espace $\boldsymbol{X}$ est le quotient topologique de $[0,1[\times \mathbb{T}^n$ par la relation d'équivalence qui identifie $(0,x_1)$ et $(0,x_2)$, quels que soient $x_i \in \mathbb{T}^n$. La classe d'équivalence $\{0\}\times\mathbb{T}^n$ est le sommet `$\mathbf{s}$´ du cône ; c'est un fermé de dimension nulle de $\boldsymbol{X}$ de complémentaire $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{X}\backslash\{\mathbf{s}\} =]0,1[\times\mathbb{T}^n$, variété topologique de dimension $n+1$. Il s'ensuit que $\dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X}) = n+1 \geqslant 2$.

La filtration fermée $\mathfrak{F} = \big(\boldsymbol{X} \supseteq \boldsymbol{X}_0 = \{\mathbf{s}\}\big)$ vérifie tautologiquement la condition d'équisingularité locale ; c'est une stratification de pseudovariété de $\boldsymbol{X}$. En particulier, pour tout système local $\mathscr{L}$, **globalement** défini sur $\boldsymbol{X}$ pour toute perversité $\bar{p}$, pour toute stratification de pseudovariété $\mathfrak{G}$ de $\boldsymbol{X}$, on a $\underline{\underline{IC}}^\bullet_{\mathfrak{G};\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L}) = \underline{\underline{IC}}^\bullet_{\mathfrak{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})$, d'après le théorème d'indépendance des complexes d'intersections relativement aux stratifications.

Comme $\mathfrak{F}$ ne possède pas de strate de codimension comprise entre 1 et n, on a

$$\underline{\underline{IC}}^\bullet_{\mathfrak{F};\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L}) = \tau_{\leqslant p_{n+1}} I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}$$

et comme $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant (n+1)-2 = n-1$, il existe *a priori* au plus n complexes d'intersection à coefficients dans $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$ non isomorphes en catégorie dérivée.

Pour chaque $0 \leqslant p \leqslant n-1$, on notera $\underline{\underline{IC}}^\bullet_p := \tau_{\leqslant p_{n+1}} I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}$.

- On a $\underline{\underline{IC}}^\bullet_0 = i_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}} = \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$ puisque $\mathbf{s}$ admet une base de voisinages $\boldsymbol{V}$ tels que $\boldsymbol{V}\backslash\{\mathbf{s}\}$ est connexe. Comme $\boldsymbol{X}$ est contractile, on a donc :

$$\begin{cases} I\!H^0(\underline{\underline{IC}}^\bullet_0) = k = H^0(\mathbb{T}^n;k), & \text{et} \\ I\!H^m(\underline{\underline{IC}}^\bullet_0) = 0, & \text{pour } m > 0. \end{cases}$$

- Supposons avoir vérifié les équivalences suivantes pour $0 \leqslant p < n-1$:

$$\begin{cases} I\!H^m(\underline{\underline{IC}}^\bullet_p) = H^m(\mathbb{T}^n), & \text{si } m \leqslant p, \\ I\!H^m(\underline{\underline{IC}}^\bullet_p) = 0, & \text{pour } m > p. \end{cases} \tag{$\diamond_p$}$$

Dans le triangle de troncatures intelligentes :

$$\underline{\underline{IC}}^\bullet_p \xrightarrow{\mu^\bullet_p} \underline{\underline{IC}}^\bullet_{p+1} \longrightarrow \big(\mathscr{H}^{p+1} I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}\big)^{[p+1]} \xrightarrow{[+1]} \tag{$*$}$$

le troisième sommet est un **faisceau** sur $\boldsymbol{X}$ de support $\{\mathbf{s}\}$, placé en degré $p+1$, et l'hypercohomologie du complexe $(\mathscr{H}^{p+1} I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}})^{[p+1]}$ est concentrée en degré $p+1$ (puisque de support ponctuel !) et vaut $H^{p+1}(\mathbb{T}^n;k)$ par définition de $I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}$.

Cette information, reportée dans la suite exacte longue d'hypercohomologie associée à $(*)$, montre, d'une part, que les conditions $(\diamond_{p+1})$ sont satisfaites, et d'autre part, que le morphisme induit en hypercohomologie par μ_p^m est l'identité pour $m \leqslant p$ et est nul après.

Le tableau suivant illustre ces conclusions :

m	0	1	2	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$
I_0H^m	$H^0(\mathbb{T}^n)$	0	0	$\cdots$	0	0	0	0
I_1H^m	$H^0(\mathbb{T}^n)$	$H^1(\mathbb{T}^n)$	0	$\cdots$	0	0	0	0
I_2H^m	$H^0(\mathbb{T}^n)$	$H^1(\mathbb{T}^n)$	$H^2(\mathbb{T}^n)$	$\cdots$	0	0	0	0
....	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$I_{n-1}H^m$	$H^0(\mathbb{T}^n)$	$H^1(\mathbb{T}^n)$	$H^2(\mathbb{T}^n)$	$\cdots$	$H^{n-2}(\mathbb{T}^n)$	$H^{n-1}(\mathbb{T}^n)$	0	0

Ces homologies d'intersection sont deux à deux distinctes puisque $H^m(\mathbb{T}^n) \neq 0$, quel que soit $0 \leqslant m \leqslant n$.

Remarquer que le seul cas où $\boldsymbol{X}$ n'admet qu'une unique homologie d'intersection à coefficients dans $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$ correspond au cas où $\boldsymbol{X}$ est le cône d'un cercle, seul cas où $\boldsymbol{X}$ est une variété cohomologique.

2) Contrexemple à expliciter

Soient $\boldsymbol{X} := \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{S} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, avec $n \geqslant 1$, $\mathfrak{F} = \boldsymbol{X} \supseteq \boldsymbol{S} \supseteq \varnothing$ et $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{X} \backslash \boldsymbol{S}$.

Montrer que $\big(\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\,\underline{\underline{IC}}^\bullet_{\mathfrak{F};\bar{0}}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})\big)[-n]$ n'appartient pas à l'image essentielle du prolongement intermédiaire $i^{\mathfrak{G},\bar{p}}_{!*} : \mathrm{Loc}(\boldsymbol{U}^0_{\mathfrak{G}}) \to D^b_{\mathfrak{G}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$, quelles que soient la stratification $\mathfrak{G}$ et la suite croissante d'entiers naturels $\bar{p}$.

Pour tout système local $\mathscr{L}$ sur $\boldsymbol{U}$ les foncteurs dérivés $I\!R^m i_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{L}$ sont nuls pour $m > 0$. Cela résulte du fait que chaque point $x \in \boldsymbol{S}$ admet une base de voisinages $\boldsymbol{V}$ ouverts dans $\boldsymbol{X}$ et tels que $\boldsymbol{V}\backslash\boldsymbol{S}$ est isomorphe à deux copies de (l'espace contractile) $\mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que $(i_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{L})^{[0]}$ est équivalent, en catégorie dérivée, au complexe $I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{L}$. Par conséquent,

$$\mathscr{F}^\bullet := \underline{\underline{IC}}^\bullet_{\mathfrak{F};\bar{0}}(\boldsymbol{X},\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = \tau_{\leqslant 0}\, I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}} = i_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}} = I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}$$

et alors

$$I_{\mathfrak{F};\bar{0}}H^*(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = I\!R^*\Gamma(\boldsymbol{X};I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) = I\!R^*\Gamma(\boldsymbol{U};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) = H^*(\boldsymbol{U};k).$$

D'autre part, en décomposant $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^+ \amalg \boldsymbol{U}^-$, avec $\boldsymbol{U}^\pm := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^\pm$, on a

$$\mathscr{F}^\bullet = i_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}} = i_{\boldsymbol{U}^+*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}^+} \oplus i_{\boldsymbol{U}^-*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}^-},$$

et comme on a aussi $i_{\boldsymbol{U}^\pm*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}^\pm} = i_{\overline{\boldsymbol{U}}^\pm*}\underline{\underline{k}}_{\overline{\boldsymbol{U}}^\pm}$, avec $\overline{\boldsymbol{U}}^\pm = \mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{R}}^\pm$, on conclut que

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{F};\bar{0}}H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) &= I\!R^*\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};i_{\overline{\boldsymbol{U}}^+!}\underline{\underline{k}}_{\overline{\boldsymbol{U}}^+}) \oplus I\!R^*\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};i_{\overline{\boldsymbol{U}}^-!}\underline{\underline{k}}_{\overline{\boldsymbol{U}}^-}) \\ &= I\!R^*\Gamma_{\mathrm{c}}(\overline{\boldsymbol{U}}^+;\underline{\underline{k}}_{\overline{\boldsymbol{U}}^+}) \oplus I\!R^*\Gamma_{\mathrm{c}}(\overline{\boldsymbol{U}}^-;\underline{\underline{k}}_{\overline{\boldsymbol{U}}^-}) = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

puisque $H^*_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{R}}^\pm;k) = H^*_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^{n-1};k) \otimes H^*_{\mathrm{c}}(\overline{\mathbb{R}}^\pm;k)$, par Künneth, et que $H^*_{\mathrm{c}}(\overline{\mathbb{R}}^\pm;k) = \boldsymbol{0}$ d'après l'inspection de la suite longue de cohomologies à supports compacts associée au triangle $\Delta\big([0,1[,[0,1],\{1\};\underline{\underline{k}}\big)$.

Par conséquent, pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{I_{\mathfrak{F};\bar{0}}H^m(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = H^m(\mathbb{R}^n) \oplus H^m(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad I_{\mathfrak{F};\bar{0}}H^m_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = 0}$$

D'après le théorème de Deligne, les complexes $\mathscr{G}^\bullet$ de l'image de $i_{!*}^{\mathfrak{F};\bar{0}} : \mathrm{Fais}(\boldsymbol{U}) \rightsquigarrow D^+(\boldsymbol{X})$, sont caractérisés par :

$$\boxed{(\mathbf{S}) \quad [\![\mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{S}}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq]-\infty,0] \quad \text{et} \quad (\mathbf{S'}) \quad [\![i_{\boldsymbol{S}}^!\mathscr{G}^\bullet]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [2,+\infty[}$$

On teste ces conditions sur $(\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)[-n]$.

T-1) On a $\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet = \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\, \mathbb{R}i_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}} = i_{\boldsymbol{U}!}\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{U}}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}} = i_{\boldsymbol{U}!}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}[n]$, et alors :

$$i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet = i_{\boldsymbol{S}}^{-1}i_{\boldsymbol{U}!}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}[n] = 0\,,$$

par le théorème de changement de base.

La condition $(\mathbf{S})$ est donc vérifiée par $(\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)[-n]$.

T-2) On a $i_{\boldsymbol{S}}^!\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet \equiv \mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{S}}\big(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{S}}\big)$ et $\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{S}} \equiv \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{S}}{}^2$, donc :

$$[\![i_{\boldsymbol{S}}^!(\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)[-n]]\!]_{\mathrm{ch}} = [\![\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{S}}(\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{S}})]\!]_{\mathrm{ch}} + n = -[\![\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{S}}]\!]_{\mathrm{ch}} - (n-1) + n = -\{0\} + 1 = \{1\}$$

et la condition **S' n'est pas vérifiée** par $(\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)[-n]$.

Par conséquent, le complexe $(\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)[-n]$ n'est pas isomorphe, en catégorie dérivée, à un complexe de la forme $i_{!*}^{\mathfrak{F};\bar{0}}(\mathscr{M})$, **quel que soit le $\boxed{\text{faisceau}}$** $\mathscr{M}$.

Le fait que $(\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\, \underline{\underline{IC}}^\bullet_{\mathfrak{F};\bar{0}}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}))[-n]$ n'appartienne pas à $i_{!*}^{\mathfrak{F};\bar{p}}\big(\mathrm{Loc}(\boldsymbol{U})\big)$ peut se voir plus rapidement grâce aux conditions vérifiées par un complexe $\mathscr{G}^\bullet \in i_{!*}^{\mathfrak{F};\bar{p}}\big(\mathrm{Loc}(\boldsymbol{U})\big)$:

$$\boxed{(\mathbf{S}) \quad [\![\mathscr{G}^\bullet|_{\boldsymbol{S}}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq]-\infty,p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}}] \quad \text{et} \quad (\mathbf{S'}) \quad [\![(\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{G}^\bullet)|_{\boldsymbol{S}}[-n]]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq]-\infty,\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}-2-p_{\mathrm{cd}_{\boldsymbol{S}}}]}$$

Dans le cas qui nous occupe, $\mathscr{G}^\bullet = (\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\, i_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}})[-n]$ et donc $(\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{G}^\bullet)[-n] = i_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}$, par bidualité. La condition $(\mathbf{S'})$ demande donc :

$$[\![i_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}|_{\boldsymbol{S}}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq]-\infty,-1]\,,$$

ce qui est de toute évidence impossible.

Le complexe $(\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)[-n]$ n'est donc pas isomorphe, en catégorie dérivée, à un complexe de la forme $i_{!*}^{\mathfrak{F};\bar{0}}(\mathscr{L})$, **quel que soit le système local** $\mathscr{L}$.

Pour toute stratification $\mathfrak{G}$ de $\boldsymbol{X}$, tout système local $\mathscr{L}$ sur $\boldsymbol{U}^0_{\mathfrak{G}}$, et toute application croissante d'entiers naturels $\bar{p}$, on a :

$$\underline{\underline{IC}}^\bullet_{\mathfrak{G};\bar{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L}) \not\equiv (\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet)[-n]\,.$$

En raisonnant par l'absurde, $\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet$ et donc $\mathscr{F}^\bullet$ seraient $\mathfrak{G}$-cohomologiquement constructible. Comme les fibres de $\mathscr{F}^\bullet$ sur les strates $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{S}$ de $\mathfrak{F}$ sont non isomorphes, on aurait $\mathfrak{F} \preccurlyeq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ posséderait une strate non vide $\boldsymbol{T}$ de codimension 1 dans $\boldsymbol{X}$ et contenue dans $\boldsymbol{S}$, le raisonnement (T-1) s'appliquerait à $\boldsymbol{T}$ et donnerait $\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{T}} = 0$, soit $\mathscr{F}^\bullet|_{\boldsymbol{T}} = 0$, ce qui est faux.

3) Pseudovariétés normales

Dans cette question $\boldsymbol{X}$ est une pseudovariété de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$ « *normale* », *i.e.* telle que

$$\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}} := \mathscr{H}^{-d_X}\, I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} \text{ est un système local de rang } 1.$$

a) Montrer que pour tout fermé $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}$ de codimension $\geqslant 2$, on a $H^1_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}) = 0$.

b) En déduite que pour tout $z \in \boldsymbol{Z}$, il existe une base de voisinages $\boldsymbol{V}$ de z dans $\boldsymbol{X}$ tel que $\boldsymbol{V} \backslash \boldsymbol{Z}$ est connexe.

c) Montrer que le cône d'une variété cohomologique équidimensionnelle $\mathbb{L}$ de dimension $\geqslant 1$ est une pseudovariété normale, si et seulement si, $\mathbb{L}$ est connexe et orientable.
(Les espaces $\boldsymbol{X}$ de la question **1** sont donc des pseudovariétés normales.)

d) Montrer que $I_{\bar{0}}H^*(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = H^*(\boldsymbol{X}; k)$.

e) Que vaut $I_{\bar{t}}H^*(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})$ lorsque $\boldsymbol{X}$ est orientable, *i.e.* $\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}} \equiv \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$.

$\boxed{\text{a}}$ Soit $\mathscr{Q}^{\bullet} := \tau_{>0}(I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}[-d_{\boldsymbol{X}}])$. Le triangle de troncatures intelligentes :

$$i^!_{\boldsymbol{Z}}\, \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}} \longrightarrow i^!_{\boldsymbol{Z}}\, I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}[-d_{\boldsymbol{X}}] \equiv \mathbf{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{Z}}[-d_{\boldsymbol{X}}] \longrightarrow i^!_{\boldsymbol{Z}}\, \mathscr{Q}^{\bullet} \xrightarrow{[+1]}$$

donne

$$[\![i^!_{\boldsymbol{Z}}\, \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [\![I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{Z}}[-d_{\boldsymbol{X}}]]\!]_{\mathrm{ch}} \cup [\![i^!_{\boldsymbol{Z}}\, \mathscr{Q}^{\bullet}[-1]]\!]_{\mathrm{ch}},$$

où, de plus,

- $[\![I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{Z}}[-d_{\boldsymbol{X}}]]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [d_{\boldsymbol{X}} - d_{\boldsymbol{Z}}, d_{\boldsymbol{X}}]$ d'après la théorie générale ;
- $[\![i^!_{\boldsymbol{Z}}\, \mathscr{Q}^{\bullet}[-1]]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [2, +\infty[$, puisque $[\![\mathscr{Q}^{\bullet}[-1]]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [2, +\infty[$ et que $i^!_{\boldsymbol{Z}}$ est le foncteur dérivé à droite du foncteur, exact à gauche, $\varGamma_{\boldsymbol{Z}}$ des sections à support dans $\boldsymbol{Z}$.

Par conséquent, lorsque $d_{\boldsymbol{X}} - d_{\boldsymbol{Z}} \geqslant 2$, on a : $(*)$

$$\boxed{[\![i^!_{\boldsymbol{Z}}\, \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [2, +\infty[, \quad \mathscr{H}^0_{\boldsymbol{Z}}\big(\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}\big) = \mathscr{H}^1_{\boldsymbol{Z}}\big(\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}\big) = 0\,, H^0_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}) = H^1_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}) = 0}$$

Ce qui, reporté dans la suite longue de faisceaux dérivés associée à $\Delta\big(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}; \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}\big)$:

$$0 \to i_{\boldsymbol{Z}*} \mathscr{H}^0_{\boldsymbol{Z}} \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}} \longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}} \longrightarrow i_{\boldsymbol{U}*} \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{U}} \longrightarrow \mathscr{H}^1_{\boldsymbol{Z}} \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}} \to 0\,,$$

prouve que le morphisme d'adjonction

$$\boxed{\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}} \xrightarrow[\equiv]{} i_{\boldsymbol{U}*} \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{U}}}$$

est un isomorphisme de faisceaux.

Ces résultats reposent uniquement sur la minoration $\boldsymbol{2 \leqslant d_X - d_Z}$.

Lorsque $\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}} \in \mathrm{Loc}(\boldsymbol{X})$, les égalités $(*)$ sont évidemment vérifiées, *au voisinage de chaque point de* $\boldsymbol{X}$, par $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$ et donc par tout $\mathscr{L} \in \mathrm{Loc}(\boldsymbol{X})$. Par conséquent, on a aussi

$$\boxed{\mathscr{H}^0_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{L}\big) = \mathscr{H}^1_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{L}\big) = 0 \quad \text{et} \quad H^0_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}; \mathscr{L}) = H^1_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}; \mathscr{L}) = 0, \text{ pour tout } \mathscr{L} \in \mathrm{Loc}(\boldsymbol{X})} \qquad (\diamond)$$

Il faut souligner que ces égalités, classiquement prouvées sur les variétés topologiques (cohomologiques), résultent ici uniquement du fait que $\mathscr{H}^{-d_X}\, I\!D^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}$ est un système local et que $d_{\boldsymbol{X}} - d_{\boldsymbol{Z}} \geqslant 2$.

$\boxed{\text{b}}$ Notons $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{X} \backslash \boldsymbol{Z}$. Les premiers termes de la suite longue de faisceaux dérivés associée au triangle $\Delta\big(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}\big)$ sont

$$0 \to \mathscr{H}^0_{\boldsymbol{Z}}(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) \to \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}} \xrightarrow{\varepsilon} i_{\boldsymbol{U}*} \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}} \to \mathscr{H}^1_{\boldsymbol{Z}}(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) \to 0 \to I\!R^1 i_{\boldsymbol{U}*} \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}} \to$$

et le morphisme d'adjonction ε est un isomorphisme de faisceaux d'après ($\diamond$). En particulier, pour tout $z \in \boldsymbol{Z}$ et tout voisinage ouvert connexe $\boldsymbol{V}$ de z dans $\boldsymbol{X}$, on a

$$k = \Gamma(\boldsymbol{V}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = \Gamma(\boldsymbol{V}; i_{\boldsymbol{U}*} \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) = \Gamma(\boldsymbol{V} \backslash \boldsymbol{Z}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = k^{\Pi_0(\boldsymbol{V} \backslash \boldsymbol{Z})}$$

ce qui prouve que $\boldsymbol{V} \backslash \boldsymbol{Z}$ est connexe.

$\boxed{\text{c}}$ Soit $\mathbb{L}$ une variété cohomologique équidimensionnelle de dimension $\geqslant 1$. Notons

$$\boldsymbol{X} := \mathrm{c}_{\mathbf{s}}(\mathbb{L}), \quad \boldsymbol{U} := \boldsymbol{X} \backslash \{\mathbf{s}\} =]0,1[\times \mathbb{L}, \quad \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}} := \mathscr{H}^{-d_X} \mathbb{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} .$$

Supposons $\mathbb{L}$ connexe et orientable. Le morphisme d'adjonction $\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}} \to i_{\boldsymbol{U}*} \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{U}}$ est un isomorphisme d'après (a) et $\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{U}} \simeq \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}$ puisque $\boldsymbol{U}$ est produit de variétés topologiques orientables. Pour montrer que $\boldsymbol{X}$ est normale, il suffit donc de montrer que le morphisme d'adjonction $\varepsilon : \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}} \to i_{\boldsymbol{U}*} \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}$ est un isomorphisme. Or, ε est injective (car $\underline{\underline{\ker}}(\varepsilon)$ sous-faisceau de $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$ de support $\{\mathbf{s}\}$), les germes ε_x sont trivialement bijectifs pour $x \in \boldsymbol{X} \backslash \{\mathbf{s}\}$, et $\dim_k \big((i_{\boldsymbol{U}*} \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}})_{\mathbf{s}}\big) = \dim_k(H^0(\mathbb{L}; k)) = 1$, CQFD.

Si $\boldsymbol{X}$ est normale, $\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}$ est nécessairement isomorphe au faisceau constant $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$ puisque $\boldsymbol{X}$ est contractile. Il s'ensuit que $\boldsymbol{U}$ et donc $\mathbb{L}$ sont orientables. D'autre part

$$k \sim i_{\mathbf{s}}^{-1} \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}} = H^{-d_X}(\boldsymbol{\mathfrak{D}}^{\bullet}_{\mathbf{s}} i^{!}_{\mathbf{s}} \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = H^{d_X}_{\mathbf{s}}(\boldsymbol{X}; k) = H^{d_X - 1}_{\mathrm{c}}(\mathbb{L}; k) \underset{1}{\sim} H^0(\mathbb{L}; k)$$

($\underset{1}{\sim}$) par dualité de Poincaré. La variété $\mathbb{L}$ est donc connexe.

$\boxed{\text{d,e}}$ Pour toute stratification $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$ de pseudovariété de $\boldsymbol{X}$, le complémentaire de $\boldsymbol{U}^0_{\boldsymbol{\mathfrak{F}}}$ est de codimension $\geqslant 2$, on a donc $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\boldsymbol{\mathfrak{F}};\bar{0}}(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = i_{\boldsymbol{U}^*} \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}} = \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$ et $I_{\boldsymbol{\mathfrak{F}};\bar{0}} H^*(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = H^*(\boldsymbol{X}; k)$. Par le théorème d'indépendance de la filtration, on conclut

$$\boxed{I_{\bar{0}} H^*(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = H^*(\boldsymbol{X}; k)}$$

Par dualité $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{t}}(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) \simeq (\boldsymbol{\mathfrak{D}}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} \underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{\bar{0}}(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}))[-n]$ puisque $\boldsymbol{X}$ est orientable, donc :

$$\boxed{I_{\bar{t}} H^*(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) \simeq H^{d_X - *}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}; k)^{\vee}}$$

4) Comparaisons d'homologies d'intersection

$\boldsymbol{X}$ désigne une pseudovariété quelconque et $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$ une stratification de pseudovariété pour $\boldsymbol{X}$.

a) Montrer que le groupe $I_{\bar{p}} H^0(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})$ est indépendant de la perversité. Que représente-t-il ?

b) Étant données deux perversités $\bar{p} \leqslant \bar{q}$, on note $\bar{p} \overset{k}{\leftarrow} \bar{q}$ lorsqu'elles ne diffèrent qu'en k. Montrer que si $\bar{p} \overset{k}{\leftarrow} \bar{q}$, le morphisme canonique $I_{\boldsymbol{\mathfrak{F}};\bar{p}} H^*(\boldsymbol{X}; \mathscr{L}) \to I_{\boldsymbol{\mathfrak{F}};\bar{q}} H^*(\boldsymbol{X}; \mathscr{L})$ est un isomorphisme, si et seulement si, $I_{\bar{p}} H^{p_k+1}(\mathbb{L}(x), \mathscr{L}) = 0$, pour tout $x \in \boldsymbol{S}^k_{\boldsymbol{\mathfrak{F}}}$.

c) Dans la question précédente, donner une condition équivalente ne faisant référence à aucune stratification.

$\boxed{\text{a}}$ Pour tout foncteur exact à gauche $\boldsymbol{G}$, pour tout complexe $\mathscr{F}^{\bullet}$ tel que $\mathscr{H}^m \mathscr{F}^{\bullet} = 0$ pour $m < 0$, on a

$$\tau_{\leqslant 0} \mathbb{R}\boldsymbol{G} \mathscr{F}^{\bullet} = \mathbb{R}^0 \boldsymbol{G} \mathscr{F}^{\bullet} = \boldsymbol{G} \tau_{\leqslant 0} \mathscr{F}^{\bullet} .$$

et le prolongement intermédiaire $i^{\boldsymbol{\mathfrak{F}};\bar{p}}_{!*}$, étant composé des foncteurs $(\tau_{\leqslant p_{k+1}} \mathbb{R} i_{\boldsymbol{U}^k *})$, vérifie :

$$\tau_{\leqslant 0} i^{\boldsymbol{\mathfrak{F}};\bar{p}}_{!*} = i^{\boldsymbol{X}}_{U^0_{\boldsymbol{\mathfrak{F}}} *} \quad \text{et} \quad I_{\boldsymbol{\mathfrak{F}};\bar{p}} H^0(\boldsymbol{X}; \mathscr{L}) = \tau_{\leqslant 0} \mathbb{R}\Gamma\big(\boldsymbol{X}; i^{\boldsymbol{\mathfrak{F}};\bar{p}}_{!*} \mathscr{L}\big) = \Gamma\big(\boldsymbol{X}; i^{\boldsymbol{X}}_{U^0_{\boldsymbol{\mathfrak{F}}} *} \mathscr{L}\big) = \Gamma\big(U^0_{\boldsymbol{\mathfrak{F}}}; \mathscr{L}\big)$$

d'où

$$\boxed{I_{\overline{p}}H^0(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = I_{\mathcal{F};\overline{p}}H^0(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = H^0(\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}};k)} \qquad (\diamond)$$

L'homologie d'intersection en degré nul correspond donc au nombre de composantes connexes de $\boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}$, quelle que soit la perversité. Mais cette réponse est encore insuffisante puisque dépendante de la filtration alors que $I_{\overline{p}}H^0(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})$ n'en dépend pas.

Notons $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{U}^0_{\mathcal{F}}$ et $\boldsymbol{\Sigma} := \boldsymbol{\Sigma}_{\mathcal{F}}$ pour simplifier. Lorsque $\boldsymbol{U}$ est orientable on peut aisément améliorer la réponse précédente à l'aide de la dualité de Poincaré sur $\boldsymbol{U}$:

$$I_{\overline{p}}H^0(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = H^0(\boldsymbol{U};k) \underset{\mathrm{DP}}{\simeq} H^{d_X}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U};k)^\vee \underset{1}{\equiv} H^{d_X}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};k)^\vee \qquad (\diamond\diamond)$$

où $(\underset{1}{\equiv})$ résulte d'appliquer le foncteur $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c}}$ au triangle $\Delta\big(\boldsymbol{U},\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Sigma};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}\big)$ dont le sommet de droite est le complexe $i_{\boldsymbol{\Sigma}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{\Sigma}}$ de cohomologie bornée en degré par $d_{\boldsymbol{\Sigma}} \leqslant d_{\boldsymbol{X}} - 2$.

Une réponse pour le groupe $\boldsymbol{I_{\overline{p}}H^{d_X}(X;\underline{\underline{k}}_X)}$ $\boldsymbol{(\equiv I_{\overline{p}'}H^0_{\mathrm{c}}(X;\underline{\underline{k}}_X)^\vee)}$

Pour les même raisons que précédemment, on a :

$$\begin{aligned} I_{\overline{p}'}H^0_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})^\vee &= \mathbb{H}^0_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\mathbb{R}i_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}})^\vee \equiv \mathbb{H}^0(\boldsymbol{X};\mathfrak{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\,\mathbb{R}i_{\boldsymbol{U}*}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) \\ &\equiv H^0(\boldsymbol{X};i_{\boldsymbol{U}!}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}[d_{\boldsymbol{X}}]) \equiv H^{d_X}(\boldsymbol{X};i_{\boldsymbol{U}!}\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{U}}) \equiv H^{d_X}(\boldsymbol{X};k) \end{aligned}$$

Lorsque $\boldsymbol{U}$ n'est pas orientable on décrit les homologies d'intersection extrêmes à l'aide du faisceau d'orientations d'un espace topologique général, tel que défini dans (**3**). Ce faisceau n'est pas toujours un système local, mais dans le cas des pseudovariétés ses restrictions aux ouverts lisses coïncident avec le faisceau d'orientations des variétés topologiques. Les équivalences $(\diamond\diamond)$ deviennent alors

$$I_{\overline{p}}H^0(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = H^0(\boldsymbol{U};k) \underset{\mathrm{DP}}{\simeq} H^{d_X}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{U};\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{U}})^\vee \underset{1}{\equiv} H^{d_X}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}})^\vee$$

où $(\underset{1}{\simeq})$ résulte comme dans $(\diamond\diamond)$ à l'aide du triangle $\Delta\big(\boldsymbol{U},\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Sigma};\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}\big)$. On a un raisonnement analogue pour $I_{\overline{p}}H^{d_X}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})$. Le tableau suivant présente les conclusions.

	Cas orientable	**Cas général**
$I_{\overline{p}}H^0(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})$	$H^{d_X}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};k)^\vee$	$H^{d_X}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}})^\vee$
$I_{\overline{p}}H^{d_X}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})$	$H^{d_X}(\boldsymbol{X};k)$	$H^{d_X}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}})$

$\boxed{\text{b}}$ D'après le théorème de Deligne le morphisme $\underline{\underline{IC}}^\bullet_{\mathcal{F};\overline{p}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L}) \xrightarrow{\varepsilon} \underline{\underline{IC}}^\bullet_{\mathcal{F};\overline{q}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})$ est un isomorphisme, si et seulement si, $\underline{\underline{IC}}^\bullet_{\mathcal{F};\overline{q}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})$ vérifie les conditions de support et cosupport pour $i^{\mathcal{F};\overline{p}}_{!*}$. Comme la seule différence entre $\overline{p}$ et $\overline{q}$ est leur valeur en k, à savoir $q_k = p_k + 1$, il suffit de tester les conditions de supports et cosupport pour la strate $\boldsymbol{S}^k$, et même seulement la condition de support car celle de cosupport est automatiquement vérifiée dans la mesure ou $\overline{q}' \leqslant \overline{p}'$. Par conséquent, ε est un isomorphisme (en catégorie dérivée), si et seulement si,

$$[\![\underline{\underline{IC}}^\bullet_{\mathcal{F};\overline{q}}(\boldsymbol{X};\mathscr{L})|_{\boldsymbol{S}^k}]\!]_{\mathrm{ch}} \subseteq [0,p_k]$$

condition équivalente, d'après la description des germes des complexes d'intersection, à

$$I_{\mathcal{F};\overline{p}}H^{p_k+1}(\mathbb{L}(x);\mathscr{L}) = 0,\ \text{pour tout } x \in \boldsymbol{S}^k_{\mathcal{F}}. \qquad (\ddagger)$$

$\boxed{\text{c}}$ Les théorèmes d'homotopie et d'indépendance des stratifications permettent d'enlever la référence à la filtration dans la condition (‡) ci-dessus. En effet, on a

$$I_{\mathfrak{F};\overline{p}}H^{p_k+1}(\mathbb{L}(x);\mathscr{L}) = I_{\mathfrak{F};\overline{p}}H^{p_k+1}(N_x;\mathscr{L}) = I_{\overline{p}}H^{p_k+1}(N_x;\mathscr{L}),$$

où $N_x = \mathbb{R}^{d_{\boldsymbol{X}}-k-1} \times \mathrm{c}_x(\mathbb{L}(x))$ est un voisinage distingué de x dans $\boldsymbol{X}$. Il s'ensuit que

$$I_{\mathfrak{F};\overline{p}}H^{p_k+1}(\mathbb{L}(x);\mathscr{L}) = \mathscr{H}^{p_k+1}\big(\underline{\underline{IC}}^\bullet_{\overline{p}}(\boldsymbol{X},\mathscr{L})\big)_x$$

et (‡) équivaut à

$$\boxed{\dim_{\mathrm{ch}} \overline{\big|\mathscr{H}^{p_k+1}\big(\underline{\underline{IC}}^\bullet_{\overline{p}}(\boldsymbol{X},\mathscr{L})\big)\big|_{\mathrm{ch}}} < d_{\boldsymbol{X}} - k}$$

5) Prolongement de complexes d'intersection et de faisceaux pervers

Soient $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique complexe irréductible et $\varnothing \neq \boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ un ouvert de Zariski.

a) Montrer que pour tout système local $\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}$ défini sur un ouvert de Zariski non vide $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{U}$, le complexe d'intersection pour la perversité moyenne $\mathscr{F}^\bullet := \underline{\underline{IC}}^\bullet(\boldsymbol{U},\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}) \in D^b_c(\boldsymbol{U})$, se prolonge d'une et une seule manière en un complexe d'intersection $\tilde{\mathscr{F}}^\bullet$ de $\boldsymbol{X}$.

b) Généraliser (a) au cas où $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{U}$ sont des ouverts de Zariski non vides d'une sous-variété irréductible $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}$. Plus précisément, montrer qu'il existe un unique $\tilde{\mathscr{F}}^\bullet \in \mathscr{Per}(\boldsymbol{X})$ dont le support est contenu dans $\boldsymbol{Z}$, tel que $\tilde{\mathscr{F}}^\bullet[-\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{Z})]|_{\boldsymbol{Z}}$ est un complexe d'intersection de $\boldsymbol{Z}$ dont la restriction à $\boldsymbol{U}$ est $\mathscr{F}^\bullet$.

c) On dira qu'une stratification $\mathfrak{F}$ de $\boldsymbol{X}$ est « *adaptée à* $\boldsymbol{U}$ » si elle est algébrique, si elle vérifie les conditions de Whitney, et si $\boldsymbol{U}$ est réunion de strates de $\mathfrak{F}$. De telles stratifications existent toujours et leur ensemble est filtrant supérieurement pour l'ordre de raffinement.

Pour toute $\mathfrak{F}$ adaptée à $\boldsymbol{U}$, la définition du foncteur de prolongement intermédiaire $i^{\mathfrak{F}}_{!*}$ (pour la perversité moyenne) a un sens sur toute la catégorie $D^b_{\mathfrak{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{U})$ et est à valeurs dans $D^b_{\mathfrak{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$. Notons $n := \dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X})$. Prouver les assertions suivantes :

1) Pour tout $\mathscr{F}^\bullet \in \mathscr{Per}(\boldsymbol{U})$, on a

$$\big(i^{\mathfrak{F}}_{!*}(\mathscr{F}^\bullet[-n])\big)[n] \in \mathscr{Per}(\boldsymbol{X}) \quad \text{et} \quad \big(i^{\mathfrak{F}}_{!*}(\mathscr{F}^\bullet[-n])\big)[n]|_{\boldsymbol{U}} \equiv \mathscr{F}^\bullet$$

2) Le foncteur $\big(i^{\mathfrak{F}}_{!*}(\_\,[-n])\big)[n]$ est indépendant de la stratification $\mathfrak{F}$ adaptée à $\boldsymbol{U}$ choisie, on le notera $\big(i_{!*}(\_\,[-n])\big)[n]$.

3) Dans les questions (a,b), montrer que $i_{!*}\big(\mathscr{F}^\bullet[\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{Z})]\big) \equiv \tilde{\mathscr{F}}^\bullet[\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{Z})]$.

$\boxed{\text{a,b}}$ L'ouvert $\boldsymbol{V}$ est dense dans $\boldsymbol{X}$ et le prolongement intermédiaire pervers $\tilde{\mathscr{L}}$, de $\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}$ à $\boldsymbol{X}$, est l'unique complexe d'intersection de $\boldsymbol{X}$ à prolonger $\mathscr{L}$ d'après les théorèmes de Deligne et d'invariance par raffinement de stratifications de Whitney. La restriction $\tilde{\mathscr{L}}|_{\boldsymbol{U}}$ coïncide, pour les mêmes raisons à $\underline{\underline{IC}}^\bullet(\boldsymbol{U},\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}})$.

Lorsque $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{Z}$, on prolonge $\mathscr{F}^\bullet$ à l'unique complexe d'intersection $\mathscr{G}^\bullet$ dont la restriction à $\boldsymbol{V}$ coïncide à $\mathscr{F}^\bullet$. Le complexe $\tilde{\mathscr{F}}^\bullet := i_{\boldsymbol{Z}*}\mathscr{G}^\bullet[d_{\boldsymbol{Z}}] \in \mathscr{Per}(\boldsymbol{X})$ répond a la question.

$\boxed{\text{c-1}}$ Il suffit de considérer le cas où le passage de $\boldsymbol{U}$ à $\boldsymbol{X}$ se fait en rajoutant une seule strate $\boldsymbol{S}$ de dimension $d_{\boldsymbol{S}} := \dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{S})$, autrement dit, on suppose $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U} \amalg \boldsymbol{S}$ et la condition d'équisingularité vérifiée en chaque point de $\boldsymbol{S}$. Le foncteur à étudier est alors :

$$\mathfrak{I}_{!*} : \mathscr{F}^\bullet \in \mathscr{P}\!er(\boldsymbol{U}) \rightsquigarrow \tau_{\leqslant -(d_{\boldsymbol{S}}+1)} I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{F}^\bullet \in D^b_{\mathfrak{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X}),$$

dont il faut prouver que l'image est contenue dans $\mathscr{P}\!er(\boldsymbol{X})$.

Les conditions pour que $\mathscr{G}^\bullet \in D^b_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ soit pervers sont :

$$\boxed{(\mathbf{S})\ \dim_{\mathbb{C}} \overline{|\mathscr{H}^{-m}\mathscr{G}^\bullet|}_{\mathrm{ch}} \leqslant m \quad \text{et} \quad (\mathbf{S'})\ \dim_{\mathbb{C}} \overline{|\mathscr{H}^{-m}\mathbf{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}\mathscr{G}^\bullet|}_{\mathrm{ch}} \leqslant m}$$

Ces conditions étant vérifiées par $\mathscr{F}^\bullet \in \mathscr{P}\!er(\boldsymbol{U})$, le foncteur $\mathfrak{I}_{!*}$ ne fait que rajouter des germes de complexes bornés par $-(d_{\boldsymbol{S}}+1)$ sur chaque point de $\boldsymbol{S}$. La validité de la condition (**S**) ne peut donc pas être perturbée puisque $\boldsymbol{S}$ est dimension trop petite.

Pour mettre en défaut la condition (**S'**), il faudrait qu'il existe $x \in \boldsymbol{S}$ tel que

$$h^{-(d_S-r)}[i_x^{-1}\mathbf{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}(\mathfrak{I}_{!*}\mathscr{F}^\bullet)] \neq 0, \quad \text{pour un certain } r > 0. \tag{†}$$

Or,

$$i_x^{-1}\mathbf{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}(\mathfrak{I}_{!*}\mathscr{F}^\bullet) = \mathbf{D}^\bullet_x i_x^!(\mathfrak{I}_{!*}\mathscr{F}^\bullet) = \mathbf{D}^\bullet_x i_x^! \tau_{\leqslant -d_{\boldsymbol{S}}-1} I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{F}^\bullet = \mathbf{D}^\bullet_x i_x^!(i^!_{\boldsymbol{S}}\tau_{\leqslant -d_{\boldsymbol{S}}-1} I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{F}^\bullet),$$

et, grâce à l'équivalence fondamentale du théorème de Deligne suivante :

$$i^!_{\boldsymbol{S}}\tau_{\leqslant -d_{\boldsymbol{S}}-1} I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{F}^\bullet = (\tau_{> -d_{\boldsymbol{S}}-1} I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{F}^\bullet)[-1]|_{\boldsymbol{S}},$$

la condition (†) équivaut à

$$h^{d_S-r}[i_x^!(\tau_{> -d_{\boldsymbol{S}}-1} I\!Ri_{\boldsymbol{U}*}\mathscr{F}^\bullet)[-1]|_{\boldsymbol{S}})] \neq 0, \quad \text{pour un certain } r > 0. \tag{††}$$

L'amplitude du complexe entre parenthèses, contenue dans $[-d_{\boldsymbol{S}}+1, \infty[$, sera décalée vers $[2d_{\boldsymbol{S}} - d_{\boldsymbol{S}} + 1, \infty[$ par le foncteur $i_x^!$ en vertu de la dualité de Poincaré locale sur la variété topologique $\boldsymbol{S}$ de dimension réelle $2d_{\boldsymbol{S}}$. La condition (††) ne peut donc pas être satisfaite.

Par conséquent, le foncteur $\mathfrak{I}_{!*}$ est bien à valeurs dans $D^b_{\mathfrak{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X}) \cap \mathscr{P}\!er(\boldsymbol{X})$.

$\boxed{\text{c-2,3}}$ L'indépendance de $\big(i^{\mathfrak{F}}_{!*}\big(\_\,[-n]\big)\big)[n]$ par rapport à $\mathfrak{F}$ est conséquence immédiate de l'invariance des prolongements intermédiaires par raffinements. La dernière question est évidente.

—————×—————

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu

Samedi 6 juillet 2002