Cohomologie de de Rham

Alberto Arabia & Zoghman Mebkhout

Notes des cours du 24 février au 3 mars 2009

Table des matières

§ 1. Préliminaires

On décrit les sous-catégories pleines de la catégorie d'espaces localement annelés respectivement des : variétés topologiques, variétés différentielles réelles, variétés analytiques complexes, variétés algébriques sur un corps algébriquement clos, et catégories des schémas sur un anneau.

1.1 Rappel sur les catégories d'objets au-dessus d'un objet donné

Soit $\mathcal{S}$ un objet d'une catégorie $\mathfrak{C}$. La catégorie $\mathfrak{C}_{\mathcal{S}}$ des « *objets de* $\mathfrak{C}$ *de base* $\mathcal{S}$ » ou des « *objets de* $\mathfrak{C}$ *au-dessus de* $\mathcal{S}$ », est la catégorie dont les objets sont les morphismes de but $\mathcal{S}$, *i.e.* les éléments $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{X},\mathcal{S})$, où $\mathcal{X}$ désigne un objet quelconque de $\mathfrak{C}$, et où les morphismes de $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{X},\mathcal{S})$ vers $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{Y},\mathcal{S})$ sont les éléments $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ vérifiant $\alpha = \beta \circ \gamma$, soit

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow \\ \mathcal{S} \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix} \mathcal{Y} \\ {\scriptstyle\beta}\big\downarrow \\ \mathcal{S} \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow_{\mathrm{def}} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\oplus"] & \mathcal{Y} \arrow[d, "\beta"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, equal] & \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

1.1.1. Remarque. Le foncteur « *source* » de $\mathfrak{C}_{\mathcal{S}}$ vers $\mathfrak{C}$ qui fait correspondre à $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{X},\mathcal{S})$ l'objet $\mathcal{X}$ et à $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}_{\mathcal{S}}}(\alpha,\beta)$ le morphisme $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, est *fidèle*([1]) mais la catégorie $\mathfrak{C}_{\mathcal{S}}$ n'est pas une sous-catégorie de $\mathfrak{C}$.

1.2 Catégories des espaces annelés

On appelle ainsi la catégorie des « *espaces annelés* », *i.e.* des couples $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ où $\boldsymbol{X}$ est un espace topologique et $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est un faisceau d'anneau sur $\boldsymbol{X}$. On dit alors que $\boldsymbol{X}$ est l'« *espace topologique sous-jacent* » et $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ le « *faisceau structural* » de l'espace annelé $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$; on dira aussi que « *l'espace topologique* $\boldsymbol{X}$ *est annelé par le faisceau d'anneaux* $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ ». Un morphisme de $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ vers $(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ est la donnée d'un couple $(f,f^\natural)$ où $f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ est une application continue et $f^\natural = f^{-1}\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ (ou, ce qui revient au même $f_*:\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}\to f_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$) est un morphisme de faisceaux d'anneaux.

1.2.1. Exemples. Les exemples suivants représentent deux situations opposées. Dans la première l'espace topologique ne joue aucun rôle tandis que dans la seconde la topologie détermine le faisceau d'anneaux.

a) Le couple $(\bullet\,;\boldsymbol{A})$ où ‘ $\bullet$ ’ désigne l'espace topologique réduit à un point et $\boldsymbol{A}$ est un anneau, est un espace annelé. Dans ce contexte, un morphisme d'espaces annelés de $(\bullet\,;\boldsymbol{A})$

[1] Un foncteur « *covariant* » $\mathcal{F}:\mathfrak{C}\rightsquigarrow\mathfrak{D}$ entre deux catégories est une correspondance qui associe à chaque objet $\boldsymbol{O}\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ un objet $\mathcal{F}(\boldsymbol{O})\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{D})$ et a chaque morphisme $\alpha\in\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{O}_1,\boldsymbol{O}_2)$ un morphisme $\mathcal{F}(\alpha)\in\mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(\boldsymbol{O}_1),\mathcal{F}(\boldsymbol{O}_2))$ de sorte que $\mathcal{F}(\mathrm{id}_{\mathcal{O}}) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(O)}$ et $\mathcal{F}(\alpha\circ\beta) = \mathcal{F}(\alpha)\circ\mathcal{F}(\beta)$ à chaque fois que la composition a un sens. Le foncteur $\mathcal{F}$ est dit « *fidèle* » (resp. « *plein* », « *pleinement fidèle* ») lorsque l'application $\mathcal{F}:\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{O}_1,\boldsymbol{O}_2)\to\mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(\boldsymbol{O}_1),\mathcal{F}(\boldsymbol{O}_2))$ est injective (resp. surjective, bijective) quels que soient $\boldsymbol{O}_i\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$. Un foncteur $\mathcal{G}:\mathfrak{C}\rightsquigarrow\mathfrak{D}$ est dit « *contravariant* » lorsque la correspondance induite $\mathcal{G}^{\mathrm{op}}:\mathfrak{C}\rightsquigarrow\mathfrak{D}^{\mathrm{op}}$, où $\mathfrak{D}^{\mathrm{op}}$ désigne la catégorie opposée de $\mathfrak{D}$, est un foncteur covariant ; il est alors dit *fidèle, plein, pleinement fidèle* lorsque $\mathcal{G}^{\mathrm{op}}$ l'est.

vers $(\bullet\,;\boldsymbol{B})$ est juste un morphisme d'anneaux $\alpha : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$. La correspondance

$$\begin{gathered}\boldsymbol{A} \rightsquigarrow (\bullet\,;\boldsymbol{A})\\ \big(\alpha : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}\big) \rightsquigarrow \Big((\mathrm{id}_\bullet\,;\alpha) : (\bullet\,;\boldsymbol{A}) \to (\bullet\,;\boldsymbol{B})\Big)\end{gathered}$$

est un foncteur **contravariant et pleinement fidèle** de la catégorie des anneaux vers la catégorie des espaces annelés.

b) Pour tout espace topologique $\boldsymbol{X}$ notons $\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}}$ le «*faisceau des fonctions localement constantes*» à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Si $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est continue, le faisceau $f^{-1}\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{Y}}$ s'identifie canoniquement à $\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}}$ et la composée d'une section σ de $\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{Y}}$ avec f est une section, notée $f^\natural\sigma$, de $\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}}$; l'application $f^\natural : \underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{Y}} \to \underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}}$ est alors un morphisme de faisceaux d'anneaux canoniquement associé à f. La correspondance

$$\begin{gathered}\boldsymbol{X} \rightsquigarrow (\boldsymbol{X};\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}}),\\ (f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}) \rightsquigarrow \Big((f;f^\natural) : (\boldsymbol{X};\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{X}}) \to (\boldsymbol{Y};\underline{\mathbb{Z}}_{\boldsymbol{Y}})\Big)\end{gathered}$$

est un foncteur ***covariant* et pleinement fidèle** de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des espaces annelés.

1.2.2. Notation. On notera **Esp-ann** la catégorie des espaces annelés. Si $(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})$ et un espace annelé, on notera $\mathbf{Esp\text{-}ann}_{(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})}$ la catégorie des espaces annelés au-dessus de $(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})$. Pour tout anneau $\boldsymbol{A}$, on note $\mathbf{Esp\text{-}ann}_{\boldsymbol{A}}$ la catégorie des espaces annelés au-dessus de $(\bullet\,;\boldsymbol{A})$ (*cf.* 1.2.1-(a)), on l'appelle aussi la «*catégorie des espaces annelés de base* $\boldsymbol{A}$».

1.2.3. Proposition. *Soit* $\boldsymbol{A}$ *un anneau. La catégorie* $\mathbf{Esp\text{-}ann}_{\boldsymbol{A}}$ *est équivalente à la catégorie des espaces annelés par un faisceau de* $\boldsymbol{A}$*-algèbres et où les morphismes* $(f, f^\natural)$: $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \to (\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ *sont les morphismes d'espaces annelés tels que* $f^\natural : f^{-1}\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ *est un morphisme de faisceaux de* $\boldsymbol{A}$*-algèbres.*

Indications. Un morphisme d'espaces annelés $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \to (\bullet\,;\boldsymbol{A})$ est simplement la donnée d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $c^{-1}\boldsymbol{A} \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ où $c : \boldsymbol{X} \to \bullet$ est l'application constante et $c^{-1}(\boldsymbol{A}) = \underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$ est le faisceau constant de fibre $\boldsymbol{A}$. Or, la donnée d'un homomorphisme de faisceaux d'anneaux de $\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$ vers $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ équivaut à la donnée, pour chaque ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, d'un homomorphisme d'anneaux $\boldsymbol{A} \to \Gamma(U;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$, *i.e.* d'une structure de $\boldsymbol{A}$-algèbre sur $\Gamma(U;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$, de manière compatible aux morphismes de restriction $\Gamma(U;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \to \Gamma(V;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ pour $U \supseteq V$, c'est ce que l'on appelle la donnée d'une structure de faisceau de $\boldsymbol{A}$-algèbres sur $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$. La donnée d'un diagramme commutatif dans la catégorie **Esp-ann**

$$\begin{tikzcd}(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \arrow[r, "(f,f^\natural)"] \arrow[d, "(\alpha,\alpha^\natural)"'] & (\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}) \arrow[d, "(\beta,\beta^\natural)"] \\ (\bullet\,;\boldsymbol{A}) \arrow[r, equal] & (\bullet\,;\boldsymbol{A})\end{tikzcd}$$

équivaut au fait que le morphisme d'espaces annelés $(f, f^\natural)$ rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}} \arrow[r, equal] \arrow[d, "f^{-1}(\beta^\natural)"'] & \underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}} \arrow[d, "\alpha^\natural"] \\ f^{-1}\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \arrow[r, "f^\natural"] & \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\end{tikzcd}$$

autrement dit, que $f^\natural$ est un morphisme de faisceaux de $\boldsymbol{A}$-algèbres. ■

1.3 Catégories des espaces localement annelés

Un espace annelé $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est dit «*localement annelé*» lorsque, pour tout $x\in\boldsymbol{X}$ l'anneau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$ des germes de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ en x, est un anneau *local*. Un «*morphisme d'espaces localement annelés*» est un morphisme d'espaces annelés $(f,f^\natural):(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\to(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ tel que pour tout $x\in\boldsymbol{X}$ le morphisme induit $f^\natural_x:\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y};f(x)}\to\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$ est *local*, *i.e.* vérifie

$$(f^\natural_x)^{-1}(\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x})=\mathfrak{M}_{\boldsymbol{Y};f(x)}\,,$$

où $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}$ (resp. $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{Y};f(x)}$) désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$ (resp. de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y};f(x)}$).

1.3.1. Notation. On notera **Loc-ann** la catégorie des espaces localement annelés. Si $(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})$ et un espace localement annelé, on notera $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})}$ la catégorie des espaces localement annelés au-dessus de $(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})$. Pour tout anneau local $\boldsymbol{A}$, on note $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{\boldsymbol{A}}$ la catégorie des espaces annelés au-dessus de $(\bullet\,;\boldsymbol{A})$ (*cf.* 1.2.1-(a)), on l'appelle aussi la «*catégorie des espaces localement annelés de base* $\boldsymbol{A}$».

1.3.2. Remarque. Soit $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ un espace localement annelé et, pour $x\in\boldsymbol{X}$, notons $\mathcal{K}_{\boldsymbol{X};x}$ «*le corps résiduel*» de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$, *i.e.* $\mathcal{K}_{\boldsymbol{X};x}:=\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}/\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}$. Alors, le morphisme d'espaces annelés $(f,f^\natural):(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\to(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ est un morphisme de la catégorie **Loc-ann**, si et seulement si, le morphisme de corps $f^\natural_x:\mathcal{K}_{\boldsymbol{Y};f(x)}\to\mathcal{K}_{\boldsymbol{X};x}$, induit par $f^\natural_x:\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y};f(x)}\to\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$, est **injectif**, et ceci quel que soit $x\in\boldsymbol{X}$.

1.3.3. Commentaires. Dans ce qui précède il faut être prudent avec les notations $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}$ et $\mathcal{K}_{\boldsymbol{X};x}$ qui pourraient laisser penser à l'existence d'un sous-faisceau $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X}}$ de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ de fibres $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}$ tel que les fibres du faisceaux quotient $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{X}}=\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}/\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X}}$ s'identifient aux corps $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{X};x}$. Nous donnons à continuation un exemple et un contrexemple à cette propriété.

a) Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{M}$. Pour tout espace topologique $\boldsymbol{X}$ notons $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}:=\underline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{X}}$ le faisceau d'applications localement constantes de $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\boldsymbol{A}$ ([2]). L'espace annelé $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est localement annelé de fibres canoniquement isomorphes à $\boldsymbol{A}$. Montrer que les sections de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ à valeurs dans $\mathfrak{M}$ constituent un faisceau $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X}}$ sur $\boldsymbol{X}$ dont les fibres s'identifient aux idéaux maximaux $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}$ de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$; le quotient $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}/\mathcal{M}_{\boldsymbol{X}}$ est alors le faisceau de corps $\underline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{X}}$, où $\boldsymbol{K}$ désigne le corps résiduel de $\boldsymbol{A}$.

b) Soit $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels muni de sa topologie habituelle. Pour tout espace topologique $\boldsymbol{X}$ notons maintenant $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ le faisceau d'applications continues de $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (des «*fonctions réelles*»). Pour chaque $x\in\boldsymbol{X}$, l'anneau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$ est l'anneaux des germes de fonctions réelles définies au voisinage de x et l'application d'évaluation $\boldsymbol{e}_x:\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}\to\mathbb{R}$, $\boldsymbol{e}_x(g):=g(x)$, est surjective de noyau l'idéal maximal $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}\subseteq\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$. D'autre part, une fonction $f\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$ vérifiant $f(x)\neq 0$ étant inversible au voisinage de x, admet un inverse dans $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$. L'anneau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$ est donc local d'idéal maximal $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}$ et le couple $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est bien un espace *localement* annelé. Soient maintenant U un ouvert de $\boldsymbol{X}$ et $\sigma\in\Gamma(U;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ telle que $\sigma_u\in\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};u}$ pour tout $u\in U$. Compte tenu des définitions on a alors $\sigma(u)=0$ pour tout $u\in U$, autrement dit $\sigma=0$. Il n'existe donc pas de sous-faisceau $\mathfrak{N}_{\boldsymbol{X}}\subseteq\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ tel que $\mathfrak{N}_x=\mathfrak{M}_{\boldsymbol{X};x}$ pour tout $x\in\boldsymbol{X}$.

1.3.4. Exemples d'espaces localement annelés

a) Un espace topologique muni du faisceau des fonctions continues à valeurs dans un corps muni de la topologie discrète (*cf.* 1.3.3-(a)).

b) Une variété différentielle munie du faisceau des fonctions réelles (ou complexes) différentiables.

---

[2] On rappelle que l'expression «*faisceau d'applications de* $\boldsymbol{X}$ *à valeurs dans…*» est un raccourci pour «*faisceau des applications définies sur les ouverts de* $\boldsymbol{X}$ *à valeurs dans… dont les morphismes de restriction correspondent à la restriction d'applications*».

c) Une variété analytique complexe munie du faisceau des fonctions holomorphes.

d) Une variété algébrique sur un corps algébriquement clos munie du faisceau des fonctions régulières.

Ces exemples relèvent de la propriété générale suivante

1.3.5. Proposition. *Soit k un corps.*

a) *Soit $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ un espace annelé par un sous-faisceau du faisceau de toutes les application ensemblistes de $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans k. On suppose que si g est une fonction de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ définie et non nulle en $x\in\boldsymbol{X}$, il existe une fonction h de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ définie en x et telle que gh est l'application constante égale à 1_k sur un voisinage de x. Alors,*

  i) *$(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est localement annelé.*

  ii) *Si de plus $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est un faisceau de k-algèbres, les corps résiduels $\mathcal{K}_{\boldsymbol{X},x}$ sont tous canoniquement isomorphes à k, quel que soit $x\in\boldsymbol{X}$.*

b) *Soient $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ et $(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ des espaces annelés au-dessus de k vérifiant les hypothèses de* (a). *Le couple $(f,f^\natural)$ est un morphisme de $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ vers $(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$,* ***dans la catégorie Loc-ann$_{\boldsymbol{k}}$****, si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

  i) *$f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ est continue.*

  ii) *Pour tout ouvert $U\subseteq\boldsymbol{Y}$ et $g\in\Gamma(U;\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$, on a $g\circ f\in\Gamma\big(U;f_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\big)$.*

  iii) *$f^\natural$ est un morphisme de faisceaux de k-algèbres et $f^\natural(g)=g\circ f$.*

Démonstration

a) Soit $\boldsymbol{e}_x:\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}\to k$ l'application qui évalue une fonction au point x. Lorsque $g\notin\ker(\boldsymbol{e}_x)$, l'hypothèse dit que g est inversible dans $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$. L'anneau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X};x}$ est alors local d'idéal maximal $\ker(\boldsymbol{e}_x)$ puisque $\boldsymbol{e}_x$ n'est pas nulle. L'application naturelle $\mathcal{K}_{\boldsymbol{X},x}\to k$ est donc injective, et sera surjective si, de plus, $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est un faisceau de k-algèbres.

b) La suffisance est claire (*cf.* 1.2.3). Réciproquement, pour $x\in\boldsymbol{X}$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y},f(x)} \arrow[r, "f_x^\natural"] \arrow[d, "\boldsymbol{e}_{f(x)}"'] & \mathcal{O}_{\boldsymbol{X},x} \arrow[d, "\boldsymbol{e}_x"] \\ k \arrow[r, dashed, "\xi"] & k \end{tikzcd}$$

et l'existence (et unicité) de ξ résulte de ce que $f_x^\natural$ est local (*cf.* 1.3.2). Lorsque $(f,f^\natural)$ est, en plus, un morphisme d'espaces annelés au-dessus de k, le morphisme ξ est l'identité, on a donc :

$$f_x^\natural(g)(x)=g(f(x))\,,\ \forall x\in\boldsymbol{X}.$$

■

1.3.6. Remarque. La proposition 1.3.5 montre que dans le cas d'espaces annelés au-dessus d'un corps k et annelés par un faisceau de fonctions sur le même corps k, un morphisme d'espaces localement annelés est entièrement déterminé par l'application continue sous-jacente. Plus précisément ce théorème dit qu'une application continue $f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ dont les composées avec les fonctions de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$ sont des fonctions de $\mathcal{O}_X$ détermine entièrement $f^\natural$. On aura ainsi remarqué la condition habituelle dans la définition des applications différentiables (resp. holomorphes, algébriques, ...) entre variétés différentielles (resp. analytiques complexes, algébriques, ...) où une telle application est justement une application continue dont la composée avec les fonctions différentiables (resp. holomorphes, algébriques, ...) est du même type.

Le corollaire suivant de 1.3.5 est laissé en exercice.

1.3.7. Corollaire. *Les catégories suivantes sont équivalentes*

a) *La catégorie des espaces topologiques et la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Loc\text{-}ann}_k$ *des espaces annelés par le faisceau des applications localement constantes à valeurs dans le corps* k.

b) *La catégorie des variétés différentielles et la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{\mathbb{R}}$ *des variétés différentielles annelées par leur faisceaux des fonctions réelles différentiables.*

c) *La catégorie des variétés analytiques complexes et la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{\mathbb{C}}$ *des variétés analytiques complexes annelées par leur faisceaux des fonctions holomorphes.*

d) *La catégorie des variétés algébriques sur un corps algébriquement clos* k *et la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Loc\text{-}ann}_k$ *des variétés algébriques annelées par leur faisceaux des fonctions régulières.*

§ 2. Tableau de catégories d'espaces localement annelés

Dans le tableau ci-contre, la ligne **[A]** représente la catégorie des espaces annelés (resp. de base $(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})$) qui a fait l'objet de la section 1.2. La ligne **[B]** est la sous-catégorie des espaces *localement* annelés (resp. de base $(\boldsymbol{S};\mathcal{O}_{\boldsymbol{S}})$) de la section 1.3. Les autres lignes concernent cinq sous-catégories pleines d'espaces localement annelés qui intéressent notre cours.

Les objets de l'une de ces catégories $\mathfrak{C}$ s'obtiennent par recollement d'espaces d'une certaine sous-catégorie pleine $\mathcal{M}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{C}$ que l'on appelle « *sous-catégorie des modèles locaux de* $\mathfrak{C}$ ». Tout ouvert de $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \in \mathfrak{C}$ isomorphe à un modèle local est dit « *distingué* (*relativement à* $\mathcal{M}(\mathfrak{C})$) ». Il y a bien entendu beaucoup de sous-catégories de modèles locaux, et l'intérêt pour l'une ou l'autre dépend fortement des questions que l'on étudie. L'objectif de notre cours étant la comparaison de différentes théories cohomologiques sur chacune des catégories $\mathfrak{C}$, le choix des modèles locaux est alors guidé par deux critères :

- "Simplicité" dans le calcul de ces cohomologies ; p.ex. trivialité ou simplifications dues à certaines équivalences de catégories remarquables (ligne $\boldsymbol{\mathcal{M}(\mathfrak{C})'}$ du tableau).
- Possibilité de passer fonctoriellement, des cohomologies des modèles locaux (cohomologies locales) aux cohomologies de l'espace tout entier (cohomologies globales), via un formalisme combinatoire commun (cohomologie de Čech en l'occurrence).

  Cette condition se traduira dans notre cas par la recherche de l'acyclicité des termes des complexes de de Rham et par l'existence de recouvrements par des ouverts distingués dont les intersections finies sont également distinguées.

Dans chaque cas où cela a un sens nous indiquons le complexe de de Rham à considérer et en rappelons quelques propriétés importantes.

A	**Espaces annelés** (**Esp-ann**, **Esp-ann**$_{(S;\mathcal{O}_S)}$, **Esp-ann**$_A$)				
B	**Espaces** ***localement*** **annelés** (**Loc-ann**, **Loc-ann**$_{(S;\mathcal{O}_S)}$, **Loc-ann**$_A$)				
	I	**II**	**III**	**IV**	**V**
$\mathfrak{C}$	$\boldsymbol{X}^{\mathrm{top}}$ = **variété topologique.** $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{top}}}$ = faisceau des fonctions réelles continues.	$\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}$ = **variété différentielle ; topologie ordinaire.** $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$ = faisceau des fonctions réelles différentiables.	$\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$ = **variété analytique complexe ; topologie ordinaire.** $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ = faisceau des fonctions complexes holomorphes.	$\boldsymbol{X}$ = **variété algébrique sur** $k=\bar{k}$ **; topologie de Zariski.** $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ = faisceau des fonctions régulières sur k.	$\boldsymbol{X}$ = **schémas algébrique sur un anneau** $\boldsymbol{R}$ **; topologie de Zariski.** $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ = faisceau structural.
$\mathcal{M}(\mathfrak{C})$	**Ouverts de** $\mathbb{R}^n$ ——— **L'espace** $\mathbb{R}^n$	**Ouverts de** $\mathbb{R}^n$ ——— **L'espace** $\mathbb{R}^n$	**Ouverts de** $\mathbb{C}^n$ ——— **L'espace** $\mathbb{D}^n$	**Variétés algébriques affines sur** $k=\bar{k}$ ——— **Fermés algébriques de** $\mathbb{A}^n_k$	**Schémas affines sur un anneau** $\boldsymbol{R}$ ——— **Spectre d'un anneau ; topologie de Zariski ; localisation.**
$\mathcal{M}(\mathfrak{C})'$				k**-algèbres réduites de type fini** morphismes de k-algèbres	$\boldsymbol{R}$**-algèbres** morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres
$(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}}, d_*)$		**Complexe de de Rham** $(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}; d_*)$ Formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ réelles.	**Complexe de de Rham** $(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}; d_*)$ Formes différentielles *holomorphes* complexes.	**Complexe de de Rham** $(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/k}; d_*)$ Formes différentielles algébriques relatives à k.	**Complexe de de Rham** $(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{R}}; d_*)$ Formes différentielles algébriques relatives à $\boldsymbol{R}$.
Acyc. de $\underline{\Omega}^i$		Chaque $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$ est acyclique, quelle que soit $\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}$, puisque module sur le faisceau d'anneaux $\Omega^0_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$ qui est « *mou* ».	Chaque $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ est acyclique si $\boldsymbol{X}$ est une variété de Stein.	Chaque $\underline{\Omega}^d_{\boldsymbol{X}/k}$ est acyclique lorsque $\boldsymbol{X}$ est une variété affine.	Chaque $\underline{\Omega}^d_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{R}}$ est acyclique lorsque $\boldsymbol{X}$ est un schéma affine.
Ampl. de $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}}$		$\underline{\Omega}^n_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}=0$ **si** $n>\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{X})$	$\underline{\Omega}^n_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}=0$ **si** $n>\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X})$	$\underline{\Omega}^n_{\boldsymbol{X}/k}=0$ **si** $n>\dim_k(\boldsymbol{X})$	$\underline{\Omega}^n_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{R}}=0$ **si** $n>\dim_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{X})$
LPG		**vrai**	**vrai**	**vrai si car(**$\boldsymbol{k}$**)** $\neq \boldsymbol{0}$	**vrai si** $\mathbb{Q}\subseteq\boldsymbol{R}$
LPL		**vrai**	**vrai**	**faux**	**faux**

Ampl. : Amplitude du complexe. LPG : Lemme de Poincaré global pour l'espace affine. LPL : Lemme de Poincaré local.

2.1 [I] Variétés topologiques

2.1.1 [I] $\mathcal{C}$. Objets et morphismes. Une « *variété topologique de dimension n* » est la donnée d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ et d'un « *atlas n-dimensionnel continu $\mathcal{A}$ pour $\boldsymbol{X}$* », *i.e.* :

i) D'un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

ii) D'une famille $\{\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ d'homéomorphismes $\Big[$([3]) telle que les bijections, appelées « *applications de transition* »,

$$\Phi_{\beta,\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha,\beta}) \longrightarrow \phi_\beta(U_{\beta,\alpha})$$

sont *bicontinues* quels que soient $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$.$\Big]$

Un « *morphisme de variétés topologiques* » $\varphi : (\boldsymbol{X}, \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})$ est alors une application continue $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ $\Big[$([3]) telle que pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que $x \in U_\alpha$, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$ tel que $\varphi(x) \in U_\beta$, l'application

$$\phi_\beta \circ \varphi \circ \phi_{\alpha^{-1}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,,$$

qui est définie au voisinage de $\phi_\alpha(x)$, est *continue* au voisinage de $\phi_\alpha(x)$.$\Big]$

2.1.1.1. Une équivalence de catégories. Faisons correspondre à une variété topologique $(\boldsymbol{X}; \mathcal{A})$ le couple $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ où $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est le «*faisceau d'applications continues de $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans* $\mathbb{R}$» (les fonctions réelles). On vérifie qu'une application entre variétés topologiques $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est continue, si et seulement si, $f \circ \varphi$ est continue pour toute $f \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$. Le morphisme de faisceaux $\varphi^\natural : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$, $f \mapsto f \circ \varphi$ est alors un morphisme de faisceaux de k-algèbres, et la correspondance

$$(\boldsymbol{X}, \mathcal{A}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{Xg})\,, \qquad \Big(\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}\Big) \rightsquigarrow \Big(\varphi^\natural : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\Big)$$

est fonctorielle et pleinement fidèle dans $\textbf{Loc-ann}_{\mathbb{R}}$, d'après la proposition 1.3.5.

!! *La catégorie des variétés topologiques coïncide avec la catégorie d'espaces localement annelés localement isomorphes à l'espace annelé associé à l'un des espaces topologiques $\mathbb{R}^n$.* !!

2.1.2 [I] $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Modèles locaux des variétés topologiques. Bien évidemment la famille d'espaces affines $\{\mathbb{R}^n \mid n = 0, 1, \ldots\}$ suffit, mais on rajoute souvent les parties ouvertes des $\mathbb{R}^n$ de sorte que si $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ sont des ouverts distingués de $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ l'intersection $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{V}$ l'est aussi.

———×———

2.2 [II] Variétés différentielles

2.2.1 [II] $\mathcal{C}$. Objets et morphismes. Une « *variété différentielle de dimension n* » est la donnée d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ et d'un « *atlas n-dimensionnel différentiable $\mathcal{A}$ pour $\boldsymbol{X}$* », *i.e.* :

i) D'un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

[3] Partie entre parenthèses superflue, on la laisse uniquement pour insister sur l'analogie avec les catégories des variétés différentielles, analytiques complexes, algébriques, …

ii) D'une famille $\{\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ d'homéomorphismes telle que les bijections, appelées « *applications de transition* »,

$$\Phi_{\beta,\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha,\beta}) \longrightarrow \phi_\beta(U_{\beta,\alpha})$$

sont des *difféomorphismes* de classe $\mathcal{C}^\infty$ quels que soient $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$.

Un « *morphisme* » entre variétés différentielles $\varphi : (\boldsymbol{X}, \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})$ est alors la donnée d'une application continue $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ telle que pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que $x \in U_\alpha$, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$ tel que $\varphi(x) \in U_\beta$, l'application

$$\phi_\beta \circ \varphi \circ \phi_{\alpha^{-1}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,,$$

qui est définie au voisinage de $\phi_\alpha(x)$, est *différentiable* au voisinage de $\phi_\alpha(x)$.

2.2.1.1. La structure « *standard* » de variété différentielle sur $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}^n$ est celle donnée par l'atlas $\mathcal{A} = \{\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$. Plus généralement, la structure standard de variété différentielle d'un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est celle induite par la structure standard de $\mathbb{R}^n$.

2.2.1.2. On appelle « *fonction réelle d'une variété* $(\boldsymbol{X}; \mathcal{A})$ » tout morphisme de variétés de $(\boldsymbol{X}; \mathcal{A})$ vers $\mathbb{R}$ muni de sa structure standard de variété différentielle. Le « *faisceau* $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ *de fonctions réelles sur* $\boldsymbol{X}$ » est le faisceau dont les sections au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ est l'ensemble des fonctions réelles sur U. Comme la multiplication $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application différentiable, le faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est stable par multiplication de fonctions et c'est ainsi un faisceau de $\mathbb{R}$-algèbres.

On vérifie qu'une application continue $\varphi : (\boldsymbol{X}; \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})$ est un morphisme de variétés différentielles, si pour toute fonction réelle $f \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$ la composée $f \circ \varphi$ est une fonction réelle sur $(\boldsymbol{Y}, \mathcal{B})$, *i.e.* $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$. Le morphisme de faisceaux $\varphi^\natural : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$, $f \mapsto f\circ\varphi$ est alors un morphisme de faisceaux de k-algèbres, et la correspondance

$$(\boldsymbol{X}; \mathcal{A}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\,, \quad \Big(\varphi : (\boldsymbol{X}; \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})\Big) \rightsquigarrow \begin{cases} \varphi \;:\; \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y} \\ \varphi^\natural \;:\; \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\,, \quad f \mapsto f\circ\varphi \end{cases}$$

est fonctorielle et pleinement fidèle dans la catégorie $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{\mathbb{R}}$, d'après la proposition 1.3.5.

!! *La catégorie des variétés différentielles coïncide avec la catégorie d'espaces localement annelés localement isomorphes à l'espace annelé associé à l'une des variétés* $\mathbb{R}^n$. !!

2.2.2 [II] $\mathcal{M}(\mathfrak{C})$. Modèles locaux des variétés différentielles. Comme dans le cas topologique on peut tantôt se limiter à la catégorie des espaces affines $\{\mathbb{R}^n \mid n = 0, 1\ldots\}$ munis de leur structure standard de variété différentielle pour le cas des variétés séparés, tantôt considérer la catégorie des ouverts des espaces affines munis de leurs structures standard des variétés différentielles.

On démontre que toute variété différentielle connexe séparée localement difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ admet des recouvrements localement finis par des ouverts difféomorphes à $\mathbb{R}^n$ dont les intersections (finies) sont également difféomorphes à $\mathbb{R}^n$. De tels recouvrements sont appelés des « *bons recouvrements* ».

2.2.3 [II] $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}}$. Complexe de de Rham. C'est le complexe $(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}}, d_*)$ des « *formes différentielles réelles sur* $\boldsymbol{X}$ » ; où $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}}$ est le faisceau des sections différentiables de l'« *algèbre extérieure réelle* $\bigwedge^*_{\mathbb{R}}(\mathcal{T}^*\boldsymbol{X})$ » du fibré cotangent $\mathcal{T}^*\boldsymbol{X}$, et où d_* est la « *différentielle exté-*

rieure » qui est un morphisme de faisceaux de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $d_i : \underline{\Omega}^i \to \underline{\Omega}^{i+1}$ vérifiant $d_{i+1} \circ d_i = 0$. (Chaps. § **1** et § **2** du cours.)

Pour tout ouvert d'un espace affine $U \subseteq \mathbb{R}^n$, on a $\underline{\Omega}^j_U = \mathcal{O}_U \otimes_{\mathbb{R}} \big(\bigwedge^j_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n\big)$, soit :

$$\underline{\Omega}^j_U = \bigoplus_{0 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant n} \mathcal{O}_U \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_j}$$

2.2.4 [II] Acyc. Acyclicité de chaque $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}}$. Résulte de prouver que le faisceau d'anneaux $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$ est mou, de faire appel au théorème qui affirme que tout $\underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$-module, par exemple chaque $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}}$, est mou aussi, et enfin à utiliser le théorème qui affirme qu'un faisceau mou est $\Gamma(\boldsymbol{X};\_)$-acyclique. On trouvera dans le chapitre § **13** du cours une preuve de l'acyclicité des faisceaux $\underline{\Omega}^k_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$ qui ne fait pas allusion aux faisceaux mous mais qui en utilise les propriétés les plus importantes. Par conséquent, l'application canonique :

$$\boxed{h^\bullet \Gamma(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}; \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}) \xrightarrow[\simeq]{} I\!\!H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}; \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}})} \tag{$*_{\mathbb{R}}$}$$

est **bijective**.

2.2.5 [II] Ampl. Amplitude du complexe de de Rham. ([4]) Dans le cas connexe c'est évidemment l'intervalle $[0, \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{X})]$.

2.2.6 [II] LPG. Lemme de Poincaré global pour l'espace affine. Le lemme est vrai, se reporter au chapitre § **6** du cours.

2.2.7 [II] LPL. Lemme de Poincaré local. Vrai également puisque tout point admet une base de voisinages difféomorphes à l'espace affine.

Par conséquent, si $\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}$ est une variété différentielle de dimension n, le complexe de faisceaux

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}} \xrightarrow{\epsilon} \underline{\Omega}^0_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}} \xrightarrow{d_0} \underline{\Omega}^1_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}} \xrightarrow{d_1} \underline{\Omega}^2_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}} \xrightarrow{d_2} \cdots \underline{\Omega}^{\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{X})}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}} \longrightarrow \mathbf{0}$$

est exact et l'application induite par ε :

$$\boxed{H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{top}}; \mathbb{R}_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow[\simeq]{} I\!\!H^\bullet(\boldsymbol{X}; \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}})} \tag{$**_{\mathbb{R}}$}$$

est **bijective**.

2.2.8 Récapitulatif. Pour les variétés différentielles on a des isomorphismes canoniques :

$$\boxed{H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}; \mathbb{R}_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow[\simeq]{} I\!\!H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}; \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}) \xleftarrow[\simeq]{} h^\bullet \Gamma(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}; \underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}) = \big(\Omega\big(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}\big)^*, d_*\big)}$$

————×————

2.3 [III] Variétés analytiques complexes

2.3.1 [III] $\mathfrak{C}$. Objets et morphismes. Les définitions sont identiques à celles des variétés différentielles à quelques différences près ; à savoir :

[4] On appelle « *amplitude* » d'un module $\mathbb{Z}$-gradué C^* (et donc d'un complexe (C^*, d_*)) le plus petit intervalle entier $I = [m, n]$ tel que $C^i = 0$ pour tout $i \notin I$. On appelle « *amplitude cohomologique* » d'un complexe (C^*, d_*) l'amplitude du module de cohomologie $\{h^k(C^*, d_*)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

- Le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ est remplacé par le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. La topologie des espaces affines $\mathbb{C}^n$ est la topologie séparée de la métrique réelle habituelle.
- La « *différentiabilité* » est remplacée par « *différentiabilité complexe* » (ou« *holomorphie* »).

2.3.1.1. Une « *variété analytique complexe de dimension n* » est la donnée d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ et d'un « *atlas n-dimensionnel holomorphe $\mathcal{A}$ pour $\boldsymbol{X}$* », *i.e.* :

i) D'un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

ii) D'une famille $\{\phi_\alpha : U_\alpha \to W_\alpha \subseteq \mathbb{C}^n\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ d'homéomorphismes sur de parties ouvertes W_α de $\mathbb{C}^n$, telle que les bijections, appelées « *applications de transition* »,

$$\Phi_{\beta,\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha,\beta}) \longrightarrow \phi_\beta(U_{\beta,\alpha})$$

sont des *homéomorphismes biholomorphes* quels que soient $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$.

Un « *morphisme de variétés analytiques complexes* » $\varphi : (\boldsymbol{X}, \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})$ est alors la donnée d'une application continue $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ telle que pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que $x \in U_\alpha$, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$ tel que $f(x) \in U_\beta$, l'application

$$\phi_\beta \circ \varphi \circ \phi_{\alpha^{-1}} : W_\alpha \to W_\beta \,,$$

définie *a priori* seulement au voisinage de $\phi_\alpha(x)$, est *holomorphe* en $\phi_\alpha(x)$.

2.3.1.2. La structure « *standard* » de variété analytique complexe sur $\boldsymbol{X} = \mathbb{C}^n$ est celle donnée par l'atlas $\mathcal{A} = \{\mathrm{id} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n\}$. Plus généralement, la structure standard de variété analytique complexe d'un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}^n$ est celle induite par la structure standard de $\mathbb{C}^n$.

2.3.1.3. On appelle «*fonction holomorphe d'une variété* $(\boldsymbol{X}; \mathcal{A})$ » tout morphisme de variétés de $(\boldsymbol{X}; \mathcal{A})$ vers $\mathbb{C}$ muni de sa structure standard de variété analytique complexe. Le «*faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ de fonctions holomorphes sur $\boldsymbol{X}$* » est le faisceau dont les sections au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur U. Comme la multiplication $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une application holomorphe, le faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est stable par multiplication de fonctions et c'est donc un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres.

On vérifie qu'une application continue $\varphi : (\boldsymbol{X}; \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})$ est un morphisme de variétés analytiques complexes, si et seulement si pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$ la composée $f \circ \varphi$ est une fonction holomorphe sur $(\boldsymbol{Y}, \mathcal{B})$, *i.e.* $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$. Le morphisme de faisceaux $\varphi^\natural : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$, $f \mapsto f \circ \varphi$ est alors un morphisme de faisceaux de k-algèbres, et la correspondance

$$(\boldsymbol{X}; \mathcal{A}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\,, \quad \Big(\varphi : (\boldsymbol{X}; \mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y}; \mathcal{B})\Big) \rightsquigarrow \begin{cases} \varphi \;:\; \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y} \\ \varphi^\natural \;:\; \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\,, \quad f \mapsto f \circ \varphi \end{cases}$$

est fonctorielle et pleinement fidèle dans la catégorie $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{\mathbb{C}}$, d'après la proposition 1.3.5.

!! *La catégorie des variétés analytiques complexes coïncide avec la catégorie d'espaces localement annelés localement isomorphes à l'espace annelé associé à un ouvert de l'une des variétés analytiques complexes $\mathbb{C}^n$.* !!

2.3.2 [III] $\boldsymbol{\mathcal{M}(\mathfrak{C})}$. Modèles locaux. Contrairement au cas topologique et différentiel, les espaces affines $\{\mathbb{C}^n \mid n = 0, 1 \ldots\}$ munis de leurs structures standard de variétés analytiques complexes ne suffisent plus à décrire toutes les variétés analytiques complexes. En effet, déjà sur la droite complexe $\mathbb{C}$, on sait d'après le théorème d'uniformisation de Riemann, que le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ n'est pas biholomorphiquement isomorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, mais deux disques bornés sont toujours biholomorphiquement isomorphes. Il s'ensuit que pour les variétés analytiques complexes de dimension 1, *i.e.* les surfaces de Riemann, le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ est un modèle local suffisant. Plus généralement, le produit $\mathbb{D}^n$ est un modèle local pour les variétés analytiques complexes de dimension n. La catégorie des modèles locaux pour les variétés analytiques complexes est la catégorie des ouverts des espaces affines $\mathbb{C}^n$ (où des $\mathbb{D}^n$) munis de leurs structures standard des variétés analytiques complexes.

2.3.3 [III] $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}}$. Complexe de de Rham

- L'algèbre extérieure réelle $\bigwedge_{\mathbb{R}}(\mathcal{T}^*\boldsymbol{X})$ du fibré cotangent est remplacée par algèbre extérieure *complexe* $\bigwedge_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}^*\boldsymbol{X})$. En particulier,

$$\textstyle\bigwedge^j_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}^*\boldsymbol{X}) = 0\,, \qquad \text{si} \quad j > \dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X})\,,$$

  à la différence du cas réel où l'on aurait $\bigwedge^j_{\mathbb{R}}(\mathcal{T}^*\boldsymbol{X}) = 0$, seulement pour $j > 2\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X})$.

2.3.3.1. Le complexe de de Rham à considérer est celui des «*formes différentielles holomorphes*», c'est à dire le faisceau $\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ des sections holomorphes du fibré $\bigwedge^\bullet_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}^*\boldsymbol{X})$. La «*différentielle extérieure complexe*» est un morphisme de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $d_i : \underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}} \to \underline{\Omega}^{i+1}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ vérifiant $d_{i+1} \circ d_i = 0$.

Pour tout ouvert d'un espace affine $U \subseteq \mathbb{C}^n$, on a $\underline{\Omega}^j_U = \mathcal{O}_U \otimes_{\mathbb{C}} \big(\bigwedge^j_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n\big)$, soit :

$$\underline{\Omega}^j_U = \bigoplus_{0 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant n} \mathcal{O}_U \, dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_j}\,.$$

2.3.3.2. Suite à la remarque précédente, le faisceau $\underline{\Omega}^j_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ est un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$-module cohérent.

2.3.4 [III] Acyc. Acyclicité de chaque $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}}$. À la différence du cas différentiel réel, il n'existe pas dans le contexte holomorphe des fonctions à support compact non nulles, ni donc pas, non plus, des partitions de l'unité, de sorte que le faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ n'a aucune chance d'être mou. Il existe par contre une vaste catégorie d'espaces annelés sur lesquels les faisceaux $\underline{\Omega}^j_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ sont acycliques, il s'agit des «*espaces de Stein*» ([5]). On a :

Théorème B de Cartan. *Soit $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ un espace de Stein. Soit $\mathcal{M}$ un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules. Alors $H^{>0}(\boldsymbol{X};\mathcal{M}) = 0$.*

2.3.4.1. Exemples d'espaces de Stein.

- Les espaces affines $\mathbb{C}^n$.
- Les fermés algébriques de $\mathbb{C}^n$ ([6]).
- Les ouverts algébriques principaux de $\mathbb{C}^n$.

[5] Voir chapitres VII et VIII (pp. 209, 243) de [GR]. On pourra s'y reporter également pour la définition de la catégorie d'«*espaces analytiques complexes*», sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{\mathbb{C}}$ dont les espaces sont plus généraux que les «*variétés analytiques complexes*» en ce sens qu'ils peuvent être singuliers. La définition de la catégorie des espaces analytiques complexes est identique à celle des variétés algébriques complexes à ceci près que l'on remplace l'algébricité des fonctions par leur analyticité. L'article [GaGa] donne un aperçu très rapide de cette catégorie.

[6] La plupart du temps il s'agit d'espaces singuliers.

2.3.4.2. Critère cohomologique pour être de Stein. Le critère pour être de Stein suivant est l'analogue exact du critère d'affinité de Serre (2.4.6) en géométrie algébrique et en théorie des schémas. C'est une réciproque du théorème **B** de Cartan.

Théorème. *Soit* $(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})$ *un espace analytique complexe irréductible. Les assertions suivantes sont équivalentes* ([7]).

a) $(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})$ *est un espace de Stein.*

b) $H^{>0}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\mathcal{M})=0$ *pour tout* $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$*-module cohérent* $\mathcal{M}$.

c) $H^{>0}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\mathcal{I})=0$ *pour tout sous-*$\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$*-module cohérent* $\mathcal{I}$ *de* $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$.

2.3.4.3. La remarque 2.3.3.2 et le théorème **B** de cartan donnent l'acyclicité des $\underline{\underline{\Omega}}^{j}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}$ lorsque $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$ est un ouvert algébrique principal d'un espace affine complexe. Par conséquent, l'application canonique :

$$\boxed{h^{\bullet}\Gamma(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\underline{\underline{\Omega}}^{*}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}) \xrightarrow[\simeq]{} \mathbb{H}^{\bullet}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\underline{\underline{\Omega}}^{*}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})} \qquad (*_{\mathbb{C}})$$

est **bijective** pour tout ouvert algébrique principal $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}\subseteq\mathbb{C}^{n}$.

2.3.5 [III] Ampl. Amplitude du complexe de de Rham. Il s'agit de $[0,\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}})]$. Le complexe de de Rham holomorphe d'une variété analytique complexe a donc une amplitude à priori moitié que celle du complexe de de Rham différentiel réel du même espace vu comme variété différentielle réelle.

2.3.6 [III] LPG. Lemme de Poincaré global pour l'espace affine. Il est vérifié et pour essentiellement les même raisons que dans le cas réel.

2.3.7 [III] LPL. Lemme de Poincaré local. Vrai également puisque tout point admet une base de voisinages isomorphes à l'espace affine.

Par conséquent, si $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$ est une variété analytique complexe, le complexe de faisceaux

$$\mathbf{0}\longrightarrow\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}\xrightarrow{\epsilon}\underline{\underline{\Omega}}^{0}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}\xrightarrow{d_0}\underline{\underline{\Omega}}^{1}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}\xrightarrow{d_1}\underline{\underline{\Omega}}^{2}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}\xrightarrow{d_2}\cdots\underline{\underline{\Omega}}^{\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X})}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}\longrightarrow\mathbf{0}$$

est exact et l'application induite par ε :

$$\boxed{H^{\bullet}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{top}};\mathbb{R}_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow[\simeq]{} \mathbb{H}^{\bullet}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\underline{\underline{\Omega}}^{*}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})} \qquad (**_{\mathbb{C}})$$

est **bijective**.

2.3.8 Récapitulatif

a) Soit $\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}$ une variété analytique complexe, notons $\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}$ la variété différentielle réelle sous-jacente. On a des isomorphismes canoniques (*cf.* $(**_{\mathbb{R}})$ et $(**_{\mathbb{C}})$)

$$\boxed{\boxed{\mathbb{H}^{\bullet}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}};\underline{\underline{\Omega}}^{*}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}) \xleftarrow[\simeq]{} H^{\bullet}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{top}};\mathbb{R}_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow[\simeq]{} \mathbb{H}^{\bullet}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\underline{\underline{\Omega}}^{*}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})}}$$

[7] Voir chap. VIII thm. 20 (p. 246) de [GR].

b) Pour les variétés analytiques complexes **de Stein** on a des isomorphismes canoniques :

$$\boxed{H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{top}};\mathbb{R}_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow[\simeq]{} I\!H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}) \xleftarrow[\simeq]{} h^\bullet\Gamma(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}};\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}}) = \big(\Omega(\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}})^*, d_*\big)}$$

Par conséquent : *La cohomologie de de Rham d'une variété différentielle admettant une structure complexe qui en fait une variété analytique complexe de Stein est toujours nulle en degrés supérieurs à la moitié de la dimension.*

———×———

2.4 [IV] Variétés algébriques

2.4.1 Préliminaires. À la différence des catégories précédentes, les variétés algébriques ne sont pas *uniquement* des recollements d'un même espace ($\mathbb{R}^n$ dans le cas topologique ou différentiel réels, $\mathbb{D}^n$ dans le cas analytique complexe) on recolle des espaces plus généraux appelés des « *variétés (algébriques) affines (sur k)* ». Les paragraphes suivants rappellent leur définition.

2.4.1.1. Fonctions régulières de l'espace affine. On note $\mathbb{A}^n_k$ le « *k-espace affine de dimension n* ». On appelle « *fonction régulière* » sur $\mathbb{A}^n_k$ toute « *application polynomiale* » $f : \mathbb{A}^n_k \to k$. Si nous fixons un repère affine pour $\mathbb{A}^n_k$ de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ l'application f s'exprime sous la forme d'un polynôme unique $F(X_1,\ldots,X_N) \in k[\overline{X}]$ (puisque k est infini). La multiplication des fonctions régulières est une fonction régulière et l'ensemble $\mathcal{R}(\mathbb{A}^n_k)$ de telles applications est muni d'une structure canonique d'anneau isomorphe à l'anneau $k[\overline{X}]$ des polynômes à n variables et coefficients dans k.

! *Dans les sous-paragraphes suivants nous notons* ***provisoirement*** $\boldsymbol{X} := \mathbb{A}^n_k$ *et donc* $\mathcal{R}(\boldsymbol{X}) := \mathcal{R}(\mathbb{A}^n_k)$. !

2.4.1.2. Ensembles algébriques affines sur $\boldsymbol{k}$. On appelle « *sous-ensemble algébrique de* $\boldsymbol{X}$ » toute partie $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X}$ pour laquelle il existe une famille de fonctions $\{f_\alpha \in \mathcal{R}(\boldsymbol{X})\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ telle que :

$$\boldsymbol{Y} = \big\{x \in \boldsymbol{X} \bigm| f_\alpha(x) = 0\,, \forall\alpha \in \mathfrak{A}\big\}\,.$$

Il est clair que $\boldsymbol{Y}$ est aussi l'« *ensemble des zéros* » des fonctions de l'idéal $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\rangle$ engendré par la famille $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$; nous pouvons donc tout aussi bien déclarer qu'un sous-ensemble algébrique de $\boldsymbol{X}$ est l'ensemble des « *zéros d'un idéal $\boldsymbol{I}$ de $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})$* » noté :

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I}) = \big\{x \in \boldsymbol{X} \bigm| f(x) = 0\,, \forall f \in \boldsymbol{I}\big\}\,.$$

Lemme. *Soient $\boldsymbol{I},\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}_\alpha$ des idéaux. On a* [8] *:*

- $\boldsymbol{Z}(\langle 1\rangle) = \varnothing$ *et* $\boldsymbol{Z}(\langle 0\rangle) = \boldsymbol{X}$, • $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I}) \cup \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{IJ})$, • $\bigcap_\alpha \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I}_\alpha) = \boldsymbol{Z}(\sum_\alpha \boldsymbol{I}_\alpha)$

Par conséquent, les sous-ensembles algébriques de $\boldsymbol{X}$ sont les fermés d'une topologie.

2.4.1.3. Topologie de Zariski de $\boldsymbol{X}$. On appelle ainsi la topologie de $\boldsymbol{X}$ dont les fermés sont ses sous-ensembles algébriques, appelés dorénavant « *les fermés de Zariski de $\boldsymbol{X}$* ».

[8] On note $\boldsymbol{IJ}$ l'ensemble des sommes finies $\sum_i f_i g_i$ avec $f_i \in \boldsymbol{I}$ et $g_i \in \boldsymbol{J}$; c'est un idéal de $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})$. Si $\boldsymbol{I}_1,\boldsymbol{I}_2,\boldsymbol{J}$ sont des idéaux, on a $(\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{J} = \boldsymbol{I}_1\boldsymbol{J}+\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{J}$.

2.4.1.4. Exercice. Montrer que si k est un corps infini (p.ex. algébriquement clos), la topologie de Zariski de $\boldsymbol{X}$ n'est jamais séparée. Qu'en est-t-il si k est un corps fini ?

2.4.1.5. Hypersurfaces et ouverts principaux de $\boldsymbol{X}$. On appelle « *hypersurface de* $\boldsymbol{X}$ » l'ensemble des zéros d'une seule fonction $f \in \mathcal{R}(\boldsymbol{X})$, on la note $\boldsymbol{Z}(f)$, son complémentaire est un « *ouvert principal* » et est noté $D(f)$.

2.4.1.6. Proposition

a) *Pour tous* $f, g \in \mathcal{R}(\boldsymbol{X})$ *on a* $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.

b) *Les ouverts principaux de* $\boldsymbol{X}$ *constituent une base d'ouverts pour la topologie de Zariski.*

c) $\boldsymbol{X}$ *est quasi-compacte.*

d) *Si* k *est algébriquement clos on a* $D(f) \supseteq D(g)$, *si et seulement si* $g \in \sqrt{\langle f \rangle}$ ([9]). *En particulier,* $D(f) = \boldsymbol{X}$, *si et seulement si* f *est inversible.*

Commentaires sur la preuve. L'assertion (a) résulte aussitôt du fait que k est un corps. (b) puisque si $x \notin \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I})$, il existe $f \in \boldsymbol{I}$ telle que $f(x) \neq 0$ auquel cas $x \in D(f) \subseteq \complement \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I})$. (c) Admet deux justifications, la « *quasi-compacité* » est la propriété qui dit que de tout recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini, propriété équivalente à dire que si une famille décroissante de fermés est d'intersection vide alors l'un des fermés de la famille est vide. Or, à une suite décroissante de fermés correspond une suite croissante d'idéaux de $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})$ est comme cet anneau est noethérien, la suite d'idéaux est stationnaire de même alors que la suite de fermés ; etc. Une autre preuve (valable dans le cas non noethérien et plus généralement dans le contexte des schémas affines) repose sur (b), en effet tout recouvrement ouvert admet un raffinement par des ouverts principaux et si $\boldsymbol{X} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} D(f_\alpha)$, alors $\varnothing = \boldsymbol{Z}(\langle f_\alpha \rangle)$ et $\langle f_\alpha \rangle = \langle 1 \rangle$ (car k est algébriquement clos), mais alors $1 \in \langle f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_r} \rangle$ pour une certaine famille finie $\{f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_r}\}_{\alpha_i \in \mathfrak{A}}$, autrement dit $\boldsymbol{X} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant r} D(f_{\alpha_i})$. (d) est conséquence du théorème des zéros de Hilbert qui affirme que la correspondance bijective entre les sous-ensembles algébriques de $\boldsymbol{X}$ et les idéaux *radicaux* de $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})$. L'assertion (d) est fausse si k n'est pas algébriquement clos, par exemple dans $\mathbb{R}[X]$ on a $D(X^2+1) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$. ∎

2.4.1.7. Fonctions régulières sur un ouvert principal de $\boldsymbol{X}$. Soit f une fonction régulière non nulle de $\boldsymbol{X}$. Toute fonction régulière $g : \boldsymbol{X} \to k$ donne, par restriction, une application $g : D(f) \to k$ et cette correspondance est injective puisque k est infini. De plus l'application $f : D(f) \to k$ est nulle part nulle. On défini alors l'anneau des « *fonctions régulières sur l'ouvert principal* $D(f)$ » comme le localisé de $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})$ en f, on pose donc $\mathcal{R}(D(f)) := \mathcal{R}(\boldsymbol{X})_f$ ([10]). On a ainsi le morphisme canonique de « *restriction de fonctions régulières* » $\rho^1_f : \mathcal{R}(D(1)) \to \mathcal{R}(D(f))$ défini par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(\boldsymbol{X}) & \overset{\rho^1_f}{\dashrightarrow} & \mathcal{R}(D(f)) \\ \| & & \| \\ \mathcal{R}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\nu_f} & \mathcal{R}(\boldsymbol{X})_f\,, \quad x \mapsto \frac{x}{1}. \end{array} \qquad (\rho)$$

[9] Pour tout idéal $\boldsymbol{I}$ on note $\sqrt{\boldsymbol{I}}$ son « *radical* », *i.e.* l'ensemble des f telles que $f^N \in \boldsymbol{I}$ pour $N \gg 0$. On a $\sqrt{\boldsymbol{I}} = \sqrt{\sqrt{\boldsymbol{I}}}$. On appelle « *radical* » tout idéal $\boldsymbol{I}$ tel que $\boldsymbol{I} = \sqrt{\boldsymbol{I}}$.

[10] Se reporter au chapitre § **16** du cours.

2.4.1.8. Faisceau des fonctions régulières sur $\boldsymbol{X}$. D'après 2.4.1.6-(d), l'inclusion $D(f) \supseteq D(g)$ implique que f est inversible dans $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})_g$ de sorte que le morphisme canonique de restriction d'algèbres $\rho : \mathcal{R}(\boldsymbol{X}) \to \mathcal{R}(D(g))$ se factorise d'une et une unique manière à travers $\mathcal{R}(D(f))$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}(\boldsymbol{X}) = \mathcal{R}(D(1)) \arrow[rr, "\rho_g^1"] \arrow[d, equal] & & \mathcal{R}(D(g)) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{R}(D(1)) \arrow[r, "\rho_f^1"] & \mathcal{R}(D(f)) \arrow[r, "\rho_g^f"] & \mathcal{R}(D(g))
\end{tikzcd}$$

La correspondance $D(f) \rightsquigarrow \mathcal{R}(\boldsymbol{X})_f$, $\big(D(f) \supseteq D(g)\big) \rightsquigarrow \rho_g^f$ est un préfaisceau de k-algèbres $\mathcal{A}_{\boldsymbol{X}}$ sur le catégorie des ouverts principaux de $\boldsymbol{X}$ et comme ces ouverts sont une base pour la topologie de Zariski de $\boldsymbol{X}$ (2.4.1.6-(b)), les germes de $\mathcal{A}_{\boldsymbol{X}}$ définissent un « *espace étalé au-dessus de* $\boldsymbol{X}$ » ([11]) dont les sections locales continues donnent le « *faisceau des fonctions régulières de* $\boldsymbol{X}$ » noté $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$. Le couple $(\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est l'espace annelé associé à l'espace affine $\boldsymbol{X} = \mathbb{A}_k^n$.

2.4.1.9. Fonctions régulières sur un fermé de Zariski $\boldsymbol{Y}$ de $\mathbb{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{n}}$. On procède comme pour les ouverts principaux 2.4.1.7. Soit $\boldsymbol{Y}$ un fermé de Zariski de $\boldsymbol{X}$. On appelle « *fonction régulière sur* $\boldsymbol{Y}$ » et l'on note $\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})$ leur ensemble, toute application de $\boldsymbol{Y}$ vers k induite par une application régulière de $\boldsymbol{X}$. Si nous notons $\mathcal{I}(\boldsymbol{Y})$ l'idéal des fonctions de $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})$ qui s'annulent sur $\boldsymbol{Y}$, on a clairement

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\mathcal{R}(\boldsymbol{X})}{\mathcal{I}(\boldsymbol{Y})} \tag{$\diamond$}$$

Proposition. *L'anneau $\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})$ est une k-algèbre de type fini réduite,* i.e. *sans élément nilpotent.*

2.4.1.10. Espace annelé associé à un fermé de Zaiski. La démarche pour définir la topologie de Zariski de $\boldsymbol{Y}$, puis le faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$ des k-algèbres régulières sur $\boldsymbol{Y}$, est rigoureusement la même que celle des paragraphes précédents en remplaçant $\boldsymbol{X}$ par $\boldsymbol{Y}$.

Théorème ([14])

a) *Pour tout ouvert principal $D(f) \subseteq \boldsymbol{Y}$, on a $\Gamma\big(D(f); \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}\big) = \mathcal{R}(\boldsymbol{Y})_f$.*

b) *L'anneau des germes du faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$ en $y \in \boldsymbol{Y}$ est isomorphe à l'anneau local $\mathcal{R}(Y)_{\mathfrak{M}_y}$ où $\mathfrak{M}_y$ désigne l'idéal (maximal) de $\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})$ des fonctions qui s'annulent en y ([15]).*

! *À partir de maintenant la notation '$\boldsymbol{X}$' cesse de référer uniquement aux espaces affines.* !

2.4.1.11. Catégorie des variétés affines sur $\boldsymbol{k}$. Nous appellerons « *variété (algébrique) affine sur* k » la donnée d'un fermé de Zariski d'un espace affine sur k muni de sa topologie de Zariski ([16]). Un « *morphisme de variétés affines de* $\boldsymbol{X}$ *vers* $\boldsymbol{Y}$ » est une application continue $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ telle que pour toute fonction régulière $f : \boldsymbol{Y} \to k$ la composée $f \circ \varphi : \boldsymbol{X} \to k$ soit une fonction régulière. On remarquera le lemme suivant qui donne une définition alternative de morphisme entre variétés algébriques affines.

---

[11] Voir [Go] chap. II § **1.2** p. 110.

[14] Voir [**Har**] chap. I § **3** th. **3.2** p. 17, et chap II § **2** prop. **2.2** p. 71.

[15] Ce que nous notions $\mathcal{I}(y)$ en 2.4.1.9.

[16] On défini parfois une variété affine comme un fermé de Zariski *irréductible*, *i.e.* tel qu'il ne peut être réalisé comme réunion de deux fermés plus petits (*cf.* [Har] chap. I § **1** p. 3)

Lemme. *Supposons $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{A}_k^n$ et $\boldsymbol{Y} \subseteq \mathbb{A}_k^m$. Un morphisme de variétés algébriques de $\boldsymbol{X}$ vers $\boldsymbol{Y}$ est la restriction d'une application polynomiale de $\mathbb{A}_k^n$ vers $\mathbb{A}_k^m$.*

Indication. Soit $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ un morphisme de variétés affines. Fixons un repère affine sur $\mathbb{A}_k^n$ (resp. sur $\mathbb{A}_k^m$) de coordonnées $\overline{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ (resp. $\overline{Y} := \{Y_1, \ldots, Y_m\}$). Pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$ on a

$$\varphi(x) = \big(Y_1(\varphi(x)), \ldots, Y_m(\varphi(x))\big)$$

Or, chaque $Y_i \circ \varphi$ étant une fonction régulière de $\boldsymbol{X}$ par définition de morphisme, c'est la restriction d'une fonction régulière de $\mathbb{A}_k^n$ (2.4.1.9-($\diamond$)) par exemple de la fonction polynomiale $P_i(\overline{X}) \in \mathcal{R}(\mathbb{A}_k^n)$. On a donc

$$\varphi(x) = \big((Y_1 \circ \varphi)(x), \ldots, (Y_m \circ \varphi)(x)\big) = \big(P_1(\overline{X}(x)), \ldots, P_m(\overline{X}(x))\big)\,,$$

où, bien évidemment, l'application $x \mapsto \big(P_1(\overline{X}(x)), \ldots, P_m(\overline{X}(x))\big)$ est une application polynomiale de $\mathbb{A}_k^n$ vers $\mathbb{A}_k^m$. ■

2.4.1.12. Une équivalence de catégories. Dans le paragraphe 2.4.1.10 nous avons associé à chaque variété affine $\boldsymbol{X}$ l'espace localement annelé sur k noté $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$. Si maintenant on se donne un morphisme de variétés algébriques $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, la composition par φ définit, pour chaque $f \in \mathcal{R}(\boldsymbol{Y})$, un morphisme de k-algèbres $\varphi^\natural(D(f)) : \mathcal{R}(D(f)) \to \mathcal{R}(D(f \circ \varphi)) = \mathcal{R}(\varphi^{-1}(D(f)))$, tel que les diagrammes pour $D(f) \supseteq D(g)$:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma\big(D(f); \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}\big) & \xrightarrow{\varphi^\natural(D(f))} & \Gamma\big(D(f); \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\big) \\
{\scriptstyle \rho_g^f}\big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \rho_{g\circ\varphi}^{f\circ\varphi}} \\
\Gamma\big(D(g); \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}\big) & \xrightarrow{\varphi^\natural(D(g))} & \Gamma\big(D(g); \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\big)
\end{array}$$

sont commutatifs. La correspondance $D(f) \rightsquigarrow \varphi^\natural(D(f))$ est un morphisme de préfaisceaux de k-algèbres de $\mathcal{A}_{\boldsymbol{Y}}$ vers $\varphi_*\mathcal{A}_{\boldsymbol{X}}$ (*cf.* 2.4.1.8) induisant un morphisme de faisceau de k-algèbres $\varphi^\natural : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$.

La proposition suivante résulte d'appliquer la proposition 1.3.5.

2.4.1.13. Proposition. *La correspondance de la catégorie des variétés affines sur k qui associe*

$$\boldsymbol{X} \rightsquigarrow (\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\,, \qquad \Big(\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}\Big) \rightsquigarrow \Big(\varphi^\natural : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\Big)$$

est un foncteur covariant pleinement fidèle dans la catégorie $\mathbf{Loc\text{-}ann}_k$.

2.4.1.14. Une autre équivalence de catégories

Théorème ([19]). *La correspondance de la catégorie des variétés affines sur k qui associe*

$$\boldsymbol{X} \rightsquigarrow \mathcal{R}(\boldsymbol{X})\,, \qquad \Big(\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}\Big) \rightsquigarrow \Big(\varphi^\natural(D(1)) : \mathcal{R}(\boldsymbol{Y}) \to \mathcal{R}(\boldsymbol{X})\Big)$$

est une équivalence de catégories sur *la catégorie des k-algèbres de type fini réduites.*

2.4.1.15. Affinité des ouverts principaux d'une variété affine. Étant donnée une variété affine sur k, notée $\boldsymbol{Y}$, d'anneau de fonctions régulières $\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})$, le produit cartésien

[19] Voir [**Har**] chap. I § **3** cor. **3.8** p. 20, qui montre l'équivalence entre le catégorie des variétés algébriques *irréductibles* et celle des algèbres de type fini *intègres*.

$\boldsymbol{Y}\times\mathbb{A}^1_k$ est une variété affine et l'on a

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{Y}\times\mathbb{A}^1_k)\simeq\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})[T]\,.$$

On remarque alors que pour $f\in\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})$ non nulle, l'application

$$\begin{array}{rcl}\boldsymbol{Y} & \xrightarrow{\varphi} & \boldsymbol{Y}\times k\\ y & \longmapsto & (y,f(y))\end{array}$$

est un morphisme de variétés algébriques admettant comme inverse à gauche la projection sur la première coordonnée $p_1:\boldsymbol{Y}\times k\to\boldsymbol{Y}$, $(y,t)\mapsto y$. Il s'ensuit que φ induit un homéomorphisme entre l'ouvert $D(f)\subseteq\boldsymbol{Y}$ et l'image de φ qui n'est autre que l'hypersurface $\boldsymbol{Z}(Tf-1)\subseteq\boldsymbol{Y}\times\mathbb{A}^1_k$. Ces remarques prouvent la proposition très utile suivante.

Proposition. *Les ouverts principaux des variétés affines sont des variétés affines.*

2.4.1.16. Variétés quasi-affines sur $\boldsymbol{k}$. On appelle ainsi tout ouvert d'une variété affine $U\subseteq\boldsymbol{X}$. Étant donnés $U\subseteq\boldsymbol{X}$ et $V\subseteq\boldsymbol{Y}$, un « *morphisme* » $\varphi:U\to V$ est alors une application continue telle que $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}|_V\circ\varphi\subseteq\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}|_U$.

Contrairement au cas affine, les fonctions régulières globales d'une variété quasi-affine ne déterminent pas toujours l'espace. Par exemple, si $\boldsymbol{X}=\mathbb{C}^2$ et $U=\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$, l'application de restriction $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})\to\mathcal{R}(U)$ est bijective alors que l'inclusion $U\subseteq\boldsymbol{X}$ est stricte.

2.4.2 [IV] $\mathfrak{C}$. Objets et morphismes. L'idée est de recoller les variétés affines, soit en tant qu'espaces annelés, soit à l'aide d'atlas comme pour les catégories des variétés : topologiques, différentiables et analytiques complexes. Mais à la différence de ces catégories, il n'est plus vrai que tout point admette une base de voisinages isomorphes à un espace affine. Cette différence vient non seulement du fait que maintenant nous admettons les singularités, mais aussi parce que, en géométrie algébrique même sans singularités, l'assertion n'est plus vraie. Par exemple, dans la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ avec $\mathcal{R}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}})=\mathbb{C}[X]$, le complémentaire d'un point x est isomorphe à l'ouvert principal $U:=D(X)$ et c'est une variété affine d'après 2.4.1.15. Mais alors, tout morphisme $\varphi:\mathbb{A}^1\to U$ est déterminé par le morphisme de k-algèbres $\varphi^\natural:\mathcal{R}(U)\to\mathcal{R}(\mathbb{A}^1_k)$ (2.4.1.14), c'est-à-dire par un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de $\mathbb{C}[X]_X$ vers $\mathbb{C}[X]$. Or, un tel morphisme est entièrement déterminé par l'image du monôme X qui doit être un polynôme *inversible* de $\mathbb{C}[X]$, donc constant non nul. Ceci signifie que les seuls morphismes de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ dans U sont les applications constantes.

2.4.2.1. Variété algébrique sur $\boldsymbol{k}$, par atlas. Une « *variété algébrique sur k* » est la donnée d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ et d'un « *atlas algébrique affine $\mathcal{A}$ pour $\boldsymbol{X}$* », *i.e.* :

i) D'un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$, $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

ii) D'une famille $\{\phi_\alpha:U_\alpha\to\boldsymbol{Y}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ d'homéomorphismes sur des variétés algébriques affines sur k telle que les bijections, appelées « *applications de transition* »,

$$\Phi_{\beta,\alpha}=\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1}:\phi_\alpha(U_{\alpha,\beta})\longrightarrow\phi_\beta(U_{\beta,\alpha})$$

sont des *isomorphismes de variétés quasi-affines* quels que soient $\alpha,\beta\in\mathfrak{A}$.

Un « *morphisme* » entre variétés algébriques $\varphi:(\boldsymbol{X},\mathcal{A})\to(\boldsymbol{Y};\mathcal{B})$ est alors la donnée d'une application continue $\varphi:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ telle que pour tout $x\in\boldsymbol{X}$, pour tout $\alpha\in\mathfrak{A}$ tel que

$x \in U_\alpha$, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$ tel que $\varphi(x) \in U_\beta$, l'application

$$\phi_\beta \circ \varphi \circ \phi_{\alpha^{-1}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n ,$$

qui est définie au voisinage de $\phi_\alpha(x)$, est un morphisme de variétés quasi-affines au voisinage de $\phi_\alpha(x)$.

On appelle « *fonction régulière d'une variété algébrique* $(\boldsymbol{X};\mathcal{A})$ *sur* k » tout morphisme de variétés de $(\boldsymbol{X};\mathcal{A})$ vers $\mathbb{A}^1_k$. Le « *faisceau* $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ *de fonctions régulières sur* $\boldsymbol{X}$ » est le faisceau dont l'ensemble des sections au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ est l'ensemble des fonctions régulières sur U. Comme la multiplication $\cdot : k \times k \to k$ est une application polynomiale, le faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est stable par multiplication de fonctions et c'est ainsi un faisceau de k-algèbres.

Une application continue $\varphi : (\boldsymbol{X};\mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y};\mathcal{B})$ est un morphisme de variétés algébriques, si pour toute fonction régulière $f \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}$ la composée $f \circ \varphi$ est une fonction régulière sur $(\boldsymbol{Y},\mathcal{B})$, *i.e.* $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$. Le morphisme de faisceaux $\varphi^\natural : \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$, $f \mapsto f \circ \varphi$ est alors un morphisme de faisceaux de k-algèbres, et la correspondance

$$(\boldsymbol{X};\mathcal{A}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}), \quad \Big(\varphi : (\boldsymbol{X};\mathcal{A}) \to (\boldsymbol{Y};\mathcal{B})\Big) \rightsquigarrow \begin{cases} \varphi \ : \ \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y} \\ \varphi^\natural \ : \ \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \varphi_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}, \quad f \mapsto f \circ \varphi \end{cases}$$

est fonctorielle et pleinement fidèle dans la catégorie $\mathbf{Loc\text{-}ann}_k$, d'après la proposition 1.3.5.

!! *La catégorie des variétés algébriques coïncide avec la catégorie d'espaces localement annelés localement isomorphes aux espaces annelés associés aux variétés affines.* !!

2.4.3 [IV] $\mathcal{M}(\mathfrak{C})$. Modèles locaux. Il s'agit de la catégorie des variétés affines sur k.

2.4.4 [IV] $\mathcal{M}(\mathfrak{C})'$. Modèles locaux (équivalence). Catégorie des k-algèbres de type fini réduites, d'après le théorème 2.4.1.14.

2.4.5 [IV] $\underline{\boldsymbol{\Omega}}_{\boldsymbol{X}^*}$. Complexe de de Rham. Soit $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ une variété algébrique sur k. Le foncteur « *complexe des formes différentielles relatives à* k », $\mathrm{deRham}_k : \mathbf{Alg}(k) \rightsquigarrow \mathbf{Adg}(k)$, permet d'associer au faisceau de k-algèbres $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ le complexe de préfaisceaux $\mathrm{deRham}_k(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ de faisceau associé noté $(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{R}}, d_*)$ et appelé « *complexe de de Rham (algébrique) de* $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ ».

2.4.6 [IV] Acyc. Acyclicité de chaque $\underline{\boldsymbol{\Omega}}^i_{\boldsymbol{X}}$. Chaque faisceau $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}/k}$ est un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module cohérent (car deRham d'un localisé = localisé du deRham) et l'on dispose du critère d'affinité de Serre ([S$_1$]) :

Théorème ([22]). *Soir* $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ *une variété algébrique sur* k. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\boldsymbol{X}$ *est affine.*

b) $H^{>0}(\boldsymbol{X};\mathcal{M}) = 0$ *pour tout* $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$*-module quasi-cohérent* $\mathcal{M}$.

c) $H^{>0}(\boldsymbol{X};\mathcal{I}) = 0$ *pour tout sous-*$\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$*-module cohérent* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$.

[22] Voir [**Har**] chap. III §**3** th. **3.7** p. 215

2.4.6.1. Par conséquent, l'application canonique :

$$\boxed{h^\bullet\Gamma(\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}};\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/k}) \xrightarrow[\simeq]{} I\!\!H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}};\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/k})} \qquad (*_k)$$

est **bijective** pour toute variété algébrique affine sur k.

2.4.7 [IV] Ampl. Amplitude du complexe de de Rham. Dans le cas affine, si $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{A}^n_k$ on sait que $\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/k}$ est un quotient de $\underline{\underline{\Omega}}^*_{\mathbb{A}^n_k} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_k} \otimes \bigwedge^*_k k^n$. Dans ce cas l'amplitude de $\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}}$ est contenue dans l'intervalle $[0, n]$.

2.4.8 [IV] LPL. Lemme de Poincaré local. Il est faux en général, car autrement la cohomologie du complexe de de Rham calculerait la cohomologie du faisceau constant $\underline{k}_{\boldsymbol{X}}$ (si $\operatorname{car} k = 0$) sur les variétés affines. Or, le faisceau constant est flasque (si $\boldsymbol{X}$ est irréductible) alors que la cohomologie de de Rham est généralement non nulle en degrés positifs.

2.4.9 [IV] LPG. Lemme de Poincaré global. Vrai si $\operatorname{car} k = 0$.

2.4.10 Récapitulatif

a) Soit $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique sur $k = \bar{k}$. Le morphisme canonique :

$$\boxed{\boxed{H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}};\underline{k}_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow[\not\simeq]{} I\!\!H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}};\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{an}}})}}$$

induit par l'augmentation $\varepsilon : \underline{k}_{\boldsymbol{X}} \to \underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/k}$, **n'est pas** toujours un isomorphisme.

b) Pour les variétés **affines** sur k on a un isomorphisme canonique :

$$\boxed{\boxed{I\!\!H^\bullet(\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}};\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/k}) \xleftarrow[\simeq]{} h^\bullet\Gamma(\boldsymbol{X}^{\mathrm{zar}};\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/k}) = \big(\textstyle\bigwedge^*_k \Omega(\boldsymbol{X}/k), d_*\big)}}$$

———×———

2.5 [V] Schémas

Même démarche et théorèmes que dans le cas algébrique.

§ 3. Références bibliographiques

[Go] R. Godement. "*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*" ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

[GR] R.C. Gunning, H. Rossi. "*Analytic functions of several complex variables*" ; Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1965).

[Har] R. Hartshorne. "*Algébraic Geometry*" ; Graduate texts in mathematices **52**. Springer–Verlag, (1977).

[GaGa] J.-P. Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique ; Ann. Inst. Fourier, Grenoble 6, pp. 1–42, (1955–1956).

[S$_1$] J.-P. Serre. Sur la cohomologie des variétés algébriques ; J. Math. Pures Appl. (9) 36, 1–16, (1957).

§ 4. Index terminologique