

Applications du théorème de Čech-Leray

Table des matières

§1. Contenu de ces notes	
§2. Préliminaires sur les bicomplexes	
2.1. Catégorie des complexes associée à une catégorie abélienne	2
2.1.1. Définition	2
2.1.3. Amplitude d'un complexe	3
2.1.4. Complexes concentrés en un seul degré	3
2.1.5. Complexes noyaux et conoyaux	3
2.1.6. Catégories de sous-complexes bornés	4
2.1.7. Foncteur de translation	4
2.1.8. Foncteurs de cohomologie	4
2.1.9. Quasi-isomorphismes	4
2.1.10. Amplitude cohomologique	4
2.1.11. Cône d'un morphisme de complexes	4
2.1.14. Troncatures bêtes	5
2.2. Catégorie des bicomplexes associée à une catégorie abélienne	6
2.2.1. Foncteurs induits	7
2.2.2. Foncteurs de translation	7
2.2.3. Foncteur de cohomologie verticale	7
2.2.4. Foncteur de cohomologie horizontal	7
2.2.5. $h_v \circ h_h \neq h_h \circ h_v$	8
2.2.6. Catégorie des suites exactes courtes	8
2.2.8. Complexe simple associé à un bicomplexe borné inférieurement	9
2.2.10. Critère d'acyclicité du complexe simple associé	9
2.2.11. Un critère de quasi-isomorphie de complexes simples associés	10
2.2.14. Notation $\Sigma_{\bullet, \circ}^*$	11
§3. Cohomologie des faisceaux	
3.1. Préliminaires	11
3.1.1. Faisceaux flasques	11
3.1.3. Résolution flasque de Godement	12
3.2. Cohomologie des faisceaux	12
3.2.1. Définition	12
3.2.2. Augmentation du complexe de Godement	12
3.2.4. Faisceaux acycliques	12
3.2.8. Propriétés générales de la cohomologie de faisceaux	13
3.3. Cohomologie de Čech des faisceaux	14
3.3.1. Complexe de Čech	14
3.3.3. Augmentation du complexe de Čech	14
3.3.4. Cohomologie de Čech	14
3.3.6. Faisceautisation du complexe de Čech	14
3.3.8. Théorème de Čech-Leray pour la cohomologie des faisceaux	14
§4. Hypercohomologie des complexes de faisceaux	
4.1. Hypercohomologie des complexes de faisceaux	16
4.1.2. Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\mathbf{X}; -) : h^*(\Gamma(U; -)) \rightarrow \mathbb{H}^*(U; -)$	16
4.1.3. Propriétés générales de l'hypercohomologie	16
4.2. Cohomologie de Čech de complexes de faisceaux	18
4.2.1. Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\mathcal{U}; -) : h^*(\Gamma(\mathbf{X}; -)) \rightarrow \check{H}^*(\mathcal{U}; -)$	18
4.3. Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -) : \check{H}(\mathcal{U}; -) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbf{X}; -)$	18
4.3.2. Troncatures et suites exactes longues	19
4.4. Théorème de Čech-Leray pour l'hypercohomologie des complexes de faisceaux	20

§5. Applications

5.1. Théorème de de Rham sur les variétés différentielles	21
5.2. Calculs effectifs de la cohomologie de de Rham des variétés différentielles	22
5.2.1. Exemple : Cohomologie de de Rham de la sphère \mathbb{S}^2	23
5.3. Calculs effectifs de la cohomologie de de Rham des variétés algébriques	23
5.3.1. Exemple : Cohomologie de de Rham de la sphère de Riemann	24
5.4. Théorème de comparaison de Grothendieck pour les variétés algébriques sur \mathbb{C} non singulières	25
5.4.1. Structure d'espace analytique d'une variété algébrique complexe	25
5.4.2. Acyclicité des modules cohérents	25
5.4.4. Hypercohomologie de l'image directe des complexes cohérents	25
5.4.6. Cohomologies de de Rham	26

§6. Références bibliographiques

§7. Index terminologique

§1. Contenu de ces notes

On rappelle les terminologies, définitions et résultats de base d'algèbre homologique utiles dans l'étude de la cohomologie des faisceaux, de l'hypercohomologie des complexes de faisceaux, de la cohomologie de Čech des complexes de faisceaux, ainsi que dans l'étude des liens qui les unissent, en particulier, nous démontrons le théorème de Čech-Leray suivant :

Théorème (4.4.1). Soient $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{C}^+ \text{Fais}_X(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de X .

a) (Čech-Leray) Si \mathcal{U} et \mathcal{G}^\bullet -acyclique, le morphisme canonique

$$\Xi(\mathcal{U}; X; \mathcal{G}^\bullet) : \check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^*(X; \mathcal{G}^\bullet)$$

est un **isomorphisme**.

b) Soit $\varphi_\bullet : \mathcal{G}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{G}_2^\bullet$ un morphisme de complexes faisceau tel que

$$\mathbb{H}^*(V; \varphi) : \mathbb{H}^*(V; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^*(V; \mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un isomorphisme pour tout $V = U_{a_0 \dots a_k}$; ou bien, si \mathcal{U} et \mathcal{G}_i^\bullet -acyclique et que

$$h^*\Gamma(V; \varphi) : h^*\Gamma(V; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow h^*\Gamma(V; \mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un isomorphisme pour tout tel V . Alors

$$\mathbb{H}^*(X; \varphi) : \mathbb{H}^*(X; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^*(X; \mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un **isomorphisme**.

Dans la section §5 nous donnons des applications au calcul effectif de la cohomologie de de Rham et au théorèmes de comparaison des cohomologies de de Rham, tout particulièrement au théorème de comparaison de Grothendieck entre cohomologies de de Rham algébrique et holomorphe pour les variétés algébriques complexes non singulières.

Ces notes se veulent un « *complément* » aux documents déjà distribués et aux références bibliographiques, le texte n'est pas complet et ne prétend aucune exhaustivité.

§2. Préliminaires sur les bicomplexes

2.1 Catégorie des complexes associée à une catégorie abélienne

2.1.1. Définition. Étant donnée une catégorie abélienne \mathbf{Ab} ⁽¹⁾, on note $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ la catégorie dont les objets sont les « *complexes de \mathbf{Ab}* », i.e. les familles $\{d_k : C^k \rightarrow C^{k+1} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ avec $C^k \in \text{Ob}(\mathbf{Ab})$ et

¹ Pour éviter des abstractions inutiles nous raisonnerons en termes de catégories de modules, il ne faudra donc pas s'étonner des expressions du genre « *pour tout $x \in \ker(\alpha)$* ».

$d_k \in \text{Mor}_{\mathbf{Ab}}(\mathbf{C}^k, \mathbf{C}^{k+1})$, tels que $d_{k+1} \circ d_k = 0$. Les objets \mathbf{C}^k sont les « termes » du complexe et les morphisme d_k sont ses « différentielles » ou « cobords ».

Un complexe est noté $(\mathbf{C}^*; d_*)$ et même simplement \mathbf{C} lorsque la référence à la graduation et la différentielle est superflue ; il se représente sous la forme :

$$\dots \xrightarrow{d_{-3}} \mathbf{C}^{-2} \xrightarrow{d_{-2}} \mathbf{C}^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \mathbf{C}^0 \xrightarrow{d_0} \mathbf{C}^1 \xrightarrow{d_1} \mathbf{C}^2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

Un « morphisme de complexes » de $(\mathbf{C}_1^*; d_{1,*})$ vers $(\mathbf{C}_2^*; d_{2,*})$ est une famille $\{\varphi_k \in \text{Mor}_{\mathbf{Ab}}(\mathbf{C}_1^k, \mathbf{C}_2^k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ telle que $d_k \circ \varphi_k = \varphi_{k+1} \circ d_k$, autrement dit, telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \xrightarrow{d_{-3}} & \mathbf{C}^{-2} & \xrightarrow{d_{-2}} & \mathbf{C}^{-1} & \xrightarrow{d_{-1}} & \mathbf{C}^0 & \xrightarrow{d_0} & \mathbf{C}^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathbf{C}^2 & \xrightarrow{d_2} & \dots \\ & & \varphi_{-2} \downarrow & & \varphi_{-1} \downarrow & & \varphi_0 \downarrow & & \varphi_1 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \\ \dots & \xrightarrow{d_{-3}} & \mathbf{C}^{-2} & \xrightarrow{d_{-2}} & \mathbf{C}^{-1} & \xrightarrow{d_{-1}} & \mathbf{C}^0 & \xrightarrow{d_0} & \mathbf{C}^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathbf{C}^2 & \xrightarrow{d_2} & \dots \end{array}$$

est commutatif. L'ensemble des morphismes de \mathbf{C}_1 vers \mathbf{C}_2 est noté $\text{Mor}_{\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ et même $\text{Mor}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ lorsque aucune confusion n'est à craindre.

2.1.2. La correspondance $(\mathbf{C}^k; d_k) \rightsquigarrow \mathbf{C}^k$ et $(\varphi_* \in \text{Mor}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)) \rightsquigarrow (\varphi_k : \mathbf{C}_1^k \rightarrow \mathbf{C}_2^k)$ est le foncteur « k -ième terme »

2.1.3. Amplitude d'un complexe. On appelle « amplitude » d'un complexe \mathbf{C} le plus petit intervalle de \mathbb{Z} , noté $\text{ampl}(\mathbf{C})$, contenant tous les termes non nuls de \mathbf{C} . Pour $\mathbf{J} \subseteq \mathbb{Z}$, on dit également qu'un complexe est « concentré dans \mathbf{J} » lorsque $\text{ampl}(\mathbf{C}) \subseteq \mathbf{J}$.

2.1.4. Complexes concentrés en un seul degré. Pour $k \in \mathbb{Z}$, un complexe $\mathbf{C} \in \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est dit « concentré en degré k » si $\text{ampl}(\mathbf{C}) \subseteq \{k\}$. Dans ce cas $d_* = 0$ et $\text{Mor}(\mathbf{C}, \mathbf{D}) = \text{Mor}_{\mathbf{Ab}}(\mathbf{C}^k, \mathbf{D}^k)$. Pour $\mathbf{M} \in \text{Ob}(\mathbf{Ab})$, on note $\mathbf{M}[k]$ le complexe $(\mathbf{C}^*; d_*)$ tel que $\mathbf{C}^k = \mathbf{M}$, $\mathbf{C}^j = \mathbf{0}$ pour $j \neq k$ et $d_* = 0$. De même, si $\varphi \in \text{Mor}_{\mathbf{Ab}}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$, on note $\varphi[k] : \mathbf{M}[k] \rightarrow \mathbf{N}[k]$ le morphisme donné par $\varphi[k]_k = \varphi$ et $\varphi[k]_j = 0$ si $j \neq k$.

Proposition. Pour $k \in \mathbb{Z}$, la correspondance $(-)[k] : \mathbf{Ab} \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est fonctorielle covariante additive ⁽²⁾ adjointe à gauche du foncteur « k -ième terme ».

La sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ des complexes concentrés en degré 0 est clairement équivalente à la catégorie \mathbf{Ab} . Pour chaque $\mathbf{O} \in \text{Ob}(\mathbf{A})$, on note $\mathbf{O}[0]$ le complexe $(\mathbf{C}^*; d_*)$ tel que $\mathbf{C}^0 = \mathbf{O}$, $\mathbf{C}^k = \mathbf{0}$ pour $k \neq 0$ et $d_* = 0$.

2.1.5. Complexes noyaux et conoyaux. Soit $\varphi_* : (\mathbf{C}_1^*; d_{1,*}) \rightarrow (\mathbf{C}_2^*; d_{2,*})$ un morphisme de complexes, si $x \in \ker(\varphi_k)$, on a $\varphi_{k+1}d_k(x) = d_k\varphi_k(x) = 0$ et la famille $\ker(\varphi_*) := (\ker(\varphi_*); d_{1,*})$ est un sous-complexe de $(\mathbf{C}_1^*; d_{1,*})$, on note $\kappa_* : \ker(\varphi_*) \hookrightarrow (\mathbf{C}_1^*; d_{1,*})$ le morphisme de complexes donné par l'inclusion. De manière analogue, chaque morphisme $d_{2,k} : \mathbf{C}_2^k \rightarrow \mathbf{C}_2^{k+1}$ induit un morphisme $\bar{d}_{2,k} : \text{coker}(\varphi_k) \rightarrow \text{coker}(\varphi_{k+1})$ d'où un complexe $\text{coker}(\varphi_*) := (\text{coker}(\varphi_*); \bar{d}_{2,*})$ et un morphisme de complexes surjectif $\nu_* : (\mathbf{C}_2^*; d_{2,*}) \twoheadrightarrow \text{coker}(\varphi_*)$.

Avec ces définitions, tout morphisme $\varphi_* : (\mathbf{C}_1^*; d_{1,*}) \rightarrow (\mathbf{C}_2^*; d_{2,*})$ se factorise en

$$\ker(\varphi) \xleftarrow{\kappa_*} (\mathbf{C}_1^*; d_{1,*}) \twoheadrightarrow \text{coker}(\kappa_*) = \ker(\nu_*) \xleftarrow{\quad} (\mathbf{C}_2^*; d_{2,*}) \xrightarrow{\nu_*} \text{coker}(\varphi_*)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\varphi_*} \uparrow$

ce qui constitue l'essentiel de la preuve de

² Un foncteur covariant « additif » entre catégories additives (p.e. abéliennes) $\mathcal{F} : \mathbf{Ab} \rightsquigarrow \mathbf{Ab}'$ est un foncteur dont les applications fonctorielles $\mathcal{F}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) : \text{Mor}_{\mathbf{Ab}}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{Ab}'}(\mathcal{F}\mathbf{M}, \mathcal{F}\mathbf{N})$ sont des morphismes de groupes abéliens.

Théorème. *La catégorie $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est abélienne.*

2.1.6. Catégories de sous-complexes bornés. Pour tout sous-ensemble $\mathbf{J} \subseteq \mathbb{Z}$ on note $\mathbf{C}^{\mathbf{J}}(\mathbf{Ab})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ des complexes (\mathbf{C}^*, d_*) tels que $\mathbf{C}^k = \mathbf{0}$ pour tout $k \notin \mathbf{J}$. On trouve également les notations suivantes dans la littérature

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{C}^{\geq 0}(\mathbf{Ab}) = \mathbf{C}^{[0, +\infty[}(\mathbf{Ab}) & \text{« complexe à termes positifs ou nuls »} \\ \mathbf{C}^+(\mathbf{Ab}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{C}^{[-n, +\infty[}(\mathbf{Ab}) & \text{« complexes bornés à gauche ou inférieurement »} \\ \mathbf{C}^-(\mathbf{Ab}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{C}^{]-\infty, n]}(\mathbf{Ab}) & \text{« complexes bornés à droite ou supérieurement »} \\ \mathbf{C}^b(\mathbf{Ab}) = \mathbf{C}^+(\mathbf{Ab}) \cap \mathbf{C}^-(\mathbf{Ab}) & \text{« complexes bornés »} \end{array} \right.$$

Toutes ces catégories contiennent les complexes \ker et coker de leurs morphismes de sorte que

Théorème. *La catégorie $\mathbf{C}^{\mathbf{J}}(\mathbf{Ab})$ est une sous-catégorie abélienne de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$.⁽³⁾*

2.1.7. Foncteur de translation. On note $\mathcal{T} : \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ le foncteur « de translation » qui fait correspondre

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{C}^*; d_*) \rightsquigarrow (\mathbf{D}^*, d'_*), \quad \text{avec } \mathbf{D}^k = \mathbf{C}^{k+1} \text{ et } d'_k = -d_{k+1} \\ (\varphi : \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2) \rightsquigarrow (\mathcal{T}(\varphi) : \mathcal{T}(\mathbf{C}_1) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbf{C}_2)), \quad \text{avec } \mathcal{T}(\varphi)_k = \varphi_{k+1} \end{array} \right.$$

On note aussi $\mathcal{T}^n(\mathbf{C}) = \mathbf{C}[n]$ et $\mathcal{T}^n(\varphi) = \varphi[n]$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$.

2.1.8. Foncteurs de cohomologie. Les différentielles $\{d_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de $\mathbf{C} = (\mathbf{C}^*; d_*)$ définissent un morphisme de complexes $d_* : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}[1]$ dont $\ker(d_*)$, $\text{im}(d_*)$ sont des complexes à différentielle **nulle**. On a, de plus, une injection naturelle $\text{im}(d_*)[-1] \subseteq \ker(d_*)$ de conoyau :

$$h(\mathbf{C}) := \frac{\ker(d_*)}{\text{im}(d_*)[-1]}.$$

La correspondance $\mathbf{C} \rightsquigarrow h(\mathbf{C})$ est fonctorielle de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ vers la catégorie produit $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$, c'est le « foncteur de cohomologie » dont la composée avec le foncteur le k -ième terme est le « foncteur additif » de « k -ième objet de cohomologie »

$$h^k(-) : \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{Ab}.$$

2.1.9. Quasi-isomorphismes. Un morphisme de complexes $\varphi : \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2$ est dit « quasi-isomorphisme » lorsque le morphisme $h(\varphi)$ est un isomorphisme.

2.1.10. Amplitude cohomologique. L'« amplitude cohomologique » d'un complexe \mathbf{C} , notée $\text{ampl}_{\text{ch}}(\mathbf{C})$, est l'amplitude du complexe $h^*(\mathbf{C})$, i.e. $\text{ampl}_{\text{ch}}(\mathbf{C}) := \text{ampl}(h^*(\mathbf{C}))$.

Un complexe $\mathbf{C} \in \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est dit « acyclique » lorsque son amplitude cohomologique est vide, i.e. lorsque $h^k(\mathbf{C}) = \mathbf{0}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

2.1.11. Cône d'un morphisme de complexes. On appelle « cône » d'un morphisme de complexes $\varphi : \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2$ le complexe, noté $\hat{\mathbf{c}}(\varphi, \Delta)$, défini par

$$\hat{\mathbf{c}}(\varphi) = \mathbf{C}_2 \oplus \mathbf{C}_1[1], \quad \Delta(x, y) = (dx + \varphi(y), -dy)$$

On note alors $p : \hat{\mathbf{c}}(\varphi) \rightarrow \mathbf{C}_1[1]$ et $q : \mathbf{C}_2 \rightarrow \hat{\mathbf{c}}(\varphi)$ respectivement la projection $\mathbf{C}_2 \oplus \mathbf{C}_1[1] \rightarrow \mathbf{C}_1[1]$ et

³ Une sous-catégorie d'une catégorie abélienne peut être abélienne sans que ses noyaux et conoyaux soient des noyaux et conoyaux dans la catégorie plus grande. Par exemple, la catégorie des faisceaux est une sous-catégorie de la catégorie des préfaisceaux mais une surjection de faisceaux est rarement une surjection de préfaisceaux. Lorsque les noyaux, conoyaux, images et co-images des deux catégories coïncident on parle de « sous-catégorie abélienne ».

l'injection $\mathbf{C}_2 \hookrightarrow \mathbf{C}_2 \oplus \mathbf{C}_1[1]$ canoniques. La suite des morphismes de complexes

$$\mathbf{C}_1[-1] \xrightarrow{\varphi[-1]} \mathbf{C}_2[-1] \xrightarrow{q[-1]} \hat{\mathbf{c}}(\varphi)[-1] \xrightarrow{p[-1]} \mathbf{C}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{C}_2 \xrightarrow{q} \hat{\mathbf{c}}(\varphi) \xrightarrow{p} \mathbf{C}_1[1] \xrightarrow{\varphi[1]} \mathbf{C}_2[1] \xrightarrow{q[1]} \hat{\mathbf{c}}(\varphi)[1] \xrightarrow{p[1]} \quad (\diamond)$$

est appelée « *triangle distingué* » où « *triangle exact* » et se note classiquement

$$\mathbf{C}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{C}_2 \xrightarrow{q} \hat{\mathbf{c}}(\varphi) \xrightarrow{p}_{[+1]}$$

Mise en garde. Les composés $q \circ \varphi$ et $\varphi[1] \circ p$ ne sont généralement pas nuls et la suite longue ci-dessus (\diamond) n'est donc généralement pas un complexe.

Le résultat le plus important concernant le cône d'un morphisme est le suivant

2.1.12. Théorème Soit $\varphi : \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2$ un morphisme de complexes.

a) Le foncteur de cohomologie $h^0(-)$ appliqué à la suite (\diamond) donne une suite longue de cohomologies

$$\dots \xrightarrow{h^{-1}p} h^0\mathbf{C}_1 \xrightarrow{h^0\varphi} h^0\mathbf{C}_2 \xrightarrow{h^0q} h^0\hat{\mathbf{c}}(\varphi) \xrightarrow{h^0p} h^1\mathbf{C}_1 \xrightarrow{h^1\varphi} h^1\mathbf{C}_2 \xrightarrow{h^1q} h^1\hat{\mathbf{c}}(\varphi) \xrightarrow{h^1p} \dots$$

qui est un complexe acyclique.

b) Le morphisme φ est un quasi-isomorphisme, si et seulement si, $(\hat{\mathbf{c}}(\varphi), \Delta)$ est acyclique.

Indication. La preuve est élémentaire et il suffit de la faire autour des termes en h^0 puisque $h^k(-) = h^0((-)[k])$. Nous montrons uniquement l'exactitude autour de $\hat{\mathbf{c}}(\varphi)$ et laissons les autres cas au soin du lecteur. Soit $\omega = (x, y) \in \hat{\mathbf{c}}(\varphi)^0$ vérifiant $\Delta(\omega) = (dx + \varphi(y); -dy) = 0$, autrement dit, $dx = -\varphi(y)$ et $dy = 0$. Dire que $h^0p(\bar{\omega}) = 0$ revient à dire que $y = -dy'$, auquel cas

$$\omega \sim (\omega - \Delta(0, y')) = (x - \varphi(y'), 0),$$

et ω est cohomologue de l'image du cocycle $\omega' = (x - \varphi(y')) \in \mathbf{C}_2^0$ par q_0 . On a donc $h^0(q)(\bar{\omega}') = \bar{\omega}$.

L'assertion (b) est conséquence immédiate de (a). ■

2.1.13. Exercice. Soit $\mathcal{F} : \mathbf{Ab} \rightsquigarrow \mathbf{Ab}'$ un foncteur additif. Montrer que si $\mathbf{C} := (\mathbf{C}^*, d_*) \in \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ alors $\mathcal{F}(\mathbf{C}) := (\mathcal{F}(\mathbf{C}^*), \mathcal{F}(d_*)) \in \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}')$. Puis que si $\varphi \in \text{Mor}_{\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ alors $\mathcal{F}(\hat{\mathbf{c}}(\varphi)) = \hat{\mathbf{c}}(\mathcal{F}\varphi)$.

En particulier, si $\varphi_* : \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ un morphisme de complexes faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique \mathbf{X} . Montrer que les foncteurs $\hat{\mathbf{c}}(-)$ et $\Gamma(\mathbf{X}; -)$ commutent, *i.e.* on a une identification canonique

$$\Gamma(\mathbf{X}; \hat{\mathbf{c}}(\varphi)) = \hat{\mathbf{c}}(\Gamma(\mathbf{X}; \varphi)).$$

2.1.14. Troncatures bêtes. Pour $\mathbf{C} \in \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ et $\ell \in \mathbb{Z}$, on note $\beta_{\leq \ell} \mathbf{C}$ le complexe (\mathbf{D}^*, δ_*) tel que $\mathbf{D}^k = \mathbf{C}^k$ pour tout $k \leq \ell$ et $\mathbf{D}^k = \mathbf{0}$ autrement; on pose ensuite $\delta_k = d_k$ pour $k < \ell$ et $\delta_k = 0$ autrement. La troncature bête $\beta_{\geq \ell} \mathbf{C}$ est définie de manière symétrique. On a graphiquement :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \left(\dots \longrightarrow \mathbf{C}^{\ell-1} \xrightarrow{d_{\ell-1}} \mathbf{C}^{\ell} \xrightarrow{d_{\ell}} \mathbf{C}^{\ell+1} \xrightarrow{d_{\ell+1}} \mathbf{C}^{\ell+2} \xrightarrow{d_{\ell+2}} \dots \right) \\ \beta_{\leq \ell} \mathbf{C} &= \left(\dots \longrightarrow \mathbf{C}^{\ell-1} \xrightarrow{d_{\ell-1}} \mathbf{C}^{\ell} \xrightarrow{0} \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \dots \right) \\ \beta_{\geq \ell+1} \mathbf{C} &= \left(\dots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{C}^{\ell+1} \xrightarrow{d_{\ell+1}} \mathbf{C}^{\ell+2} \xrightarrow{d_{\ell+2}} \dots \right) \end{aligned}$$

Si $\varphi : \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2$ est un morphisme de complexes, on note $\beta_{\leq \ell} \varphi : \beta_{\leq \ell} \mathbf{C}_1 \rightarrow \beta_{\leq \ell} \mathbf{C}_2$ le morphisme qui coïncide avec φ en degrés $\leq \ell$ et est nul ailleurs. Le morphisme $\beta_{\geq \ell} \varphi : \beta_{\geq \ell} \mathbf{C}_1 \rightarrow \beta_{\geq \ell} \mathbf{C}_2$ est défini de manière symétrique.

Notation pour les troncatures bêtes. Les foncteurs de troncatures bêtes se définissent également sur les catégories des multicomplexes via l'identification évidente entre $\mathbf{C}^*(\mathbf{C}^{\bullet, \circ}(\mathbf{Ab}))$ et $\mathbf{C}^{\bullet, *, \circ}(\mathbf{Ab})$; le foncteur $\beta_{\leq \ell}$ sur $\mathbf{C}^*(\mathbf{C}^{\bullet, \circ}(\mathbf{Ab}))$ sera alors noté $\beta_{* \leq \ell}$ sur $\mathbf{C}^{\bullet, *, \circ}(\mathbf{Ab})$ pour éviter toute ambiguïté.

2.1.15. Proposition

- a) La correspondance $\mathcal{C} \rightsquigarrow \beta_{\leq \ell} \mathcal{C}$ et $\varphi \rightsquigarrow \beta_{\leq \ell} \varphi$ est un foncteur covariant additif de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ vers $\mathbf{C}^{*\leq \ell}(\mathbf{Ab})$, adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\mathbf{C}^{*\leq \ell}(\mathbf{Ab}) \subseteq \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$. On a donc un morphisme canonique (d'adjonction) $p_\ell(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \rightarrow \beta_{\leq \ell} \mathcal{C}$.
- b) La correspondance $\mathcal{C} \rightsquigarrow \beta_{\geq \ell} \mathcal{C}$ et $\varphi \rightsquigarrow \beta_{\geq \ell} \varphi$ est un foncteur covariant additif de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ vers $\mathbf{C}^{*\geq \ell}(\mathbf{Ab})$, adjoint à droite du foncteur d'inclusion $\mathbf{C}^{*\geq \ell}(\mathbf{Ab}) \subseteq \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$. On a donc un morphisme canonique (d'adjonction) $q_\ell(\mathcal{C}) : \beta_{\geq \ell} \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.
- c) La correspondance $\mathcal{C} \rightsquigarrow (\mathbf{0} \rightarrow \beta_{> \ell} \mathcal{C} \xrightarrow{q_{\ell+1}(\mathcal{C})} \mathcal{C} \xrightarrow{p_\ell(\mathcal{C})} \beta_{\leq \ell} \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{0})$ est fonctorielle de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ vers la catégorie $\Delta(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}))$ des suites exactes courtes de complexes (cf. 2.2.6).

$$\begin{array}{ccccccccccc} \beta_{> \ell} \mathcal{C} & = & \left(\dots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{C}^{\ell+1} \xrightarrow{d_{\ell+1}} \mathcal{C}^{\ell+2} \xrightarrow{d_{\ell+2}} \dots \right) \\ q_{\ell+1}(\mathcal{C}) \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \text{id} \downarrow & \text{id} \downarrow & & & & & \\ \mathcal{C} & = & \left(\dots \longrightarrow \mathcal{C}^{\ell-1} \xrightarrow{d_{\ell-1}} \mathcal{C}^\ell \xrightarrow{d_\ell} \mathcal{C}^{\ell+1} \xrightarrow{d_{\ell+1}} \mathcal{C}^{\ell+2} \xrightarrow{d_{\ell+2}} \dots \right) \\ p_\ell(\mathcal{C}) \downarrow & & \text{id} \downarrow & \text{id} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & \\ \beta_{\leq \ell} \mathcal{C} & = & \left(\dots \longrightarrow \mathcal{C}^{\ell-1} \xrightarrow{d_{\ell-1}} \mathcal{C}^\ell \xrightarrow{0} \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \dots \right) \end{array}$$

- d) Un foncteur additif entre catégories abéliennes induit un foncteur sur les catégories des complexes (cf. 2.1.13, 2.2.1) qui respecte les troncutures et les suites exactes courtes de troncutures de (c).

2.1.16. Exercice. Avec les notations précédentes, soit $\varphi : \beta_{\leq \ell} \mathcal{C} \rightarrow \beta_{> \ell} \mathcal{C}[1]$ avec $\varphi_k = 0$ si $k \neq \ell$ et $\varphi_\ell = -d_\ell$. Vérifier que φ est un morphisme de complexes dont le cône s'identifie canoniquement au complexe $\mathcal{C}[1]$.

En écrivant les complexes verticalement, on retrouve le diagramme ci-contre. Le morphisme de complexes φ est alors un quasi-isomorphisme si et seulement si le complexe \mathcal{C} est acyclique.

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & & -d_{\ell+2} \uparrow & & -d_{\ell+2} \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\ell+2} & \xrightarrow{q_{\ell+2}} & \mathcal{C}^{\ell+2} \oplus \mathbf{0} & \xrightarrow{[+1]} & \\ \uparrow & & -d_{\ell+1} \uparrow & & -d_{\ell+1} \uparrow & & \\ \mathcal{C}^\ell & \xrightarrow{-d_\ell} & \mathcal{C}^{\ell+1} & \xrightarrow{q_{\ell+1}} & \mathcal{C}^{\ell+1} \oplus \mathbf{0} & \xrightarrow{[+1]} & \\ d_{\ell-1} \uparrow & & \uparrow & & \swarrow -d_\ell & & \\ \mathcal{C}^{\ell-1} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \xrightarrow{q_\ell} & \mathbf{0} \oplus \mathcal{C}^\ell & \xrightarrow{[+1]} & \\ d_{\ell-2} \uparrow & & \uparrow & & -d_{\ell-1} \uparrow & & \\ \mathcal{C}^{\ell-2} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \xrightarrow{q_\ell} & \mathbf{0} \oplus \mathcal{C}^{\ell-1} & \xrightarrow{[+1]} & \\ d_{\ell-3} \uparrow & & \uparrow & & -d_{\ell-2} \uparrow & & \\ \hline \beta_{\leq \ell} \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi} & \beta_{> \ell} \mathcal{C}[1] & \xrightarrow{q} & \hat{c}(\varphi) = \mathcal{C}[1] & \xrightarrow{p} & \end{array}$$

2.2 Catégorie des bicomplexes associée à une catégorie abélienne

Étant donné une catégorie abélienne \mathbf{Ab} , sa catégorie de ses complexes $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est également abélienne et nous pouvons considérer la catégorie de ses complexes, c'est à dire à la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}))$, notée aussi $\mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab})$. Ses objets se représentent toujours sous la forme :

$$\dots \xrightarrow{\delta_{-3}} \mathcal{C}^{-2} \xrightarrow{\delta_{-2}} \mathcal{C}^{-1} \xrightarrow{\delta_{-1}} \mathcal{C}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{C}^2 \xrightarrow{\delta_2} \dots$$

mais cette fois, les \mathcal{C}^k sont des complexes et les δ_k des morphismes de complexes. Si nous représentons chaque complexe \mathcal{C}^k verticalement, nous obtenons la représentation plus explicite suivante

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta_{-3,1}} & \mathcal{C}^{-2,1} & \xrightarrow{\delta_{-2,1}} & \mathcal{C}^{-1,1} & \xrightarrow{\delta_{-1,1}} & \mathcal{C}^{0,1} & \xrightarrow{\delta_{0,1}} & \mathcal{C}^{1,1} & \xrightarrow{\delta_{1,1}} & \mathcal{C}^{2,1} & \xrightarrow{\delta_{2,1}} & \dots \\ & & \uparrow d_{-2,1} & & \uparrow d_{-1,1} & & \uparrow d_{0,1} & & \uparrow d_{1,1} & & \uparrow d_{2,1} & & \\ \dots & \xrightarrow{\delta_{-3,0}} & \mathcal{C}^{-2,0} & \xrightarrow{\delta_{-2,0}} & \mathcal{C}^{-1,0} & \xrightarrow{\delta_{-1,0}} & \mathcal{C}^{0,0} & \xrightarrow{\delta_{0,0}} & \mathcal{C}^{1,0} & \xrightarrow{\delta_{1,0}} & \mathcal{C}^{2,0} & \xrightarrow{\delta_{2,0}} & \dots \\ & & \uparrow d_{-2,0} & & \uparrow d_{-1,0} & & \uparrow d_{0,0} & & \uparrow d_{1,0} & & \uparrow d_{2,0} & & \\ \dots & \xrightarrow{\delta_{-3,-1}} & \mathcal{C}^{-2,-1} & \xrightarrow{\delta_{-2,-1}} & \mathcal{C}^{-1,-1} & \xrightarrow{\delta_{-1,-1}} & \mathcal{C}^{0,-1} & \xrightarrow{\delta_{0,-1}} & \mathcal{C}^{1,-1} & \xrightarrow{\delta_{1,-1}} & \mathcal{C}^{2,-1} & \xrightarrow{\delta_{2,-1}} & \dots \\ & & \uparrow d_{-2,-1} & & \uparrow d_{-1,-1} & & \uparrow d_{0,-1} & & \uparrow d_{1,-1} & & \uparrow d_{2,-1} & & \\ & & \uparrow d_{-2,-2} & & \uparrow d_{-1,-2} & & \uparrow d_{0,-2} & & \uparrow d_{1,-2} & & \uparrow d_{2,-2} & & \end{array} \quad (\mathcal{B})$$

où les sous-diagrammes sont commutatifs. C'est ce que l'on appelle un « bicomplexe à termes dans \mathbf{Ab} ».

2.2.1. Foncteurs induits. Un foncteur additif transforme un complexe de \mathbf{Ab} en un complexe de \mathbf{Ab}' (cf. 2.1.13) induisant un foncteur additif, lui aussi, $\mathbf{C}^* \mathcal{F} : \mathbf{C}^* \mathbf{Ab} \rightsquigarrow \mathbf{C}^* \mathbf{Ab}'$ (noté souvent \mathcal{F} par abus). Le foncteur $\mathbf{C}^* \mathcal{F}$ est alors un foncteur additif et nous pouvons itérer le procédé à volonté. Le foncteur additif \mathcal{F} induit ainsi des foncteurs additifs sur les catégories de n -complexes quel que soit n . Ces foncteurs sont tous exacts (resp. à gauche, à droite) si \mathcal{F} l'est.

2.2.2. Foncteurs de translation. On note $\mathcal{J}_h : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab})$ le foncteur « de translation horizontale » qui fait correspondre

$$\begin{cases} (\mathbf{C}^{\bullet,*}, d_{\bullet,*}) \rightsquigarrow (\mathbf{D}^{\bullet,*}, d'_{\bullet,*}), & \text{avec } D^{k,*} = \mathbf{C}^{k+1,*} \text{ et } d'_{k,*} = -d_{k+1,*} \\ (\varphi : C_1 \rightarrow C_2) \rightsquigarrow (\mathcal{J}_h(\varphi) : \mathcal{J}_h(C_1) \rightarrow \mathcal{J}_h(C_2)), & \text{avec } \mathcal{J}_h(\varphi)_{k,*} = \varphi_{k+1,*} \end{cases}$$

Le foncteur « de translation verticale » noté $\mathcal{J}_v : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab})$ se définit symétriquement.

On notera aussi $\mathcal{J}_h^n \mathcal{J}_v^m(C) = C[n, m]$ et $\mathcal{J}_h^n \mathcal{J}_v^m(\varphi) = \varphi[n, m]$ pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$.

2.2.3. Foncteur de cohomologie verticale. Le foncteur $h^k : \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{Ab}$ de k -ième cohomologie de la section 2.1.8 induit (2.2.1) un foncteur de « k -ième cohomologie verticale »

$$h_v^k = \mathbf{C}^\bullet(h^k) : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^\bullet(\mathbf{Ab})$$

dont l'action sur le bicomplexe (\mathcal{B}) donne le complexe des k -ièmes cohomologies (verticales) :

$$\dots \xrightarrow{h^k(\delta_{-2,*})} h^k(\mathbf{C}^{-1,*}) \xrightarrow{h^k(\delta_{-1,*})} h^k(\mathbf{C}^{0,*}) \xrightarrow{h^k(\delta_{0,*})} h^k(\mathbf{C}^{1,*}) \xrightarrow{h^k(\delta_{1,*})} h^k(\mathbf{C}^{2,*}) \xrightarrow{h^k(\delta_{2,*})} \dots$$

que l'on peut représenter par :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{h^1(\delta_{-2,*})} & h^1(\mathbf{C}^{-1,*}) & \xrightarrow{h^1(\delta_{-1,*})} & h^1(\mathbf{C}^{0,*}) & \xrightarrow{h^1(\delta_{0,*})} & h^1(\mathbf{C}^{1,*}) & \xrightarrow{h^1(\delta_{1,*})} & h^1(\mathbf{C}^{2,*}) & \xrightarrow{h^1(\delta_{2,*})} & \dots \\ \dots & \xrightarrow{h^0(\delta_{-2,*})} & h^0(\mathbf{C}^{-1,*}) & \xrightarrow{h^0(\delta_{-1,*})} & h^0(\mathbf{C}^{0,*}) & \xrightarrow{h^0(\delta_{0,*})} & h^0(\mathbf{C}^{1,*}) & \xrightarrow{h^0(\delta_{1,*})} & h^0(\mathbf{C}^{2,*}) & \xrightarrow{h^0(\delta_{2,*})} & \dots & (\mathcal{B}_v) \\ \dots & \xrightarrow{h^{-1}(\delta_{-2,*})} & h^{-1}(\mathbf{C}^{-1,*}) & \xrightarrow{h^{-1}(\delta_{-1,*})} & h^{-1}(\mathbf{C}^{0,*}) & \xrightarrow{h^{-1}(\delta_{0,*})} & h^{-1}(\mathbf{C}^{1,*}) & \xrightarrow{h^{-1}(\delta_{1,*})} & h^{-1}(\mathbf{C}^{2,*}) & \xrightarrow{h^{-1}(\delta_{2,*})} & \dots \end{array}$$

Le foncteur de cohomologie vertical à donc comme effet d'« effacer » les flèches verticales, on peut le voir comme un foncteur $h_v : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^\bullet(\mathbf{Ab})^{\mathbb{Z}}$

2.2.4. Foncteur de cohomologie horizontal. Le même foncteur de cohomologie de 2.1.8 appliqué cette fois à la catégorie $\mathbf{C}^\bullet(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}))$ donne le foncteur de « cohomologie horizontale »

$$h_h^k : \mathbf{C}^\bullet(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$$

dont l'action sur le bicomplexe \mathcal{B} donne la suite de complexes de cohomologies (horizontales) représenté dans :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & & \uparrow h^{-1}(d_{\bullet,1}) & & \uparrow h^0(d_{\bullet,1}) & & \uparrow h^1(d_{\bullet,1}) & & \uparrow h^2(d_{\bullet,1}) & & \dots \\ \dots & & h^{-1}(\mathbf{C}^{\bullet,1}) & & h^0(\mathbf{C}^{\bullet,1}) & & h^1(\mathbf{C}^{\bullet,1}) & & h^2(\mathbf{C}^{\bullet,1}) & & \dots \\ & & \uparrow h^{-1}(d_{\bullet,0}) & & \uparrow h^0(d_{\bullet,0}) & & \uparrow h^1(d_{\bullet,0}) & & \uparrow h^2(d_{\bullet,0}) & & \\ \dots & & h^{-1}(\mathbf{C}^{\bullet,0}) & & h^0(\mathbf{C}^{\bullet,0}) & & h^1(\mathbf{C}^{\bullet,0}) & & h^2(\mathbf{C}^{\bullet,0}) & & \dots & (\mathcal{B}_h) \\ & & \uparrow h^{-1}(d_{\bullet,-1}) & & \uparrow h^0(d_{\bullet,-1}) & & \uparrow h^1(d_{\bullet,-1}) & & \uparrow h^2(d_{\bullet,-1}) & & \\ \dots & & h^{-1}(\mathbf{C}^{\bullet,-1}) & & h^0(\mathbf{C}^{\bullet,-1}) & & h^1(\mathbf{C}^{\bullet,-1}) & & h^2(\mathbf{C}^{\bullet,-1}) & & \dots \\ & & \uparrow h^{-1}(d_{\bullet,-2}) & & \uparrow h^0(d_{\bullet,-2}) & & \uparrow h^1(d_{\bullet,-2}) & & \uparrow h^2(d_{\bullet,-2}) & & \end{array}$$

Le foncteur de cohomologie horizontale à donc comme effet d'« effacer » les flèches horizontales, on peut le voir comme un foncteur $h_h : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})^{\mathbb{Z}}$

2.2.5. $h_v \circ h_h \neq h_h \circ h_v$. Les foncteurs h_v et h_h apparaissent naturellement comme des foncteurs à valeurs dans la catégorie des bicomplexes, le premier dans la sous-catégorie des bicomplexes à flèches verticales nulles, le second à flèches horizontales nulles. Il est donc possible de les itérer mais les foncteurs **ne commutent pas nécessairement**. Par exemple, dans le bicomplexe \mathcal{B}' ci-contre où $\mu(m)z = mz$, les lignes sont exactes et alors $h_v(h_h(\mathcal{B}')) = 0$. Par contre, $h_v(\mathcal{B}')$ et $h_h(h_v(\mathcal{B}'))$ sont respectivement :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mu(2)} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(2) \rightarrow \mathbf{0} \\
 & & \mu(3)\uparrow & & \mu(2)\uparrow & & \mu(0)\uparrow \\
 \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mu(3)} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(3) \rightarrow \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
 \end{array} \quad (\mathcal{B}')$$

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbb{Z}/(3) & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/(2) & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z}/(2) & \rightarrow & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(3) & \rightarrow & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 & & & & & & & & (h_v(\mathcal{B}'))
 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{cccc|cccc}
 \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & & \mathbb{Z}/(3) & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbb{Z}/(3) & \rightarrow & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 & & & & & & & & & & (h_h(h_v(\mathcal{B}')))
 \end{array}$$

2.2.6. Catégorie des suites exactes courtes. On note maintenant $\Delta(\mathbf{C}^* \mathbf{Ab})$ la catégorie dont les objets, notés $(\mathbf{C}_\star, \varphi, \psi)$, sont les suites exactes courtes de complexes de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$,

$$\mathbf{C}_\star := \left(\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{C}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{C}_2 \xrightarrow{\psi} \mathbf{C}_3 \rightarrow \mathbf{0} \right),$$

que l'on interprète naturellement comme la sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathbf{Ab})$ des bicomplexes concentrés sur les colonnes 1, 2, 3, tels que pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, la suite courte $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{C}_1^k \xrightarrow{\varphi_k} \mathbf{C}_2^k \xrightarrow{\psi_k} \mathbf{C}_3^k \rightarrow \mathbf{0}$ est exacte.

La catégorie $\Delta(\mathbf{C}^* \mathbf{Ab})$ est additive mais n'est généralement pas abélienne comme l'a montré l'exemple du bicomplexe (\mathcal{B}') du paragraphe précédent que nous pouvons voir comme morphisme des suites exactes courtes horizontales. Le bicomplexe $h_v(\mathcal{B}')$ montre respectivement les complexes conoyau et noyau, le premier n'est pas exact à gauche et le second n'est pas exact à droite.

Si nous appliquons maintenant le foncteur de cohomologie verticale au bicomplexe \mathbf{C}_\star nous obtenons le bicomplexe à flèches verticales nulles :

$$\mathbf{0} \rightarrow h^*(\mathbf{C}_1) \xrightarrow{h^*(\varphi)} h^*(\mathbf{C}_2) \xrightarrow{h^*(\psi)} h^*(\mathbf{C}_3) \rightarrow \mathbf{0} \quad (h_v(\mathbf{C}_\star))$$

dont les lignes ne sont pas nécessairement exactes ⁽⁴⁾.

Les correspondances $\mathbf{C}_\star \rightsquigarrow h^*(\mathbf{C}_i)$ sont fonctorielles de $\Delta(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}))$ à valeurs dans $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$ et les flèches $h^*(\varphi)$ et $h^*(\psi)$ sont des morphismes de foncteurs. La suite $(h_v(\mathbf{C}_\star))$ s'interprète donc comme un complexe de foncteurs additifs.

Le théorème suivant est fondamental en algèbre homologique, (cf. le théorème de 2.1.12).

2.2.7. Théorème

a) Pour tout toute suite exacte courte $(\mathbf{C}_\star, \varphi, \psi)$ de complexes de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$, il existe un morphisme $\delta(\mathbf{C}_\star) : h(\mathbf{C}_3) \rightarrow h(\mathbf{C}_1)[1]$ fonctoriel par rapport à $(\mathbf{C}_\star, \varphi, \psi) \in \Delta(\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}))$, tel que la suite longue

$$h^*(\mathbf{C}_1) \xrightarrow{h^*(\varphi)} h^*(\mathbf{C}_2) \xrightarrow{h^*(\psi)} h^*(\mathbf{C}_3) \xrightarrow{\delta(\mathbf{C}_\star)_*} h^{*+1}(\mathbf{C}_1) \xrightarrow{h^*(\varphi)} h^{*+1}(\mathbf{C}_2) \xrightarrow{h^*(\psi)} h^{*+1}(\mathbf{C}_3) \xrightarrow{\delta(\mathbf{C}_\star)_{*+1}}$$

est un complexe acyclique.

⁴ Ces suites sont pourtant toujours exactes au terme central.

- b) Une inclusion (resp. surjection) de complexes $\varphi : C \rightarrow C'$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si, le complexe coker(φ) (resp. ker(φ)) est **acyclique**.
- c) Si $\Phi_* : C_{1,*} \rightarrow C_{2,*}$ est un morphisme de suites exactes courtes de complexes tel que deux des trois morphismes Φ_1, Φ_2, Φ_3 sont des quasi-isomorphismes, alors le troisième l'est également.

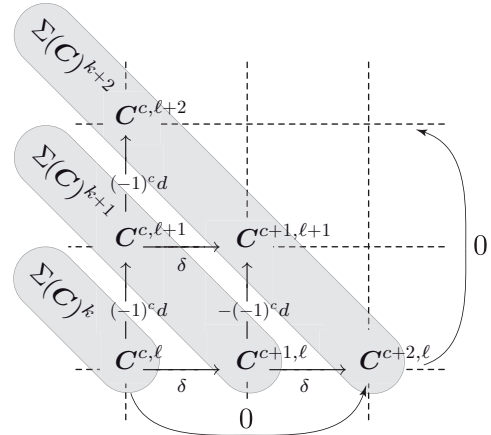
Démonstration. Consulter n'importe quel livre d'algèbre homologique élémentaire. ■

2.2.8. Complexe simple associé à un bicomplexe borné inférieurement. On définit le foncteur additif $\Sigma : C^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightarrow C^*(\mathbf{Ab})$ «*complexe simple associé*».

Action de Σ sur un bicomplexe. Pour tout bicomplexe $C := (C^{\bullet,*}, \delta_{\bullet,*}, d_{\bullet,*})$ d'objets de \mathbf{Ab} , on note $(\Sigma(C); D(C))$ le complexe de $C^*(\mathbf{Ab})$ suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \Sigma(C)^k := \bigoplus_{c+\ell=k} C^{c,\ell}, \\ \bullet \left\{ \begin{array}{l} D(C)_k : \Sigma(C)^k \rightarrow \Sigma(C)^{k+1} \\ x_{c,\ell} \mapsto \delta x \oplus (-1)^c dx \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où nous avons omis des indices superflus pour améliorer la lisibilité. Le graphique suivant résume ces données et tente d'illustrer l'égalité $D_{k+1} \circ D_k = 0$.



Action de Σ sur un morphisme. Étant donné un morphisme de bicomplexes $\alpha_{\bullet,*} : C_1^{\bullet,*} \rightarrow C_2^{\bullet,*}$ on note,

$$\Sigma(\alpha)_k : \Sigma(C_1)^k \rightarrow \Sigma(C_2)^k.$$

le morphisme $\bigoplus_{k=c+\ell} \alpha_{c,\ell}$ dont la commutation avec les différentielles horizontale et verticale est évidente. Il s'ensuit que l'on a $\Sigma(\alpha)_{k+1} \circ D(C_1)_k = D(C_2)_k \circ \Sigma(\alpha)_k$ et que $\Sigma(\alpha)_* : \Sigma(C_1)^* \rightarrow \Sigma(C_2)^*$ est bien un morphisme de complexes.

2.2.9. Proposition. Le foncteur «complexe simple associé» $\Sigma : C^{\bullet,*}(\mathbf{Ab}) \rightarrow C^*(\mathbf{Ab})$ est covariant additif et exact.

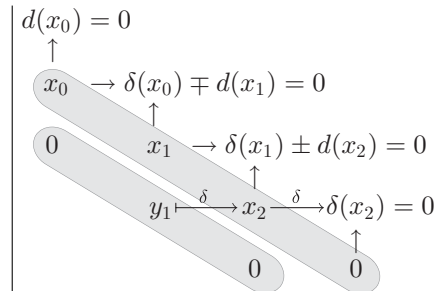
2.2.10. Critère d'acyclité du complexe simple associé

Définitions. Un bicomplexe $C^{\bullet,*}$ est dit «*borné inférieurement*» lorsque ses termes $C^{i,j}$ sont nuls dès que l'un des indices i, j est assez négatif, autrement dit, $C^{\bullet,*} \in C^{+,+}(\mathbf{Ab}) := C^+(C^+(\mathbf{Ab}))$ (cf. 2.1.6). Un bicomplexe $C^{\bullet,*}$ est dit du «*premier quadrant*» lorsque ses coefficients $C^{i,j}$ sont nuls dès que l'un des indices i, j est négatif, autrement dit, $C^{\bullet,*} \in C^{\geq 0, \geq 0}(\mathbf{Ab})$.

Théorème. Soit $C \in C^{+,+}(\mathbf{Ab})$. Le complexe $(\Sigma(C); D(C))$ est acyclique dans les deux cas suivants

- $h_v(C) := 0$ ou
- $h_h(C) := 0$

Démonstration. Il suffit de raisonner dans le cas où C est un bicomplexe du premier quadrant de lignes exactes. Soit $k \in \mathbb{N}$ et notons $\bar{x} := (x_0, \dots, x_k) \in C^{0,k} \oplus \dots \oplus C^{k,0}$ un élément de $\Sigma(C)^k$ annulé par D_k . Si $\bar{x} \neq 0$, notons j le plus grand des indices tels que $x_j \neq 0$, alors $\delta(x_j) = 0$ et il existe $y \in C^{j-1, k-j}$ tel que $\delta(y) = x_j$ grâce à l'exactitude des lignes de C . Notons \bar{y} l'élément $(y_0, \dots, y_{k-1}) \in \Sigma(C)^{k-1}$ avec $y_i = 0$ si $i \neq j-1$ et $y_{j-1} = y$. Le cocycle \bar{x} est alors cohomologue à $\bar{x}' := \bar{x} - D(\bar{y})$ dont le plus grand des indice j' tel que $x'_{j'} \neq 0$ vérifie $j' < j$. L'itération de ce procédé, possible puisque toutes les lignes sont exactes, s'arrête après au plus k étapes et montre que \bar{x} est un cobord. ■



2.2.11. Un critère de quasi-isomorphie de complexes simples associés. Le critère de 2.2.10 est aussi conséquence du critère de quasi-isomorphie de complexes simples associée suivant.

Théorème. Soit $\varphi_{\bullet,*} : \mathcal{C}_1^{\bullet,*} \rightarrow \mathcal{C}_2^{\bullet,*}$ un morphisme de bicomplexes bornés inférieurement. Le morphisme des complexes simples associés $\Sigma(\varphi) : \Sigma(\mathcal{C}_1) \rightarrow \Sigma(\mathcal{C}_2)$ est un quasi-isomorphisme dans les deux cas suivants

- $h_v(\varphi)$ est un isomorphisme ou
- $h_h(\varphi)$ est un isomorphisme

Le théorème de 2.2.10 résulte alors du cas où $\mathcal{C}_1 = \mathbf{0}$ et $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$.

Démonstration du théorème. On donne le raisonnement pour le cas de la cohomologie verticale et l'on supposera le support des bicomplexes contenu dans le premier quadrant. La functorialité des troncatures bêtes du paragraphe 2.1.14 permet de définir le sous-bicomplexe $\mathcal{C}^{\bullet>0,*}$ de $\mathcal{C}^{\bullet,*}$ de mêmes

colonnes d'indice positif et nul sur la colonne 0. On note $\mathcal{C}^{0,*} := \mathcal{C}^{\bullet,*} / \mathcal{C}^{\bullet>0,*}$; sa colonne 0 coïncide avec celle de \mathcal{C} et ses autres colonnes sont nulles. On considère alors le morphisme de suites exactes courtes de bicomplexes (\mathcal{B}) qui donne lieu au morphisme de suites exactes courtes de complexes simples associés $(\Sigma \mathcal{B})$ où $\Sigma \varphi_{0,*} : \Sigma \mathcal{C}_1^{0,*} \rightarrow \Sigma \mathcal{C}_2^{0,*}$ s'identifie trivialement au morphisme $\varphi_{0,*} : \mathcal{C}_1^{0,*} \rightarrow \mathcal{C}_2^{0,*}$ dont on a supposé que c'est un quasi-isomorphisme.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{C}_1^{\bullet>0,*} & \hookrightarrow & \mathcal{C}_1 & \twoheadrightarrow & \mathcal{C}_1^{0,*} \rightarrow \mathbf{0} \\ & & \varphi_{\bullet>0} \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi_{0,*} \downarrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{C}_2^{\bullet>0,*} & \hookrightarrow & \mathcal{C}_2 & \twoheadrightarrow & \mathcal{C}_2^{0,*} \rightarrow \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \rightarrow & \Sigma \mathcal{C}_1^{\bullet>0,*} & \hookrightarrow & \Sigma \mathcal{C}_1 & \twoheadrightarrow & \Sigma \mathcal{C}_1^{0,*} \rightarrow \mathbf{0} \\ & & \Sigma \varphi_{\bullet>0} \downarrow & & \Sigma \varphi \downarrow & & \Sigma \varphi_{0,*} \downarrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \Sigma \mathcal{C}_2^{\bullet>0,*} & \hookrightarrow & \Sigma \mathcal{C}_2 & \twoheadrightarrow & \Sigma \mathcal{C}_2^{0,*} \rightarrow \mathbf{0} \end{array} \quad (\mathcal{B})$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \Sigma \mathcal{C}_1^{\bullet>0,*} & \hookrightarrow & \Sigma \mathcal{C}_1 & \twoheadrightarrow & \Sigma \mathcal{C}_1^{0,*} \rightarrow \mathbf{0} \\ & & \Sigma \varphi_{\bullet>0} \downarrow & & \Sigma \varphi \downarrow & & \Sigma \varphi_{0,*} \downarrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \Sigma \mathcal{C}_2^{\bullet>0,*} & \hookrightarrow & \Sigma \mathcal{C}_2 & \twoheadrightarrow & \Sigma \mathcal{C}_2^{0,*} \rightarrow \mathbf{0} \end{array} \quad (\Sigma \mathcal{B})$$

Il s'ensuit (cf. 2.2.7-(c)) que $\Sigma \varphi$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\Sigma \varphi_{\bullet>0}$ l'est, mais aussi, par une itération évidente de ces idées, que $\Sigma \varphi$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\Sigma \varphi_{\bullet>k}$ l'est pour n'importe quel $k \geq 1$. On peut même raffiner sans difficulté cette assertion en disant que $\Sigma \varphi$ est un quasi-isomorphisme en degré ℓ si et seulement si $\Sigma \varphi_{\bullet>k}$ l'est pour n'importe quel $k \geq 1$. Or, sous cette forme il ne reste plus rien à démontrer puisque les termes des complexes $\Sigma \mathcal{C}^{\bullet>\ell,*}$ sont nuls en degré $\leq \ell$ (car \mathcal{C} du premier quadrant). ■

2.2.12. L'idée de découper une suite exacte longue pour fabriquer deux complexes quasi-isomorphes de l'exercice 2.1.16 se généralise au contexte des bicomplexes (cf. 2.2.1). En effet, si $\mathcal{C}^{\bullet,*}$ est un bicomplexe, nous pouvons découper chaque colonne comme indiqué dans l'illustration de 2.1.16 pour obtenir un morphisme de bicomplexes $\varphi_{\bullet,*} : \mathcal{C}^{\bullet,* \leq \ell} \rightarrow \mathcal{C}^{\bullet,* > \ell} [0, 1]$ avec $\varphi_{\bullet,\ell} = d_{\bullet,\ell}$ et $\varphi_{\bullet,k} = 0$ si $k \neq \ell$.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathcal{C}^{0,2} & \rightarrow & \mathcal{C}^{1,2} & \rightarrow & \mathcal{C}^{2,2} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathcal{C}^{0,1} & \rightarrow & \mathcal{C}^{1,1} & \rightarrow & \mathcal{C}^{2,1} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathcal{C}^{0,0} & \rightarrow & \mathcal{C}^{1,0} & \rightarrow & \mathcal{C}^{2,0} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \end{array} \right] \xrightarrow{\varphi_{\bullet,*}} \left[\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathcal{C}^{0,5} & \rightarrow & \mathcal{C}^{1,5} & \rightarrow & \mathcal{C}^{2,5} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathcal{C}^{0,4} & \rightarrow & \mathcal{C}^{1,4} & \rightarrow & \mathcal{C}^{2,4} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathcal{C}^{0,3} & \rightarrow & \mathcal{C}^{1,3} & \rightarrow & \mathcal{C}^{2,3} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \end{array} \right] \end{array}$$

$$\Sigma(\mathcal{C}^{\bullet,* \leq 2}) \xrightarrow{\Sigma(\varphi_{\bullet,*})} \Sigma(\mathcal{C}^{\bullet,* > 2} [0, 1])$$

La remarque de l'exercice 2.1.16 jointe au théorème 2.2.10 prouvent alors le corollaire suivant.

2.2.13. Corollaire. Avec les notations en cours, si $\mathcal{C} \in \mathbf{C}^{+,+}(\mathbf{Ab})$ est tel que $h_v(\mathcal{C}) = 0$, le morphisme de complexes

$$\Sigma(\varphi) : \Sigma(\mathcal{C}^{\bullet,* \leq \ell}) \rightarrow \Sigma(\mathcal{C}^{\bullet,* > \ell} [0, 1])$$

est un quasi-isomorphisme.

2.2.14. Notation $\Sigma_{\bullet\circ}^*$. Le foncteur “complexe simple associé” étant additif, induit des foncteurs sur les catégories des multicomplexes. Son action transforme un n -complexe en un $n - 1$ -complexe en opérant des regroupements suivant une paire d’indices dont la notation devra faire référence explicite. Par exemple, sur un n -complexe constitué d’objets C^{i_1, i_2, \dots, i_n} avec $i_k \in \mathbb{Z}$, l’opérateur qui indexe par i_a les regroupements des termes suivant la diagonale i_a, i_b définit l’opérateur

$$\left(\Sigma(C^{i_1, \dots, i_a, \dots, i_b, \dots, i_n})\right)^{i_1, \dots, i_{a-1}, k, i_{a+1}, \dots, \widehat{i_b}, \dots, i_n} = \Sigma_{k=i_a+i_b} C^{i_1, \dots, i_{a-1}, i_a, i_{a+1}, \dots, i_b, \dots, i_n}$$

que l’on notera $\Sigma_{a,b}^a$. L’opérateur $\Sigma_{a,b}^b$ est défini de manière analogue. Enfin, pour une référence des indices non alphanumérique, on préférera la notation $\Sigma_{\bullet\circ}^*(-)$.

2.2.15. Exercice. Soit I^* un foncteur additif de \mathbf{Ab} vers $C^{\mathbb{N}}(\mathbf{Ab})$ qui fait correspondre à chaque $M \in \mathbf{Ab}$ une suite exacte longue $(\mathbf{0} \rightarrow M \rightarrow I^*(M)) = (\mathbf{0} \rightarrow M \rightarrow I^0(M) \rightarrow I^1(M) \rightarrow \dots)$. Montrer que pour tout complexe $M^\bullet \in C^+(\mathbf{Ab})$ on a un quasi-isomorphisme canonique $M^\bullet \rightarrow \Sigma_{\bullet\circ}^* I^*(M^\bullet)$ fonctoriel sur la catégorie $C^+(\mathbf{Ab})$.

§ 3. Cohomologie des faisceaux

La référence incontournable pour cette section est [Go].

3.1 Préliminaires

On désigne par X un espace topologique et par $\text{Fais}_X(\mathbb{Z})$ la catégorie (abélienne) des faisceaux de groupes abéliens sur X . Pour tout ouvert $U \subseteq X$ et tout $\mathcal{G} \in \text{Fais}_X(\mathbb{Z})$ on note $\Gamma(U; \mathcal{G})$ le groupe des sections de \mathcal{G} au-dessus de U . La correspondance $\mathcal{G} \rightsquigarrow \Gamma(U; \mathcal{G})$ est fonctorielle, additive, exacte à gauche, de $\text{Fais}_X(\mathbb{Z})$ vers la catégorie $\text{Mod}(\mathbb{Z})$ des groupes abéliens.

Pour $\mathcal{G} \in \text{Fais}_X(\mathbb{Z})$, on appelle «*résolution de \mathcal{G}* » toute suite exacte longue de faisceaux

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

on la note $\epsilon : \mathcal{G} \rightarrow (\mathcal{G}^*, d_*)$. Le morphisme ϵ s’appelle l’«*augmentation (de la résolution de \mathcal{G})*»⁽⁵⁾.

3.1.1. Faisceaux flasques. Un faisceau $\mathcal{F} \in \text{Fais}_X(X)$ est dit «*flasque*» si ses sections locales sont restrictions de sections globales, autrement dit si l’application $\Gamma(X; \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{F})$ est surjective quel que soit l’ouvert $U \subseteq X$.

3.1.2. Proposition

a) Pour toute suite exacte courte de faisceaux $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathbf{0}$ avec \mathcal{F} flasque, la suite courte de groupes abéliens

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U; \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U; \mathcal{G}') \rightarrow \mathbf{0}$$

est exacte, quel que soit l’ouvert $U \subseteq X$.

b) Pour toute suite exacte longue de faisceaux flasques : $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \dots$, la suite longue de groupes abéliens

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}_0) \longrightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}_1) \longrightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}_2) \longrightarrow \dots$$

est exacte, quel que soit l’ouvert $U \subseteq X$.

⁵ Plus généralement «*augmenter un complexe*» $\mathbf{0} \rightarrow C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \rightarrow \dots$ consiste à le rendre exact à gauche en lui rajoutant le terme $C^{-1} := \ker(d_0)$ via l’injection canonique $\epsilon : C^{-1} \rightarrow C^0$ que l’on appelle «*le morphisme d’augmentation*». Le complexe $\mathbf{0} \rightarrow C^{-1} \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots$ s’appelle «*le complexe augmenté*». Cette procédure est fonctorielle et c’est une équivalence de catégories entre la catégorie des complexes à support dans $[0, +\infty[$ et la catégorie des complexes à support dans $[-1, +\infty[$ exacts en degrés $\{-1, 0\}$. La procédure symétrique donne lieu à la notion de «*co-augmentation*».

3.1.3. Résolution flasque de Godement. À tout un faisceau \mathcal{G} sur \mathbf{X} on associe un espace topologique $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ et une application étale $p_{\mathcal{G}} : \mathcal{E}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{X}$ dont la fibre en $x \in \mathbf{X}$ s'identifie à l'ensemble \mathcal{G}_x des germes de \mathcal{G} en x . Le faisceau des sections locales continues de $p_{\mathcal{G}}$ s'identifie à \mathcal{G} et c'est un sous-faisceau du faisceau des sections locales ensemblistes $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}$ qui est clairement flasque. La correspondance

$$\mathcal{G} \rightsquigarrow (\mathcal{G} \xrightarrow{\epsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G})$$

est *fonctorielle* et *exacte* de $\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$ vers la catégorie $\mathbf{C}^+(\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$ des complexes de faisceaux bornés à gauche. On procède ensuite par induction : ayant défini le complexe *exact* de foncteurs exacts

$$0 \rightarrow \text{id}(-) \xrightarrow{\epsilon(-)} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0(-) \xrightarrow{d_0(-)} \dots \xrightarrow{d_{k-2}(-)} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^{k-1}(-) \xrightarrow{d_{k-1}(-)} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^k(-)$$

le conoyau de $d_{k-1}(-)$, noté $\mathcal{Q}(-)$, est, lui aussi, un foncteur exact. On pose alors $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}^{k+1}(-) := \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0(\mathcal{Q}(-))$ et $(d_k(-) : \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^k(-) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^{k+1}(-))$: la composée du morphisme canonique $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}^k(-) \rightarrow \mathcal{Q}(-)$ suivi du morphisme $\epsilon(\mathcal{Q}(-)) : \mathcal{Q}(-) \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0(\mathcal{Q}(-))$. La suite

$$0 \rightarrow \text{id}(-) \xrightarrow{\epsilon(-)} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0(-) \xrightarrow{d_0(-)} \dots \xrightarrow{d_{k-2}(-)} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^{k-1}(-) \xrightarrow{d_{k-1}(-)} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^k(-) \xrightarrow{d_k(-)} \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^{k+1}(-)$$

est alors un complexe de foncteurs exacts dont l'homologie est nulle en tout degré $\leq k$.

L'itération de ce procédé donne le foncteur « *résolution (flasque) canonique de Godement* », il est noté $\mathcal{F} \rightsquigarrow (\epsilon(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \rightarrow (\mathcal{C}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{F}; d_*(\mathcal{F})))$.

3.2 Cohomologie des faisceaux

3.2.1. Définition. On appelle « *k-ième groupe de cohomologie de faisceaux de $\mathcal{G} \in \text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$ au-dessus de l'ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$* » et on note $H^k(U; \mathcal{G})$, le k -ième groupe de cohomologie du complexe

$$\Gamma(U; (\mathcal{C}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{G}, d_*(\mathcal{G}))) := \left(\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^2 \mathcal{G}) \rightarrow \dots \right)$$

soit

$$\boxed{H^*(U; \mathcal{G}) := h^* \Gamma(U; (\mathcal{C}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{G}, d_*(\mathcal{G})))}$$

3.2.2. Augmentation du complexe de Godement. La suite longue $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\epsilon(\mathcal{G})} (\mathcal{C}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{G}; d_*(\mathcal{G}))$ est un complexe exact à gauche, *i.e.* $\epsilon(\mathcal{G})$ est une « *augmentation* » du complexe de Godement.

3.2.3. Exercice. Montrer que $\Gamma(U; \epsilon(\mathcal{G}))$ induit un isomorphisme entre $\Gamma(U; \mathcal{G})$ et $H^0(U; \mathcal{G})$

3.2.4. Faisceaux acycliques. Un faisceau \mathcal{G} est dit « *acyclique sur un ouvert U* » lorsque ses groupes de cohomologie de faisceau au-dessus de U en degrés positifs sont nuls, *i.e.* $H^{>0}(U; \mathcal{G}) = 0$.

3.2.5. Exercice. Un faisceau flasque est acyclique au-dessus de tout ouvert (3.1.2).

3.2.6. Théorème (Leray). Soit $\epsilon : \mathcal{G} \rightarrow (\mathcal{G}^*, d_*)$ une résolution de $\mathcal{G} \in \text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$ où chaque \mathcal{G}^k est acyclique sur $U \subseteq \mathbf{X}$. Alors, le groupe de cohomologie de faisceaux $H^k(U; \mathcal{G})$ s'identifie canoniquement au k -ième groupe de cohomologie du complexe $\Gamma(U; (\mathcal{G}^*, d_*))$.

Démonstration. En appliquant le foncteur (exact) « *résolution de Godement* » sur chaque terme de la suite longue $\epsilon : \mathcal{G} \rightarrow (\mathcal{G}^*, d_*)$ on obtient le bicomplexe de faisceaux du premier quadrant de lignes et colonnes exactes représenté ci-après. L'application du foncteur $\Gamma(U; _)$ transforme ce bicomplexe en un bicomplexe de groupes abéliens dont les lignes

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G} & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G}^0 & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G}^1 & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G}^2 & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G} & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}^0 & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}^1 & \rightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}^2 & \rightarrow & \\ \hline \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{G} & \rightarrow & \mathcal{G}^0 & \rightarrow & \mathcal{G}^1 & \rightarrow & \mathcal{G}^2 & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \end{array}$$

d'indices ≥ 1 sont exactes d'après 3.1.2 et les colonnes d'indices ≥ 1 le sont aussi en raison de l'acyclicité des \mathcal{G}^\bullet . La cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe $\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}^\bullet)$ (partie grisée) est alors canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe $\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{G}^\bullet)$ grâce au corollaire 2.2.13, et est aussi canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe $\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^* \mathcal{G})$ en raison de la version symétrique du même corollaire, or cette dernière est précisément $H^*(U; \mathcal{G})$. ■

3.2.7. Remarque. L'intérêt pratique immédiat de ce théorème vient de la souplesse qu'il permet dans le choix de résolutions d'un faisceau. Ainsi, *toute* résolution flasque d'un faisceau (cf. 3.2.5), pas seulement celle de Godement, permet le calcul de ses groupes de cohomologie.

3.2.8. Propriétés générales de la cohomologie de faisceaux. Nous avons défini dans les paragraphes précédents la cohomologie d'un faisceau. Si maintenant nous avons un morphisme de faisceaux $\alpha : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$, la functorialité de la résolution canonique de Godement donne un morphisme de complexes $\mathcal{C}_X^* \alpha : \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_2$ et donc un morphisme de cohomologies de faisceaux $H^*(U; \alpha) : H^*(U; \mathcal{G}_1) \rightarrow H^*(U; \mathcal{G}_2)$.

3.2.9. Théorème. Soit U un ouvert de X . Soient \mathcal{G}_i des faisceaux de groupes abéliens sur X .

a) La correspondance qui associe

$$\mathcal{G} \rightsquigarrow H^*(U; \mathcal{G}), \quad (\alpha : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2) \rightsquigarrow (H^*(U; \alpha) : H^*(U; \mathcal{G}_1) \rightarrow H^*(U; \mathcal{G}_2))$$

est functorielle additive et covariante de $\text{Fais}_X(\mathbb{Z})$ vers la catégorie $\text{Mod}(\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$.

b) Le morphisme de foncteurs $\Gamma(U; -) \rightarrow \Gamma(U'; -)$ correspondant à une inclusion d'ouverts $U' \hookrightarrow U$, induit un morphisme de foncteurs de cohomologie $H^*(U; -) \rightarrow H^*(U'; -)$.

c) Pour toute suite exacte courte $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_3 \rightarrow \mathbf{0}$, il existe un morphisme de connexion $c(U)_* : H^*(U; \mathcal{G}_3) \rightarrow H^{*+1}(U; \mathcal{G}_1)$ tel que la suite longue de cohomologies

$$0 \rightarrow H^0(U; \mathcal{G}_1) \rightarrow H^0(U; \mathcal{G}_2) \rightarrow H^0(U; \mathcal{G}_3) \xrightarrow{c(U)_0} H^1(U; \mathcal{G}_1) \rightarrow H^1(U; \mathcal{G}_2) \rightarrow H^1(U; \mathcal{G}_3) \xrightarrow{c(U)_1} \dots$$

est exacte. Ces suites, particulièrement le morphisme de connexion $c(U)_*$, sont functorielles sur la catégorie des suites exactes courtes de faisceaux et sont naturelles relativement aux inclusions d'ouverts $U' \subseteq U$.

Indications. Les assertions (a,b) sont immédiates, pour (c) il suffit de remarquer que l'application du foncteur "résolution de Godement" sur la catégorie des suites exactes courtes de faisceaux, défini un foncteur à valeurs dans la catégorie des suites exactes courtes de complexes de faisceaux *flasques*. On a, pour un morphisme de suites exactes courtes,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_3 \rightarrow \mathbf{0} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}'_1 \rightarrow \mathcal{G}'_2 \rightarrow \mathcal{G}'_3 \rightarrow \mathbf{0} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_1) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_2) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_3) \rightarrow \mathbf{0} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_1) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_2) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_3) \rightarrow \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, le foncteur $\Gamma(U; -)$ appliqué au bicomplexe $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_3 \rightarrow \mathbf{0}$ préserve l'exactitude des lignes (cf. prop. 3.1.2(a)) et nous fait passer de la catégorie des suites exactes courtes de complexes de faisceaux flasques à la catégorie des suites exactes courtes de complexes de groupes abéliens,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_1) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_2) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_3) \rightarrow \mathbf{0} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_1) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_2) \rightarrow \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_3) \rightarrow \mathbf{0} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_1)) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_2)) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}_3)) \rightarrow \mathbf{0} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_1)) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_2)) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}_X^*(\mathcal{G}'_3)) \rightarrow \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

on conclut alors en appliquant le théorème 2.2.7. ■

3.3 Cohomologie de Čech des faisceaux

3.3.1. Complexe de Čech. Pour tout préfaisceau \mathcal{P} de groupes abéliens sur \mathbf{X} et toute famille $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in \mathfrak{A}}$ d'ouverts de \mathbf{X} on note $\check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ le « groupe des k -cochaînes de Čech à valeurs dans \mathcal{P} et relatives à \mathcal{U} » :

$$\check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P}) = \prod_{a_0 < \dots < a_k} \mathcal{P}(U_{a_0 \dots a_k})$$

où $U_{a_0 \dots a_k} := U_{a_0} \cap \dots \cap U_{a_k}$. On définit ensuite la « différentielle de Čech »

$$d_k : \check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \rightarrow \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \quad d_k(\omega)_{a_0 \dots a_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \omega_{a_0 \dots \widehat{a}_j \dots a_{k+1}}$$

dont on vérifie aisément que $d_{k+1} \circ d_k = 0$. On note $(\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}); d_*)$ le « complexe des cochaînes de Čech à valeurs dans \mathcal{P} et relatif à \mathcal{U} »

3.3.2. Exercice. Vérifier que pour tout complexe de préfaisceaux $(\mathcal{P}^\bullet, d_\bullet)$ et chaque $k \in \mathbb{N}$, la cohomologie du complexe $\check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet)$ s'identifie au produit des cohomologies des complexes $\Gamma(U_{a_0 \dots a_k}; (\mathcal{P}^\bullet, d_\bullet))$.

3.3.3. Augmentation du complexe de Čech. Soit $\epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P}) : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ le morphisme qui associe à une section $\sigma \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ l'élément $\epsilon(\sigma) \in \prod_{a \in \mathfrak{A}} \mathcal{P}(U_a)$ tel que $\epsilon(\sigma)_a = \sigma|_{U_a}$. La suite longue $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X}) \xrightarrow{\epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P})} (\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}); d_*)$ est un complexe, on appellera $\epsilon(\mathcal{U}; -)$ l'« augmentation » du complexe de Čech. ⁽⁶⁾

3.3.4. Cohomologie de Čech. Avec les notions précédentes, on appelle « k -ième groupe de cohomologie de Čech d'un préfaisceau \mathcal{P} relativement à \mathcal{U} » les k -ième groupe de cohomologie du complexe $(\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}); d_*)$, on le note $\check{H}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P})$.

3.3.5. Exercice. Montrer que si \mathcal{P} est un faisceau et si \mathcal{U} est un recouvrement de \mathbf{X} , l'augmentation $\epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ induit un isomorphisme entre $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ et $\check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P})$.

3.3.6. Faisceautisation du complexe de Čech. Les notation étant celles des paragraphes précédents, on note $\mathcal{U} \cap V = \{U_\alpha \cap V\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ pour tout ouvert $V \subseteq \mathbf{X}$, et l'on pose

$$(\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}), d_*)(V) := (\check{C}^*(\mathcal{U} \cap V; \mathcal{P}); d_*)$$

Lorsque $V' \subseteq V$ les morphismes de restriction $\mathcal{P}(U_{a_0 \dots a_k} \cap V) \rightarrow \mathcal{P}(U_{a_0 \dots a_k} \cap V')$ induisent un morphisme de restriction $\check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P})(V) \rightarrow \check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P})(V)$ clairement compatible aux différentielles de Čech. On a ainsi un complexe de préfaisceaux sur \mathbf{X} noté $(\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}), d_*)$ muni de l'« augmentation » $\epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P}) : \mathcal{P} \rightarrow (\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}), d_*)$ définie par $\Gamma(V, \epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P})) = \epsilon(V, \mathcal{U}; \mathcal{P})$ (3.3.3).

Le théorème suivant est fondamental, surtout pour l'assertion (b).

3.3.7. Théorème. Soit \mathcal{G} un faisceau sur \mathbf{X} .

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le préfaisceau $\check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ est un faisceau qui est flasque si \mathcal{G} est flasque.

!!

b) Si \mathcal{U} est un recouvrement de \mathbf{X} , le complexe $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\epsilon} (\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}), d_*)$ est acyclique.

!!

Démonstration. (cf. §5 [Go], Thm. 5.2.1 p. 206.) ■

3.3.8. Théorème de Čech-Leray pour la cohomologie des faisceaux. Soit $\mathcal{G} \in \text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$. Un recouvrement \mathcal{U} de \mathbf{X} est dit « acyclique pour \mathcal{G} » où « \mathcal{G} -acyclique » lorsque \mathcal{G} est acyclique au-dessus de chaque ouvert $U_{a_0 \dots a_k}$.

⁶ Il y a ici un petit abus de langage dans la mesure où le complexe de Čech augmenté est exact à gauche, à priori seulement lorsque \mathcal{P} est un faisceau et que \mathcal{U} est un recouvrement de \mathbf{X} .

3.3.9. Théorème. Soient $\mathcal{G} \in \text{Fais}_X(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in \mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de X .

a) Si \mathcal{U} et \mathcal{G} -acyclique, la cohomologie de faisceaux de \mathcal{G} s'identifie canoniquement à la cohomologie de Čech de \mathcal{G} relative à \mathcal{U} , i.e.

$$\check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}) \simeq H^*(X; \mathcal{G})$$

b) Soit $\varphi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ un morphisme de faisceau tel que $H^*(V; \varphi) : H^*(V; \mathcal{G}_1) \rightarrow H^*(V; \mathcal{G}_2)$ est un isomorphisme au-dessus de chaque ouvert $V = U_{a_0 \dots a_k}$, alors

$$H^*(X; \varphi) : H^*(X; \mathcal{G}_1) \rightarrow H^*(X; \mathcal{G}_2)$$

est un isomorphisme.

Démonstration

a) La preuve est semblable à celle du théorème de Leray (3.2.6). La résolution de Godement appliquée au termes de la résolution de Čech $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ (cf. 3.3.7-(b)) donne le bicomplexe de faisceaux du premier quadrant

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G} & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}) & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G} & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}) & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{G} & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{G}) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U}; \mathcal{G}) & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \end{array}$$

que le foncteur $\Gamma(X; -)$ transforme en un bicomplexe de groupes abéliens de lignes d'indices ≥ 1 exactes car sections globales de suites exactes de faisceaux flasques (3.3.7) et les colonnes d'indices ≥ 1 le sont également puisqu'elles calculent la cohomologie de faisceaux de $\check{\mathcal{C}}^k(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ qui n'est autre que le produit des cohomologies faisceaux $\mathcal{G}|_{U_{a_0 \dots a_k}}$, triviales par hypothèse. La cohomologie du complexe simple associé au sous-complexe $\Gamma(X; \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}))$ (partie grisée) est alors canoniquement isomorphe, d'une part à la cohomologie de faisceaux de \mathcal{G} , et d'autre part à la cohomologie de Čech de \mathcal{G} relative à \mathcal{U} (cf. 2.2.13).

b) Le morphisme $H^*(X; \varphi)$ est un isomorphisme, si et seulement si les sections globales du morphisme $\mathcal{C}_X^* \varphi : \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_2$, défini par le foncteur «résolution de Godement», est un quasi-isomorphisme, autrement dit, si et seulement si la cohomologie des sections globales du cône de $\mathcal{C}_X^* \varphi$, noté \mathcal{F}^* , est nulle (2.1.12-(b)). Soit $\mathcal{B}^{\bullet,*}$ le bicomplexe du premier quadrant ci-contre, où la ligne ℓ est le complexe de Čech augmenté associé à \mathcal{F}^ℓ . Comme chaque ligne de $\mathcal{B}^{\bullet,*}$ est une suite exacte de faisceaux flasques (3.3.7(a)), la cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe $\Gamma(X; \mathcal{B}^{\bullet,*})$ est nulle (3.1.2(b), 2.2.10), et la cohomologie de $\Gamma(X; \mathcal{F}^*)$ s'identifie canoniquement à celle du complexe simple associé au bicomplexe $\Gamma(X; \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{F}^*))$ (version symétrique du corollaire de 2.2.13). Or, les colonnes de ce bicomplexe sont les produits des complexes $\Gamma(U_{a_0 \dots a_k}; \mathcal{F}^*)$ (3.3.2) dont les cohomologies sont nulles puisqu'il s'agit des cohomologies des cônes des morphismes $\Gamma(U_{a_0 \dots a_k}; \mathcal{C}_X^* \varphi)$, qui sont des quasi-isomorphismes par hypothèse. On conclut par 2.2.10. ■

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{F}^2 & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}^2) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}^2) & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{F}^1 & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}^1) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}^1) & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{F}^0 & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}^0) & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}^0) & \rightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \end{array} \quad (\mathcal{B}^{\bullet,*})$$

§4. Hypercohomologie des complexes de faisceaux

Cette partie étend les définitions et résultats de la section précédente de la catégorie $\text{Fais}_X(\mathbb{Z})$ à la catégorie $\mathbf{C}^+(\text{Fais}_X(\mathbb{Z}))$ des complexes de faisceaux bornés inférieurement.

4.1 Hypercohomologie des complexes de faisceaux

L'« hypercohomologie » au-dessus de l'ouvert $U \subseteq X$ d'un complexe de faisceaux borné inférieurement \mathcal{G}^\bullet , notée $\mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}^\bullet)$, est la cohomologie des sections globales du complexe simple associé au bicomplexe (borné inférieurement) $\mathcal{C}_X^* \mathcal{G}^\bullet$, on pose donc

$$\boxed{\mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}^\bullet) := h^* \Gamma(U; \Sigma_{*, \bullet}^*(\mathcal{C}_X^* \mathcal{G}^\bullet))}$$

4.1.1. Commentaire. Le foncteur $(-)[0] : \text{Fais}_X(\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^* \text{Fais}_X(\mathbb{Z})$ (2.1.4) identifie la catégorie de faisceaux à la sous-catégorie pleine de \mathbf{C}^+ ($\text{Fais}_X(\mathbb{Z})$) des complexes concentrés en degré zéro. Ainsi, pour tout faisceau \mathcal{G} , on a $\Sigma \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}[0] = \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}$ et $\mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}[0]) = H^*(U; \mathcal{G})$. L'hypercohomologie étend de cette manière la cohomologie des faisceaux.

4.1.2. Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(X; -) : h^*(\Gamma(U; -)) \rightarrow \mathbb{H}^*(U; -)$. On construit un morphisme canonique de complexes de faisceaux

$$\epsilon(\mathcal{G}^\bullet) : \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \Sigma_{*, \bullet}^* \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}^\bullet$$

par découpage de la première ligne (cf. 2.2.12) du bicomplexe construit à partir du complexe (horizontal) \mathcal{G}^\bullet en lui appliquant, terme à terme le foncteur « résolution de Godement augmentée » :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^0 & \rightarrow & \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^1 & \rightarrow & \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^2 \rightarrow \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^0 & \rightarrow & \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^1 & \rightarrow & \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^2 \rightarrow \\ \hline & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{G}^0 & \rightarrow & \mathcal{G}^1 & \rightarrow & \mathcal{G}^2 \rightarrow \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \quad \uparrow \epsilon(-)$$

Le morphisme $\epsilon(\mathcal{G}^\bullet)$, naturel par rapport à $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{C}^+ \text{Fais}_X(\mathbb{Z})$, s'identifie au morphisme d'augmentation d'un faisceau dans sa résolution de Godement (3.2.2) lorsque \mathcal{G}^\bullet est concentré en degré 0. La section de $\epsilon(\mathcal{G}^\bullet)$ au-dessus de U sera notée

$$\epsilon(U; \mathcal{G}^\bullet) : \Gamma(U; \mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \Sigma_{*, \bullet}^* \Gamma(U; \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}^\bullet),$$

et le passage en cohomologie donne « le morphisme canonique de la cohomologie des sections de \mathcal{G}^\bullet vers l'hypercohomologie de \mathcal{G}^\bullet », noté

$$\boxed{\Xi(U; \mathcal{G}^\bullet) : h^*(\Gamma(U; \mathcal{G}^\bullet)) \longrightarrow \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}^\bullet)}$$

4.1.3. Propriétés générales de l'hypercohomologie. Si $\varphi_\bullet : \mathcal{G}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{G}_2^\bullet$ est un morphisme de complexes de faisceaux, la functorialité de la résolution canonique de Godement donne le morphisme de bicomplexes $\mathcal{C}_X^* \varphi_\bullet : \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}_2^\bullet$ d'où un morphisme d'hypercohomologies

$$\mathbb{H}^*(U; \varphi_\bullet) : \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}_2^\bullet)$$

4.1.4. Théorème. Soient U un ouvert de X et $\mathcal{G}_i^\bullet \in \mathbf{C}^+(\text{Fais}_X(\mathbb{Z}))$.

a) La correspondance qui associe

$$\mathcal{G}^\bullet \rightsquigarrow \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}^\bullet), \quad \left(\varphi_\bullet : \mathcal{G}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{G}_2^\bullet \right) \rightsquigarrow \left(\mathbb{H}^*(U; \varphi_\bullet) : \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}_2^\bullet) \right)$$

est fonctorielle additive et covariante de $\mathbf{C}^+ \text{Fais}_X(\mathbb{Z})$ vers la catégorie $\text{Mod}(\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$.

b) Le morphisme canonique $\epsilon(U; -) : h^* \Gamma(U; -) \rightarrow \mathbb{H}^*(U; -)$ (4.1.2) est un morphisme de foncteurs.

- c) Le morphisme de foncteurs $\Gamma(U; _) \rightarrow \Gamma(U'; _)$ correspondant à une inclusion d'ouverts $U' \hookrightarrow U$, induit un morphisme de foncteurs d'hypercohomologie $\mathbb{H}^*(U; _) \rightarrow \mathbb{H}^*(U'; _)$.
- d) Pour toute suite exacte courte $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{G}_2^\bullet \rightarrow \mathcal{G}_3^\bullet \rightarrow \mathbf{0}$, il existe un morphisme de connexion $c(U)_* : \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}_3^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^{*+1}(U; \mathcal{G}_1^\bullet)$ tel que la suite longue d'hypercohomologies

$$0 \rightarrow \mathbb{H}^0(U; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^0(U; \mathcal{G}_2^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^0(U; \mathcal{G}_3^\bullet) \xrightarrow{c(U)_0} \mathbb{H}^1(U; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^1(U; \mathcal{G}_2^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^1(U; \mathcal{G}_3^\bullet) \xrightarrow{c(U)_1} \dots$$

est un complexe acyclique. Ces suites, particulièrement le morphisme de connexion $c(U)_*$, sont fonctorielles sur la catégorie des suites exactes courtes de complexes de faisceaux bornés inférieurement et sont naturelles relativement aux inclusions d'ouverts $U' \subseteq U$.

- e) Si \mathcal{G}^\bullet est un complexe acyclique ⁽⁷⁾ son hypercohomologie est nulle, i.e.

$$\left(h(\mathcal{G}^\bullet) = 0 \right) \implies \left(\mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}^\bullet) = 0 \right)$$

- f) Un quasi-isomorphisme $\varphi_\bullet : \mathcal{G}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{G}_2^\bullet$ induit un isomorphisme en hypercohomologie, i.e.

$$\left(h(\mathcal{G}_1^\bullet) \xleftarrow[\text{iso}]{h(\varphi)} h(\mathcal{G}_2^\bullet) \right) \implies \left(\mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}_1^\bullet) \xleftarrow[\text{iso}]{\mathbb{H}(U; \varphi_\bullet)} \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}_2^\bullet) \right)$$

- g) (**Leray**) Lorsque les faisceaux \mathcal{G}^k du complexe \mathcal{G}^\bullet sont acycliques sur l'ouvert U , le morphisme canonique

$$h^* \Gamma(U; \mathcal{G}^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}^\bullet)$$

est un isomorphisme.

- h) Un quasi-isomorphisme $\varphi_\bullet : \mathcal{G}^\bullet \rightarrow \mathcal{F}^\bullet$ est appelé «résolution acyclique (resp. flasque ou molle)» lorsque les faisceaux \mathcal{F}^k le sont. Dans ces cas, φ_\bullet induit un isomorphisme canonique

$$\mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}^\bullet) \rightarrow h^* \Gamma(U; \mathcal{F}^\bullet)$$

4.1.5. Commentaire. Ce théorème étend le théorème 3.2.9 de la catégorie des faisceaux à la catégorie des complexes (cf. 4.1.1); il comporte quatre assertions absentes dans 3.2.9: les assertions (e) et (f) triviales dans ce cas, et (g) et (h) qui généralisent l'énoncé qui dit que si un faisceau \mathcal{G} est acyclique sur U , sa cohomologie est celle du complexe $\Gamma(U; \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0)$, ce qui est clairement tautologique.

Démonstration du théorème. Les assertions (a,b,c) sont immédiates. Pour (d), l'exactitude des foncteurs «résolution de Godement» et complexe simple associé nous ramènent à la preuve de l'analogue 3.2.9-(c) de cette assertion. Pour (e) on remarque que dans le bicomplexe $\Gamma(U; \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}^\bullet)$ chaque ligne de $\Gamma(U; \mathcal{C}_X^k \mathcal{G}^\bullet)$ est exacte puisque sections sur U du complexe exact de faisceaux flasques $\mathcal{C}_X^k \mathcal{G}^\bullet$ (exactitude du foncteur \mathcal{C}_X^k), on conclut par 2.2.10. L'assertion (f) résulte de (e) appliquée au $\hat{c}(\varphi)$. L'assertion (g) résulte du corollaire 2.2.13, appliqué au morphisme de complexes $\Gamma(U; \mathcal{G}^\bullet) \rightarrow \Gamma(U; \Sigma_{*,\bullet} \mathcal{C}_X^* \mathcal{G}^\bullet)$ associé au découpage de bicomplexe de colonnes exactes représenté ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^0) & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^1) & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^2) \rightarrow \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^0) & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^1) & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^2) \rightarrow \\ \hline \mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{G}^0) & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{G}^1) & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{G}^2) \rightarrow \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}$$

L'assertion (h) est conséquence immédiate de (f) et (g). ■

⁷ On rappelle qu'un complexe de faisceau $(\mathcal{G}^\bullet, d_\bullet)$ est acyclique si et seulement l'inclusion $\text{im}(d_{i-1}) \subseteq \ker(d_i)$ de sous-faisceaux de \mathcal{G}^i est une égalité pour tout i . On a le critère qui dit: « $(\mathcal{G}^\bullet, d_\bullet)$ est acyclique si et seulement si le complexe des germes $(\mathcal{G}_x^\bullet; d_{x,\bullet})$ est acyclique pour tout $x \in X$ » (cf. [Go] §2.5 th. 2.5.1, p. 133).

4.2 Cohomologie de Čech de complexes de faisceaux

Dans cette partie on étend la définition de cohomologie de Čech (cf. 3.3) de la catégorie des faisceaux à la catégorie des complexes de faisceaux bornés inférieurement. Nous reprenons les notations de la section 3.3. Alors, si \mathcal{P}^\bullet est un complexe de **pré**faisceaux de groupes abéliens borné inférieurement, si $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in \mathfrak{A}}$ est une famille d'ouverts de \mathbf{X} , le «*complexe des cochaînes de Čech à valeurs dans \mathcal{P}^\bullet relatives à \mathcal{U}* » est le complexe simple associé au bicomplexe $\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet)$, puis on définit «*la cohomologie de Čech de \mathcal{P}^\bullet relative à \mathcal{U}* » par :

$$\check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet) = h^*(\Sigma_{*,*}^{\bullet} \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet))$$

4.2.1. Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\mathcal{U}; -) : h^*(\Gamma(\mathbf{X}; -)) \rightarrow \check{H}^*(\mathcal{U}; -)$. Tout comme dans 4.1.2, on construit un morphisme canonique de complexes

$$\epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet) : \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{P}^\bullet) \longrightarrow \Sigma_{*,*}^{\bullet} \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet)$$

par découpage de la première ligne (cf. 2.2.12) du bicomplexe construit à partir du complexe (horizontal) \mathcal{P}^\bullet en lui appliquant, terme à terme le foncteur «*complexe de Čech augmenté*» :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{P}^0) & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{P}^1) & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{P}^2) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P}^0) & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P}^1) & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P}^2) \\ \hline & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{P}^0) & \longrightarrow & \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{P}^1) & \longrightarrow & \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{P}^2) \rightarrow \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \quad \uparrow \epsilon(\mathcal{U}; -)$$

Le morphisme $\epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet)$, naturel par rapport à $\mathcal{P}^\bullet \in \mathbf{C}^+(\text{Prefaisc}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$, s'identifie à l'augmentation $\epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ de la section 3.3.3 lorsque \mathcal{P}^\bullet est concentré en degré 0. Le passage en cohomologie donne «*le morphisme canonique de la cohomologie des sections de \mathcal{P}^\bullet sur \mathbf{X} vers la cohomologie de Čech de \mathcal{P}^\bullet relative à \mathcal{U}* », noté

$$\Xi(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet) : h^*(\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{P}^\bullet)) \rightarrow \check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet)$$

4.3 Morphisme canonique de foncteurs $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -) : \check{H}(\mathcal{U}; -) \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{X}; -)$

Soit \mathcal{G}° un complexe de faisceaux borné inférieurement que nous allons imaginer comme représenté perpendiculairement au plan de la page. Le foncteur «*résolution de Godement*» donne alors le bicomplexe $\epsilon(\mathcal{G}^\circ) : \mathcal{G}^\circ \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^{\bullet} \mathcal{G}^\circ$ que nous représentons comme une suite exacte longue de complexes de faisceaux : $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}^\circ \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}^\circ \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G}^\circ \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^2 \mathcal{G}^\circ \rightarrow \dots$. Si nous appliquons maintenant, sur chaque terme de cette suite, le foncteur «*complexe de Čech faisceautisé*», on a le tricomplexe suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^2 \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^2 \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \dots \\ \epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\circ) \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{G}^\circ & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^0 \mathcal{G}^\circ & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^1 \mathcal{G}^\circ & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\mathbf{X}}^2 \mathcal{G}^\circ & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{indice} & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 \end{array} \quad (\mathcal{B})$$

où chaque colonne d'indice positif est un bicomplexe de faisceaux flasques et colonnes exactes (3.3.7);

propriété qui demeure vérifiée lorsque l'on applique le foncteur $\Gamma(\mathbf{X}; -)$ à (\mathcal{B}) (3.1.2-(b)). On déduit aussitôt, par 2.2.13, que les morphisme induits $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{C}_X^k \mathcal{G}^\circ) \rightarrow \Sigma_{*\circ}^\circ \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^k \mathcal{G}^\circ)$ ⁽⁸⁾ sont des quasi-isomorphismes **pour chaque $k \geq 0$ fixé**. On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbf{0} \rightarrow & \Sigma_{*\circ}^\circ \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \Sigma_{*\circ}^\circ \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \Sigma_{*\circ}^\circ \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \Sigma_{*\circ}^\circ \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^2 \mathcal{G}^\circ) \longrightarrow \dots \\
 & \uparrow & & \uparrow \circ & & \uparrow \circ & & \uparrow \circ \\
 \mathbf{0} \rightarrow & \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{C}_X^0 \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{C}_X^1 \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{C}_X^2 \mathcal{G}^\circ) \longrightarrow \dots \quad (\mathcal{B}') \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 \text{indice} & 0 & & 1 & & 2 & & 3
 \end{array}$$

où les flèches marquées par 'o' sont des quasi-isomorphismes. Si l'on regarde maintenant, sur une même ligne, la suite des termes d'indice positif comme bicomplexe sur les directions horizontale et perpendiculaire à la page (indiquée par 'o'), les flèches 'o' apparaissent comme un morphisme de bicomplexes induisant un isomorphisme sur la cohomologie de direction 'o'. On peut donc appliquer le théorème 2.2.11 et affirmer que les flèches 'o' induisent un quasi-isomorphisme des complexes simples associés, ce qui donne les diagrammes commutatifs suivants :

$$\left(\begin{array}{ccc} \Sigma_{*\circ}^\circ \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & \Sigma_{\bullet\circ}^\circ \Sigma_{*\circ}^\circ \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^\bullet \mathcal{G}^\circ) \\ \uparrow \epsilon(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\circ) & & \Sigma_{*\circ}^\circ \uparrow \circ \uparrow \text{q.i.} \\ \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\circ) & \xrightarrow{\epsilon(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\circ)} & \Sigma_{\bullet\circ}^\circ \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{C}_X^\bullet \mathcal{G}^\circ) \end{array} \right) \xrightarrow[h^*]{\text{cohomologie}} \left(\begin{array}{ccc} \check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\circ) & \longrightarrow & h^*(\Sigma_{\bullet\circ}^\circ \Sigma_{*\circ}^\circ \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^\bullet \mathcal{G}^\circ)) \\ \uparrow \Xi(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\circ) & & h^*(\Sigma_{*\circ}^\circ \uparrow \circ) \uparrow \text{iso} \\ h^*\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\circ) & \xrightarrow{\Xi(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\circ)} & \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\circ) \end{array} \right)$$

Maintenant, la composition de la flèche horizontale $\check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\circ) \rightarrow h^*(\Sigma_{\bullet\circ}^\circ \Sigma_{*\circ}^\circ \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{C}_X^\bullet \mathcal{G}^\circ))$ avec l'inverse de $h^*(\Sigma_{*\circ}^\circ \uparrow \circ)$ est naturelle par rapport à \mathcal{G}° , nous le notons

$$\boxed{\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -) : \check{H}^*(\mathcal{U}; -) \longrightarrow \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; -)}$$

c'est le « *morphisme canonique de la cohomologie de Čech vers l'hypercohomologie* ».

Nous avons ainsi un diagramme commutatif de foncteurs

$$\boxed{\begin{array}{ccc} h^*\Gamma(\mathbf{X}; -) & \xrightarrow{\Xi(\mathcal{U}; -)} & \check{H}^*(\mathcal{U}; -) \\ & \searrow \Xi(\mathbf{X}; -) & \downarrow \Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -) \\ & & \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; -) \end{array}}$$

4.3.1. Remarque. Pour $\mathcal{U} = \{\mathbf{X}\}$, on a trivialement $\Xi(\mathcal{U}; -) = \text{id}(-)$ et $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -) = \Xi(\mathbf{X}; -)$.

4.3.2. Troncatures et suites exactes longues. Les foncteurs $\Gamma(\mathbf{X}; -)$ et $\check{C}^k(\mathcal{U}; -)$ n'étant généralement pas exacts à droite, les foncteurs $h^*(\Gamma(\mathbf{X}; -))$ et $\check{H}^*(\mathcal{U}; -)$ ne génèrent pas de suite exacte longue de cohomologie lorsqu'ils sont appliqués à des suites exactes courtes de complexes, contrairement au foncteur $\mathbb{H}^*(\mathbf{X}; -)$ (3.2.9). C'est par contre bien le cas pour une suite exacte de troncatures bêtes (2.1.14, 2.1.15-(d)) :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \beta_{>\ell} \mathbf{C}^\bullet \xrightarrow{q_{\ell+1, \bullet}} \mathbf{C}^\bullet \xrightarrow{p_{\ell, \bullet}} \beta_{\leq \ell} \mathbf{C}^\bullet \longrightarrow \mathbf{0},$$

puisque sur chaque ligne k , l'une des flèches $q_{\ell+1, k}$ ou $p_{\ell, k}$ est un isomorphisme tandis que l'autre est nulle. On en déduit aussitôt le lemme suivant laissé en exercice.

⁸ On rappelle que par la notation $\Sigma_{\bullet\circ}^*(-)$ nous signifions l'opérateur $\Sigma_* \Sigma_{*\bullet+\circ}(-)$.

4.3.3. Lemme. *Les morphismes de foncteurs $\Xi(\mathcal{U}; -)$, $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -)$ et $\Xi(\mathbf{X}; -)$ induisent des morphismes de suites exactes longues,*

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\mathbf{0} & \rightarrow & h^0\Gamma(\mathbf{X}; \beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & h^0\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & h^0\Gamma(\mathbf{X}; \beta_{\leq\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & h^1\Gamma(\mathbf{X}; \beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & h^1\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & h^1\Gamma(\mathbf{X}; \beta_{\leq\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow \\
& & \Xi(\mathcal{U}; -) \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{0} & \rightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}; \beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}; \beta_{\leq\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \check{H}^1(\mathcal{U}; \beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \check{H}^1(\mathcal{U}; \beta_{\leq\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow \\
& & \Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -) \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{0} & \rightarrow & \mathbb{H}^0(\mathbf{X}; \beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \mathbb{H}^0(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \mathbb{H}^0(\mathbf{X}; \beta_{\leq\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \mathbb{H}^1(\mathbf{X}; \beta_{>\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \mathbb{H}^1(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow & \mathbb{H}^1(\mathbf{X}; \beta_{\leq\ell}\mathcal{G}^\bullet) & \rightarrow
\end{array}$$

pour tout $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{C}^+(\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$.

4.4 Théorème de Čech-Leray pour l'hypercohomologie des complexes de faisceaux

On étend le théorème de Čech-Leray (3.3.9) de la catégorie $\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$ à $\mathbf{C}^+(\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$.

Soit $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{C}^+(\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$. Un recouvrement \mathcal{U} de \mathbf{X} est dit « *acyclique pour \mathcal{G}^\bullet* » où « *\mathcal{G}^\bullet -acyclique* » lorsque chaque \mathcal{U} est \mathcal{G}^k -acyclique pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (cf. 3.3.8).

4.4.1. Théorème. *Soient $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{C}^+(\text{Fais}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$ et $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in \mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de \mathbf{X} .*

!!!

a) (Čech-Leray) *Si \mathcal{U} est \mathcal{G}^\bullet -acyclique, le morphisme canonique*

$$\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet) : \check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet)$$

est un isomorphisme.

b) *Soit $\varphi_\bullet : \mathcal{G}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{G}_2^\bullet$ un morphisme de complexes faisceau tel que*

$$\mathbb{H}^*(V; \varphi) : \mathbb{H}^*(V; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^*(V; \mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un isomorphisme pour tout $V = U_{a_0 \dots a_k}$; ou bien, si \mathcal{U} et \mathcal{G}_i^\bullet -acyclique, tel que

$$h^*\Gamma(V; \varphi) : h^*\Gamma(V; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow h^*\Gamma(V; \mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un isomorphisme pour tout tel V . Alors

$$\mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \varphi) : \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{G}_1^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{G}_2^\bullet)$$

est un isomorphisme.

!!!

Démonstration

a) L'idée est la même que celle de la preuve du théorème 2.2.11. On suppose $\mathcal{G}^k = 0$ pour $k < 0$.

Le lemme 4.3.3 pour $\ell = 0$, le lemme des cinq et le fait que $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; -)$ est bien un isomorphisme pour un complexe concentré en un seul degré (3.3.9), montre que pour $a \in \mathbb{N}$ donné, $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; \mathcal{G}^{\bullet \geq 0})$ est un isomorphisme en degré cohomologique d , si et seulement si $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; \mathcal{G}^{\bullet \geq 1})$ l'est. Et, en itérant cette idée pour $\ell = 1, 2, \dots$, on montre de même $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; \mathcal{G}^{\bullet \geq 0})$ est un isomorphisme en degré d , si et seulement si $\Xi(\mathcal{U}; \mathbf{X}; \mathcal{G}^{\bullet \geq k})$ l'est pour un certain $k \geq 1$. Or, si $k > d$ l'énoncé est trivial.

b) Quitte à changer \mathcal{G}_i^\bullet par $\Sigma_{*}^\bullet \mathcal{L}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{G}_i^\bullet$ on peut supposer que les \mathcal{G}_i^k sont flasques de même alors que les termes du cône de φ que nous notons \mathcal{F}^\bullet par commodité. Il s'agit alors de prouver que si \mathcal{F}^\bullet est un complexe borné à gauche de faisceaux flasques tel que la cohomologie des complexes $\Gamma(V; \mathcal{F}^\bullet)$ est nulle, alors la cohomologie de $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet)$ est nulle aussi. Or, c'est très exactement ce que nous avons démontré dans la preuve de 3.3.9-(b). L'équivalence entre les deux hypothèses la donne le théorème de Leray pour les complexes de faisceaux 4.1.4-(g). ■

§ 5. Applications

Le théorème 4.4.1 est de grande utilité, pratique comme théorique.

- L'assertion 4.4.1-(a) est utilisée pour rendre le calcul de l'hypercohomologie effectif puisque le complexe de Čech $\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet)$ est un objet éminemment combinatoire.

- L'assertion 4.4.1-(b) est utilisée dans les théorèmes de comparaison, elle dit pour l'essentiel que, étant données deux théories cohomologiques basées sur des complexes de faisceaux sur \mathbf{X} , s'il existe un recouvrement \mathcal{U} de \mathbf{X} *acyclique* pour les termes des complexes des deux théories simultanément, les théories sont globalement isomorphes si elles sont "localement" isomorphes.

5.1 Théorème de de Rham sur les variétés différentielles

Soit \mathbf{M} une « variété différentielle de dimension $d_{\mathbf{M}}$ ». Notons $(\Omega^*(\mathbf{M}); d_*)$ le complexe des formes différentielles sur \mathbf{M} ; son homologie est la « cohomologie de de Rham de \mathbf{M} » :

$$H_{\text{DR}}^*(\mathbf{M}) := h^*(\Omega^*(\mathbf{M}); d_*)$$

La correspondance $U \rightsquigarrow (\Omega^*(U); d_*)$ et les restrictions des formes différentielles constituent un faisceau sur \mathbf{M} , c'est le « faisceau des formes différentielles sur \mathbf{M} » noté $(\underline{\Omega}_{\mathbf{M}}^*, d_*)$.

5.1.1. Proposition

- Chaque faisceau $\underline{\Omega}_{\mathbf{M}}^k$ est *acyclique* sur tout ouvert $U \subseteq \mathbf{M}$.
- (**Lemme de Poincaré**) La cohomologie du complexe des formes différentielles $(\Omega^*(\mathbb{R}^n, d_*)$) est nulle en degrés positifs et isomorphe à \mathbb{R} en degré 0.
- Le complexe $\mathbf{0} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{X}} \rightarrow \underline{\Omega}_{\mathbf{M}}^1 \rightarrow \underline{\Omega}_{\mathbf{M}}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \underline{\Omega}_{\mathbf{M}}^{d_{\mathbf{M}}} \rightarrow \mathbf{0}$ est une résolution acyclique de $\underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{M}}$.

Indications. Pour (a), de manière très succincte, comme \mathbf{M} est paracompacte, il existe des partitions de l'unité subordonnées à n'importe quel recouvrement ouvert ; ceci suffit pour montrer que le faisceau des fonctions différentiables $\underline{\Omega}^0(\mathbf{M})$ est « mou ». On utilise ensuite le fait que tout module sur un faisceau d'anneaux mou (en l'occurrence $\underline{\Omega}^k(\mathbf{M})$ est un $\underline{\Omega}^0(\mathbf{M})$ -module) est mou lui-aussi. Enfin, un faisceau mou est acyclique sur tout ouvert ⁹. Pour (b), voir les notes du cours §6, page 96. Pour (c), on remarque que tout germe de cocycle ω_x en $x \in \mathbf{M}$ provient d'un cocycle $\omega \in \Omega^k(U)$ sur un voisinage ouvert U de x assez petit que nous pouvons supposer isomorphe à $\mathbb{R}^{d_{\mathbf{M}}}$. L'assertion (b) affirme alors qu'il existe $\varpi \in \Omega^{k-1}(U)$ tel que $d\varpi = \omega$, mais alors $\omega_x = d\varpi_x$ et la suite des faisceaux en question est bien exacte. ■

5.1.2. Théorème. Soit \mathbf{M} une variété différentielle de dimension n .

- (de Rham) On a un isomorphisme canonique

$$H^*(\mathbf{M}; \underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{M}}) = H_{\text{DR}}^*(\mathbf{M})$$

En particulier, le faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{M}}$ est *acyclique* sur un ouvert **homéomorphe** à \mathbb{R}^n . ⁽¹⁰⁾

- $H_{\text{DR}}^*(\mathbf{M})$ est indépendante de la structure différentielle de \mathbf{M} et seule dépend de sa topologie. Autrement dit, deux variétés différentielles homéomorphes ont des cohomologies de de Rham canoniquement isomorphes.
- Si \mathcal{U} est un recouvrement de \mathbf{M} par des ouverts dont les intersections finies sont homéomorphes à \mathbb{R}^n , on a des isomorphismes canoniques

$$H_{\text{DR}}^*(\mathbf{M}) = \check{H}^*(\mathcal{U}; \underline{\Omega}^*) = \check{H}^*(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{M}})$$

⁹ Voir [Go] §3.5 et thm. 4.4.3 pour plus de détails.

¹⁰ Théorème de Vietoris-Begle.

Indication

a-b) Par 5.1.1 la suite longue 5.1.1-(c) est une résolution acyclique de $\underline{\mathbb{R}}_X$. On applique alors le théorème de Leray pour la cohomologie des faisceaux (3.2.6).

On en déduit aussitôt que la cohomologie de de Rham est un invariant **topologique**. En particulier, si U est un ouvert **homéomorphe** à \mathbb{R}^n , $H(U; \underline{\mathbb{R}}_U)$ est isomorphe à $H_{\text{DR}}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}[0]$ de sorte que $\underline{\mathbb{R}}_M$ est bien acyclique sur tout ouvert homéomorphe à \mathbb{R}^n .

c) • *Première démonstration.* On considère le bicomplexe de Čech-de Rham

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbf{0} & \rightarrow & \underline{\Omega}_M^1 & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^1) & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^1) & \rightarrow & \check{C}^2(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^1) & \rightarrow \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \mathbf{0} & \rightarrow & \underline{\Omega}_M^0 & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^0) & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^0) & \rightarrow & \check{C}^2(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^0) & \rightarrow \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \mathbf{0} & \rightarrow & \underline{\mathbb{R}}_M & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}) & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}) & \rightarrow & \check{C}^2(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}) & \rightarrow \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & &
 \end{array} \tag{B}$$

Comme les faisceaux $\underline{\Omega}_M^i$ sont acycliques sur tout ouvert de M d'après 5.1.1-(a), le théorème de Čech-Leray pour les faisceaux (3.3.9) s'applique sur chaque ligne de la partie supérieure du bicomplexe, dont la cohomologie des sections globales sera nulle. On en déduit l'isomorphisme canonique

$$H_{\text{DR}}^*(M) \simeq h^*(\Sigma_{\bullet}^* \check{C}^\bullet(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^*)) = \check{H}^*(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^*).$$

Ensuite, les sections globales des colonnes de la partie droite du bicomplexe (B) calculent les produits des cohomologies de de Rham des intersections des ouverts de \mathcal{U} et sont donc acycliques d'après (a), on en déduit l'isomorphisme canonique

$$\check{H}^*(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_M) \simeq h^*(\Sigma_{\bullet}^* \check{C}^\bullet(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^*)).$$

• *Deuxième démonstration.* Le quasi-isomorphisme $\underline{\mathbb{R}}_M[0] \rightarrow \underline{\Omega}_M^*$ de 5.1.1-(c) induit l'isomorphisme

$$H(M; \underline{\mathbb{R}}_M) \simeq IH(M; \underline{\Omega}_M^*)$$

et comme \mathcal{U} est à la fois $\underline{\mathbb{R}}_M$ -acyclique par (a), et $\underline{\Omega}_M^*$ -acyclique par 5.1.1-(a); on peut donc appliquer théorème de Leray pour les complexes de faisceaux acycliques 4.1.4-(g) pour avoir

$$H(M; \underline{\mathbb{R}}_M) \simeq \check{H}^*(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_M) \quad \text{et} \quad IH(M; \underline{\Omega}_M^*) \simeq \check{H}^*(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_M^*). \quad \blacksquare$$

5.2 Calculs effectifs de la cohomologie de de Rham des variétés différentielles

L'assertion 5.1.2-(c), par son égalité $H_{\text{DR}}^*(M) = \check{H}^*(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_M)$, donne une méthode de calcul pour la cohomologie de de Rham d'une variété différentielle. La voici pour M compacte de dimension n :

- On fixe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_r\}$ de M tel que pour tout $\bar{i} = i_0 < \dots < i_k$ l'intersection $U_{\bar{i}} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$ possède un nombre fini de composantes connexes et tel que toutes ces composantes soient toutes homéomorphes à \mathbb{R}^n ⁽¹¹⁾. Le groupe des cochaînes de Čech admet alors une description très simple, on a

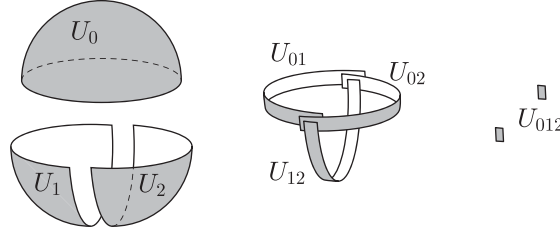
$$\check{C}^k(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_M) = \prod_{1 \leq i_0 \dots i_k \leq r} \mathbb{R}^{\Pi_0(U_{i_0 \dots i_k})}$$

où $\Pi_0(U)$ désigne l'ensemble des composantes connexes de U .

- Calculer la cohomologie du complexe de Čech $\check{C}^*(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_M)$.

¹¹ De tel recouvrements existent toujours.

5.2.1. Exemple : Cohomologie de de Rham de la sphère \mathbb{S}^2 . On décompose $\mathbf{X} := \mathbb{S}^2$ comme réunion des ouverts de la famille $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$ suivants :



Le complexe de Čech $\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathbb{R}_{\mathbf{X}})$ est

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U_0, \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \oplus \Gamma(U_1, \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \oplus \Gamma(U_2, \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \rightarrow \Gamma(U_{01}, \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \oplus \Gamma(U_{12}, \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \oplus \Gamma(U_{02}, \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \rightarrow \Gamma(U_{012}, \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) \rightarrow \mathbf{0}$$

équivalent au complexe à trois termes : $\mathbf{0} \rightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{p} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{q} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{0}$ où $p(x, y, z) = (x - y, y - z, x - z)$ et $q(x, y, z) = (y - z + x, y - z + x)$.

Par la condition de faisceau et la connexité de \mathbf{X} , on a $\check{H}^0(\mathcal{U}; \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) = \Gamma(\mathbf{X}; \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) = \mathbb{R}$. Il s'ensuit que $\dim_{\mathbb{R}}(\text{im}(p)) = 2$. D'autre part, il est clair que $\text{im}(q) = \Delta_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^2$ et donc $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(q)) = 2$, d'où $\check{H}^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) = 0$ et, pour terminer, $\check{H}^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}_{\mathbf{X}}) = \mathbb{R}^2 / \Delta_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. On a donc

$$\bullet H_{\text{DR}}^0(\mathbf{X}) = \mathbb{R}, \quad \bullet H_{\text{DR}}^1(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad \bullet H_{\text{DR}}^2(\mathbf{X}) = \mathbb{R}.$$

5.3 Calculs effectifs de la cohomologie de de Rham des variétés algébriques

En géométrie algébrique l'acyclicité des faisceaux du complexe de de Rham sur les ouverts affines est conséquence de leur *cohérence* (critère d'acyclicité de Serre). L'assertion 4.4.1-(a) donne alors une recette pour calculer la cohomologie de de Rham d'une variété algébrique \mathbf{X} , c'est-à-dire pour calculer de l'hypercohomologie de son complexe de de Rham $(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}, d_*)$. La voici :

- Fixer un recouvrement fini par des ouverts affines $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_r\}$ de \mathbf{X} ,

Pour $\bar{i} = i_0 < \dots < i_k$, on note $U_{\bar{i}} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$.

- Expliciter l'algèbre $\mathcal{R}_{\bar{i}}$ des fonctions régulières sur $U_{\bar{i}}$ et les restrictions $\mathcal{R}_{\bar{i}} \rightarrow \mathcal{R}_{\bar{i}'}$, $\bar{i} \succ \bar{i}'$.
- Expliciter les modules $\Omega_{\mathcal{R}_{\bar{i}}/\mathbb{C}}$ et les morphismes de restriction $\Omega_{\mathcal{R}_{\bar{i}}/\mathbb{C}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{R}_{\bar{i}'}/\mathbb{C}}$, $\bar{i} \succ \bar{i}'$.
- Expliciter les flèches du bicomplexe de Čech-de Rham $\check{C}^*(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}})$ suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} \rightarrow & \prod_{1 \leq i \leq r} \Lambda^d \Omega_{\mathcal{R}_i/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 \leq r} \Lambda^d \Omega_{\mathcal{R}_{i_0 i_1}/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 < i_2 \leq r} \Lambda^d \Omega_{\mathcal{R}_{i_0 i_1 i_2}/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Lambda^d \Omega_{\mathcal{R}_{1 \dots r}/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} \rightarrow & \prod_{1 \leq i \leq r} \Lambda^2 \Omega_{\mathcal{R}_i/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 \leq r} \Lambda^2 \Omega_{\mathcal{R}_{i_0 i_1}/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 < i_2 \leq r} \Lambda^2 \Omega_{\mathcal{R}_{i_0 i_1 i_2}/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Lambda^2 \Omega_{\mathcal{R}_{1 \dots r}/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} \rightarrow & \prod_{1 \leq i \leq r} \Omega_{\mathcal{R}_i/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 \leq r} \Omega_{\mathcal{R}_{i_0 i_1}/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 < i_2 \leq r} \Omega_{\mathcal{R}_{i_0 i_1 i_2}/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Omega_{\mathcal{R}_{1 \dots r}/\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} \rightarrow & \prod_{1 \leq i \leq r} \mathcal{R}_i & \longrightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 \leq r} \mathcal{R}_{i_0 i_1} & \longrightarrow & \prod_{1 \leq i_0 < i_1 < i_2 \leq r} \mathcal{R}_{i_0 i_1 i_2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{R}_{1 \dots r} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}$$

(illustration pour $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbf{X}) = d$ et $\text{card}(\mathcal{U}) = r$).

- Calculer la cohomologie du complexe simple associé $\Sigma \check{C}^*(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}})$.

5.3.1. Exemple : Cohomologie de de Rham de la sphère de Riemann. La variété algébrique complexe $X := \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est réalisée comme réunion de deux ouverts U_0 et U_1 isomorphes à \mathbb{C} d'intersection U_{01} isomorphe à $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (variété affine). Les algèbres des fonctions régulières sont

$$\bullet \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1 = \mathbb{C}[X] \quad \text{et} \quad \bullet \mathcal{R}_{01} = \mathbb{C}[X, 1/X].$$

Les complexes de de Rham sont

$$\begin{aligned} (\Omega_{\mathcal{R}_i/\mathbb{C}}^*, d_*) &= \mathbb{C}[X] \xrightarrow{d} \mathbb{C}[X] dX, & d(P) &= \frac{\partial P}{\partial X} dX, \\ (\Omega_{\mathcal{R}_{01}/\mathbb{C}}^*, d_*) &= \mathbb{C}[X, 1/X] \xrightarrow{d} \mathbb{C}[X, 1/X] dX \end{aligned}$$

D'où le complexe Čech-de Rham :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{C}[X] dX \oplus \mathbb{C}[X] dX & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{C}[X]_X dX & \rightarrow & \mathbf{0} \\ & & d\uparrow & & d\uparrow & & d\uparrow \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X] & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{C}[X]_X & \rightarrow & \mathbf{0} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \quad (\mathfrak{D})$$

avec

$$\begin{cases} \alpha(P(X), Q(X)) = Q(1/X) - P(X) \\ \beta(P(X)dX, Q(X)dX) = Q(1/X)d(1/X) - P(X)dX \end{cases}$$

Le complexe simple associé au bicomplexe (\mathfrak{D}) sera noté (Σ^*, D_*) dans la suite. On a (cf. 2.2.8)

$$\begin{cases} D_0(P, Q) = (dP, dQ) \oplus \alpha(P, Q) \\ D_1((P, Q), R) = -\beta(P, Q) + dR \end{cases}$$

• On a $\Sigma^2 = \mathbb{C}[X]_X dX$ et la cohomologie en degré 2 est

$$h^2(\Sigma^*, D_*) = \frac{\mathbb{C}[X]_X dX}{\text{im}(\beta) + \text{im}(d)} = \frac{\mathbb{C}[X]_X dX}{\langle Q(\frac{1}{X})\frac{1}{X^2}dX - P(X)dX + \langle d(R(X, \frac{1}{X})) \rangle \rangle},$$

avec $P(X), Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ et $R(X, 1/X) \in \mathbb{C}[X]_X$. Un calcul simple montre que les monômes $X^m dX$ avec $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ sont dans l'image de $(\beta + d)$ alors que $\frac{1}{X}dX$ n'est pas atteint. On a donc

$$h^2(\Sigma^*, D_*) = \mathbb{C}\left[\frac{1}{X}dX\right].$$

• On a $\Sigma^0 = \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X]$ et la cohomologie de (Σ^*, D_*) en degré 0 est

$$h^0(\Sigma^*, D_*) = \ker(d, d) \cap \ker \alpha = \mathbb{C}.$$

• On a $\Sigma^1 = (\mathbb{C}[X]dX \oplus \mathbb{C}[X]dX) \oplus \mathbb{C}[X]_X$ et l'application (d, d) est surjective d'après le lemme de Poincaré global. Il s'ensuit qu'un cocycle $((P', Q'), S') \in \Sigma^2$ est toujours cohomologue à un cocycle de la forme

$$((P', Q'), S') - (dP, dQ), \alpha(P, Q) = ((0, 0), S' + \alpha(P, Q)),$$

où $(P', Q') = (dP, dQ)$. Mais dans un tel cocycle la fonction $S' + \alpha(P, Q)$ est nécessairement une constante $c \in \mathbb{C}$. Or, $((0, 0), c)$ est bien un 1-cobord puisque image par $(d, d) \oplus \alpha$ de $(0, c)$. Par conséquent :

$$h^1(\Sigma^*, D_*) = \mathbf{0}.$$

Nous avons trouvé

$$\bullet H_{\text{DR}}^0(\mathbf{X}/\mathbb{C}) = \mathbb{C}, \quad \bullet H_{\text{DR}}^1(\mathbf{X}/\mathbb{C}) = \mathbf{0}, \quad \bullet H_{\text{DR}}^2(\mathbf{X}/\mathbb{C}) = \mathbb{C}.$$

5.4 Théorème de comparaison de Grothendieck pour les variétés algébriques sur \mathbb{C} non singulières

Cette partie rappelle rapidement le théorème de comparaison et indique comment l'équivalence entre les cohomologies de de Rham holomorphe et algébrique sur des ouverts algébriques affines permet d'obtenir leur équivalence sur toute variété algébrique.

5.4.1. Structure d'espace analytique d'une variété algébrique complexe. Un ouvert algébrique U de \mathbb{C}^n , *i.e.* le complémentaire de l'ensemble des zéros d'une famille $\{P_a(X_1, \dots, X_n)\}_{a \in \mathfrak{A}}$ d'applications polynomiales, muni de la topologie de Zariski et du faisceau des fonctions algébriques, est un espace localement annelé noté $(U; \mathcal{O}_U)$. Le même ensemble U muni de la topologie «*transcendante*»⁽¹²⁾ et du faisceau des fonctions holomorphes, est aussi un espace localement annelé, il est noté $(U^{\text{an}}; \mathcal{O}_{X^{\text{an}}})$. L'application identique $\epsilon_U : U^{\text{an}} \rightarrow U$, $x \mapsto x$ (clairement continue) et le morphisme de faisceaux d'anneaux $\epsilon_U^\sharp : \mathcal{O}_U \rightarrow \epsilon_* (\mathcal{O}_{U^{\text{an}}})$ qui fait correspondre à une fonction algébrique la même fonction dans l'algèbre des fonctions holomorphes, définissent un morphisme d'espaces localement annelés noté brièvement $\epsilon : U^{\text{an}} \rightarrow U$.

Dans l'article [GaGa], J.-P. Serre généralise ces constructions en définissant le **foncteur** $(-)^{\text{an}}$ de la catégorie $\mathbf{Var}_{\text{alg}}(\mathbb{C})$ des toutes les variétés algébriques sur \mathbb{C} , singulières ou non, vers la catégorie $\mathbf{Esp}_{\text{an}}(\mathbb{C})$ des espaces analytiques complexes :

$$(-)^{\text{an}} : \mathbf{Var}_{\text{alg}}(\mathbb{C}) \rightsquigarrow \mathbf{Esp}_{\text{an}}(\mathbb{C}).$$

On définit également le morphisme naturel $\epsilon(\mathbf{X}) : \mathbf{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathbf{X}$ qui est l'identité sur l'ensemble \mathbf{X} et qui identifie une fonction algébrique à la même fonction dans l'espace des fonctions analytiques complexes.

5.4.2. Acyclicité des modules cohérents. Soit \mathcal{O} un faisceau d'anneaux sur un espace topologique \mathbf{X} . On rappelle qu'un faisceau de \mathcal{O} -modules \mathcal{M} est dit «*cohérent*» s'il admet des présentations finies locales, *i.e.* si pour chaque $x \in \mathbf{X}$ il existe un voisinage ouvert V et une suite exacte courte à droite de faisceaux

$$(\mathcal{O}|_V)^M \longrightarrow (\mathcal{O}|_V)^N \longrightarrow \mathcal{M}|_V \rightarrow \mathbf{0},$$

avec $M, N \in \mathbb{N}$.

Lorsque l'espace annelé $(\mathbf{X}; \mathcal{O})$ est une variété algébrique ou analytique complexe on dispose des critères d'acyclicité pour la cohomologie des faisceaux très importants suivants :

5.4.3. Proposition

- a) (**Serre**) Un \mathcal{O}_X -module cohérent sur une variété algébrique affine est acyclique.
- b) (**Cartan**) Un $\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$ -module cohérent sur l'espace analytique complexe correspondant à une variété algébrique complexe **affine** est acyclique.

5.4.4. Hypercohomologie de l'image directe des complexes cohérents. Soit $\epsilon : (\mathbf{X}^{\text{an}}; \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}) \rightarrow (\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ le morphisme d'espaces annelés de 5.4.1. Pour tout complexe $\mathbf{C}^\bullet \in \mathbf{C}^+(\mathbf{Fais}_{X^{\text{an}}}(\mathbb{Z}))$, le foncteur image directe ϵ_* appliqué au morphisme $\mathbf{C}^\bullet \rightarrow \Sigma_{\star, \bullet}^{\circ} \mathcal{C}_{X^{\text{an}}}^* \mathbf{C}^\bullet$ (cf. 4.1) donne le morphisme

$$\epsilon_*(\mathbf{C}^\bullet) \longrightarrow \epsilon_* (\Sigma_{\star, \bullet}^{\circ} \mathcal{C}_{X^{\text{an}}}^* \mathbf{C}^\bullet) \quad (\diamond)$$

dont on déduit $\mathbb{H}(\mathbf{X}; \epsilon_*(\mathbf{C}^\bullet)) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbf{X}; \Sigma_{\star, \bullet}^{\circ} \epsilon_*(\mathcal{C}_{X^{\text{an}}}^* \mathbf{C}^\bullet))$ qui, composé avec les égalités :

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}; \Sigma_{\star, \bullet}^{\circ} \epsilon_*(\mathcal{C}_{X^{\text{an}}}^* \mathbf{C}^\bullet)) \stackrel{=}{=} h(\Gamma(\mathbf{X}; \Sigma_{\star, \bullet}^{\circ} \epsilon_*(\mathcal{C}_{X^{\text{an}}}^* \mathbf{C}^\bullet))) = h(\Gamma(\mathbf{X}^{\text{an}}; \Sigma_{\star, \bullet}^{\circ} \mathcal{C}_{X^{\text{an}}}^* \mathbf{C}^\bullet)) = \mathbb{H}(\mathbf{X}^{\text{an}}; \mathbf{C}^\bullet),$$

¹² Il s'agit de la topologie d'espace métrique de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ muni la distance euclidienne. Cette terminologie fait référence à l'opposition entre «*nombre algébrique*» et «*nombre transcendant*», *i.e.* «*non algébrique*».

(¹³) donne à son tour le morphisme canonique d'hypercohomologies

$$\Xi(\epsilon, \mathbf{C}^\bullet) : \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \epsilon_* \mathbf{C}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^*(\mathbf{X}^{\text{an}}; \mathbf{C}^\bullet)$$

5.4.5. Proposition. *Soit \mathcal{M}^\bullet un complexe borné inférieurement de faisceaux cohérents sur une variété analytique complexe \mathbf{X}^{an} . Le morphisme canonique $\Xi(\epsilon, \mathcal{M}^\bullet)$ est un **isomorphisme**.*

Démonstration. L'image directe n'étant pas exacte en général, le morphisme (\diamond) n'est pas toujours un quasi-isomorphisme ; cependant, dans le cas présent, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, le complexe

$$\Gamma(\mathbf{V}; \mathbf{0} \rightarrow \epsilon_* \mathcal{M}^k \rightarrow \epsilon_* \mathcal{C}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^* \mathcal{M}^k) = \Gamma(\mathbf{V}^{\text{an}}; \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{M}^k \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^* \mathcal{M}^k)$$

est exact pour tout ouvert (algébrique) affine \mathbf{V} de \mathbf{X} d'après 5.4.3-(b). Il s'ensuit que la suite longue $\mathbf{0} \rightarrow \epsilon_* \mathcal{M}^k \rightarrow \epsilon_* \mathcal{C}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^* \mathcal{M}^k$ est exacte puisque, dans \mathbf{X} , tout point admet une base de voisinages affines (p.e. les ouverts principaux) (¹⁴). Le morphisme $\mathbb{H}(\mathbf{X}; \epsilon_*(\mathcal{M}^\bullet)) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbf{X}; \epsilon_*(\Sigma_{\bullet}^* \mathcal{C}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^* \mathcal{M}^\bullet))$ est donc bijectif d'après 2.2.15 et 4.1.4-(g) et la bijectivité de $\Xi(\epsilon, \mathcal{M}^\bullet)$ en résulte. ■

5.4.6. Cohomologies de de Rham. Lorsque la variété algébrique $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est « non singulière » de dimension $d_{\mathbf{X}}$, l'espace analytique $(\mathbf{X}^{\text{an}}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}})$ est une « variété analytique complexe » (aussi appelée « variété holomorphe ») (¹⁵). On note alors $(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*; d_*)$ le « complexe des formes différentielles holomorphes sur \mathbf{X} », i.e. le faisceau des sections holomorphes du fibré $\bigwedge_{\mathbb{C}} \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^* \mathbf{X}$ (¹⁶) muni de la « différentielle holomorphe » (¹⁷). Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, le $\mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}$ -module $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^k$ est localement libre (de rang $\binom{d_{\mathbf{X}}}{k}$), il est donc $\mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}$ -cohérent et donc acyclique sur tout ouvert algébrique affine de \mathbf{X}^{an} (5.4.3-(b)). Dans le cas algébrique les faisceaux des formes différentielles sont des $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules cohérents et sont également acycliques sur les ouverts affines de \mathbf{X} (5.4.3-(a)).

Cela dit, le morphisme d'espaces annelés $\epsilon^{\natural} : \mathcal{O}_{\mathbf{X}} \rightarrow \epsilon_*(\mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}})$ se prolonge en un morphisme de complexes de faisceaux $\epsilon_*^{\natural} : \underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^* \rightarrow \epsilon_*(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*)$ (¹⁸), induisant un morphisme d'hypercohomologies

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}; \epsilon_*^{\natural}) : \mathbb{H}(\mathbf{X}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^*) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbf{X}; \epsilon_*(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*)) = \mathbb{H}(\mathbf{X}^{\text{an}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*)$$

où l'égalité est justifiée par 5.4.5. Enfin, comme la cohomologie de de Rham est l'hypercohomologie du complexe de de Rham, nous obtenons le morphisme canonique

$$\boxed{\mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \epsilon_*^{\natural}) : H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}/\mathbb{C}) \longrightarrow H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}^{\text{an}})}$$

5.4.7. Théorème (Grothendieck). *La cohomologie de de Rham d'une variété algébrique complexe non singulière \mathbf{X} coïncide avec la cohomologie de de Rham de la variété analytique complexe \mathbf{X}^{an} . Plus précisément, le morphisme canonique $\mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \epsilon_*^{\natural})$ ci-dessus est **bijectif**.*

¹³ L'égalité ' $\stackrel{\square}{=}$ ' d'après 4.1.4-(g) parce que l'image directe d'un faisceau flasque est flasque.

¹⁴ Lorsque les sections $\Gamma(\mathbf{V}; \mathbf{C}^\bullet)$ d'un complexe de faisceaux \mathbf{C}^\bullet sur les ouverts \mathbf{V} d'une base pour la topologie sont des suites exactes longues, le complexe des germes \mathbf{C}_x^\bullet en tout point $x \in \mathbf{X}$ est exact et la suite \mathbf{C}^\bullet l'est donc aussi.

¹⁵ De définition analogue à celle des variétés différentiables : par des atlas d'ouverts homéomorphes à $\mathbb{C}^{d_{\mathbf{X}}}$ et morphismes de transition biholomorphes.

¹⁶ Algèbre extérieure sur \mathbb{C} du fibré cotangent $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^* \mathbf{X} = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}} \mathbf{X}; \mathbb{C})$ de \mathbf{X}

¹⁷ On prendra garde du fait que $(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^*, d_*)$ est un sous-complexe strict du complexe $(\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{diff}}}^*, d_*) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ des formes différentielles réelles à valeurs complexes ; le support du premier étant $[0, d_{\mathbf{X}}]$ tandis que celui du second est $[0, 2d_{\mathbf{X}}]$. En effet, pour $\omega \in \Omega^k(\mathbf{V}^{\text{an}})$ et $x \in \mathbf{V}$, l'élément $\omega(x)$ est une forme- k -multilinéaire complexe alternée sur $\mathbb{T}_x \mathbf{X}$, autrement dit, c'est une application $\omega(x) : (\mathbb{T}_x \mathbf{X})^k \rightarrow \mathbb{C}$ qui est \mathbb{C} -linéaire par rapport à chaque coordonnée et est nulle sur les multivecteurs $(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)$ avec $\bar{z}_i = \bar{z}_j$ pour un certain couple (i, j) avec $i \neq j$; une telle application est aussi (trivialement) une forme- k -linéaire réelle alternée à valeurs dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. On a donc une inclusion canonique $\underline{\Omega}_{\mathbf{U}^{\text{an}}}^k \subseteq \underline{\Omega}_{\mathbf{U}^{\text{diff}}}^k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ qui est stricte dans la mesure où $\underline{\Omega}_{\mathbf{U}^{\text{an}}}^k = 0$ si $k > d_{\mathbf{X}}$, alors que $\underline{\Omega}_{\mathbf{U}^{\text{diff}}}^k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 0$ pour $k > 2d_{\mathbf{X}}$.

¹⁸ Ce qui signifie que toute forme différentielle algébrique complexe est analytique complexe et que la différentielle algébrique coïncide avec la différentielle holomorphe.

Résumé de la démonstration d'après [Gr]. Compte tenu des théorèmes d'acyclicité de Serre et Cartan (5.4.3), le théorème 4.4.1-(b) réduit l'étude au cas où \mathbf{X} est **affine**.

La preuve de Grothendieck passe alors par les étapes suivantes :

i) Par le théorème de résolution de singularités d'Hironaka, on peut considérer que \mathbf{X} est un ouvert d'une variété algébrique complexe projective non singulière $\tilde{\mathbf{X}}$ et que $\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{X}} \setminus \mathbf{X}$ est un diviseur à croisement normaux. On notera $\iota : \mathbf{X} \rightarrow \tilde{\mathbf{X}}$ l'application d'inclusion et ι_* (resp. ι_*^{an}) le foncteur « *image directe* » dans la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules (resp. $\mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}$ -modules).

ii) Le morphisme $\epsilon^{\natural} : \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet} \rightarrow \epsilon_* \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet}$ induit le morphisme de complexes de faisceaux sur $\tilde{\mathbf{X}}$

$$\iota_* \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet} \rightarrow \iota_* \epsilon_* \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet} = \epsilon_* \iota_*^{\text{an}} (\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet}) \rightarrow \epsilon_* \mathbb{R} \iota_*^{\text{an}} (\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet})$$

(¹⁹) et donc, par adjonction (²⁰), le morphisme de complexes de faisceaux sur $\tilde{\mathbf{X}}^{\text{an}}$:

$$\boxed{\Phi_{\bullet} : (\iota_* (\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet}))^{\text{an}} \longrightarrow \mathbb{R} \iota_*^{\text{an}} (\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet})}$$

dont le passage en hypercohomologie donne le morphisme canonique de comparaison

$$\mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \Phi_{\bullet}) : H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}/\mathbb{C}) \longrightarrow H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}^{\text{an}})$$

qui coïncide, par construction avec $\mathbb{H}(\mathbf{X}; \epsilon^{\natural})$.

Pour justifier cette affirmation :

- On a $\mathbb{H}(\tilde{\mathbf{X}}^{\text{an}}; (\iota_* (\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet}))^{\text{an}}) = \mathbb{H}(\tilde{\mathbf{X}}; \iota_* (\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet}))$ par [GaGa] puisque chaque $\iota_* \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^k$ est limite inductive de module cohérents et que [GaGa] continue d'être valable dans ces cas. D'autre part, le fait que \mathbf{X} soit le complémentaire d'un diviseur de $\tilde{\mathbf{X}}$ implique que si $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^k \rightarrow \mathcal{F}^{k,*}$ est une résolution flasque (4.1.4-(h)) la suite longue $\iota_* (\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^k) \rightarrow \iota_* (\mathcal{F}^{k,*})$ est une résolution flasque de $\iota_* (\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^k)$, puisque ι_* (flasque) = (flasque) et que tout point $y \in \tilde{\mathbf{X}}$ admet un voisinage V_y tel que $W_y := V_y \cap \mathbf{X}$ est affine (puisque $\mathbf{Y} := \tilde{\mathbf{X}} \setminus \mathbf{X}$ est de codimension 1 d'après (i) ci-dessus), mais alors $\Gamma(V_y; \iota_* (\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^k) \rightarrow \iota_* (\mathcal{F}^{k,*})) = \Gamma(W_y; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^k \rightarrow \mathcal{F}^{k,*})$ est acyclique en degrés positifs d'après le critère d'affinité de Serre. On en déduit l'égalité

$$\mathbb{H}(\tilde{\mathbf{X}}; \iota_* (\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet})) = \Gamma(\tilde{\mathbf{X}}; \iota_* (\Sigma \mathcal{F}^{\bullet,*})) = \Gamma(\mathbf{X}; \Sigma \mathcal{F}^{\bullet,*}) = \mathbb{H}(\mathbf{X}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet}) = H_{\text{DR}}(\mathbf{X}^{\text{an}})$$

- L'égalité $\mathbb{H}(\tilde{\mathbf{X}}^{\text{an}}; \mathbb{R} \iota_*^{\text{an}} \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet}) = \mathbb{H}(\mathbf{X}^{\text{an}}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet}) = H_{\text{DR}}(\mathbf{X}/\mathbb{C})$ est immédiate.

iii) Pour démontrer que Φ_{\bullet} induit un isomorphisme en hypercohomologie il suffit de montrer que c'est un quasi-isomorphisme dans la catégorie des complexes de faisceaux (4.1.4-(e)) ce qui est une question **locale**. On utilise alors le fait que autour de chaque $y \in \mathbf{Y}^{\text{an}} = \tilde{\mathbf{X}}^{\text{an}} \setminus \mathbf{X}^{\text{an}}$ il existe un ouvert V_y et un isomorphisme **analytique** $\varphi_y : V_y \rightarrow \mathbb{B}^{dx}$, où \mathbb{B}^{dx} désigne une boule ouverte centrée à l'origine de \mathbb{C}^{dx} , tel que $\varphi_y(\mathbf{Y} \cap V_y)$ est la trace sur \mathbb{B}^{dx} d'une réunion d'hyperplans **de coordonnées**, autrement dit $V_y \cap \mathbf{X} = \varphi_y^{-1}(D(x_1 x_2 \cdots x_r))$. On a donc autour de y une base de voisinages pour la topologie transcendante de la forme $V = \mathbb{B} \setminus \{x_1 x_2 \cdots x_r = 0\}$ et le morphisme

$$\Gamma(V_y; \Phi_{\bullet}) : \Gamma(V_y; (\iota_* (\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{C}}^{\bullet}))^{\text{an}}) \longrightarrow \Gamma(V_y; \mathbb{R} \iota_*^{\text{an}} (\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet}))$$

s'identifie alors à l'inclusion des complexes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{formes différentielles} \\ \text{homomorphes sur } V \\ \text{mémomorphes sur } \mathbb{B} \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{l} \text{formes différentielles} \\ \text{homomorphes sur } V \end{array} \right\}$$

et un calcul explicite montre que c'est bien un quasi-isomorphisme. ■

¹⁹ $\mathbb{R} \iota_*^{\text{an}} (\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet})$ est le complexe $\iota_*^{\text{an}} (\mathcal{I}^{\bullet})$ où \mathcal{I}^{\bullet} est un complexe de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}$ -modules injectifs tel qu'il existe un quasi-isomorphisme $\Phi^{\bullet} : \underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet} \rightarrow \mathcal{I}^{\bullet}$. Le morphisme $\epsilon_* \iota_*^{\text{an}} (\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet}) \rightarrow \epsilon_* \mathbb{R} \iota_*^{\text{an}} (\underline{\Omega}_{\mathbf{X}^{\text{an}}}^{\bullet})$ est alors celui induit par Φ^{\bullet} .

²⁰ Dans [GaGa] le foncteur $(-)^{\text{an}} : \text{Mod}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{X}}}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{X}}^{\text{an}}})$ est adjoint à gauche du foncteur $\epsilon^{\natural} : \text{Mod}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{X}}^{\text{an}}}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{X}}})$.

5.4.8. Exercice. Justifier les propriétés suivantes.

- a) La cohomologie de de Rham d'une variété algébrique complexe non singulière X coïncide avec la cohomologie de faisceau sur X^{an} du faisceau constant $\mathbb{C}_{X^{\text{an}}}$.
- b) La cohomologie de de Rham d'une variété algébrique complexe non singulière X coïncide avec la cohomologie de de Rham de la variété différentielle réelle X^{diff} sous-jacente à X^{an} .
- c) Montrer que la cohomologie de de Rham d'une variété différentielle **réelle** de dimension n admettant une structure complexe (auquel cas n est pair) est nulle en degrés supérieurs à $n/2$.

§ 6. Références bibliographiques

- [Gr] A. GROTHENDIECK. On the de Rham cohomology of algebraic varieties; Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 29 pp. 95–103 (1966).
- [Go] R. GODEMENT. “*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*”; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).
- [GaGa] J.-P. SERRE. Géométrie algébrique et géométrie analytique; Ann. Inst. Fourier, Grenoble 6, pp. 1–42, (1955–1956).

§ 7. Index terminologique

acyclique		acyclique,	4
(critère de Serre),	23	augmenté,	11
complexe,	4	concentré dans . . . ,	3
faisceau,	12	des cochaînes de Čech,	18
additif (foncteur),	3	des formes différentielles holomorphes,	26
amplitude		positifs, bornés, . . . ,	4
cohomologique,	4	simple associé,	9
d'un complexe,	3		
augmenté		différentielle,	3
complexe,	11	du complexe de Čech,	14
complexe de Čech,	18	holomorphe,	26
augmentation,	11, 14		
		faisceau	
bicomplexe		acyclique,	12
à termes dans \mathbf{Ab} ,	6	cohérent,	26
borné inférieurement,	9	des formes différentielles,	21
du premier quadrant,	9	flasque,	11
		mou,	21
cône d'un morphisme de complexes,	4	résolution,	11
catégorie		foncteur	
de modules,	2	additif,	3
Čech (complexe),	18	image directe,	27
co-augmentation,	11		
cochaînes de Čech,	14	Godement (résolution de),	12
cohérent		hypercohomologie des complexes,	16
(faisceau),	26	image directe (foncteur),	27
(module),	25		
cohomologie		k -ième terme,	3
de Čech,	14		
de de Rham,	21	module cohérent,	25
de faisceaux,	12	modules (catégorie),	2
horizontale,	7	morphisme	
verticale,	7	canonique $\Xi(\mathcal{U}, \mathbf{X}, -)$,	19
complexe		canonique $\Xi(\mathcal{U}, -)$,	18
à termes dans \mathbf{Ab} ,	2		

canonique $\Xi(\mathbf{X}, -)$,	16	théorème	
d'augmentation,	11	de Čech-Leray	
mou (faisceau),	21	pour les complexes de faisceaux,	20
		pour les faisceaux,	15
quasi-isomorphisme,	4	de Leray	
		pour les complexes de faisceaux,	17
		pour les faisceaux,	12
résolution		transcendant (topologie),	25
acyclique, flasque, molle,	17	triangle distingué,	5
canonique de Godement,	12	troncatures bêtes,	5
d'un faisceau,	11		
		variété	
Serre (acyclicité),	23	analytique complexe,	26
		différentielle,	21
termes d'un complexe,	3	holomorphe,	26

—————×—————

Alberto Arabia
 CNRS
 Institut de Mathématiques de Jussieu
 Théorie des Groupes
 Lundi 5 mai 2008