Complétion †-adique

Table des matières

§ 1. Complétion $\boldsymbol{I}$-adique formelle

Dans ces notes le couple $(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ désigne toujours un anneau commutatif unitaire $\boldsymbol{R}$ et un idéal $\boldsymbol{I}\subseteq\boldsymbol{R}$.

1.1 Topologie $\boldsymbol{I}$-adique

Nous montrons comment à partir de la simple donnée d'un idéal $\boldsymbol{I}\subseteq\boldsymbol{R}$ il est possible de munir les $\boldsymbol{R}$-modules (resp. $\boldsymbol{R}$-algèbres) d'une topologie « *la topologie $\boldsymbol{I}$-adique* » rendant les opérations internes (somme, produit) ainsi que leurs morphismes continus.

1.1.1. Boule $\boldsymbol{I}$-adique. Soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{R}$-module. Pour tout $x\in\boldsymbol{M}$ et $r\in\mathbb{N}$, on appelle « *boule $\boldsymbol{I}$-adique de centre x et d'ordre r dans $\boldsymbol{M}$* », l'ensemble

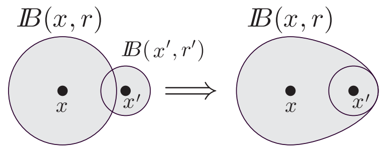
$$\boxed{\mathbb{B}(x;r):=x+\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}}$$

1.1.2. Proposition

a) *Le grosses boules absorbent les petites. Autrement dit, si $r\leqslant r'$ et si $\mathbb{B}(x;r)\cap\mathbb{B}(x';r')\neq\varnothing$ alors $\mathbb{B}(x;r)\supseteq\mathbb{B}(x';r')$.*

b) *Une intersection finie non vide de boules est une boule.*

c) *Les réunions des boules $\boldsymbol{I}$-adiques d'un $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ constituent les ouverts d'une topologie sur $\boldsymbol{M}$.*



Démonstration. Si $x'+w'\in\ x+\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$, on a $x'+w'+\boldsymbol{I}^{r'}\boldsymbol{M}\in x+\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}+\boldsymbol{I}^{r'}\boldsymbol{M}$, et si en plus $w'\in\boldsymbol{I}^{r'}\boldsymbol{M}\subseteq\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$, on a bien $x'+\boldsymbol{I}^{r'}\boldsymbol{M}\subseteq x+\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$. Par conséquent, l'intersection de deux boules et soit vide, soit la boule la plus petite. Par induction, une intersection finie non vide de boules est une boule. Pour vérifier que les réunions de boules constituent une topologie il ne reste plus qu'à vérifier que $(\cup_i\mathbb{B}(x_i;r_i))\cap(\cup_j\mathbb{B}(x_j;r_j))$ est une réunion de boules. Or, par distributivité :

$$\big(\bigcup_i\mathbb{B}(x_i;r_i)\big)\bigcap\big(\bigcup_j\mathbb{B}(x_j;r_j)\big)=\bigcup_{i,j}\big(\mathbb{B}(x_i;r_i)\cap\mathbb{B}(x_j;r_j)\big)$$

et l'assertion (b) permet de conclure. ∎

1.1.3. Définition. Suite à la proposition 1.1.2-(c), on appelle « *ouvert $\boldsymbol{I}$-adique de $\boldsymbol{M}$* » toute réunion de boules $\boldsymbol{I}$-adiques et « *topologie $\boldsymbol{I}$-adique* » la topologie dont les ouverts sont les ouverts $\boldsymbol{I}$-adiques.

1.1.4. Exemples limites. Si $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{R}$ (resp. $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$), la topologie $\boldsymbol{I}$-adique de $\boldsymbol{M}$ est la topologie grossière (resp. discrète).

1.1.5. Exercice. Montrer que la topologie $\boldsymbol{I}$-adique sur $\boldsymbol{M}$ est la topologie discrète si et seulement si $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$ pour $r \gg 0$.

1.2 Propriétés générales de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique

1.2.1. Proposition. *Dans les énoncés suivants, les lettres $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ désignent des $\boldsymbol{R}$-modules munis de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique.*

a) *L'anneau $\boldsymbol{R}$ muni de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique est un anneau topologique.*

b) *Une $\boldsymbol{R}$-algèbre (resp. un $\boldsymbol{R}$-module) munie de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique est une $\boldsymbol{R}$-algèbre (resp. un $\boldsymbol{R}$-module) topologique.*

c) *Un morphisme $\boldsymbol{R}$-linéaire entre modules munis de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique est continu.*

d) *Pour tout sous-ensemble $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{M}$, l'«adhérence $\boldsymbol{I}$-adique de $\boldsymbol{Y}$», notée $\overline{\boldsymbol{Y}}$, est l'ensemble des $x \in \boldsymbol{M}$ tels que $\mathbb{B}(x;r) \cap \boldsymbol{Y} \neq \varnothing$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, donc*

$$\overline{\boldsymbol{Y}} = \bigcap\nolimits_{r\in\mathbb{N}} \big(\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}\big)$$

e) *Une boule $\boldsymbol{I}$-adique est toujours fermée.*

f) *L'adhérence $\boldsymbol{I}$-adique de l'origine de $\boldsymbol{M}$ est l'ensemble $\bar{\boldsymbol{0}} = \bigcap_r \boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$.*

g) *$\boldsymbol{M}$ est séparé (on dit aussi «$\boldsymbol{I}$-adiquement séparé»), si et seulement si $\boldsymbol{0} = \bar{\boldsymbol{0}}$. En particulier, $\boldsymbol{N}$ est fermé dans $\boldsymbol{M}$, si et seulement si $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{N}$ est séparé. Le module $\boldsymbol{M}_\sigma := \boldsymbol{M}/\bar{\boldsymbol{0}}$ est séparé.*

h) *Si **$\boldsymbol{R}$ est noethérien et $\boldsymbol{M}$ est de type fini**.*

1) (**Artin-Rees**) *Si $\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2$ sont des sous-modules $\boldsymbol{M}$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $r \geqslant k$ on a*

$$\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{N}_1 \cap \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{I}^{r-k}(\boldsymbol{I}^k\boldsymbol{N}_1 \cap \boldsymbol{N}_2)$$

2) **(Krull)** *Dans $\boldsymbol{M}$, on a $\boldsymbol{I}\bar{\boldsymbol{0}} = \bar{\boldsymbol{0}}$.*

3) **(Krull)** *Si $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{M}$, la topologie induite sur $\boldsymbol{N}$ est la topologie $\boldsymbol{I}$-adique de $\boldsymbol{N}$.*

i) *Si $\boldsymbol{R}$ est **noethérien et intègre**, $\boldsymbol{R}$ est séparé.*

j) *Si **$\boldsymbol{R}$ est noethérien et $\boldsymbol{I} \subseteq \mathrm{Rad}(\boldsymbol{R})$** ([1]) (p.e. si $(\boldsymbol{R}, \mathfrak{m})$ est local et que $\boldsymbol{I} \subseteq \mathfrak{m}$)*

1) *Si $\boldsymbol{M}$ est de type fini, $\boldsymbol{M}$ est séparé.*

2) *Si $\boldsymbol{M}$ est de type fini, tout sous-module de $\boldsymbol{M}$ est fermé. En particulier, tout idéal de $\boldsymbol{R}$ est fermé.*

3) *$(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ est un «anneau de Zariski» ([2]).*

4) *Une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$ ainsi que son complexe de de Rham $\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ sont séparés.*

Indications

a,b,c) Ces énoncés affirment simplement que les opérations de somme et produits sont continues. Nous démontrons seulement le cas du produit dans une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\cdot : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ et laissons les autres cas en exercice. Dans ce cas, on doit montrer que l'ensemble $\{(x,y) \mid xy \in z + \boldsymbol{I}^r\}$ est un ouvert ce qui est évident car si $xy \in z + \boldsymbol{I}^r$ alors $(x+\boldsymbol{I}^r)(y+\boldsymbol{I}^r) = xy + x\boldsymbol{I}^r + y\boldsymbol{I}^r + \boldsymbol{I}^{2r} \subseteq xy + \boldsymbol{I}^r$.

---

[1] On rappelle que le radical (de Jacobson) d'un anneau $\boldsymbol{R}$ est l'idéal $\mathrm{Rad}(\boldsymbol{R})$ des $x \in \boldsymbol{R}$ qui opèrent comme 0 sur tout $\boldsymbol{R}$-module simple, *i.e.* sur tout $\boldsymbol{R}$-module de la forme $\boldsymbol{R}/\mathfrak{M}$ où $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $\boldsymbol{R}$. On voit aussitôt que $\mathrm{Rad}(\boldsymbol{R}) = \bigcap\{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \text{ est un idéal maximal de } \boldsymbol{R}\}$. Or, x est dans tout idéal maximal, si et seulement si, $1 + ax$ n'appartient à aucun idéal de $\boldsymbol{R}$. En effet, la nécessité étant claire, si $x \notin \mathfrak{M}$, on a $\boldsymbol{R} = (x) + \mathfrak{M}$ par maximalité de $\mathfrak{M}$ et donc $1 = ax + m$ pour certains $a \in \boldsymbol{R}$ et $m \in \mathfrak{M}$, en particulier $1 + ax \in \mathfrak{M}$ n'est pas inversible. Par conséquent, $\mathrm{Rad}(\boldsymbol{R}) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid 1 + ax \text{ est inversible } \forall a \in \boldsymbol{R}\}$ et l'assertion «$\boldsymbol{I} \subseteq \mathrm{Rad}(\boldsymbol{R})$» est équivalente à «$1 + y$ *est inversible que que soit* $y \in \boldsymbol{I}$».

[2] Le couple $(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ est ainsi appelé lorsque $\boldsymbol{R}$ est noethérien et que ses idéaux sont $\boldsymbol{I}$-adiquement fermés. Cette dernière propriété équivaut à $\boldsymbol{I} \subseteq \mathrm{Rad}(\boldsymbol{R})$; (j)-(2) montre la suffisance, réciproquement, si $\boldsymbol{I} \not\subseteq \mathrm{Rad}(\boldsymbol{R})$, il existe $\mathfrak{M}$ maximal tel que $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} + \mathfrak{M}$, auquel cas $1 \in \boldsymbol{I} \bmod \mathfrak{M}$ et $\boldsymbol{R}/\mathfrak{M}$ n'est pas $\boldsymbol{I}$-adiquement séparé car alors $\boldsymbol{I}^r(\boldsymbol{R}/\mathfrak{M}) = \boldsymbol{R}/\mathfrak{M}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, et donc $\bigcap_n \boldsymbol{I}^r(\boldsymbol{R}/\mathfrak{M}) = \boldsymbol{R}/\mathfrak{M} \neq 0$.

d,e,f,g) 1.1.2-(a). Si $\boldsymbol{M}$ est séparé un point est toujours fermé, réciproquement si $x \neq y$ il existe une boule ouverte $\mathbb{B}$ contenant x et ne contenant pas y, or le complémentaire de $\mathbb{B}$ est ouvert par (e).

h-1) Voir p.e. [B$_2$] ch. III § **3.1** p. 197.

h-2) Artin-Rees pour $\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}_2 = \bar{\boldsymbol{0}}$ donne $\bar{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{I}^{r-k}\bar{\boldsymbol{0}} \subseteq \boldsymbol{I}\bar{\boldsymbol{0}}$.

h-3) Voir p.e. [B$_2$] ch. III § **3.2** p. 199.

i) On raisonne comme pour le lemme de Nakayama. Le $\boldsymbol{R}$-module $\bar{\boldsymbol{0}}$ est de type fini de système de générateurs $\{x_1, \dots, x_r\}$ et l'on a $\bar{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{I}\bar{\boldsymbol{0}}$ ((h)-(2)) ; il existe alors des éléments $\alpha_{i,j} \in \boldsymbol{I}$ tels que $x_i = \alpha_{i,1}x_1 + \cdots + \alpha_{i,r}x_r$. On a donc en écriture matricielle

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 1-\alpha_{1,1} & -\alpha_{1,2} & \cdots & -\alpha_{1,r} \\ -\alpha_{2,1} & 1-\alpha_{2,2} & \cdots & -\alpha_{2,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{r,1} & -\alpha_{r,2} & \cdots & 1-\alpha_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_x \end{pmatrix},$$

et si nous multiplions à gauche par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{2,1} & 1-\alpha_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r,1} & 0 & 0 & \cdots & 1-\alpha_{1,1} \end{pmatrix},$$

nous obtenons l'égalité

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 1-\beta_{1,1} & -\beta_{1,2} & \cdots & -\beta_{1,r} \\ 0 & 1-\beta_{2,2} & \cdots & -\beta_{2,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -\beta_{r,2} & \cdots & 1-\beta_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_x \end{pmatrix},$$

avec $\beta_{i,j} \in \boldsymbol{I}$ puisque $\boldsymbol{I}$ est un idéal et que $1+\boldsymbol{I}$ est stable par multiplication. L'itération de cette idée est le procédé de « *trigonalisation* » des matrices dans les anneaux ; il produit, après r étapes, une famille d'éléments $\gamma_{i,j} \in \boldsymbol{I}$ tels que

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 1-\gamma_{1,1} & -\gamma_{1,2} & \cdots & -\gamma_{1,r} \\ 0 & 1-\gamma_{2,2} & \cdots & -\gamma_{2,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\gamma_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_x \end{pmatrix},$$

avec des coefficients sous la diagonale tous nuls.

Si nous posons maintenant $1-\gamma := (1-\gamma_{1,1})\cdots(1-\gamma_{r,r})$, on a $\gamma \in \boldsymbol{I}$ et

$$(1-\gamma)\, x_i = 0\,, \quad \forall i = 1, \dots, r\,. \tag{$\diamond$}$$

par conséquent, si $\boldsymbol{R}$ est intègre, on a $x_i = 0$ (car $1-\gamma \neq 0$) et donc $\bar{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0}$.

j-1) Le raisonnement précédent s'applique jusqu'à l'égalité ($\diamond$), on conclut puisque $1-\gamma$ est inversible.

j-2,3) Si $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{M}$, notons $\nu : \boldsymbol{M} \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}/\boldsymbol{N}$ la surjection canonique. Le quotient $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{N}$ est séparé d'après l'assertion précédente et alors $\overline{\boldsymbol{N}} = \nu^{-1}(\bar{\boldsymbol{0}}) = \nu^{-1}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{N}$.

j-4) Si $\boldsymbol{A}$ est de type fini, $\boldsymbol{A}$ est noethérienne et $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est un $\boldsymbol{A}$-module de type fini. ■

1.2.2. Séparation $\boldsymbol{I}$-adique. Soit **Top** la catégorie des espace topologiques et $\mathbf{Top}_\sigma$ la sous-catégorie pleine des espaces topologiques *séparés*. Le foncteur l'inclusion de catégories $\iota : \mathbf{Top}_\sigma \rightsquigarrow \mathbf{Top}$ admet un adjoint à gauche $(\_)_\sigma : \mathbf{Top} \rightsquigarrow \mathbf{Top}_\sigma$; il fait correspondre à un espace topologique $\boldsymbol{T}$ son séparé $\boldsymbol{T}_\sigma$, quotient $\boldsymbol{T}$ par la relation d'équivalence (le vérifier) qui identifie deux points $t_1, t_2 \in \boldsymbol{T}$ lorsque pour toute application continue $f : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{S}$ avec $\boldsymbol{S}$ séparé, on a $f(t_1) = f(t_2)$. Notons $\mathcal{R}$ cette relation. Il est immédiat que $\boldsymbol{T}_\sigma$ est séparé (le vérifier) et que la surjection canonique $\boldsymbol{T} \twoheadrightarrow \boldsymbol{T}/\mathcal{R}$ factorise toute application continue de $\boldsymbol{T}$ vers un espace séparé. On a donc bien

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{Top}}(\boldsymbol{T}, \iota\boldsymbol{S}) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{Top}_\sigma}(\boldsymbol{T}_\sigma, \boldsymbol{S})$$

Dans le cadre des topologies $\boldsymbol{I}$-adiques l'espace $\boldsymbol{M}/\bar{\mathbf{0}}$ est séparé (1.2.1-(g)) et pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{S}$ avec $\boldsymbol{S}$ séparé, on a bien $\bar{\mathbf{0}} \subseteq \ker(f)$. Par conséquent, la surjection $\boldsymbol{M} \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}/\bar{\mathbf{0}}$ représente « *le séparé* $\boldsymbol{M}_\sigma$ *de* $\boldsymbol{M}$ ». En particulier,

1.2.3. Proposition. *Un morphisme de* $\boldsymbol{R}$*-modules* $\varphi : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{M}$ *induit un* ***isomorphisme*** $\varphi_\sigma : \boldsymbol{N}_\sigma \to \boldsymbol{M}_\sigma$*, si et seulement si l'application induite* $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\varphi; \boldsymbol{S}) : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{S}) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{S})$ *est bijective pour tout* $\boldsymbol{R}$*-module séparé* $\boldsymbol{S}$*.*

1.3 Valuations discrètes et valeurs absolues

Un $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ est « *filtré* » par la suite décroissante de ses boules $\boldsymbol{I}$-adiques

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 \supseteq \boldsymbol{I}\boldsymbol{M} \supseteq \boldsymbol{I}^2\boldsymbol{M} \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M} \supseteq \cdots$$

et pour chaque $m \in \boldsymbol{M}$, on appelé « *l'ordre* $\boldsymbol{I}$*-adique de* m », noté $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(m)$, la borne supérieure dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble $\{r \in \mathbb{N} \mid m \in \boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}\}$. L'ordre $\boldsymbol{I}$-adique vérifie les propriétés suivantes :

O-i) $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(\_) : \boldsymbol{M} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

O-ii) $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(xm) \geqslant \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(x) + \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(m)$, pour tout $x \in \boldsymbol{R}$ et $m \in \boldsymbol{M}$.

O-iii) $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(m) = +\infty$, si et seulement si $m \in \bar{\mathbf{0}}$.

O-iv) $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(m_1 + m_2) \geqslant \inf(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(m_1), \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(m_2))$.

On peut alors considérer pour tout nombre réel $s > 1$, l'application

$$\boxed{|\_|_s : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}\,, \quad |m|_s := s^{-\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(m)}}$$

Elle vérifie :

i) $|\_|_s : \boldsymbol{M} \to [\![0, 1]\!] \subseteq \mathbb{R}$.

ii) $|m|_s = 0$, si et seulement si $m \in \bar{\mathbf{0}}$.

iii) $|xm|_s \leqslant |x|_s\, |m|_s$, pour tout $x \in \boldsymbol{R}$ et $m \in \boldsymbol{M}$.

iv) $|m_1 + m_2|_s \leqslant \sup(|m_1|_s, |m_2|_s)$.

1.3.1. Lorsque $\boldsymbol{M}$ est $\boldsymbol{I}$-adiquement séparé, la condition (ii) devient

ii') $|m|_s = 0$, si et seulement si $m = 0$.

et l'application

$$d_s : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \quad d_s(m_1, m_2) := |m_1 - m_2|_s$$

vérifie les conditions d'une distance sur $\boldsymbol{M}$:

D-i) distance bornée : $d_s(m_1, m_2) \leqslant 1$.

D-ii) symétrie : $d_s(m_1, m_2) = d_s(m_2, m_1)$.

D-iii) séparation : $d_s(m_1, m_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; m_1 = m_2$.

D-iv) inégalité triangulaire : $d_s(m_1, m_3) \leqslant d_s(m_1, m_2) + d_s(m_2, m_3)$.

et même l'inégalité plus forte

$$\boxed{d_s(m_1, m_3) \leqslant \sup(d_s(m_1, m_2), d_s(m_2, m_3))}$$

qui fait de d_s une « *distance ultramétrique* » ou « *non archimédienne* »

1.3.2. Commentaire. Dans l'axiomatique de Hilbert de la géométrie euclidienne le premier axiome de continuité (axiome IV.1) est l'axiome d'Archimède qui affirme : « *Pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande* ». Dans le cas d'une métrique non archimédienne le fait de prolonger indéfiniment un segment ne fait pas croître sa longueur. Ainsi par exemple, étant donnée une suite de points $\{m_0, m_1, \ldots, m_r\}$ l'inégalité triangulaire établit que $d(m_0, m_r) \leqslant \sum_{i=0}^{r-1} d(m_i, m_{i+1})$, l'égalité pouvant être atteinte ; par contre, dans le cas non archimédien on a $d(m_0, m_r) \leqslant \sup\big\{d(m_i, m_{i+1}) \bigm| 0 \leqslant i \leqslant r-1\big\}$ et le fait de rajouter de petits segments n'a pas d'effet sur la distance finale, quel que soit leur nombre.

1.3.3. Exercice. Montrer que dans un espace muni d'une distance ultramétrique tout triangle est isocèles.

Les observations de 1.3.1 prouvent la proposition suivante.

1.3.4. Proposition. *La topologie $\boldsymbol{I}$-adique sur $\boldsymbol{M}$ est définie par un* « écart » *borné par* 1 ([3]). *Le séparé $\boldsymbol{I}$-adique $\boldsymbol{M}_\sigma$ de $\boldsymbol{M}$ est un espace* « métrique ».

1.3.5. Remarque. Le fait que $\boldsymbol{M}/\overline{\boldsymbol{0}}$ est un espace topologique séparé apparaît donc aussi comme conséquence de 1.3.4 (*cf.* 1.2.1-(g)).

1.3.6. Remarque et notation. On rappelle que deux distances sur un ensemble $\boldsymbol{E}$ sont dites « *équivalentes* » lorsqu'elles définissent la même topologie. Il est facile de voir que les distances ultramétriques d_s sont toutes équivalentes bien qu'elles ne soient pas « *commensurables* », *i.e.* il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $d_{s_1} \leqslant C d_{s_2}$ et $d_{s_2} \leqslant C d_{s_1}$ (le vérifier !) ([4]). Dans la suite on notera de manière générique $|\_|$ l'une des applications $|\_|_s : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$ lorsque la précision de la valeur s sera inutile.

1.3.7. Valuations et valeurs absolues. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{I}$-adiquement séparée. Lorsque l'application $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}} : \boldsymbol{A}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ est **additive** et pas seulement suradditive, *i.e.* lorsque l'on a une égalité

$$\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(ab) = \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a) + \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(b) \quad \forall a, b \in \boldsymbol{A}\backslash\{0\}\,, \tag{1}$$

l'application ordre est une « *valuation* » et est notée $v_{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{A}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$, les applications $|\_|_s : \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ qui s'en déduisent sont alors appelées des « *valeurs absolues* » ; elles vérifient donc :

V-i) $|\_|_s : \boldsymbol{A} \to [\![0, 1]\!] \subseteq \mathbb{R}$.

V-ii) $|a|_s = 0$, si et seulement si $a = 0$.

[3] On appelle « *écart* » sur un ensemble $\boldsymbol{E}$ une application $\boldsymbol{e} : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant

$$\bullet\ \boldsymbol{e}(x,x) = 0\,, \qquad \bullet\ \boldsymbol{e}(x,y) = \boldsymbol{e}(y,x)\,, \qquad \bullet\ \boldsymbol{e}(x,z) \leqslant \boldsymbol{e}(x,y) + \boldsymbol{e}(y,z) \text{ (inégalité triangulaire)}\,.$$

Un écart est une « *distance* » si, de plus, $\bullet\ \boldsymbol{e}(x,y) < +\infty$ et $\bullet\ \big(x \neq y \Rightarrow \boldsymbol{e}(x,y) \neq 0\big)$ $(*)$. Dans un ensemble $\boldsymbol{E}$ muni d'un écart $\boldsymbol{e}$, on appelle « *boule ouverte centrée en $x \in \boldsymbol{E}$ de rayon R* » l'ensemble $\mathbb{B}_{\boldsymbol{e}}(x, R) = \{y \in \boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{e}(x,y) < R\}$. L'inégalité triangulaire suffit alors pour prouver que l'intersection de deux boules est une réunion de boules, et donc que les réunions de boules constituent les ouverts d'une topologie. Bien entendu, cette topologie n'est séparée que si $(*)$ est vérifiée. Lorsque $\boldsymbol{E}$ est un groupe abélien muni d'une application sous-additive $|\_| : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$, *i.e.* telle que $|x+y| \leqslant |x| + |y|$, l'application $\boldsymbol{e} : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$, $\boldsymbol{e}(x,y) = |x-y|$, est un écart.

[4] À la différence des espaces vectoriels réels ou complexes normés où deux normes sont équivalentes si et seulement si elles sont commensurables.

V-iii) $|ab|_s = |a|_s\,|b|_s\,,\ \forall a,b \in \boldsymbol{A}$.
V-iv) $|a+b|_s \leqslant \sup(|a|_s, |b|_s)$.

1.3.8. Exercice. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{I}$-adiquement séparée. Montrer que les conditions suivantes sont nécessaires pour que l'application $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(\_) : \boldsymbol{A} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ soit une valuation :

(i) $\boldsymbol{A}$ est intègre. (ii) $\boldsymbol{IA}$ est un idéal premier.

1.3.9. Exercice. Soit p un nombre premier, notons $\boldsymbol{I} := \langle p\rangle$ et munissons $\mathbb{Z}$ de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. Montrer que l'application $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}} : \mathbb{Z}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ est une valuation ; notons-la v_p. Pour m premier à p, montrer l'égalité

$$v_p((p^r m)!) = p^{r-1}m + v_p((p^{r-1}m)!)\,.$$

En déduire, pour $m \in \mathbb{Z}$ non nul :

$$v_p(m!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor,$$

puis

$$v_p(p^r!) = \frac{p^r - 1}{p-1}\,, \quad \text{et donc aussi} \quad v_p(m!) = \frac{p^{\lfloor \log_p(m)\rfloor} - 1}{p-1}\,.$$

1.4 Complétion

1.4.1. Condition de Cauchy. Commençons par rappeler que dans le cas des espaces vectoriels réels normés $(V; \|\_\|)$ la complétion consiste à passer de l'espace des vecteurs à celui des suites de vecteurs vérifiant une condition de pseudo-convergence, « *le critère de Cauchy* » qui affirme, pour une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

« *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que pour tous* $n_1, n_2 \geqslant N_\varepsilon$ *on ait* $\|v_{n_1} - v_{n_2}\| < \varepsilon$ ».

Dans le cas non archimédien (*cf.* 1.3.2) cette condition est équivalente à

$$\boxed{\text{« Pour tout } \varepsilon > 0 \text{ il existe } N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tous } n \geqslant N_\varepsilon \text{ on ait } |v_n - v_{n+1}| < \varepsilon \text{ »}} \qquad (\mathbf{Chy})$$

1.4.2. Suites de Cauchy. Étant donné un $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ muni de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique, on note $\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})$ l'ensemble des « *suites de Cauchy de* $\boldsymbol{M}$ », *i.e.* des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \boldsymbol{M}^{\mathbb{N}}$ vérifiant le critère de Cauchy sous la forme $(\mathbf{Chy})$.

1.4.3. Suites convergentes. Étant donné un $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ muni de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \boldsymbol{M}^{\mathbb{N}}$ est dite « *convergente* » de « *limite* » $x_\infty \in \boldsymbol{M}$ lorsque pour chaque $\varepsilon > 0$ donné, il existe N_ε tel que pour tout $n > N_\varepsilon$ on a $|x_n - x_\infty| < \varepsilon$. On note $\mathbf{Cv}(\boldsymbol{M})$ l'ensemble des suites convergentes et $\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M})$ celui des suites convergentes de limite 0. On a des inclusions de $\boldsymbol{R}$-modules

$$\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M}) \subseteq \mathbf{Cv}(\boldsymbol{M}) \subseteq \mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})\,.$$

1.4.4. Exercice. Montrer que si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy, la suite de nombres réels $(|x_n|)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy et, ou bien elle est stationnaire (1.3.3), ou bien converge vers zéro.

1.4.5. Exercice. La suite constante de terme général $x \in \boldsymbol{M}$ converge vers zéro si et seulement si $x \in \overline{\mathbf{0}}$.

1.4.6. Topologie $\boldsymbol{I}$-adique sur $\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})$. On rappelle qu'une conséquence classique de la « *sous-additivité* » $|x_1 + x_2| \leqslant |x_1| + |x_2|$ est l'inégalité

$$\big||x_1| - |x_2|\big| \leqslant |x_1 - x_2|\,,$$

qui dit que l'application $|\_| : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}_+$ est 1-lipschitzienne, donc continue, et qu'elle transforme suite de Cauchy de $\boldsymbol{M}$ en suite de Cauchy, **donc convergente**, de $\mathbb{R}$. On pose alors

$$\boxed{\|\_\| : \mathbf{Chy}(\boldsymbol{M}) \to \mathbb{R}\,, \quad \|(x_n)_{n\geqslant 0}\| = \varinjlim{}_n\, |x_n| \in [\![0,1]\!]}$$

et l'on constate aussitôt les propriétés suivantes

i) $\|\_\| : \mathbf{Chy}(\boldsymbol{M}) \to [\![0,1]\!] \subseteq \mathbb{R}$;

ii) $\|(x_n)_{n\geqslant 0}\| = 0$, si et seulement si $(x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbf{Cv}_0$;

iii) $\|a(x_n)_{n\geqslant 0}\| = |a|\,\|(x_n)_{n\geqslant 0}\|$, $\forall a \in \boldsymbol{R}$, $\forall (x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})$;

iv) $\|(x_n)_{n\geqslant 0} + (y_n)_{n\geqslant 0}\| \leqslant \sup(\|(x_n)_{n\geqslant 0}\|, \|(y_n)_{n\geqslant 0}\|)$;

qui nous conduisent à munir $\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})$ de la topologie associée à l'écart défini par $\|\_\|$ suivant le procédé (standard) de ([3]) (p. 6). Notons $(\mathbf{Chy}; \|\_\|)$ cet espace topologique. Il est immédiat de constater que l'application $\|\_\|$ passe au quotient $\|\_\| : \mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})/\,\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M}) \to [\![0,1]\!]$ où elle induit une structure d'espace **métrique**.

1.4.7. Exercice. Montrer que les applications $\|\_\| : \mathbf{Chy}(\boldsymbol{M}) \to [\![0,1]\!]$ et $|\_| : \boldsymbol{M} \to [\![0,1]\!]$ ont même image.

1.4.8. Proposition. *L'identité* $\big(\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})/\,\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M}); |\_|\big) \to \big(\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})/\,\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M}); \|\_\|\big)$ *est continue. En particulier,* $\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})/\,\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M})$ *est* $\boldsymbol{I}$*-adiquement séparé.*

Démonstration. Pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ du $\boldsymbol{R}$-module $\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})$ on a $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}((x_n)_{n\geqslant 0}) \leqslant \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(x_m)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. On en déduit l'inégalité $|\_| \geqslant \|\_\|$ sur $\mathbf{Chy}_0(\boldsymbol{M})/\,\mathbf{Cv}(\boldsymbol{M})_0$ et l'application en question est 1-lipschitzienne. ■

1.4.9. Remarque. Nous verrons plus tard que l'on a $\|\_\| = |\_|$ (*cf.* 1.5.1-(c)).

1.4.10. Commentaire. Un $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ est dit « *complet* » lorsque ses séries de Cauchy convergent. Notons $\mathrm{Cmp}(\boldsymbol{R})$ la catégorie de tels modules et $\iota : \mathrm{Cmp}(\boldsymbol{R}) \subseteq \mathrm{Mod}(\boldsymbol{R})$ le foncteur d'inclusion. Le $\boldsymbol{R}$-module $\widehat{\boldsymbol{M}} := \mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})/\,\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M})$, complet *par construction*, est universel en ce sens que le foncteur $\boldsymbol{M} \rightsquigarrow \widehat{\boldsymbol{M}}$, dit « *de complétion* », est adjoint à gauche de ι. La proposition 1.4.8 établit que $\widehat{\boldsymbol{M}}$ est séparé, mais cette propriété est particulière au contexte $\boldsymbol{I}$-adique, en effet sur la catégorie des groupes abéliens filtrés généraux, le foncteur de complétion peut produire des espaces non séparés (*cf.* [B$_2$] III § **2.12** et [J] § **7.17** p. 455). Dans tous les cas le complété séparé d'un groupe abélien filtré $\boldsymbol{M}_*$ est $\varprojlim_n \boldsymbol{M}/\boldsymbol{M}_n$ (*cf.* 1.5.1-(d)).

1.4.11. Complété séparé $\boldsymbol{I}$-adique formel. On appelle « *complété (séparé) du $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ (pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique)* » le $\boldsymbol{R}$-module

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{M}} := \frac{\mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})}{\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{M})}}$$

La proposition suivante est de vérification immédiate.

1.4.12. Proposition

a) *L'application qui fait correspondre à $m \in \boldsymbol{M}$ la suite* «constante» $(m_n \mid m_n = m)_{n\geqslant 0}$ *est une injection de $\boldsymbol{R}$-modules $\boldsymbol{M} \to \mathbf{Chy}(\boldsymbol{M})$ induisant une injection de $\boldsymbol{R}$-modules $\boldsymbol{I}$-adiquement séparés*

$$\iota(\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M}_\sigma \xrightarrow[\subseteq]{} \widehat{\boldsymbol{M}}$$

b) *Un morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules $\varphi : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$, induit par son action terme à terme un morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules entre les modules des suites $\varphi^{\mathbb{N}} : \boldsymbol{M}_1^{\mathbb{N}} \to \boldsymbol{M}_2^{\mathbb{N}}$ induisant un morphisme $\widehat{\varphi} : \widehat{\boldsymbol{M}}_1 \to \widehat{\boldsymbol{M}}_2$. On a un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{M}_{1,\sigma} \arrow[r, "\iota(\boldsymbol{M}_1)"] \arrow[d, "\varphi_\sigma"'] & \widehat{\boldsymbol{M}}_{1,\sigma} \arrow[d, "\widehat{\varphi}"'] \\ \boldsymbol{M}_{2,\sigma} \arrow[r, "\iota(\boldsymbol{M}_2)"] & \widehat{\boldsymbol{M}}_{2,\sigma} \end{tikzcd}$$

De plus, si $\varphi : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$ est surjectif, le morphisme $\widehat{\varphi} : \widehat{\boldsymbol{M}}_1 \to \widehat{\boldsymbol{M}}_2$ est surjectif. En particulier, un module $\boldsymbol{I}$-adiquement complet et séparé est le quotient du complété (séparé) $\boldsymbol{I}$-adique d'un $\boldsymbol{R}$-module libre.

c) *Si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre, la multiplication terme à terme est une opération interne dans les modules $\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{A})$, $\mathbf{Cv}(\boldsymbol{A})$ et $\mathbf{Chy}(\boldsymbol{A})$ qui fait de $\mathbf{Cv}(\boldsymbol{A}) \subseteq \mathbf{Chy}(\boldsymbol{A})$ une inclusion d'anneaux dont $\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{A})$ est un idéal. L'application canonique* (a) *induit une injection de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{I}$-adiquement séparées*

$$\boxed{\iota(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A}_\sigma \longrightarrow \widehat{\boldsymbol{A}} := \frac{\mathbf{Chy}(\boldsymbol{A})}{\mathbf{Cv}_0(\boldsymbol{A})}}$$

d) *Un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\varphi : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$, induit par son action terme à terme un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres entre les algèbres de suites $\varphi^{\mathbb{N}} : \boldsymbol{A}_1^{\mathbb{N}} \to \boldsymbol{A}_2^{\mathbb{N}}$ induisant un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\widehat{\varphi} : \widehat{\boldsymbol{A}}_1 \to \widehat{\boldsymbol{A}}_2$. On a un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A}_{1,\sigma} \arrow[r, "\iota(\boldsymbol{A}_1)"] \arrow[d, "\varphi_\sigma"'] & \widehat{\boldsymbol{A}}_{1,\sigma} \arrow[d, "\widehat{\varphi}"'] \\ \boldsymbol{A}_{2,\sigma} \arrow[r, "\iota(\boldsymbol{A}_2)"] & \widehat{\boldsymbol{A}}_{2,\sigma} \end{tikzcd}$$

De plus, si $\varphi : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$ est surjectif, le morphisme $\widehat{\varphi} : \widehat{\boldsymbol{A}}_1 \to \widehat{\boldsymbol{A}}_2$ est surjectif. En particulier, une algèbre $\boldsymbol{I}$-adiquement complète et séparée est le quotient du complété (séparé) $\boldsymbol{I}$-adique $\boldsymbol{R}[\overline{X}]^\frown$ d'une algèbre de polynômes $\boldsymbol{R}[\overline{X}]$.

Indication. Dans (c) il faut vérifier que le produit de deux suites de Cauchy est une suite de Cauchy et que les suites qui convergent vers zéro constituent un idéal de $\widehat{\boldsymbol{A}}$. Or, si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ sont des suites de Cauchy de $\boldsymbol{A}$, on a

$$|x_n y_n| \leqslant |x_n||y_n| \quad \text{et} \quad \begin{cases} |x_{n+1}y_{n+1} - x_n y_n| = |(x_{n+1}y_{n+1} - x_{n+1}y_n) + (x_{n+1}y_n - x_n y_n)| \\ \qquad \leqslant |x_{n+1}||y_{n+1} - y_n| + |x_{n+1} - x_n||y_n| \end{cases}$$

et les vérifications sont immédiates puisque $|\_| \leqslant 1$. ∎

1.4.13. Corollaire. *La correspondance* $\widehat{(\_)} : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{R})$ *(resp.* $\widehat{(\_)} : \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$*)*

$$\boldsymbol{M} \rightsquigarrow \widehat{\boldsymbol{M}}, \qquad (\varphi : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2) \rightsquigarrow (\widehat{\varphi} : \widehat{\boldsymbol{M}}_1 \to \widehat{\boldsymbol{M}}_2)$$

est fonctorielle covariante ; c'est le foncteur de « complétion ($\boldsymbol{I}$-adique) formelle ».

L'inclusion $\iota(\_) : (\_)_\sigma \subseteq \widehat{(\_)}$ est fonctorielle.

1.4.14. Exercice. On suppose $\boldsymbol{R}$ noethérien. Soit $\varphi : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{M}$ une injection de $\boldsymbol{R}$-modules où $\boldsymbol{M}$ est supposé de type fini. On munit $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{M}$ de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy (resp. convergente) de $\boldsymbol{N}$, si et seulement si $(\varphi(x_n))_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy (resp. convergente) de $\boldsymbol{M}$. En particulier l'application $\widehat{\varphi} : \widehat{\boldsymbol{N}} \to \widehat{\boldsymbol{M}}$, $(x_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (\varphi(x_n))_{n\geqslant 0}$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules **injectif**. (*Indication :* 1.2.1-(h)-(3).)

1.4.15. Séries de Cauchy. Par la notion de « *série* », on étend la notion de « *somme finie* » à celle de « *somme dénombrable ordonnée* ». L'expression « *série de terme général* x_n », notée $\sum_{n\geqslant 0} x_n$, est un raccourci pour « *suite des sommes partielles* » $(s_n)_{n\geqslant 0}$ avec $s_n = x_0 + \cdots + x_n$. Cette correspondance entre « *série* » et « *suite* » est clairement bijective dans un groupe abélien. La série est dite « *de Cauchy* » lorsque la suite correspondante l'est. Le critère de Cauchy pour les suites d'un un espace non archimédien (1.4.1) se traduit en un critère encore plus simple pour les séries. En effet,

$$\boxed{\text{« La série } \sum_{n\geqslant 0} x_n \text{ est de Cauchy, si et seulement si } |x_n| \text{ tend vers zéro. »}}$$

Une série est dite « *convergente* (*de somme* s) » lorsque la suite des sommes partielles est convergente (de limite s). Une série convergente est toujours de Cauchy, la réciproque étant la caractéristique des espaces dits « *complets* ». La proposition suivante est la traduction en termes de séries de la définition de « *complété* (*séparé*) » 1.4.11.

1.4.16. Proposition. *Pour tout* $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$, *le complété (séparé)* $\boldsymbol{I}$-adique $\widehat{\boldsymbol{M}}$ *est le module des séries de Cauchy de* $\boldsymbol{M}$ *modulo les séries qui convergent vers* 0.

1.4.17. Sommabilité et critère de Cauchy pour les familles. Les notions de *série convergente* et de *séries de Cauchy* admettent une formulation indépendante de l'ordre et du cardinal de l'ensemble des termes de la série. Soient $\mathfrak{A}$ un ensemble et $\{x_\mathfrak{a}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ une famille d'éléments d'un espace valué,

- La famille $\{x_\mathfrak{a}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ est « *sommable de somme* s » lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie $F(\varepsilon) \subseteq \mathfrak{A}$ telle que pour toute partie finie $F' \supseteq F(\varepsilon)$ on ait $\big|s - \sum_{\mathfrak{a}\in F'} x_\mathfrak{a}\big| < \varepsilon$.
- La famille $\{x_\mathfrak{a}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ « *est de Cauchy* » lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie $F(\varepsilon) \subseteq \mathfrak{A}$ telle que pour toute partie finie $\boldsymbol{K} \subseteq \mathfrak{A}$ vérifiant $\boldsymbol{K} \cap F(\varepsilon) = \varnothing$ on ait $\big|\sum_{\mathfrak{a}\in \boldsymbol{K}} x_\mathfrak{a}\big| < \varepsilon$.

Bien évidemment, une famille sommable est de Cauchy. La proposition suivante résume des propriétés très utiles de ces notions lorsque $\mathfrak{A}$ est dénombrable.

1.4.18. Proposition

a) *Soit* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille sommable de somme* s *(resp. de Cauchy). Pour toute partition* $\mathbb{N} = \coprod_\ell \boldsymbol{F}_\ell$ *où* $\boldsymbol{F}_\ell$ *est fini, la série* $\sum_\ell s_\ell$ *avec* $s_\ell := \sum_{i\in \boldsymbol{F}_\ell} x_i$ *converge vers* s *(resp. est de Cauchy).*

b) *Soit* $\boldsymbol{M}$ *une* $\boldsymbol{R}$-*module muni de la topologie* $\boldsymbol{I}$-*adique. Pour* $\ell \in \mathbb{N}$, *soit* $\mathcal{F}_\ell = \{x_{\ell,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille de Cauchy avec* $x_{\ell,n} \in \boldsymbol{I}^\ell \boldsymbol{M}$. *Alors, la famille* $\bigcup_\ell \mathcal{F}_\ell = \{x_{\ell,n}\}_{\ell,n}$ *est de Cauchy.*

Indication

a) Pour $\epsilon > 0$ donné, il existe N_ϵ tel que pour toute partie finie $\boldsymbol{F} \supseteq [\![0, N_\epsilon]\!]$ on a $\big|s - \sum_{n\in \boldsymbol{F}_\epsilon} x_n\big| < \epsilon$. Or, si m est assez grand, on a $\boldsymbol{F}_1 \amalg \cdots \amalg \boldsymbol{F}_m \supseteq [\![0, N_\epsilon]\!]$ et alors

$$\big|s - \sum\nolimits_{\ell=0}^{m} s_\ell\big| = \big|s - \sum\nolimits_{n\in \boldsymbol{F}_1 \amalg\cdots\amalg \boldsymbol{F}_m} x_n\big| < \epsilon\,.$$

b) Soit $\epsilon > 0$. Comme les termes de $\mathcal{F}_\ell$ appartiennent à $\boldsymbol{I}^\ell\boldsymbol{M}$, il existe L tel que $|x_{\ell,n}| < \epsilon$ pour tout couple (ℓ, n) tel que $\ell > L$. Par conséquent, $\big|\sum_{\ell,n} x_{\ell,n}\big| < \epsilon$ pour **toute somme finie** avec $\ell > L$, par non archimédiannité. D'autre part, pour chaque $\ell \leqslant L$, il existe N_ℓ tel que $\big|\sum_{\ell,n} x_{\ell,n}\big| < \epsilon$ pour **toute somme finie** avec $n > N_\ell$, aussi par non archimédiannité. Ainsi, si l'on pose $N := \sup\{N_\ell \mid \ell \leqslant L\}$ on a bien $|\sum_{(\ell,n)\in \boldsymbol{K}} x_{\ell,n}| < \epsilon$, pour toute partie finie $\boldsymbol{K}$ disjointe de $[\![0, L]\!] \times [\![0, N]\!]$. ∎

1.4.19. Exercice. Une série est $\sum_n x_n$ est « *absolument convergente* » lorsque la série de réels positifs $\sum_n |x_n|$ est convergente. Prouver que la famille $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des termes d'une série absolument convergente $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ est sommable. Donner un contrexemple à l'affirmation réciproque.

1.4.20. Exercice. Montrer qu'une sous-famille d'une famille de Cauchy est de Cauchy mais qu'une sous-famille d'une famille convergente n'est pas en général convergente (bien qu'elle soit de Cauchy et donc converge dans un espace complet). Conclure que dans un espace complet l'assertion 1.4.18-(a) est vraie quelle que soit la partition de $\mathbb{N}$.

1.4.21. Proposition. *Dans un espace non archimédien il y a équivalence entre série convergente (resp. de Cauchy) et famille dénombrable sommable (resp. de Cauchy). Plus précisément, la famille* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable (resp. de Cauchy) si et seulement si la série* $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ *est convergente (resp. de Cauchy).*

Démonstration. Soit $z=\sum_{n\geqslant 0} x_n$. Pour $\epsilon>0$ donné, il existe N_ϵ tel que

$$\Big|z-\sum\nolimits_{n=0}^{N_\epsilon} x_n\Big|<\epsilon \quad \text{et} \quad |x_\ell|<\epsilon\,, \quad \forall \ell \geqslant N_\epsilon\,.$$

Mais alors, si $\boldsymbol{F}\subseteq\mathbb{N}$ est une partie finie telle que $\boldsymbol{F}\supseteq [\![0,N_\epsilon]\!]$, on a

$$\Big|z-\sum\nolimits_{n\in\boldsymbol{F}} x_n\Big| \leqslant \sup\Big(\Big|z-\sum\nolimits_{n=0}^{N_\epsilon} x_n\Big|, |x_\ell| \text{ avec } \ell\in\boldsymbol{F}\backslash[\![0,N_\epsilon]\!]\Big)<\epsilon\,,$$

grâce à la non archimédiannité de $|\_|$. Le cas de séries de Cauchy est laissé en exercice. ∎

On en déduit le résultat utile suivant, corollaire aussi de la proposition 1.4.18, qui justifie dans son assertion (c) la terminologie d'espace « *complet* » introduite dans 1.4.11, en ce sens que le foncteur de complétion formelle laisse invariants les espaces complets.

1.4.22. Corollaire

a) *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ *une série convergente de somme* s *dans un* $\boldsymbol{R}$*-module* $\boldsymbol{M}$ *muni de la topologie* $\boldsymbol{I}$*-adique. Soit* $\amalg_{\ell\in\mathbb{N}} F_\ell$ *une partition de* $\mathbb{N}$ *en parties finies et posons* $s_\ell := \sum_{n\in F_\ell} x_n$. *Alors, la série* $\sum_{\ell\geqslant 0} s_\ell$ *est convergente de même somme* s.

b) *Les éléments de* $\widehat{\boldsymbol{M}}$ *sont les sommes des séries de la forme*

$$\sum\nolimits_{n\geqslant 0} x_n \text{ avec } \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(x_n)\in\{n,+\infty\}\,.$$

De plus, si l'on choisi pour chaque $n\in\mathbb{N}$ *une famille* $\mathcal{R}(n)\subseteq \boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M}$ *de représentants dans* $\boldsymbol{M}$ *des classes de* $\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^{n+1}\boldsymbol{M}$, *un élément* $z\in\widehat{\boldsymbol{M}}$ *s'exprime d'une et une seule manière comme somme de série de la forme*

$$\sum\nolimits_{n\geqslant 0} x_n \text{ avec } x_n\in\mathcal{R}(n)\cup\{0\}\,.$$

c) *Pour tout* $\boldsymbol{R}$*-module* $\boldsymbol{M}$ *le morphisme canonique* $\iota(\widehat{\boldsymbol{M}}):\widehat{\boldsymbol{M}}\to\widehat{\widehat{\boldsymbol{M}}}$ (1.4.12-(a)) *est bijectif.*

Indication

a) Par 1.4.21 et 1.4.18-(a).

b) Soit $z_0=\sum_{n\geqslant 0} x_n\in\widehat{\boldsymbol{M}}$ non nul, il existe alors n_0 tel que pour $s_0=x_0+\cdots+x_{n_0}$ on ait $|s_0|>|x_{n_0+r}|$ pour tout $r>0$. Par ultramétricité on a $|z_0|=|s_0|$ (*cf.* 1.3.3, 1.4.4) et $|s_0|>|z_0-s_0|$. On pose $z_1=z_0-s_0$. Alors, ou bien $0=z_1$, ou bien $0\neq z_1=\sum_{n>n_0} x_n$, auquel cas, l'itération du procédé donne une somme partielle s_1 vérifiant $|z_1|=|s_1|$ et $|s_1|>|z_1-s_1|$, soit

$$|z_0|=|s_0|>|s_1|>|z_0-s_0-s_1|\,.$$

Ce procédé s'arrête après un nombre fini d'itérations auquel cas z_0 s'exprime par une somme finie vérifiant la condition demandée, ou bien produit la série $\sum_n s_n$ de même somme z_0 d'après (a) et vérifiant $|s_n|>|s_{n+1}|$ pour tout n, ce qui démontre l'existence de telles séries. La fin de la preuve est aux soins du lecteur.

c) L'application $\iota(\widehat{\boldsymbol{M}})$ est injective puisque $\widehat{\boldsymbol{M}}$ est séparé (1.4.12-(a)). Pour la surjectivité on se donne une série de Cauchy $\sum_{\ell\geqslant 0} z_\ell$ de $\widehat{\boldsymbol{M}}$ avec $z_\ell\in\boldsymbol{I}^\ell\widehat{\boldsymbol{M}}$, possible d'après (b) ; le terme z_ℓ est une série de Cauchy $\sum_n x_{\ell,n}$ de $\boldsymbol{I}^\ell\boldsymbol{M}$, et la famille $\{x_{\ell,n}\}_{\ell,n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy d'après 1.4.18-(b). On a donc,

$$\sum\nolimits_{\ell\geqslant 0} z_\ell=\sum\nolimits_{n\geqslant 0} x_{\varphi_n}$$

pour toute bijection $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (1.4.21). ∎

1.4.23. Corollaire

a) *Les éléments de l'anneau* $\boldsymbol{R}[\overline{X}]^\frown$, *complété (séparé)* $\boldsymbol{I}$*-adique de l'anneau des polynômes* $\boldsymbol{R}[\overline{X}] = \boldsymbol{R}[\{X_{\mathfrak{a}} \mid \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}\}]$, *s'écrivent d'une et d'une unique manière comme séries de la forme*

$$\sum\nolimits_{J \in \bigoplus_{\mathfrak{A}} \mathbb{N}} a_J X^J \;,\; \textit{avec } a_J \in \widehat{\boldsymbol{R}} \textit{ t.q. } \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J) \rightsquigarrow \infty, \textit{ lorsque } |J| \rightsquigarrow \infty \;(^5)\,.$$

b) *Soit* $\boldsymbol{A}$ *une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre de système de générateurs algébriques* $\{\xi_{\mathfrak{a}}\}_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}}$. *Les éléments de* $\widehat{\boldsymbol{A}}$ *s'écrivent (mais pas nécessairement de manière unique!) comme séries de la forme*

$$\sum\nolimits_{J \in \bigoplus_{\mathfrak{A}} \mathbb{N}} a_J \,\xi^J \;,\; \textit{avec } a_J \in \widehat{\boldsymbol{R}} \textit{ t.q. } \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J) \rightsquigarrow \infty, \textit{ lorsque } |J| \rightsquigarrow \infty\,.$$

Démonstration. D'après 1.4.22-(b) un élément $z \in \boldsymbol{R}[\overline{X}]^\frown$ est la somme s'une série de polynômes $\sum_{n \geqslant 0} P_n$ où $P_n \in \boldsymbol{I}^n \boldsymbol{R}[\overline{X}]$ est une somme finie de monômes $P_n = \sum a_{n,J} X^J$ avec $a_{n,J} \in \boldsymbol{I}^n$. On remarque alors que la famille $\{a_{n,J} X^J\}_{(n,J) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^r}$ est de Cauchy puisque pour $\epsilon > 0$ donné, il existe n_0 tel que $|a_{n,J}| < \epsilon$ si $n > n_0$ et si $n \leqslant n_0$ il n'y a qu'un nombre fini de monômes X^J dont les coefficients $a_{n,J}$ sont non nuls, à savoir les monômes dans les polynômes $P_0, \ldots, P_{n_0}$. Par conséquent, si

$$\boldsymbol{K} \cap \Big([\![0, n_0]\!] \times \big\{ J \mid |J| > \sup\{\deg(P_0), \ldots, \deg(P_{n_0})\} \big\} \Big) = \varnothing$$

$|\sum_{(n,J) \in \boldsymbol{K}} a_{n,J} X^J| < \epsilon$. Les familles $\{a_{n,J} X^J\}_{n,J}$ et $\{P_n\}_n$ sont donc sommables et de même somme $z \in \boldsymbol{R}[\overline{X}]^\frown$ (1.4.18). De plus, pour chaque J donné, la famille $\{a_{n,J} X^J\}_n$ est une famille de Cauchy de $\boldsymbol{R}$ (1.4.20) et représente donc un élément a_J de $\widehat{\boldsymbol{R}}$. Il est alors aisé de vérifier que la famille $\{a_J X^J\}_{J \in \mathbb{N}^r}$ est de Cauchy dans $\boldsymbol{R}[\overline{X}]^\frown$ de somme z (laissé en exercice de même que l'unicité des décompositions). L'assertion (b) résulte de (a) modulo 1.4.12-(d). ∎

1.4.24. Exercice. Montrer qu'un élément $z \in \boldsymbol{R}[X, 1/X]^\frown$ s'exprime sous la forme

$$z = \Big(\sum\nolimits_{n \geqslant 0} a_n X^n \Big) + \Big(\sum\nolimits_{n \geqslant 1} a_n X^{-n} \Big)$$

et que cette écriture est unique. Une telle série est appelée «*série de Laurent*».

1.4.25. Exercice. Montrer qu'une algèbre quotient séparé d'une algèbre $\boldsymbol{I}$-adiquement complète est complète séparée

1.5 Propriétés générales de la complétion $\boldsymbol{I}$-adique formelle

Le théorème suivant donne une liste de propriétés de la complétion formelle que nous retrouverons plus tard dans un autre type de complétion, la complétion faible ou †-adique (4.3.1). Ces propriétés jouent un rôle très important dans la théorie de la cohomologie de de Rham.

1.5.1. Théorème. *On suppose l'anneau* $\boldsymbol{R}$ *noethérien.*

a) *Les éléments de* $\boldsymbol{I}^r \widehat{\boldsymbol{M}}$ *sont les séries de Cauchy de* $\boldsymbol{M}$ *à termes dans* $\boldsymbol{I}^r \boldsymbol{M}$.

b) *Les morphismes naturels suivants sont bijectifs*

$$\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{I}^r \boldsymbol{M}} \to \mathrm{coker}\Big(\widehat{\boldsymbol{I}^r \boldsymbol{M}} \to \widehat{\boldsymbol{M}} \Big) \to \frac{\widehat{\boldsymbol{M}}}{\boldsymbol{I}^r \widehat{\boldsymbol{M}}}\,.$$

En particulier $\mathbf{Gr}^*(\boldsymbol{M}) = \mathbf{Gr}^*(\widehat{\boldsymbol{M}})$ (⁶).

[5] Pour un multi-indice $J \in \bigoplus_{\mathfrak{A}} \mathbb{N}$, on note $X^J = X_1^{n_1} \cdots X_r^{n_r}$, puis $|J| = n_1 + \cdots + n_r$. La notation $\sum_{J \in \bigoplus_{\mathfrak{A}} \mathbb{N}}$ fait alors référence à la somme d'une famille sommable d'ensemble d'indices $\bigoplus_{\mathfrak{A}} \mathbb{N}$.

[6] Une «*filtration (décroissante)*» d'un $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ est la donnée d'une famille de sous-modules $\mathcal{F} := \{\boldsymbol{M}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ vé-

c) *L'application* $\mathrm{id} : \big(\widehat{\boldsymbol{M}}; |\_|\big) \to \big(\widehat{\boldsymbol{M}}; \|\_\|\big)$ *de* 1.4.8 *(p. 8) est une isométrie*

d) *On a un isomorphisme naturel*
$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{M}} \xrightarrow[\simeq]{} \varprojlim_r \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}}}$$

e) *Si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre noethérienne et si $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{A}$-module, on a :*
- $\widehat{({}_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{M})}$ *: le complété $\boldsymbol{I}$-adique formel de $\boldsymbol{M}$ en tant que $\boldsymbol{R}$-module,*
- $\widehat{({}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M})}$ *: le complété $\boldsymbol{IA}$-adique formel de $\boldsymbol{M}$ en tant que $\boldsymbol{A}$-module.*

Le morphisme naturel $\widehat{({}_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{M})} \to \widehat{({}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M})}$ est bijectif.

f) *Si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre noethérienne, $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est noethérienne.* (7)
$$\boxed{\mathbf{Alg}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R}) \subseteq \mathbf{Alg}_{\mathrm{noet.}}(\boldsymbol{R}) \xrightarrow[\rightsquigarrow]{\widehat{(\_)}} \mathbf{Alg}_{\mathrm{noet.}}(\widehat{\boldsymbol{R}})}$$

g) *Si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre, $\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}} \subseteq \mathrm{Rad}(\widehat{\boldsymbol{A}})$, i.e. $z \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ est inversible si et seulement si $\bar{z} \in \widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}}$ est inversible. De plus, si $\boldsymbol{A}$ est noethérienne, $(\widehat{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}})$ est de Zariski.*

h) *Si $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{R}$-module de type fini, le morphisme canonique $\widehat{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M} \to \widehat{\boldsymbol{M}}$ est bijectif. En particulier, $\widehat{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{M} = \widehat{\boldsymbol{M}}$ et*
$$\boxed{\widehat{(\_)} : \mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}(\widehat{\boldsymbol{R}})}$$

i) *Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre et soient $f, g \in \boldsymbol{A}$ tels que $D(\bar{g}) \subseteq D(\bar{f})$ dans $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{IA})$, il existe alors un et un unique morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres $\widehat{\rho}_{g,f} : \widehat{\boldsymbol{A}_f} \to \widehat{\boldsymbol{A}_g}$. De plus, si $\nu_f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_f$ et $\nu_g : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_g$ sont les morphismes de localisation, on a $\widehat{\nu_g} = \widehat{\rho}_{g,f} \circ \widehat{\nu_f}$.*

j) *Si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini, le morphisme naturel $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{R}}$ induit un* ***isomorphisme***
$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{A}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow[\simeq]{} \big(\Omega^*_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{R}}\big)_\sigma}$$

Indications

a) Il est clair que tout élément de $\boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{M}}$ se réalise comme série de Cauchy à termes dans $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$. Réciproquement, si $\{t_1, \ldots, t_\ell\}$ est un système de générateurs de $\boldsymbol{I}^r$, un élément $y \in \boldsymbol{I}^{r+t}\boldsymbol{M}$ s'écrit $\sum_{i=1}^{\ell} t_i\, y_i$ avec $y_i \in \boldsymbol{I}^t\boldsymbol{M}$ et donc $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(y_i) \geqslant \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(y) - r$. Par conséquent, une série de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ avec $x_n \in \boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$ s'écrit aussi
$$\sum\nolimits_{n\geqslant 0}\Big(\sum\nolimits_{i=1}^{\ell} t_i\, x_{n,i}\Big) = \sum\nolimits_{i=1}^{\ell} t_i\Big(\sum\nolimits_{n\geqslant 0} x_{n,i}\Big)$$
où $\sum_{n\geqslant 0} x_{n,i}$ est de Cauchy puisque $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(x_{n,i}) \geqslant (\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(x_n) - r) \rightsquigarrow +\infty$, donc $\sum_{n\geqslant 0} x_n \in \boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{M}}$.

b) L'assertion (a) montre l'égalité $\widehat{\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{M}}$ qui donne immédiatement la bijectivité de la deuxième flèche et l'injectivité de la première. Enfin, la surjectivité de $\boldsymbol{M} \to \widehat{\boldsymbol{M}}/\boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{M}}$ est claire puisque d'après (a) une série de Cauchy modulo $\boldsymbol{I}^r$ s'exprime comme somme finie d'éléments de $\boldsymbol{M}$ donc comme un élément de $\boldsymbol{M}$.

---

rifiant $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0$ et $\boldsymbol{M}_i \supseteq \boldsymbol{M}_{i+1}$. Un module filtré se note aussi $\boldsymbol{M}_*$. La filtration est dite « *séparée* » si $\bigcap_i \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{0}$. Dans le cas des topologie $\boldsymbol{I}$-adiques ces notions s'appliquent à la filtration $\{\boldsymbol{I}^i\boldsymbol{M}\}_{i\in\mathbb{N}}$. On appelle « *module gradué associé au module filtré $\boldsymbol{M}_*$* » la somme directe $\mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{M}) := \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \boldsymbol{M}_i/\boldsymbol{M}_{i+1}$. Un « *morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules filtrés $\varphi_* : \boldsymbol{M}_* \to \boldsymbol{N}_*$* » est un morphisme $\varphi : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ qui respecte la filtration, *i.e.* $\varphi(\boldsymbol{M}_i) \subseteq \boldsymbol{N}_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Un tel morphisme induit un morphisme $\mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\varphi) : \boldsymbol{G}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{M}) \to \mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{N})$. Un « *anneau filtré* » est un $\mathbb{Z}$-module filtré par une famille de parties (idéaux) $\{\boldsymbol{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j \subseteq \boldsymbol{A}_{i+j}$. Si $\boldsymbol{A}_*$ est un anneau filtré le module $\mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{A})$ est muni d'une structure d'anneau en remarquant que si $\alpha \in \boldsymbol{A}_i/\boldsymbol{A}_{i+1}$ et $\beta \in \boldsymbol{A}_j/\boldsymbol{A}_{j+1}$ l'élément $ab \in \boldsymbol{A}_{i+j}/\boldsymbol{A}_{i+j+1}$ est indépendant des représentants $a, b \in \boldsymbol{A}$ des classes α, β, on pose donc $\alpha\cdot\beta := \overline{ab}$, et $\big(\mathbf{Gr}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{A}), 0, \bar{1} \in \boldsymbol{A}_0/\boldsymbol{A}_1, +, \cdot\big)$ est un anneau gradué, c'est « *l'anneau gradué associé à l'anneau filtré $\boldsymbol{A}_*$* ».

[7] Cette assertion ne sera pas tout à fait vérifiée dans la complétion faible !

c) La proposition 1.4.8 a déjà donné l'inégalité $\|\_\| \leqslant |\_|$, autrement dit $\mathbb{B}_{|\_|}(0;r) \subseteq \mathbb{B}_{\|\_\|}(0;r)$. Réciproquement, un élément **non nul** w de $\mathbb{B}_{\|\_\|}(0;r) \subseteq \widehat{\boldsymbol{M}}$ se représente par une suite de Cauchy $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de $\boldsymbol{M}$ qui ne converge pas vers zéro, et donc, telle que la suite $(|x_n|)_{n\geqslant 0}$ est stationnaire (1.4.4) et même **constante** car si $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy, la différence $(y_n)_{n\geqslant 0} - (y_{n+N})_{n\geqslant 0}$ est une suite qui converge vers zéro. L'élément w se représente donc par une suite de Cauchy à termes dans $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$, mais alors $w \in \boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{M}} = \mathbb{B}_{|\_|}(0;r)$ d'après (a). Par conséquent $\mathbb{B}_{|\_|}(0;r) = \mathbb{B}_{\|\_\|}(0;r)$.

d) L'assertion est équivalente à 1.4.22-(b). *Autre preuve :* — Le noyau du morphisme est $\boldsymbol{0} = \bigcap_r \boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{M}}$ par (b) et (c) (*cf.* aussi 1.4.8) et la surjectivité se vérifie manuellement.

e) Par (d).

f) L'assertion (b) affirme que les anneaux $\boldsymbol{R}$ et $\widehat{\boldsymbol{R}}$, filtrés par la suite décroissante des puissance successives de $\boldsymbol{I}$, ont les mêmes graduées associés. On conclut alors à l'aide de deux résultats classiques ([8]), "*l'anneau gradué associé à un anneau noethérien est noethérien*", et "*un anneau complet et séparé est noethérien si son gradué l'est*".

g) Il suffit de vérifier que si $z \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ et $y \in \boldsymbol{I}$, l'élément $1 - yz$ est inversible. Or, la série $\sum_{n\geqslant 0}(yz)^n$ converge dans $\widehat{\boldsymbol{A}}$ (car $\widehat{\widehat{\boldsymbol{A}}} = \widehat{\boldsymbol{A}}$) et $(1-yz)\big(\sum_{n\geqslant 0}(yz)^n\big) = 1$. Ensuite, $\bar{z} \in \widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}}$ est inversible, si et seulement si, il existe $w \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ tel que $wz \in 1 + \boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}}$; or, nous avons vu que les éléments de $1 + \boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}}$ sont tous inversibles. Enfin, si $\boldsymbol{A}$ est noethérien, $\widehat{\boldsymbol{A}}$ l'est aussi (par (f)), et $(\widehat{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}})$ est bien de Zariski.

h) On procède un peu comme dans (a). Si $\{m_1, \ldots, m_r\}$ est un système de générateurs de $\boldsymbol{M}$, toute série de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^r \big(\sum_{n\geqslant_0} t_{i,n}\big)x_i$ avec $\big(\sum_{n\geqslant_0} t_{i,n}\big) \in \widehat{\boldsymbol{R}}$, et l'application $\widehat{\boldsymbol{R}} \otimes \boldsymbol{M} \to \widehat{\boldsymbol{M}}$ est bien surjective. Ensuite, le $\widehat{\boldsymbol{R}}$-module $\widehat{\boldsymbol{R}} \otimes \boldsymbol{M}$ est séparé puisque de type fini et que $\widehat{\boldsymbol{R}}$ est de Zariski (1.2.1-(j)), mais alors et le morphisme $\widehat{\boldsymbol{R}} \otimes \boldsymbol{M} \to \widehat{\boldsymbol{M}}$ est injectif s'il en est ainsi de son gradué, ce qui est évident.

i) L'inclusion $D(\bar{f}) \supseteq D(\bar{g})$ équivaut à $\sqrt{(\bar{f})} \supseteq \sqrt{(\bar{g})}$ de sorte que $\bar{f}$ est inversible dans $(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{A})_{\bar{g}}$. L'image de f par $\nu_g : \boldsymbol{A} \to \widehat{\boldsymbol{A}_g}$ est donc inversible (*cf.* (g)) d'où le morphisme induit $\rho_{g,f} : \boldsymbol{A}_f \to \widehat{\boldsymbol{A}_g}$ de complétion $\widehat{\rho}_{g,f}$.

j) D'après (e), le séparé $\boldsymbol{I}$-adique d'un $\widehat{\boldsymbol{A}}$-module coïncide avec le séparé $\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{A}}$-adique. D'autre part, comme $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini, $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est un $\boldsymbol{A}$-module de type fini et donc $\widehat{\boldsymbol{A}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^k_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est un $\widehat{\boldsymbol{A}}$-module de type fini, $\boldsymbol{I}$-adiquement séparé en plus, puisque $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est de Zariski (1.2.1-(j)-(1)). Ainsi, l'assertion résultera, moyennant le critère de séparabilité 1.2.3, de vérifier que l'application

$$\operatorname{Hom}_{\widehat{\boldsymbol{A}}}(\Omega^k_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{S}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\widehat{\boldsymbol{A}}}(\widehat{\boldsymbol{A}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^k_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{S}) \tag{$*$}$$

induite par le morphisme canonique $\widehat{\boldsymbol{A}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{R}}$ ([9]), est bijective pour tout $\widehat{\boldsymbol{A}}$-module $\boldsymbol{I}$-adiquement séparé $\boldsymbol{S}$.

Lorsque $k = 1$, la propriété d'adjonction pour le module des différentielles relatives traduit la question de bijectivité de $(*)$ en celle du morphisme canonique

$$\alpha : \operatorname{Der}_{\boldsymbol{R}}(\widehat{\boldsymbol{A}}; \boldsymbol{S}) \longrightarrow \operatorname{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{S})$$

induit par $\iota(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A} \to \widehat{\boldsymbol{A}}$.

Notons $\{X_1, \ldots, X_n\}$ un système de générateurs de $\boldsymbol{A}$ en tant que $\boldsymbol{R}$-algèbre. Un élément de $\widehat{\boldsymbol{A}}$ s'écrit alors sous la forme $\sum_{n\geqslant 0} P_n(X_1, \ldots, X_n)$ avec $P_n \in \boldsymbol{I}^n\boldsymbol{R}[\overline{X}]$ (*cf.* 1.4.22-(b)). Ainsi, pour toute

[8] Voir [B$_2$] ch. III § **2.10** p. 183 et aussi [J] § **7.17** p. 456.

[9] Voir les notes du cours "*Cohomologie de de Rham dans la catégorie des Schémas*" § **1.5**.

$\boldsymbol{R}$-dérivation $D : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{S}$, on a “formellement”

$$\begin{aligned} D\Big(\sum\nolimits_{n\geqslant 0} P_n(X_1,\ldots,X_n)\Big) &= \sum\nolimits_{n\geqslant 0} D\big(P_n(X_1,\ldots,X_n)\big) \\ &= \sum\nolimits_{n\geqslant 0}\sum\nolimits_{i=1}^{r} \frac{\partial P_n}{\partial X_i}(X_1,\ldots,X_n)\, D(X_i) \\ &= \sum\nolimits_{i=1}^{r}\Big(\sum\nolimits_{n\geqslant 0} \frac{\partial P_n}{\partial X_i}(X_1,\ldots,X_n)\Big)\, D(X_i) \end{aligned} \qquad (\diamond)$$

où chaque terme entre parenthèses appartient bien à $\widehat{\boldsymbol{A}}$, *i.e.* est une série de Cauchy de $\boldsymbol{A}$.

L'expression $(\diamond)$ définit bien une application $\tilde{D} : \widehat{\boldsymbol{A}} \to \boldsymbol{S}$ puisque $\sum_{n\geqslant 0} P_n = 0$, si et seulement si, les sommes partielles $\sum_{n\geqslant 0}^{r} P_n$ convergent vers 0, et cette dernière condition est évidemment préservée dans les suites des dérivées partielles $\sum_{n\geqslant 0}^{r} \frac{\partial P_n}{\partial X_i}$. On vérifie ensuite que $\tilde{D}$ est $\boldsymbol{R}$-linéaire et que $\tilde{D}(z_1x_2) = z_1\tilde{D}(z_2) + z_2\tilde{D}(z_1)$. On a ainsi défini une application $\boldsymbol{R}$-linéaire

$$\beta : \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{S}) \to \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\widehat{\boldsymbol{A}};\boldsymbol{S}), \quad \beta(D) := \tilde{D}\,.$$

La composée $\alpha\circ\beta$ est clairement l'identité, et α sera bijective si et seulement si $\beta\circ\alpha$ est injective. Or, pour $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\widehat{\boldsymbol{A}};\boldsymbol{S})$ la différence $\Delta := \widetilde{\alpha(D)} - D$ est nulle sur l'image de $\boldsymbol{A}$ dans $\widehat{\boldsymbol{A}}$; cette image est dense dans $\widehat{\boldsymbol{A}}$, $\boldsymbol{S}$ est séparé et Δ est continue, donc $\Delta = 0$ et $\beta\circ\alpha$ est l'identité. Ce qui termine la preuve de la bijectivité du morphisme $\widehat{\boldsymbol{A}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega^1_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to (\Omega^1_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{R}})_\sigma$.

Lorsque $k > 1$, on a

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega^k_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} = \widehat{\boldsymbol{A}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\textstyle\bigwedge^k_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} = \bigwedge^k_{\widehat{\boldsymbol{A}}}\widehat{\boldsymbol{A}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} = \bigwedge^k_{\widehat{\boldsymbol{A}}}(\Omega_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{R}})_\sigma \to \Big(\bigwedge^k_{\widehat{\boldsymbol{A}}}\Omega_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{R}}\Big)_\sigma$$

et la flèche de droite est bijective par 1.2.3. ∎

1.5.2. Exercice. Expliquer pourquoi 1.5.1-(j) dit aussi que pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$ l'application naturelle $\widehat{\boldsymbol{A}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\simeq} (\Omega^*_{\widehat{\boldsymbol{A}}/\widehat{\boldsymbol{R}}})_\sigma$ est bijective. (Attention au '$\widehat{\boldsymbol{R}}$' du second membre)

1.5.3. Exercice. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre et $P \in \boldsymbol{A}[X]$. Donner des isomorphismes canoniques entre les algèbres

$$(\boldsymbol{A}[X]_P)\widehat{\ } \qquad (\widehat{\boldsymbol{A}}[X]_P)\widehat{\ } \qquad (((\widehat{\boldsymbol{A}}[X])\widehat{\ })_P)\widehat{\ }$$

1.5.4. Exercice. Soient $\boldsymbol{I}_1$ et $\boldsymbol{I}_2$ deux idéaux de $\boldsymbol{R}$ tels qu'il existe des entiers n_i avec $\boldsymbol{I}_1^{n_1} \subseteq \boldsymbol{I}_2$ et $\boldsymbol{I}_2^{n_2} \subseteq \boldsymbol{I}_1$. Montrer que pour tout $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ les complétions $\boldsymbol{I}_i$-adiques de $\boldsymbol{M}$ s'identifient canoniquement.

§ 2. Sur la topologie des limites projectives

2.1 Catégorie des systèmes projectifs

2.1.1. Systèmes projectifs. Dans ces notes un « *système projectif* » d'objets d'une catégorie $\mathfrak{C}$ est un foncteur contravariant de la catégorie $\mathbb{N}$ ([10]) vers la catégorie $\mathfrak{C}$. Ainsi, un système projectif dans $\mathfrak{C}$ est la donnée d'une famille d'objets $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et d'une famille de morphismes $\{\nu_n \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{X}_{n+1},\boldsymbol{X}_n)\}_n$ ce que l'on représente plus simplement par :

$$\cdots \xrightarrow{\nu_n} \boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\nu_{n-1}} \boldsymbol{X}_{n-1} \xrightarrow{\nu_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\nu_2} \boldsymbol{X}_2 \xrightarrow{\nu_1} \boldsymbol{X}_1 \xrightarrow{\nu_0} \boldsymbol{X}_0$$

Un tel système sera noté $\{\boldsymbol{X}_n,\nu_n\}_n$.

[10] La « *catégorie associée à un ensemble partiellement ordonné* $(\boldsymbol{E};\preccurlyeq)$ » est la catégorie dont les objets sont les éléments $x \in \boldsymbol{E}$ et où $\mathrm{Mor}(x_1,x_2)$ possède un unique élément lorsque $x_1 \preccurlyeq x_2$ et est vide autrement.

2.1.2. Morphismes de systèmes projectifs. Un « *morphisme de systèmes projectifs* » de $\{\boldsymbol{X}_n, \nu_n\}_n$ vers $\{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$ est une famille de morphismes $\{\varphi_n \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{Y}_n)\}_n$ telle que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\nu_n"] & \boldsymbol{X}_n \arrow[r, "\nu_{n-1}"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & \boldsymbol{X}_{n-1} \arrow[r, "\nu_{n-2}"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r, "\nu_2"] & \boldsymbol{X}_2 \arrow[r, "\nu_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \boldsymbol{X}_1 \arrow[r, "\nu_0"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & \boldsymbol{X}_0 \arrow[d, "\varphi_0"'] \\
\cdots \arrow[r, "\mu_n"] & \boldsymbol{Y}_n \arrow[r, "\mu_{n-1}"] & \boldsymbol{Y}_{n-1} \arrow[r, "\mu_{n-2}"] & \cdots \arrow[r, "\mu_2"] & \boldsymbol{Y}_2 \arrow[r, "\mu_1"] & \boldsymbol{Y}_1 \arrow[r, "\mu_0"] & \boldsymbol{Y}_0
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Les systèmes projectifs d'objets de $\mathcal{C}$ et leurs morphismes constituent une catégorie, la « *catégorie des systèmes projectifs de* $\mathcal{C}$ » notée $\mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})$.

2.1.3. Limite projective. La correspondance de $\mathcal{C}$ vers $\mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})$ qui fait correspondre à un objet $\boldsymbol{X}$ le « *système projectif constant* » $\{\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{X}, \nu_n = \mathrm{id}_{\boldsymbol{X}}\}_n$ et à un morphisme $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ le « *morphisme constant* » $\{\varphi_n = \varphi\}_n$ est un foncteur covariant $\iota(\_) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})$.

On appelle « *morphisme de* $\boldsymbol{X} \in \mathcal{C}$ *vers un système projectif* » $\{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$ tout morphisme de $\iota(\boldsymbol{X})$ vers $\{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$, autrement dit toute famille de morphismes $\{\varphi_n : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}_n\}_n$ telle que $\varphi_n = \mu_n \circ \varphi_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \boldsymbol{X} \arrow[dl, "\varphi_n"'] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \arrow[drrr, "\varphi_2"] \arrow[drrrr, "\varphi_1"] \arrow[drrrrr, "\varphi_0"] & & & & \\
\cdots \arrow[r, "\mu_n"'] & \boldsymbol{Y}_n \arrow[r, "\mu_{n-1}"'] & \boldsymbol{Y}_{n-1} \arrow[r, "\mu_{n-2}"'] & \cdots \arrow[r, "\mu_2"'] & \boldsymbol{Y}_2 \arrow[r, "\mu_1"'] & \boldsymbol{Y}_1 \arrow[r, "\mu_0"'] & \boldsymbol{Y}_0
\end{tikzcd}$$

On dit que le système projectif $\{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$ admet une « *limite projective* » lorsqu'il existe $\boldsymbol{Y}_\infty \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et un morphisme $\{\varPhi_n\}_n : \boldsymbol{Y}_\infty \to \{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$ tels que pour tout $\boldsymbol{X} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, tout morphisme $\{\varphi_n\}_n : \boldsymbol{X} \to \{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$ se factorise à travers un et un unique morphisme $\psi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}_\infty$, *i.e.* $\varphi_n = \varPhi_n \circ \psi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \boldsymbol{X} \arrow[dl, "\varphi_n"'] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \arrow[drrr, "\varphi_2"] \arrow[drrrr, "\varphi_1"] \arrow[drrrrr, "\varphi_0"] \arrow[dd, dashed, bend right=90, "\psi"'] & & & & \\
\cdots \arrow[r, "\mu_n"'] & \boldsymbol{Y}_n \arrow[r, "\mu_{n-1}"'] & \boldsymbol{Y}_{n-1} \arrow[r, "\mu_{n-2}"'] & \cdots \arrow[r, "\mu_2"'] & \boldsymbol{Y}_2 \arrow[r, "\mu_1"'] & \boldsymbol{Y}_1 \arrow[r, "\mu_0"'] & \boldsymbol{Y}_0 \\
 & & \boldsymbol{Y}_\infty \arrow[ul, "\varPhi_n"] \arrow[u, "\varPhi_{n-1}"'] \arrow[urr, "\varPhi_2"'] \arrow[urrr, "\varPhi_1"'] \arrow[urrrr, "\varPhi_0"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

La proposition suivante est immédiate

2.1.4. Proposition et notation. *Le système projectif* $\{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$ *admet une limite projective, si et seulement si le foncteur d'ensembles* $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})}(\iota(\_), \{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n)$ *est représentable. La limite projective de* $\{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$, *lorsqu'elle existe est donc unique à isomorphisme canonique près, elle sera notée* $\varprojlim_n \{\boldsymbol{Y}_n, \mu_n\}_n$ *et même* $\varprojlim_n \boldsymbol{Y}_n$ *lorsque les morphismes* $\{\mu_n\}_n$ *seront sous-entendus.*

2.1.5. Foncteur $\varprojlim_n$. On dit que la catégorie $\mathcal{C}$ « *possède des limites projectives* » lorsque tout système projectif d'objets de $\mathcal{C}$ admet une limite projective. Dans ce cas on dispose du foncteur $\varprojlim_n(\_) : \mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C}) \rightsquigarrow \mathcal{C}$ *adjoint à droite* du foncteur $\iota(\_) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})$, autrement dit l'application naturelle

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{Proj}_{\mathbb{N}}(\mathcal{C})}(\iota(\_), (\_)) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}((\_), \varprojlim_n(\_))$$

est bijective.

2.1.6. Théorème. *Les catégories suivantes possèdent des limites projectives.*

a) *La catégorie des ensembles* **Ens**.

b) *La catégorie des espaces topologiques* **Top**.

c) *Les catégories d'anneaux, d'algèbres, des modules sur un anneau.*

Démonstration. Soit $\{\boldsymbol{E}_n, \nu_n\}_n$ un système projectif d'ensembles. L'un des axiomes de la théorie des ensembles garantit l'existence de l'ensemble produit $\prod_n \boldsymbol{E}_n$. Notons $p_n : \prod_n \boldsymbol{E}_n \twoheadrightarrow \boldsymbol{E}_n$ la projection canonique. On vérifie alors aisément que le sous-ensemble $\boldsymbol{E}_\infty \subseteq \prod_n \boldsymbol{E}_n$ des suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\nu_n(e_{n+1}) = e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la famille d'applications $p_n : \boldsymbol{E}_\infty \to \boldsymbol{E}_n$ est une limite projective.

Si $\{\boldsymbol{T}_n, \nu_n\}_n$ un système projectif d'espaces topologiques, on muni l'ensemble $\prod_n \boldsymbol{T}_n$ de la « *topologie produit* », *i.e.* de la topologie la plus grossière rendant continues les projections canoniques ; un ouvert de $\prod_n \boldsymbol{T}_n$ est alors une intersection finie de sous-ensembles de la forme $p_n^{-1}(U_n)$ où U_n est un ouvert de $\boldsymbol{T}_n$ que l'on appelle « *ouvert élémentaire* » de $\prod_n \boldsymbol{T}_n$. L'ensemble $\varprojlim_n \boldsymbol{T}_n$ muni de la topologie induite par la topologie produit de $\prod_n \boldsymbol{T}_n$ est alors une limite projective dans la catégorie des espaces topologiques. En effet, étant donnée une famille d'applications continues $\{\varphi_n : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{T}_n\}_n$, l'application $\prod_n \varphi_n : \boldsymbol{X} \to \prod_n \boldsymbol{T}_n$, $x \mapsto \{\varphi_n(x)\}_n$, est continue puisque l'image inverse de l'ouvert élémentaire $p_n^{-1}(U_n)$ s'identifie à $\varphi_n^{-1}(U_n)$, ouvert par hypothèse.

Le cas des anneaux, algèbres et modules est laissé aux soins du lecteur. ∎

2.1.7. Exercice. Montrer qu'une limite projective d'espaces topologiques séparés est séparée.

2.1.8. Proposition. *Une suite décroissante de parties $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 \supseteq \boldsymbol{X}_1 \supseteq \cdots$ d'un ensemble (resp. espace topologique) $\boldsymbol{X}$ défini de manière évidente un système projectif. Le sous-ensemble (resp. sous-espace) $\boldsymbol{X}_\infty = \bigcap_n \boldsymbol{X}_n$ muni des inclusions $\boldsymbol{X}_\infty \subseteq \boldsymbol{X}_n$ est une réalisation de $\varprojlim_n \boldsymbol{X}_n$.*

Démonstration. La famille d'inclusions $\boldsymbol{X}_\infty \subseteq \boldsymbol{X}_n$ induit une application $\epsilon : \boldsymbol{X}_\infty \to \varprojlim_n \boldsymbol{X}_n$ (continue dans le cas topologique) par la propriété universelle de la limite projective. L'application ϵ est injective, puisque la composée $\boldsymbol{X}_\infty \to \varprojlim_n \boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\Phi_0} \boldsymbol{X}_0$ l'est, et surjective, puisque $\varprojlim_n \boldsymbol{X}_n$ se voit dans sa construction comme ensemble des suites constantes de terme (évidemment) dans $\boldsymbol{X}_\infty$. Ainsi, ϵ est bijective (bicontinue dans le cas topologique car ouverte). ∎

2.2 Sur la topologie des complétions $\boldsymbol{I}$-adiques formelles

2.2.1. Théorème. *Soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{R}$-module.*

a) *L'isomorphisme $\widehat{\boldsymbol{M}} = \varprojlim_n (\boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M})$ (1.5.1-(d)) est un isomorphisme d'espaces topologiques. L'espace $\widehat{\boldsymbol{M}}$ est une limite projective d'espaces topologiques discrets et est* «totalement discontinu» ([11]).

b) *Lorsque les modules $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{M}$ sont tous finis, le complété $\boldsymbol{I}$-adique formel $\widehat{\boldsymbol{M}}$ est un espace topologique* ***compact*** *totalement discontinu.*

c) *Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ l'anneau $\mathbb{Z}_m$, complété de $\mathbb{Z}$ pour la topologie (m)-adique, appelé* «anneau des entiers m-adiques» *est compact et totalement discontinu.*

Démonstration

a) Nous avons déjà remarqué que la topologie $\boldsymbol{I}$-adique de chaque $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M}$ est discrète (ex. 1.1.5). D'autre part, la topologie $\boldsymbol{I}$-adique de $\widehat{\boldsymbol{M}}$ est engendrée par les boules $\mathbb{B}(z;n)$ qui sont précisément les traces sur l'ensemble $\varprojlim_n \boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M}$ de ouverts élémentaires de $\prod_n \boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M}$.

[11] On appelle ainsi un espace topologie dont les seules parties connexes sont les singletons.

Notons $\nu_n : \widehat{\boldsymbol{M}} \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M}$ la projection canonique. Si $e_1 \neq e_2$ sont deux éléments de $\widehat{\boldsymbol{M}}$, il existe N tel que $p_N(e_1) \neq p_N(e_2)$ et comme l'espace $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}^n\boldsymbol{M}$ est muni de la topologie discrète, il est réunion d'ouverts disjoints U_1, U_2 tels que $e_i \in U_i$, mais alors $\widehat{\boldsymbol{M}} = p_N^{-1}(U_1) \amalg p_N^{-1}(U_1)$. On en déduit que les seules parties connexes de $\widehat{\boldsymbol{M}}$ sont les singletons.

b,c) Conséquence immédiate du théorème de Tykhonov.[12] ∎

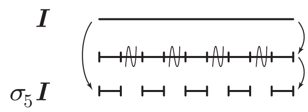
2.2.2. Exercice. Montrer que $\widehat{\boldsymbol{M}}$ est compact si et seulement si $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{M}$ est fini.

2.3 Le cas des entiers p-adiques

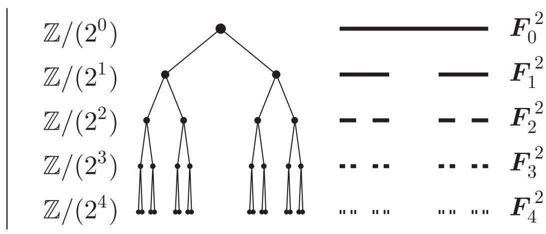
L'anneau $\mathbb{Z}_m$ «*des entiers* (m)*-adiques*» a été introduit (2.2.1) comme le complété (séparé) (m)-adique de l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$. Nous discutons dans cette section quelques unes de ses propriétés élémentaires.

2.3.1. $\mathbb{Z}_m$ comme fermé totalement discontinu dans $[\![0,1]\!]$. On défini par récurrence une famille décroissante $\boldsymbol{F}_n^m$ de fermés de l'intervalle réel $[\![0,1]\!]$. Notons σ_m l'opérateur qui, appliqué à l'intervalle fermé $\boldsymbol{I} = a + r[\![0,1]\!]$, donne les m sous-intervalles fermés disjoints suivants

$$\sigma_m(a + r[\![0,1]\!]) = \coprod_{i=1}^{m} \Big(a + r\Big[\!\!\Big[\frac{2i-2}{2m-1}, \frac{2i-1}{2m-1}\Big]\!\!\Big]\Big)$$



On étend ensuite la définition de σ_m à l'ensemble des réunions disjointes des sous-intervalles fermés de $[\![0,1]\!]$ en le faisant agir intervalle par intervalle. On pose alors $\boldsymbol{F}_0^m := [\![0,1]\!]$ et $\boldsymbol{F}_{n+1}^m = \sigma_m(\boldsymbol{F}_n^m)$. Le nombre $\pi_0(\boldsymbol{F}_n^m)$ de composantes connexes de $\boldsymbol{F}_n^m$ est précisément m^n ce qui nous permet d'identifier $\mathbb{Z}/(m^n)$ à l'ensemble des extrémités de gauche de ces composantes et ceci de manière compatible aux applications $\nu_n : \mathbb{Z}/(m^{n+1}) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(m^n)$ et $\boldsymbol{F}_{n+1}^m \subseteq \boldsymbol{F}_n^m$ (voir illustration) d'où l'inclusion $\iota_n : \mathbb{Z}/(m^n) \subseteq \boldsymbol{F}_n^m$. Notons $p_n : \boldsymbol{F}_n^m \to \mathbb{Z}/(m^n)$ la surjection qui fait correspondre à $x \in \boldsymbol{F}_n^m$ l'extrémité gauche de la composante connexe de $\boldsymbol{F}_n^m$ contenant x. On munit $\mathbb{Z}/(m^n)$ de la topologie discrète et $\boldsymbol{F}_n^m$ de la topologie induite par $\mathbb{R}$, les applications ι_n et p_n sont alors continues et induisent des applications continues



$$\varprojlim_n \frac{\mathbb{Z}}{(m^n)} \xrightarrow{\varprojlim_n \iota_n} \varprojlim_n \boldsymbol{F}_n^m \xrightarrow{\varprojlim_n p_n} \varprojlim_n \frac{\mathbb{Z}}{(m^n)}$$

dont la composée est l'identité puisque $p_n \circ \iota_n = \mathrm{id}$ pour chaque n. Or, l'application $\varprojlim_n \iota_n$ est également surjective puisque $x \in \varprojlim_{n} {}_{\boldsymbol{F}_n^m} = \bigcap_n \boldsymbol{F}_n^m$ (2.1.8) détermine pour chaque n la composante connexe de $\boldsymbol{F}_n^m$ à laquelle il appartient et donc l'extrémité gauche z_n de celle-ci ; l'élément x défini ainsi une famille $\{z_n \in \mathbb{Z}/(m^n)\}_n$ compatible aux applications ν_n, *i.e.* un élément $z \in \varprojlim_n \frac{\mathbb{Z}}{(m^n)}$ dont x est l'image par l'application $\varprojlim_n \iota_n$. On a ainsi démontré

2.3.2. Proposition. *Le complété* (m)*-adique de* $\mathbb{Z}$*, noté* $\mathbb{Z}_m$*, est homéomorphe au sous-espace compact et totalement discontinu* $\boldsymbol{F}^m = \bigcap_n \boldsymbol{F}_n^m$ *de l'intervalle réel* $[\![0,1]\!]$.

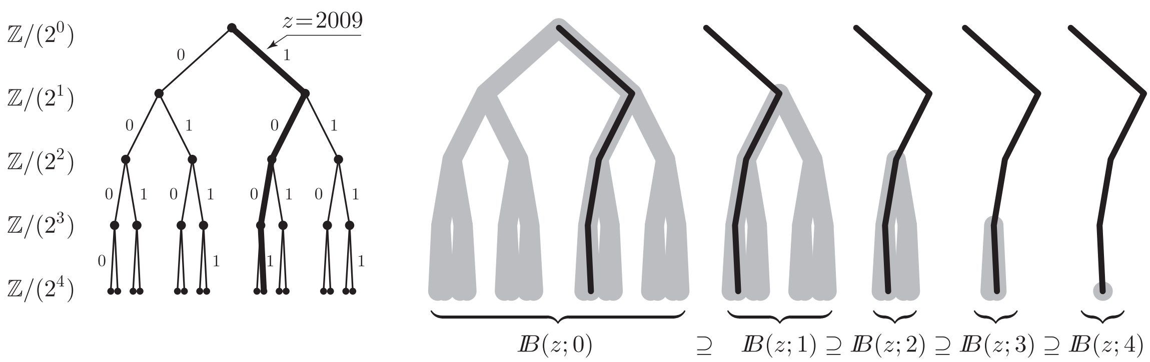
[12] Le produit d'une famille quelconque de compacts muni de la topologie produit est un espace topologique compact.

2.3.3. Arbre des entiers m-adiques. Revenons à **l'anneau** des « *entiers m-adiques* » $\mathbb{Z}_m$ (2.2.1-(c)). On a $\mathbb{Z}_m = \varprojlim_n \mathbb{Z}/(m^n)$ (1.5.1-(d)) et tout élément de $\mathbb{Z}_m$ s'exprime d'une et d'une unique manière comme somme d'une série $\sum_n \theta_n m^n$ avec $\theta_n \in \{0, 1, \dots m-1\}$ (1.4.22-(b)). L'itération de la division euclidienne permet la détermination de la suite $(\theta_n)_{n\geqslant 0}$. Par exemple, si $m = 2$, les divisions successives de 2009 par 2 donnent le tableau ci-contre, d'où le « *développement diadique* »

itération	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
nombre	2009	1004	502	251	125	62	31	15	7	3	1	0
reste de la division par 2	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	-

$$2009 = \sum_{n\geqslant 0} \theta_n 2^n = \mathbf{1}{\cdot}2^0 + \mathbf{0}{\cdot}2^1 + \mathbf{0}{\cdot}2^2 + \mathbf{1}{\cdot}2^3 + \mathbf{1}{\cdot}2^4 + \mathbf{0}{\cdot}2^5 + \mathbf{1}{\cdot}2^6 + \mathbf{1}{\cdot}2^7 + \mathbf{1}{\cdot}2^8 + \mathbf{1}{\cdot}2^9 + \mathbf{1}{\cdot}2^{10}$$

à ne pas confondre avec l'écriture en base 2 de 2009 qui se lit en sens inverse, à savoir `11111011001`. Le dessin suivant illustre ce résultat numérique et la suite des boules centrées en $z = 2009$ (modulo 2^5).



2.3.4. Intégrité de $\mathbb{Z}_m$

Proposition. *L'anneaux $\mathbb{Z}_m$ est intègre si et seulement si m est une puissance d'un nombre premier.*

Preuve sous forme d'exercice

a) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{N}$ *relativement premiers*, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$1 + \alpha_n a^n \in b^n\mathbb{Z}$$

b) On munit $\mathbb{Z}$ de la topologie (ab)-adique.

i) Montrer que la suite

$$(t_n(a))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_0(a) = 1 \\ t_n(a) = \alpha_{2^0}\alpha_{2^1}\cdots\alpha_{2^n} a^{2^{n+1}} \end{cases}$$

est une suite de Cauchy de $\mathbb{Z}$ qui ne converge pas vers zéro.

ii) En procédant de même pour b montrez que le produit des suites Cauchy $(t_n(a))_n \cdot (t_n(b))_n$ est nul dans $\mathbb{Z}_{ab}$. Conclure que $\mathbb{Z}_{ab}$ n'est pas intègre.

c) Soit $\boldsymbol{I} = (m) \subseteq \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(\_) : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ est une valuation si et seulement si m est un nombre premier. En déduire une condition d'intégrité de $\mathbb{Z}_m$ (*cf.* 1.3.8).

d) Conclure que $\mathbb{Z}_m$ est intègre si et seulement si m est une puissance d'un nombre premier (*cf.* 1.5.4).■

2.3.5. Anneaux de valuation discrète. On appelle ainsi tout anneau intègre principal ayant un unique idéal premier non nul (*cf.* [Ser] ch. **I** §**1,2**).

Par exemple, si p est un nombre premier l'anneau $\mathbb{Z}_p$ et un anneau de valuation discrète. En effet, son intégrité a été prouvée dans 2.3.4 et l'équivalence $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ (1.5.1-(b)) montre que $p\mathbb{Z}_p$

est un idéal premier de $\mathbb{Z}_p$, et même que tout élément de valuation nulle est inversible (1.5.1-(g)). Par conséquent, si l'on écrit $z \in \mathbb{Z}_p$ sous la forme $z = \sum \theta_n p^n$ avec $\theta_n \in \{0, \dots, p-1\}$ (1.4.22-(b)), on voit que $z = p^{v_p(z)}u$ où u est un élément inversible de $\mathbb{Z}_p$. Les idéaux de $\mathbb{Z}_p$ sont donc engendrés par les puissances de p et $\mathbb{Z}_p$ est bien de valuation discrète.

2.3.6. Prolongement de la valuation p-adique. Nous avons les inclusions d'anneaux et corps

$$\boxed{\mathbb{Z} \underset{0}{\subsetneq} \mathbb{Z}_{(p)} \underset{1}{\subsetneq} \mathbb{Z}_p \underset{2}{\subsetneq} \mathbb{Q}_p \underset{3}{\subsetneq} \overline{\mathbb{Q}}_p \underset{4}{\subsetneq} \mathbb{C}_p}$$

où 1 et 4 résultent de complétions topologiques alors que 0, 2 et 3 sont de nature algébrique. En effet, $\mathbb{Z}_p$ est un anneau local d'idéal maximal $p\mathbb{Z}_p$ et le morphisme naturel $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ se factorise canoniquement à travers le localisé $\mathbb{Z}_{(p)}$ ce qui donne les inclusions $\subsetneq_{0,1}$. Ensuite, comme $\mathbb{Z}_p$ est intègre, il s'injecte ($\subsetneq_2$) dans son corps de fractions $\mathbb{Q}_p$ lequel s'injecte à sont tour ($\subsetneq_3$) dans sa clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

La valuation $v_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{N}$ se prolonge à $\mathbb{Q}_p$ car une fraction rationnelle s'écrit d'une manière unique sous la forme up^m avec u inversible dans $\mathbb{Z}_p$ et $m \in \mathbb{Z}$; on pose alors $v_p(z) = m$ d'où la valuation $v_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z}$ de valeur absolue associée $|\_|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}$. On démontre alors ([Ser]) que cette valeur absolue se prolonge d'une et une unique manière en une valeur absolue (ultramétrique) $|\_|_p : \overline{\mathbb{Q}}_p \to \mathbb{R}$ dont l'image est cette fois dense dans $\mathbb{R}$. Enfin, l'inclusion $\subsetneq_4$ est l'inclusion de $(\overline{\mathbb{Q}}_p, |\_|_p)$ dans son complété topologique $\mathbb{C}_p$; l'image de $|\_|_p : \mathbb{C}_p \to \mathbb{R}$ et alors la même que celle de $|\_|_p : \overline{\mathbb{Q}}_p \to \mathbb{R}$ (1.4.4). On démontre (*loc. cit.*) que $\mathbb{C}_p$ est algébriquement clos.

2.3.7. Exercice. Montrer que $(\mathbb{Q}_p, |\_|_p)$ est localement compact.

§ 3. Remarques sur la cohomologie de de Rham en caractéristique zéro

Les techniques de complétion des sections précédentes trouvent l'une des principales motivations dans la problématique de la recherche d'une théorie cohomologique « *à la de Rham* » en caractéristique zéro pour les variétés (schémas en fait) algébriques en caractéristique positive. Nous allons regarder un exemple simple pour montrer à quel niveau la complétion intervient.

3.1 Cohomologies de de Rham associés à des ouverts principaux de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$

L'anneau des fonctions régulières d'un ouvert principal de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ est de la forme $\mathbb{F}_p[X]_P$ avec $P \in \mathbb{F}_p[X]$, et la surjection canonique $\nu : \mathbb{Z}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p[X]$, qui induit une surjection $\nu_{\tilde P} : \mathbb{Z}[X]_{\tilde P} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p[X]_P$ pour chaque $\tilde P$ vérifiant $\nu(\tilde P) = P$, identifie $\mathbb{F}_p[X]_P$ à la réduction modulo p de $\mathbb{Z}[X]_{\tilde P}$, on dit alors que $\mathbb{Z}[X]_{\tilde P}$ est un « *relèvement* ($\mathbb{Z}$-*plat*) *de* $\mathbb{F}[X]_P$ ». D'où l'idée de définir la cohomologie de de Rham (en caractéristique zéro) de l'ouvert $D(P) \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ comme la cohomologie de de Rham de l'une des algèbres $\mathbb{Z}[X]_{\tilde P}$. Regardons d'un peu plus près cette idée.

3.1.1. Le cas $\tilde P = 1$. S'agissant de la cohomologie de l'espace affine, la nécessité de voir vérifié le lemme de Poincaré nous conduit à tensoriser le complexe de de Rham par le corps de fractions de l'anneau des coefficients. En effet, la cohomologie de $\Omega^*_{\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}}$, à savoir, la cohomologie du complexe à deux termes :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} \to & \Omega^0_{\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}} & \xrightarrow{d_0} & \Omega^1_{\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}} & \to \mathbf{0} \\ & || & & ||| & \\ & \mathbb{Z}[X] & \xrightarrow{\partial/\partial X} & \mathbb{Z}[X] & \end{array}$$

n'est jamais triviale en degré positif (X^n n'est pas la dérivée d'un polynôme si $n > 0$) alors que celle de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^*_{\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}}$ l'est. Cette remarque est générale :

Proposition. *Pour toute algèbre $\boldsymbol{A}$ de caractéristique nulle, de corps de fractions $\boldsymbol{K}$ la cohomologie du complexe $\boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^*_{\boldsymbol{A}[X]/\boldsymbol{A}}$ est nulle en degrés positifs et s'identifie à $\boldsymbol{K}$ en degré 0.*

3.1.2. Le cas $\tilde{P} = 1 + pX$. Le polynôme $\tilde{P}$ relève toujours $1 \in \mathbb{F}_p[X]$ et l'algèbre $\mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}}$ est un relèvement de $\mathbb{F}_p[X]$. Dans ce cas l'application $X \mapsto (Y-1)/p$ identifie $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}}$ et $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}[Y]_Y$ de sorte que la cohomologie du complexe $\mathbb{Q} \otimes \Omega_{\mathbb{Z}[X]_{\tilde{P}}/\mathbb{Z}}$ s'identifie à la cohomologie de la droite affine épointée, isomorphe à $\mathbb{Q}$ en degré 1.

La cohomologie de de Rham (sur $\mathbb{Q}$) des algèbres $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Z}[X]_{1+pX}$ sont donc différentes, et ce procédé naïf de relèvement ne risque pas de produire des invariants cohomologiques pour les variétés en caractéristique positive.

3.1.3. Les anneaux de Zariski. Dans les exemples précédents, les polynômes $\tilde{P}$ relèvent bien l'identité de $\mathbb{F}_p[X]$ mais ce qui les rend incomparables c'est le fait que l'un est inversible et l'autre non. Or, c'est précisément la propriété caractéristique des anneaux de Zariski d'assurer l'inversibilité des relèvement des éléments qui sont inversibles dans la réduction (1.5.1-(g)), et c'est l'une caractéristique du procédé de complétion de fabriquer, fonctoriellement de surcroît, des anneaux de Zariski. Ainsi, et comme nous cherchons des relèvements d'algèbres de caractéristique p, nous sommes emmenés à nous intéresser à la complétion formelle p-adique où l'on a, toujours par 1.5.1-(g) mais surtout par 1.5.1-(i), des égalités

$$\widehat{\mathbb{Z}[X]} = \widehat{\mathbb{Z}[X]_{1+pX}} = \widehat{\mathbb{Z}[X]_{1+pQ(X)}}\,, \quad \forall Q \in \mathbb{Z}[X]\,.$$

Ces algèbres ([13]) fournissent, évidemment, la même cohomologie de de Rham, mais laquelle ? Non pas celle du complexe de de Rham algébrique (car pathologique) mais plutôt celle du complexe de de Rham algébrique séparé (1.5.1-(j)) et tensorisé par $\mathbb{Q}_p$ pour tenir compte de 3.1.1. Nous sommes ainsi emmenés à comprendre la cohomologie du complexe à deux termes

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X]^\frown \otimes_{\mathbb{Z}_p[X]} \Omega^0_{\mathbb{Z}_p[X]/\mathbb{Z}_p} & \xrightarrow{d_0} & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X]^\frown \otimes_{\mathbb{Z}_p[X]} \Omega^1_{\mathbb{Z}_p[X]/\mathbb{Z}_p} \to \mathbf{0} \\ \| & & \| \\ \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X]^\frown & \xrightarrow{\partial/\partial X} & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X]^\frown \end{array} \qquad (\ddagger)$$

3.1.4. Proposition. *L'image de la dérivation $\partial_X : \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X]^\frown \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X]^\frown$ ([14]) est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel engendré par les séries $\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ telles que*

$$\boxed{\big(v_p(a_n) - v_p(n+1)\big) \rightsquigarrow +\infty\,,\ \text{lorsque } n \rightsquigarrow +\infty} \qquad (\mathbf{C})$$

Démonstration. Les éléments de $\mathbb{Z}_p[X]^\frown$ sont les séries $\sum_n b_n X^n$ avec $v_p(b_n) \rightsquigarrow +\infty$ d'après 1.4.23-(a), donc $z \in \partial_X \mathbb{Z}_p[X]^\frown$ est une série $\sum_n a_n X^n$ avec $a_n = b_{n+1}(n+1)$ et alors $\big(v_p(a_n) - v_p(n+1)\big) \rightsquigarrow +\infty$. Réciproquement, étant donnée une série $z = \sum_n a_n X^n$ avec $a_n \in \mathbb{Q}_p$ et vérifiant la condition $(\mathbf{C})$, ce qui implique que $a_n \in \mathbb{Z}_p$ pour $n \gg 0$, la série $\sum_n (a_n/(n+1))X^{n+1}$ a aussi ses coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ pour $n \gg 0$ et quitte à la multiplier par une puissance suffisante de p, non seulement tous ses coefficients sont dans $\mathbb{Z}_p$, en plus la série est de Cauchy et converge (donc) vers un élément $w \in \mathbb{Z}_p[X]^\frown$. Ceci prouve que $p^{-N}\partial_X w = z$ pour $N \gg 0$. ■

3.1.5. Remarque. La proposition 3.1.4 et sa démonstration restent valables si l'on remplace $\mathbb{Z}_p$ par un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique et de caractéristique résiduelle p.

[13] Ces algèbres sont les mêmes que $(\mathbb{Z}_p[X])^\frown = (\mathbb{Z}_p[X]_{1+pX})^\frown = (\mathbb{Z}_p[X]_{1+pQ(X)})^\frown, \quad \forall Q \in \mathbb{Z}_p[X]$.

[14] La notation ∂_X est équivalente de $\frac{\partial}{\partial X}$.

3.1.6. Remarque. La condition (**C**) de la proposition précédente est plus forte que celle de convergence formelle qui demande seulement que $v_p(a_n) \rightsquigarrow +\infty$. Par exemple, la série $\sum_{i\geqslant 0} p^i X^{p^i-1}$ est bien une série de Cauchy mais elle ne vérifie pas (**C**) puisque autrement la primitive

$$\int \sum_{i\geqslant 0} p^i X^{p^i-1} = \sum_i p^i \frac{X^{p_i}}{p^i} = \sum_i X^{p^i}$$

serait sommable ce qui est de toute évidence impossible. Le complexe (‡) possède donc bien de la cohomologie en degré un et c'est pour corriger ce défaut tout en gardant les bénéfices des anneaux de Zariski et les différentes fonctorialités des constructions jusqu'ici introduites que Dwork dans un premier temps et Monsky-Washnitzer ensuite ont introduit la notion de convergence faible.

3.1.7. La convergence faible. Une série $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n \in \boldsymbol{R}[X]^\frown$ (1.4.23-(a)) est dite « *faiblement convergente (pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique)* » s'il existe une constante positive C telle que

$$\boxed{n \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_n)+1)\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}} \qquad (\mathbf{FC})$$

3.1.8. Proposition. *Notons $\boldsymbol{R}[X]^\dagger$ le sous-ensemble de $\boldsymbol{R}[X]^\frown$ des séries faiblement convergentes.*

a) *$\boldsymbol{R}[X]^\dagger$ est une $\boldsymbol{R}$-sous-algèbre de $\boldsymbol{R}[X]^\frown$.*

b) *L'opérateur $\partial_X : \mathbb{Z}_p[X]^\frown \to \mathbb{Z}_p[X]^\frown$ induit une **surjection** $\partial_X : \mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Z}_p[X]^\dagger \twoheadrightarrow \mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Z}_p[X]^\dagger$ de noyau les séries constantes $\mathbb{Q}_p \cdot 1$.*

Démonstration

a) Si $z_1 = \sum_n a_n X^n$ et $z_2 = \sum_n b_n X^n$ sont faiblement convergentes, on prend la même constante C dans la condition **FC** pour les deux séries. Alors, pour tout $x \in \boldsymbol{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_p(a_n + xb_n) \geqslant \inf\{v_p(a_n), v_p(b_n)\} \geqslant C^{-1}n - 1$$

et la série $z_1 + xz_2$ est faiblement convergente, donc $\boldsymbol{R}[X]^\dagger$ est un sous-$\boldsymbol{R}$-module de $\boldsymbol{R}[X]^\frown$. Le produit z_1z_2 est la somme de la famille $\{a_nb_mX^{n+m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ (de Cauchy !). Notons $c_k = \sum_{i=0}^k a_ib_{k-i}$ alors

$$v_p(c_k) \geqslant \inf\{v_p(a_ib_{k-i})\} = \inf\{v_p(a_i) + v_p(b_{k-i})\} \geqslant C^{-1}k - 2$$

donc $k \leqslant C(v_p(c_k)+2) \leqslant 2C(v_p(c_k)+1)$ et la série $z_1z_2 = \sum_k c_kX^k$ est faiblement convergente.

b) Si $\sum_n a_nX^n$ est faiblement convergente la condition (**C**) de la proposition 3.1.4 est

$$v_p(a_n) - v_p(n+1) \geqslant C^{-1}n - 1 - v_p(n+1) \geqslant C^{-1}n - 1 - \log_p(n+1)$$

et il est bien connu que la fonction $t \mapsto C^{-1}t - 1 - \log_p(t+1)$ tend vers $+\infty$ avec $t \in \mathbb{R}$. Il existe donc N tel que $p^N \sum_n a_n(n+1)^{-1}X^{n+1}$ appartient à $\mathbb{Z}_p[X]^\frown$. Or, on a

$$v_p\left(a_n(n+1)^{-1}\right) = v_p(a_n) - v_p(n+1) \geqslant C^{-1}n - 1 - \log_p(n+1) \geqslant D^{-1}n - 1$$

si et seulement si $(C^{-1} - D^{-1})n \geqslant \log_p(n+1)$, et cette condition est vérifiée pour chaque $D > C$, pour tout n assez grand (dépendant de D). Pour un tel choix de D il existe donc n_0 tel que

$$n \leqslant D(v_p(p^N a_n(n+1)) + 1)\,, \text{ pour tout } n > n_0\,.$$

Mais alors la série $p^N \sum_n a_n(n+1)^{-1}X^{n+1}$ vérifie la condition (**FC**) avec la constante $C = \sup\{D, n_0\}$.

La détermination de $\ker(\partial_X)$ est laissée en exercice (*cf.* 1.4.23-(a)). ∎

3.1.9. Remarque. L'assertion 3.1.8-(b) et sa démonstration restent valables si l'on remplace $\mathbb{Z}_p$ par un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique et de caractéristique résiduelle p.

3.1.10. Remarque. On aura remarqué par la preuve de 3.1.8, l'équivalence entre (**FC**) et la condition

$$\boxed{\text{il existe } C, C' \in \mathbb{R}_+^* \text{ tels que } n \leqslant C\,\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_n) + C', \text{ pour } n \gg 0} \tag{$\mathbf{FC'}$}$$

3.1.11. Commentaire. Les complétions formelles $\widehat{\boldsymbol{A}}$ des $\boldsymbol{R}$-algèbres de type fini $\boldsymbol{A}$ ont le propriété fondamentale d'être de Zariski et de dépendre fonctoriellement de $\boldsymbol{A}$, mais la cohomologie de leurs complexes de de Rham séparés ne fournit pas les bons nombres de Betti. Les sous-algèbres $\boldsymbol{A}^\dagger$ des séries faiblement convergentes de $\widehat{\boldsymbol{A}}$, corrigent ce défaut, mais pour qu'elles soient utiles pour une *théorie* cohomologique il faudra en donner une définition fonctorielle et prouver qu'elles vérifient la propriété d'être de Zariski. La section **4** est destinée à cette question où l'analogue des propriétés générales de la complétion formelle (th. 1.5.1) est démontré pour la complétion faible, ce qui est assez remarquable. Nous verrons aussi que pour une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$, on a toujours $(\Omega^*_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}})_\sigma = \boldsymbol{A}^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$. On définira alors la « *cohomologie de de Rham †-adique* » d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$ par

$$H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{K}) := h^*(\boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}^\dagger \otimes \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$$

où $\boldsymbol{K}$ désigne le corps des fractions de $\boldsymbol{R}$.

Les considérations du paragraphe 3.1.3 seront alors valables pour la complétion faible des algèbres $\mathbb{Z}_p[X]_{\tilde{P}}$ et la cohomologie de de Rham p-adique d'un ouvert principal $D(P) \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ sera, par définition,

$$H_{\mathrm{DR}}(D(P)/\mathbb{Q}_p) := H_{\mathrm{DR}}(\mathbb{Z}_p[X]_{\tilde{P}}{}^\dagger/\mathbb{Q}_p)\,,$$

indépendante du relèvement $\tilde{P}$ de P. La proposition 3.1.8-(b) montre déjà que cette définition donne les bons nombre de Betti pour $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$.

3.1.12. Heuristique autour du rayon de convergence. Pour chaque $a \in \widehat{\boldsymbol{R}}$, la complétion formelle du morphisme $\boldsymbol{R}[X] \to \widehat{\boldsymbol{R}}$, $P(X) \mapsto P(a)$, d'« *évaluation d'un polynôme en* a », donne le morphisme $\boldsymbol{R}[X]^\wedge \to \widehat{\boldsymbol{R}}$, $z \mapsto z(a)$, d'« *évaluation des séries en* a ». Une série $z \in \boldsymbol{R}[X]^\wedge$ définit ainsi une application $z : \widehat{\boldsymbol{R}} \to \widehat{\boldsymbol{R}}$, $a \mapsto z(a)$ de manière analogue aux séries entières sur $\mathbb{C}$.

Plus généralement, si $(\boldsymbol{A}, |\_|)$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre valuée non archimédienne complète, pour $a \in \boldsymbol{A}$ et chaque série de Cauchy $z = \sum_{n\geqslant 0} x_n X^n$, la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n a^n$ est de Cauchy, et donc converge dans $\boldsymbol{A}$, si et seulement si la suite $|x_n||a|^n$ converge vers zéro. En particulier, la convergence de la série dépend uniquement de la valeur absolue de $a \in \boldsymbol{A}$. Le « *domaine de définition* » de $z : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$, *i.e.* l'ensemble des $a \in \boldsymbol{A}$ tels que la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n a^n$ converge, est par conséquent une boule de $\boldsymbol{A}$ centrée à l'origine.

Définition. On appelle « *rayon de convergence* » d'une série $z = \sum_{n\geqslant 0} x_n X^n$, et on note $\mathcal{R}(z)$, la borne supérieure de l'ensemble des $\rho \in \mathbb{R}^+$ tels que la suite $(|x_n|\rho^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$. On dit que « *la série z converge en a* » si la série $z(a) := \sum_n x_n a^n$ converge.

3.1.13. Proposition. *Avec les donnes en cours,*

a) *Le rayon $\mathcal{R}(z)$ de la série $z = \sum_n x_n X^n$ est donnée par la formule* ([15])

$$\boxed{\mathcal{R}(z) = \liminf_n \frac{1}{\sqrt[n]{|x_n|}}}$$

b) *Si $|a| < \mathcal{R}(z)$ la série $z(a) = \sum_{n\geqslant 0} x_n a^n$ converge ; si $|a| > \mathcal{R}(z)$ la série $z(a)$ ne converge pas ; si $|a| = \mathcal{R}(z)$ on ne peut rien dire, mais si $z(a)$ converge, la série $z(b)$ converge dès que $|b| \leqslant |a|$.*

[15] Formule dite « *de Hadamard* » *cf.* [C] I.§ **2.3** p. 20.

Indication. Notons $\mathcal{R}_0(x)$ (resp. $\mathcal{R}_b(z)$) l'ensemble des $\rho \in \mathbb{R}_+$ tels que la suite $(|x_n|\rho^n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 (resp. est bornée). On a bien $\mathcal{R}_0(z) \subseteq \mathcal{R}_b(z)$. Inversement, si $(|x_n|\rho_0^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, pour tout $\rho_1 < \rho_0$ on a $(|x_n|\rho_1^n)_{n\geqslant 0} = (|x_n|\rho_0^n(\rho_1/\rho_0)^n)_n$ et donc $\rho_1 \in \mathcal{R}_0(z)$. Les bornes supérieures de ces deux ensembles sont donc bien égales. Or, $|x_n|\rho^n < C$ pour tout n équivaut à

$$\rho \leqslant \frac{\sqrt[n]{C}}{\sqrt[n]{|x_n|}}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

et la conclusion s'ensuit. L'assertion (b) est laissée en exercice. ∎

3.1.14. Remarque. L'analogie avec le cas des séries entières est évident, mais il faut bien retenir une différence importante : dans le cas d'une valeur absolue non archimédienne, *si une série converge en un point, elle converge en chaque point du cercle centré à l'origine contenant ce point.*

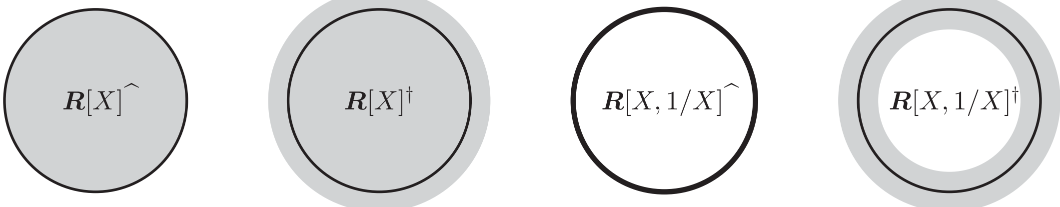
3.1.15. Exercice. Donner une condition sur la constante C dans (**FC**) (1.4.23-(a)) pour que $\mathcal{R}(z) > r > 1$.

3.1.16. Rayon et domaine de convergence. Dans ce qui précède nous avons défini le rayon de convergence d'une série mais nous n'avons encore rien dit à propos du « *domaine de convergence d'une série* ». En effet, la valuation $\boldsymbol{I}$-adique étant à valeurs entières, les valeurs absolues associées sont discrètes. Par exemple, la série $\sum p^n X^n$ a un rayon de convergence égal à p ([16]) mais il n'existe aucun élément de $\mathbb{Z}_p$ de valeur absolue plus grande que 1 et notre série converge sur $\mathbb{Z}_p$ tout entier. Par contre, si nous nous plaçons sur $\mathbb{Q}_p$ (2.3.6), la valuation p-adique $v_p(\_) : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z}$ est surjective et l'ensemble des valeurs absolues atteintes est $\{p^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, le cercle de rayon p est maintenant plus grand que celui de rayon 1, mais la série n'y converge pas car $\sum_n p^n(1/p)^n$ n'est de toute évidence pas convergente. Or, dans $\mathbb{Q}_p$ le disque de rayon p privé du cercle de même rayon est le disque de rayon 1 donc exactement $\mathbb{Z}_p$; il n'y a donc dans $\mathbb{Q}_p$ aucun élément de valeur absolue plus grande que 1 rendant convergente notre série de rayon p. Il faut passer à la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ pour trouver assez de points pour que l'affirmation *"Pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* a *tel que* $0 \leqslant \mathcal{R}(z) - |a| < \epsilon$ *et* $\sum_n x_n a^n$ *converge"* soit vérifiée. En effet, l'application $|\_| : \overline{\mathbb{Q}}_p \to \mathbb{R}$ est maintenant d'image dense. Par exemple, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\xi_n := \sqrt[n+1]{p^{-n}} \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ d'où $|\xi| = \sqrt[n+1]{p^n} < p$ et donc $|\xi_n| \rightsquigarrow p$ lorsque $n \rightsquigarrow +\infty$. Remarquons, pour terminer, que le passage de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ à $\mathbb{C}_p$ ne fournit pas plus de valeurs absolues (1.4.4).

La conclusion de ces remarques est que, si le rayon de convergence d'une série est toujours bien défini, les assertions concernant son domaine de convergence peuvent exiger des extensions de l'espace pour prendre tout leur sens. La proposition suivante est un exemple typique de cette remarque.

3.1.17. Proposition

a) *Les séries* $z \in \boldsymbol{R}[X]^{\frown}$ *sont les séries telles que* $\mathcal{R}(z) \geqslant 1$ *et qui convergent sur le cercle unité.*
b) *Les séries* $z \in \boldsymbol{R}[X]^{\dagger}$ *sont les séries telles que* $\mathcal{R}(z) > 1$.
c) *Les séries* $z \in \boldsymbol{R}[X, 1/X]^{\frown}$ *sont les séries qui convergent sur le cercle unité.*
d) *Les séries* $z \in \boldsymbol{R}[X, 1/X]^{\dagger}$ *sont les séries qui convergent sur une couronne autour du cercle unité.*



[16] Dans le cas p-adique on pose $|x| = p^{-v_p(x)}$, donc $|p| = 1/p$.

Démonstration

a) Une série $z = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ converge pour $X = 1$, si et seulement si $|a_n| \rightsquigarrow 0$, donc si et seulement si $z \in \boldsymbol{R}[X]\widehat{\ }$.

b) Dans une série $z = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ l'inégalité $n \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_n)+1)$ (**FC**) équivaut à $|a_n|_s \leqslant ss^{-n/C}$ (on rappelle que $s > 1$ (*cf.* 1.3)) auquel cas

$$\mathcal{R}(z) = \liminf_n \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|_s}} \geqslant s^{1/C} > 1\,.$$

c-d) Les éléments de $\boldsymbol{R}[X, 1/X]$ sont les « *polynômes de Laurent* » *i.e.* sommes de deux polynômes $P(X) + Q(1/X)(1/X)$. Toute série à termes dans $\boldsymbol{R}[X, 1/X]$ se décompose alors en somme de deux séries $z = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ et $w = \sum_{n\geqslant 1} b_n (1/X)^n$; le domaine de convergence de $z + w$ est donc l'intersection des domaines respectifs de z et de w. D'après 1.4.24, $z + w \in \boldsymbol{R}[X]\widehat{\ }$ si et seulement si $z \in \boldsymbol{R}[X]\widehat{\ }$ et $w \in \boldsymbol{R}[1/X]\widehat{\ }$ et l'on applique (a). La même idée prouve (d). ∎

§ 4. Complétion †-adique

Les paragraphes § **1,2** de [MW] et § **0,1** de [M] constituent une très bonne référence pour cette section.

4.1 Complété †-adique des algèbres

4.1.1. Définition. Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, Monsky et Washnitzer définissent dans [MW] « *la complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible $\boldsymbol{A}^\dagger$* » que nous appellerons aussi « *complétion †-adique* », comme le sous-ensemble du complété (séparé) $\boldsymbol{I}$-adique $\widehat{\boldsymbol{A}}$ de $\boldsymbol{A}$, des éléments z admettant une représentation comme somme infinie :

$$z = \sum_{n\geqslant 0} P_n(x_1, \ldots, x_\ell)$$

(l'entier r et les éléments $x_1, \ldots, x_\ell$ sont fixes et indépendants de n mais dépendent de z) dans laquelle :

$$\begin{cases} \text{(a)}\ \ x_1, \ldots, x_\ell \in \boldsymbol{A}\,; \\ \text{(b)}\ \ P_n \in \boldsymbol{I}^n \cdot \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_\ell], \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\,; \\ \text{(c)}\ \ \text{Il existe une constante } C \in \mathbb{R}_+, \text{ telle que } \deg P_n \leqslant C(n+1) \text{ por tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{$\mathbb{FC}$}$$

4.1.2. Exercice. Montrer que si $z = \sum_{n\geqslant 0} P_n(x_1, \ldots, x_\ell)$ vérifie les conditions $\mathbb{FC}$ et si $x_i = Q_i(y_1, \ldots, y_m)$ avec $Q_i \in \boldsymbol{R}[\overline{Y}] := \boldsymbol{R}[Y_1, \ldots, Y_m]$, la somme $\sum_{n\geqslant 0} \widetilde{P}_i(y_1, \ldots, y_m)$, où $\widetilde{P}_i(\overline{Y}) := P_y(Q_1(\overline{Y}), \ldots, Q_\ell(\overline{Y}))$ vérifie aussi les conditions $\mathbb{FC}$ (bien que la constante C puisse changer).

4.1.3. La proposition suivante exprime les éléments de $\boldsymbol{A}^\dagger$ à l'aide des représentations des éléments de $\widehat{\boldsymbol{A}}$ en séries géométriques à plusieurs variables (*cf.* corollaire 1.4.23-(b)).

4.1.4. Proposition. *Avec les notation en cours, les éléments de $\boldsymbol{A}^\dagger$ sont les éléments $z \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ pour lesquels il existe une famille finie $\{\xi_1, \ldots, \xi_\ell\}$ d'éléments de $\boldsymbol{A}$ (dépendant de z) telle que*

$$z = \sum_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_J\, \xi^J\ ,\ \text{avec } a_J \in \widehat{\boldsymbol{R}} \text{ et } |J| \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J)+1), \tag{$\mathbb{FC}\star$}$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}_+$ (dépendant de z).

Démonstration. Soit $z \in \boldsymbol{A}^\dagger$ et $z = \sum_{n\geqslant 0} P_n(x_1, \ldots, x_\ell)$ une représentation de z vérifiant ($\mathbb{FC}$). Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n = \sum_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_{n,J} X^J$ le développement de $P_n \in \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_r]$ en somme de monômes. La famille $\mathcal{F} := \{a_{n,J}\, x^J \neq 0\}_{(n,J)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^\ell}$ est une famille sommable de $\widehat{\boldsymbol{A}}$ de somme z. En effet, si $\varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que $|z - \sum_{n=0}^{N_\varepsilon+r} P_n(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon$, quel que soit $r \in \mathbb{N}$, et nous pouvons même prendre N_ε assez grand pour avoir, en plus, $|a_{n,J}| < \varepsilon$ pour tout $n > N_\varepsilon$ et ceci grâce à la condition (b) de ($\mathbb{FC}$). La famille $\boldsymbol{F}(\varepsilon) := \{a_{n,J}\, x^J\}_{n\leqslant N_\varepsilon} \subseteq \mathcal{F}$ est finie puisqu'elle ne concerne qu'un nombre fini de polynômes P_n et que chacun d'eux fournit au plus un nombre fini de coefficients $a_{n,J}$ non nuls. Maintenant, pour toute sous-famille finie $\boldsymbol{F} \subseteq \mathcal{F}$ telle que $\boldsymbol{F} \supseteq \boldsymbol{F}(\varepsilon)$, on a par non archimédiannité :

$$\Big|z - \sum\nolimits_{\boldsymbol{F}} a_{n,J}x^J\Big| = \Big|\Big(z - \sum\nolimits_{\boldsymbol{F}(\varepsilon)} a_{n,J}x^J\Big) + \sum\nolimits_{(n,J)\in\boldsymbol{F}\backslash\boldsymbol{F}(\varepsilon)} a_{n,J}x^J\Big|$$
$$\leqslant \sup\Big\{\Big|z - \sum\nolimits_{\boldsymbol{F}(\varepsilon)} a_{n,J}x^J\Big|, \big|a_{n,J}x^J\big| \text{ t.q. } a_{n,J}x^J \in \boldsymbol{F}\backslash\boldsymbol{F}(\varepsilon)\Big\} \leqslant \varepsilon\,.$$

Ce qui termine la preuve de la sommabilité de $\mathcal{F}$. Nous pouvons donc regrouper les termes de la série double $\sum_{n\geqslant 0}\sum_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_{n,J}x^J$ sans en modifier la somme (*cf.* 1.4.18-(a)), on a donc :

$$z = \sum\nolimits_{J\in\mathbb{N}^\ell}\Big(\sum\nolimits_{n\geqslant 0} a_{n,J}\Big)\, x^J\,,$$

où bien évidemment $(\sum_{n\geqslant 0} a_{n,J}) \in \widehat{\boldsymbol{R}}$, pour tout $J \in \mathbb{N}^\ell$.

Cela étant, dans les développements $P_n = \sum_{n\geqslant 0} a_{n,J}X^J$, la condition (c) de ($\mathbb{FC}$) donne

$$|J| \leqslant \deg P_n \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_{n,J}) + 1) \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(\textstyle\sum_n a_{n,J}) + 1)\,, \qquad \forall J \in \mathbb{N}^\ell\,,$$

puisque $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(\sum_n a_{n,J}) \geqslant \inf_n\{\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_{n,J})\}$ (*cf.* 1.5.1-(a)), et l'égalité

$$z = \sum\nolimits_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_J\, x^J\,, \quad \text{avec} \quad a_J := \sum\nolimits_{n\geqslant 0} a_{n,J}\,,$$

est bien de la forme ($\mathbb{FC}\star$).

Réciproquement, soit $z \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ vérifiant

$$z = \sum\nolimits_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_J\, \xi^J\,, \text{ avec } a_J \in \widehat{\boldsymbol{R}} \text{ et } |J| \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J) + 1), \tag{$\diamond$}$$

pour une certaine famille finie $\{\xi_1, \ldots, \xi_\ell\} \subseteq \boldsymbol{A}$ et une certaine constante $C \in \mathbb{R}_+$.

Fixons pour chaque $J \in \mathbb{N}^\ell$, une égalité de la forme (*cf.* 1.4.22-(b) et 1.5.1-(a))

$$a_J = \sum\nolimits_{n\geqslant 0} a_{n,J}\,, \quad \text{avec } a_{n,J} \in \boldsymbol{I}^n \text{ et } a_{n,J} = 0 \text{ si } n < \mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J). \tag{$\diamond\diamond$}$$

La famille $\{a_{n,J}\,\xi^J\}$ est alors sommable de somme z (laissé en exercice) et nous pouvons regrouper les termes de la série double $\sum_{J\in\mathbb{N}^\ell}\sum_{n\geqslant 0} a_{n,J}\, x^J$ sans en modifier la somme, on a donc

$$z = \sum\nolimits_{n\geqslant 0}\Big(\sum\nolimits_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_{n,J}\,\xi^J\Big)\,,$$

où les termes entre parenthèses sont polynomiaux puisque, pour n donné, si nous avons $a_{n,J} \neq 0$, on a $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J) \leqslant n$ par ($\diamond\diamond$), et alors $|J| \leqslant C(n+1)$ par ($\diamond$). On pose alors

$$P_n(X_1, \ldots, X_n) = \Big(\sum\nolimits_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_{n,J}X^J\Big) \in \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n]\,.$$

On a clairement $P_n \in \boldsymbol{I}^n\boldsymbol{R}[\overline{X}]$ d'après le choix de $a_{n,J}$ dans ($\diamond\diamond$) et, d'autre part, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\deg(P_n) \leqslant \sup\{|J| \mid a_{n,J} \neq 0\} \leqslant C(n+1)\,,$$

comme nous l'avons remarqué quelques lignes plus haut. Par conséquent, on a bien une expression de la forme

$$z = \sum\nolimits_n P_n(\xi_1, \ldots, \xi_\ell)\,,$$

vérifiant les conditions ($\mathbb{FC}$). ∎

4.1.5. Exercice. Montrer que l'inclusion $\boldsymbol{R}^\dagger \subseteq \widehat{\boldsymbol{R}}$ est une égalité.

4.1.6. Proposition

a) *Les éléments de* $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger$ *sont séries de* $\boldsymbol{A}^\dagger$ *à termes dans* $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}$.

b) *Le morphisme naturel* $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger$ *est bijectif et* $\mathbf{Gr}^*(\boldsymbol{A}) = \mathbf{Gr}^*(\boldsymbol{A}^\dagger)$ (cf. ([6]) *p.* 12).

c) *Le morphisme canonique* $\iota(\boldsymbol{A}^\dagger) : \boldsymbol{A}^\dagger \to (\boldsymbol{A}^\dagger)^\dagger$ *est bijectif.*

d) *Le complété †-adique d'une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre est une* $\boldsymbol{R}$*-sous-algèbre (*$\boldsymbol{I}$*-adiquement séparée) de* $\widehat{\boldsymbol{A}}$.

e) *Si* $\varphi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *est un morphisme de* $\boldsymbol{R}$*-algèbres, l'image de* $\boldsymbol{A}^\dagger$ *par* $\widehat{\varphi} : \widehat{\boldsymbol{A}} \to \widehat{\boldsymbol{B}}$ *est contenu dans* $\boldsymbol{B}^\dagger$. *Le morphisme* $\varphi^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ *défini par restriction de* $\hat{\varphi}$ *est l'unique morphisme rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{A} & \xrightarrow{\iota(\boldsymbol{A})} & \boldsymbol{A}^\dagger & \xrightarrow{\subseteq} & \widehat{\boldsymbol{A}} \\ \varphi\downarrow & & \varphi^\dagger\downarrow & & \widehat{\varphi}\downarrow \\ \boldsymbol{B} & \xrightarrow{\iota(\boldsymbol{B})} & \boldsymbol{B}^\dagger & \xrightarrow{\subseteq} & \widehat{\boldsymbol{B}} \end{array} \tag{‡‡}$$

f) *La correspondance* $(\_)^\dagger : \mathbf{Alg}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Alg}_\sigma(\boldsymbol{R})$ ([17]) *qui fait correspondre* $\boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{A}^\dagger$ *et* $\varphi^\dagger$ *est fonctorielle, c'est le* «foncteur de complétion †-adique». *Le diagramme* (‡‡) *est fonctoriel.*

Indications. Pour (a,b), on suit de près la preuve de 1.5.1-(a). Il est tout d'abord clair que tout élément de $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger$ se réalise comme série de la forme $\mathbb{FC}$ (resp. $\mathbb{FC}\star$) à coefficients dans $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger$ l'inclusion $\boldsymbol{A}^\dagger \subseteq \widehat{\boldsymbol{A}}$ induit donc une application $\mu_r : \boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger \to \widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{A}}$ dont la composition avec le morphisme naturel $\nu_r : \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger$, à savoir la composition

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}} \xrightarrow{\nu_r} \frac{\boldsymbol{A}^\dagger}{\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger} \xrightarrow{\mu_r} \frac{\widehat{\boldsymbol{A}}}{\boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{A}}}, \tag{$\diamond$}$$

est bijective d'après 1.5.1-(b) ; l'injectivité de ν_r s'ensuit et sa surjectivité résulte de ce que

$$\sum\nolimits_{n\geqslant 0} P_n(x_1,\dots,x_\ell) = \sum\nolimits_{r>n\geqslant 0} P_n(x_1,\dots,x_\ell) \bmod \boldsymbol{I}^r\,,$$

pour toute série $\sum_{n\geqslant 0} P_n(x_1,\dots,x_\ell)$ vérifiant les conditions $\mathbb{FC}$. L'application ν_r dans ($\diamond$) est donc bijective d'inverse μ_r ; par conséquent

$$\big(\boldsymbol{A}^\dagger \cap \boldsymbol{I}^r\widehat{\boldsymbol{A}}\big) \subseteq \boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger\,,$$

et toute série de $\boldsymbol{A}^\dagger$ pouvant s'exprimer comme série de Cauchy à termes dans $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}$ appartient à $\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{A}^\dagger$.

L'assertion (c) est plus délicate et nous conseillons vivement de lire la preuve de [MW] (th. 1.2), nous donnons à continuation une preuve différente. On commence par remarquer que l'inclusion $\iota : \boldsymbol{A}^\dagger \subseteq \widehat{\boldsymbol{A}}$ induit un morphisme canonique $\hat{\iota} : (\boldsymbol{A}^\dagger)\hat{} \to (\widehat{\boldsymbol{A}})\hat{}$ dont les réductions modulo $\boldsymbol{I}^r$ sont bijectives d'après (b) et 1.5.1-(b) ; on a donc $\ker(\hat{\iota}) \subseteq \bigcap_r \boldsymbol{I}^r((\boldsymbol{A}^\dagger)\hat{})$ et $\hat{\iota}$ est injective puisque $(\boldsymbol{A}^\dagger)\hat{}$ est séparé. Comme d'autre part $\widehat{\widehat{\boldsymbol{A}}} = \widehat{\boldsymbol{A}}$ d'après 1.4.22-(c), $\hat{\iota}$ est aussi surjective. Par conséquent $\boldsymbol{A}^{\dagger\hat{}} = \widehat{\boldsymbol{A}}$, et un élément de $\boldsymbol{A}^{\dagger\dagger}$ est, d'après 4.1.4, une série $z \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ de la forme

$$z = \sum\nolimits_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_J\,\xi^J\,, \text{ avec } |J| \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J)+1)\,, \tag{$*$}$$

pour un certain $C \in \mathbb{R}_+$ et avec $\{\xi_1,\dots,\xi_\ell\} \subseteq \boldsymbol{A}^\dagger$.

Fixons maintenant, toujours par 4.1.4, une famille $\{\zeta_1,\dots,\zeta_s\} \subseteq \boldsymbol{A}$ et pour chaque $i = 1,\dots,\ell$ une expression

$$\xi_i = \sum\nolimits_{K\in\mathbb{N}^s} b_{i,K}\,\zeta^K\,, \text{ avec } |K| \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(b_{i,K})+1)\,, \tag{$*'$}$$

pour une constante $C \in \mathbb{R}_+$ que nous pouvons prendre égale à celle de ($*$) quitte à prendre des constantes plus grandes. On a alors pour chaque $m \in \mathbb{N}$:

$$\xi_i^m = \sum\nolimits_{K_1,\dots,K_m\in\mathbb{N}^s} b_{i,K_1}\cdots b_{i,K_m}\,\zeta^{K_1+\cdots+K_m}\,, \qquad \forall i = 1,\dots,\ell\,, \tag{$**$}$$

[17] On rappelle que par l'indice 'σ' on désigne la sous-catégorie pleine des objets séparés (*cf.* 1.2.2).

où par les inégalités $(*')$ on a

$$|K_1 + \cdots + K_m| \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(b_{i,K_1} \cdots b_{i,K_m}) + m)\,, \tag{$**'$}$$

de sorte que si nous reportons $(**)$ dans $(*)$, nous obtenons une famille sommable de termes de la forme

$$a_J\; \underbrace{(b_{1,K_{1,1}} \cdots b_{1,K_{1,j_1}}) \cdots (b_{r,K_{r,1}} \cdots b_{r,K_{r,j_\ell}})}\; \zeta^{(K_{1,1}+\cdots+K_{1,j_1})+\cdots+(K_{\ell,1}+\cdots+K_{r,j_\ell})}\,, \tag{$\diamond$}$$

où par les inégalités $(**')$ on a

$$\begin{aligned} |(K_{1,1} + \cdots + K_{1,j_1}) + \cdots + (K_{\ell,1} + \cdots + K_{\ell,j_\ell})| &\leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(b_{*,\bullet}) + j_1 + \cdots + j_\ell) \\ &\leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(b_{*,\bullet}) + C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J) + 1)) \\ &\leqslant C^2(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J\, b_{*,\bullet}) + 1)\,, \end{aligned}$$

si nous avions en plus pris le soin de prendre $C > 1$ ce qui est possible, et où la notation $b_{\star,\bullet}$ désigne le termes soulignés dans $(\diamond)$. Le regroupement des termes $(\diamond)$ suivant les sommes $K_{1,1} + \cdots + K_{\ell,j_\ell} \in \mathbb{N}^s$ montre alors que l'élément z de $(*)$ admet une représentation sous la forme $\mathbb{FC}^\star$ avec la constante C^2. Par conséquent $z \in \boldsymbol{A}^\dagger$ et nous avons prouvé l'égalité $\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}^{\dagger\dagger}$.

Pour prouver (d) on suit la même démarche que pour 3.1.8-(a), et (e) et (f) sont immédiates. ∎

4.1.7. Algèbres faiblement complètes. Une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est dite « *faiblement complète* » lorsque le morphisme canonique $\iota(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\dagger$ est bijectif.

4.1.8. Exercices

a) Les algèbres $\boldsymbol{A}^\dagger$ sont faiblement complètes. (4.1.6-(c))

b) Si $\varphi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ est un morphisme surjectif de $\boldsymbol{R}$-algèbres, le morphisme induit $\varphi^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ est surjectif.

c) Un quotient séparé d'une algèbre faiblement complète est une algèbre faiblement complète. (*cf.* 1.4.25.)

d) Les algèbres faiblement complètes sont les quotients *séparés* des complétions faibles des algèbres de polynômes. (*cf.* 1.4.23-(b).)

4.2 Complétion †-adique des algèbres de type fini

Lorsque l'algèbre $\boldsymbol{A}$ est de type fini, la définition générale de la complétion faible admet une simplification importante dans la mesure où les systèmes de référence $\{x_1, \ldots, x_\ell\}$ de 4.1.1, où $\{\xi_1, \ldots, \xi_\ell\}$ de 4.1.4, peuvent être gardés fixes.

4.2.1. Proposition. *Si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini de générateurs algébriques $\{\xi_1, \ldots, \xi_\ell\}$, les éléments de $\boldsymbol{A}^\dagger$ sont les séries*

$$z = \sum\nolimits_{n\geqslant 0} P_n(\xi_1, \ldots, \xi_\ell) \in \widehat{\boldsymbol{A}}\,, \quad \textit{telles que} \quad \boxed{P_n \in \boldsymbol{I}^n \boldsymbol{R}[\overline{X}] \ \textit{et} \ \deg P_n \leqslant C(n+1)\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}} \tag{$\dagger$}$$

$$z = \sum\nolimits_{J\in\mathbb{N}^\ell} a_J\, \xi^J \in \widehat{\boldsymbol{A}}\,, \quad \textit{telles que} \quad \boxed{|J| \leqslant C(\mathrm{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_J) + 1)\,, \quad \forall J \in \mathbb{N}^\ell} \tag{$\dagger'$}$$

Démonstration. Corollaire rapide de 4.1.4 modulo l'exercice 4.1.2. ∎

4.3 Propriétés générales de la complétion †-adique

Le théorème suivant donne une liste de propriétés de la complétion †-adique partagées par la complétion formelle (1.5.1). Les démonstrations sont essentiellement les mêmes que pour 1.5.1 et sont laissées en exercice ou bien à consulter dans la référence [MW]. Une exception importante concerne pourtant la preuve de la nœthérianité de $\boldsymbol{A}^\dagger$ qui exige de nouvelles idées (*cf. loc.cit*). Enfin, tout comme dans le cas formel, ces propriétés jouent un rôle très important dans la théorie de la cohomologie de de Rham.

4.3.1. Théorème. *On suppose l'anneau* $\boldsymbol{R}$ *noethérien.*

a) *Si* $\boldsymbol{A}$ *est une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre de type fini et si* $\boldsymbol{B}$ *est une* $\boldsymbol{A}$*-algèbre, on a :*

- $(\boldsymbol{B})^{\dagger}_{\boldsymbol{R}}$ *: le complété †-adique de* $\boldsymbol{B}$ *en tant que* $\boldsymbol{R}$*-algèbre,*
- $(\boldsymbol{B})^{\dagger}_{\boldsymbol{A}}$ *: le complété †-adique de* $\boldsymbol{B}$ *en tant que* $\boldsymbol{A}$*-algèbre.*

Le morphisme naturel $(\boldsymbol{B})^{\dagger}_{\boldsymbol{R}} \to (\boldsymbol{B})^{\dagger}_{\boldsymbol{A}}$ *est bijectif.*

b) *Si* $\boldsymbol{A}$ *est une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre de type fini,* $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ *est noethérienne* ([18]), *on a donc*

$$(\_)^{\dagger} : \mathbf{Alg}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Alg}_{\mathrm{noet.}}(\widehat{\boldsymbol{R}}) .$$

c) *Si* $\boldsymbol{A}$ *est une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre de type fini,* $(\boldsymbol{A}^{\dagger}, \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{\dagger})$ *est de Zariski,* i.e. $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{\dagger} \subseteq \mathrm{Rad}(\boldsymbol{A}^{\dagger})$. *En particulier,* $z \in \boldsymbol{A}^{\dagger}$ *est inversible si et seulement si,* $\bar{z} \in \boldsymbol{A}^{\dagger}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}$ *est inversible.*

d) *Si* $f, g \in \boldsymbol{A}$ *sont tels que* $D(\bar{g}) \subseteq D(\bar{f})$ *dans* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{A})$*, il existe un et un unique morphisme de* $\boldsymbol{A}$*-algèbres* $\rho^{\dagger}_{g,f} : {\boldsymbol{A}_f}^{\dagger} \to {\boldsymbol{A}_g}^{\dagger}$. *De plus si* $\nu_f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_f$ *et* $\nu_g : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_g$ *sont les morphismes de localisation, on a* ${\nu_g}^{\dagger} = \rho^{\dagger}_{g,f} \circ {\nu_f}^{\dagger}$.

e) *Si* $\boldsymbol{A}$ *est une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre de type fini, le morphisme naturel* $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{A}^{\dagger}/\boldsymbol{R}}$ *induit un* ***isomorphisme***

$$\boxed{\boldsymbol{A}^{\dagger} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^{*}_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow[\simeq]{} \big(\Omega^{*}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}/\boldsymbol{R}}\big)_{\sigma}}$$

Indication. Nous expliquons seulement l'inclusion $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{\dagger} \subseteq \mathrm{Rad}(\boldsymbol{A}^{\dagger})$. Référons-nous au paragraphe 4.2 et reprenons ses notations. Pour $z = \sum_J a_J\, \xi^J \in \boldsymbol{A}^{\dagger}$ et $y \in \boldsymbol{I}$ nous devons montrer que $1 - yz$ est inversible dans $\boldsymbol{A}^{\dagger}$. Nous savons déjà que l'inverse de $1 - yz$ dans $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est la série $\sum_{n\geqslant 0} y^n z^n$ (*cf.* la preuve de 1.5.1-(j) p. 14) qui, par sommabilité, est aussi la somme de la famille

$$\mathcal{F} := \left\{ a_{J_1} \cdots a_{J_n}\, y^{|J_1+\cdots+J_n|}\, \xi^{J_1+\cdots+J_n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\,,\ J \in \mathbb{N}^r \right\}$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned} |J_1 + \cdots + J_n| = |J_1| + \cdots + |J_n| &\leqslant C\big(\operatorname{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_{J_1}) + \cdots + \operatorname{ord}_{\boldsymbol{I}}(a_{J_n}) + |J_1| + \cdots + |J_n|\big) \\ &\leqslant C\big(\operatorname{ord}_{\boldsymbol{I}}\big(a_{J_1} \cdots a_{J_n}\, y^{|J_1+\cdots+J_n|}\big)\big) \end{aligned}$$

et si nous regroupons les termes de $\mathcal{F}$ suivant la somme $J_1 + \cdots + J_n$, possible par la sommabilité des sous-familles d'une famille sommable dans un espace complet (1.4.20), nous constatons que la somme de $\mathcal{F}$ dans $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est une série $\sum_{J\in\mathbb{N}^r} b_J\, \xi^J$ telle que $|J| \leqslant C(\operatorname{ord}_{\boldsymbol{I}}(b_J) + 1)$. ∎

4.3.2. Exercice. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini et $P \in \boldsymbol{A}[X]$. Donner des isomorphismes canoniques entre les algèbres suivantes

$$(\boldsymbol{A}[X]_P)^{\dagger} \qquad (\boldsymbol{A}^{\dagger}[X]_P)^{\dagger} \qquad (((\boldsymbol{A}^{\dagger}[X])^{\dagger})_P)^{\dagger}$$

Indication. cf. 1.5.3.

§ 5. Cohomologie de de Rham †-adique des algèbres

Nous définissons la cohomologie de de Rham †-adique d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini en général, nous introduisons la notion d'homotopie de morphismes d'algèbres et démontrons le « *théorème d'homotopie* » qui affirme que deux morphismes homotopes induisent le même morphisme en cohomologie.

À propos de la terminologie. La terminologie « †*-adique* » est la terminologie pour un couple $(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{I})$ générique. Dans le cas où $\boldsymbol{R}$ est un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique et de caractéristique résiduelle p, on parle plutôt de topologie p-adique, complétion p-adique (toujours formelle), complétion p-adique faible où †-adique, complexe de de Rham p-adique et cohomologie de de Rham p-adique.

[18] C'est un résultat dû à Fulton ([MW] p. 185) qui prouve que $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ est noethérienne si $\boldsymbol{A}$ est de type fini. Dans le cas général, l'implication "*$\boldsymbol{A}$ noethérienne $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ noethérienne*" ne semble pas établie contrairement au cas de la complétion formelle.

5.1 Foncteurs complexe et cohomologie de Rham †-adique

Le foncteur « *complexe de de Rham †-adique* » est le foncteur qui associe à une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$ le complexe (4.3.1-(e))

$$\boxed{\big(\Omega^*_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}}\big)_\sigma = \boldsymbol{A}^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}$$

et à un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\varphi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ fait correspondre le morphisme de complexes

$$\Omega^*(\varphi)_\sigma : \big(\Omega^*_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}}\big)_\sigma \to \big(\Omega^*_{\boldsymbol{B}^\dagger/\boldsymbol{R}}\big)_\sigma$$

La « *cohomologie de de Rham †-adique* » d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$ est par définition

$$\boxed{H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{K}) := h^*\big(\boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{R}} \big(\Omega^*_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}}\big)_\sigma\big) = h^*\big(\boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\big)} \qquad (\mathbf{DR}^\dagger)$$

où $\boldsymbol{K}$ désigne le corps de fractions de $\boldsymbol{R}$.

5.1.1. Exemple : cohomologie de de Rham p-adique d'un ouvert principal de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}_p}$.

Il s'agit de la cohomologie du complexe de de Rham p-adique de l'anneau $\mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n]_P$ pour $P \in \mathbb{Z}_p[\overline{X}]$. On pose donc

$$\Omega^*(D(P)/\mathbb{Q}_p) := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\overline{X}, 1/P]^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}_p[\overline{X}]_P} \Omega^*_{\mathbb{Z}_p[\overline{X}]_P/\mathbb{Z}_p} \,,$$

où $\Omega_{\mathbb{Z}_p[X]_P/\mathbb{Z}_p} = \mathbb{Z}_p[X]_P \otimes_{\mathbb{Z}_p[X]} \Omega^*_{\mathbb{Z}_p[X]/\mathbb{Z}_p}$ par la propriété universelle de la localisation des complexes de de Rham algébriques ([19]), donc

$$\Omega^*(D(P)/\mathbb{Q}_p) := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\overline{X}, 1/P]^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}_p[\overline{X}]} \Omega^*_{\mathbb{Z}_p[\overline{X}]/\mathbb{Z}_p}$$

et comme $\Omega^k_{\mathbb{Z}_p[\overline{X}]/\mathbb{Z}_p} = \mathbb{Z}_p[\overline{X}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge^k_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^n$ on a

$$\boxed{\Omega^*(D(P)/\mathbb{Q}_p) := \mathbb{Z}_p[\overline{X}, 1/P]^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}_p} \textstyle\bigwedge^*_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^n}$$

Ainsi, si $\{dX_1, \dots, dX_n\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{Q}_p^n$, une k-forme différentielle p-adique s'écrit

$$\omega = \sum\nolimits_{i_1 < \cdots < i_k} z_{i_1 \cdots i_k}(\overline{X}, 1/P)\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}$$

où $z_{i_1 \cdots i_k}(\overline{X}, 1/P) \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\overline{X}, 1/P]^\dagger$, et alors, tout comme dans le cas classique, on a

$$d\omega = \sum\nolimits_{i_1 < \cdots < i_k} \sum\nolimits_{j=1}^n \frac{\partial z}{\partial X_j}(\overline{X}, 1/P)\, dX_j \wedge \big(dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}\big)\,.$$

5.1.2. Remarque. Bien que ce complexe ressemble beaucoup au complexe algébrique, sa cohomologie est bien différente. Par exemple, et c'est bien une propriété fondamentale, on aura

$$H_{\mathrm{DR}}(D(P_1)/\mathbb{Q}_p) = H_{\mathrm{DR}}(D(P_2)/\mathbb{Q}_p)$$

si $P_1 = P_2 \bmod p$, car $\mathbb{Z}_p[\overline{X}]_{P_1}{}^\dagger$ et $\mathbb{Z}_p[\overline{X}]_{P_2}{}^\dagger$ sont alors canoniquement isomorphes (4.3.1-(d)), contrairement au cas algébrique (non complet) (*cf.* 3.1.2).

[19] Voir les notes du cours "*Cohomologie de de Rham dans la catégorie des Schémas*" § **1.4.4**.

5.1.3. Un petit théorème de comparaison. Comme exemple du paragraphe 5.1.1, regardons la cohomologie p-adique de $D(X) \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}_p}$. Ici le complexe de de Rham †-adique est réduit à deux termes :

$$\mathbf{0} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger \xrightarrow{\partial_X} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger \to \mathbf{0}$$

et les éléments de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger$ sont somme de deux séries (*cf.* 1.4.24) $z \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X]^\dagger$ et $w \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X^{-1}\mathbb{Z}_p[1/X]^\dagger$. La série z admet toujours une primitive d'après 3.1.8-(b) (en fait tout à été fait pour !). D'autre part, la série w se décompose en somme $w = a_1 X^{-1} + w'$ avec $w' := \sum_{n \geqslant 2} a_n X^{-n}$. Une primitive (formelle) pour w' est

$$\int w' = \sum_{n \geqslant 2} \frac{a_n}{-n+1} X^{-n+1}$$

de rayon de convergence $\mathcal{R}(\int w') = \mathcal{R}(w') > 1$ par la formule d'Hadamard (3.1.13-(a)). On voit donc bien que tout 1-cocycle est cohomologue à un multiple de $\frac{dX}{X}$ qui, lui, n'est pas un cobord (en exercice).

Enfin, l'unicité de l'écriture des éléments de éléments de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger$ (*cf.* 1.4.24) montre aussitôt que l'égalité $dw = 0$ ne peut se produire que si w est un multiple de 1.

Par conséquent $H^0_{\mathrm{DR}}(D(X)^\dagger/\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p$, $\quad H^1_{\mathrm{DR}}(D(X)^\dagger/\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p$, $\quad H^k_{\mathrm{DR}}(D(X)^\dagger/\mathbb{Q}_p) = \mathbf{0}$, si $k > 1$.

Ces résultats numériques coïncident avec le cas algébrique, ce qui relève en fait d'un phénomène beaucoup plus intéressant : *le morphisme de complexes*

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} \to & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X] & \xrightarrow{\partial_X} & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X] & \to \mathbf{0} \\
& \downarrow & & \downarrow & \\
\mathbf{0} \to & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger & \xrightarrow{\partial_X} & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger & \to \mathbf{0}
\end{array}$$

induit par l'inclusion de $\mathbb{Z}_p$-algèbres $\mathbb{Z}_p[X, 1/X] \subseteq \mathbb{Z}_p[X, 1/X]^\dagger$, est un quasi-isomorphisme. ([20])

5.1.4. Exercice. Démontrez cette dernière affirmation.

5.2 Homotopie de morphismes

La notion d'homotopie de morphismes est relative à une catégorie. Les paragraphes suivants rappellent sa définition dans les catégories des variétés différentielles, variétés algébriques, schémas et algèbres, et algèbres formellement et faiblement complètes.

5.2.1. Les cas topologique et différentiel. Deux morphismes de variétés différentielles (resp. espaces topologiques) $f_0, f_1 : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ sont « *homotopes* » s'il existe un morphisme de variétés différentielles (resp. application continue) $h : \boldsymbol{X} \times \mathbb{R} \to \boldsymbol{Y}$ tel que, si nous notons $\iota_t : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X} \times \mathbb{R}$ l'injection $x \mapsto (x, t)$, on a $f_i = h \circ \iota_i$

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{X} \arrow[r, shift left, "\iota_1"] \arrow[r, shift right, "\iota_0"'] \arrow[rr, bend left, "f_1"] \arrow[rr, bend right, "f_0"'] & \boldsymbol{X} \times \mathbb{R} \arrow[r, "h"] & \boldsymbol{Y}
\end{tikzcd}$$

5.2.2. Le cas algébrique affine. La définition est la même que dans les cas précédents. Deux morphismes de variétés sur un corps $\boldsymbol{R}$ (resp. schémas sur un anneau $\boldsymbol{R}$) $f_0, f_1 : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ sont « *homotopes* » s'il existe un morphisme de variétés (resp. de schémas) $h : \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{R}} \mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{Y}$ tel que, si nous notons

[20] Plus généralement, si $\boldsymbol{A} := \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n, 1/X_1, \ldots, 1/X_r]$, avec $r \leqslant n$, le morphisme $\mathbb{Q}_p \otimes \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\mathbb{Z}_p} \to \mathbb{Q}_p \otimes \Omega^*_{\boldsymbol{A}^\dagger/\mathbb{Z}_p}$ est un quasi-isomorphisme. L'algèbre $\boldsymbol{A}$ est l'algèbre des fonctions régulières d'un « *diviseur à croisements normaux* », ce résultat montre que les nombres de Betti p-adiques (6.4) d'un tel ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_p}$ coïncident avec ceux de l'ouvert équivalent de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. C'est un résultat clef !

$\iota_t : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X} \times \mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$ l'immersion $x \mapsto (x,t)$, on a $f_i = h \circ \iota_i$

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[r, shift left, "\iota_1"] \arrow[r, shift right, "\iota_0"'] \arrow[rr, bend left, "f_1"] \arrow[rr, bend right, "f_0"'] & \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{R}} \mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}} \arrow[r, "h"] & \boldsymbol{Y} \end{tikzcd}$$

Lorsque $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ sont affines d'anneaux de fonctions régulières les $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{A}$ respectivement, la notion d'homotopie se traduit en : deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\varphi_0, \varphi_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ sont « *homotopes* » s'il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\eta : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]$ tel que, si nous notons $p_t : \boldsymbol{B}[T] \to \boldsymbol{B}$ la projection de $T \mapsto t$, on a $\varphi_i = p_i \circ \eta$

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, "\eta"] \arrow[rr, bend left, "\varphi_1"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_0"'] & \boldsymbol{B}[T] \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_0"'] & \boldsymbol{B} \end{tikzcd}$$

5.2.3. Le cas des complétés. Comme dans le cas algébrique moyennant les complétions d'usage, tantôt la complétion formelle $\widehat{(\_)}$, tantôt la complétion †-adique $(\_)^\dagger$. Ainsi, deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\varphi_1, \varphi_2 : \widehat{\boldsymbol{A}} \to \widehat{\boldsymbol{B}}$ (resp. $\boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$) sont « *homotopes* » s'il existe un morphisme $\eta : \widehat{\boldsymbol{A}} \to \widehat{\boldsymbol{B}}[T]^\wedge$ (resp. $\eta : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger[T]^\dagger$) tel que $\varphi_i = \widehat{p}_i \circ \eta$ (resp. $\varphi_i = {p_i}^\dagger \circ \eta$).

$$\begin{tikzcd} \widehat{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\eta"] \arrow[rr, bend left, "\varphi_1"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_0"'] & \widehat{\boldsymbol{B}}[T]^\wedge \arrow[r, shift left, "\widehat{p}_1"] \arrow[r, shift right, "\widehat{p}_0"'] & \widehat{\boldsymbol{B}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{A}^\dagger \arrow[r, "\eta"] \arrow[rr, bend left, "\varphi_1"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_0"'] & \boldsymbol{B}^\dagger[T]^\dagger \arrow[r, shift left, "{p_1}^\dagger"] \arrow[r, shift right, "{p_0}^\dagger"'] & \boldsymbol{B}^\dagger \end{tikzcd}$$

5.2.4. Théorème d'homotopie. Le résultat suivant est vrai dans tous les contextes, topologique, différentiel et algébriques et la démarche à suivre pour le prouver est toujours la même à quelques petits détails techniques près, ceci nous autorise d'une certaine manière (manque de temps oblige), à nous limiter à ne détailler que le cas †-adique qui intéresse plus particulièrement ces notes. Le « *Lemme de Poincaré* » en est un corollaire immédiat.

5.2.5. Théorème. *Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{B}$, les morphismes ${p_i}^\dagger : \boldsymbol{B}[T]^\dagger \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}^\dagger$, $p_i(T) = i$ et $i = 0, 1$, induisent le même morphisme en cohomologie de de Rham †-adique.*

$$\boxed{H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{B}[T]^\dagger/\boldsymbol{K}) \overset{H_{\mathrm{DR}}(p_1)}{\underset{H_{\mathrm{DR}}(p_0)}{\rightrightarrows}} H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{B}^\dagger/\boldsymbol{K}), \quad H_{\mathrm{DR}}(p_0) = H_{\mathrm{DR}}(p_1)}$$

Démonstration. Le complexe de de Rham †-adique de $\boldsymbol{B}[T]^\dagger$ (5.1) est

$$\big(\Omega^*_{\boldsymbol{B}[T]^\dagger/\boldsymbol{R}}\big)_\sigma = \boldsymbol{B}[T]^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}[T]} \Omega^*_{\boldsymbol{B}[T]/\boldsymbol{R}}$$

et comme $\boldsymbol{B}[T] = \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{R}[T]$, on a l'égalité de complexes de de Rham ([21])

$$\big(\Omega^*_{\boldsymbol{B}[T]/\boldsymbol{R}}, d_*\big) = \big(\Omega^*_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{B},*}\big) \otimes_{\boldsymbol{R}} \big(\Omega^*_{\boldsymbol{R}[T]/\boldsymbol{R}}, d_*\big)$$

et alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} \Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}[T]/\boldsymbol{R}} &= \big(\Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega^0_{\boldsymbol{R}[T]/\boldsymbol{R}}\big) \oplus \big(\Omega^k_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega^1_{\boldsymbol{R}[T]/\boldsymbol{R}}\big) \\ &= \big(\Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{R}[T]\big) \oplus \big(\Omega^k_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{R}[T]\, dT\big) \end{aligned}$$

[21] Voir les notes du cours "*Cohomologie de de Rham dans la catégorie des Schémas*" § **2.4**.

Par conséquent

$$\Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}[T]^\dagger/\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{B}[T]^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}[T]} \Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}[T]/\boldsymbol{T}} = \big(\boldsymbol{B}[T]^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}} \Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}\big) \oplus \big(\boldsymbol{B}[T]^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}} \Omega^{k}_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}\big)\, dT$$

de sorte que $\omega \in \Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}[T]^\dagger/\boldsymbol{R}}$ se décompose canoniquement en

$$\omega = w\alpha + z\beta\ dT\,,\ \text{avec } w, z \in \boldsymbol{B}[T]^\dagger\,,\ \alpha \in \Omega^{k+1}_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}\,,\ \beta \in \Omega^{k}_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}.$$

et alors

$$d\omega = d_{\boldsymbol{B}}(w\alpha) \pm \partial_T(w)\alpha\, dT + d_{\boldsymbol{B}}(z\beta)\, dT\,.$$

D'où l'implication

$$d\omega = 0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} d_{\boldsymbol{B}}(w\alpha) = 0 \\ \partial_T(w)\,\alpha = \mp d_{\boldsymbol{B}}(z\beta) \end{cases} \tag{$*$}$$

D'autre part, pour chaque $t \in \boldsymbol{R}$ on a

$$p_{t,*}(\omega) = w(t)\,\alpha + z(t)\,\beta\, dt = w(t)\,\alpha\,, \quad (\text{car } dt = 0),$$

et donc

$$p_{1,*}(\omega) - p_{2,*}(\omega) = \big(w(1) - w(0)\big)\,\alpha$$

Or, comme l'application $\boldsymbol{\partial_T} : \boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{B}[T]^\dagger \to \boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{B}[T]^\dagger$ est surjective ! on peut écrire

$$p_{1,*}(\omega) - p_{2,*}(\omega) = \big(w(1) - w(0)\big)\alpha = \int_0^1 \partial_T(w)\,\alpha\, dT \underset{\text{par } (*)}{=} \mp \int_0^1 d_{\boldsymbol{B}}(z\beta)\, dT \underset{\star}{=} \mp\, d_{\boldsymbol{B}}\Big(\int_0^1 z\, dT\Big)\,\beta \quad (\diamond\diamond)$$

où l'égalité $=_\star$ résulte de la commutation $\partial_T d_{\boldsymbol{B}} = d_{\boldsymbol{B}}\partial_T$, car pour vérifier que sur $\boldsymbol{K} \otimes \boldsymbol{B}[T]^\dagger$ on a égalité d'opérateurs

$$\int_0^1 d_{\boldsymbol{B}} = d_{\boldsymbol{B}} \int_0^1$$

il suffit de vérifier l'égalité

$$\int_0^T d_{\boldsymbol{B}} = d_{\boldsymbol{B}} \int_0^T$$

et comme ces deux opérateurs produisent des fonctions qui s'annulent pour $T = 0$, il suffit de vérifier que composés à ∂_T on a l'égalité, et ceci est immédiat grâce à la commutation de ∂_T et $d_{\boldsymbol{B}}$, en effet :

$$\partial_T \int_0^T d_{\boldsymbol{B}} = d_{\boldsymbol{B}}\,, \quad \text{et} \quad \partial_T\, d_{\boldsymbol{B}} \int_0^T = d_{\boldsymbol{B}}\, \partial_T \int_0^T = d_{\boldsymbol{B}}\,.$$

Ainsi, l'égalité $(\diamond\diamond)$ prouve que les cocycles $p_{t,*}(\omega)$ son bien cohomologues dans $\boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{B}^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}} \Omega^*_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}$.

Reste à regarder l'action de $p_{t,*}$ et degré 0. Dans ce cas, on remarque que, puisque $\boldsymbol{B}[T]^\dagger \subseteq \boldsymbol{B}[T]^\wedge$ et que $\boldsymbol{B}[T]^\wedge$ est le complété $\boldsymbol{I}$-adique par rapport au couple $(\boldsymbol{B}; \boldsymbol{IB})$ (1.5.1-(e)), les éléments de $\boldsymbol{B}[T]^\dagger$ ont une écriture unique comme séries $\sum_{n\geqslant 0} b_n T^n$ (1.4.23-(a)) et alors, si $w \in \boldsymbol{B}[T]^\dagger$ est tel que $0 = d(w) = \partial_T(w)\, dT + d_{\boldsymbol{B}}(w)$, on a $\partial_T(w) = 0$ et w est indépendant de T, donc $p_{1,*}(w) = p_{0,*}(w)$. ■

5.2.6. Corollaire. *Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini. Les morphismes $\iota : \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A}[X]$ et $\pi_a : \boldsymbol{A}[X] \to \boldsymbol{A}$, pour tout $a \in \boldsymbol{A}$, induisent des morphismes inverses l'un de l'autre en cohomologie de de Rham †-adique.*

$$\begin{tikzcd} H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{K}) \arrow[r, "H_{\mathrm{DR}}(\iota)"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}[X]^\dagger/\boldsymbol{K}) \arrow[r, "H_{\mathrm{DR}}(\pi_a)"] & H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{K}) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Par le théorème 5.2.5, il suffit de regarder le cas $a = 0$. Soit $h : \boldsymbol{A}[X] \to \boldsymbol{A}[X, T]$, le morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres défini par $X \mapsto XT$. Notons $p_i : \boldsymbol{A}[X, T] \to \boldsymbol{A}[X]$ les morphismes de $\boldsymbol{A}[X]$-algèbres définis par $T \mapsto i$ pour $i = 0, 1$. Encore une fois par 5.2.5, les morphismes $\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}[X]} = p_1 \circ h$ et $p_0 \circ h$ induisent le même morphisme en cohomologie, donc $p_0 \circ h = \iota \circ \pi_0$ induit l'identité. Comme d'autre part $\pi_0 \circ \iota = \mathrm{id}$, rien ne reste à prouver. ■

5.2.7. Corollaire (lemme de Poincaré). *Si $\boldsymbol{R}[\overline{X}]$ est l'anneau de polynômes à n variables, les morphismes $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{R}[\overline{X}]$ et $\pi_{\bar{a}} : \boldsymbol{R}[\overline{X}] \to \boldsymbol{R}$, $X_i \mapsto a_i$, pour tout $\bar{a} \in \boldsymbol{R}^n$, induisent des morphismes inverses l'un de l'autre en cohomologie de de Rham †-adique. En particulier*

$$H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{R}[\boldsymbol{X}]^\dagger/\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{K}\,, \qquad H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{R}[\boldsymbol{X}]^\dagger/\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{0}\,, \quad \forall i > 0\,.$$

§ 6. Cohomologie de de Rham †-adique des schémas affines en caractéristique positive

6.1. Esquisse. Plaçons-nous dans le cadre de la catégorie des schémas affines de type fini sur un corps k de caractéristique positive p, ou ce qui revient au même, de la catégorie $\mathbf{Alg}_{\mathrm{tf}}(k)$ des k-algèbres de type fini. On cherche une définition fonctorielle d'une cohomologie de de Rham en caractéristique 0 sur $\mathbf{Alg}_{\mathrm{tf}}(k)$. Comme le corps k est le corps résiduel d'un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique $(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt par exemple) on cherche pour chaque k-algèbre, notée $\overline{\boldsymbol{A}}$, un «*relèvement*» $\boldsymbol{A}$ de $\overline{\boldsymbol{A}}$, *i.e.* une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ coïncide avec $\overline{\boldsymbol{A}}$. On pourrait prendre $\boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{A}}$, mais alors $\boldsymbol{A}$, et donc $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ aussi, seraient de torsion sur $\boldsymbol{R}$ et alors $H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{K}) = 0$ puisque $\boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0}$ (*cf.* 5.1 ($\mathbf{DR}^\dagger$)). On est ainsi emmené à chercher des relèvements «*plats sur* $\boldsymbol{R}$» ([22]), mais cette contrainte ne peut pas toujours être satisfaite ! Elle l'est pourtant pour une classe suffisamment riche de k-algèbres, les «*k-algèbres lisses*» dont les exemples les plus immédiats sont précisément les algèbres $k[\overline{X}]_P$. Nous ne pouvons malheureusement pas les définir dans ces notes, mais il suffira de dire qu'elles constituent les modèles locaux pour les schémas lisses sur k, analogues des variétés algébriques non singulières, pour comprendre leur intérêt, tout comme dans le cadre différentiel ou algébrique ou analytique complexe, la connaissance du complexe de de Rham local permet d'atteindre la cohomologie de de Rham globale via le formalisme de Čech-de Rham.

Le résultat général concernant la problématique des relèvements plats est le suivant ([Ar,E]).

Théorème. *Pour toute algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}$ lisse sur $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$, il existe un relèvement $\boldsymbol{A}$ plat et de type fini sur $\boldsymbol{R}$. Pour deux tels relèvements $\boldsymbol{A}_i$, les algèbres $\boldsymbol{A}_i{}^\dagger$ sont isomorphes (non canoniquement !).*

De plus, pour tout morphisme de k-algèbres lisses $\bar{\varphi} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, il existe un morphisme $\varphi^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ dont la réduction coïncide avec $\bar{\varphi}$. Ce morphisme n'est pas unique, mais deux tels morphismes sont toujours homotopes.

6.2. Foncteur de cohomologie de de Rham †-adique. Au vu du dernier théorème, on défini la cohomologie de de Rham †-adique d'une $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$ par

$$H_{\mathrm{DR}}(\overline{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{K}) := H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{K})$$

et le théorème d'homotopie 5.2.5 intervient maintenant de manière décisive pour démontrer

6.3. Théorème. *La correspondance qui associe*

$$\overline{\boldsymbol{A}} \rightsquigarrow H_{\mathrm{DR}}(\overline{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{K})\,, \quad (\bar{\varphi} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}) \rightsquigarrow \big(H_{\mathrm{DR}}(\varphi^\dagger) : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger\big)$$

est fonctorielle sur la catégorie des $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$-algèbres lisses.

[22] Sur un anneau principal $\boldsymbol{R}$ (anneaux des vecteurs de Witt par exemple) il y a équivalence entre «*plat sur* $\boldsymbol{R}$» et «*sans $\boldsymbol{R}$-torsion*»

6.4. Nombres de Betti. On rappelle pour terminer la notation pour les « *nombres de Betti* », *i.e.* les dimensions des groupes de cohomologie :

- $\mathbf{B}_{\mathrm{top},i}(\boldsymbol{X}/\mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}}(H^i(\boldsymbol{X};\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{X}}))$ ····· cohomologie de faisceaux sur un espace topologique $\boldsymbol{X}$ du faisceau constant $\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{X}}$.
- $\mathbf{B}_{\mathrm{diff},i}(\boldsymbol{X}) = \dim_{\mathbb{R}}(H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}))$ ············· cohomologie du complexe des formes différentielles réelles d'une variété différentielle $\boldsymbol{X}$.
- $\mathbf{B}_{\mathrm{an},i}(\boldsymbol{X}) = \dim_{\mathbb{C}}(H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}))$ ·············· hypercohomologie du complexe des faisceaux des formes différentielles holomorphes d'une variété analytique complexe $\boldsymbol{X}$.
- $\mathbf{B}_{K,i}(\boldsymbol{X}) = \dim_K(H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/K))$ ········· hypercohomologie du complexe des faisceaux des formes différentielles algébrique d'une variété algébrique $\boldsymbol{X}$ sur un corps K de caractéristique nulle.
- $\mathbf{B}_{\ell,i}(\boldsymbol{X}) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell}(H^i(\boldsymbol{X};\underline{\mathbb{Q}_\ell})$ ············ cohomologie de faisceaux pour la topologie étale sur une variété $\boldsymbol{X}$ sur un corps de caractéristique positive p à coefficients dans le faisceau constant $\underline{\mathbb{Q}_\ell}$ avec $\ell \neq p$.
- $\mathbf{B}_{p,i}(\boldsymbol{X}) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\mathbb{Q}_p))$ ········ cohomologie p-adique pour un schéma lisse $\boldsymbol{X}$ sur un corps de caractéristique positive p.

6.5. Exercice. Montrer que $\mathbf{B}_{p,i}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_p}) = \mathbf{B}_{\mathbb{C},i}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) = \mathbf{B}_{\mathrm{an},i}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) = \mathbf{B}_{\mathrm{top},i}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$.

§ 7. Références bibliographiques

[Ar] A. Arabia. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes ; Commentarii Mathematici Helvetici 76 (2001) 607–639. (avril 2000).

[B$_2$] N. Bourbaki. "*Commutative algebra*" ; Elements of mathematics. Herman (1972).

[C] H. Cartan. "*Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*" ; Enseignement des Sciences. Hermann, Paris (1961).

[E] R. Elkik. Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien ; Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, quatrième série, tome 6, pp. 553–604, (1973).

[J] N. Jacobson. "*Basic algebra II (second edition)*" ; W. H. Freeman and Company, New York, (1989).

[M] D. Meredith. Weak formal schemes ; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).

[MW] P. Monsky, G. Washnitzer. Formal cohomology : I ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217, (1968).

[Ser] J.-P. Serre. "*Corps locaux*" ; Actualités scientifiques et industrielles 1296. Hermann (1962).

§ 8. Index terminologique

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes

Dimanche 18 mai 2008