UFR de Mathématiques, Université de Paris 7
DEA 1998/99 deuxième semestre
“Introduction à la cohomologie de de Rham des variétés algébriques”
A. Arabia & Z. Mebkhout

Mercredi 9 juin 1999

Corrigé de l'Examen FINAL

I– Cohomologie de de Rham d'une droite affine privée d'un nombre fini de points

Soit $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif intègre de caractéristique arbitraire et notons $\boldsymbol{Q}$ son corps de fractions. Pour tout sous-ensemble fini $\boldsymbol{F} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ de $\boldsymbol{R}$, on désigne par $S_{\boldsymbol{F}}$ le système multiplicatif de $\boldsymbol{R}[X]$ des éléments de la forme $(X - x_1)^{m_1} \cdots (X - x_r)^{m_r}$ avec $m_i \in \mathbb{N}$. On note $\boldsymbol{A} := S_{\boldsymbol{F}}^{-1}\boldsymbol{R}[X]$.

1) Montrer que l'homomorphisme de $\boldsymbol{R}[X]$ vers $\boldsymbol{A}$ donné par $P(X) \mapsto \frac{P(X)}{1}$, réalise un plongement ouvert de $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$ dans $\mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$. Décrire l'image de ce plongement lorsque $\boldsymbol{R}$ est un corps algébriquement clos.

> Notons $\zeta = \prod_{i=1}^r (X - x_i)$. Comme $\zeta \in S_{\boldsymbol{F}}$, l'homomorphisme en question se factorise par l'application canonique $\boldsymbol{R}[X]_\zeta \to S_{\boldsymbol{F}}^{-1}\boldsymbol{R}[X]$ qui est un isomorphisme puisque l'inversibilité des éléments de $S_{\boldsymbol{F}}$ équivaut à l'inversibilité de ζ. En particulier, $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$ est isomorphe en tant que schéma à l'ouvert principal $D(\zeta) \subseteq \operatorname{Spec}(\boldsymbol{R}[X]) = \mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$.
>
> Le complémentaire de $D(\zeta)$ est l'ensemble des idéaux premiers de $\boldsymbol{R}[X]$ qui contiennent l'un quelconque des $(X - x_i)$. Comme les idéaux $\langle X - x_i \rangle$ sont maximaux dès que $\boldsymbol{R}$ est un corps, $D(\zeta)$ est, dans ces cas, le complémentaire dans $\mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$ d'un ensemble fini qui s'identifie canoniquement à $\boldsymbol{F}$.

2) Montrer que $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse de dimension relative 1 et c'est une intersection transverse.

> Comme $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$ est ouvert dans $\mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$ au-dessus de $\boldsymbol{R}$, il est automatiquement lisse de même dimension relative que $\mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$. D'autre part, l'équivalence $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{R}[X, Z]/\langle Z\zeta - 1\rangle$ montre que $\boldsymbol{A}$ est bien une intersection transverse puisque $\boldsymbol{R}[X, Z] = \langle Z\zeta - 1, \zeta, Z\zeta' \rangle$.

3) Prouver que $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est un $\boldsymbol{A}$-module libre de rang 1.

> On sait que la localisation commute au foncteur Ω, on a donc :
>
> $$\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{R}[X]_\zeta \otimes_{\boldsymbol{R}[X]} \Omega_{\boldsymbol{R}[X]/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{A}\, dX$$

4) Expliciter chaque ingrédient du complexe de de Rham $\big(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},*}\big)$.

> On a $\Omega^i_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} = \bigwedge^i_{\boldsymbol{R}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0}$ pour tout $i > 1$ puisque $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est libre de rang 1. Le complexe de de Rham est donc réduit à deux termes et une différentielle :
>
> $$\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{A} \xrightarrow{\ d\ } \boldsymbol{A}\, dX \to \boldsymbol{0}$$
>
> D'autre part, comme $\boldsymbol{A}$ est une algèbre de fractions de $\boldsymbol{R}[X]$, la différentielle $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est entièrement déterminée par la différentielle $d_{\boldsymbol{R}[X]/\boldsymbol{R}}$ de sorte que l'on a la formule habituelle :
>
> $$d\big(P(X)/\zeta^m\big) = \frac{P'(X)\,\zeta^m - P(X)\, m\, \zeta^{m-1}}{\zeta^{2m}} dX$$

5) Soit $f \in \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$. Montrer qu'il existe ***une et une seule*** famille $\{P_0^f(X), c(f)_{i,m}\}$ vérifiant :

$$f = P_0^f(X) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \frac{c(f)_{i,m}}{(X - x_i)^m}\,,$$

avec $P_0^f(X) \in \boldsymbol{Q}[X]$ et $c(f)_{i,m} \in \boldsymbol{Q}$.

Existence. Il suffit de le prouver pour f de la forme :

$$f = \frac{P(X)}{(X-x_1)^{m_1}\dots(X-x_r)^{m_r}}\,, \qquad \text{avec } d^\circ(P(X)) < \textstyle\sum_{i=1}^r m_i.$$

On procède alors par induction sur $m = \sum m_i$.

Lorsque $m < 2$ on n'a rien à prouver. Dans le cas général l'un des m_i sera non nul, supposons que ce soit m_1. On écrit alors $P(X) = Q(X)(X-x_1) + P(x_1)$ d'où l'égalité :

$$\begin{aligned} f &= \frac{Q(X)(X-x_1)+P(x_1)}{(X-x_1)^{m_1}\dots(X-x_r)^{m_r}} = \\ &= \frac{Q(X)}{(X-x_1)^{m_1-1}\dots(X-x_r)^{m_r}} + \frac{P(x_1)}{(X-x_1)^{m_1}\dots(X-x_r)^{m_r}} \end{aligned}$$

où le premier terme admet par l'hypothèse inductive une décomposition du type cherché. Pour le second terme, il suffit de supposer $P(x) = 1$ et nous sommes amenés à étudier les expressions de la forme :

$$\frac{1}{(X-x_1)^{m_1}\dots(X-x_r)^{m_r}} \tag{‡}$$

où il existe au moins deux m_i non nuls. Or, comme les $x_i - x_j$ sont non nuls dans $\boldsymbol{Q}$ puisque $\boldsymbol{R}$ est intègre, on a les décompositions :

$$\frac{1}{(X-x_i)(X-x_j)} = \frac{(x_i-x_j)^{-1}}{X-x_i} + \frac{(x_j-x_i)^{-1}}{X-x_j}$$

qui ramènent les expressions (‡) à d'autres dans la portée de l'hypothèse inductive.

Unicité. Elle revient à prouver que si l'on a :

$$0 = P(X) + \sum_{i=1}^r \sum_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \frac{c_{i,m}}{(X-x_i)^m}\,,$$

avec $P(X) \in \boldsymbol{Q}[X]$ et $c_{i,m} \in \boldsymbol{Q}$, alors $P(X) = 0$ et $c_{i,m} = 0$ pour tous i, m.

Ceci résulte d'arguments élémentaires que nous ne détaillons pas.

► En déduire la $\boldsymbol{Q}$-linéarité et la surjectivité de l'application :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} : \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A} &\longrightarrow \boldsymbol{Q}^r \\ f &\longmapsto \big(c(f)_{1,1}, \dots, c(f)_{r,1}\big) \end{aligned}$$

La linéarité résulte de l'unicité des décompositions et la surjectivité est évidente puisque $\boldsymbol{I} : 1/(X-x_i) \mapsto \mathbf{e}_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$.

6) Montrer que l'application $\boldsymbol{I}$ induit une surjection de $\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R})$ sur $\boldsymbol{Q}^r$ qui est bijective lorsque $\boldsymbol{R}$ est de caractéristique nulle, mais possède un noyau de dimension infinie autrement.

Comme $\boldsymbol{Q}\otimes_{\boldsymbol{R}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{Q}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}\,dX$, nous définissons $\boldsymbol{I} : \boldsymbol{Q}\otimes_{\boldsymbol{R}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{Q}^r$ par $\boldsymbol{I}(f\,dX) = \boldsymbol{I}(f)$. De plus, pour tout $f \in \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ on a d'après (4) et (5) :

$$(1\otimes d)(f) = P_0^f(X)' - \sum_{i=1}^r \sum_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \frac{m\,c(f)_{i,m}}{(X-x_i)^{m+1}}\,, \tag{$\diamond$}$$

de sorte que $\boldsymbol{I} \circ d = 0$, puisque les décompositions en termes simples des images de $1 \otimes d$ ne font intervenir aucun des termes $1/(X-x_i)$.

La surjection $\boldsymbol{I}:\boldsymbol{Q}\otimes_{\boldsymbol{R}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\twoheadrightarrow\boldsymbol{Q}^r$ définit donc, par passage au quotient, une surjection :

$$\boldsymbol{Q}\otimes_{\boldsymbol{R}} H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R})=\frac{\boldsymbol{Q}\otimes_{\boldsymbol{R}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}{\mathrm{im}(1\otimes d)}\xrightarrow{\ \boldsymbol{I}'\ }\!\!\!\!\twoheadrightarrow\boldsymbol{Q}^r$$

où l'égalité se justifie par le fait que tout foncteur de localisation (en particulier $\boldsymbol{Q}\otimes_{\boldsymbol{R}}(\_)$) est exact.

D'autre part, lorsque $\boldsymbol{Q}$ est de caractéristique nulle, on construit facilement une primitive pour tout $f\in\ker(\boldsymbol{I})$ et $\boldsymbol{I}'$ est bien un isomorphisme. Par contre, en caractéristique positive p il n'y a pas de primitive pour les éléments de $\ker(\boldsymbol{I}')$ de la forme

$$c_1X^{p-1}+c_2X^{p^2-1}+\cdots+c_mX^{p^m-1}$$

et ceci quels que soient $m\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $c_1,\dots,c_m\in\boldsymbol{Q}$ non tous nuls. En particulier, ces éléments sont non cohomologues et constituent un sous-espace vectoriel de dimension infinie de $\boldsymbol{Q}\otimes_{\boldsymbol{R}} H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R})$.

7) Expliciter les autres groupes de cohomologie du complexe $\boldsymbol{Q}\otimes_{\boldsymbol{R}}\left(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}},d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},*}\right)$.

$\boldsymbol{Q}\otimes_{\boldsymbol{R}} H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R})=\ker(1\otimes d)$. En caractéristique 0 l'égalité ($\diamond$) montre que $\ker(1\otimes d)=\boldsymbol{Q}$. En caractéristique positive p, on a $X^{p^\alpha}\in\ker(1\otimes d)$ pour tout $\alpha\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $\ker(1\otimes d)$ est de dimension infinie.

8) Dans cette question $\boldsymbol{R}:=\mathbb{F}_p$.

On note $\nu:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_p/\langle p\rangle=:\mathbb{F}_p$ la projection canonique de l'anneau des entiers p-adiques sur son corps résiduel.

Pour toute partie finie $\boldsymbol{G}$ de $\mathbb{Z}_p$ qui relève $\boldsymbol{F}$, *i.e.* telle que $\nu(\boldsymbol{G})=\boldsymbol{F}$, on note $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}}:=S_{\boldsymbol{G}}^{-1}\mathbb{Z}_p[X]$.

a) Montrer que la réduction modulo p de l'anneau $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}}$ s'identifie canoniquement à $\boldsymbol{A}$.

La réduction modulo p d'une $\mathbb{Z}_p$-algèbre $\mathcal{A}$ est la $\mathbb{F}_p$-algèbre $\mathbb{F}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{A}$. On a donc :

$$\mathbb{F}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}}\equiv\mathbb{F}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}S_{\boldsymbol{G}}^{-1}\mathbb{Z}_p[X]\equiv S_{\nu(\boldsymbol{G})}^{-1}\mathbb{F}_p[X]=\boldsymbol{A}$$

b) A l'aide de (7) donner un invariant des algèbres $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}}$ permettant de dire que deux algèbres $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_1}$ et $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_2}$ ne sont pas isomorphes.

Les algèbres $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}}$ rentrent dans le cadre de la question (6) et donc $\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}}))=\#\boldsymbol{G}$. Comme les nombres de Betti sont des invariants pour les $\mathbb{Z}_p$-algèbres (de type fini), on conclut que $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_1}\not\equiv\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_2}$ dès que $\#\boldsymbol{G}_1\neq\#\boldsymbol{G}_2$.

c) Pour chaque algèbre $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}}$, on note $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}}$ sa complétion pour la topologie p-adique.

Pour toute inclusion d'ensembles $\boldsymbol{G}_1\subseteq\boldsymbol{G}_2$, l'inclusion $S_{\boldsymbol{G}_1}\subseteq S_{\boldsymbol{G}_2}$ donne l'homomorphisme d'algèbres canonique habituel $h(\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_1):\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_1}=S_{\boldsymbol{G}_1}^{-1}\mathbb{Z}_p[X]\to S_{\boldsymbol{G}_2}^{-1}\mathbb{Z}_p[X]=\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_2}$.

c-i) Exhiber un isomorphisme :

$$\xi(\boldsymbol{G}):\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}}\xrightarrow[\equiv]{}\frac{\mathbb{Z}_p[X,Z]}{\left\langle Z\prod_{y\in\boldsymbol{G}}(X-y)-1\right\rangle}.$$

Découle des réponses aux questions (1) et (2). On a :

$$\xi(\boldsymbol{G})\left(\frac{P(X)}{\prod_{y\in\boldsymbol{G}}(X-y)^m}\right)=\overline{P(X)\,Z^m}$$

c-ii) Suite à la question précédente, expliciter les éléments $X' := \xi(\boldsymbol{G}_2)\circ h(\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_1)\circ\xi(\boldsymbol{G}_1)^{-1}(X)$ et $Z' := \xi(\boldsymbol{G}_2)\circ h(\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_1)\circ\xi(\boldsymbol{G}_1)^{-1}(Z)$.

> On a $X' = X$ et $Z' = Z\prod_{y\in\boldsymbol{G}_2\setminus\boldsymbol{G}_1}(X-y)$.
>
> En effet, Z représente l'inverse de $\prod_{y\in\boldsymbol{G}_1}(X-y)$ dans $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_1}$ tandis qu'il représente l'inverse de $\prod_{y\in\boldsymbol{G}_2}(X-y)$ dans $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_2}$.

c-iii) Prouver que la composée $\xi(\boldsymbol{G}_2)\circ h(\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_1)\circ\xi(\boldsymbol{G}_1)^{-1}$ induit une ***bijection*** entre les complétions p-adiques :

$$\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_1} \equiv \frac{\widehat{\mathbb{Z}_p[X,Z]}}{\left\langle Z\prod_{y\in\boldsymbol{G}_1}(X-y)-1\right\rangle} \xrightarrow[\equiv]{\xi(\boldsymbol{G}_2)\circ h(\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_1)\circ\xi(\boldsymbol{G}_1)^{-1}} \frac{\widehat{\mathbb{Z}_p[X,Z]}}{\left\langle Z\prod_{y\in\boldsymbol{G}_2}(X-y)-1\right\rangle} \equiv \widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_2}\,.$$

> D'après (c-ii) il suffira de prouver que $\prod_{y\in\boldsymbol{G}_2\setminus\boldsymbol{G}_1}(X-y)$ est inversible dans $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_1}$.
>
> Pour chaque $y\in\boldsymbol{G}_2\setminus\boldsymbol{G}_1$ il existe (par définition des ensembles $\boldsymbol{G}$) un $y_0\in\boldsymbol{G}_1$ tel que $\nu(y)=\nu(y_0)$; autrement dit tel que $y-y_0\in p\,\mathbb{Z}_p$. Alors :
>
> $$(X-y) = X-y_0+p\,w = (X-y_0)\big(1+p\,w\,(X-y_0)^{-1}\big)$$
>
> pour un certain $w\in\mathbb{Z}_p$, et le dernier facteur est inversible dans $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_1}$.
>
> *Remarque.* Cette démonstration prouve que la même conclusion est vrai pour tous $\boldsymbol{G}_1\subseteq\boldsymbol{G}_2\subseteq\mathbb{Z}_p[X]$ vérifiant $\nu(\boldsymbol{G}_i)=\boldsymbol{F}$.

c-iv) En déduire que les algèbres $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}}$ sont deux-à-deux isomorphes.

> Pour $\boldsymbol{G}_1$ et $\boldsymbol{G}_2$ donnés, on a les isomorphisme de (c-iii) : $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_1}\equiv\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_1\cup\boldsymbol{G}_2}\equiv\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_2}$.

9) Dans cette dernière question on choisit $\boldsymbol{R} := \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{U}\subseteq\mathbb{C}$ l'ouvert complémentaire d'un ensemble fini de nombres complexes $\boldsymbol{F}\subseteq\mathbb{C}$. On considère $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$ muni de la topologie transcendante induite par celle de $\mathbb{C}$. Expliciter les nombres de Betti de la cohomologie de de Rham des formes différentielles réelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Indication. — Utiliser la suite exacte longue de cohomologie à support compact associée au triplet $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})\subseteq\mathbb{C}\supseteq\boldsymbol{F}(\mathbb{C})$, puis la dualité de Poincaré.

> La suite exacte en question en degrés $0,1$ est :
>
> $$\begin{array}{cccccccccccccc} \mathbf{0}\to & H^0_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U};\mathbb{C}) & \to & H^0_{\mathrm{DR},c}(\mathbb{C};\mathbb{C}) & \to & H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F};\mathbb{C}) & \to & H^1_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U};\mathbb{C}) & \to & H^1_{\mathrm{DR},c}(\mathbb{C};\mathbb{C}) & \to & H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F};\mathbb{C}) & \to \\ & 0 & & 0 & & \mathbb{C}^r & & & & 0 & & 0 & \end{array}$$
>
> Ce qui donne :
>
> $$\begin{cases} \dim_{\mathbb{C}}\big(H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})\big) = \mathbb{C}\,, & \text{par connexité ;} \\ \dim_{\mathbb{C}}\big(H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})\big) = \dim_{\mathbb{C}}\big(H^1_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})\big) = r\,; & \\ \dim_{\mathbb{C}}\big(H^2_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})\big) = \dim_{\mathbb{C}}\big(H^0_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})\big) = 0\,; & \end{cases}$$
>
> où les dernières égalités résultent de la dualité de Poincaré.

———— × ————

II– Cohomologie de de Rham du complémentaire d'une hypersurface lisse de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Soit $\boldsymbol{X}\subseteq\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ une hypersurface ***irréductible et lisse*** définie par un polynôme $f\in\mathbb{C}[X_0,\dots,X_n]$ homogène de degré d. On note $\boldsymbol{U}\subseteq\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ l'ouvert complémentaire de $\boldsymbol{X}$.

Rappel. Comme f est homogène l'anneau $\mathbb{C}[X_0,\dots,X_n][1/f]$ est gradué sur $\mathbb{Z}$, ses éléments homogènes de degré zéro constituent alors un sous-anneau que nous notons $R[\boldsymbol{U}] := \mathbb{C}[X_0,\dots,X_n][1/f]^0$.

Dans ce problème on admettra que $\boldsymbol{U}$ est isomorphe en tant que schéma à $\mathrm{Spec}(R[\boldsymbol{U}])$.

Rappelons rapidement la démonstration de ce résultat dans le langage des schémas.

Pour tout anneau commutatif $\boldsymbol{R}$, le complémentaire d'une hypersurface $\boldsymbol{Y}$ de $\mathbb{P}^n_{\boldsymbol{R}}$ est isomorphe au schéma affine $\operatorname{Spec}\big(\boldsymbol{R}[X_0,\ldots,X_n][1/f]^0\big)$ *où f désigne le polynôme homogène qui définit $\boldsymbol{Y}$.*

Démonstration : On note $d = d^0(f)$ et nous allons supposer que f n'est divisible par aucun des X_i, ce qui est toujours possible quitte à faire un changement linéaire des variables $\{X_0,\ldots,X_n\}$. Une remarque fondamentale apparaît dans les diagrammes suivants qui dépendent de $i = 0,\ldots,n$:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{R}[X_0,\ldots,X_n][1/f]^0 \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\nu"'] & \boldsymbol{R}[X_0,\ldots,X_n][1/f] \arrow[d, "\pi"'] \\ \boldsymbol{R}[X_0,\ldots,X_n][1/f]^0\big[f/X_i^d\big] \arrow[r, dashed, "\bar\iota", "\simeq"'] & \dfrac{\boldsymbol{R}[X_0,\ldots,X_n][1/f]}{\langle X_i - 1\rangle} \end{tikzcd}$$

La première ligne est l'injection canonique et l'on montre aisément que l'idéal $\langle X_i - 1\rangle$ de l'anneau $\boldsymbol{R}[X_0,\ldots,X_n][1/f]$ ne contient aucune fraction homogène de degré 0. Par conséquent la composée $\pi\circ\iota$ est injective. Mais $(\pi\circ\iota)(X_i^d/f)$ est inversible et $\pi\circ\iota$ se factorise à travers ν en une injection $\bar\iota$ qui est surjective puisque :

$$\frac{X_i^{d-1}X_j}{f}\,\frac{f}{X_i^d} \stackrel{\bar\iota}{\longmapsto} \overline{X}_j$$

On remarque ensuite que les anneaux $\boldsymbol{R}[X_0,\ldots,X_n][1/f]/\langle X_i - 1\rangle$ sont précisément les anneaux $\mathscr{O}_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U}\cap U_i)$ où U_i désigne le complémentaire dans $\mathbb{P}^n_{\boldsymbol{R}}$ de l'hypersurface $\{X_i = 0\}$. L'application ι définit donc un homomorphisme d'anneaux $\boldsymbol{R}[X_0,\ldots,X_n][1/f]^0 \to \mathscr{O}_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U})$ qui est un isomorphisme local. On en déduit une application

$$\sigma : \boldsymbol{U} \to \operatorname{Spec}\big(\boldsymbol{R}[X_0,\ldots,X_n][1/f]^0\big)$$

dont les restrictions aux ouverts $\boldsymbol{U}\cap U_i$ sont des plongements ouverts de schémas, en particulier σ est continue.

Pour l'étude de l'application ensembliste σ nous pouvons supposer que l'anneau $\boldsymbol{R}$ est réduit.

La surjectivité de σ résulte de l'égalité $\bigcup_i \sigma(\boldsymbol{U}\cap U_i) = \operatorname{Spec}\big(\boldsymbol{R}[X_0,\ldots,X_n][1/f]^0\big)$ et comme on a $\sigma(\boldsymbol{U}\cap U_i) = D(X_i^d/f)$, il suffit de montrer que $1 \in \langle X_0^d/f,\ldots,X_n^d/f\rangle \subseteq \boldsymbol{R}[X_0,\ldots,X_n][1/f]^0$ ce qui est conséquence du fait que $f^d \in \langle X_0^d,\ldots,X_n^d\rangle \subseteq \boldsymbol{R}[X_0,\ldots,X_n]$.

Enfin, l'injectivité de σ résulte de ce que pour tous $u_1, u_2 \in \boldsymbol{U}$ avec $u_1 \neq u_2$, il existe $g \in \boldsymbol{R}[X_0,\ldots,X_n][1/f]^0$ tel que $g(u_1) \neq g(u_2)$. Or, comme $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{P}^n_{\boldsymbol{R}}$ on sait qu'il existe un polynôme homogène $g' \in \boldsymbol{R}[X_0,\ldots,X_n]$ tel que $g'(u_1) \neq g'(u_2)$. Soit $d' = d^\circ(g')$ alors $g := (g')^d/f^{d'}$ répond à la question. ■

1) Montrer que $R[\boldsymbol{U}]$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini, lisse sur $\mathbb{C}$ et de dimension relative n.

$R[\boldsymbol{U}]$ est clairement engendrée par les monômes $X_0^{m_1}\cdots X_n^{m_n}/f$ avec $\sum m_i = d$, c'est donc bien une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini. Comme $\boldsymbol{U}$ est un ouvert de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, la $\mathbb{C}$-algèbre $R[\boldsymbol{U}]$ est bien lisse de dimension relative n.

2) Justifier la finitude des nombres de Betti $\dim_{\mathbb{C}}\big(H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}/\mathbb{C})\big)$.

C'est un théorème que les nombres de Betti des variétés lisses sur un corps de caractéristique nulle sont finis ; il a été démontré pour la première fois sur le corps des nombres complexes par A. Grothendieck dans son article "On the de Rham cohomology of algebraic varieties" (IHES ; Publications Mathématiques, **29**, 351–359, 1966). Nous n'avons pas démontré ce théorème dans le cours mais dans notre cas, le théorème de comparaison de Grothendieck donne des isomorphismes canoniques $H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}/\mathbb{C}) \equiv H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))$ et la dualité de Poincaré montre que $\dim_{\mathbb{C}}(H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))) = \dim_{\mathbb{C}}(H^{2n-i}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C})))$ de sorte que la finitude des nombre de Betti résultera de la finitude de la cohomologie de de Rham à support compact de $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$ ce qui est expliqué dans la réponse à la question suivante.

3) On considère $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$, $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$ et $\boldsymbol{X}(\mathbb{C})$ munis de la topologie transcendante. Justifier la finitude des dimensions des espaces $H^i_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))$, $H^i_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}))$ et $H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))$.

La finitude des nombres de Betti des variétés $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ et de $\boldsymbol{X}(\mathbb{C})$ résulte de leur compacité et celle des nombres de Betti de $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$, du fait que les $H^i_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))$ sont dans la suite exacte longue de cohomologie à support compact associée au triplet $\boldsymbol{U}(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \supseteq \boldsymbol{X}(\mathbb{C})$.

4) Le but de cette question est de montrer que $\boldsymbol{H^r_{\mathrm{DR}}(U/\mathbb{C}) = 0}$ pour tout $\boldsymbol{r \notin \{0, n\}}$.

a) Donner une justification *a priori* de l'annulation des $H^{n+i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))$ lorsque $i > 0$. En déduire :

$$\begin{cases} H^{n-i}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \equiv H^{n-i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))\,, & \text{pour tout } i \geqslant 2\,; \\ H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \subseteq H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))\,. & \end{cases}$$

Indication. Penser à la suite exacte longue de cohomologie de de Rham à support compact.

Comme $\boldsymbol{U}$ est (lisse) de dimension n le complexe de de Rham algébrique $\Omega^*_{\boldsymbol{U}/\mathbb{C}}$ est concentré en degrés $[0, \ldots, n]$ et donc $H^j_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}/\mathbb{C}) = 0$ pour tout $j > n$. D'autre part, le théorème de comparaison de Grothendieck nous dit précisément que puisque $\boldsymbol{U}$ est ***affine*** la cohomologie du complexe de de Rham algébrique s'identifie canoniquement à la cohomologie du faisceau constant $\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{U}(\mathbb{C})}$ qui est, à son tour, canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe de de Rham différentiable à coefficients dans $\mathbb{C}$ d'après le théorème de comparaison de de Rham.

On a donc $H^{n+j}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C})) = 0$ pour tout $j > 0$, et alors $H^{n-j}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C})) = 0$ pour tout $j > 0$, par dualité de Poincaré. Lorsque l'on reporte cette information dans la suite exacte longue de cohomologie à support compact :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \to H^{n-2}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^{n-2}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^{n-2}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & H^{n-1}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & H^n_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) \\ 0 & & & \equiv & & & 0 & & & \subseteq & & & ? \end{array}$$

on obtient le résultat demandé.

b) *Rappel.* L'anneau $H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}))$ est isomorphe en tant qu'algèbre graduée à $\mathbb{C}[T]/\langle T^n \rangle$ où T est considéré de degré 2.

Soit $\omega \in H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ ***non nul*** et notons ϖ sa restriction à $\boldsymbol{X}$. Le théorème de Lefschetz « *difficile* » affirme dans notre cas ($\boldsymbol{X}(\mathbb{C})$ est lisse) que l'application $L(\varpi^{\wedge i}) : H^{(n-1)-i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C})) \to H^{(n-1)+i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))$ qui fait correspondre $\mu \mapsto \varpi^{\wedge i} \wedge \mu$, est un ***isomorphisme*** pour tout $i > 0$.

► A l'aide de ce théorème et des résultats précédents prouver :

$$H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}/\mathbb{C}) = \boldsymbol{0}\,, \qquad \text{pour tout } 0 < r < n.$$

Par le théorème de comparaison de Grothendieck et la dualité de Poincaré, il revient au même de montrer que $H^r_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C})) = \mathbf{0}$, pour tout $n < r < 2n$.

Pour chaque $i > 0$ on a :

$$\begin{tikzcd} H_{\mathrm{DR}}^{(n-1)-i}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \arrow[r, "L(T^i)", "\equiv"'] \arrow[d, "\equiv"'] \arrow[dr, phantom, "\bigoplus"] & H_{\mathrm{DR}}^{(n-1)+i}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \arrow[d] \\ H_{\mathrm{DR}}^{(n-1)-i}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C})) \arrow[r, "L(\varpi^{\wedge i})", "\equiv"'] & H_{\mathrm{DR}}^{(n-1)+i}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C})) \end{tikzcd}$$

Le morphisme de la première ligne résulte de la structure d'anneau de $H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ rappelée dans l'énoncé. Puis, les morphismes verticaux sont donnés par la restriction de classes de cohomologie et la question précédente a montré la bijectivité de celui de gauche. Enfin l'isomorphisme de la seconde ligne est celui du théorème de Lefschetz. La commutativité du diagramme résulte du fait que le morphisme de restriction est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres et que l'isomorphisme $H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \equiv H^2_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X})$ permet de supposer que la restriction de T à $\boldsymbol{X}$ est la classe ϖ. Les restrictions

$$H^{n+i}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \to H^{n+i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))$$

sont donc des isomorphisme pour tout $i \geqslant 0$, et lorsque l'on reporte cette information dans la suite exacte longue de cohomologie à support compact :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} H^n_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^n_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^n_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & H^{n+1}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^{n+1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^{n+1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & H^{n+2}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to \\ ? & & 0 & \equiv & & & 0 & & & \equiv & & & 0 & \end{array}$$

qui termine par :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \to & H^{2n-1}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^{2n-1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^{2n-1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & H^{2n}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^{2n}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^{2n}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & \mathbf{0} \\ & 0 & & 0 & & 0_* & & \mathbb{C} & \equiv & \mathbb{C} & & 0 & & \end{array}$$

où le '0_*' se justifie par une simple raison de dimension : $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{X}) = 2(n-1)$, on obtient le résultat demandé.

———————×———————

(fin de l'examen)