UFR de Mathématiques, Université de Paris 7
DEA 1994/95 deuxième semestre
“Introduction à la cohomologie de de Rham des variétés algébriques”
A. Arabia & Z. Mebkhout

Lundi 9 juin 1997

Examen FINAL

Un soin particulier à la rédaction est demandé.
Les astérisques indiquent l'importance des questions et non pas leur difficulté.

Cohomologie de de Rham des courbes

Le problème proposé se divise en trois parties :

- **Partie A** Destinée à établir quelques résultats généraux concernant la cohomologie de de Rham, notée $H^*_{\text{DR}}(\boldsymbol{X}/k)$, d'une courbe (variété algébrique $\boldsymbol{X}$ de dimension un), irréductible et quasi-projective, définie sur un corps algébriquement clos k de caractéristique nulle.
- **Partie B** Spécialisation au cas des courbes **projectives** et **lisses**, irréductibles définies sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. L'application du théorème de dualité de Serre et du théorème comparaison des cohomologies de de Rham algébrique et C^∞, permettra alors de raffiner les résultats de la première partie en démontrant un théorème de décomposition de Hodge.

  Rappelons que dans le cas d'une courbe projective et lisse $\boldsymbol{X}$, la dualité de Serre établit des identifications canoniques :

$$H^0\big(\boldsymbol{X},\underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{X}/k}\big) \equiv H^1\big(\boldsymbol{X},\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/k}\big)^* \quad \text{et} \quad H^1\big(\boldsymbol{X},\underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{X}/k}\big) \equiv H^0\big(\boldsymbol{X},\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/k}\big)^* .$$

  où l'on note V^* l'espace des formes linéaires d'un espace vectoriel V sur k.
- **Partie C** Application à l'étude des courbes elliptiques.

———————×———————

Partie A

Soit $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique de dimension un, *irréductible* et quasi-projective, définie sur un corps algébriquement clos k de caractéristique nulle. Fixons un plongement $\boldsymbol{X} \hookrightarrow \mathbb{P}_N(k)$, où $N \in \mathbb{N}$ et où $\mathbb{P}_N(k)$ désigne l'espace projectif des droites vectorielles de k^{N+1}. Notons $U_i \subseteq \mathbb{P}_N(k)$ l'ouvert (affine) déterminé par les droites $\langle(x_0,\dots,x_N)\rangle$ telles que $x_i \neq 0$. La famille $\mathsf{U} := \{U_i \cap \boldsymbol{X}\}_{i=0,\dots,N}$ définit alors un recouvrement de $\boldsymbol{X}$ par des ouverts *affines*.

On notera $\big(\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/k}; d_*\big)$ le complexe des faisceaux des formes formes différentielles (algébriques) sur $\boldsymbol{X}$. Rappelons, à ce sujet, que sur une variété affine et irréductible sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, les fonctions régulières de différentielle nulle sont nécessairement constantes, *même lorsque la variété n'est pas lisse.*

On notera aussi $(\mathsf{C}^*(\mathsf{U},\mathsf{F});\delta_*)$ le complexe des cochaînes de Čech à valeurs dans un faisceau F, relatives au recouvrement U.

1*) Décrire le bi-complexe de Čech $(\boldsymbol{K}^{*,*};(d_*,\delta_*)) := \big(\mathsf{C}^*\big(\mathsf{U};\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/k}\big);(d_*,\delta_*)\big)$ pour la cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{X}$, relatif au recouvrement U. On notera $(\boldsymbol{K}^*, D_*)$ le complexe simple associé dont la cohomologie calcule la cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{X}$.

Montrer qu'il existe une suite exacte longue de cohomologie :

$$\boxed{H^{*-1}\big(\boldsymbol{X};\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/k}\big) \xrightarrow{\imath_*} H^*_{\text{DR}}(\boldsymbol{X}/k) \xrightarrow{\pi_*} H^*\big(\boldsymbol{X};\underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{X}/k}\big) \xrightarrow{[+1]}}$$

2) Justifier l'égalité : $\boxed{\dim_k\big(H^0_{\text{DR}}(\boldsymbol{X}/k)\big) = 1}$

../..

3) Prouver l'égalité :

$$\boxed{H^m_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/k) = 0, \text{ pour tout } m \geqslant 3}$$

et en déduire la **surjectivité** du morphisme :

$$\boxed{\imath_2 : H^1\big(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/k}\big) \longrightarrow H^2_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/k)}$$

Indication : On utilisera le fait que la cohomologie d'un faisceau pour la topologie de Zariski sur une variété algébrique est nulle en degrés strictement supérieurs à la dimension de la variété.

——————×——————

Partie B

Soit $k = \mathbb{C}$, et supposons que $\boldsymbol{X}$ est une courbe projective et lisse.

Cette partie fait appel à la dualité de Serre et au théorème de comparaison des cohomologies de de Rham algébrique et $\mathbf{C}^\infty$ de $\boldsymbol{X}$.

5*) Justifier les égalités :

$$\boxed{\dim_{\mathbb{C}} H^0\big(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}\big) = 1, \quad \dim_{\mathbb{C}} \big(H^1\big(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}\big)\big) = 1 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{C}} \big(H^2_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\mathbb{C})\big) = 1}$$

En déduire que l'application $\imath_2$ de **(3)** est un **isomorphisme**.

6*) Prouver qu'il existe un isomorphisme (Hodge) :

$$\boxed{H^1_{\mathrm{DR}}\big(\boldsymbol{X}/\mathbb{C}\big) \equiv H^0\big(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}\big) \oplus H^1\big(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}\big)}$$

Rappelons que le *genre* $g(\boldsymbol{X})$ de la courbe $\boldsymbol{X}$ est, par définition, $\dim_{\mathbb{C}} \big(H^0\big(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}\big)\big)$.
Justifier l'égalité :

$$\boxed{\dim_{\mathbb{C}} \big(H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\mathbb{C})\big) = 2{\cdot}g(\boldsymbol{X})}$$

——————×——————

Partie C

Définition -1 : Une courbe projective, lisse et de genre égal à 1, est dite *elliptique*.

Pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$, notons $\boldsymbol{X}_\lambda$ l'hypersurface de $\mathbb{C}^2$ d'équation

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\,. \tag{$\dagger$}$$

Considérons le plongement canonique de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ qui provient de l'identification de $\mathbb{C}^2$ à l'hyperplan de $\mathbb{C}^3$ d'équation $z = 1$, et notons $\overline{\boldsymbol{X}}_\lambda$ l'adhérence de Zariski de $\boldsymbol{X}_\lambda$ dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

7) Prouver que $\boldsymbol{X}_\lambda$ est irréductible.

8) Déterminer les points à l'infini de $\boldsymbol{X}_\lambda$.

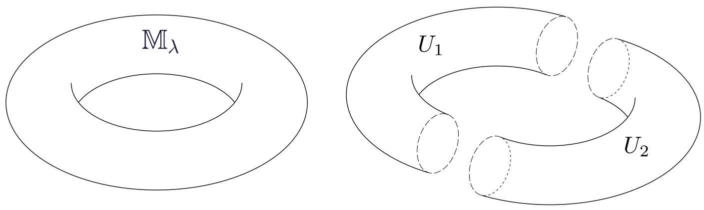
9*) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $\overline{\boldsymbol{X}}_\lambda$ est lisse en chacun de ses points.

../..

On supposera désormais $\overline{\boldsymbol{X}}_\lambda$ lisse. L'espace $(\overline{\boldsymbol{X}}_\lambda)^{\mathrm{an}}$ est ainsi une variété analytique complexe connexe de dimension un et la variété différentielle réelle sous-jacente, notée $\mathbb{M}_\lambda$, sera compacte connexe de dimension réelle deux.

> **Remarque -1 et rappel :** La variété algébrique $\overline{\boldsymbol{X}}_\lambda$ étant une courbe de degré trois, on définit une opération $+ : \overline{\boldsymbol{X}}_\lambda \times \overline{\boldsymbol{X}}_\lambda \to \overline{\boldsymbol{X}}_\lambda$ par le procédé suivant. Pour tout couple de points $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{X}_\lambda^2$ *assez général*, la droite affine $\mathbb{L}(x_1, x_2)$ passant par x_1 et x_2, rencontre $\overline{\boldsymbol{X}}_\lambda$ en un troisième point $x_3 := x_1 * x_2$. Soit P_∞ le point à l'infini de $\boldsymbol{X}_\lambda$, on pose alors $x_1 + x_2 := (x_1 * x_2) * P_\infty$. Cette définition "générique" de '+' se prolonge à $\overline{\boldsymbol{X}}_\lambda^2$ tout entier en une opération de groupe abélien de sorte que $(\mathbb{M}_\lambda, +, P_\infty)$ est un groupe de Lie réel de dimension deux, connexe, compact et commutatif. Des arguments élémentaires de la théorie des groupes montrent alors que $\mathbb{M}_\lambda$ est difféomorphe au tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

10*) En considérant la suite de Mayer-Vietoris associée à la décomposition de $\mathbb{M}_\lambda$ proposée par le graphique :



prouver que la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathbb{M}_\lambda$, définie par :

$$\chi(\mathbb{M}_\lambda) := \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \dim_{\mathbb{C}} H^k_{\mathrm{DR}}(\mathbb{M}_\lambda; \mathbb{C}) \,,$$

vérifie :

$$\boxed{\chi(\mathbb{M}_\lambda) = 0}$$

11*) En déduire que la courbe $\overline{\boldsymbol{X}}_\lambda$ est elliptique.

Remarque : On démontre réciproquement que toute courbe elliptique sur un corps k de caractéristique différente de 2, admet un plongement dans $\mathbb{P}_2(k)$ dont l'image est donnée par une équation de la forme (†).

————×————

(fin de l'examen)