UFR de Mathématiques, Université de Paris 7
DEA 1995/96 deuxième semestre
“Introduction à la cohomologie de de Rham des variétés algébriques”
A. Arabia & Z. Mebkhout

2 avril 1996

Examen Partiel

L'objectif de ce partiel est d'évaluer votre compréhension des concepts de base du cours.
Nous vous demandons, par conséquent, un soin particulier dans la rédaction.

§ 1. Polynômes de Poincaré des variétés différentiables

Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable dont tous les nombres de Betti sont **finis**, le « *polynôme de Poincaré de* $\boldsymbol{M}$ », noté $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}(t)$, est défini par l'égalité :

$$\boxed{\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}(t) := \sum\nolimits_{j=0}^{\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M})} \dim_{\mathbb{R}}(H^j_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}))\, t^j}$$

Le but de cet exercice est d'étudier les polynômes de Poincaré des variétés différentiables **compactes et orientables**.

Les égalités suivantes ont été vues dans le cours :

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_{\mathbb{S}^d}(t) = 1 + t^d; \\ \boldsymbol{P}_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}(t) = 1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2d} = \dfrac{1 - t^{2(d+1)}}{1 - t^2}; \end{cases} \tag{$\diamond$}$$

où $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$ désigne l'espace projectif de $\mathbb{C}^{d+1}$.

1) **Rappel :** Sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\boldsymbol{V}$, une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle : \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$ est dite *antisymétrique* lorsque $\langle v|w\rangle = -\langle w|v\rangle$, pour tous $v, w \in \boldsymbol{V}$. Chaque élément $v \in \boldsymbol{V}$ définit alors une forme linéaire $\gamma_v : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$ en posant $\gamma_v(w) := \langle v|w\rangle$, pour tout $w \in \boldsymbol{V}$. L'application $\gamma : v \mapsto \gamma_v$ est linéaire de $\boldsymbol{V}$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{V}, \mathbb{R})$ et lorsque elle possède un noyau la forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est dite « *dégénérée* ». L'assertion suivante est alors bien connue :

“*Une forme bilinéaire antisymétrique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension* impaire *est toujours dégénérée.*”

Démontrez l'affirmation suivante :

- Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable compacte, connexe et orientable de dimension $d = 2q$, où q est un entier *impaire*. Alors

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}}\left(H^q_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\right) = 0 \pmod 2}$$

- Donner un contre-exemple à cette assertion pour $d = 4$ à l'aide des exemples ($\diamond$).

2) Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ deux variétés différentiables dont les nombres de Betti sont finis. Notons $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}$ la variété produit. Prouvez l'égalité :

$$\boxed{\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}}(t) = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}(t)\,\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{N}}(t)}$$

(Indication : Utiliser la formule de Künneth.)

3) Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable de dimension d, compacte et orientable. Fixons un point $m_0 \in \boldsymbol{M}$. Notons $\boldsymbol{M} - m_0$ l'ouvert complémentaire de m_0 dans $\boldsymbol{M}$. Nous avons justifié dans le cours l'existence d'une suite exacte longue de cohomologie de la forme :

$$\to H^j_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M} - m_0) \to H^j_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \to H^j_{\mathrm{DR}}(\{m_0\}) \to,$$

déduisez-en l'égalité :

$$\boxed{\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}-m_0}(t) = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}(t) - t^d}$$

4) (On pourra admettre dans un premier temps les conclusions de cette question.) Soient maintenant $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ deux variétés différentiables **de même dimension $\boldsymbol{d}$**. Fixons deux points $m_0 \in \boldsymbol{M}$ et $n_0 \in \boldsymbol{N}$ et des cartes de coordonnées (V_{m_0}, φ_{m_0}) et (V_{n_0}, φ_{n_0}) respectivement dans $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$, vérifiant

$$m_0 \in V_{m_0}, \quad \varphi_{m_0}(V_{m_0}) = \mathbb{R}^d \quad \text{et} \quad \varphi_{m_0}(m_0) = \mathbf{0}\,,$$

et *mutatis mutandis* pour $\boldsymbol{N}$. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure d'espace euclidien canonique.

Soit $\boldsymbol{R}$ la relation définie sur la réunion disjointe de variétés $\boldsymbol{Z} := (\boldsymbol{M} - m_0) \amalg (\boldsymbol{N} - n_0)$, par les conditions suivantes :

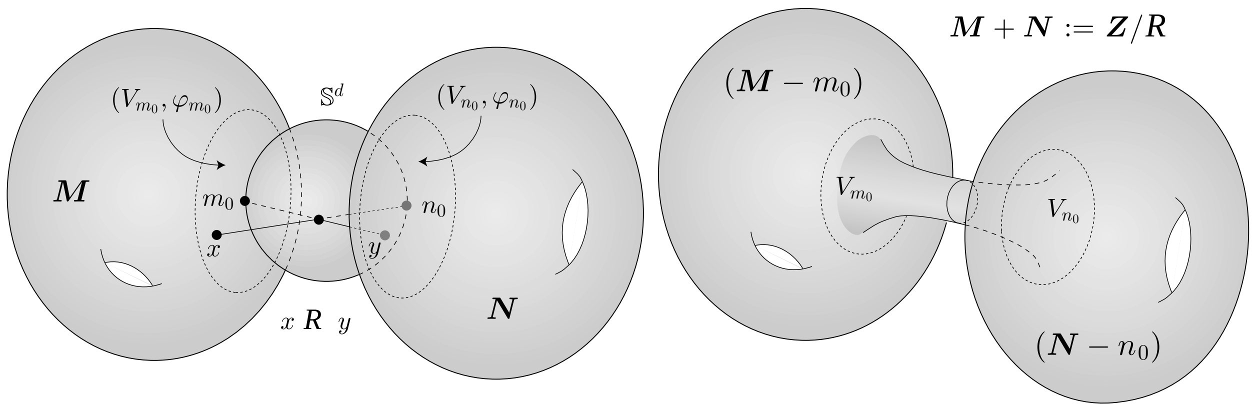
- $\boldsymbol{R}$ est réflexive et symétrique ;
- si $x \in V_{m_0}$ et $y \in V_{n_0}$, alors :

$$x\ \boldsymbol{R}\ y, \quad \text{si et seulement si,} \quad \varphi_{m_0}(x) = -\frac{\varphi_{n_0}(y)}{\|\varphi_{n_0}(y)\|^2}\,,$$

(Penser à la projection stéréographique.)

- Montrer que $\boldsymbol{R}$ est une relation d'équivalence sur $\boldsymbol{Z}$ et que l'espace quotient $\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{R}$ admet une (unique) structure de variété différentiable rendant la projection canonique $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}/\boldsymbol{R}$ submersive.

  On note $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N} := \boldsymbol{Z}/\boldsymbol{R}$; il est possible de montrer, lorsque $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont connexes, que les variétés ainsi obtenues sont deux à deux difféormorphes, indépendamment des points m_0 et n_0 et des cartes $(\boldsymbol{V}_{m_0}, \varphi_{m_0})$ et $(\boldsymbol{V}_{n_0}, \varphi_{n_0})$ choisis.
- Montrer que $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$ est respectivement : compacte, connexe, orientable, si et seulement si, il en est de même pour $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ (simultanément).



- Montrer que la projection canonique de $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$, identifie les variétés $\boldsymbol{M} - m_0$ et $\boldsymbol{N} - n_0$ à des ouverts de $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$, notés respectivement $U_{\boldsymbol{M}}$ et $U_{\boldsymbol{N}}$, qui recouvrent $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$. Montrez que $U_{\boldsymbol{M}} \cap U_{\boldsymbol{N}}$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$.

5) Lorsque $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont **de dimension $\boldsymbol{d}$, compactes, connexes et orientables**, montrer l'égalité :

$$\boxed{\boldsymbol{P}_{\,\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}}(t) = \boldsymbol{P}_{\,\boldsymbol{M}}(t) + \boldsymbol{P}_{\,\boldsymbol{N}}(t) - \boldsymbol{P}_{\,\mathbb{S}^d}(t)}$$

(Indication : Appliquer Mayer-Vietoris au recouvrement $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N} = U_{\boldsymbol{M}} \cap U_{\boldsymbol{N}}$.)

6) Après avoir précisé les polynômes de Poincaré des produits de deux sphères, démontrez l'assertion suivante :

"*Soit d un nombre naturel qui n'est pas multiple de* 4. *Un polynôme $a_d\, t^d + a_{d-1}\, t^{d-1} + \cdots + a_1\, t + a_0$ est le polynôme de Poincaré d'une variété différentiable compacte, orientable de dimension d, si et seulement si,*

$$\begin{cases} a_0 > 0\,; \quad \text{et} \quad a_j \in \mathbb{N} & \text{pour tout } j = 0, \ldots, d\,; \\ a_j = a_{d-j}, & \text{pour tout } j = 0, \ldots, d\,; \\ a_{d/2} = 0 \pmod 2, & \text{lorsque } d = 0 \pmod 2. \end{cases} \tag{$\diamond\diamond$}$$

Remarque 1 : Lorsque la dimension d est un multiple de 4, les polynômes indiqués dans $(\diamond\diamond)$ sont bien des polynômes de Poincaré de variétés compactes orientables de dimension d ; mais il y en a bien d'autres comme le montre l'exemple de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{2d+1})$. La question de caractériser l'ensemble de tels polynômes semble particulierement compliquée.

§ 2. Complexe de de Rham holomorphe

A. On se propose dans cet exercice de calculer le cohomologie du complexe de de Rham holomorphe du complémentaire d'une réunion d'hyperplans de coordonnées dans l'espace numérique $\mathbb{C}^n$. On munit l'espace $\mathbb{C}^n$ de coordonnées $\boldsymbol{x} := (x_1, \dots, x_n)$.

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ on note $\Omega^0(U)$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions holomorphes sur U.

1) Décrire explicitement en terme de série les éléments de l'algèbre $\Omega^0(\mathbb{C}^n)$. Montrer que la cohomologie du complexe de de Rham $(\Omega^*(\mathbb{C}^n), d_*)$ est nulle en degré strictement positif et est de dimension un en degré zéro.

2) On note par U_i le complémentaire dans l'espace $\mathbb{C}^n$ de l'hyperplan d'équation $x_i = 0$.

Décrire explicitement en terme de série de Laurent les éléments de l'algèbre $\Omega^0(U_i)$. Montrer que la cohomologie du complexe de de Rham $(\Omega^*(U_i), d_*)$ est nulle en degré strictement plus grand que un, est de dimension un en degré zéro et de dimension un degré un. Décrire une base de la cohomologie de degré un.

3) (Les conclusions de cette question n'interviendront pas dans **B.**) Soit un entier $k \leqslant n$. On note U^k le complémentaire dans l'espace $\mathbb{C}^n$ des hyperplans d'équations $x_i = 0$, pour $i = i, \dots, k$. Décrire explicitement en terme de série de Laurent les éléments de l'algèbre $\Omega^0(U^k)$. Montrer que la cohomologie du complexe de de Rham $(\Omega^*(U^k), d_*)$ est nulle en degré strictement plus grand que k. Décrire des bases des espaces de cohomologie du complexe de de Rham $(\Omega^*(U^k), d_*)$ en degré $q \leqslant k$. Quelles sont alors leurs dimensions.

B. Soit $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ la droite projective complexe munie de son recouvrement naturel $\boldsymbol{U} := \{U_1, U_2\}$ complémentaires des pôles nord et sud. On se propose de montrer que le complexe de Čech de ce recouvrement à valeurs dans le complexe de de Rham holomorphe calcule les nombres de Betti de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Pour chaque ouvert U notons $(\Omega^*_{\mathrm{hol}}(U), d_*)$ le complexe de de Rham holomorphe et $(\Omega^*_{\mathrm{diff}}(U), d_*)$ le complexe de de Rham des formes différentielles à valeurs complexes. On rappelle que $(\Omega^*_{\mathrm{hol}}(U), d_*)$ est un sous-complexe de $(\Omega^*_{\mathrm{diff}}(U), d_*)$.

1) Montrer que l'inclusion
$$(\Omega^*_{\mathrm{hol}}(U_i), d_*) \subset (\Omega^*_{\mathrm{diff}}(U_i), d_*)\,,$$
est un quasi-isomorphisme pour $i = 1, 2$.

2) Notons U_{12} l'intersection de U_1 et de U_2 qui est donc le plan complexe privé de l'origine $\mathbb{C}^*$. Montrer que l'inclusion du cercle $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{C}^*$ induit un isomorphisme en cohomologie de de Rham des formes différentielles à coefficients complexes.

3) Montrer en utilisant l'exercice **A** que l'inclusion
$$(\Omega^*_{\mathrm{hol}}(U_{12}), d_*) \subset (\Omega^*_{\mathrm{diff}}(U_{12}), d_*)\,,$$
est un quasi-isomorphisme.

4) Expliciter les complexes doubles
$$\boldsymbol{C}^\bullet(\boldsymbol{U}\,, \Omega^*_{\mathrm{hol}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}))\,, \quad \text{et} \quad \boldsymbol{C}^\bullet(\boldsymbol{U}\,, \Omega^*_{\mathrm{diff}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}))\,.$$
Déduire de **1)** et **3)** que l'inclusion naturelle
$$\boldsymbol{C}^\bullet(\boldsymbol{U}\,, \Omega^*_{\mathrm{hol}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})) \subset \boldsymbol{C}^\bullet(\boldsymbol{U}\,, \Omega^*_{\mathrm{diff}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}))\,,$$
induit un isomorphisme entre les espaces de cohomologie des complexes simples associés.

5) En déduire que les dimensions des espaces de cohomologie du complexe simple associé au complexe double

$$\boldsymbol{C}^{\bullet}(\boldsymbol{U}\,, \Omega^{*}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}))\,,$$

fournit les nombres de Betti de la droite projective complexe.

————×————

(fin de l'examen)