UFR de Mathématiques, Université de Paris 7
DEA 1998/99 deuxième semestre
"Introduction à la cohomologie de de Rham des variétés algébriques"
A. Arabia & Z. Mebkhout

Mercredi 9 juin 1999

Examen FINAL

Un soin particulier à la rédaction est demandé.

I– Cohomologie de de Rham d'une droite affine privée d'un nombre fini de points

Soit $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif intègre de caractéristique arbitraire et notons $\boldsymbol{Q}$ son corps de fractions. Pour tout sous-ensemble fini $\boldsymbol{F} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ de $\boldsymbol{R}$, on désigne par $S_{\boldsymbol{F}}$ le système multiplicatif de $\boldsymbol{R}[X]$ des éléments de la forme $(X - x_1)^{m_1} \cdots (X - x_r)^{m_r}$ avec $m_i \in \mathbb{N}$. On note $\boldsymbol{A} := S_{\boldsymbol{F}}^{-1}\boldsymbol{R}[X]$.

1) Montrer que l'homomorphisme de $\boldsymbol{R}[X]$ vers $\boldsymbol{A}$ donné par $P(X) \mapsto \frac{P(X)}{1}$, réalise un plongement ouvert de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ dans $\mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$. Décrire l'image de ce plongement lorsque $\boldsymbol{R}$ est un corps algébriquement clos.

2) Montrer que $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse de dimension relative 1 et c'est une intersection transverse.

3) Prouver que $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est un $\boldsymbol{A}$-module libre de rang 1.

4) Expliciter chaque ingrédient du complexe de de Rham $\left(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},*}\right)$.

5) Soit $f \in \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$. Montrer qu'il existe ***une et une seule*** famille $\{P_0^f(X), c(f)_{i,m}\}$ vérifiant :

$$f = P_0^f(X) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \frac{c(f)_{i,m}}{(X - x_i)^m}\,,$$

avec $P_0^f(X) \in \boldsymbol{Q}[X]$ et $c(f)_{i,m} \in \boldsymbol{Q}$.

► En déduire la $\boldsymbol{Q}$-linéarité et la surjectivité de l'application :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} : \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A} &\longrightarrow \boldsymbol{Q}^r \\ f \quad &\longmapsto \big(c(f)_{1,1}, \ldots, c(f)_{r,1}\big) \end{aligned}$$

6) Montrer que l'application $\boldsymbol{I}$ induit une surjection de $\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R})$ sur $\boldsymbol{Q}^r$ qui est bijective lorsque $\boldsymbol{R}$ est de caractéristique nulle, mais possède un noyau de dimension infinie autrement.

7) Expliciter les autres groupes de cohomologie du complexe $\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \left(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},*}\right)$.

8) Dans cette question $\boldsymbol{R} := \mathbb{F}_p$.

On note $\nu : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p/\langle p\rangle =: \mathbb{F}_p$ la projection canonique de l'anneau des entiers p-adiques sur son corps résiduel.

Pour toute partie finie $\boldsymbol{G}$ de $\mathbb{Z}_p$ qui relève $\boldsymbol{F}$, *i.e.* telle que $\nu(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{F}$, on note $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}} := S_{\boldsymbol{G}}^{-1}\mathbb{Z}_p[X]$.

a) Montrer que la réduction modulo p de l'anneau $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}}$ s'identifie canoniquement à $\boldsymbol{A}$.

b) A l'aide de (7) donner un invariant des algèbres $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}}$ permettant de dire que deux algèbres $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_1}$ et $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_2}$ ne sont pas isomorphes.

c) Pour chaque algèbre $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}}$, on note $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}}$ sa complétion pour la topologie p-adique.

Pour toute inclusion d'ensembles $\boldsymbol{G}_1 \subseteq \boldsymbol{G}_2$, l'inclusion $S_{\boldsymbol{G}_1} \subseteq S_{\boldsymbol{G}_2}$ donne l'homomorphisme d'algèbres canonique habituel $h(\boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{G}_1) : \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_1} = S_{\boldsymbol{G}_1}^{-1}\mathbb{Z}_p[X] \to S_{\boldsymbol{G}_2}^{-1}\mathbb{Z}_p[X] = \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_2}$.

c-i) Exhiber un isomorphisme :

$$\xi(\boldsymbol{G}) : \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}} \xrightarrow[\equiv]{} \frac{\mathbb{Z}_p[X, Z]}{\left\langle Z \prod_{y \in \boldsymbol{G}} (X - y) - 1 \right\rangle}\,.$$

c-ii) Suite à la question précédente, expliciter les éléments $X' := \xi(\boldsymbol{G}_2) \circ h(\boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{G}_1) \circ \xi(\boldsymbol{G}_1)^{-1}(X)$ et $Z' := \xi(\boldsymbol{G}_2) \circ h(\boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{G}_1) \circ \xi(\boldsymbol{G}_1)^{-1}(Z)$.

c-iii) Prouver que la composée $\xi(\boldsymbol{G}_2) \circ h(\boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{G}_1) \circ \xi(\boldsymbol{G}_1)^{-1}$ induit une ***bijection*** entre les complétions p-adiques :

$$\frac{\widehat{\mathbb{Z}_p[X, Z]}}{\left\langle Z \prod_{y \in \boldsymbol{G}_1} (X - y) - 1 \right\rangle} \xrightarrow[\equiv]{\xi(\boldsymbol{G}_2) \circ h(\boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{G}_1) \circ \xi(\boldsymbol{G}_1)^{-1}} \frac{\widehat{\mathbb{Z}_p[X, Z]}}{\left\langle Z \prod_{y \in \boldsymbol{G}_2} (X - y) - 1 \right\rangle} .$$

c-iv) En déduire que les algèbres $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}}$ sont deux-à-deux isomorphes.

9) Dans cette dernière question on choisit $\boldsymbol{R} := \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{C}$ l'ouvert complémentaire d'un ensemble fini de nombres complexes $\boldsymbol{F} \subseteq \mathbb{C}$. On considère $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$ muni de la topologie transcendante induite par celle de $\mathbb{C}$. Expliciter les nombres de Betti de la cohomologie de de Rham des formes différentielles réelles de classe C^∞ sur $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Indication. — Utiliser la suite exacte longue de cohomologie à support compact associée au triplet $\boldsymbol{U}(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \supseteq \boldsymbol{F}(\mathbb{C})$, puis la dualité de Poincaré.

———×———

II– Cohomologie de de Rham du complémentaire d'une hypersurface lisse de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Soit $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ une hypersurface ***irréductible et lisse*** définie par un polynôme $f \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ homogène de degré d. On note $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ l'ouvert complémentaire de $\boldsymbol{X}$.

Rappel. Comme f est homogène l'anneau $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n][1/f]$ est gradué sur $\mathbb{Z}$, ses éléments homogènes de degré zéro constituent alors un sous-anneau que nous notons $R[\boldsymbol{U}] := \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n][1/f]^0$.

Dans ce problème on admettra que $\boldsymbol{U}$ est isomorphe en tant que schéma à $\operatorname{Spec}(R[\boldsymbol{U}])$.

1) Montrer que $R[\boldsymbol{U}]$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini, lisse sur $\mathbb{C}$ et de dimension relative n.

2) Justifier la finitude des nombres de Betti $\dim_{\mathbb{C}} \big(H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}/\mathbb{C})\big)$.

3) On considère $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$, $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$ et $\boldsymbol{X}(\mathbb{C})$ munis de la topologie transcendante. Justifier la finitude des dimensions des espaces $H^i_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))$, $H^i_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}))$ et $H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))$.

4) **Le but de cette question est de montrer que $\boldsymbol{H^r_{\mathrm{DR}}(U/\mathbb{C}) = 0}$ pour tout $\boldsymbol{r \notin \{0, n\}}$.**

a) Donner une justification *a priori* de l'annulation des $H^{n+i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))$ lorsque $i > 0$. En déduire :

$$\begin{cases} H^{n-i}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \equiv H^{n-i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))\,, & \text{pour tout } i \geqslant 2\,; \\ H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \subseteq H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))\,. \end{cases}$$

Indication. Penser à la suite exacte longue de cohomologie de de Rham à support compact.

b) *Rappel.* L'anneau $H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}))$ est isomorphe en tant qu'algèbre graduée à $\mathbb{C}[T]/\langle T^n \rangle$ où T est considéré de degré 2.

Soit $\omega \in H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ ***non nul*** et notons ϖ sa restriction à $\boldsymbol{X}$. Le théorème de Lefschetz « *difficile* » affirme dans notre cas ($\boldsymbol{X}(\mathbb{C})$ est lisse) que l'application $L(\varpi^{\wedge i}) : H^{(n-1)-i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C})) \to H^{(n-1)+i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))$ qui fait correspondre $\mu \mapsto \varpi^{\wedge i} \wedge \mu$, est un ***isomorphisme*** pour tout $i > 0$.

► A l'aide de ce théorème et des résultats précédents prouver :

$$H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}/\mathbb{C}) = \boldsymbol{0}\,, \qquad \text{pour tout } 0 < r < n.$$

———×———

(fin de l'examen)