UFR de Mathématiques, Université de Paris 7
DEA 1996/97 premier semestre
"Introduction à la cohomologie de de Rham des variétés algébriques"
A. Arabia & Z. Mebkhout

Mercredi 5 février 1997

Examen Final

Un soin particulier dans la rédaction est demandé.

——————×——————

Problème I. Questions de cohomologie sur le plan épointé

Notons $\mathbb{A}^2 := \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ l'espace affine de dimension 2 sur le corps de nombres complexes $\mathbb{C}$. Le but de ce problème est le calcul *explicite* des cohomologies de divers objets rattachés au «*plan épointé*», *i.e.* à la variété algébrique complexe $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$, où $\boldsymbol{X} := \mathbb{A}^2 \backslash \{0\}$ et où le faisceau structural $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est la restriction, de $\mathbb{A}^2$ à $\boldsymbol{X}$, du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}$ des fonctions régulières sur les ouverts de Zariski de $\mathbb{A}^2$.

Nous allons noter $\mathbb{C}[X, Y]$ l'algèbre des fonctions régulières globalement définies sur $\mathbb{A}^2$ de sorte que la variété $\boldsymbol{X}$ est réunion de deux ouverts principaux de $\mathbb{A}^2$:

$$\boxed{\boldsymbol{X} = D(X) \cup D(Y)} \tag{$*$}$$

L'ensemble sous-jacent à la variété $(\boldsymbol{X}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ sera muni tantôt de la topologie de Zariski (induite par $\mathbb{A}^2$), tantôt de la topologie dite *transcendante* (induite par la métrique canonique de $\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{A}^2$). Les notations $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}$ feront respectivement référence à l'une et l'autre de ces topologies. L'espace topologique $\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}$ sera, dans une deuxième partie du problème, considéré muni du faisceau d'anneau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$ des fonctions réelles de classe C^∞ définies sur les ouverts de $\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}$; il y sera donc question de la structure standard de variété différentiable de $\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}} \subseteq \mathbb{R}^4$ et de l'espace annelé $(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}})$.

Le cas algébrique complexe

I-1) Cohomologie de faisceaux de $\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{X}}$.

1-a) Soit U une partie ouverte de $\boldsymbol{X}$, montrer que toute application *localement constante* $f : U \to \mathbb{C}$ est constante.

1-b) Notons $\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{X}}$ le **pré**faisceau constant sur $\boldsymbol{X}$ de "fibre" le corps $\mathbb{C}$. En utilisant (**1-a**), montrer que $\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{X}}$ ***est un faisceau*** sur $\boldsymbol{X}$ qui est donc canoniquement isomorphe au faisceau $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\boldsymbol{X}}$ des applications localement constantes à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1-c) Déduire de la question précédente que le faisceau $\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{X}}$ est ***flasque*** et préciser les groupes de cohomologie de faisceaux : $H^k(\boldsymbol{X}; \underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{X}})$ pour $k \geqslant 0$.

I-2) Cohomologie de faisceaux de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$. Notons $\mathsf{U} = \{U_X, U_Y\}$ le recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$ donné par $(*)$, où nous avons noté $U_X := D(X)$ et $U_Y := D(Y)$. Soit $(\check{\mathrm{C}}^*(\mathsf{U};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}), \delta_*)$ le complexe des cochaînes ordonnées de Čech pour le faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ relatif au recouvrement U ; on a :

$$\check{\mathrm{C}}^0(\mathsf{U};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) = \Gamma(U_X;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \oplus \Gamma(U_Y;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}), \quad \check{\mathrm{C}}^1(\mathsf{U};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) = \Gamma(U_X \cap U_Y;\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$$

et $\check{\mathrm{C}}^k(\mathsf{U};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) = \mathbf{0}$ pour tout $k \geqslant 2$.

2-a) Montrer que U_X, U_Y et $U_X \cap U_Y$ munies de leur structure de variété algébrique induite par $\boldsymbol{X}$ (ou par $\mathbb{A}^2$) sont des variétés algébriques complexes ***affines***.

• Préciser les algèbres des fonctions régulières de U_X, U_Y et $U_X \cap U_Y$ en termes de l'algèbre $\mathbb{C}[X,Y]$.

2-b) Montrer que U est un recouvrement acyclique pour $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$. En déduire que la cohomologie de Čech de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ relative à U est canoniquement isomorphe à la cohomologie de faisceaux de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$, *i.e.* :

$$\boxed{H^k(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \equiv \check{\mathrm{H}}^k(\mathsf{U};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})} \qquad \text{pour tout } k \geqslant 0.$$

2-c) À l'aide de la question (**2-a**) expliciter complètement le complexe de Čech $(\check{\mathrm{C}}^*(\mathsf{U};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}), \delta_*)$.

2-d) Soit $\mathbb{C}[X,Y]_{XY}$ l'algèbre des fractions rationnelles en X et Y de la forme $\frac{P(X,Y)}{(XY)^m}$, avec $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et $P(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$. Notons $M(X,Y) \subseteq \mathbb{C}[X,Y]_{XY}$ le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel engendré par les fractions de la forme $\frac{1}{X^n Y^m}$ avec n et m ***tous les deux non nuls***. On a : $M(X,Y) = \frac{1}{XY}\,\mathbb{C}\big[\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}\big] \subseteq \mathbb{C}[X,Y]_{XY}$.

Montrer l'existence d'isomorphismes :

$$\begin{cases} \text{A) } H^0(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \equiv \mathbb{C}[X,Y]\,; \\ \text{B) } H^1(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \equiv M(X,Y)\,; \\ \text{C) } H^k(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \equiv \mathbf{0}, \qquad \text{pour tout } k \geqslant 2. \end{cases}$$

Indication : Dans (A), l'isomorphisme sera celui associé au morphisme de restriction de fonctions régulières $\alpha(\imath) : \Gamma(\mathbb{A}^2;\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}) \to \Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ correspondant à l'inclusion $\imath : \boldsymbol{X} \hookrightarrow \mathbb{A}^2$.

Dans (B), l'isomorphisme provient de la **surjection** canonique $\mathbb{C}[X,Y]_{XY} \twoheadrightarrow H^1(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ fournie par le complexe des cochaînes ordonnées de Čech. L'espace vectoriel $M(X,Y)$ apparaît alors comme un supplémentaire vectoriel du noyau de cette surjection. ■

2-e) Non affinité de $\boldsymbol{X}$. Les équivalences (A) et (B) ci-dessus donnent, chacune, des conditions de non affinité pour la variété $\boldsymbol{X}$.

• Déduire de l'équivalence (A) une raison de nature ***algébrique*** pour justifier le fait que $\boldsymbol{X}$ **n'est pas** une variété affine.

Indication : On raisonnera par l'absurde. Si $\boldsymbol{X}$ était affine, le morphisme d'inclusion $\imath$ pourrait être retrouvé à l'aide de l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\alpha(\imath)$. En effet, pour chaque point x de $\boldsymbol{X}$, on considère l'idéal maximal $\mathfrak{M}_x$ de $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ des fonctions régulières qui s'annulent en x. L'idéal $\alpha(\imath)^{-1}(\mathfrak{M}_x)$ est alors maximal dans $\Gamma(\mathbb{A}^2;\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2})$ et on a $\alpha(\imath)^{-1}(\mathfrak{M}_x) = \mathfrak{M}_{\imath(x)}$, d'après la théorie générale des variétés affines sur un corps algébriquement clos. L'idéal maximal $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathbb{C}[X,Y]$ pose alors un problème. ■

• L'équivalence (B) donne, en particulier, $\dim_{\mathbb{C}}(H^1(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})) = \infty$. En déduire une raison de nature **cohomologique** pour justifier le fait que $\boldsymbol{X}$ **n'est pas** une variété affine.

I-3) Sur l'espace affine $\mathbb{A}^2$ (qui est trivialement non singulier), les faisceaux (cohérents) des formes différentielles algébriques : $\underline{\underline{\Omega}}^k_{\mathbb{A}^2/\mathbb{C}}$ sont non nuls pour $k = 0$, 1 et 2. On a des isomorphismes canoniques :

$$\underline{\underline{\Omega}}^k_{\mathbb{A}^2/\mathbb{C}} \equiv \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2} \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^k \left(\mathbb{C}^2\right), \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

dont on déduit, par restriction à l'ouvert $\boldsymbol{X}$ de $\mathbb{A}^2$, des isomorphismes canoniques :

$$\boxed{\underline{\underline{\Omega}}^k_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}} \equiv \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^k \left(\mathbb{C}^2\right)} \tag{$**$}$$

pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

• Comme conséquence de la question (**2-d**), préciser les groupes de cohomologie de faisceaux :

$$\boxed{H^p\big(\boldsymbol{X};\underline{\underline{\Omega}}^q_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}\big)}$$

pour tous p et q.

3-a) **Cohomologie des formes différentielles globales sur $\boldsymbol{X}$.** Montrer que la cohomologie du complexe des formes différentielles globales sur $\boldsymbol{X}$:

$$\mathbf{0} \to \Gamma\big(\boldsymbol{X};\underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}\big) \xrightarrow{d_0} \Gamma\big(\boldsymbol{X};\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}\big) \xrightarrow{d_1} \Gamma\big(\boldsymbol{X};\underline{\underline{\Omega}}^2_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}\big) \to \mathbf{0}$$

est canoniquement isomorphe au complexe des formes différentielles globales sur $\mathbb{A}^2$:

$$\mathbf{0} \to \mathbb{C}[X,Y] \xrightarrow{d_0} \mathbb{C}[X,Y]\,dX \oplus \mathbb{C}[X,Y]\,dY \xrightarrow{d_1} \mathbb{C}[X,Y]\,dX \wedge dY \to \mathbf{0}$$

• Calculer les groupes de cohomologie $h^k\big(\Gamma(\boldsymbol{X};\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}), d_*\big)$, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3-b) **Cohomologie de de Rham de $(\boldsymbol{X},\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$.** Expliquer pour quelle raison l'hypercohomologie du complexe des faisceaux des formes différentielles sur $\boldsymbol{X}$:

$$\mathbf{0} \to \underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}} \xrightarrow{\underline{\underline{d}}_0} \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}} \xrightarrow{\underline{\underline{d}}_1} \underline{\underline{\Omega}}^2_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}} \to \mathbf{0} \tag{‡}$$

est calculée par le **complexe simple associé** au bicomplexe de Čech-de Rham relatif au recouvrement $\mathsf{U} = \{U_X, U_Y\}$ de $\boldsymbol{X}$.

• Expliciter tous les morphismes du bicomplexe des cochaînes ordonnées Čech-de Rham relatives à U. Ce bicomplexe concerne les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathbf{0} \to & \mathbb{C}[X,Y]_{XY} & \longrightarrow & \mathbb{C}[X,Y]_{XY}\,dX \oplus \mathbb{C}[X,Y]_{XY}\,dY & \longrightarrow & \mathbb{C}[X,Y]_{XY}\,(dX \wedge dY) & \to \mathbf{0} \\
 & \Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow & \\
\mathbf{0} \to & \begin{pmatrix} \mathbb{C}[X,Y]_X \\ \oplus \\ \mathbb{C}[X,Y]_Y \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} \mathbb{C}[X,Y]_X\,dX \oplus \mathbb{C}[X,Y]_X\,dY \\ \oplus \\ \mathbb{C}[X,Y]_Y\,dX \oplus \mathbb{C}[X,Y]_Y\,dY \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} \mathbb{C}[X,Y]_X\,(dX \wedge dY) \\ \oplus \\ \mathbb{C}[X,Y]_Y\,(dX \wedge dY) \end{pmatrix} & \to \mathbf{0} \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} &
\end{array}$$

• Pour chaque couple d'entiers (ℓ, c) ('ℓ' pour ligne et 'c' pour colonne), notons

$$K^{\ell,c} := \check{\mathrm{C}}^{\ell}\left(\mathsf{U}; \underline{\underline{\Omega}}^{c}_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}\right).$$

Le complexe simple associé au bicomplexe de Čech-de Rham, noté $\left(K^*, D_*\right)$, concerne les espaces vectoriels :

$$K^m := \bigoplus_{\ell+c=m} K^{\ell,c}, \qquad\qquad \text{pour chaque } m \in \mathbb{Z}.$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, posons $F_k(K)^* := K^* \cap \left(\bigoplus_{\ell\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{c\geqslant k} K^{\ell,c}\right)$. On a des inclusions décroissantes :

$$\cdots \supseteq F_{-1}(K)^* \supseteq F_0(K)^* \supseteq F_1(K)^* \supseteq \cdots \supseteq F_k(K)^* \supseteq \cdots$$

• Rappeler brièvement pourquoi il s'agit d'une filtration *régulière* du complexe différentiel gradué $\left(K^*, D_*\right)$. On réfère à cette filtration comme «*la filtration par colonnes*» du bicomplexe en question.

Dans les questions suivantes, nous allons nous intéresser à la suite spectrale associée au complexe (K^*, D_*) muni de la filtration par colonnes.

• Montrer les égalités :

$$\boxed{\mathbb{E}_0^{p,q} = \check{\mathrm{C}}^{q}\left(\mathsf{U}; \underline{\underline{\Omega}}^{p}_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}\right) \quad \text{et} \quad d_0^{p,q} = \delta_q\left(\underline{\underline{\Omega}}^{p}_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}}\right)} \qquad \text{pour tous } p \text{ et } q.$$

• Expliciter les termes $\mathbb{E}_1^{p,q}$ et la différentielle d_1 de la suite spectrale associée à la filtration F. On doit retrouver deux lignes non triviales :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} \to & M(X,Y) & \xrightarrow{d_1^{0,1}} & M(X,Y)\,dX \oplus M(X,Y)\,dY & \xrightarrow{d_1^{1,1}} & M(X,Y)\,(dX\wedge dY) & \to \mathbf{0} \\
& \shortparallel\!\shortparallel\!\shortparallel & & \shortparallel\!\shortparallel\!\shortparallel & & \shortparallel\!\shortparallel\!\shortparallel & \\
& \mathbb{E}_1^{0,1} & & \mathbb{E}_1^{1,1} & & \mathbb{E}_1^{2,1} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} \to & \mathbb{C}[X,Y] & \xrightarrow{d_1^{0,0}} & \mathbb{C}[X,Y]\,dX \oplus \mathbb{C}[X,Y]\,dY & \xrightarrow{d_1^{1,0}} & \mathbb{C}[X,Y]\,(dX\wedge dY) & \to \mathbf{0} \\
& \shortparallel\!\shortparallel\!\shortparallel & & \shortparallel\!\shortparallel\!\shortparallel & & \shortparallel\!\shortparallel\!\shortparallel & \\
& \mathbb{E}_1^{0,0} & & \mathbb{E}_1^{1,0} & & \mathbb{E}_1^{2,0} &
\end{array}$$

• Calculer les termes $\mathbb{E}_2^{p,q}$ de cette suite spectrale et prouver que les différentielles

$$\boxed{d_r^{p,q} : \mathbb{E}_r^{p,q} \longrightarrow \mathbb{E}_r^{p+r,q-r+1}}$$

sont **nulles** pour tout $r \geqslant 2$ et tous $p, q \in \mathbb{Z}$. En déduire l'existence, pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, d'un isomorphisme canonique :

$$\boxed{H^m_{\text{DR}}(\boldsymbol{X}/\mathbb{C}) \equiv \bigoplus_{a+b=m} \mathbb{E}_2^{a,b}}$$

• Montrer les égalités suivantes pour les nombres de Betti :

$$\boxed{\mathrm{b}_0(\boldsymbol{X}) = 1\,; \quad \mathrm{b}_1(\boldsymbol{X}) = 0\,; \quad \mathrm{b}_2(\boldsymbol{X}) = 0\,; \quad \mathrm{b}_3(\boldsymbol{X}) = 1\,; \quad \mathrm{b}_m(\boldsymbol{X}) = 0\,, \text{ pour } m > 3.}$$

3-c) À l'aide uniquement de raisonnements d'hypercohomologie, déduire de la question précédente (**3-b**) et de la question (**1**) que le complexe de faisceaux :

$$\mathbf{0} \to \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\boldsymbol{X}} \xrightarrow{\ \varepsilon\ } \underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}} \xrightarrow{\ \underline{\underline{d}}_0\ } \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}} \xrightarrow{\ \underline{\underline{d}}_1\ } \underline{\underline{\Omega}}^2_{\boldsymbol{X}/\mathbb{C}} \to \mathbf{0}\,, \tag{‡‡}$$

où ε désigne l'inclusion canonique, **n'est pas exact**. Le complexe (‡), muni de l'augmentation ε **n'est donc pas une résolution** dans la catégorie des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur $\boldsymbol{X}$, du faisceau $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\boldsymbol{X}}$.

• **Vérification par le calcul.** Soit $x \in U_X \subseteq \boldsymbol{X}$. Montrer que les germes en x des formes différentielles fermées sur $U_X \cap D(Y - Y(x) + 1)$ données par :

$$\omega_1 = \frac{1}{X}\, dX\,, \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{X\big(Y - Y(x) + 1\big)}\,(dX \wedge dY)$$

ne sont pas des germes de cobords.

Conclure que la suite de faisceaux (‡‡) est exacte sur les deux termes de gauche, et que la suite de ses germes n'est exacte sur l'un ou l'autre des termes de droite en **aucun** point de $\boldsymbol{X}$.

Le cas différentiable

I-4) Notons $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$ le faisceau des fonctions réelles différentiables (de classe C^∞) définies sur les ouverts de $\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}$. On notera $\mathrm{C}^\infty\big(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}\big)$ l'anneau des sections globales du faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$.

• Montrer que l'espace annelé $\big(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}\big)$ est ***localement*** annelé.

Nous reprenons maintenant, *mutatis mutandis*, les questions du cas algébrique, qui concernaient l'espace annelé $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$, dans le cas différentiable pour la structure standard de variété différentiable sur $\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}$ et pour l'espace annelé $\big(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}\big)$.

I-5) **Cohomologie de faisceaux de $\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$.**

5-a) Montrer que le faisceau des fonctions localement constantes $\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$ **n'est pas** flasque.

5-b) Rappeler les raisons qui expliquent que la cohomologie de faisceaux de $\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe des formes différentielles (de classe C^∞) globalement définies sur $\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}$; *i.e.* :

$$\boxed{H^k\big(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}; \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}\big) \equiv h^k\big(\Omega^*(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}), d_*\big)\big)} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

I-6) **Cohomologie de faisceaux de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}$.** Rappeler les raisons théoriques qui expliquent les égalités :

$$\begin{cases} \text{A) } H^0(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}) \equiv \mathrm{C}^\infty(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}})\,; \\ \text{B) } H^k(\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{diff}}}) \equiv \mathbf{0}, \qquad \text{pour tout } k \geqslant 1. \end{cases}$$

I-7) Cohomologie de de Rham de $(\boldsymbol{X}^{\text{diff}}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\text{diff}}})$.

7-a) Montrer que de manière analogue au cas algébrique (équivalences $(**)$), on a des isomorphismes canoniques :

$$\boxed{\underline{\underline{\Omega}}^k_{\boldsymbol{X}^{\text{diff}}} \equiv \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}^{\text{diff}}} \otimes_{\mathbb{R}} \textstyle\bigwedge^k \left(\mathbb{R}^4\right)} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

7-b) Rappeler les raisons théoriques qui expliquent que l'hypercohomologie du complexe de faisceaux de formes différentielles sur $\boldsymbol{X}^{\text{diff}}$:

$$\mathbf{0} \to \underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{X}^{\text{diff}}} \xrightarrow{d_0} \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}^{\text{diff}}} \xrightarrow{d_1} \underline{\underline{\Omega}}^2_{\boldsymbol{X}^{\text{diff}}} \xrightarrow{d_2} \underline{\underline{\Omega}}^3_{\boldsymbol{X}^{\text{diff}}} \xrightarrow{d_3} \underline{\underline{\Omega}}^4_{\boldsymbol{X}^{\text{diff}}} \to \mathbf{0}\,,$$

est calculée par le complexe des formes différentielles globalement définies sur $\boldsymbol{X}^{\text{diff}}$:

$$\mathbf{0} \to \Omega^0\big(\boldsymbol{X}^{\text{diff}}\big) \xrightarrow{d_0} \Omega^1\big(\boldsymbol{X}^{\text{diff}}\big) \xrightarrow{d_1} \Omega^2\big(\boldsymbol{X}^{\text{diff}}\big) \xrightarrow{d_2} \Omega^3\big(\boldsymbol{X}^{\text{diff}}\big) \xrightarrow{d_3} \Omega^4\big(\boldsymbol{X}^{\text{diff}}\big) \to \mathbf{0}\,.$$

I-8) Cohomologie du complexe des formes différentielles sur $\boldsymbol{X}^{\text{diff}}$. En remarquant l'existence d'un difféomorphisme entre $\boldsymbol{X}^{\text{diff}}$ et la variété différentiable "produit" $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$; expliquer l'équivalence :

$$\boxed{H^*_{\text{DR}}\big(\boldsymbol{X}^{\text{diff}}\big) \equiv H^*_{\text{DR}}\big(\mathbb{S}^3\big)}$$

et confirmer les nombres de Betti obtenus dans le cas algébrique.

I-9) Préciser les dimensions des groupes de cohomologie **à support compact** : $H^k_{\text{DR,c}}\big(\boldsymbol{X}^{\text{diff}}\big)$, pour chaque $k \geqslant 0$.

———————×———————

<u>Problème II</u>. Questions de cohomologie sur le plan à l'origine dédoublée

Dans ce problème nous allons nous intéresser à la variété algébrique $\big(\boldsymbol{Y}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}\big)$ définie comme le recollement de deux copies de l'espace annelé $\big(\mathbb{A}^2; \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}\big)$ en identifiant les sous-espaces annelés $\big(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\big) \subseteq \big(\mathbb{A}^2; \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}\big)$ introduits dans le problème **I**.

Plus précisément, notons $\mathbb{A}^2_1$ et $\mathbb{A}^2_2$ deux copies du plan affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ considéré muni de la topologie de Zariski. Soit $\boldsymbol{Y}$ l'espace topologique quotient de $\boldsymbol{Z} := \mathbb{A}^2_1 \amalg \mathbb{A}^2_2$ par la relation :

$$x \ \mathcal{R}\ y\,, \quad \text{si et seulement si,} \quad \begin{cases} x \text{ et } y \text{ appartiennent simultanément à une} \\ \text{même composante } \mathbb{A}^2_i \text{ de } \boldsymbol{Z} \text{ et } x = y\,; \\ \underline{\text{ou bien}} \\ x \in \mathbb{A}^2_i \text{ et } y \in \mathbb{A}^2_j \text{ avec } i \neq j \text{ et } x = y \neq 0. \end{cases}$$

La relation $\mathcal{R}$ est bien une équivalence et nous avons $\boldsymbol{Y} := \boldsymbol{Z}/\mathcal{R}$. Notons $\nu : \mathbb{A}^2_1 \amalg \mathbb{A}^2_2 \to \boldsymbol{Y}$ la surjection canonique.

• Pour $i = 1, 2$, soit $\nu_i := \nu|_{\mathbb{A}^2_i}$ la restriction de ν à $\mathbb{A}^2_i$, et notons $U_i := \operatorname{im}(\nu_i) \subseteq \boldsymbol{Y}$. Montrer que la famille $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ est un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{Y}$ et que $\nu_i : \mathbb{A}^2_i \to U_i$ est un homéomorphisme.

Faisceaux structural de $\boldsymbol{Y}$.

A partir de maintenant nous considérons la variété algébrique $\mathbb{A}^2$ munie de sa structure canonique d'espace localement annelée $\big(\mathbb{A}^2;\mathsf{O}_{\mathbb{A}^2}\big)$. Soit $\mathsf{C}^0(\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{Y}})$ le faisceaux de toutes les applications (continues ou non) définies sur les ouverts de $\boldsymbol{Y}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit V une partie ouverte de $\boldsymbol{Y}$; une section $\sigma\in\Gamma(V;\mathsf{C}^0(\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{Y}}))$ sera dite « *régulière* » si les applications composées $\sigma\circ\nu_i$ appartiennent à $\Gamma\big(\nu_i^{-1}(V);\mathsf{O}_{\mathbb{A}^2}\big)$, pour $i=1,2$.

• Montrer que les sections régulières de $\mathsf{C}^0(\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{Y}})$ constituent un sous-faisceau d'anneaux de $\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{Y}}$; il sera noté $\mathsf{O}_{\boldsymbol{Y}}$. Montrer que le couple $\big(\boldsymbol{Y};\mathsf{O}_{\boldsymbol{Y}}\big)$ est un espace *localement annelé* (et même un schéma).

• Montrer que le recouvrement $\mathsf{U}=\{U_1,U_2\}$ est un recouvrement affine de $\boldsymbol{Y}$ et que $U_1\cap U_2$ muni de la structure de variété induite par $\boldsymbol{Y}$ (ou par l'un ou l'autre des ouverts U_i) **n'est pas *affine***. La variété algébrique complexe définie par le couple $\big(\boldsymbol{Y};\mathsf{O}_{\boldsymbol{Y}}\big)$ **n'est donc pas séparée** et **n'est donc pas affine**.

II-1) **Cohomologie de faisceaux de $\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{Y}}$.** Montrer, comme pour la variété $\boldsymbol{X}$, que le faisceau des fonctions localement constantes $\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{Y}}$ est ***flasque***; préciser ensuite les groupes de cohomologie de faisceaux de $\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{Y}}$.

II-2) **Cohomologie de faisceaux de $\mathsf{O}_{\boldsymbol{Y}}$.** Notons $\mathsf{O}_{\boldsymbol{Y}}\xhookrightarrow{\varepsilon(\mathsf{O}_Y)}\big(\mathsf{C}^k(\mathsf{O}_{\boldsymbol{Y}}),d(\mathsf{O}_{\boldsymbol{Y}})_*\big)$ la résolution flasque canonique de Godement du faisceau $\mathsf{O}_{\boldsymbol{Y}}$. Expliquer pourquoi la cohomologie de faisceaux de $\mathsf{O}_{\boldsymbol{Y}}$ est calculée par la cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe des cochaînes ordonnées de Čech relatif au recouvrement U, de termes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathbf{0}\to & \check{\mathsf{C}}^1\left(\mathsf{U};\mathsf{C}^0(\mathsf{O}_{\boldsymbol{Y}})\right) & \longrightarrow & \check{\mathsf{C}}^1\left(\mathsf{U};\mathsf{C}^1(\mathsf{O}_{\boldsymbol{Y}})\right) & \longrightarrow & \check{\mathsf{C}}^1\left(\mathsf{U};\mathsf{C}^2(\mathsf{O}_{\boldsymbol{Y}})\right) & \longrightarrow\cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathbf{0}\to & \check{\mathsf{C}}^0\left(\mathsf{U};\mathsf{C}^0(\mathsf{O}_{\boldsymbol{Y}})\right) & \longrightarrow & \check{\mathsf{C}}^0\left(\mathsf{U};\mathsf{C}^1(\mathsf{O}_{\boldsymbol{Y}})\right) & \longrightarrow & \check{\mathsf{C}}^0\left(\mathsf{U};\mathsf{C}^2(\mathsf{O}_{\boldsymbol{Y}})\right) & \longrightarrow\cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} &
\end{array}\qquad(\diamond)$$

2-a) En filtrant le complexe simple associé au bicomplexe $(\diamond)$, de manière analogue au problème précédent (question (**3-b**)) mais cette fois par la filtration par les ***lignes*** de $(\diamond)$, montrer que les termes $\mathbb{E}_1^{p,q}$ de la suite spectrale associée sont :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\mathbb{E}_1^{1,0}\equiv H^0(\boldsymbol{X};\mathsf{O}_{\boldsymbol{X}}) & \mathbb{E}_1^{1,1}\equiv H^1(\boldsymbol{X};\mathsf{O}_{\boldsymbol{X}}) & \mathbb{E}_1^{1,2}\equiv H^2(\boldsymbol{X};\mathsf{O}_{\boldsymbol{X}}) \\
{\scriptstyle d_1^{0,0}}\Big\uparrow & {\scriptstyle d_1^{0,1}}\Big\uparrow & {\scriptstyle d_1^{0,2}}\Big\uparrow \\
\mathbb{E}_1^{0,0}\equiv H^0(\mathbb{A}^2;\mathsf{O}_{\mathbb{A}^2})^2 & \mathbb{E}_1^{0,1}\equiv H^1(\mathbb{A}^2;\mathsf{O}_{\mathbb{A}^2})^2 & \mathbb{E}_1^{0,2}\equiv H^2(\mathbb{A}^2;\mathsf{O}_{\mathbb{A}^2})^2 \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{array}\qquad(\diamond\diamond)$$

../..

2-b) En précisant la différentielle d_1 de cette suite spectrale (flèches verticales de $(\diamond\diamond)$), calculer ses termes $\mathbb{E}_2^{p,q}$ et prouver que les différentielles d_r de la suite spectrale sont nulles pour $r \geqslant 2$.

Montrer l'existence d'isomorphismes :

$$\begin{cases} \text{A) } H^0(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}) \equiv H^0(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \equiv \mathbb{C}[X,Y]\,; \\ \text{B) } H^1(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}) \equiv \mathbf{0}\,; \\ \text{C) } H^2(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}) \equiv H^1(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \equiv M(X,Y)\,; \\ \text{D) } H^k(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}) \equiv \mathbf{0}, \quad \text{pour tout } k \geqslant 3. \end{cases}$$

où $M(X,Y)$ dénote le $\mathbb{C}$-espace vectoriel introduit dans la question (**2-d**) du problème **I**.

• Remarquer que l'on obtient, comme dans le cas de la variété $\boldsymbol{X}$, deux raisons supplémentaires à la non affinité de $\boldsymbol{Y}$.

II-3) Cohomologie de de Rham de $(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$.

3-a) Montrer que la variété algébrique $\boldsymbol{Y}$ est non singulière.

3-b) Montrer que l'on a :

$$\boxed{\underline{\underline{\Omega}}^k_{\boldsymbol{Y}/\mathbb{C}} \equiv \mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}} \otimes_{\mathbb{C}} \textstyle\bigwedge^k (\mathbb{C}^2)} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

et préciser les groupes de cohomologie de faisceau :

$$\boxed{H^p(\boldsymbol{Y};\underline{\underline{\Omega}}^q_{\boldsymbol{Y}/\mathbb{C}})} \qquad \text{pour tous } p,q \in \mathbb{Z}.$$

3-c) Rappeler la construction de la suite spectrale convergeant vers l'hypercohomologie du complexe de faisceaux :

$$\mathbf{0} \to \underline{\underline{\Omega}}^0_{\boldsymbol{Y}/\mathbb{C}} \xrightarrow{d_0} \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{Y}/\mathbb{C}} \xrightarrow{d_1} \underline{\underline{\Omega}}^2_{\boldsymbol{Y}/\mathbb{C}} \to \mathbf{0}\,,$$

et de termes $\mathbb{E}_2^{p,q} \equiv H^p\big(\boldsymbol{Y};\underline{\underline{\Omega}}^q_{\boldsymbol{Y}/\mathbb{C}}\big)$; ce que l'on indique brièvement :

$$\mathbb{E}_2^{p,q} \equiv H^p\big(\boldsymbol{Y};\underline{\underline{\Omega}}^q_{\boldsymbol{Y}/\mathbb{C}}\big) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{DR}}\big(\boldsymbol{Y}/\mathbb{C}\big)\,.$$

• À l'aide des résultats de la question (**3-b**) et en explicitant la différentielle d_2, montrer les égalités suivantes pour les nombres de Betti :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{b}_0(\boldsymbol{Y}) = 1\,; \quad \mathrm{b}_1(\boldsymbol{Y}) = 0\,; \quad \mathrm{b}_2(\boldsymbol{Y}) = 0\,; \quad \mathrm{b}_3(\boldsymbol{Y}) = 0\,; \\ \mathrm{b}_4(\boldsymbol{Y}) = 1\,; \quad \mathrm{b}_m(\boldsymbol{Y}) = 0\,, \quad \text{pour } m > 4. \end{array}}$$

II-4) Nombres de Betti pour la structure de variété différentiable (non séparée) de $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{diff}}$.
Montrer qu'il existe une unique structure de variété différentiable sur l'espace topologique quotient $(\mathbb{A}^2_1)^{\mathrm{diff}} \amalg (\mathbb{A}^2_2)^{\mathrm{diff}} / \mathsf{R}$ rendant l'application ν submersive. On note $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{diff}}$ la variété différentiable ainsi définie.

4-a) Montrer que $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{diff}}$ admet des partitions de l'unité bien qu'elle ne soit pas séparée.

4-b) En justifiant l'application de Mayer-Vietoris sur le recouvrement ouvert $\mathsf{U}^{\mathrm{diff}} := \{U_1^{\mathrm{diff}}, U_2^{\mathrm{diff}}\}$ de $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{diff}}$, confirmer les nombres de Betti obtenus dans l'étude algébrique.

 (fin de l'examen)