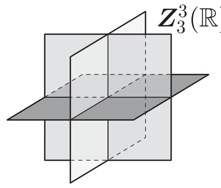
UFR de Mathématiques, Université de Paris 7
DEA 2007/08 deuxième semestre
"Introduction à la cohomologie de de Rham p-adique des variétés algébriques" Mardi 6 mai 2008
A. Arabia & Z. Mebkhout

Corrigé de l'Examen Final

Un soin particulier dans la rédaction est demandé.

Le sujet. L'examen concerne la cohomologie de de Rham du complémentaire d'un diviseur à croisements normaux dans le cas algébrique complexe et algébrique en caractéristique positive. Le but étant de vérifier que dans les deux cas on obtient les mêmes nombres de Betti.


$\boldsymbol{Z}_3^3(\mathbb{R})$

Notations. Pour tout anneau $\boldsymbol{R}$ et tous $0 \leqslant r \leqslant n \neq 0 \in \mathbb{N}$, on notera $\boldsymbol{Z}_r^n(\boldsymbol{R})$ l'hypersurface de $\mathbb{A}^n_{\boldsymbol{R}}$ correspondante à la fonction $X_1 \cdots X_r$, c'est ce que l'on appelle un « *diviseur à croisement normaux* ». Le complémentaire de $\boldsymbol{Z}_r^n(\boldsymbol{R})$ est l'ouvert *principal* $\boldsymbol{X}_r^n(\boldsymbol{R}) := D(X_1 \cdots X_r)$. Lorsque $\boldsymbol{R}$ sera sous-entendu on notera simplement $\boldsymbol{Z}_r^n$ et $\boldsymbol{X}_r^n$.

Pour une variété algébrique (resp. schéma) affine $\boldsymbol{X}$, on notera $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})$ son algèbre de fonctions régulières.

I– Le cas algébrique complexe

- On considère $\mathbb{C}^n$ muni de la topologie de Zariski.
- On note $\boldsymbol{X}_r^n$ le complémentaire dans $\mathbb{C}^n$ de $\boldsymbol{Z}_r^n := \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1 \cdots z_r = 0\}$, *i.e.*
$$\boldsymbol{X}_r^n := \underbrace{\mathbb{C}^* \times \cdots \times \mathbb{C}^*}_r \times \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n-r}$$
- Pour toute $\mathbb{C}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, la « *cohomologie de de Rham de* $\boldsymbol{A}$ », notée $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\mathbb{C})$ est la cohomologie du complexe de de Rham $\Omega^*(\boldsymbol{A}/\mathbb{C}) := (\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\mathbb{C}}; d_*)$.
- La « *cohomologie de de Rham* » d'une variété algébrique **affine** $\boldsymbol{X}$ sur $\mathbb{C}$, notée $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\mathbb{C})$, est la cohomologie de de Rham de son algèbre de fonctions régulières $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})$, *i.e.*
$$H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\mathbb{C}) := H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})/\mathbb{C}) .$$

———————×———————

1) Expliquer pourquoi $\boldsymbol{X}_r^n$ est une variété **affine** sur $\mathbb{C}$ d'anneau de fonctions régulières
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_r^n) = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n, X_1^{-1}, \ldots, X_r^{-1}] ,$$
et justifier l'égalité
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_r^n) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_r^r)[T_1, \ldots, T_{n-r}] = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_r^r) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_{n-r}] .$$

R1 On peut invoquer le résultat du cours qui dit que l'ouvert principal $D(P)$ de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$, où $P \in \boldsymbol{A}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] =: \mathbb{C}[\overline{X}]$, est isomorphe, *en tant que variété algébrique*, à l'ensemble des zéros de $(P\,T-1) \in \mathbb{C}[\overline{X}, T]$ dans l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, et donc
$$\boldsymbol{A}(D(P)) \simeq \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{Z}(P\,T-1)\big) = \frac{\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]}{\langle PT-1 \rangle} = \mathbb{C}\Big[X_1, \ldots, X_n, \frac{1}{P}\Big] .$$
On rappelle que l'isomorphisme en question provient de l'application $D(P) \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, $x \mapsto (x, P^{-1}(x))$, *clairement algébrique d'image* $Z(P\,T-1)$, *d'inverse : la restriction à* $Z(P\,T-1)$ *de la projection* $p : \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$, $(x,t) \mapsto x$, *évidemment algébrique aussi.*

Dans le cas présent, $\boldsymbol{X}_r^n = D(P)$ avec $P = X_1 \cdots X_r$. L'algèbre $\boldsymbol{A}(D(P))$ s'obtient alors de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ en inversant P ou, ce qui est équivalent, en inversant chacun des X_i, $i = 1, \ldots, r$. On a donc :
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_r^n) = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n, (X_1 \cdots X_r)^{-1}] = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n, X_1^{-1}, \ldots, X_r^{-1}] .$$

D'autre part, pour tous $r \leqslant n \in \mathbb{N}$, l'algèbre $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n, X_1^{-1}, \ldots, X_r^{-1}]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ayant comme base la famille des monômes

$$\{X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n} \mid m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z} \text{ et } m_{r+1}, \ldots, m_n \in \mathbb{N}\}$$

L'application $\mathbb{C}$-linéaire définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X_{r+1}, \ldots, X_n] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \ldots, X_n] \\ X_1^{m_1} \cdots X_r^{m_r} \otimes \ X_{r+1}^{m_{r+1}} \cdots X_n^{m_n} & \longmapsto & X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n} \end{array}$$

est alors clairement un homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres bijectif.

2) Le théorème d'homotopie algébrique affirme que pour toute $\mathbb{C}$-algèbre $\boldsymbol{B}$, les morphismes d'algèbres

$$p_i : \boldsymbol{B}[T] \to \boldsymbol{B}\,, \quad \begin{cases} p_i(T) = i\,, & i = 0, 1\,; \\ p_i(b) = b\,, & b \in \boldsymbol{B}\,; \end{cases}$$

induisent le même morphisme en cohomologie de de Rham, *i.e.*

$$H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{B}[T]/\mathbb{C}) \underset{H_{\mathrm{DR}}(p_0)}{\overset{H_{\mathrm{DR}}(p_1)}{\rightrightarrows}} H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{B}/\mathbb{C})\,, \quad H_{\mathrm{DR}}(p_0) = H_{\mathrm{DR}}(p_1)\,.$$

En déduire l'égalité

$$\boxed{H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^n_r/\mathbb{C}) = H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^r_r/\mathbb{C})}$$

R2 On doit montrer qu'il existe un isomorphisme

$$H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r)) \simeq H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^r_r))$$

et donc, par la deuxième partie de la question (**1**), qu'il existe un isomorphisme entre

$$H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^r_r)[T_1, \ldots, T_{n-r}]) \simeq H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^r_r))$$

Or, une conséquence immédiate du théorème d'homotopie est que, pour tout $\mathbb{C}$-algèbre $\boldsymbol{B}$, les morphismes $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{B}[X]$ et $\boldsymbol{B}[X] \to \boldsymbol{B}$, $X \mapsto 0$, induisent des bijections inverses l'une de l'autre en cohomologie de de Rham.

Les notes du cours démontrent cette conséquence dans le cadre †-adique, mais la même démonstration s'applique au cadre algébrique ; en effet, soit $h : \boldsymbol{B}[X] \to \boldsymbol{B}[X, T]$ le morphisme de $\boldsymbol{B}$-algèbres $X \mapsto XT$ et notons $p_i : \boldsymbol{B}[X, T] \to \boldsymbol{B}[X]$ les projections $T \mapsto i$, pour $i = 0, 1$. Alors, par fonctorialité de la cohomologie de de Rham et par le théorème d'homotopie, on a

$$\mathrm{id} = H_{\mathrm{DR}}(p_1 \circ h) = H_{\mathrm{DR}}(p_1) \circ H_{\mathrm{DR}}(h) = H_{\mathrm{DR}}(p_0) \circ H_{\mathrm{DR}}(h) = H_{\mathrm{DR}}(\iota) \circ H_{\mathrm{DR}}(\pi)$$

où nous avons noté $\pi : \boldsymbol{B}[X] \to \boldsymbol{B}$ le morphisme de $\boldsymbol{B}$-algèbres $X \mapsto 0$, et $\iota : \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{B}[X]$ l'inclusion. On en déduit l'injectivité de $H_{\mathrm{DR}}(\pi)$ qui est, par ailleurs, clairement surjective puisque $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{\boldsymbol{B}}$. Par conséquent $H_{\mathrm{DR}}(\pi)$ est bijective d'inverse $H_{\mathrm{DR}}(\iota)$.

3) Justifier l'égalité

$$\boxed{\Omega^k(\boldsymbol{X}^r_r/\mathbb{C}) = \bigoplus_{0 < i_1 < \cdots < i_k \leqslant r} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^r_r)\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}}$$

et expliciter la différentielle

$$\bigoplus_{0 < i_1 < \cdots < i_k \leqslant r} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^r_r)\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k} \xrightarrow{d_k} \bigoplus_{0 < i_1 < \cdots < i_{k+1} \leqslant r} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^r_r)\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_{k+1}}\,.$$

R3 D'après la question (**1**), on a $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_r^r) = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_r]_{X_1 \cdots X_r}$ et par la propriété universelle de la localisation des complexes de de Rham (*cf.* th. 2.2.2-(b) des notes [A-M])

$$\begin{aligned}\Omega^k_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_r^r)/\mathbb{C}} &= \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_r]_{X_1 \cdots X_r} \otimes_{\mathbb{C}[\underline{X}]} \Omega^k_{\mathbb{C}[\underline{X}]/\mathbb{C}} \\ &= \bigoplus_{0<i_1<\cdots<i_k\leqslant r} \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_r]_{X_1 \cdots X_r}\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}\end{aligned}$$

d'après 2.1.19 (*loc.cit.*) où la différentielle est également précisée et vaut

$$d(f\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial X_j}\, dX_j \wedge dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k} \qquad (\mathbf{E1})$$

où $f \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_r^r)$ est un polynôme de Laurent en $X_1, \ldots, X_r$, autrement dit, c'est une somme **finie** de la forme

$$f = \sum_{m_1,\ldots,m_r\in\mathbb{Z}} a_{m_1,\ldots,m_r}\, X_1^{m_1} \cdots X_r^{m_r}\,, \quad \text{avec } a_{m_1,\ldots,m_r} \in \mathbb{C}\,.$$

4) Expliciter complètement le complexe de de Rham $(\Omega^*(\boldsymbol{X}_1^1/\mathbb{C}), d_*)$.

R4 Par la question précédente, le complexe de de Rham de $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1^1) = \mathbb{C}[X, X^{-1}]$ possède seulement deux termes :

$$\mathbf{0} \to \mathbb{C}[X, X^{-1}] \xrightarrow{d_0} \mathbb{C}[X, X^{-1}]\, dX \to \mathbf{0}$$

où d_0, étant $\mathbb{C}$-linéaire, est entièrement déterminée par son action sur les éléments de la base $\{X^m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X, X^{-1}]$ où elle vaut

$$d_0(X^m) = mX^{m-1}\, dX\,. \qquad (\mathbf{E2})$$

5) Déterminer les groupes $H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1^1/\mathbb{C})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Indications pour le calcul de $H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1^1/\mathbb{C})$. Un élément $z \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1^1) = \mathbb{C}[X, X^{-1}]$ est un «polynôme de Laurent», i.e. $z = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j X^j$ avec des éléments $a_j \in \mathbb{C}$ presque tous nuls. Montrer alors que l'on a :

$$\bullet\ z - a_{-1}\frac{1}{X} = \partial_X\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1^1)\big) \quad \text{et} \quad \bullet\ \frac{1}{X} \notin \partial_X\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1^1)\big)\,.$$

R5 Avec l'explicitation de la question (**4**), notamment la formule **E2**, nous voyons aussitôt que $\ker(d_0)$ est engendré par X^0 et $\operatorname{coker}(d_0)$ par la classe de X^{-1}. Donc

- $H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1^1) = \mathbb{C} \cdot X^0$, • $H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1^1) = \mathbb{C} \cdot [dX/X]$, et • $H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1^1) = \mathbf{0}$, $\forall k > 1$.

L'indication du problème met l'accent sur l'image de d_0 qui, toujours d'après **E2**, est clairement engendrée par la base $\{X^m \mid m \neq -1\}$.

6) Écrivons $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_r^r) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1})[Y, Y^{-1}]$. Montrer à l'aide de (**3**) que chaque $\omega \in \Omega^k(\boldsymbol{X}_r^r/\mathbb{C})$ admet une décomposition unique sous la forme

$$\omega = \alpha(Y) + \beta(Y) \wedge dY\,, \qquad (*)$$

où

$$\begin{cases} \alpha(Y) = \sum\limits_{0<i_1<\cdots<i_k<r} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(Y)\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}\,, & \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(Y) \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^{r-1}_{r-1})[Y, Y^{-1}]\,, \\ \beta(Y) = \sum\limits_{0<i_1<\cdots<i_{k-1}<r} \beta_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(Y)\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_{k-1}}\,, & \beta_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(Y) \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^{r-1}_{r-1})[Y, Y^{-1}]\,. \end{cases} \tag{$**$}$$

R6 Compte tenu de (**3**), l'affirmation résulte de regrouper les tenseurs antisymétriques $dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}$ suivant que leur dernier terme est ou n'est pas dX_r (ou plutôt dY dans la notation $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^r_r) := \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^{r-1}_{r-1})[Y, Y^{-1}]$).

7) Montrer en s'inspirant de la question (**5**) que pour chaque $\beta_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(Y) \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^{r-1}_{r-1})[Y, Y^{-1}]$, il existe un et un unique $\mu_{i_1,\ldots,i_{k-1}} \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^{r-1}_{r-1})$ (donc indépendant de Y) tel que

$$\beta_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(Y) = \frac{\partial \nu_{i_1,\ldots,i_{k-1}}}{\partial Y}(Y) + \mu_{i_1,\ldots,i_{k-1}} \cdot \frac{1}{Y}\,,$$

pour un certain $\nu_{i_1,\ldots,i_{k-1}} \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^{r-1}_{r-1})[Y, Y^{-1}]$.

R7 Soit $\boldsymbol{B}$ une $\mathbb{C}$-algèbre. Un élément $\beta \in \boldsymbol{B}[Y, Y^{-1}]$ est un polynôme de Laurent $\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j Y^j$ avec $b_j \in \boldsymbol{B}$ presque tous nuls. L'algèbre $\boldsymbol{B}[Y, Y^{-1}]$ est donc un $\boldsymbol{B}$-module libre de base la famille des monômes $\{Y^m\}_{m\in\mathbb{Z}}$. Le noyau et l'image de $\partial/\partial Y$ répondent alors à la même description que dans (**5**) et l'on a une décomposition

$$\beta = \Big(\sum_{1\neq m\in\mathbb{Z}} b_m Y^m\Big) + b_{-1}\,\frac{1}{Y} = \frac{\partial}{\partial Y}\Big(\sum_{1\neq m\in\mathbb{Z}} b_m \frac{Y^{m+1}}{m+1}\Big) + b_{-1}\,\frac{1}{Y}\,.$$

L'unicité du coefficient b_{-1} admet plusieurs justifications :

a) C'est le coefficient de l'élément de $H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{B}[Y, Y^{-1}]/\boldsymbol{B})$ défini par le 1-cocycle βdY, relativement au générateur canonique $[dY/Y]$.

b) Étant données deux décompositions $\beta = \frac{\partial \nu_1}{\partial Y} + \mu_1 \frac{1}{Y} = \frac{\partial \nu_2}{\partial Y} + \mu_2 \frac{1}{Y}$, avec $\nu_i \in \boldsymbol{B}[Y]$ et $\mu_i \in \boldsymbol{B}$, on a $(\mu_1 - \mu_2)\frac{1}{Y} = \partial_Y(\nu_2 - \nu_1) \in \partial_Y(\boldsymbol{B}[Y, Y^{-1}])$ et alors $\mu_1 - \mu_2 = 0$.

La question (**7**) résulte de poser $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^r_r)$.

En déduire que pour chaque $\omega \in \Omega^k(\boldsymbol{X}^r_r/\mathbb{C})$, il existe $\nu \in \Omega^{k-1}(\boldsymbol{X}^r_r/\mathbb{C})$ tel que

$$\omega - d\nu = \alpha(Y) + \beta \wedge \frac{dY}{Y}\,, \tag{$\diamond$}$$

où α, β sont de la forme $(**)$ avec $\beta_{i_1,\ldots,i_{k-1}} \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^{r-1}_{r-1})$ (indépendants de Y !).

R8 D'après la première partie de cette question, on pose

$$\nu(Y) \;=\; \sum_{0<i_1<\cdots<i_{k-1}<r} (-1)^{k-1} \nu_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(Y)\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_{k-1}}\,,$$

puis

$$\alpha'(Y) \;:=\; \sum\nolimits_{j=1}^{r-1} (-1)^{k-1} \frac{\partial \nu}{\partial X_j}(Y)\; dX_j \wedge dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_{k-1}}\,,$$

et même

$$\alpha'(Y) \;:=\; \sum_{0<i_1<\cdots<i_{k-1}<r} \sum\nolimits_{j=1}^{r-1} (-1)^{k-1} \frac{\partial \nu_{i_1,\ldots,i_{k-1}}}{\partial X_j}(Y)\; dX_j \wedge dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_{k-1}}\,.$$

On a alors, par construction,

$$\begin{aligned} d\nu(Y) &= \alpha'(Y) + \sum_{0<i_1<\cdots<i_{k-1}<r} \frac{\partial \nu_{i_1,\ldots,i_{k-1}}}{\partial Y}(Y)\, dX_{i_1}\wedge\cdots\wedge dX_{i_{k-1}}\wedge dY \\ &= \alpha'(Y) + \sum_{0<i_1<\cdots<i_{k-1}<r} \Big(\beta_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(Y) - \mu_{i_1,\ldots,i_{k-1}}\cdot\frac{1}{Y}\Big)\, dX_{i_1}\wedge\cdots\wedge dX_{i_{k-1}}\wedge dY \\ &= \alpha'(Y) + \beta(Y)\wedge dY - \mu\wedge\frac{dY}{Y} = \alpha'(Y) + \omega(Y) - \alpha(Y) - \mu\wedge\frac{dY}{Y}\,, \qquad (\mathbf{E3}) \end{aligned}$$

où nous avons noté

$$\mu := \sum_{0<i_1<\cdots<i_{k-1}<r} \mu_{i_1,\ldots,i_{k-1}}\, dX_{i_1}\wedge\cdots\wedge dX_{i_{k-1}} \in \Omega^{k-1}(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1}/\mathbb{C})\,.$$

En regroupant les termes de l'égalité **E3**, on a

$$\omega(Y) - d\nu(Y) = \big(\alpha(Y) - \alpha'(Y)\big) + \mu\wedge\frac{dY}{Y}$$

d'où l'égalité ($\diamond$) soumise aux contraintes exigées modulo un changement de notations évident.

8) On suppose maintenant $d\omega = 0$. Montrer à l'aide de l'écriture ($\diamond$) que l'on a

$$\frac{\partial\alpha}{\partial Y}(Y) = \pm(d\beta)\,\frac{1}{Y}\,,$$

et prouver les égalités

$$\begin{cases} d\beta = 0\,, \\ \alpha\in\Omega^k(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1}/\mathbb{C}) \text{ et } d\alpha = 0\,. \end{cases}$$

R9 Si nous appliquons l'opérateur d aux deux membres de l'égalité établie dans (**7**), à savoir :

$$\omega - d\nu = \alpha(Y) + \beta\wedge\frac{dY}{Y}\,, \qquad (\diamond)$$

on a

$$0 = d(\omega - d\nu) = d(\alpha(Y)) + (d\beta)\wedge\frac{dY}{Y}\,, \qquad (\mathbf{E4})$$

où $\beta\in\Omega^{k-1}(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1}/\mathbb{C})$ et $(d\beta)$ désigne, donc, la différentielle de β dans le complexe de de Rham de la $\mathbb{C}$-algèbre $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1})$. D'autre part $\alpha(Y)$ est de la forme

$$\alpha(Y) = \sum_{0<i_1<\cdots<i_k<r} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(Y)\, dX_{i_1}\wedge\cdots\wedge dX_{i_k}\,,\ \text{avec } \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(Y)\in\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1})[Y,Y^{-1}]\,,$$

et $d(\alpha(Y))$ fait intervenir les termes

$$\begin{aligned} d_j(\alpha(Y)) &:= \sum_{0<i_1<\cdots<i_k<r} \frac{\partial\alpha_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial X_j}(Y)\, dX_j\wedge dX_{i_1}\wedge\cdots\wedge dX_{i_k}\,,\ j = 1,\ldots,r-1\,, \\ \partial_Y(\alpha(Y)) &:= \sum_{0<i_1<\cdots<i_k<r} \frac{\partial\alpha_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial Y}(Y)\, dX_{i_1}\wedge\cdots\wedge dX_{i_k}\,, \end{aligned}$$

pour s'exprimer sous la forme

$$d(\alpha(Y)) = \Big(\sum\nolimits_{j=1}^{r-1} d_j(\alpha(Y))\Big) + (-1)^k\,\partial_Y(\alpha(Y))\wedge d(Y)\,.$$

L'égalité **E4** admet donc la réécriture

$$0 = \Big(\sum\nolimits_{j=1}^{r-1} d_j(\alpha(Y))\Big) + (-1)^k\,\partial_Y(\alpha(Y))\wedge dY + (d\beta)\wedge\frac{dY}{Y}\,, \qquad (\mathbf{E5})$$

dont on déduit aussitôt l'égalité demandée

$$\partial_Y(\alpha(Y)) = \pm(d\beta)\,\frac{1}{Y}\,\cdot$$

Or, nous avons déjà remarqué dans la preuve de la première partie de (**7**) que l'image de l'opérateur ∂_Y ne contient aucun multiple non nul de Y^{-1}, par conséquent

$$\bullet\ (d\beta) = 0 \quad \text{et} \quad \bullet\ \partial_Y(\alpha(Y)) = 0\,.$$

Les fonctions $\alpha_{i_1,\dots,i_k}$ sont donc indépendantes de Y et nous pouvons effacer la référence à Y dans leur notation, nous notons alors $\alpha := \alpha(Y) \in \Omega^k(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1}/\mathbb{C})$. On a :

$$d\alpha = \sum\nolimits_{j=1}^{r-1} d_j(\alpha) = 0\,,$$

d'après, encore une fois, **E5**.

9) Prouver les égalités

$$\begin{aligned} H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_r^r/\mathbb{C}) &= H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1}/\mathbb{C}) \ \bigoplus\ H^{k-1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1}/\mathbb{C}) \wedge \left[\frac{dY}{Y}\right], \quad \forall k \in \mathbb{N}\,,\\ &= \underbrace{H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1^1/\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1^1/\mathbb{C})}_{r \text{ fois}} \end{aligned}$$

R10 Notons $\mathscr{Z}_r^k$ le groupe des k-cocycles de $(\Omega^*(\boldsymbol{X}_r^r/\mathbb{C}), d_*)$. On a des inclusions

$$\bullet\ \mathscr{Z}_{r-1}^k \subseteq \mathscr{Z}_r^k \quad \text{et} \quad \bullet\ \mathscr{Z}_{r-1}^{k-1} \wedge \frac{dY}{Y} \subseteq \mathscr{Z}_r^k$$

la conclusion de (**8**) affirme que composée des applications

$$\mathscr{Z}_{r-1}^k \bigoplus \left(\mathscr{Z}_{r-1}^{k-1} \wedge \tfrac{dY}{Y}\right) \xrightarrow[\subseteq]{\text{inclusion}} \mathscr{Z}_r^k \xrightarrow{\pi} H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_r^r/\mathbb{C})$$

où π désigne la surjection canonique, est encore surjective. La recherche de la détermination de $H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_r^r/\mathbb{C})$, nous emmène ainsi à identifier les cobords de $\Omega^*(\boldsymbol{X}_r^r/\mathbb{C})$ contenus dans $\mathscr{Z}_{r-1}^k \bigoplus \big(\mathscr{Z}_{r-1}^{k-1} \wedge dY/Y\big)$. Or, la formule **E4** de la preuve de (**8**) donne la forme générale d'un cobord :

$$d\omega = d(\alpha(Y)) + (d\beta) \wedge \frac{dY}{Y} = \Big(\sum\nolimits_{j=1}^{r-1} d_j(\alpha(Y))\Big) + \pm\partial_Y(\alpha(Y)) \wedge dY + (d\beta) \wedge \frac{dY}{Y}$$

et pour avoir

$$d\omega \in \mathscr{Z}_{r-1}^k \bigoplus \big(\mathscr{Z}_{r-1}^{k-1} \wedge dY/Y\big)\,,$$

il faut que $\partial_Y(\alpha(Y)) \in \mathscr{Z}_{r-1}^{k-1} \cdot Y^{-1}$, ce qui n'est possible que si $\partial_Y(\alpha(Y)) = 0$, autrement dit, que $\alpha(Y)$ soit indépendante de Y. Par conséquent, l'élément

$$\omega + \varpi \wedge dY/Y \in \mathscr{Z}_{r-1}^k \bigoplus \big(\mathscr{Z}_{r-1}^{k-1} \wedge dY/Y\big)$$

est un cobord si et seulement si, on a

$$\omega + \varpi \wedge dY/Y = (d\alpha) + (d\beta) \wedge (dY/Y)\,,$$

avec $\alpha \in \Omega^{k-1}(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1}/\mathbb{C})$ et $\beta \in \Omega^{k-2}(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1}/\mathbb{C})$.

On a donc bien l'égalité

$$H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_r^r/\mathbb{C}) = H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1}/\mathbb{C}) \ \bigoplus\ H^{k-1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1}/\mathbb{C}) \wedge [dY/Y], \quad \forall k \in \mathbb{N}\,,$$

qui admet la réécriture

$$H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_r^r/\mathbb{C}) = \bigoplus\nolimits_{k=a+b} H^a_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1}/\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} H^b_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1^1/\mathbb{C})\,, \quad \forall k \in \mathbb{N}\,. \qquad \textbf{(E6)}$$

Un argument inductif évident prouve alors la dernière assertion de la question (**9**).

10) Justifier l'égalité

$$\boxed{\dim_{\mathbb{C}}\left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^n_r/\mathbb{C})\right) = 2^r}$$

et donner la liste complète des nombres de Betti algébriques complexes de $\boldsymbol{X}^n_r$.

R11 Comme conséquence la question (**5**), on a

$$\dim_{\mathbb{C}}(H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^r_r/\mathbb{C})) = \dim_{\mathbb{C}}(H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^1_1/\mathbb{C})^{\otimes r}) = \dim_{\mathbb{C}}(H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^1_1/\mathbb{C}))^r = 2^r\,,$$

car la dimension d'un produit tensoriel est le produit des dimensions de ses facteurs.

L'égalité **E6** à la fin de la preuve de (**9**) donne par induction

$$H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^r_r/\mathbb{C}) = \bigoplus_{k=a_1+\cdots+a_r} H^{a_1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^1_1/\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} H^{a_r}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^1_1/\mathbb{C})$$

où il suffit de se restreindre au cas où $a_i \in \{0,1\}$, en particulier

$$\dim_{\mathbb{C}}(H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^r_r/\mathbb{C})) = \sum_{k=a_1+\cdots+a_r} 1$$

où le terme de droite est le nombre de combinaisons de r éléments en groupes de k éléments, par conséquent

$$\boxed{\dim_{\mathbb{C}}\big(H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^r_r/\mathbb{C})\big) = \binom{r}{k}}$$

11) Que dire des résultats de ce problème si l'on remplace $\mathbb{C}$ par un corps de caractéristique nulle $\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{X}^n_r(\mathbb{C})$ par $\boldsymbol{X}^n_r(\boldsymbol{K})$.

R12 On peut bien sûr se limiter à observer que la seule propriété du corps $\mathbb{C}$ utilisée dans la résolution du problème est qu'il est de caractéristique nulle, *i.e.* qu'il contient le corps des nombres rationnels, d'où l'égalité des nombres de Betti :

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{K},k}(\boldsymbol{X}^n_r(\boldsymbol{K})/\boldsymbol{K}) = \mathbf{B}_{\mathbb{C},k}(\boldsymbol{X}^n_r(\mathbb{C})/\mathbb{C})\,, \quad \forall k\in\mathbb{N}. \qquad (\mathbf{E7})$$

Une autre possibilité vient de remarquer les identifications d'algèbres

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r(\boldsymbol{K})) := \boldsymbol{K}[X_1,\ldots,X_n]_{X_1\cdots X_r} = \boldsymbol{K}\otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[X_1,\ldots,X_n]_{X_1\cdots X_r} = \boldsymbol{K}\otimes_{\mathbb{Q}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r(\mathbb{Q}))$$

dont on déduit, grâce à la propriété de changement de base pour le complexe de de Rham algébrique (*cf.* th. 2.2.2 [A-M]), l'identification

$$(\Omega^*(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r(\boldsymbol{K})/\boldsymbol{K}), d_*) = (\boldsymbol{K}\otimes_{\mathbb{Q}} \Omega^*(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r(\mathbb{Q})/\mathbb{Q}), d_*)$$

et alors

$$H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r(\boldsymbol{K})/\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{K}\otimes_{\mathbb{Q}} H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r(\mathbb{Q})/\mathbb{Q})\,,$$

puisque le foncteur $\boldsymbol{K}\otimes_{\mathbb{Q}}(\_)$ est exact. Comme en plus ce foncteur préserve dimensions (il est fidèle), on a aussi

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{K},k}(\boldsymbol{X}^n_r(\boldsymbol{K})/\boldsymbol{K}) = \mathbf{B}_{\mathbb{Q},k}(\boldsymbol{X}^n_r(\mathbb{Q})/\mathbb{Q})\,, \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

et **E7** suit.

——————×——————

../..

II– Le cas algébrique en caractéristique p

- On considère le schéma affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_p}$ correspondant à l'algèbre $\mathbb{F}_p[X_1, \ldots, X_n]$.
- On note $\boldsymbol{X}^n_r$ l'ouvert principal de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_p}$, complémentaire de l'hypersurface $\boldsymbol{Z}(X_1 \cdots X_r)$.

———————×———————

1) Expliquer pourquoi $\boldsymbol{X}^n_r$ est un schéma **affine** sur $\mathbb{F}_p$ d'anneau de fonctions régulières

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r) = \mathbb{F}_p[X_1, \ldots, X_n, X_1^{-1}, \ldots, X_r^{-1}] .$$

R13 Il fallait répondre que sur un schéma affine ($\boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R}), \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$) (l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_p}$ en l'occurrence), un ouvert principal $D(f)$ muni du faisceau $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}|_{D(f)}$ est canoniquement isomorphe au schéma affine associé à l'anneau $\boldsymbol{R}_f$.

Il s'agit d'un corollaire immédiat des premiers résultats fondamentaux de la théorie des « *schémas affines* » : les propositions **2.2, 2.3** de [Har] (p. 71, 73), il y apparaît comme l'exercice **2.1** (p. 79). On rappelle brièvement ces résultats. À un anneau $\boldsymbol{R}$ on fait correspondre l'ensemble $\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$ de ses idéaux premiers que l'on munit de la topologie de Zariski (aussi appelée « *spectrale* » [EGA$_1$] **I**, 1.1.2, p. 194). L'espace topologique en question est muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ et l'espace annelé $(\boldsymbol{X}; \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est le « *schéma affine associé à* $\boldsymbol{R}$ ». La proposition **2.2** en question donne un isomorphisme canonique $\boldsymbol{R}_f \simeq \Gamma(D(f); \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ à partir duquel on construit un isomorphisme entre le schéma affine associé à $\boldsymbol{R}_f$ et l'espace annelé $(D(f); \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}|_{D(f)})$ (prop. **2.3**).

2) Soit $(\boldsymbol{V}; (\pi))$ un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique de corps résiduel $\mathbb{F}_p$ et corps de fractions $\boldsymbol{K}$. Supposons $r < n$ et considérons

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_1 := \boldsymbol{V}[X_1, \ldots, X_n, X_1^{-1}, \ldots, X_r^{-1}] , \\ \boldsymbol{B}_2 := \boldsymbol{V}[X_1, \ldots, X_n, X_1^{-1}, \ldots, X_r^{-1}, (1 + \pi X_{r+1})^{-1}] . \end{cases}$$

a) Montrer que les réductions modulo (π) de $\boldsymbol{B}_1$ et $\boldsymbol{B}_2$ sont isomorphes à $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r)$.

R14 On a clairement $\boldsymbol{B}_2 = (\boldsymbol{B}_1)_{1+\pi X_{r+1}}$ d'où un morphisme d'anneaux $\boldsymbol{B}_1 \to \boldsymbol{B}_2$ dont la réduction modulo (π) est l'identité puisque $(1+\pi X_{r+1}) = 1 \bmod (\pi)$. D'autre part, la surjection canonique $\boldsymbol{V} \twoheadrightarrow \boldsymbol{V}/(\pi) = \mathbb{F}_p$ induit une surjection $\boldsymbol{B}_1 \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r)$ dont le noyau est exactement $\pi \boldsymbol{B}_1$.

b) Montrer que les cohomologies de de Rham sur $\boldsymbol{V}$ de $\boldsymbol{B}_1$ et $\boldsymbol{B}_2$ sont différentes.

Indication. Montrer que $\boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{B}_2$ est isomorphe à $\boldsymbol{K}[X_1, \ldots, X_n, X_1^{-1}, \ldots, X_{r+1}^{-1}]$. Expliquer pourquoi les cohomologies de de Rham sur $\boldsymbol{V}$ de $\boldsymbol{B}_1$ et $\boldsymbol{B}_2$, tensorisées par $\boldsymbol{K}$, donnent les mêmes nombres de Betti que ceux des $\boldsymbol{K}$-algèbres $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r(\boldsymbol{K}))$ et $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_{r+1}(\boldsymbol{K}))$ de la question **I-(11)**. *Utiliser ensuite* **I-(10)** *pour conclure.*

R15 Le morphisme de $\boldsymbol{K}$-algèbres

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{K}[X_1, \ldots, X_n] & \xrightarrow{\varphi} & \boldsymbol{K}[X_1, \ldots, X_n] \\ X_i & \longmapsto & X_i \qquad \text{si } i \neq r+1, \\ X_{r+1} & \longmapsto & \dfrac{X_{r+1} - 1}{\pi} \end{array}$$

est clairement un isomorphisme vérifiant $\varphi(1 + \pi X_{r+1}) = X_{r+1}$, il induit donc bien un isomorphisme entre

$$\boldsymbol{K}[X_1,\ldots,X_n,X_1^{-1},\ldots,X_r^{-1},(1+\pi X_{r+1})^{-1}] \quad \text{et} \quad \boldsymbol{K}[X_1,\ldots,X_n,X_1^{-1},\ldots,X_{r+1}^{-1}]\,.$$

Par conséquent

$$\boldsymbol{K}\otimes_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{B}_2 \simeq \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_{r+1}/\boldsymbol{K})\,,$$

et si nous avions $H_{\rm DR}(\boldsymbol{B}_1/\boldsymbol{V})\simeq H_{\rm DR}(\boldsymbol{B}_2/\boldsymbol{V})$, on aurait, grâce aux considérations de la deuxième partie de la preuve de I-(**11**), les identifications

$$\begin{array}{ccc} H_{\rm DR}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r/\boldsymbol{K})) = H_{\rm DR}(\boldsymbol{K}\otimes\boldsymbol{B}_1/\boldsymbol{K}) & & H_{\rm DR}(\boldsymbol{K}\otimes\boldsymbol{B}_2/\boldsymbol{K}) = H_{\rm DR}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_{r+1}/\boldsymbol{K})) \\ || & & || \\ \boldsymbol{K}\otimes H_{\rm DR}(\boldsymbol{B}_1/\boldsymbol{V}) & \simeq & \boldsymbol{K}\otimes H_{\rm DR}(\boldsymbol{B}_2/\boldsymbol{V}) \end{array}$$

ce qui est impossible vu que $\dim_{\boldsymbol{K}}(H_{\rm DR}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_\ell))) = 2^\ell$ d'après I-(**10**).

c) On note $(\widehat{\_})$, resp. $(\_)^\dagger$, le foncteur de complétion (π)-adique formelle, resp. faible. Expliquer pourquoi les algèbres $\widehat{\boldsymbol{B}}_1,\widehat{\boldsymbol{B}}_2$, resp. $\boldsymbol{B}_1^\dagger,\boldsymbol{B}_2^\dagger$, sont isomorphes.

R16 On considère la suite de morphismes d'algèbres

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{B}_1 \arrow[r, "\nu"] \arrow[rr, bend right, "\iota(\boldsymbol{B}_1)"'] & (\boldsymbol{B}_1)_{1+\pi X_{r+1}} \arrow[r, "\mu"] & \boldsymbol{B}_1^\dagger \end{tikzcd} \qquad (\mathbf{E8})$$

où ν est le morphisme canonique de localisation, $\iota(\boldsymbol{B}_1)$ celui d'une algèbre dans sa complétion faible, et μ résulte de ce que $(1+\pi X_{r+1})$ est inversible dans $\boldsymbol{B}_1^\dagger$ car inversible modulo π et que $\boldsymbol{B}_1^\dagger$ est de Zariski. Par complétion faible de **E8** obtient

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{B}_1^\dagger \arrow[r, "\nu^\dagger"] \arrow[rr, bend right, "\iota(\boldsymbol{B}_1)^\dagger"'] & \boldsymbol{B}_2^\dagger \arrow[r, "\mu^\dagger"] & \boldsymbol{B}_1^{\dagger\dagger} = \boldsymbol{B}_1^\dagger \end{tikzcd}$$

où $\mu^\dagger\circ\nu^\dagger = \iota(\boldsymbol{B}_1)^\dagger$ est l'identité (*cf.* [MW] th. 1.2) et le morphisme $\nu^\dagger$ est, donc, injectif. On conclut en observant que $\nu^\dagger$ est aussi surjectif puisque son image contient l'image de $\boldsymbol{B}_2$ dans $\boldsymbol{B}_2^\dagger$ et donc aussi toute série faiblement convergente de $\boldsymbol{B}_2$.

Les mêmes raisonnements s'appliquent pour le foncteur $(\widehat{\_})$ à la place de $(\_)^\dagger$.

———×———

Relèvement de $\boldsymbol{X}^n_r(\mathbb{F}_p)$. À partir de maintenant,

- $(\boldsymbol{V};(\pi)) = (\mathbb{Z}_p;p\mathbb{Z}_p)$ et donc $\boldsymbol{K} := \mathbb{Q}_p$.
- $(\_)^\dagger : \mathbf{Alg}(\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \mathbf{Alg}(\mathbb{Z}_p)$: le foncteur de complétion p-adique faible.
- Pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre de type fini $\boldsymbol{B}$, la « *cohomologie de de Rham p-adique de $\boldsymbol{B}^\dagger$* », notée $H^*_{\rm DR}(\boldsymbol{B}^\dagger/\mathbb{Q}_p)$, est la cohomologie du complexe
$$\Omega^*(\boldsymbol{B}^\dagger/\mathbb{Q}_p) := \big(\boldsymbol{B}^\dagger\otimes_{\boldsymbol{B}}\Omega^*_{\boldsymbol{B}/\mathbb{Z}_p},d_*\big)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p\,.$$
- On considère le schéma affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}_p}$ correspondant à l'algèbre $\mathbb{Z}_p[X_1,\ldots,X_n]$.
- On note $\boldsymbol{X}^n_r$ l'ouvert principal de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}_p}$, complémentaire de l'hypersurface $\boldsymbol{Z}(X_1\cdots X_r)$.
- $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r) := \mathbb{Z}_p[X_1,\ldots,X_n,X_1^{-1},\ldots,X_r^{-1}]$. On note $\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}^n_r) := \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r)^\dagger$.
- La « *cohomologie de de Rham p-adique de $\boldsymbol{X}^n_r$* », notée $H_{\rm DR}(\boldsymbol{X}^n_r/\mathbb{Q}_p)$, est la cohomologie du complexe

$$\boxed{\Omega^*(\boldsymbol{X}^n_r/\mathbb{Q}_p) := \Omega^*(\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}^n_r)/\mathbb{Q}_p) = \big(\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}^n_r)\otimes_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r)}\Omega^*_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^n_r)/\mathbb{Z}_p},d_*\big)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p}$$

———×———

3) Justifier l'égalité

$$\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_r^n) = \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_r^r)[T_1, \ldots, T_{n-r}]^\dagger \,.$$

R17 De même que nous avons montré dans I-(**1**), on a

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_r^n) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_r^r)[T_1, \ldots, T_{n-r}] \tag{\textbf{E9}}$$

et nous sommes emmenés, tout comme dans la réponse **R16**, à regarder pour une $\mathbb{Z}_p$-algèbre $\boldsymbol{B}$, la suite de morphismes d'algèbres

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{B}[T] \arrow[r, "\nu"] \arrow[rr, bend right, "\iota(\boldsymbol{B}[T])"'] & \boldsymbol{B}^\dagger[T] \arrow[r, "\mu"] & (\boldsymbol{B}[T])^\dagger \end{tikzcd} \tag{\textbf{E10}}$$

où ν est induit par $\iota(\boldsymbol{B}) : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}^\dagger$, et μ est le morphisme de $\boldsymbol{B}^\dagger$-algèbres t.q. $T \mapsto T$. Par complétion faible de **E10** obtient

$$\begin{tikzcd} (\boldsymbol{B}[T])^\dagger \arrow[r, "\nu^\dagger"] \arrow[rr, bend right, "\iota(\boldsymbol{B}[T])^\dagger"'] & \boldsymbol{B}^\dagger[T]^\dagger \arrow[r, "\mu^\dagger"] & (\boldsymbol{B}[T])^{\dagger\dagger} = (\boldsymbol{B}[T])^\dagger \end{tikzcd}$$

où la composée $\mu^\dagger \circ \nu^\dagger = \iota(\boldsymbol{B}[T])^\dagger$ est l'identité (*cf.* [MW] th. 1.2). On conclut que $\nu^\dagger$ est bijective puisque son image contient $\boldsymbol{B}^\dagger[T]$ et donc aussi toute série faiblement convergente de $\boldsymbol{B}^\dagger[T]$.

Ces considérations, appliquées à **E9** donnent, par une induction évidente, l'identification demandée :

$$\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_r^n) = \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_r^r)[T_1, \ldots, T_{n-r}]^\dagger \,.$$

Que dire de l'égalité

$$\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_r^n) = \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_r^r) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[T_1, \ldots, T_{n-r}]^\dagger \,.$$

R18 L'égalité est **fausse** si et seulement si $0 < r < n$. Pour le voir, plaçons nous dans une telle situation et raisonnons par l'absurde. Dans ce cas, l'application des morphismes

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \boldsymbol{A}^\dagger(X_r^n) & \to & \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_1^1) & \boldsymbol{A}^\dagger(X_r^r) & \to & \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_1^1) & \mathbb{Z}_p[T_1, \ldots, T_r]^\dagger & \to & \mathbb{Z}_p[T]^\dagger \\ X_j, T_i & \mapsto & X, T & X_j & \mapsto & X & T_i & \mapsto & T \end{array}$$

montrerait que le morphisme $\varphi : \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_1^1) \otimes \mathbb{Z}_p[T]^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_1^2)$, $x \otimes y \mapsto x \cdot y$, est surjectif, alors que nous allons montrer que la série $w := \sum_n p^n X^n T^n \in \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_1^2)$ n'appartient pas à l'image de φ. En effet, autrement il existerait une décomposition $w = \sum_{i=1}^{\ell} x_i \cdot y_i$ avec $x_i \in \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_1^1)$ et $y_i \in \mathbb{Z}_p[T]^\dagger$, et alors, en posant $y_i = \sum_{n \geqslant 0} a_{i,n} T^n$ avec $a_{i,n} \in \mathbb{Z}_p$, on aurait

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{n \geqslant 0} p^n X^n T^n &= \sum\nolimits_{i=1}^{\ell} \Big(w_i \cdot \sum\nolimits_n a_{i,n} T^n \Big) \\ &= \sum\nolimits_{n \geqslant 0} \Big(\sum\nolimits_{i=1}^{\ell} w_i a_{i,n} \Big) T^n \end{aligned}$$

et donc

$$p^n X^n = \sum\nolimits_{i=1}^{\ell} w_i a_{i,n} \,, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \,,$$

auquel cas

$$\{X^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}_p w_1 + \cdots + \mathbb{Q}_p w_\ell \subseteq \mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Z}_p[X, X^{-1}, T]^\dagger$$

ce qui est impossible puisque la famille $\{X^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est $\mathbb{Q}_p$-linéairement indépendante et **infinie** alors que $\mathbb{Q}_p w_1 + \cdots + \mathbb{Q}_p w_\ell$ est de dimension finie.

4) Le théorème d'homotopie affirme que pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre de type fini $\boldsymbol{B}$, les morphismes d'algèbres

$$p_i : \boldsymbol{B}[T]^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger\,, \qquad \begin{cases} p_i(T) = i\,, & i = 0, 1\,; \\ p_i(b) = b\,, & b \in \boldsymbol{B}\,; \end{cases}$$

induisent le même morphisme en cohomologie de de Rham p-adique, *i.e.*

$$H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{B}[T]^\dagger/\mathbb{Q}_p) \underset{H_{\mathrm{DR}}(p_0)}{\overset{H_{\mathrm{DR}}(p_1)}{\rightrightarrows}} H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{B}^\dagger/\mathbb{Q}_p)\,, \quad H_{\mathrm{DR}}(p_0) = H_{\mathrm{DR}}(p_1)\,.$$

En déduire l'égalité

$$\boxed{H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^n_r/\mathbb{Q}_p) = H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^r_r/\mathbb{Q}_p)}$$

R19 Compte tenu de l'égalité de la question (**3**), $\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}^n_r) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^r_r)[T_1, \ldots, T_{n-r}]^\dagger$, il suffisait de rappeler le corollaire **5.2.6** des notes sur la complétion †-adique, ou bien renvoyer à la réponse **R2** de la même question du problème **I**.

5) Justifier l'égalité

$$\boxed{\Omega^k(\boldsymbol{X}^r_r/\mathbb{Q}_p) = \bigoplus_{0<i_1<\cdots<i_k\leqslant r} \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}^r_r)\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}}$$

et expliciter la différentielle

$$\bigoplus_{0<i_1<\cdots<i_k\leqslant r} \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}^r_r)\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k} \xrightarrow{d_k} \bigoplus_{0<i_1<\cdots<i_{k+1}\leqslant r} \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}^r_r)\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_{k+1}}\,.$$

R20 On a $\Omega^*(\boldsymbol{X}^r_r/\mathbb{Q}_p) := \Omega^*(\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}^r_r)/\mathbb{Q}_p) = \big(\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}^r_r) \otimes_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^r_r)} \Omega^*_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^r_r)/\mathbb{Z}_p}, d_*\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, où, d'après le rappel général de **R3**,

$$\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}^r_r) \otimes_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^r_r)} \Omega^*_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^r_r)/\mathbb{Z}_p} = \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}^r_r) \otimes_{\mathbb{Z}_p[X_1,\ldots,X_r]} \Omega^*_{\mathbb{Z}_p[X_1,\ldots,X_r]/\mathbb{Z}_p}\,.$$

Nous avons donc bien

$$\Omega^k(\boldsymbol{X}^r_r/\mathbb{Q}_p) = \bigoplus_{0<i_1<\cdots<i_k\leqslant r} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}^r_r)\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}\,, \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

La différentielle est formellement la même que dans le cas algébrique (**E1**), elle vaut

$$d(f\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}) = \sum\nolimits_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial X_j}\, dX_j \wedge dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k} \qquad (\mathbf{E11})$$

où f est maintenant une « *série de Laurent faiblement convergente en* $X_1, \ldots, X_r$ », *i.e.*

$$f = \sum\nolimits_{m_1,\ldots,m_r\in\mathbb{Z}} a_{m_1,\ldots,m_r}\, X_1^{m_1} \cdots X_r^{m_r}\,, \quad \text{avec } a_{m_1,\ldots,m_r} \in \mathbb{Z}_p\,,$$

telle que

$$|m_1| + \cdots + |m_r| < C(v_p(a_{m_1,\ldots,m_r}) + 1)\,,$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}_+$ (dépendant de f).

Bien évidemment, il faut s'assurer que chaque série

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = \sum\nolimits_{m_1,\ldots,m_i,\ldots,m_r\in\mathbb{Z}} a_{m_1,\ldots,m_r} m_i\, X_1^{m_1} \cdots X_i^{m_i-1} \cdots X_r^{m_r}$$

est aussi faiblement convergente, mais ceci est immédiat puisque les degrés des monômes changent d'au plus une unité alors que les valuations des coefficients ne peuvent qu'augmenter.

6) Expliciter complètement le complexe de de Rham $(\Omega^*(\boldsymbol{X}_1^1/\mathbb{Q}_p), d_*)$.

R21 Par la question précédente, le complexe de de Rham de $\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_1^1) = \mathbb{Z}_p[X, X^{-1}]^\dagger$ possède seulement deux termes :

$$\mathbf{0} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, X^{-1}]^\dagger \xrightarrow{d_0} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[X, X^{-1}]^\dagger \, dX \to \mathbf{0}$$

où d_0, étant $\mathbb{Z}_p$-linéaire, est déterminée par son action sur les monômes X^m, $m \in \mathbb{Z}$, où elle vaut

$$d_0(X^m) = mX^{m-1}\, dX\,. \tag{E12}$$

7) Déterminer les groupes $H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1^1/\mathbb{Q}_p)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Indications pour le calcul de $H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1^1/\mathbb{Q}_p)$. *Un élément* $z \in \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_1^1) = \mathbb{Z}_p[X, X^{-1}]^\dagger$ *est somme d'une « série de Laurent »* $z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n$ *avec des éléments* $a_n \in \mathbb{Z}_p$ *tels que*

$$|n| \leqslant C(v_p(a_n) + 1)\,, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z},$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}_+$ *(dépendant de* z*). Montrer alors que l'on a :*

$$\bullet\ z - a_{-1}\frac{1}{X} = \partial_X\big(\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_1^1)\big) \quad \text{et} \quad \bullet\ \frac{1}{X} \notin \partial_X\big(\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_1^1)\big)\,.$$

R22 La question est traitée dans § **5.1.3** des notes sur la complétion †-adique, on y démontre que

$\bullet\ H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1^1) = \mathbb{Q}_p{\cdot}X^0$, $\bullet\ H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1^1/\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p{\cdot}[dX/X]$, et $\bullet\ H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1^1) = \mathbf{0}$, $\forall k > 1$.

À ce propos, il convient de relire le bas de page du § **5.1.3** *au vu du sujet de cet examen.*

8) Écrivons $\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_r^r) = \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1})[Y, Y^{-1}]^\dagger$. Montrer à l'aide de (**5**) que chaque $\omega \in \Omega^k(\boldsymbol{X}_r^r/\mathbb{Q}_p)$ admet une décomposition unique sous la forme

$$\omega = \alpha(Y) + \beta(Y) \wedge dY\,, \tag{$*$}$$

où

$$\begin{cases} \alpha(Y) = \displaystyle\sum_{0<i_1<\cdots<i_k<r} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(Y)\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}\,, & \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(Y) \in \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1})[Y, Y^{-1}]^\dagger\,, \\ \beta(Y) = \displaystyle\sum_{0<i_1<\cdots<i_{k-1}<r} \beta_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(Y)\, dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_{k-1}}\,, & \beta_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(Y) \in \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1})[Y, Y^{-1}]^\dagger\,. \end{cases} \tag{$**$}$$

R23 Même que **R6**.

9) Montrer en vous inspirant de la question (**7**) que pour chaque $\beta_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(Y) \in \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1})[Y, Y^{-1}]^\dagger$, il existe un et un unique $\mu_{i_1,\ldots,i_{k-1}} \in \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1})$ (donc indépendant de Y) tel que

$$\beta_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(Y) = \frac{\partial\nu_{i_1,\ldots,i_{k-1}}}{\partial Y}(Y) + \mu_{i_1,\ldots,i_{k-1}} \cdot \frac{1}{Y}\,,$$

pour un certain $\nu_{i_1,\ldots,i_{k-1}} \in \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1})[Y, Y^{-1}]^\dagger$.

R24 La démarche est la même que dans **R7**. Pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre $\boldsymbol{B}$, un élément $\beta \in \boldsymbol{B}^\dagger[Y, Y^{-1}]^\dagger$ est une série de Laurent faiblement convergente (*cf.* **R20**) $\sum_{m\in\mathbb{Z}} b_m Y^m$ avec $b_m \in \boldsymbol{B}^\dagger$. L'image de $\partial/\partial Y : \boldsymbol{B}^\dagger[Y, Y^{-1}]^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger[Y, Y^{-1}]^\dagger$ est clairement constituée des séries de Laurent de la forme $\sum_{m\in\mathbb{Z}} b_m m Y^{m-1} = \sum_{-1\neq m\in\mathbb{Z}} c_m Y^m$. On écrit alors formellement

$$\beta = \Big(\sum_{1\neq m\in\mathbb{Z}} b_m Y^m\Big) + b_{-1}\,\frac{1}{Y} = \frac{\partial}{\partial Y}\Big(\sum_{1\neq m\in\mathbb{Z}} b_m \frac{Y^{m+1}}{m+1}\Big) + b_{-1}\,\frac{1}{Y}\,.$$

et l'on doit s'assurer que la série $\sum_{1\neq m\in\mathbb{Z}} b_m \frac{Y^{m+1}}{m+1}$ appartient bien à $\mathbb{Q}_p \otimes \boldsymbol{B}^\dagger[Y, Y^{-1}]^\dagger$, ce qui équivaux à ce que les séries

$$\sum\nolimits_{m>0} \frac{b_{m+1}}{m}\, T^m \quad \text{et} \quad \sum\nolimits_{m>0} \frac{b_{1-m}}{-m}\, T^m$$

aient un rayon de convergence plus grand que 1, c'est à dire, à ce que

$$\limsup_m \sqrt[m]{\Big|\frac{b_{m+1}}{m}\Big|} < 1 \quad \text{et} \quad \limsup_m \sqrt[m]{\Big|\frac{b_{1-m}}{m}\Big|} < 1\,;$$

or, ces limites coïncident respectivement avec

$$\limsup_m \sqrt[m]{|b_{m+1}|} \quad \text{et} \quad \limsup_m \sqrt[m]{|b_{1-m}|}\,,$$

toutes deux < 1 puisque $\beta \in \boldsymbol{B}^\dagger[Y, Y^{-1}]^\dagger$.

La première partie de cette question **II**-(**7**) résulte alors de prendre $\boldsymbol{B}^\dagger := \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1})$ et d'appliquer l'analogue de la fin de **R7**.

En déduire que pour chaque $\omega \in \Omega^k(\boldsymbol{X}_r^r/\mathbb{Q}_p)$, il existe $\nu \in \Omega^{k-1}(\boldsymbol{X}_r^r/\mathbb{Q}_p)$ tel que

$$\omega - d\nu = \alpha(Y) + \beta \wedge \frac{dY}{Y}\,, \tag{$\diamond$}$$

où α, β sont de la forme $(**)$ avec $\beta_{i_1,\dots,i_{k-1}} \in \boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1})$ (donc indépendants de Y !).

R25 Même que **R8**.

10) On suppose maintenant $d\omega = 0$. Montrer à l'aide de l'écriture $(\diamond)$ que l'on a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial Y}(Y) = \pm\big(d\beta\big)\,\frac{1}{Y}\,,$$

et en déduire les égalités

$$\begin{cases} d\beta = 0\,, \\ \alpha \in \Omega^k(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1}/\mathbb{Q}_p) \text{ et } d\alpha = 0\,. \end{cases}$$

R26 Même que **R9**.

11) Prouver les égalités

$$\begin{aligned} H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_r^r/\mathbb{Q}_p) &= H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1}/\mathbb{Q}_p) \;\bigoplus\; H^{k-1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_{r-1}^{r-1}/\mathbb{Q}_p)\left[\frac{dY}{Y}\right], \quad \forall k \in \mathbb{N}\,, \\ &= \underbrace{H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1^1/\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \cdots \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1^1/\mathbb{Q}_p)}_{r \text{ fois}} \end{aligned}$$

R27 Même que **R10**.

12) Donner la liste complète des nombres de Betti p-adiques de $\boldsymbol{X}_r^n$.

R28 Même que **R11**.

———×———

§ 1. Références bibliographiques

[A-M] A. Arabia-Z. Mebkhout. "*Cohomologie de de Rham dans la catégorie des Schémas*" ; Notes du cours (2008).

[EGA_1] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné. "*Éléments de géométrie algébrique-I*" ; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 166. Springer-Verlag, (1971).

[Har] R. Hartshorne. "*Algébraic Geometry*" ; Graduate texts in mathematices **52**. Springer–Verlag, (1977).

[MW] P. Monsky, G. Washnitzer. Formal cohomology : I ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217, (1968).