UFR de Mathématiques, Université de Paris 7
DEA 2007/08 deuxième semestre
"Introduction à la cohomologie de de Rham p-adique des variétés algébriques" Jeudi 6 mars 2008
A. Arabia & Z. Mebkhout

Corrigé de l'Examen Partiel

Un soin particulier à la rédaction est demandé.

Le mot «*faisceau*» signifie «*faisceau de groupes abéliens*» sauf mention expresse du contraire.

I– Théorie des faisceaux : Deux suites longues de Mayer-Vietoris

On note $\boldsymbol{X}$ un espace topologique, $\mathbf{Faisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ la catégorie des faisceaux sur $\boldsymbol{X}$ et $C^*(\mathbf{Faisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z}))$ la catégorie des complexes de faisceaux sur $\boldsymbol{X}$.

1) Rappeler la définition de faisceau «*flasque*». Donner au moins deux exemples de faisceaux flasques et de faisceaux non flasques.

Un faisceau est dit «*flasque*» lorsque toute section locale se prolonge en une section globale.

Faisceaux flasques :

- Le faisceau constant ([1]) sur un espace topologique noethérien irréductible.
- Le faisceau nul.
- Le faisceau des applications ensemblistes à valeurs dans un groupe abélien quelconque.
- Le faisceau des fonctions régulières de $\mathbb{A}_k^n$ muni de la topologie de Zariski, lorsque k est un corps fini.
- Sur un schéma affine $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ le $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module quasi-cohérent $\tilde{\boldsymbol{I}}$ associé à un $\mathcal{R}(\boldsymbol{X})$-module injectif $\boldsymbol{I}$.

Faisceaux non flasques :

- Le faisceau constant sur un espace connexe séparé non réduit à un point.
- Le faisceau des k-formes différentielles sur une variété différentielle .
- Le faisceau des fonctions régulières de $\mathbb{A}_k^n$ muni de la topologie de Zariski, lorsque k est un corps infini.
- Tout faisceau $\mathcal{F} \in \mathbf{Faisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ tel que $H^{>0}(\boldsymbol{X};\mathcal{F}) \neq 0$.

2) Rappeler brièvement la construction du foncteur «*résolution flasque de Godement*»

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Faisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z}) & \rightsquigarrow & C^*(\mathbf{Faisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})) \\ \mathcal{F} & \rightsquigarrow & \Big(0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{d_0} \mathcal{C}^1\mathcal{F} \xrightarrow{d_1} \cdots\Big)\end{array}$$

A tout un faisceau $\mathcal{F}$ sur $\boldsymbol{X}$ on associe une application étale $p_{\mathcal{F}} : \mathcal{E}_{\mathcal{F}} \to \boldsymbol{X}$ dont la fibre en $x \in \boldsymbol{X}$ s'identifie à l'ensemble $\mathcal{F}_x$ des germes de $\mathcal{F}$ en x. Le faisceau des sections locales continues de $p_{\mathcal{F}}$ s'identifie à $\mathcal{F}$ et c'est un sous-faisceau du faisceau des sections locales ensemblistes $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$ qui est clairement flasque. La correspondance

$$\mathcal{F} \rightsquigarrow \big(\mathcal{F} \xhookrightarrow{\epsilon(\mathcal{F})} \mathcal{C}^0\mathcal{F}\big)$$

est *fonctorielle* et *exacte* de $\mathbf{Faisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ vers la catégorie $C^*(\mathbf{Faisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z}))$ des complexes de faisceaux. On procède ensuite par induction : ayant défini le complexe de foncteurs *exacts*

$$0 \to \mathrm{id}(\_) \xrightarrow{\epsilon(\_)} \mathcal{C}^0(\_) \xrightarrow{d_0(\_)} \cdots \xrightarrow{d_{k-2}(\_)} \mathcal{C}^{k-1}(\_) \xrightarrow{d_{k-1}(\_)} \mathcal{C}^k(\_)$$

le conoyau de $d_{k-1}(\_)$, noté $\mathcal{Q}(\_)$, est un foncteur exact. On pose alors $\mathcal{C}^{k+1}(\_) := \mathcal{C}^0(\mathcal{Q}(\_))$ et $d_k(\_) : \mathcal{C}^k(\_) \to \mathcal{C}^{k+1}(\_)$: la composée du morphisme canonique $\mathcal{C}^k(\_) \twoheadrightarrow \mathcal{Q}(\_)$ suivi du

[1] On rappelle qu'on appelle ainsi le faisceau associé à un préfaisceau constant

morphisme $\varepsilon(\mathcal{Q}(\_)) : \mathcal{Q}(\_) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{Q}(\_))$. La suite

$$0 \to \mathrm{id}(\_) \xrightarrow{\epsilon(\_)} \mathcal{C}^0(\_) \xrightarrow{d_0(\_)} \cdots \xrightarrow{d_{k-2}(\_)} \mathcal{C}^{k-1}(\_) \xrightarrow{d_{k-1}(\_)} \mathcal{C}^k(\_) \xrightarrow{d_k(\_)} \mathcal{C}^{k+1}(\_)$$

est alors un complexe de foncteurs exacts dont l'homologie est nulle en tout degré $\leqslant k$.

a) Le complexe $\mathbf{0} \to (\mathcal{C}^*\mathcal{F}, d_*(\mathcal{F}))$ est-il exact ? Si non, préciser sa cohomologie.

Ce complexe est exact en degrés positifs. Son homologie en degré 0 est $\ker(d_0(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$ puisque $\mathbf{0} \to \mathcal{F} \to (\mathcal{C}^*\mathcal{F}, d_*(\mathcal{F}))$ est exact par construction.

b) On suppose $\mathcal{F}$ flasque. Le complexe

$$0 \to \Gamma(U; \mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(U;\varepsilon(\mathcal{F}))} \Gamma(U; \mathcal{C}^*\mathcal{F})$$

est-il exact ? Si non, préciser sa cohomologie.

Le complexe $\mathbf{0} \to \mathcal{F} \to (\mathcal{C}^*\mathcal{F}, d_*(\mathcal{F}))$ est exact et tous ses termes sont flasques ; la cohomologie du complexe des sections au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$:

$$\Gamma\Big(U; \mathbf{0} \to \mathcal{F} \to (\mathcal{C}^*\mathcal{F}, d_*(\mathcal{F}))\Big)$$

est donc nulle d'après un théorème du cours. (Voir [??] § **3**, th. 3.1.3, p. 149.)

3) Rappeler la définition de la cohomologie de faisceaux par résolutions flasques de Godement.

Par définition, la cohomologie de faisceaux de $\mathcal{F} \in \mathbf{Faisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ en degré $k \in \mathbb{N}$, notée $H^k(\boldsymbol{X}, \mathcal{F})$, est le k-ième groupe d'homologie du complexe $\Gamma(\boldsymbol{X}; (\mathcal{C}^*\mathcal{F}, d_*))$.

4) Soit $\mathbf{0} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{K} \to \mathbf{0}$ (*) une suite exacte de faisceaux.

a) Que permet de dire que la suite

$$\mathbf{0} \to \mathcal{C}^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^*\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{C}^*\mathcal{K} \to \mathbf{0}$$

est une suite exacte de complexes de faisceaux ?

En écrivant verticalement chaque complexe $\mathcal{C}^*(\_)$, on voit apparaître un bicomplexe de groupes abéliens à trois colonnes, *i.e.* une suite courte de complexes de groupes abéliens :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & & {\scriptstyle d_3}\uparrow & & {\scriptstyle d_3}\uparrow & & {\scriptstyle d_3}\uparrow & \\
\mathbf{0} & \to & \mathcal{C}^3\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{C}^3\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{C}^3\mathcal{K} & \to \mathbf{0} \\
 & & {\scriptstyle d_2}\uparrow & & {\scriptstyle d_2}\uparrow & & {\scriptstyle d_2}\uparrow & \\
\mathbf{0} & \to & \mathcal{C}^2\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{C}^2\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{C}^2\mathcal{K} & \to \mathbf{0} \\
 & & {\scriptstyle d_1}\uparrow & & {\scriptstyle d_1}\uparrow & & {\scriptstyle d_1}\uparrow & \\
\mathbf{0} & \to & \mathcal{C}^1\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{C}^1\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{C}^1\mathcal{K} & \to \mathbf{0} \\
 & & {\scriptstyle d_0}\uparrow & & {\scriptstyle d_0}\uparrow & & {\scriptstyle d_0}\uparrow & \\
\mathbf{0} & \to & \mathcal{C}^0\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0\mathcal{K} & \to \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} &
\end{array} \qquad (\mathcal{B})$$

Chaque ligne de ce bicomplexe est exacte puisque chaque foncteur $\mathcal{C}^k(\_)$ l'est, c'est donc bien une suite exacte dans la catégorie des complexes de groupes abéliens.

../..

b) Que permet de dire que la suite

$$\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^*\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^*\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^*\mathcal{K}) \to \mathbf{0}$$

est une suite exacte de complexes de groupes abéliens ?

> Chaque ligne du bicomplexe ($\mathcal{B}$) de (a) est une suite exacte courte de faisceaux flasques ; les lignes des sections globales de ($\mathcal{B}$) sont alors également exactes d'après un résultat du cours. (Voir [??] § **3**, th. 3.1.2, p. 148. Remarquer qu'il suffit que $\mathcal{F}$ soit flasque)

c) Comment justifier alors la suite longue de cohomologie de faisceaux

$$\mathbf{0} \to H^0(\boldsymbol{X}; \mathcal{F}) \to H^0(\boldsymbol{X}; \mathcal{G}) \to H^0(\boldsymbol{X}; \mathcal{K}) \to H^1(\boldsymbol{X}; \mathcal{F}) \to H^1(\boldsymbol{X}; \mathcal{G}) \to H^1(\boldsymbol{X}; \mathcal{K}) \to$$

associée à $(*)$.

> D'après les deux questions précédentes, on a un bicomplexe de lignes exactes
>
> $$\begin{array}{ccccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma(\boldsymbol{X};d_3)} & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma(\boldsymbol{X};d_3)} & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma(\boldsymbol{X};d_3)} & & \\ \mathbf{0} & \to & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^3\mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^3\mathcal{G}) & \longrightarrow & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^3\mathcal{K}) & \to & \mathbf{0} \\ & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma(\boldsymbol{X};d_2)} & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma(\boldsymbol{X};d_2)} & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma(\boldsymbol{X};d_2)} & & \\ \mathbf{0} & \to & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^2\mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^2\mathcal{G}) & \longrightarrow & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^2\mathcal{K}) & \to & \mathbf{0} \\ & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma(\boldsymbol{X};d_1)} & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma(\boldsymbol{X};d_1)} & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma(\boldsymbol{X};d_1)} & & \\ \mathbf{0} & \to & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^1\mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^1\mathcal{G}) & \longrightarrow & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^1\mathcal{K}) & \to & \mathbf{0} \\ & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma(\boldsymbol{X};d_0)} & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma(\boldsymbol{X};d_0)} & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma(\boldsymbol{X};d_0)} & & \\ \mathbf{0} & \to & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^0\mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^0\mathcal{G}) & \longrightarrow & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^0\mathcal{K}) & \to & \mathbf{0} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \end{array} \qquad (\mathcal{B})$$
>
> c'est-à-dire, une suite exacte de complexes. La suite exacte longue des homologies des colonnes, *i.e.* des cohomologies des faisceaux $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$ d'après la question (**3**), résulté alors du théorème fondamental de l'algèbre homologique.

5) Soit $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2\}$ un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X}$ et considérons le «*foncteur de Mayer-Vietoris relatif à* $\mathfrak{U}$», noté $\mathbf{MV}_{\mathfrak{U}}(\_)$

$$\mathbf{MV}_{\mathfrak{U}}(\_) = \Big(\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{X}; \_) \to \check{C}^0(\mathfrak{U}; \_) \to \check{C}^1(\mathfrak{U}; \_) \to \mathbf{0}\Big)$$

où $\Gamma(\boldsymbol{X}; \_) \to \check{C}^*(\mathfrak{U}; \_)$ est l'augmentation du complexe de Čech relatif à $\mathfrak{U}$. Ce fonceur associe

$$\mathcal{G} \in \mathbf{Faisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \mathbf{MV}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{G}) = \Big(\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{G}) \to \Gamma(U_1, \mathcal{G}) \oplus \Gamma(U_2, \mathcal{G}) \to \Gamma(U_{12}, \mathcal{G}) \to \mathbf{0}\Big)$$

où les flèches désignent les morphismes du complexe de Čech augmenté $\Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{G}) \to \check{C}^*(\mathfrak{U}; \mathcal{G})$.

a) Quelle est l'action de $\mathbf{MV}_{\mathfrak{U}}$ sur les morphismes de faisceaux ?

> L'action est celle qui découle de la nature fonctorielle de chaque terme du complexe de Čech qui, dans le cas d'un recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_0, \ldots\}$ général, fait correspondre à un morphisme de (pré)faisceaux $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ le produit des morphismes
>
> $$\Gamma(U_{i_0 \ldots i_n}, \alpha) : \Gamma(U_{i_0 \ldots i_n}; \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U_{i_0 \ldots i_n}; \mathcal{G}) \,,$$
>
> *i.e.*
>
> $$\check{C}^n(\mathfrak{U}; \alpha) = \prod\nolimits_{i_0 \ldots i_n} \Gamma(U_{i_0 \ldots i_n}, \alpha)$$
>
> dont la compatibilité faisceautique vis-à-vis des restrictions aux ouverts $U_{i_0 \ldots i_n i_{n+1}}$ donne la fonctorialité du complexe de Čech en toute généralité et donc celle de $\mathbf{MV}_{\mathfrak{U}}$.

b) Dans quelle catégorie abélienne $\mathbf{MV}_{\mathfrak{U}}$ prend ses valeurs ? Préciser ensuite si $\mathbf{MV}_{\mathfrak{U}}$ est exact.

> Le foncteur $\mathbf{MV}_{\mathfrak{U}}$ est à valeurs dans la catégorie des suites courtes de groupes abéliens. Son exactitude équivaut à celle des quatre foncteurs $\Gamma(\boldsymbol{X}, \_)$ et $\Gamma(U_1; \_), \Gamma(U_2; \_), \Gamma(U_{12}; \_)$.

c) Montrer que la suite $\mathbf{MV}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{G})$ est toujours exacte à gauche et est exacte lorsque $\mathcal{G}$ est flasque.

> Ainsi dans la question précédente, l'exactitude à gauche de $\mathbf{MV}_{\mathfrak{U}}$ équivaut à celle des foncteurs $\Gamma(\boldsymbol{X}, \_)$ et $\Gamma(U_1; \_), \Gamma(U_2; \_), \Gamma(U_{12}; \_)$, bien connue. Ces foncteurs, appliqués à une suite exacte courte de faisceaux flasques, donnent des suites exactes courtes de groupes abéliens comme nous l'avons dit dans I-(**4**)-(b).

d) Soit $\mathcal{G} \to \mathcal{C}^*\mathcal{G}$ la résolution de Godement de $\mathcal{G} \in \mathbf{Faisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$. Donner un sens a l'affirmation

$$\boxed{\mathbf{MV}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{C}^*(\mathcal{G}))\ \textit{est une suite exacte courte de complexes de groupes abéliens}}$$

> Suite à la question (c) (tout comme dans I-(**4**)), en écrivant verticalement le complexe de Godement on a une suite courte de complexes de groupes abéliens :
>
> $$\begin{array}{ccccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & d_2\uparrow & & d_2\uparrow & & d_2\uparrow & & \\ \mathbf{0} & \to & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^2\mathcal{G}) & \longrightarrow & \Gamma(U_1; \mathcal{C}^2\mathcal{G}) \oplus \Gamma(U_2; \mathcal{C}^2\mathcal{G}) & \longrightarrow & \Gamma(U_{12}; \mathcal{C}^2\mathcal{G}) & \to & \mathbf{0} \\ & & d_1\uparrow & & d_1\uparrow & & d_1\uparrow & & \\ \mathbf{0} & \to & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^1\mathcal{G}) & \longrightarrow & \Gamma(U_1; \mathcal{C}^1\mathcal{G}) \oplus \Gamma(U_2; \mathcal{C}^1\mathcal{G}) & \longrightarrow & \Gamma(U_{12}; \mathcal{C}^1\mathcal{G}) & \to & \mathbf{0} \\ & & d_0\uparrow & & d_0\uparrow & & d_0\uparrow & & \\ \mathbf{0} & \to & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{C}^0\mathcal{G}) & \longrightarrow & \Gamma(U_1; \mathcal{C}^0\mathcal{G}) \oplus \Gamma(U_2; \mathcal{C}^0\mathcal{G}) & \longrightarrow & \Gamma(U_{12}; \mathcal{C}^0\mathcal{G}) & \to & \mathbf{0} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \end{array}$$

e) En déduire la suite exacte longue de Mayer-Vietoris relative à $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{0} \to H^0(\boldsymbol{X}; \mathcal{G}) \to H^0(U_1; \mathcal{G}) \oplus H^0(U_2; \mathcal{G}) \to H^0(U_{12}; \mathcal{G}) \to \\ &\quad \to H^1(\boldsymbol{X}; \mathcal{G}) \to H^1(U_1; \mathcal{G}) \oplus H^1(U_2; \mathcal{G}) \to H^1(U_{12}; \mathcal{G}) \to \end{aligned} \qquad (\mathbf{MV}_{\mathfrak{U}})$$

pour tout $\mathcal{G} \in \mathbf{Faisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$.

> Résulte du théorème fondamental de l'algèbre homologique appliqué à la suite exacte de complexes de la question précédente. (Tout comme dans I-(**4**)-(c)).

6) Cette question est totalement analogue à la question (**5**). Ignorez les questions (a,b,d) si vous les avez traitées dans (**5**).

Soit $\boldsymbol{\mathfrak{F}} = \{F_1, F_2\}$ un recouvrement fermé de $\boldsymbol{X}$ et considérons le «*foncteur de Mayer-Vietoris relatif à* $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$», noté $\mathbf{MV}_{\mathfrak{F}}(\_)$

$$\mathbf{MV}_{\mathfrak{F}}(\_) = \Big(\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{X}; \_) \to \check{C}^0(\boldsymbol{\mathfrak{F}}; \_) \to \check{C}^1(\boldsymbol{\mathfrak{F}}; \_) \to \mathbf{0}\Big)$$

où $\Gamma(\boldsymbol{X}; \_) \to \check{C}^*(\boldsymbol{\mathfrak{F}}; \_)$ est l'augmentation du complexe de Čech relatif à $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$. Ce foncteur associe

$$\mathcal{G} \in \mathbf{Faisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \mathbf{MV}_{\mathfrak{F}}(\mathcal{G}) = \Big(\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathcal{G}) \to \Gamma(F_1, \mathcal{G}) \oplus \Gamma(F_2, \mathcal{G}) \to \Gamma(F_{12}, \mathcal{G}) \to \mathbf{0}\Big)$$

où $\Gamma(F, \mathcal{G})$ est une notation pour $\Gamma(F; \mathcal{G}|_F)$.

Commentaire. Il convient de remarquer une différence importante par rapport à la construction habituelle du complexe de Čech : plutôt que de considérer un préfaisceau sur la catégorie des ouverts de $\boldsymbol{X}$, on considère ici un préfaisceau sur la catégorie des *fermés* de $\boldsymbol{X}$. Il faut donc bien comprendre le morphisme de restriction $\Gamma(F;\mathcal{G}|_F) \to \Gamma(F';\mathcal{G}|_{F'})$ (‡) lorsque $F \supseteq F'$. Or, si ceci est clair lorsque l'on identifie $\Gamma(F;\mathcal{G}|_F)$ à l'ensemble des sections continues de l'espace étalé $p_{\mathcal{G}} : \mathcal{E}_{\mathcal{G}} \twoheadrightarrow \boldsymbol{X}$ au-dessus du fermé F (voir I-(**2**)), une autre description peut être donnée en remarquant que le groupe $\Gamma(F';\mathcal{G}|_{F'})$ n'est autre que $\Gamma\big(F;\iota_*\iota^{-1}(\mathcal{G}|_F)\big)$, où $\iota : F' \hookrightarrow F$ désigne l'application d'inclusion ; le morphisme (‡) est alors la section globale du morphisme d'adjonction $(\_) \to \iota_*\iota^{-1}(\_)$ appliqué à $\mathcal{G}|_F$.

a) Quelle est l'action de $\mathbf{MV}_{\mathcal{F}}$ sur les morphismes de faisceaux ?

b) Dans quelle catégorie abélienne $\mathbf{MV}_{\mathcal{F}}$ prend ses valeurs ? Préciser ensuite si $\mathbf{MV}_{\mathcal{F}}$ est exact.

c) Montrer que la suite $\mathbf{MV}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{G})$ est toujours exacte à gauche et est exacte lorsque $\mathcal{G}$ est flasque.

Indication. Pour cette question et les deux suivantes, on pourra commencer par montrer que, pour tout faisceau $\mathcal{G}$, la suite courte, de flèches inspirées par celles du complexe de Čech,

$$\mathbf{0} \to \mathcal{G} \longrightarrow \iota_{1,*}\,\mathcal{G}|_{F_1} \oplus \iota_{2,*}\,\mathcal{G}|_{F_2} \longrightarrow \iota_{12,*}\,\mathcal{G}|_{F_{12}} \to \mathbf{0} \qquad (‡‡)$$

*où $\iota_i : F_i \subseteq \boldsymbol{X}$ désigne l'application d'inclusion, est exacte, ce qui résulte d'une simple inspection des germes en un point $x \in \boldsymbol{X}$ suivant que $x \in \mathcal{F}_1\backslash F_2$, $x \in \mathcal{F}_2\backslash F_1$, ou $x \in \mathcal{F}_{12}$. On utilise ensuite (**4**).*

Lors d'une inclusion de fermés $\iota : F' \hookrightarrow F$, les germes de $\iota_*\iota^{-1}(\mathcal{G}|_F)$ vérifient

$$(\iota_*\iota^{-1}\mathcal{G})_x = \begin{cases} \mathcal{G}_x & \text{si } x \in F', \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

de sorte que les germes du morphisme d'adjonction $\mathrm{ad}_\iota(\mathcal{G}|_F) : \mathcal{G}|_F \to \iota_*\iota^{-1}(\mathcal{G}|_F)$ sont :

$$\mathrm{ad}_\iota(\mathcal{G})_x = \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathcal{G}_x} & \text{si } x \in F', \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Il s'ensuit que la suite des germes de (‡‡) en $x \in F_1\backslash F_2$ est

$$\mathbf{0} \to \mathcal{G}_x \underset{=}{\longrightarrow} \mathcal{G}_x \oplus \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \to \mathbf{0}$$

tandis que si $x \in F_{12}$, on a

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} \to \mathcal{G}_x & \longrightarrow & \mathcal{G}_x \oplus \mathcal{G}_x & \longrightarrow & \mathcal{G}_x \to \mathbf{0} \\ \sigma & \longmapsto & (\sigma\ ,\ \sigma) & & \\ & & (\tau_1\ ,\ \tau_2) & \longmapsto & \tau_1 - \tau_2 \end{array}$$

La suite courte de faisceaux (‡‡) est donc exacte et la suite de ses sections globales sera exacte lorsque $\mathcal{G}$ est flasque d'après un théorème du cours. ([??] § **3**, th. 3.1.2, p. 148.)

L'exactitude de (‡‡) donne lieu maintenant à la suite longue de cohomologie des faisceaux (*cf.* (**4**)) :

$$\mathbf{0} \to H^0(\boldsymbol{X};\mathcal{G}) \to H^0(\boldsymbol{X};\iota_{1,*}\mathcal{G}|_{F_1}) \oplus H^0(\boldsymbol{X};\iota_{2,*}\mathcal{G}|_{F_2}) \to H^0(\boldsymbol{X};\iota_{12,*}\mathcal{G}|_{F_{12}}) \to$$

où il ne nous reste qu'à rappeler la raison de l'isomorphisme canonique

$$H(\boldsymbol{X};\iota_*\mathcal{G}|_F) \simeq H(F;\mathcal{G}|_F)$$

pour toute inclusion de fermés $\iota : F \hookrightarrow \boldsymbol{X}$. Celui-ci résulte des propriétés suivantes
- a) Le foncteur ι_* est exact pour une inclusion fermée.
- b) L'image directe d'un faisceau flasque est flasque.
- c) $\Gamma(\boldsymbol{X};\iota_*(\_)) = \Gamma(F;\_)$.

puisque, si $\mathbf{0} \to \mathcal{G}|_F \to (\mathcal{F}^*, d_*)$ est une résolution flasque, la suite

$$\mathbf{0} \to \iota_*\mathcal{G}|_F \to \iota_*(\mathcal{F}^*, d_*)$$

est une résolution flasque de $\iota_*\mathcal{G}|_F$ dans $\mathbf{Faisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$ (par (• a) et (• b)) dont les sections globales calculent à la fois $H(\boldsymbol{X};\iota_*\mathcal{G}|_F)$ et $H(F;\mathcal{G}|_F)$ (par (• c)).

d) Soit $\mathcal{G} \to \mathcal{C}^*\mathcal{G}$ la résolution de Godement de $\mathcal{G} \in \mathbf{Faisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$. Donner un sens a l'affirmation

$$\boxed{\mathbf{MV}_{\mathfrak{F}}(\mathcal{C}^*(\mathcal{G}))\ \textit{est une suite exacte courte de complexes de groupes abéliens}}$$

e) En déduire la suite exacte longue de Mayer-Vietoris relative à $\mathfrak{F}$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \to H^0(\boldsymbol{X};\mathcal{G}) \to H^0(F_1;\mathcal{G}) \oplus H^0(F_2;\mathcal{G}) \to H^0(F_{12};\mathcal{G}) \to \\ \to H^1(\boldsymbol{X};\mathcal{G}) \to H^1(F_1;\mathcal{G}) \oplus H^1(F_2;\mathcal{G}) \to H^1(F_{12};\mathcal{G}) \to \end{aligned} \qquad (\mathbf{MV}_{\mathfrak{F}})$$

pour tout $\mathcal{G} \in \mathbf{Faisc}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Z})$.

———×———

II– Espaces topologiques noethériens

Préliminaires : Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique.

- $\boldsymbol{X}$ est dit « *noethérien* » lorsque toute suite décroissante de fermés $F_* := \big(F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots\big)$ est « *stationnaire* », *i.e.* il existe un entier N_0 (dépendant de F_*) tel que $F_n = F_m$ pour tous $n, m \geqslant N_0$.
- L'espace $\boldsymbol{X}$ est dit « *irréductible* » s'il n'est pas réunion de deux fermés différents de $\boldsymbol{X}$.

Questions

1) Montrer que tout sous-espace topologique d'un espace topologique noethérien est noethérien.

Soit $\boldsymbol{A}$ est un sous-ensemble de $\boldsymbol{X}$. Les fermés de $\boldsymbol{A}$ pour la topologie induite sont de la forme $\boldsymbol{A} \cap F$, où F est un fermé $\boldsymbol{X}$. Une suite décroissante de fermés $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ s'exprime alors sous la forme $\{\boldsymbol{A} \cap F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ où nous pouvons supposer la suite $\{F_i\}$ décroissante quitte à remplacer F_i par $\cap_{j\leqslant i} F_j$, possible en raison de la décroissance de la suite $\{W_i\}$. Par la nœthérianité de $\boldsymbol{X}$ la suite $\{F_i\}$, et donc $\{W_i\}$, est stationnaire.

2) **Existence de composantes irréductibles.** Montrer que si $\boldsymbol{X}$ est noethérien non vide il existe une famille finie de fermés non vides $\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_r\}$ telle que

• chaque $\boldsymbol{F}_j$ est irréductible, • $\boldsymbol{F}_i \not\subseteq \boldsymbol{F}_j$ pour $i \neq j$, • $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{F}_r$,

Une telle famille est alors appelée « *décomposition de $\boldsymbol{X}$ en composantes irréductibles* ».

Indication. On suppose $\boldsymbol{X}$ réductible. Démontrer dans un premier temps qu'il existe un fermé irréductible $\boldsymbol{F}_1 \neq \varnothing$ et un fermé $\boldsymbol{X}' \neq \boldsymbol{X}$ tels que $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{X}'$, car autrement il existerait une suite infinie strictement décroissante de fermés dans $\boldsymbol{X}$. Recommencer avec $\boldsymbol{X}'$ et montrer que le processus doit s'arrêter après un nombre fini d'étapes arrivant ainsi à une décomposition réduite de $\boldsymbol{X}$.

On suit l'indication. On suppose $\boldsymbol{X}$ *réductible* (*i.e.* non irréductible) d'où une première décomposition *propre* (*i.e.* par des parties fermés propres) $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}_1 \cup \boldsymbol{X}_1$, si $\boldsymbol{F}$ est irréductible, nous avons terminé, autrement, il existe une décomposition propre $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2 \cup \boldsymbol{X}_2$. L'itération de cette idée donne lieu à la suite strictement décroissante de fermés $\{\boldsymbol{F}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Par nœthérianité de $\boldsymbol{X}$, le processus doit s'arrêter après un nombre fini d'itérations sur un fermé irréductible $\boldsymbol{F}_n$ et une décomposition propre $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}_n \cup (\boldsymbol{X}_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{X}_n)$.

Nous avons prouvé que tout espace noethérien réductible $\boldsymbol{X}$ admet une décomposition propre $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{X}_1$ avec $\boldsymbol{F}$ irréductible non vide. Maintenant, si $\boldsymbol{X}_1$ est réductible, il se décompose de même en $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{F}_2 \cup \boldsymbol{X}_2$. Ainsi, comme précédemment, l'itération de cette idée donne lieu à la suite strictement décroissante de fermés $\{\boldsymbol{X}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Par nœthérianité de $\boldsymbol{X}$, le processus doit s'arrêter après un nombre fini d'itérations sur un fermé irréductible $\boldsymbol{X}_m$ et une décomposition propre en fermés irréductibles non vides :

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{F}_m \cup \boldsymbol{X}_m$$

La décomposition demandée est celle des éléments maximaux de la famille $\{\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_m, \boldsymbol{X}_m\}$ munie de l'ordre partiel d'inclusion d'ensembles.

3) **Unicité des composantes irréductibles.** Pour $\boldsymbol{X}$ noethérien non vide, soit $\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_r\}$ une décomposition de $\boldsymbol{X}$ en composantes irréductibles. Montrer que si $\boldsymbol{X}$ est réunion de deux fermés $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{G}_1 \cup \boldsymbol{G}_2$ alors, pour chaque $i = 1, \ldots, r$, ou bien $\boldsymbol{F}_i \subseteq \boldsymbol{G}_1$, ou bien $\boldsymbol{F}_i \subseteq \boldsymbol{G}_2$. En déduire que :

i) Si $\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_r\}$ et $\{\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2, \ldots, \boldsymbol{F}'_{r'}\}$ sont deux décompositions de $\boldsymbol{X}$ en composantes irréductibles, on a égalité d'ensembles

$$\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_r\} = \{\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2, \ldots, \boldsymbol{F}'_{r'}\}\,.$$

Chaque fermé $\boldsymbol{F}_i$ de cet ensemble canonique est une « *composante irréductible de* $\boldsymbol{X}$ ».

Étant données deux partie fermées $\boldsymbol{G}_i$ telles que $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{G}_1 \cup \boldsymbol{G}_2$, on a

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}_1) \cup (\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}_2)$$

pour tout fermé $\boldsymbol{F}$ de $\boldsymbol{X}$. En particulier, si $\boldsymbol{F}$ est irréductible cette décomposition n'est pas propre et $\boldsymbol{F}$ est contenu dans l'un des $\boldsymbol{G}_i$. Par conséquent, étant donnée deux décompositions en composantes irréductibles $\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_r\}$ et $\{\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2, \ldots, \boldsymbol{F}'_{r'}\}$ on construit l'application $\alpha : \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, r'\}$ en posant $\alpha(i) =$ « *le plus petit k tel que $\boldsymbol{F}_i \subseteq \boldsymbol{F}'_k$* » et de même pour une application $\beta : \{1, \ldots, r'\} \to \{1, \ldots, r\}$. On a donc pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$ l'inclusion $\boldsymbol{F}_i \subseteq \boldsymbol{F}_{\beta\alpha(i)}$ et donc $\beta(\alpha(i)) = i$ pour tout i. Un raisonnement symétrique pour $\alpha \circ \beta$ prouve que α et β sont des bijections réciproques l'une de l'autre.([2])

4) Montrer que tout ouvert *non vide* d'une composante irréductible $\boldsymbol{F}$ de $\boldsymbol{X}$ est connexe et dense dans $\boldsymbol{F}$.

Pour $\varnothing \neq U \subseteq \boldsymbol{F}$, notons $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F} \backslash U$, alors $\boldsymbol{F} = \overline{U} \cup \boldsymbol{G}$ et nécessairement $\boldsymbol{F} = \overline{U}$ car $\boldsymbol{G}$ est un fermé propre de $\boldsymbol{F}$. Maintenant, si U_1 et U_2 sont deux ouverts disjoints de U, on a $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F} \backslash U_1) \cup (\boldsymbol{F} \backslash U_2)$ auquel cas l'un des U_i est vide ; l'ouvert U est donc connexe.

5) Soit k un corps (pas nécessairement algébriquement clos).

i) Rappeler la définition de la topologie de Zariski de l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$. Expliquer pourquoi on parle de la topologie de l'espace affine et pas seulement de celle de l'espace vectoriel k^n.

[2] Si l'on a $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{G}_1 \cup \boldsymbol{G}_2$ avec $\boldsymbol{G}_i$ fermé dans $\boldsymbol{X}$, on a des décompositions en composantes irréductibles $\boldsymbol{G}_i = \boldsymbol{F}_{i,1} \cup \cdots \cup \boldsymbol{F}_{i,r_i}$. L'espace $\boldsymbol{X}$ s'exprime alors comme réunion de la famille de fermés irréductibles $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{F}_{i,j}\}$. La famille $\mathcal{F}$ contient les composantes irréductibles de $\boldsymbol{X}$, mais certains $\boldsymbol{F}_{1,i}$ pourraient être contenus dans certains $\boldsymbol{F}_{2,k}$; les familles $\mathcal{F}_i = \{\boldsymbol{F}_{i,k}\}$ ne comportent donc pas que des composantes irréductibles de $\boldsymbol{X}$ ni $\mathcal{F}$ n'est pas nécessairement une décomposition de $\boldsymbol{X}$ en composantes irréductibles.

La topologie de Zariski de l'espace affine $\mathbb{A}_k^n$ est celle dont les fermés sont les zéros des familles des applications polynomiales de $\mathbb{A}_k^n$ à valeurs dans $\mathbb{A}_k^1$. Une application $\varphi : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^1$ est dite «*polynomiale*» lorsqu'il existe des repères $\{\boldsymbol{e}_0, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ de $\mathbb{A}_k^n$ et $\{\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_1\}$ de $\mathbb{A}_k^1$ tels que

$$\varphi(p) = \boldsymbol{f}_0 + P_\varphi(X_1(p), \ldots, X_n(p))(\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_0), \qquad \forall\, p \in \mathbb{A}_k^n,$$

avec $p = \boldsymbol{e}_0 + \sum_{i \geqslant 1} X_i(p)(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_0)$ et un certain polynôme $P_\varphi \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ne dépendant que de φ.

Un changement de repères affines se traduit par un changement affine des coordonnées affines de sorte que le caractère polynomial de l'application φ est indépendant du repère choisi. Les zéros d'une famille de polynômes relatifs à un repère sont les zéros d'une famille de polynômes relatifs à un autre repère, ceci explique que la topologie de Zariski est intrinsèque à l'espace affine.

ii) Montrer que la topologie de Zariski de $\mathbb{A}_k^n$ est noethérienne.

Un fermé de Zariski $\boldsymbol{Y}$ est l'ensemble de zéros de l'idéal $\mathcal{I}(\boldsymbol{Y})$ de l'anneau des fonctions régulières $\mathcal{R}(\mathbb{A}_k^n)$, des fonctions s'annulant sur $\boldsymbol{Y}$. À une suite décroissante de fermés $\boldsymbol{F}_1 \supseteq \boldsymbol{F}_2 \supseteq \cdots$ correspond ainsi une suite croissante d'idéaux $\mathcal{I}(\boldsymbol{F}_1) \subseteq \mathcal{I}(\boldsymbol{F}_2) \subseteq \cdots$ de l'anneau $\mathcal{R}(\mathbb{A}_k^n)$ qui est noethérien car quotient de l'anneau $k[X_1, \ldots, X_n]$. Par conséquent, la suite $\{\mathcal{I}(\boldsymbol{Y}_i)\}$ est stationnaire de même donc que la suite $\{\boldsymbol{Y}_i\}$.

iii) Pour chaque fermé de Zariski $\boldsymbol{Y} \subseteq k^n$ notons $\mathcal{I}(\boldsymbol{Y})$ l'idéal de $k[X_1, \ldots, X_n] = k[\overline{X}]$ des polynômes $P(\overline{X})$ tels que $P(\bar{x}) = 0$ pour tout $\bar{x} \in \boldsymbol{Y}$. Expliquer brièvement pourquoi la correspondance

$$\begin{array}{ccc} \{\text{fermés de Zariski}\} & \xrightarrow{\mathcal{I}} & \{\text{idéaux radicaux}\} \\ \boldsymbol{Y} & \longmapsto & \mathcal{I}(\boldsymbol{Y}) \end{array} \qquad (\mathcal{I})$$

est toujours injective et est *bijective* lorsque k est algébriquement clos.

Par définition de fermé de Zariski on a $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}(\mathcal{I}(\boldsymbol{Y}))$ et l'application est injective. Le théorème de Zéros de Hilbert affirme que l'application est surjective lorsque k est algébriquement clos.

iv) Soit $\boldsymbol{Y}$ un fermé de Zariski de k^n. Montrer l'équivalence des assertions

$$\begin{cases} \bullet\ \boldsymbol{Y} \text{ est irréductible.} \\ \bullet\ \mathcal{I}(\boldsymbol{Y}) \text{ est un idéal premier.} \\ \bullet\ \text{L'anneau des fonctions régulières } \mathcal{R}(\boldsymbol{Y}) \text{ est } \textit{intègre}. \end{cases}$$

- Soient $f, g \in k[\overline{X}]$ telles que $fg \in \mathcal{I}(\boldsymbol{Y})$. Alors $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{Z}(f) \cup \boldsymbol{Z}(g)$ et alors ou bien $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{Z}(f)$ ou bien $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{Z}(g)$ par irréductibilité de $\boldsymbol{Y}$. Par conséquent, ou bien $f \in \mathcal{I}(\boldsymbol{Y})$, ou bien $g \in \mathcal{I}(\boldsymbol{Y})$, autrement dit $\mathcal{I}(\boldsymbol{Y})$ est un idéal premier de $k[\overline{X}]$.
- On a $\mathcal{R}(\boldsymbol{Y}) = k[\overline{X}]/\mathcal{I}(\boldsymbol{Y})$ donc si $\mathcal{I}(\boldsymbol{Y})$ est premier $\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})$ est intègre.
- Si $\boldsymbol{Y}$ est réductible on a une décomposition propre $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}_1 \cup \boldsymbol{Y}_2$ et il existe des fonctions régulières $f_1 \in \mathcal{I}(\boldsymbol{Y}_1) \backslash \mathcal{I}(\boldsymbol{Y}_2)$ et $f_2 \in \mathcal{I}(\boldsymbol{Y}_2) \backslash \mathcal{I}(\boldsymbol{Y}_1)$. Le produit $f_1 f_2$ s'annule sur $\boldsymbol{Y}$ tout entier de sorte que lorsque $\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})$ est intègre l'une des fonctions doit s'annuler sur $\boldsymbol{Y}$ tout entier ce qui est contraire au choix. Le fermé $\boldsymbol{F}$ est donc irréductible.

../..

v) Lorsque k est algébriquement clos, montrer, à l'aide des questions (**2**) et (**3**), que pour tout idéal $\boldsymbol{I} \subseteq k[\overline{X}]$, il existe un ensemble (fini) unique d'idéaux premiers $\{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r\}$ telle que

$$\sqrt{\boldsymbol{I}} = \mathfrak{P}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{P}_r \,. \tag{$*$}$$

Indication. Traduire l'égalité $(*)$ *à l'aide du dictionnaire* $(\mathcal{I})$ *de* (**5**)-(iii).

> En termes d'espace topologique noethérien et compte tenu de la correspondance bijective entre fermés de Zariski et idéaux radicaux, cette égalité dit simplement que tout fermé admet une décomposition en composantes irréductibles. ([3])

vi) Décrire les fermés irréductibles de $\mathbb{A}^n_k$ lorsque k est un corps de cardinal *fini*.

> Un point $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ est un fermé de Zariski puisque c'est l'ensemble des zéros de l'idéal (maximal) $\langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n\rangle$. Lorsque k est fini l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$ l'est aussi de sorte que sa topologie de Zariski est la topologie discrète. Les fermés irréductibles de $\mathbb{A}^n_k$ sont donc ses singletons.

6) Soit $\boldsymbol{E}$ un groupe abélien. Notons $\underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{X}}$ le faisceau des applications localement constantes de $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\boldsymbol{E}$.

i) Montrer que $\underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{X}}$ est flasque lorsque $\boldsymbol{X}$ est irréductible.

> D'après la question II-(**4**) tout ouvert U de $\boldsymbol{X}$ est connexe. Une fonction localement constante sur U est alors constante et admet un prolongement global.

ii) Soit $\boldsymbol{X}$ la sous-variété affine de $\mathbb{C}^2$ définie par $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Z}\big((Y+1)(Y - X^2)\big)$.

a) Montrer que $\boldsymbol{X}$ possède deux composantes irréductibles, notons-les $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$.

> On pose $\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{Z}(Y+1)$ et $\boldsymbol{Y}_2 = \boldsymbol{Z}(Y - X^2)$. Comme les polynômes $Y+1$ et $Y - X^2$ sont irréductibles, ils sont premiers ainsi que les idéaux $\langle Y+1\rangle$ et $\langle Y - X^2\rangle$. Les fermés $\boldsymbol{Y}_1$ et $\boldsymbol{Y}_2$ sont alors irréductibles d'après II-(**5**)-(iv).

b) Montrer que $\boldsymbol{F}_{12} := \boldsymbol{F}_1 \cap \boldsymbol{F}_2$ possède exactement deux points.

> On a $\boldsymbol{Y}_1 \cap \boldsymbol{Y}_2 = \boldsymbol{Z}(Y+1, Y - X^2) = \{(i,-1), (-i,-1)\}$

c) Montrer à l'aide de la suite de Mayer-Vietoris $\mathbf{MV}_{\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2\}}(\underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{X}})$ de la question **I**-(**6**)-(d) les égalités

$$\bullet\ H^0(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{E}\,, \quad \bullet\ H^1(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{E}\,, \quad \bullet\ H^{>1}(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{0}\,.$$

> Pour toute inclusion de fermés $\iota : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ on a $\iota^{-1}\underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{X}} = \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{Y}}$ de sorte que la suite longue de Mayer-Vietoris $\mathbf{MV}_{\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2\}}$ est
>
> $$\begin{aligned} &\boldsymbol{0} \to H^0(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow{\epsilon} H^0(F_1; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{F}_1}) \oplus H^0(F_2; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{F}_2}) \xrightarrow{q} H^0(F_{12}; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{F}_{12}}) \to \\ &\qquad \to H^1(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{X}}) \to H^1(F_1; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{F}_1}) \oplus H^1(F_2; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{F}_2}) \to H^1(F_{12}; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{F}_{12}}) \to \end{aligned} \tag{$\diamond$}$$
>
> avec
>
> $$\begin{cases} H^0(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{E} & \\ H^0(\boldsymbol{F}_1; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{F}_1}) = \boldsymbol{E} & H^{>0}(\boldsymbol{F}_1; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{F}_1}) = 0 \\ H^0(\boldsymbol{F}_2; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{F}_2}) = \boldsymbol{E} & H^{>0}(\boldsymbol{F}_2; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{F}_2}) = 0 \\ H^0(\boldsymbol{F}_{12}; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{F}_{12}}) = \boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{E} & H^{>0}(\boldsymbol{F}_{12}; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{F}_{12}}) = 0 \end{cases}$$

[3] L'égalité $(*)$ est vraie quel que soit le corps et même pour tout anneau noethérien $\boldsymbol{A}$ à la place de $k[\overline{X}]$. Cela résulte des mêmes énoncés pour le schéma affine associé à l'anneau noethérien $\boldsymbol{A}$.

La suite exacte ($\diamond$) s'écrit alors :

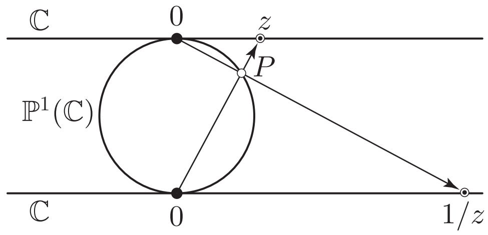
$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{E} \xrightarrow{\epsilon} \boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{E} \xrightarrow{q} \boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{E} \to H^1(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{X}}) \to \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} \to \mathbf{0} \to$$

avec $\epsilon(x) = (x, x)$ et $q(x, y) = (x - y, x - y)$.
Par conséquent, $\operatorname{im}(q) = \Delta_{\boldsymbol{E}}$, $\operatorname{coker}(q) = \boldsymbol{E} = H^1(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{X}})$ et $H^{>0}(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{X}}) = 0$.

————————×————————

III– Cohomologies de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Préliminaires : La droite projective complexe est la « *sphère de Riemann* ». Elle s'obtient en identifiant sur deux copies de $\mathbb{C}$ les points $z \leftrightarrow 1/z$, pour tout $z \neq 0$.



On notera $\boldsymbol{X} := \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et sera muni tantôt de la topologie habituelle de la sphère $\mathbb{S}^2$ auquel cas on la note $\boldsymbol{X}^{\text{diff}}$, tantôt de la topologie de Zariski $\boldsymbol{X}^{\text{alg}}$.

On utilisera le théorème de Čech-Leray suivant :

Théorème. *Pour tout complexe de faisceaux $\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}}$ sur $\boldsymbol{X}$ borné à gauche, et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{X}$ tel que $H^{>0}(U; \underline{\underline{\Omega}}^{\ell}_{\boldsymbol{X}}) = 0$, pour chaque $\ell \in \mathbb{Z}$ et pour toute ouvert U intersection d'une famille finie d'ouverts de $\mathcal{U}$, il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathbb{H}^q(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}; \underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}})$$

pour chaque $q \in \mathbb{N}$.

Un recouvrement vérifiant l'hypothèse du théorème sera dit « *acyclique pour* $\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}}$ »

Questions. Les questions (**1**) à (**5**) concernent les variétés différentielles.

1) Pour quelle raison sur une variété différentielle quelconque $\boldsymbol{M}$, le recouvrement trivial $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{M}\}$ est acyclique pour le complexe de de Rham différentiel $(\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{M}^{\text{diff}}}, d)$.

Puisque les faisceaux $\underline{\underline{\Omega}}^i_{\boldsymbol{X}}$ sont mous et qu'un faisceau mou est acyclique pour le foncteur des sections globales d'après un résultat du cours. (Voir aussi [??] § **3**, th. 3.5.4, p. 154.)

2) Pour quelle raison on a l'égalité $\mathbb{H}^{>0}(\mathbb{R}^n; (\underline{\underline{\Omega}}^*_{\mathbb{R}^n}, d)) = h^{>0}\big(\Omega^*(\mathbb{R}^n), d\big) = 0$.

On applique le théorème de Čech-Leray au recouvrement trivial $\mathcal{U} = \{\mathbb{R}^n\}$ dont l'acyclicité est justifiée dans la question précédente, ensuite on fait appel au lemme de Poincaré *global* qui affirme $h^{>0}\big(\Omega^*(\mathbb{R}^n), d\big) = 0$

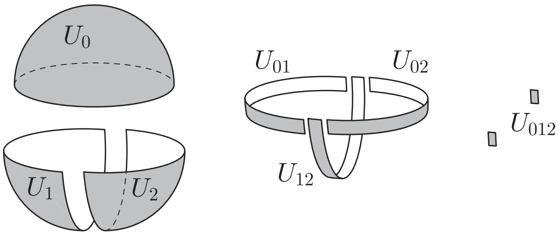
3) Pour quelle raison le complexe $\mathbf{0} \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\mathbb{R}^n} \to (\underline{\underline{\Omega}}^*_{\mathbb{R}^n}, d)$ est une suite exacte de faisceaux et alors pourquoi peut-on conclure *aussitôt* à l'égalité

$$\boxed{H^{>0}(\mathbb{R}^n; \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\mathbb{R}^n}) = 0}$$

L'exactitude de ce complexe résulte du lemme de Poincaré *local* valable sur toute variété différentielle et pas seulement pour $\mathbb{R}^n$. Le complexe en question est donc une résolution du faisceau constant et c'est une résolution acyclique d'après (**1**). Par conséquent, $H^*(\mathbb{R}^n; \underline{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}^n}) = h^*\big(\Omega^*(\mathbb{R}^n), d\big)$ d'après le théorème des résolutions acycliques de Leray. On conclut par le lemme de Poincaré *global*.

4) Trouver un recouvrement de $\boldsymbol{X}^{\text{diff}} = \mathbb{S}^2$ comportant trois ouverts qui soit acyclique pour le faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}$. S'en servir pour calculer $H(\boldsymbol{X}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}})$ en utilisant le théorème de Čech-Leray.

D'après la question (**3**) un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de $\boldsymbol{X}$ dont les composantes connexes des $U_{\alpha_{i_0}\cdots\alpha_{i_r}}$ sont homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ est acyclique pour $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}$. On décompose alors $\boldsymbol{X}$ comme réunion de trois ouverts suivants U_0, U_1, U_2 :



d'ou le complexe de Čech calculant la cohomologie $H(\boldsymbol{X}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}})$

$$\mathbf{0} \to \Gamma(U_0, \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \oplus \Gamma(U_1, \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \oplus \Gamma(U_2, \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \to \Gamma(U_{01}, \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \oplus \Gamma(U_{12}, \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \oplus \Gamma(U_{02}, \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \to$$
$$\to \Gamma(U_{012}, \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \to \mathbf{0}$$

équivalent à :

$$\mathbf{0} \to \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\ p\ } \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\ q\ } \mathbb{R}^2 \to \mathbf{0}$$

avec $p(x, y, z) = (x - y, y - z, x - z)$ et $q(x, y, z) = (y - z + x, y - z + x)$.

La condition de faisceau donne aussitôt la cohomologie de degré 0 car elle coïncide avec $\Gamma(\boldsymbol{X}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) = \mathbb{R}$ par connexité de $\boldsymbol{X}$. Il s'ensuit que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(p)) = 2$. D'autre part, il est clair que $\mathrm{im}(q) = \Delta_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^2$ et donc $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(q)) = 2$, d'où $H^1(\boldsymbol{X}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) = 0$ et, pour terminer $H^2(\boldsymbol{X}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) = \mathbb{R}^2/\Delta_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. On a donc

- $H^0(\boldsymbol{X}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) = \mathbb{R}$, • $H^1(\boldsymbol{X}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) = \mathbf{0}$, • $H^2(\boldsymbol{X}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) = \mathbb{R}$,

5) Donner une raison cohomologique pour montrer que la variété $\mathbb{S}^2$ ne peut être recouverte par deux ouverts contractiles d'intersection contractile (ou homotope à un ensemble fini). De même qu'elle n'admet pas de tels recouvrements, comportant trois ouverts et dont l'intersection des trois serait connexe.

D'après la question (**4**) le complexe de Čech d'un recouvrement acyclique $\mathcal{U}$ pour $\underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}$ doit donner un deuxième nombre de Betti non nul. Il faut donc que l'amplitude du dit complexe contienne l'intervalle $[0, 2]$ et donc, que $\mathcal{U}$ possède au moins trois ouverts. D'autre part, si $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$ et que U_{012} était connexe la cohomologie en degré 2 serait nulle car le morphisme de restriction $\Gamma(U_{01}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}}) \to \Gamma(U_{012}; \underline{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{X}})$ serait alors surjectif.

6) La variété algébrique complexe $\boldsymbol{X} := \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est réalisée comme réunion de deux ouverts U_0 et U_1 isomorphes à $\mathbb{C}$ d'intersection U_{01} isomorphe à $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Expliquer pourquoi le recouvrement $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ est acyclique pour le complexe de de Rham *algébrique* $(\underline{\Omega}^*_{\boldsymbol{X}^{\text{alg}}/\mathbb{C}}, d_*)$. Déterminer la cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{X}^{\text{alg}}$ par le complexe de Čech-de Rham algébrique relatif à $\mathcal{U}$.

Le recouvrement est acyclique puisque les trois ouverts sont des variétés affines et que les faisceaux $\underline{\Omega}^i_{\boldsymbol{X}^{\mathrm{alg}}/\mathbb{C}}$ sont cohérents, donc acycliques pour la cohomologie de faisceaux sur une variété affine d'après le critère d'acyclicité de Serre. (Voir § **16** du cours, th. **16.9.2**, et § **2** du supplément.).

Les ouverts de notre recouvrement sont $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ avec

$$\begin{aligned}(\Omega^*_{\mathbb{C}/\mathbb{C}}, d_*) &= \mathbb{C}[X] \xrightarrow{d} \mathbb{C}[X]\ \ dX, \qquad d(P) = \tfrac{\partial P}{\partial X} dX,\\ (\Omega^*_{\mathbb{C}\backslash\{0\}/\mathbb{C}}, d_*) &= \mathbb{C}[X]_X \xrightarrow{d} \mathbb{C}[X]_X dX\end{aligned}$$

D'où le complexe Čech-de Rham :

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \to & \mathbb{C}[X]_X dX & \oplus & \mathbb{C}[X]_X dX & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{C}[X]_X dX & \to \mathbf{0} \\ & d\uparrow & & d\uparrow & & d\uparrow & \\ 0 \to & \mathbb{C}[X] & \oplus & \mathbb{C}[X] & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{C}[X]_X & \to \mathbf{0} \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \end{array} \tag{$\mathfrak{D}$}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha(P(X), Q(X)) = P(X) - Q(1/X) \\ \beta(P(X)dX, Q(X)dX) = P(X)dX - Q(1/X)d(1/X) \end{cases}$$

Le complexe simple associé au bicomplexe ($\mathfrak{D}$) sera noté (Σ^*, D_*) dans la suite. On a

$$\begin{cases} D_0(P, Q) = (dP, dQ) \oplus \alpha(P, Q) \\ D_1((P, Q), R) = \beta(P, Q) - dR \end{cases}$$

- On a $\Sigma^2 = \mathbb{C}[X]_X dX$ et la cohomologie en degré 2 est

$$h^2(\Sigma^*, D_*) = \frac{\mathbb{C}[X]_X d_X}{\mathrm{im}(\beta) + \mathrm{im}(d)} = \frac{\mathbb{C}[X]_X d_X}{P(X)dX - Q(\frac{1}{X})\frac{-1}{X^2}dX - d(R(X, \frac{1}{X}))}$$

  avec $P(X), Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ et $R(X, 1/X) \in \mathbb{C}[X]_X$. Un calcul simple montre que les monômes $X^m dX$ avec $m \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ sont dans l'image de $(\beta + d)$ alors que $\frac{1}{X} d_X$ n'est pas atteint. On a donc

$$h^2(\Sigma^*, D_*) = \mathbb{C}\Big[\frac{1}{X} dX\Big]$$

- On a $\Sigma^0 = \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X]$ et la cohomologie de (Σ^*, D_*) en degré 0 est

$$h^0(\Sigma^*, D_*) = \ker(d, d) \cap \ker\alpha = \mathbb{C}$$

- On a $\Sigma^1 = \Big(\mathbb{C}[X]dX \oplus \mathbb{C}[X]dX\Big) \oplus \mathbb{C}[X]_X$ et l'application (d, d) est surjective d'après le lemme de Poincaré global. Il s'ensuit qu'un cocycle $((P', Q'), S') \in \Sigma^2$ est toujours cohomologue à un cocycle de la forme

$$((P', Q'), S') - (dP, dQ), \alpha(P, Q)) = ((0, 0), S' + \alpha(P, Q))$$

  où $(P', Q') = (dP, dQ)$. Mais dans un tel cocycle la fonction $S' + \alpha(P, Q))$ est nécessairement une constante $c \in \mathbb{C}$. Or, $((0, 0), c)$ est bien un 1-cobord puisque image par $(d, d) \oplus \alpha$ de $(0, c)$. Par conséquent :

$$h^1(\Sigma^*, D_*) = \mathbf{0}$$

Nous avons trouvé

- $H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{alg}}/\mathbb{C}) = \mathbb{C}$,   • $H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{alg}}/\mathbb{C}) = \mathbf{0}$,   • $H^2_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{alg}}/\mathbb{C}) = \mathbb{C}$,

../..

7) Comparer las conclusions des questions (**4**) et (**6**).

Les nombres de Betti différentiels et algébriques complexes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont les mêmes.

§ 1. Références bibliographiques

[Go] R. GODEMENT. "*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*" ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).