# Révision du cours par des questions commentées

Motivées par les exercices du partiel, ces notes constituent une révision des fondements de certains thèmes abordés dans notre cours. Les exercices concernent : les polynômes de Poincaré des variétés différentiables et la cohomologie de de Rham holomorphe.

Dans le premier exercice les variétés seront supposées *paracompactes (en particulier séparées).*

## §1. Polynômes de Poincaré des variétés différentiables

Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable dont tous les nombres de Betti sont **finis**, le «*polynôme de Poincaré de* $\boldsymbol{M}$», noté $\mathrm{P}_{\boldsymbol{M}}(t)$, est défini par :

$$\boxed{\mathrm{P}_{\boldsymbol{M}}(t) := \sum\nolimits_{j=0}^{\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M})} \dim_{\mathbb{R}}(H^j_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}))\, t^j}$$

Le but de cet exercice est d'étudier les polynômes de Poincaré des variétés différentiables **compactes et orientables**.

Les égalités suivantes ont été vues dans le cours :

$$\begin{cases} \mathrm{P}_{\mathbb{S}^d}(t) = 1 + t^d; \\ \mathrm{P}_{\mathbb{P}_d(\mathbb{C})}(t) = 1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2d} = \dfrac{1 - t^{2(d+1)}}{1 - t^2}; \end{cases} \qquad (\diamond_1)$$

où $\mathbb{P}_d(\mathbb{C})$ désigne l'espace projectif complexe de $\mathbb{C}^{d+1}$.

**P-1)** **Rappel :** Soit $\boldsymbol{V}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle : \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$ détermine une application linéaire $\gamma : \boldsymbol{V} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{V}, \mathbb{R})$ en associant, à chaque élément $v \in \boldsymbol{V}$, la forme linéaire $\gamma_v : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$ définie par $\gamma_v(w) := \langle v|w\rangle$, pour tout $w \in \boldsymbol{V}$.

- La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est dite «*dégénérée*» (resp. «*non dégénérée*») lorsque le noyau de $\gamma$ est *non trivial* (resp. *trivial*).
- La forme $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est dite *antisymétrique* lorsque $\langle v|w\rangle = -\langle w|v\rangle$, pour tous $v, w \in \boldsymbol{V}$.

L'assertion suivante est alors bien connue :

"*Une forme bilinéaire antisymétrique sur un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* impaire *est toujours dégénérée.*"

Démontrez l'affirmation suivante :

- Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable compacte, connexe et orientable de dimension $d = 2q$, où $q$ est un entier *impaire*. Alors

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}}\big(H^{d/2}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\big) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)}$$

- Donner un contre-exemple à cette assertion pour $d = 4$ à l'aide des exemples $(\diamond_1)$.

**Réponse et rappel du cours :** Sur une variété orientable $\boldsymbol{M}$ de dimension $d$, le choix d'une orientation permet de donner un sens intrinsèque à l'intégrale d'une forme différentielle de degré $d$ et *à support compact*. L'application, notée :

$$\int_{\boldsymbol{M}} : \Omega^d_c(\boldsymbol{M}) \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

est une forme linéaire de $\Omega^d_c(\boldsymbol{M})$, *i.e.* appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega^d_c(\boldsymbol{M}); \mathbb{R})$.

Cette définition est «*compatible*» avec l'intégrale de Riemann-Lebesgue en ce sens que si $(U, \varphi)$ est une carte de l'atlas orienté de $\boldsymbol{M}$, alors pour toute forme différentielle $\omega \in \Omega_c^d(U)$, on a :

$$\int_{\boldsymbol{M}} \omega = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_d)\, dx_1\, \ldots dx_d\,, \tag{1}$$

où $f(x_1, \ldots, x_d)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d$ est « *le* » représentant de $\omega$ dans $\Omega_c^d(\varphi(U))$ associé à la carte $(U, \varphi)$. Retenez bien que c'est *parce que* l'on se restreint à ne considérer que des cartes d'un atlas *orienté*, que la valeur de l'intégrale d'une forme différentielle dont le support $|\omega|$ (compact) est contenu dans plusieurs domaines de cartes, admet une définition intrinsèque, *i.e.* indépendante des choix des cartes le contenant.

Plus précisément, si $(V, \psi)$ est une deuxième carte telle que $|\omega| \subseteq V$ et si $\phi : \varphi(U) \to \psi(V)$ est le difféomorphisme de transition (entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$), alors la formule de changement de variables pour le représentant $\omega_V = f(\vec{x})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d \in \Omega_c^d(\psi(V))$ de $\omega$ dans $\psi(V)$, s'écrit :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \omega_V =_{\text{def}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x})\, dx_1 \cdots dx_d = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi(\vec{y}))\, \det \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} \right) dy_1 \cdots dy_d =_{\text{def}} \int_{\mathbb{R}^d} \phi^* \omega_V \tag{2}$$

*lorsque la jacobienne de $\phi$ est positive en tout point de $\varphi(U)$*. Or, comme les représentants locaux $\omega_U$ et $\omega_V$ de $\omega$ sont astreints à satisfaire la relation $\omega_U = \phi^* \omega_V$, on voit bien que l'identification des termes extrêmes de (2) donne un sens unique au nombre $\int_{\boldsymbol{M}} \omega$ lorsque $|\omega|$ est contenu dans des domaines de cartes.

Dans le cas général, le support de $\omega \in \Omega_c^d(\boldsymbol{M})$ pourra être « *arbitrairement grand* » ; le choix d'une partition de l'unité à supports compacts subordonnée au recouvrement d'un atlas orienté (*complet* si l'on veut minimiser l'arbitraire), permettra alors de décomposer $\omega$ comme une somme *finie* (puisque son support est compact) de formes différentielles à supports compacts *contenus dans des domaines de cartes*. L'intégration est alors bien définie pour chacun de ces termes et leur somme donne un nombre réel qui, suite aux considérations du paragraphe précédent (plus un petit travail supplémentaire), sera indépendant de la partition de l'unité choisie. Ce nombre, noté $\int_{\boldsymbol{M}} \omega$ ne dépend finalement que d'un unique choix, celui de la classe d'équivalence d'atlas orienté qui nous sert à évaluer les intégrales des formes différentielles de supports « *assez petits* ». Un changement d'orientation de $\boldsymbol{M}$ n'aura d'autre effet, lorsque $\boldsymbol{M}$ est connexe, que d'inverser les signes des intégrales.

Il est utile d'observer que ces considérations sur l'existence de l'intégration sur les variétés différentiables peuvent être condensées en un seul et unique diagramme de la manière suivante.

Soit $\mathsf{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ un atlas pour $\boldsymbol{M}$. Pour deux ouverts $U_a \subseteq U_b$, notons $\imath_a^b : \Omega_c^d(U_a) \to \Omega_c^d(U_b)$ (et même $\imath_a$ lorsque $U_b$ est $\boldsymbol{M}$) l'application qui associe à une forme différentielle à support compact dans $U_a$ son prolongement par zéro dans $U_b$ ; notons aussi $U_{ab}$ l'intersection $U_a \cap U_b$. Considérons alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{\alpha\beta \in \mathfrak{A}} \Omega_c^d(U_{\alpha\beta}) \arrow[r, "\delta"] & \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \Omega_c^d(U_\alpha) \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\sum_\alpha \int_\alpha"'] & \Omega_c^d(\boldsymbol{M}) \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\int_{\boldsymbol{M}}"] & 0 \\
& \mathbb{R} & &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

où les opérateurs $\Sigma$ et $\delta$ sont définis *par linéarité* à partir de leur action sur chaque composante des sommes directes, par :

$$\begin{cases} \Sigma(\omega_\alpha) = \imath_\alpha(\omega_\alpha), & \text{pour tout } \omega_\alpha \in \Omega_c^d(U_\alpha)\,; \\ \delta(\omega_{\alpha\beta}) = \imath_{\alpha\beta}^{\beta}(\omega_{\alpha\beta}) - \imath_{\alpha\beta}^{\alpha}(\omega_{\alpha\beta}), & \text{pour tout } \omega_{\alpha\beta} \in \Omega_c^d(U_{\alpha\beta})\,. \end{cases}$$

On a $\Sigma \circ \delta = 0$, et la première ligne de (3) est un complexe (on aura reconnu l'extrêmité de la suite de Mayer-Vietoris pour les formes différentielles à support compact). Ce complexe est *exact*, *i.e.* $\Sigma$ est surjective et $\ker(\Sigma) = \mathrm{im}(\delta)$ (vous devriez démontrer entièrement cette assertion au moins une fois dans votre vie).

D'autre part, pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$, le groupe $\Omega_c^d(U_\alpha)$ est (par définition) l'espace vectoriel réel des $d$-formes différentielles (à support compact) définies sur l'ouvert $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ de $\mathbb{R}^d$. Toute forme différentielle $\omega \in \Omega_c^d(U_\alpha)$ se représente donc, *de manière canonique*, sous la forme $\omega :: f(\vec{x})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$, où $f \in \mathsf{C}_c^\infty(\varphi_\alpha(U_\alpha))$. L'application $\int_\alpha$ est alors l'opérateur qui associe à $\omega$ l'intégrale de Riemann-Lebesgue de la fonction $f$.

Le problème de l'existence d'une intégrale sur $\boldsymbol{M}$ s'exprime alors par l'interrogation suivante :
"*Quelle condition doit satisfaire un atlas $\mathsf{A}$ pour que, dans le diagramme* (3)*, l'opérateur $\sum_\alpha \int_\alpha$ s'annule sur l'image de $\delta$ ?*"

Et la réponse est : “*L'atlas* $\mathbb{A}$ *doit être orienté (i.e. les jacobiennes des applications de transition doivent être toutes positives).*”

Lorsque la variété admet des atlas orientés, on dit qu'elle est « *orientable* ». On considère alors l'ensemble des atlas orientés pour $\boldsymbol{M}$ muni de la relation qui “identifie” deux atlas lorsque leur réunion est encore un atlas orienté ; on dit de ces atlas qu'ils « *définissent la même orientation sur* $\boldsymbol{M}$ ». Cette relation est une équivalence et la réunion des atlas d'une même classe est un représentant *canonique* de la classe ; on l'appelle « *l'atlas orienté complet de la classe* ». Lorsque la variété $\boldsymbol{M}$ est *orientable et connexe*, il existe exactement deux classes d'équivalence d'atlas orientés.

On appelle « *variété orientée* » la donnée, à la fois, d'une variété orientable et d'une classe d'équivalence d'atlas orientés (ou, ce qui revient au même, d'un atlas orienté).

Supposons désormais $\boldsymbol{M}$ orientée. Dans ce cas, l'opérateur $\int_{\boldsymbol{M}}$ est défini par (3) comme l'*opérateur linéaire induit* par $\sum_\alpha \int_\alpha$, et lorsque $\omega \in \Omega_c^d(\boldsymbol{M})$ est un cobord d'une forme différentielle $\nu$ *également à support compact*, on a :

$$\int_{\boldsymbol{M}} \omega = \int_{\boldsymbol{M}} d\nu = \int_{\boldsymbol{M}} \sum_\alpha d(\rho_\alpha\, \nu) = \sum_\alpha \int_{\boldsymbol{M}} d(\rho_\alpha\, \nu) = 0 \tag{4}$$

où $\{\rho_\alpha\}$ désigne une partition de l'unité à supports compacts, subordonnée à l'atlas orienté de $\boldsymbol{M}$. Le fait que $|\nu|$ soit compact permet de donner un sens au troisième terme de (4) (car seul un nombre fini de termes sera non nul) et la dernière égalité résulte du théorème de Stokes pour les ouverts à bord de $\mathbb{R}^d$ ([1]). L'opérateur $\int_{\boldsymbol{M}}$ induit, par conséquent, un opérateur linéaire sur la cohomologie de de Rham à support compact de degré $d$ de $\boldsymbol{M}$ :

$$\boxed{\int_{\boldsymbol{M}} : H^d_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}) \longrightarrow \mathbb{R}\,.}$$

Ceci étant, pour chaque $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leqslant d$, l'application :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_r : \Omega^r(\boldsymbol{M}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega_c^{d-r}(\boldsymbol{M}), \mathbb{R}) \\ \omega \quad &\longmapsto \quad \left(\nu \mapsto \int_{\boldsymbol{M}} \omega \wedge \nu\right) \end{aligned}$$

est linéaire et bien définie. Lorsque $\omega = d(\mu)$, on a (toujours par Stokes)

$$\mathrm{D}_r(d\mu)(\nu) = \int_{\boldsymbol{M}} d(\mu) \wedge \nu = \int_{\boldsymbol{M}} d(\mu \wedge \nu) - (-1)^{r-1} \int_{\boldsymbol{M}} \mu \wedge d(\nu) = (-1)^r \mathrm{D}_{r-1}(\mu)(d\nu)\,;$$

il s'ensuit que lorsque les formes différentielles $\omega$ *et* $\nu$ *sont toutes deux des cocycles*, le nombre $\mathrm{D}_r(\omega)(\nu)$ ne dépend que des classes de cohomologie qu'elles définissent. L'application $\mathrm{D}_r$ induit donc bien une application linéaire :

$$\mathrm{D}_r : H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}); \mathbb{R})\,.$$

Le théorème de dualité de Poincaré affirme précisément que $\mathrm{D}_r$ **est un isomorphisme** lorsque $\boldsymbol{M}$ est orientée et de dimension $d$.

En particulier, si $\boldsymbol{M}$ est compacte les nombres de Betti vérifient

$$\boxed{\mathbf{b}_r(\boldsymbol{M}) = \mathbf{b}_{d-r}(\boldsymbol{M})}$$

Supposons maintenant $\boldsymbol{M}$ (toujours orientable) compacte et de dimension $d$ *paire*. La forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \langle\cdot|\cdot\rangle : H^{d/2}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \oplus H^{d/2}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, \nu) \qquad &\longmapsto \mathrm{D}_{d/2}(\omega)(\nu) \end{aligned}$$

est, d'après la dualité de Poincaré, **non dégénérée** et vérifie la relation de commutation :

$$\langle\omega|\nu\rangle = (-1)^{d/2} \langle\nu|\omega\rangle\,.$$

[1] En fait, cela découle d'un résultat bien plus faible que l'on peut aisément démontrer et qui affirme que l'intégrale de Riemann-Lebesgue de la différentielle « *totale* » d'une fonction à support compact sur $\mathbb{R}^d$ est nulle.

▸ Lorsque $d/2$ est un nombre *impair*, les conditions d'application de notre rappel sur les formes bilinéaires sont satisfaites et nous pouvons conclure que :

$$\boxed{\mathbf{b}_{d/2}(\boldsymbol{M}) \equiv 0 \pmod 2\,, \qquad \text{lorsque } d \equiv 0 \pmod 2 \ \text{ et } d/2 \equiv 1 \pmod 2}$$

▸ Par contre, lorsque $d/2$ est un nombre *pair* (*i.e.* $d \equiv 0 \pmod 4$ ) l'argument précédent n'est plus concluant. L'exemple des espaces projectifs complexes $\mathbb{P}_{2m}(\mathbb{C})$ est là pour fournir des contre-exemples. En effet, dans ces cas, nous avons démontré dans le cours que $H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}_{2m}(\mathbb{C}))$ s'identifie, en tant qu'algèbre graduée, à $\mathbb{R}[X^2]/(X^{2(m+1)})$. En particulier, le nombre de Betti intermédiaire $\mathbf{b}_{2m}(\mathbb{P}_{2m}(\mathbb{C}))$ vaut 1. ■

**Remarque sur la dualité de Poincaré :** Le théorème de dualité de Poincaré est vrai **sans aucune hypothèse de finitude sur les dimensions des cohomologies de de Rham de $\boldsymbol{M}$**, mais il y a une erreur fréquente à ne pas commettre : Bien que nous aurions tout aussi bien pu considérer l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \mathsf{D}'_{d-r} : \Omega^{d-r}_c(\boldsymbol{M}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega^r(\boldsymbol{M}), \mathbb{R}) \\ \omega &\longmapsto \left(\nu \mapsto \int_{\boldsymbol{M}} \omega \wedge \nu\right) \end{aligned}$$

qui, telle la précédente, définit une application linéaire

$$\mathsf{D}'_{d-r} : H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}); \mathbb{R})\,;$$

celle-ci, toujours injective, n'est un isomorphisme que lorsque les cohomologies **sont de dimension finie**. En effet, notons ${}^{\mathrm{t}}\mathsf{D}_r$ l'adjoint *algébrique* de $\mathsf{D}_r$, on a alors, pour $\boldsymbol{M}$ orientable :

$$H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(H^{d-r}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}); \mathbb{R}\right); \mathbb{R}\right) \xrightarrow[\equiv]{{}^{\mathrm{t}}\mathsf{D}_r} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H^{d-r}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}); \mathbb{R})$$

où la composée des deux morphismes est l'opérateur $\mathsf{D}'_{d-r}$. Or, il est bien connu que l'injection canonique d'un espace vectoriel $V$ dans son bidual n'est surjective que lorsque $V$ est de dimension finie. Observons ce dernier phénomène avec un peu plus de détail. Supposons $V = \bigoplus_\alpha V_\alpha$, où chaque $V_\alpha$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et notons $\check{V} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_\alpha; \mathbb{R})$. On a alors, pour des raisons presque tautologiques :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\textstyle\bigoplus_\alpha V_\alpha; \mathbb{R}\right) \equiv \textstyle\prod_\alpha \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_\alpha; \mathbb{R})\,,$$

autrement dit, la commutation entre les opérateurs $\{\bigoplus, \prod, \mathrm{Hom}\}$ est possible dans l'ordre suivant :

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}} \textstyle\bigoplus_\alpha \Longleftrightarrow \textstyle\prod_\alpha \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}} \qquad (\odot)$$

(2)(Ce qui est par ailleurs vrai pour tout anneau de base et pas seulement pour le corps $\mathbb{R}$.) Nous avons alors : $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V; \mathbb{R}) \equiv \prod_\alpha \check{V}_\alpha$ et $V = \bigoplus_\alpha \mathrm{Hom}(\check{V}_\alpha; \mathbb{R})$, d'où :

$$\textstyle\bigoplus_\alpha \mathrm{Hom}(\check{V}_\alpha; \mathbb{R}) \equiv V \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V; \mathbb{R}); \mathbb{R}) \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\textstyle\prod_\alpha \check{V}_\alpha; \mathbb{R}\right)$$

et donc, il n'y a pas de commutation générale entre les opérateurs $\{\bigoplus, \prod, \mathrm{Hom}\}$ dans l'ordre :

$$\boxed{\textstyle\bigoplus_\alpha \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}} \not\Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}} \textstyle\prod_\alpha} \qquad (\not\odot)$$

Revenons maintenant au théorème de dualité de Poincaré ; l'inspection de sa démonstration, telle que nous l'avons donnée dans les notes du cours, révèle l'origine du problème. Rappelons que nous y considérions le morphisme de préfaisceaux sur $\boldsymbol{M}$, défini par :

$$U \rightsquigarrow \Omega^r(U) \xrightarrow{\mathsf{D}_r(U)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega^{d-r}_c(U); \mathbb{R})\,,$$

dont on sait que $\mathsf{D}_*(U)$ est un quasi-isomorphisme pour tout bon ouvert (3) de $\boldsymbol{M}$ (c'est ce que l'on appelle « *la dualité de Poincaré locale* »). Le morphisme $\mathsf{D}_r$ était incorporé dans un morphisme de bicomplexes de

2 La double flèche sur la droite du signe '$\Longleftrightarrow$' indique le sens du morphisme naturel du terme de gauche vers le terme de droite. Ces morphismes sont des isomorphismes lorsque l'ensemble d'indices $\alpha$ est *fini*, et ceci indépendamment de l'anneau de coefficients qui peut donc être différent du corps des nombres réels.

3 Ouvert $V$ contenu dans le domaine d'une carte $(U,\varphi)$, tel que $\varphi(U)$ est *convexe*.

Čech-de Rham associées à un (bon) recouvrement $\mathsf{U}=\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\boldsymbol{M}$ :

$$\mathsf{C}^p(\mathsf{U};\Omega^r) := \prod_{i_0<\cdots<i_p} \Omega^r(U_{i_0\ldots i_p}) \xrightarrow{\mathrm{D}_{p,r}} \mathsf{C}^p(\mathsf{U};\tilde{\Omega}_c^{d-r}) := \prod_{i_0<\cdots<i_p} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\Omega_c^{d-r}(U_{i_0\ldots i_p});\mathbb{R}\right).$$

où $\tilde{\Omega}_c^*$ désigne le préfaisceau $U \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega_c^*(U);\mathbb{R})$. Or, sur le terme de droite, la commutation $(\odot)$ donne :

$$\mathsf{C}^p(\mathsf{U};\tilde{\Omega}_c^{d-r}) \xrightarrow{\equiv} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i_0<\cdots<i_p} \Omega_c^{d-r}(U_{i_0\ldots i_p});\mathbb{R}\right);$$

ce qui permet d'affirmer que, pour $r$ fixe, le complexe

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\Omega_c^{d-r}(\boldsymbol{M});\mathbb{R}\right) \to \mathsf{C}^0(\mathsf{U},\tilde{\Omega}_c^{d-r}) \to \mathsf{C}^1(\mathsf{U},\tilde{\Omega}_c^{d-r}) \to \mathsf{C}^2(\mathsf{U},\tilde{\Omega}_c^{d-r}) \to \cdots \qquad (\tilde{\diamond})$$

est **exact** car dual algébrique de la suite longue de Mayer-Vietoris pour les formes différentielles *à support compact* dont on sait qu'elle est homotope à zéro (*cf.* Bott & Tu p. 139). Or, c'est précisément l'exactitude du complexe $(\tilde{\diamond})$ jointe à celle de la suite longue de Mayer-Vietoris pour les formes différentielles à support seulement *fermé* :

$$0 \to \Omega^r(\boldsymbol{M}) \to \mathsf{C}^0(\mathsf{U},\Omega^r) \to \mathsf{C}^1(\mathsf{U},\Omega^r) \to \mathsf{C}^2(\mathsf{U},\Omega^r) \to \cdots \qquad (\diamond)$$

qui permet de recoller la dualité de Poincaré locale en une dualité globale (*cf.* notes du cours).

Lorsque l'on cherche à suivre la même démarche pour l'opérateur $\mathrm{D}'_{d-r}$, on est naturellement emmené à considérer le morphisme de pré<u>co</u>faisceaux :

$$U \rightsquigarrow \Omega_c^{d-r}(U) \xrightarrow{\mathrm{D}'_{d-r}(U)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega^r(U);\mathbb{R}),$$

dont on sait aussi que pour chaque bon ouvert $U$ de $\boldsymbol{M}$, le morphisme $\mathrm{D}'_{d-*}(U)$ est un quasi-isomorphisme de complexes. Nous pouvons également incorporer $\mathrm{D}'_{d-r}$ dans un bicomplexe de termes :

$$\tilde{\mathsf{C}}^p(\mathsf{U};\Omega_c^{d-r}) := \bigoplus_{i_0<\cdots<i_p} \Omega_c^{d-r}(U_{i_0\ldots i_p}) \xrightarrow{\mathrm{D}'_{p,d-r}} \tilde{\mathsf{C}}^p(\mathsf{U};\tilde{\Omega}^r) := \bigoplus_{i_0<\cdots<i_p} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\Omega^d(U_{i_0\ldots i_p});\mathbb{R}\right).$$

où, pour chaque $r$ fixé, on reconnaît dans le membre de gauche les termes supérieurs de la suite longue de Mayer-Vietoris pour les formes différentielles à support compact. Mais c'est bien le membre de droite qui pose un problème puisque la commutation des opérateurs $\{\bigoplus,\mathrm{Hom}\}$, qui pourrait nous ramener au dual algébrique de la suite de Mayer-Vietoris pour les formes différentielles à supports fermés, correspond à la situation $(\not\odot)$.

**P-2**) Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ deux variétés différentiables dont les nombres de Betti sont finis. Notons $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}$ la variété produit. Prouvez l'égalité :

$$\boxed{\mathrm{P}_{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}}(t) = \mathrm{P}_{\boldsymbol{M}}(t)\,\mathrm{P}_{\boldsymbol{N}}(t)}$$

**Réponse :** Les conditions d'application du théorème de Künneth étant vérifiées, on a :

$$H_{\mathrm{DR}}^*(\boldsymbol{M}) \otimes_{\mathbb{R}} H_{\mathrm{DR}}^*(\boldsymbol{N}) \xrightarrow{\equiv} H_{\mathrm{DR}}^*(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}).$$

Pour chaque entier naturel $r \leqslant \dim(\boldsymbol{M}) + \dim(\boldsymbol{N})$, nous avons :

$$H_{\mathrm{DR}}^r(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}) \equiv \bigoplus_{a+b=r} H_{\mathrm{DR}}^a(\boldsymbol{M}) \otimes H_{\mathrm{DR}}^b(\boldsymbol{N}),$$

de sorte que :

$$\mathbf{b}_r(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}) = \sum\nolimits_{a+b=r} \mathbf{b}_a(\boldsymbol{M})\ \mathbf{b}_b(\boldsymbol{N});$$

et $\mathbf{b}_r(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N})$ s'identifie bien au coefficient du terme de degré $r$ du polynôme produit $\mathrm{P}_{\boldsymbol{M}}(t)\,\mathrm{P}_{\boldsymbol{N}}(t)$. ■

**P-3**) Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable de dimension $d$, compacte et orientable. Fixons un point $m_0 \in \boldsymbol{M}$. Notons $\boldsymbol{M}-m_0$ l'ouvert complémentaire de $m_0$ dans $\boldsymbol{M}$. Nous avons justifié dans le cours l'existence d'une suite exacte longue de cohomologie de la forme :

$$\to H^j_{\mathrm{DR,c}}\big(\boldsymbol{M} - m_0\big) \to H^j_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \to H^j_{\mathrm{DR}}(\{m_0\}) \to , \tag{$\diamond_2$}$$

déduisez-en l'égalité :

$$\boxed{\mathrm{P}_{\boldsymbol{M}-m_0}(t) = \mathrm{P}_{\boldsymbol{M}}(t) - t^d} \tag{$\diamond_3$}$$

**Réponse commentée :** Rappelons la construction de la suite exacte ($\diamond_2$) pour les données en considérations *en ne supposant pas $\boldsymbol{M}$ compacte.*

Notons $\Omega^*_{(m_0)}$ le complexe des *germes* des formes différentielles en $m_0$. Cet espace est obtenu en considérant l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{E}}^*_{(m_0)}$ des formes différentielles définies sur des voisinages (arbitraire) de $m_0$. On définit alors une relation d'équivalence '$\sim$' sur $\boldsymbol{\mathcal{E}}^*_{(m_0)}$ en identifiant deux de ses éléments lorsque leurs restrictions à un même voisinage de $m_0$ coïncident, on note alors $\Omega^*_{(m_0)} := \boldsymbol{\mathcal{E}}^*_{(m_0)}/\sim$.

Toutes les opérations habituelles sur les algèbres des formes différentielles ont un sens "naturel" sur $\Omega^*_{(m_0)}$. Voici comment on procède : Soient $\varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, s$ des éléments de $\Omega^*_{(m_0)}$, et choisissons des représentants respectifs $\omega_i \in \boldsymbol{\mathcal{E}}^*_{(m_0)}$. Notons $U_i$ le domaine de définition de $\omega_i$ et posons $U = U_1 \cap \cdots \cap U_s$ ; c'est encore un voisinage de $m_0$ car intersection *finie* de tels voisinages. Les restrictions $\omega_i|_U$ représentent toujours les mêmes germes $\varepsilon_i$ ; il existe donc, pour toute famille *finie* $\mathrm{F}$ de germes, un voisinage $U_{\mathrm{F}}$ de $m_0$ contenant des représentants pour chaque élément de $\mathrm{F}$. Ces représentants peuvent alors être additionnés, multipliés par des scalaires ou entre eux par le produit extérieur, différentiés, etc. Les résultats de ces opérations définissent des germes qui ne dépendent pas du voisinage $U_{\mathrm{F}}$ de $m_0$ choisi ; l'ensemble $\Omega^*_{(m_0)}$ hérite ainsi d'une structure de $\mathbb{R}$-algèbre différentielle graduée.

Montrons les égalités suivantes :

$$H^0\big(\Omega^*_{(m_0)}\big) = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad H^r\big(\Omega^*_{(m_0)}\big) = \mathbf{0} \qquad \text{si } r > 0\,. \tag{5}$$

En effet, un germe de forme différentielle $\varepsilon$ étant toujours «*représenté*» par des formes différentielles définies sur des voisinages de $m_0$, choisissons-en une $\omega \in \Omega^*(U)$. Dire que le germe $\varepsilon$ est un *cocycle* revient à dire que $d\omega$ est nulle sur un voisinage $V$ de $m_0$, mais en général $V$ sera strictement plus petit que $U$ et donc $\omega$ n'est pas forcément un cocycle. Or, la restriction de $\omega$ à $V$ représente également le germe $\varepsilon$, et donc elle, mais aussi toutes ses restrictions à des sous-voisinages de $m_0$ sont des représentants *cocycliques* de $\varepsilon$. En particulier nous pouvons considérer un représentant $\omega'$ défini sur un sous-ouvert contractile $W$ du domaine d'une carte de $\boldsymbol{M}$ centrée $m_0$. Le "lemme de Poincaré" montre alors que

- si $\varepsilon$ est de degré positif, $\omega' = d\nu$, où $\nu \in \Omega^*(W)$ ; en particulier $\varepsilon$ sera la différentielle du germe en $m_0$ défini par $\nu$.
- si $\varepsilon$ est un germe de fonction, le représentant $\omega'$ est forcément une constante puisque $W$ est connexe.

Les égalités (5) sont donc bien vérifiées, et le morphisme de restriction qui associe à un germe de forme différentielle en $m_0$ sa restriction en $m_0$ :

$$\Omega^*_{(m_0)} \longrightarrow \Omega^*(\{m_0\})\,,$$

est un *quasi-isomorphisme*.

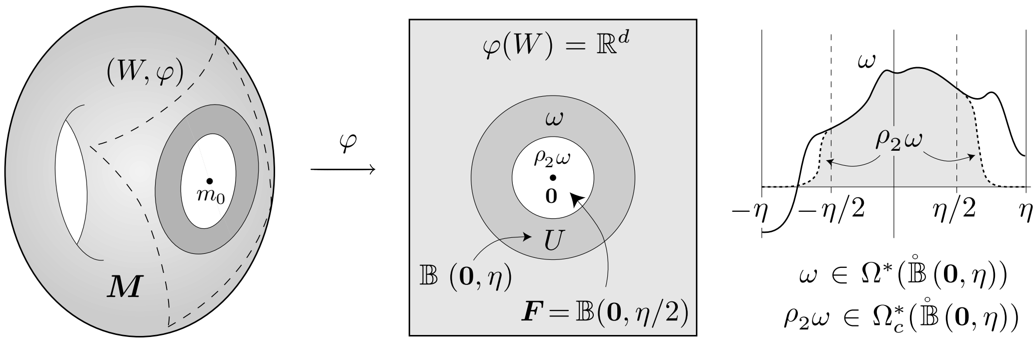
**Remarque :** En fait, la bonne manière de penser à $\Omega^*_{(m_0)}$ passe par les concepts de systèmes inductifs et limites inductives. Une section des notes du cours (en rédaction) traitera en détail de cet autre point de vue.

Ceci étant posé, considérons la suite :

$$0 \longrightarrow \Omega^*_c(\boldsymbol{M} - m_0) \xrightarrow{\ \imath\ } \Omega^*_c(\boldsymbol{M}) \xrightarrow{\ \pi\ } \Omega^*_{(m_0)} \longrightarrow 0\,, \tag{6}$$

où $\imath$ désigne l'application qui associe à une forme différentielle à support compact sur l'ouvert $\boldsymbol{M} - m_0$ son prolongement par zéro dans $\boldsymbol{M}$, et où $\pi$ associe à une forme différentielle son germe en $m_0$ qu'elle détermine. Ces applications sont bien des morphismes d'algèbres différentielles graduées et la suite (6) est une *suite exacte courte*. En effet,

▸ **surjectivité de $\pi$.** Soit $\varepsilon$ un germe de forme différentielle en $m_0$. Pour toute carte de coordonnées $(W, \varphi)$ de $\boldsymbol{M}$ centrée en $m_0$ (*i.e.* $\varphi(W) = \mathbb{R}^d$ et $\varphi(m_0) = \mathbf{0}$), il existe un nombre réel $\eta > 0$, tel que $\varepsilon$ est représentée par une forme différentielle $\omega \in \Omega^*(\mathring{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \eta))$, où $\mathring{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \eta)$ désigne la boule *ouverte* de centre $\mathbf{0}$ et rayon $\eta$ dans $\mathbb{R}^d$, considéré muni de sa structure canonique d'espace euclidien. L'inconvénient avec $\omega$ est que rien ne peut nous garantir *a priori* qu'elle puisse être prolongeable à $\boldsymbol{M}$ tout entier, mais comme nous cherchons seulement une forme différentielle à support compact de $\boldsymbol{M}$ qui coïncide avec $\omega$ *au voisinage de* $m_0$, nous pourrons multiplier $\omega$ par une fonction «*plateau*» pour obtenir une forme différentielle qui, coïncidant avec $\omega$ au voisinage de $\mathbf{0}$, soit identiquement nulle « *au voisinage de l'infini* ».




Plus précisément : Notons $\boldsymbol{F}$ la boule *fermée* $\mathbb{B}(\mathbf{0}, \eta/2)$, et $U$ la boule ouverte $\mathring{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \eta)$. L'ensemble $\boldsymbol{F}$ est alors un voisinage compact de $\mathbf{0}$ dans $\mathbb{R}^d$. Prenons une partition de l'unité sur $\mathbb{R}^d$ *à supports compacts* $\{\rho_1, \rho_2\}$, subordonnée au recouvrement $\{\mathbb{R}^d - \boldsymbol{F}, U\}$. Comme $\rho_2|_{\boldsymbol{F}} = \mathbf{1}_{\boldsymbol{F}}$, la forme différentielle $\rho_2\,\omega$ coïncide avec $\omega$ à l'intérieur de $\boldsymbol{F}$ et représente donc également le germe $\varepsilon$ ; mais maintenant $\rho_2\,\omega$ est *en plus*, à support compact dans $U$. La forme $\rho_2\,\omega$ se prolonge alors par zéro, dans un premier temps à $W$, puis à $\boldsymbol{M}$ tout entier, ce qui prouve bien la surjectivité de $\pi$.

▸ **noyau de $\pi$.** Une forme différentielle à support compact $\omega$ de $\boldsymbol{M}$ dont le germe en $m_0$ est nul est une forme différentielle identiquement nulle sur un voisinage de $m_0$, le support $|\omega|$ est alors entièrement contenu dans $\boldsymbol{M} - m_0$. Une telle forme différentielle appartient donc bien à l'image de $\imath$.

▸ **injectivité de $\imath$.** Evidente.

L'application du foncteur de cohomologie à la suite exacte (6) donne la suite exacte longue de cohomologie :

$$\boxed{\to H^j_{\mathrm{DR,c}}\big(\boldsymbol{M} - m_0\big) \to H^j_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}) \to H^j_{\mathrm{DR}}(\{m_0\}) \to} \tag{7}$$

dont l'étude complète exige que l'on distingue essentiellement deux cas :

▸ ***M* est compacte.** Les trois premiers termes de (7) sont :

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M} - m_0) \longrightarrow H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \xrightarrow{H(\pi)_0} H^0_{\mathrm{DR}}(\{m_0\}) \longrightarrow 0\,,$$

où $H^0(\pi)$ est *surjective*. Il s'ensuit que

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{R}}\big(H^0_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M} - m_0)\big) = \dim_{\mathbb{R}}\big(H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\big) - 1 \\ H^j_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M} - m_0) \xrightarrow[\equiv]{H^j(\imath)} H^j_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}), \quad \text{pour tout } j > 0\,; \end{cases}$$

et les nombres de Betti de $\boldsymbol{M} - m_0$ sont *finis*. Enfin, l'orientabilité de $\boldsymbol{M}$ entraîne celle de l'ouvert complémentaire du point $m_0$ ([4]) et le théorème de dualité de Poincaré peut être appliqué à $\boldsymbol{M} - m_0$ ; les équivalences ci-dessus deviennent alors :

$$\begin{cases} \mathbf{b}_d(\boldsymbol{M} - m_0) = \mathbf{b}_d(\boldsymbol{M}) - 1 \\ \mathbf{b}_j(\boldsymbol{M} - m_0) = \mathbf{b}_j(\boldsymbol{M}), \quad \text{pour tout } j < d\,. \end{cases}$$

[4] Par exemple, parce que la restriction à cet ouvert d'une forme différentielle de degré maximum nulle part nulle sur $\boldsymbol{M}$ est nécessairement nulle part nulle.

d'où l'égalité encadrée ($\diamond_3$) de la question P-**3**.

▸ ***M* n'est pas compacte.** (On supposera $\boldsymbol{M}$ connexe et de nombres de Betti finis.) Dans ce cas, les termes $H^0_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}-m_0)$ et $H^0_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M})$ sont *tous les deux nuls* et les premiers termes significatifs de (7) sont :

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathrm{DR}}(\{m_0\}) \longrightarrow H^1_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}-m_0) \longrightarrow H^1_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}) \longrightarrow 0\,,$$

Il s'ensuit que

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{R}}\left(H^1_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}-m_0)\right) = \dim_{\mathbb{R}}\left(H^1_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M})\right)+1 \\ H^j_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}-m_0) \xrightarrow[\equiv]{H(\imath)_j} H^j_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}), \quad \text{pour tout } j \neq 1\,. \end{cases}$$

et par dualité, si $\boldsymbol{M}$ est orientable, connexe, non compacte, de dimension $d$ et de nombres de Betti finis :

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{d-1}(\boldsymbol{M}-m_0) = \mathbf{b}_{d-1}(\boldsymbol{M})+1 \\ \mathbf{b}_j(\boldsymbol{M}-m_0) = \mathbf{b}_j(\boldsymbol{M}), \quad \text{pour tout } j \neq d-1\,. \end{cases}$$

donc $\boxed{\mathrm{P}_{\boldsymbol{M}-m_0} = \mathrm{P}_{\boldsymbol{M}} + t^{d-1}}$. (Cette dernière égalité est également valable lorsque $\boldsymbol{M}$ n'est pas connexe à condition que le point $m_0$ appartienne à une composante connexe *non compacte* de $\boldsymbol{M}$.) ∎

P-**4**) Soient maintenant $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ deux variétés différentiables **de même dimension** $\boldsymbol{d}>0$. Fixons deux points $m_0 \in \boldsymbol{M}$ et $n_0 \in \boldsymbol{N}$ et des cartes de coordonnées $(V_{m_0}, \varphi_{m_0})$ et $(V_{n_0}, \varphi_{n_0})$ respectivement dans $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$, vérifiant :

$$m_0 \in V_{m_0}, \quad \varphi_{m_0}(V_{m_0}) = \mathbb{R}^d \quad \text{et} \quad \varphi_{m_0}(m_0) = \mathbf{0}\,,$$

et *mutatis mutandis* pour $\boldsymbol{N}$. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure d'espace euclidien canonique.

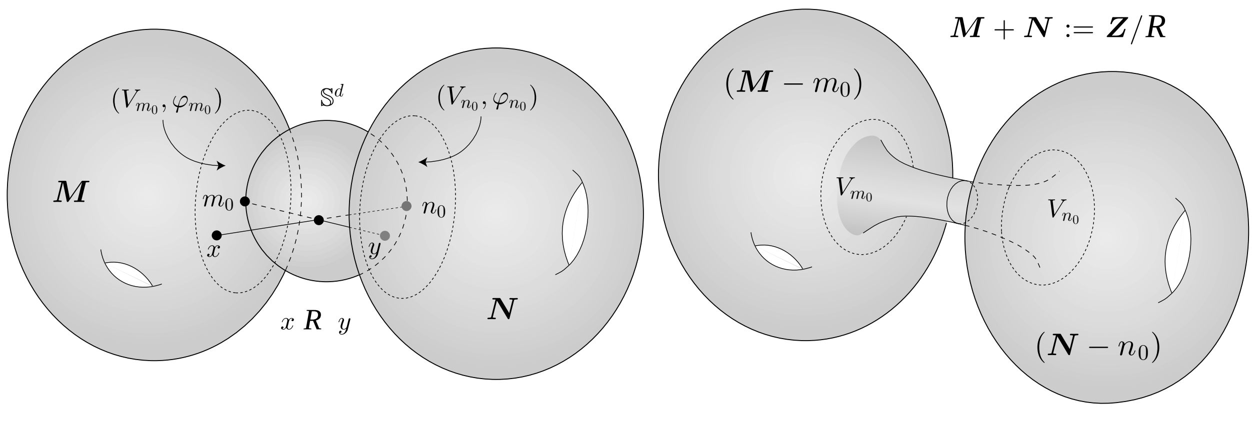
Soit R la relation définie sur la réunion disjointe de variétés $\boldsymbol{Z} := (\boldsymbol{M}-m_0) \amalg (\boldsymbol{N}-n_0)$, par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \bullet\ z \ \mathrm{R}\ z \text{ pour tout } z \in \mathbb{Z}\,; \\ \bullet \text{ si } x \in V_{m_0} \text{ et } y \in V_{n_0}, \text{ alors :} \\ \qquad x \ \mathrm{R}\ y, \quad \text{si et seulement si,} \quad \varphi_{m_0}(x) = -\dfrac{\varphi_{n_0}(y)}{\|\varphi_{n_0}(y)\|^2}\,, \qquad (\diamond_4) \\ \text{et } \textit{mutatis mutandis} \text{ pour } x \in V_{n_0} \text{ et } y \in V_{m_0}. \end{cases}$$

(Penser à la projection stéréographique.)

- Montrer que R est une relation d'équivalence sur $\boldsymbol{Z}$ et que l'espace quotient $\boldsymbol{Z}/\mathrm{R}$ admet une (unique) structure de variété différentiable rendant la projection canonique $\pi : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}/\mathrm{R}$ submersive.

On note $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N} := \boldsymbol{Z}/\mathrm{R}$ ; il est possible de montrer, lorsque $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont connexes, que les variétés ainsi obtenues sont deux à deux difféomorphes, indépendamment des points $m_0$ et $n_0$ et des cartes $(\boldsymbol{V}_{m_0}, \varphi_{m_0})$ et $(\boldsymbol{V}_{n_0}, \varphi_{n_0})$ choisis.



**Réponse commentée :** La relation $\mathrm{R}$ est *réflexive et symétrique* par construction. Puis, la condition ($\diamond_4$), implique :

$$\|\varphi_{m_0}(x)\| = \frac{\|\varphi_{n_0}(y)\|}{\|\varphi_{n_0}(y)\|^2} = \frac{1}{\|\varphi_{n_0}(y)\|}\,,$$

et donc :

$$\frac{\varphi_{m_0}(x)}{\|\varphi_{m_0}(x)\|^2} = -\frac{\frac{\varphi_{n_0}(y)}{\|\varphi_{n_0}(y)\|^2}}{\frac{1}{\|\varphi_{n_0}(y)\|^2}} = -\varphi_{n_0}(y)\,,$$

ce qui entraîne la *transitivité* de $\mathrm{R}$. La relation est donc bien une équivalence sur $\boldsymbol{Z}$. Nous allons utiliser le théorème de Godement suivant :

**Théorème** [Godement]. *Soient $\boldsymbol{Z}$ une variété différentiable et $\mathrm{R}$ une relation d'équivalence sur $\boldsymbol{Z}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(**G-a**) *L'espace topologique quotient $\boldsymbol{Z}/\mathrm{R}$ admet une structure de variété différentiable (et une seule) telle que la projection canonique $\pi : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}/\mathrm{R}$ est une submersion.*

(**G-b**) *Le graphe $\mathrm{Gr}(\mathrm{R}) \subseteq \boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ est une sous-variété fermée de la variété produit $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$.*

*Dans le cas* **G-b**, *la dimension de $\boldsymbol{Z}/\mathrm{R}$ vaut $\big(2\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{Z}) - \dim_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Gr}(\mathrm{R})\big)\big)$.*

([5]) Dans notre cas, $\mathrm{Gr}(\mathrm{R})$ est composé d'une part, de la diagonale $\Delta_{\boldsymbol{Z}}$ puisque $\mathrm{R}$ est symétrique, et d'autre part, du graphe de l'application $\phi = \varphi_{n_0}^{-1}\circ\varphi_{m_0}$ entre les ouverts $\boldsymbol{V}_{m_0}$ et $\boldsymbol{V}_{n_0}$ et du graphe de $\phi^{-1}$. Nous avons donc $\mathrm{Gr}(\mathrm{R}) = \Delta_{\boldsymbol{Z}} \amalg \mathrm{Gr}(\phi) \amalg \mathrm{Gr}(\phi^{-1})$, et comme nos variétés sont séparées :

- $\Delta_{\boldsymbol{Z}}$ sera fermé dans $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$, et
- l'ensemble $\boldsymbol{G} := \mathrm{Gr}(\phi)\cup\mathrm{Gr}(\phi^{-1})$ sera fermé dans l'ouvert $U_\phi := \big((\boldsymbol{V}_{m_0}\times\boldsymbol{V}_{n_0})\amalg(\boldsymbol{V}_{n_0}\times\boldsymbol{V}_{m_0})\big)$ (car graphe d'applications continues) ; mais également dans $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$. En effet, soit $(m,n)$ un point de la frontière de $\boldsymbol{G}$ dans $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ ; comme $(m,n)$ ne peut appartenir à $U_\phi$, on peut supposer que $m$ est dans la frontière de $\boldsymbol{V}_{m_0} - m_0$ dans $\boldsymbol{Z}$, dans ce cas $n$ ne peut être que $n_0$ ce qui est impossible.

On conclut que $\mathrm{Gr}(\mathrm{R})$ est une partie *fermée* de $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$.

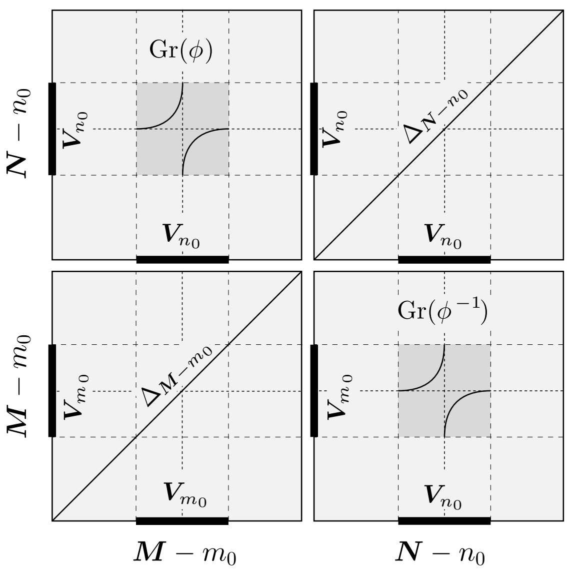
Enfin, l'application $x\mapsto(x,\phi(x))$ de $\boldsymbol{V}_{m_0}\to\mathrm{Gr}(\phi)$ est une immersion et un homéomorphisme entre $\boldsymbol{V}_{m_0}$ et $\mathrm{im}(\phi)$ (et de manière analogue pour $\phi^{-1}$), de sorte que toutes les conditions pour assurer que $\mathrm{Gr}(\mathrm{R})$ est une sous-variété $\mathrm{C}^\infty$ de $\boldsymbol{Z}$ de dimension $d$ sont réunies et le théorème de Godement peut être appliqué à notre situation.

Nous exhibons les données du paragraphe précédent dans le graphique ci-après qui représente la variété produit $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$. On a :

$$\boldsymbol{Z} := (\boldsymbol{M} - m_0)\amalg(\boldsymbol{N} - n_0)$$

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{R}) = \Delta_{\boldsymbol{M}-m_0}\amalg\Delta_{\boldsymbol{N}-n_0}\amalg\mathrm{Gr}(\phi)\amalg\mathrm{Gr}(\phi^{-1})$$

$$\phi(z) = -\frac{z}{\|z\|^2}.$$




L'espace topologique quotient $\boldsymbol{Z}/\mathrm{R}$, muni de l'unique la structure de variété différentiable rendant la projection $\pi : \boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}/\mathrm{R}$ submersive est appelée «*somme amalgamée*» de $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$. A remarquer que lorsque $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont connexes, bien que le choix des points $m_0$ et $n_0$ joue un rôle incontournable dans la construction effective de la somme amalgamée, la variété résultante en est "indépendante". En effet, si d'autres points $m_1$ et $n_1$ sont choisis, les variétés obtenues restent tout de même *difféomorphes*. Ceci est conséquence du fait que, sur une variété connexe $\boldsymbol{X}$, le groupe des difféomorphismes $\mathrm{Diff}(\boldsymbol{X})$ opère de façon *transitive* sur $\boldsymbol{X}$. Les variétés $\boldsymbol{M} - m_0$ et $\boldsymbol{M} - m_1$

[5] Dans ce théorème l'hypothèse de fermeture pour le graphe de la relation $\mathrm{R}$, dans l'assertion **G-b**, est uniquement nécessaire pour garantir la séparation de l'espace topologique quotient.

sont donc difféomorphes par un certain difféomorphisme $\Xi$ de $\boldsymbol{M}$ et nous pouvons "transporter" (à l'aide de $\Xi$) les opérations de recollement entre $\boldsymbol{M} - m_0$ et $\boldsymbol{N} - n_0$ pour amalgamer $\boldsymbol{M} - m_1$ et $\boldsymbol{N} - n_0$. Sur les variétés obtenues, les difféomorphisme $\Xi : \boldsymbol{M} - m_0 \to \boldsymbol{M} - m_1$ et id : $\boldsymbol{N} - n_0$ se recollent alors en un difféomorphisme global, etc, etc. . . ■

- Montrer que la projection canonique $\pi : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$, identifie les variétés $\boldsymbol{M} - m_0$ et $\boldsymbol{N} - n_0$ à des ouverts de $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$, notés respectivement $U_{\boldsymbol{M}}$ et $U_{\boldsymbol{N}}$, qui recouvrent $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$. Montrez que $U_{\boldsymbol{M}} \cap U_{\boldsymbol{N}}$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$.
- Montrer que si $d > 1$, $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$ est respectivement : compacte, connexe, orientable, si et seulement si, il en est de même pour $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ (simultanément). Discuter le cas $d = 1$.

**Réponse commentée :** La projection $\pi$ étant submersive, c'est une application *ouverte* et même *étale* puisque $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}) = \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{Z})$. Comme d'autre part la restriction de la relation d'équivalence $\mathsf{R}$ sur $\boldsymbol{M} - m_0$ coïncide avec la relation «*identité*», $\pi$ établit une bijection, et donc un difféomorphisme puisque $\pi$ est étale, entre $\boldsymbol{M} - m_0$ et $U_{\boldsymbol{M}} := \pi(\boldsymbol{M} - m_0)$. (Les raisonnements pour $\boldsymbol{N}$ étant les mêmes.)

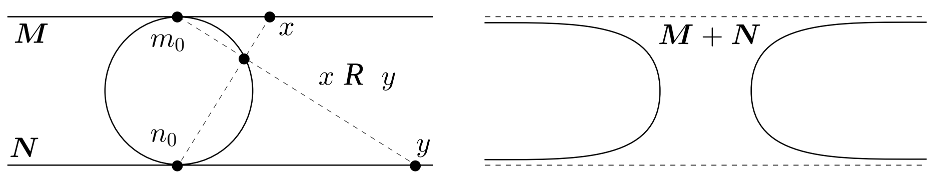
Les parties $U_{\boldsymbol{M}}$ et $U_{\boldsymbol{N}}$ recouvrent bien $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$ et sont ouvertes car images par $\pi$ de parties ouvertes.

Enfin, l'intersection $U_{\boldsymbol{M}} \cap U_{\boldsymbol{N}}$ est clairement l'image (difféomorphe) par $\pi$ de $\boldsymbol{V}_{m_0} - m_0$ qui est, lui-même, l'image difféomorphe par $\varphi_{m_0}^{-1}$ de $\mathbb{R}^d - \boldsymbol{0} \equiv \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$.

Supposons $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ : compactes, connexes et orientables.

- ▸ **Connexité de $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$.** Toute fonction localement constante $f$ sur $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$, composée avec la projection $\pi : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$, définit une fonction localement constante sur $\boldsymbol{M} - m_0$ et $\boldsymbol{N} - n_0$. Lorsque la dimension $d$ est *strictement plus grande que* 1, les espaces $\boldsymbol{M} - m_0$ et $\boldsymbol{N} - n_0$ sont connexes et $f$ est alors constante sur $\pi(\boldsymbol{M} - m_0)$ et $\pi(\boldsymbol{N} - n_0)$. Or, ces deux dernières parties ont une intersection non triviale et $f$ est forcément constante.

  Lorsque $d = 1$, $\boldsymbol{M} - m_0$ et $\boldsymbol{N} - n_0$ peuvent être toutes deux disconnexes (p.ex. si $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N} = \mathbb{R}$) et la somme amalgamée sera disconnexe.

  Par contre, pour peu que l'on suppose $\boldsymbol{M}$ *compacte*, l'ouvert $\boldsymbol{M} - m_0$ sera encore connexe ([6]), et l'argument du paragraphe précédent permet bien de conclure à la connexité de la somme amalgamée.
- ▸ **Compacité de $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$.** La somme amalgamée est la réunion des trois parties compactes suivantes :

$$\pi\big(\boldsymbol{M} - \varphi_{m_0}^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}(\boldsymbol{0}, 1))\big), \quad \pi\big(\boldsymbol{N} - \varphi_{n_0}^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}(\boldsymbol{0}, 1))\big), \quad \text{et} \quad \pi\big(\varphi_{m_0}^{-1}\big(\mathbb{B}(\boldsymbol{0}, 2) - \mathring{\mathbb{B}}(\boldsymbol{0}, 1/2)\big)\big)$$

- ▸ **Orientabilité de $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$.** Utilisons le critères des formes différentielles de degré maximum. Soient $\omega_{\boldsymbol{M}} \in \Omega^d(\boldsymbol{M})$ et $\omega_{\boldsymbol{N}} \in \Omega^d(\boldsymbol{N})$ des forme différentielles nulle part nulles. Leurs restrictions à l'ouvert $W = U_{\boldsymbol{M}} \cap U_{\boldsymbol{N}}$ déterminent une fonction différentiable $f$, par l'égalité :

$$\omega_{\boldsymbol{M}}(x) = f(x)\, \omega_{\boldsymbol{N}}(x), \qquad \text{pour tout } x \in W\,,$$

  Cette fonction ne pouvant s'annuler en aucun point $W$ est contrainte, par la connexité de $W$ de garder son signe constant et quitte à remplacer $\omega_{\boldsymbol{N}}$ par $-\omega_{\boldsymbol{N}}$, on peut supposer que $f$ est positive. Soit maintenant $\{\rho_{\boldsymbol{M}}, \rho_{\boldsymbol{N}}\}$ une partition de l'unité sur $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$ subordonnée au recouvrement $\{U_{\boldsymbol{M}}, U_{\boldsymbol{N}}\}$. La forme différentielle $\rho_{\boldsymbol{M}}\, \omega_{\boldsymbol{M}} + \rho_{\boldsymbol{N}}\, \omega_{\boldsymbol{N}}$ est alors nécessairement nulle part nulle et $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$ est orientable. Nous avons démontré le lemme suivant :

  **Lemme.** *Soient $U_1, U_2$ deux ouverts* orientables *d'une variété différentiable. Si l'ouvert intersection $U_1 \cap U_2$ est* ***connexe****, la réunion $U_1 \cup U_2$ est également* orientable.

[6] Une variété compacte connexe de dimension un est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$.

Supposons maintenant $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ : compacte, connexe et orientable.
- **Connexité et compacité de $\boldsymbol{M}$.** Résultent de raisonnements élémentaires de topologique générale...
- **Orientabilité de $\boldsymbol{M}$.** D'après le lemme ci-dessus, il suffira de montrer que $\boldsymbol{M}-m_0$ est orientable puisque l'ouvert $V_{m_0}$ ($\equiv \mathbb{R}^d$) est orientable et que $V_{m_0}-m_0 \equiv \mathbb{R}^d - \mathbf{0}$ est connexe, si $d>1$ ([7]). Or, $\boldsymbol{M}-m_0$ est difféomorphe par $\pi$ à un ouvert de $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$. ■

**P-5**) Lorsque $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont **de dimension $\boldsymbol{d}$, compactes, connexes et orientables**, montrer l'égalité :

$$\boxed{\mathrm{P}_{\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}}(t)=\mathrm{P}_{\boldsymbol{M}}(t)+\mathrm{P}_{\boldsymbol{N}}(t)-\mathrm{P}_{\mathbb{S}^d}(t)} \qquad (\diamond_5)$$

**Réponse :** La suite exacte longue de Mayer-Vietoris associée au recouvrement de $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ donné par las ouverts $U_{\boldsymbol{M}}$ et $U_{\boldsymbol{N}}$ est :

$$\longrightarrow H^j_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}) \longrightarrow H^j_{\mathrm{DR}}(U_{\boldsymbol{M}})\oplus H^j_{\mathrm{DR}}(U_{\boldsymbol{N}}) \longrightarrow H^j_{\mathrm{DR}}(U_{\boldsymbol{M}}\cap U_{\boldsymbol{N}}) \longrightarrow . \qquad (\mathbf{M\text{-}V}),$$

et nous avons montré dans la question **P-4** que $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ est connexe et orientable.
- **Lorsque** $d=1$**.** La variété $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ étant connexe, compacte et orientable, l'égalité ($\diamond_5$) résulte immédiatement (dans ce cas $\mathbb{S}^0$ consiste en *deux* points).
- **Lorsque** $d>1$**.** Les conclusions de la question **P-3** montrent que les derniers termes significatifs de (**M-V**) sont :

$$\begin{array}{ccccccc}
\to H^{d-1}_{\mathrm{DR}}(U_{\boldsymbol{M}})\oplus H^{d-1}_{\mathrm{DR}}(U_{\boldsymbol{N}}) & \to & H^{d-1}_{\mathrm{DR}}\big(U_{\boldsymbol{M}}\cap U_{\boldsymbol{N}}(\sim \mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R})\big) & \xrightarrow{c_{d-1}} & H^d_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}) & \to & \mathbf{0}\\
{\scriptstyle =}\big\downarrow & & {\scriptstyle \sim}\big\downarrow & & {\scriptstyle =}\big\downarrow & & \\
\to H^{d-1}_{\mathrm{DR}}(U_{\boldsymbol{M}})\oplus H^{d-1}_{\mathrm{DR}}(U_{\boldsymbol{N}}) & \xrightarrow{H(\delta)_{d-1}} & H^{d-1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{S}^{d-1})(\sim\mathbb{R}) & \xrightarrow{c_{d-1}} & H^d_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}) & \to & \mathbf{0}
\end{array}$$

où la connexité et orientabilité de $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ entraînent que $\dim_{\mathbb{R}}\big(H^d_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N})\big)=1$. La surjectivité de l'application de «*liaison*» $c_{d-1}$, implique alors son injectivité et partant la nullité du morphisme $H(\delta)_{d-1}$. Comme d'autre part, l'application

$$H^0_{\mathrm{DR}}(U_{\boldsymbol{M}})\oplus H^0_{\mathrm{DR}}(U_{\boldsymbol{N}}) \xrightarrow{H(\delta)_0} H^0_{\mathrm{DR}}(\mathbb{S}^{d-1})$$

est surjective, on voit que $H_{\mathrm{DR}}(\mathbb{S}^{d-1})$ n'intervient nullement pour la détermination des nombres de Betti de $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$, en degrés $r$ strictement intermédiaires (*i.e.* $0<r<d$). On a donc bien :

$$\begin{cases}\mathbf{b}_0(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N})=\mathbf{b}_d(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N})=1;\\ \mathbf{b}_r(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N})=\mathbf{b}_r(\boldsymbol{M})+\mathbf{b}_r(\boldsymbol{M}) \quad \text{pour tout } 0<r<d.\end{cases}$$

et l'égalité ($\diamond_5$) est démontrée.

**Remarque :** On observera que l'égalité $\mathrm{P}_{\boldsymbol{M}+\mathbb{S}^d}(t)=\mathrm{P}_{\boldsymbol{M}}(t)$ reflète le fait que les variétés $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{M}+\mathbb{S}^d$ sont en réalité *difféomorphes*. Nous n'aurons pas besoin de ce résultat, mais il est intéressant d'observer que l'opération de «*somme amalgamée*» définit une structure $\big(\mathbf{Or}(d),+,\mathbb{S}^d\big)$ de monoïde commutatif sur la "classe" $\mathbf{Or}(d)$ des variétés différentiables de dimension $d$, modulo difféomorphismes ; l'élément neutre étant alors la sphère $\mathbb{S}^d$. ■

**P-6**) Après avoir précisé les polynômes de Poincaré des produits de deux sphères, démontrez l'assertion suivante :

"*Soit $d$ un nombre naturel qui n'est pas multiple de 4. Un polynôme $a_0+a_1\,t+\cdots+a_{d-1}\,t^{d-1}+a_d\,t^d$ est le polynôme de Poincaré d'une variété différentiable compacte, orientable de dimension $d$, si et seulement si,*

$$\begin{cases} a_0>0\,; \quad \text{et} \quad a_j\in\mathbb{N} & \text{pour tout } j=0,\ldots,d\,;\\ a_j=a_{d-j}, & \text{pour tout } j=0,\ldots,d\,;\\ a_{d/2}\equiv 0 \pmod 2\,, & \text{lorsque } d\equiv 0 \pmod 2\,.\end{cases} \qquad (\diamond_6)$$

[7] En dimension un la question est intéressante puisque toute variété de dimension un est orientable.

**Réponse :** Le cas $d=1$ étant trivial, supposons $d>1$. Soit $0<r\leqslant\left[\frac{d}{2}\right]$, la question **P-2** montre alors que :

$$\mathrm{P}_{\mathbb{S}^r\times\mathbb{S}^{d-r}}(t)=(1+t^r)(1+t^{d-r})\,,$$

et donc

$$\begin{cases} \mathrm{P}_{\mathbb{S}^r\times\mathbb{S}^{d-r}}(t)=1+\cdots+t^r+\cdots+t^{d-r}+\cdots+t^d\,, & \text{lorsque } r<d/2\\ \mathrm{P}_{\mathbb{S}^{d/2}\times\mathbb{S}^{d/2}}(t)=1+\cdots+2\,t^{d/2}+\cdots+t^d\,, & \text{lorsque } d\equiv 0 \pmod 2\,, \end{cases}$$

où les points de suspension indiquent une suite (peut être vide) de zéros.

Ceci étant, le polynôme de Poincaré d'une variété compacte, orientable et de dimension $d$ vérifie bien les conditions ($\diamond_6$) à cause de la dualité de Poincaré et la conclusion de la question **P-1**.

Donnons-nous maintenant un polynôme $\boldsymbol{P}(t)=a_0+a_1\,t+\cdots+a_{d-1}\,t^{d-1}+a_d\,t^d$ vérifiant ($\diamond_6$). Nous allons montrer comment construire une variété compacte et orientable dont le polynôme de Poincaré est précisément $\boldsymbol{P}(t)$.

Soient $\boldsymbol{Z}$ une variété compacte et orientable de dimension $d$ et $r\in\mathbb{N}-0$ ; on notera :

- $0{\cdot}\boldsymbol{Z}:=\mathbb{S}^d$ et $\underline{0}{\cdot}\boldsymbol{Z}:=\varnothing$ ;
- $r{\cdot}\boldsymbol{Z}$ : la somme amalgamée de $r$ copies de $\boldsymbol{Z}$.
- $\underline{r}{\cdot}\boldsymbol{Z}$ : la réunion disjointe de $r$ copies de $\boldsymbol{Z}$.

([8]) Alors $\boldsymbol{P}(t)$ est le polynôme de Poincaré de la variété :

$$\boldsymbol{Z_P}=\Big[a_1{\cdot}\mathbb{S}^1{\times}\mathbb{S}^{d-1}+a_2{\cdot}\mathbb{S}^2{\times}\mathbb{S}^{d-2}+\cdots+a_s{\cdot}\mathbb{S}^s{\times}\mathbb{S}^{d-s}+\frac{a_{d/2}}{2}{\cdot}\mathbb{S}^{d/2}{\times}\mathbb{S}^{d/2}\Big]\coprod\underline{a_0-1}{\cdot}\mathbb{S}^d\,,$$

où $s$ vaut $\left[\frac{d}{2}\right]$ lorsque $d$ est impair (auquel cas $a_{d/2}=0$), et vaut $\frac{d}{2}-1$ autrement.

**Remarque :** Lorsque la dimension $d$ est un multiple de 4, les polynômes indiqués dans ($\diamond_6$) sont bien des polynômes de Poincaré de variétés compactes orientables de dimension $d$ ; mais il y en a bien d'autres comme le montre l'exemple de $\mathbb{P}_d(\mathbb{C})$.

Pour $d=4$, les nombres de Betti de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ sont $(1,0,1,0,1)$, et pour $d=8$ l'espace projectif « *quaternionique* » de dimension deux : $\mathbb{P}_2(\mathbb{H})$, fournit la suite nombres $(1,0,0,0,1,0,0,0,1)$. Il en découle que *tout* polynôme "palyndromique" à coefficients dans $\mathbb{N}$, de degré 4 ou 8, est le polynôme de Poincaré d'une variété différentiable compacte et orientée. La question de caractériser l'ensemble des polynômes de Poincaré, en dimensions multiples de quatre et supérieures à huit, est au-delà de la portée de notre cours. ∎

## § 2. Complexe de de Rham holomorphe

**A.** On se propose dans cet exercice de calculer le cohomologie du complexe de de Rham holomorphe du complémentaire d'une réunion d'hyperplans de coordonnées dans l'espace numérique $\mathbb{C}^n$. On munit l'espace $\mathbb{C}^n$ de coordonnées $\boldsymbol{x}:=(x_1,\ldots,x_n)$.

Si $U$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ on note $\Omega^0(U)$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions holomorphes sur $U$.

**1)** Décrire explicitement en terme de série les éléments de l'algèbre $\Omega^0(\mathbb{C}^n)$. Montrer que la cohomologie du complexe de de Rham $(\Omega^*(\mathbb{C}^n),d_*)$ est nulle en degré strictement positif et est de dimension un en degré zéro.

**Lemmes de Poincaré :** Nous allons travailler simultanément sur les catégories des variétés différentiables réelles et des variétés analytiques complexes. Le mot « *variété* » désignera un objet de l'une ou l'autre catégorie. De même, on notera $\Omega^*$ le complexe des formes différentielles réelles $\Omega^*_{\mathrm{diff}}$ ou celui des formes holomorphes (complexes) $\Omega^*_{\mathrm{hol}}$ et $H_{\mathrm{DR}}$ leurs cohomologies. Enfin, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant le cas.

**Lemme de base.** Soit $\boldsymbol{M}$ une variété et munissons $\mathbb{K}{\times}\boldsymbol{M}$ de la structure de variété produit. Considérons

[8] La classe $\mathbf{Or}(d)$ des variétés compactes orientables de dimension $d$, à difféomorphisme près, est munie de deux structures de monoïde commutatif, à savoir : $(\mathbf{Or}(d),\coprod,\varnothing)$ et $(\mathbf{Or}(d),+,\mathbb{S}^d)$.

le morphisme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} &\xrightarrow{\imath_z} \mathbb{K}\times\boldsymbol{M} \\ m &\longmapsto (z,m) \end{aligned}$$

où $z\in\mathbb{K}$ est arbitraire. Le morphisme en cohomologie

$$H(\imath_z)_* : H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}) \longrightarrow H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})$$

est alors *indépendant* de l'élément $z\in\mathbb{K}$.

**Démonstration.** Commençons par rappeler que la structure de variété de $\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}$ est donnée, par définition, par l'atlas construit à partir de l'atlas complet $\mathbb{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de $\boldsymbol{M}$, en prenant comme cartes les paires $(\mathbb{K}\times U_\alpha, \mathrm{id}_{\mathbb{K}}\times\varphi_\alpha)$, pour $\alpha\in\mathfrak{A}$. Les morphismes de transition sont alors "scindés", *i.e.* de la forme $\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\times(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})$. Ce scindage induit une décomposition *canonique* du complexe de de Rham $\Omega^*(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$. Pour montrer cela, supposons $\boldsymbol{M}$ de dimension $n$, notons $(x_1,\ldots,x_n)$ les coordonnées d'un point $\overline{x}$ de $\mathbb{K}^n$ et $z$ un élément de $\mathbb{K}$. Considérons une forme $\omega\in\Omega^r(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$ ; son représentant dans une carte $(\mathbb{K}\times U_\alpha, \mathrm{id}_{\mathbb{K}}\times\varphi_\alpha)$ s'écrit :

$$\omega_\alpha = \sum_{I=(i_1<\ldots<i_r)} A^I_\alpha(z,\overline{x})\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r} + \Bigg[\sum_{J=(i_1<\ldots<i_{r-1})} B^J_\alpha(z,\overline{x})\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{r-1}}\Bigg]\,dz\,, \qquad (6)$$

où $A^I_\alpha, B^J_\alpha\in\Omega^0(\mathbb{K}\times U_\alpha)$ et $I,J$ désignent des multi-indices $(i_1<\cdots<i_*)$, où $i_j=1,\ldots,n$. Cette expression admet la forme condensée suivante :

$$\omega_\alpha = \boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(z)\,dz\,, \qquad (7)$$

où $\boldsymbol{\mathcal{A}}(z)$ désigne le premier terme de (6) et peut être interprété comme une famille d'éléments de $\Omega^r\big(\varphi_\alpha(U_\alpha)\big)$ paramétrée par $z$ (et de manière analogue pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(z)$). De plus, si l'on fixe un point $\overline{x}_0\in\mathbb{K}^n$, les correspondances $z\mapsto\boldsymbol{\mathcal{A}}(z)(\overline{x}_0)\in\bigwedge^r\mathbb{K}^n$ et $z\mapsto\boldsymbol{\mathcal{B}}(z)(\overline{x}_0)\in\bigwedge^{r-1}\mathbb{K}^n$ sont respectivement différentiables ou analytiques.

Ceci étant, soit $(\mathbb{K}\times U_\beta, \mathrm{id}_{\mathbb{K}}\times\varphi_\beta)$ une autre carte ; le représentant $\omega_\beta$ sera contraint de satisfaire à l'égalité :

$$\omega_\alpha = \big(\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\times(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})\big)^*(\omega_\beta)\,,$$

et, compte tenu du scindage du morphisme de transition, on aura :

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z) = (\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})^*(\boldsymbol{\mathcal{A}}_\beta(z)) \quad\text{et}\quad \boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(z) = (\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})^*(\boldsymbol{\mathcal{B}}_\beta(z))\,.$$

On en tire les conséquences suivantes :

- Les familles $\{\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ et $\{\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(z)\,dz\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ définissent des éléments *canoniques* de $\Omega^r(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$, respectivement notés $\omega_{\mathbf{h}}$ et $\omega_{\mathbf{v}}$, et appelés « *composante horizontale* » et « *composante verticale* » de $\omega$. De même, la famille $\{\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(z)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ définit une forme de $\Omega^{r-1}(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$ et, enfin, pour chaque $z\in\mathbb{K}$ fixé, les familles $\{\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ et $\{\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(z)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ définissent des formes de $\Omega^r(\boldsymbol{M})$ et $\Omega^{r-1}(\boldsymbol{M})$ respectivement.

  On a donc une décomposition *directe* de $\Omega^*(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}))$ :

  $$\Omega^*(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})) = \Omega^*(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}))_{\mathbf{h}}\oplus\Omega^*(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}))_{\mathbf{v}} = \Omega^*(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}))_{\mathbf{h}}\oplus\Omega^{*-1}(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}))_{\mathbf{h}}\wedge dz\,,$$

  (la forme $dz$ étant l'élément de $\Omega^1(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$ défini par la projection canonique $\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}\to\mathbb{K}$, vue comme élément de $\Omega^0(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$).

  Notons $d_{\boldsymbol{M}}$ l'opérateur qui associe à $\omega\in\Omega^r(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$ l'élément $d_{\boldsymbol{M}}(\omega):=d(\omega)_{\mathbf{h}}$. L'inspection de $d_{\boldsymbol{M}}$, à l'aide de cartes, met en évidence les égalités suivantes :

  $$d(\omega) = d_{\boldsymbol{M}}(\omega) + \tfrac{\partial}{\partial z}(\omega)\wedge dz = d_{\boldsymbol{M}}(\omega_1) + \big[\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{M}}(\omega_2) + (-1)^{r-1}\tfrac{\partial}{\partial z}(\omega_1)\big]\wedge dz\,,$$

  où $\omega=\omega_1+\omega_2\wedge dz$ avec $\omega_i$ des formes horizontales. On vérifie, toujours grâce au scindage des application de transition, que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial z}$ a un sens en tant qu'opérateur sur $\Omega^*(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$ (dérivation de degré 0) et :

  $$\boxed{d(\omega)=0,\quad\text{si et seulement si,}\quad d_{\boldsymbol{M}}(\omega_1)=0\quad\text{et}\quad d_{\boldsymbol{M}}(\omega_2) = -\tfrac{\partial}{\partial z}(\omega_1)} \qquad (8)$$

▸ Pour chaque $z \in \mathbb{K}$ fixé, considérons le morphisme $\boldsymbol{M} \xrightarrow{\imath_z} \mathbb{K}\times\boldsymbol{M}$, défini par $m \mapsto (z, m)$. Soit $\omega \in \Omega^r(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})$ ; on pose $\omega = \omega_1 + \omega_2\, dz$, où les $\omega_i$ sont des formes horizontales. On a alors : $\imath_z^*(\omega) = \imath_z^*(\omega_1)$. La démonstration de ce lemme résultera alors de prouver que lorsque $\omega$ est un cocycle, les formes $\imath_{z_1}^*(\omega_1)$ et $\imath_{z_0}^*(\omega_1)$ son cohomologues, quels que soient $z_0, z_1 \in \mathbb{K}$.

Raisonnons dans un premier temps sur une carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de $\boldsymbol{M}$ avec le représentant de $\omega$, écrit sous la forme (7) : $\boldsymbol{\mathcal{A}}(z) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(z) \wedge dz$. Nous cherchons alors à comparer $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z_1)(\overline{x})$ et $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z_0)(\overline{x})$, pour tout $\overline{x} \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$. Or, pour chaque $\overline{x} \in \varphi(U_\alpha)$ fixe, l'application $z \mapsto \boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z)(\overline{x})$ est différentiable et à valeurs dans l'espace vectoriel de dimension finie $\bigwedge^r(\mathbb{K})$ (supposé normé) ; par conséquent, si $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est une application différentiable telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$ (facile à construire), on aura pour $\omega$ *cocyclique* :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z_1)(\overline{x}) - \boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(z_0)(\overline{x}) = & \int_0^1 \tfrac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(\gamma(t))(\overline{x})\right] dt = \int_0^1 \left[\tfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha(\gamma(t))\right](\overline{x})\, \gamma'(t)\, dt \\ = & -\int_0^1 d\left[\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(\gamma(t))\right](\overline{x})\, \gamma'(t)\, dt = -d\left[\int_0^1 \boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt\right](\overline{x})\,,\end{aligned}$$

d'après (8). Les théorèmes classiques de différentiabilité ou analyticité par rapport à $\overline{x}$ lors d'une intégration sur un compact par rapport à la variable $t$ *indépendante* des $x_i$, peuvent être appliqués pour conclure que la forme $\int_0^1 \boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$ est respectivement différentiable ou analytique suivant le contexte de travail. Enfin, la même analyse sur une carte $(U_\beta, \varphi_\beta)$ aurait donné :

$$\int_0^1 \boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha)^* \left[\boldsymbol{\mathcal{B}}_\beta(\gamma(t))\right] \gamma'(t)\, dt = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha)^* \left[\int_0^1 \boldsymbol{\mathcal{B}}_\beta(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt\right].$$

Ces intégrales dans les images des cartes de $\boldsymbol{M}$ définissent donc une forme "globale" $\nu \in \Omega^*(\boldsymbol{M})$ telle que $\imath_{z_1}^*\omega - \imath_{z_0}^*\omega = d(\nu)$. ■

**Corollaire [Lemme d'homotopie].** Soit $\boldsymbol{M}$ une variété et munissons $\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}$ de la structure de variété produit. Considérons la suite de morphismes :

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{M} & \xrightarrow{\ \imath_z\ } & \mathbb{K}\times\boldsymbol{M} & \xrightarrow{\ h\ } & \boldsymbol{M} \\ m & \longmapsto & (z, m) & & \end{array}$$

où $z \in \mathbb{K}$ est arbitraire, et notons $h_z : \boldsymbol{M}$, l'application composée $h \circ \imath_z$, *i.e.* $h_z(m) = h(z, m)$.

Le morphisme en cohomologie

$$H(h_z)_* : H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \longrightarrow H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M})\,,$$

est alors *indépendant* de l'élément $z \in \mathbb{K}$.

**Démonstration :** Le morphisme $H(h_z)_*$ est la composition $H(\imath_z)_* \circ H(h)_*$ de deux morphismes indépendants de $z \in \mathbb{K}$. ■

**Corollaire [Lemme de Poincaré].** Soit $\boldsymbol{M}$ une variété et munissons $\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}$ de la structure de variété produit. Le morphisme

$$H(\pi)_* : H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \to H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{K}\times\boldsymbol{M})\,,$$

induit par la projection canonique $\pi : \mathbb{K}\times\boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{M}$, est un *isomorphisme*.

**Démonstration :** On a $\mathrm{id}_{\boldsymbol{M}} = \pi \circ \imath_0$, ce qui entraîne que $H(\imath_0) \circ H(\pi) = \mathrm{id}$ et, par conséquent, que $H(\pi)$ est *injectif*.

D'autre part $\imath_0 \circ \pi$ est le morphisme de $\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}$ donné par $(z, m) \mapsto (0, m)$, et si nous considérons $h : \mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\boldsymbol{M} \to \mathbb{K}\times\boldsymbol{M}$ défini par $(z_1, z_2, m) \mapsto (z_1\, z_2, m)$ ; l'application $\imath_0 \circ \pi$ s'identifie à $h_0$. Le lemme d'homotopie justifie alors l'égalité : $H(\imath_0 \circ \pi) = H(h_1)(= H(\mathrm{id}_{\mathbb{K}\times\boldsymbol{M}}))$, et $H(\pi)$ est *surjectif*. ■

**2)** On note par $U_i$ le complémentaire dans l'espace $\mathbb{C}^n$ de l'hyperplan d'équation $x_i = 0$.

Décrire explicitement en terme de série de Laurent les éléments de l'algèbre $\Omega^0(U_i)$. Montrer que la cohomologie du complexe de de Rham $(\Omega^*(U_i), d_*)$ est nulle en degré strictement plus grand que un, est de dimension un en degré zéro et de dimension un degré un. Décrire une base de la cohomologie de degré un.

**3**) (Les conclusions de cette question n'interviendront pas dans **B**.) Soit un entier $k \leqslant n$. On note $U^k$ le complémentaire dans l'espace $\mathbb{C}^n$ des hyperplans d'équations $x_i = 0$, pour $i = i, \ldots, k$. Décrire explicitement en terme de série de Laurent les éléments de l'algèbre $\Omega^0(U^k)$. Montrer que la cohomologie du complexe de de Rham $(\Omega^*(U^k), d_*)$ est nulle en degré strictement plus grand que $k$. Décrire des bases des espaces de cohomologie du complexe de de Rham $(\Omega^*(U^k), d_*)$ en degré $q \leqslant k$. Quelles sont alors leurs dimensions.

**B.** Soit $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ la droite projective complexe munie de son recouvrement naturel $\mathsf{U} := \{U_1, U_2\}$ complémentaires des pôles nord et sud. On se propose de montrer que le complexe de Čech de ce recouvrement à valeurs dans le complexe de de Rham holomorphe calcule les nombres de Betti de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Pour chaque ouvert $U$ notons $(\Omega^*_{\text{hol}}(U), d_*)$ le complexe de de Rham holomorphe et $(\Omega^*_{\text{diff}}(U), d_*)$ le complexe de de Rham des formes différentielles à valeurs complexes. On rappelle que $(\Omega^*_{\text{hol}}(U), d_*)$ est un sous-complexe de $(\Omega^*_{\text{diff}}(U), d_*)$.

**1**) Montrer que l'inclusion

$$(\Omega^*_{\text{hol}}(U_i), d_*) \subset (\Omega^*_{\text{diff}}(U_i), d_*)\,,$$

est un quasi-isomorphisme pour $i = 1, 2$.

**2**) Notons $U_{12}$ l'intersection de $U_1$ et de $U_2$ qui est donc le plan complexe privé de l'origine $\mathbb{C}^*$. Montrer que l'inclusion du cercle $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{C}^*$ induit un isomorphisme en cohomologie de de Rham des formes différentielles à coefficients complexes.

**3**) Montrer en utilisant l'exercice **A** que l'inclusion

$$(\Omega^*_{\text{hol}}(U_{12}), d_*) \subset (\Omega^*_{\text{diff}}(U_{12}), d_*)\,,$$

est un quasi-isomorphisme.

**4**) Expliciter les complexes doubles

$$\mathbf{C}^\bullet(\mathsf{U}, \Omega^*_{\text{hol}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}))\,, \quad \text{et} \quad \mathbf{C}^\bullet(\mathsf{U}, \Omega^*_{\text{diff}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}))\,.$$

Déduire de **1)** et **3)** que l'inclusion naturelle

$$\mathbf{C}^\bullet(\mathsf{U}, \Omega^*_{\text{hol}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})) \subset \mathbf{C}^\bullet(\mathsf{U}, \Omega^*_{\text{diff}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}))\,,$$

induit un isomorphisme entre les espaces de cohomologie des complexes simples associés.

**5**) En déduire que les dimensions des espaces de cohomologie du complexe simple associé au complexe double

$$\mathbf{C}^\bullet(\mathsf{U}, \Omega^*_{\text{hol}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}))\,,$$

fournit les nombres de Betti de la droite projective complexe.

———×———