Un théorème de points fixes de Lefschetz en cohomologie p-adique sans hypothèse de propreté

Alberto Arabia[*]

Théorème 1. *Soit $\boldsymbol{X}$ un schéma lisse séparé de type fini sur un corps fini $\boldsymbol{k}$. Soit $\theta : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ un automorphisme, d'ordre fini L relativement premier à $q := |\boldsymbol{k}|$, et agissant sans point fixe, i.e. $\theta(x) \neq x$, pour tout un point fermé $x \in \overline{\boldsymbol{X}} := \overline{\boldsymbol{k}} \otimes \boldsymbol{X}$. Alors*

$$0 = \chi(\theta : H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})) := \sum\nolimits_k (-1)^k \operatorname{tr}_{\boldsymbol{K}} \big(\theta : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K}) \to H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})\big).$$

Quelques notations générales

- $\boldsymbol{k} := \mathbb{F}_q$ où q est une puissance d'un nombre premier p.
- $\boldsymbol{V}$: anneau de valuation discrète séparé complet d'inégales caractéristiques, d'idéal maximal (π), de corps résiduel $\boldsymbol{k}$, et de corps de fractions $\boldsymbol{K}$ avec $\mathrm{car}(\boldsymbol{K}) = 0$.
- $\overline{\boldsymbol{k}}$ et $\overline{\boldsymbol{K}}$: les clôtures algébriques de $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{K}$ respectivement.
- $\boldsymbol{X}$ variété algébrique non singulière sur $\boldsymbol{k}$, *i.e.* un schéma lisse, séparé et de type fini sur $\boldsymbol{k}$. La notation "$x \in \boldsymbol{X}$" signifiera que x est un point *fermé* de $\boldsymbol{X}$.
- $\boldsymbol{X}(\!(r)\!)$:=points fermés de $\overline{\boldsymbol{X}} := \overline{\boldsymbol{k}} \otimes \boldsymbol{X}$ rationnels sur $\mathbb{F}_{q^r}$. Le cardinal de $\boldsymbol{X}(\!(r)\!)$ est noté $N(r)$, et même $N(\boldsymbol{X}, r)$ si l'indication de $\boldsymbol{X}$ s'avère nécessaire.
- $\boldsymbol{G} := \langle\theta\rangle$: groupe des automorphismes de $\boldsymbol{X}$ engendré par θ, donc de cardinal L.

Indications pour la preuve du Théorème 1

§ 1) Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe fini de cardinal L. Pour tout corps $\boldsymbol{L}$ algébriquement clos de caractéristique, ou bien nulle, ou bien positive et première à L, la catégorie des $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{G}]$-modules de type fini est **semi-simple**. Si le groupe $\boldsymbol{G}$ est de plus cyclique de générateur θ, les $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{G}]$-modules irréductibles sont de dimension 1 et sont donnés par les caractères $\theta^i \mapsto u^i \in \boldsymbol{L}$, où u est un racine L-ième de l'unité.

Ces affirmations sont également vraies sur un anneau intègre $\boldsymbol{L}$ où l'entier L est inversible et où le polynôme $X^L - 1$ est complètement réductible. Plus précisément :

Proposition. *Soit L un entier positif. Soit $\boldsymbol{L}$ un anneau intègre contenant les L racines L-ièmes de l'unité et tel que l'entier L y est inversible. Fixons une racine L-ième primitive de l'unité $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}$. Soit $\boldsymbol{G} = \langle\theta\rangle$ un groupe cyclique d'ordre L. Pour tout $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{G}]$-module $\boldsymbol{M}$ (de type fini ou non) et tout $m \in [0, L-1]$, on définit le sous-module des éléments de* «poids m» *par $\boldsymbol{M}_m := \big\{v \in \boldsymbol{M} \;\big|\; \theta(v) = \boldsymbol{u}^m v\big\}$. On a alors la décomposition en somme directe*

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{M}_{L-1}.$$

Un élément $v \in \boldsymbol{M}$ se exprime donc manière unique sous la forme $v = v_0 + \cdots + v_{L-1}$, avec $v_m \in \boldsymbol{M}_m$. L'élément v_m est la «composante de poids m de v», *elle est donnée*

[*]CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 6e étage, bureau 6D15, 75013 Paris.
Adresse électronique : arabia@math.jussieu.fr

par la formule

$$v_m = \frac{1}{L}\Big(1 + \Big(\frac{\theta}{\boldsymbol{u}^m}\Big) + \Big(\frac{\theta}{\boldsymbol{u}^m}\Big)^2 + \cdots + \Big(\frac{\theta}{\boldsymbol{u}^m}\Big)^{L-1}\Big)(v)\,.$$

Dans la suite, quitte à faire une extension finie de $\boldsymbol{k}$ (ce qui ne change pas la validité du Théorème **1**, nous supposons que $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{V}$ contiennent les racines L-ièmes de l'unité. La proposition précédente s'appliquera alors à $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{K}$.

§ 2) Représentation régulière gauche de $\boldsymbol{G}$

Soit $\boldsymbol{L}$ un anneau vérifiant les conditions de la Proposition du paragraphe précédent. Pour tout groupe fini $\boldsymbol{G}$, soit $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{G}]$ l'anneau du groupe $\boldsymbol{G}$ à coefficients dans $\boldsymbol{L}$ et notons $\{\delta_h \mid h \in \boldsymbol{G}\}$ sa base canonique. On fait agir $\boldsymbol{G}$ sur $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{G}]$ par translations à gauche, *i.e.* , pour $g \in \boldsymbol{G}$ on pose $g \cdot \delta_h := \delta_{gh}$ pour tout $g \in \boldsymbol{G}$; c'est la « *représentation régulière (gauche) de* $\boldsymbol{G}$ ».

Lemme A

a) *Pour tout groupe fini* $\boldsymbol{H}$ *et tout* $h \in \boldsymbol{H}$ *tel que* $h \neq \mathbf{id}$, *on a*

$$\mathrm{tr}_{\boldsymbol{K}}(h : \boldsymbol{L}[\boldsymbol{H}] \to \boldsymbol{L}[\boldsymbol{H}]) = 0\,.$$

*En particulier, le Théorème **1** est vérifié lorsque* $\dim_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{X}) = 0$.

b) *Soit* $\boldsymbol{G}$ *cyclique d'ordre* L *et soit* $\boldsymbol{M}$ *un* $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{G}]$*-module de type fini. Alors,* $\boldsymbol{M}$ *est une somme de représentations régulières si, et seulement si,*

$$\dim_{\boldsymbol{L}}\big(\boldsymbol{M}_0\big) = \dim_{\boldsymbol{L}}\big(\boldsymbol{M}_1\big) = \cdots = \dim_{\boldsymbol{L}}\big(\boldsymbol{M}_{L-1}\big)\,,$$

où $\boldsymbol{M}_m$ *est le sous-*$\boldsymbol{G}$*-module de* $\boldsymbol{M}$ *des éléments de poids* m.

Conclusion :

"*Compte tenu de l'assertion* (a), *nous supposerons dans la suite que* $\boldsymbol{X}$ *est équidimensionnel de dimension* $n \geqslant 1$."

§ 3) Réduction au cas affine

Soit $\mathscr{W} := \{W_1, \ldots, W_\alpha\}$ un recouvrement fini de $\boldsymbol{X}$ par des ouverts affines. Saturons la famille $\mathscr{W}$ par l'action de θ, *i.e.* , posons $W_{i,j} := \theta^j(W_i)$ et soit $\boldsymbol{\mathscr{U}} := \{U_1, \ldots, U_\beta\}$ la famille des ouverts $W_{i,j}$ réindexée suivant un ordre linéaire. L'action de θ sur les membres de $\boldsymbol{\mathscr{U}}$ correspond alors à une action sur l'ensemble des indices $\{1, \ldots, \beta\}$. Pour tout multi-indice $i_1 i_2 \ldots i_k$, avec $i_j \in [1, \ldots, \beta]$, notons $\theta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ la restriction de θ à l'ouvert $U_{i_1 i_2 \ldots i_k} := U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$. On a un isomorphisme

$$\theta_{i_1 i_2 \ldots i_k} : U_{i_1 i_2 \ldots i_k} \xrightarrow[\simeq]{} U_{\theta(i_1)\theta(i_2)\ldots\theta(i_k)}\,. \tag{$*$}$$

Notons $\Omega^*_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ le complexe de formes différentielles †-adiques de $(U_{i_1 i_2 \ldots i_k}/\boldsymbol{K})$. Le morphisme $(*)$ induit un isomorphisme de complexes

$$\theta^*_{i_1 i_2 \ldots i_k} : \Omega^*_{\theta(i_1)\theta(i_2)\ldots\theta(i_k)} \longrightarrow \Omega^*_{i_1 i_2 \ldots i_k} \tag{$**$}$$

Soit maintenant

$$\mathbf{0} \to \Omega^*(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K}) \to \textstyle\prod_i \Omega^*_i \to \prod_{i_1 i_2} \Omega^*_{i_1 i_2} \to \prod_{i_1 i_2 i_3} \Omega^*_{i_1 i_2 i_3} \to \cdots \tag{$\diamond$}$$

le bicomplexe de Čech-de Rham associé au recouvrement $\boldsymbol{\mathscr{U}}$. Les morphismes $(**)$

donnent lieu a un morphisme

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{0} & \longrightarrow & \Omega^*(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K}) & \longrightarrow & \prod_i \Omega^*_i & \longrightarrow & \prod_{i_1 i_2} \Omega^*_{i_1 i_2} & \longrightarrow & \prod_{i_1 i_2 i_3} \Omega^*_{i_1 i_2 i_3} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & {\scriptstyle \theta^*}\big\downarrow & & {\scriptstyle \Pi_i \theta^*_i}\big\downarrow & & {\scriptstyle \Pi_{i_1 i_2}\theta^*_{i_1 i_2}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \Pi_{i_1 i_2 i_3}\theta^*_{i_1 i_2 i_3}}\big\downarrow & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \Omega^*(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K}) & \longrightarrow & \prod_i \Omega^*_i & \longrightarrow & \prod_{i_1 i_2} \Omega^*_{i_1 i_2} & \longrightarrow & \prod_{i_1 i_2 i_3} \Omega^*_{i_1 i_2 i_3} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

qui est clairement un morphisme de bicomplexes de Čech-de Rham, et qui définit une action de θ sur les termes successifs $(\mathbb{E}_r, d_r)$ de la suite spectrale de Čech-deRham associé au bicomplexe $(\diamond)$ ([A-M] § 6.5). Or, le complexe $(\mathbb{E}_r, d_r)$ est de dimension finie sur $\boldsymbol{K}$ pour tout $r \geqslant 2$, de sorte que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\theta)$ y est bien définie. Les propriétés usuelles de conservation de cette caractéristique font qu'il suffit que $\chi(\theta)$ soit nulle sur le terme $\mathbb{E}_2$ pour qu'elle soit nulle sur $\mathbb{E}_\infty$ et donc sur $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})$. Or, les termes de $\mathbb{E}_2$ sont les produits finis $\prod_{i_1 i_2 \cdots i_k} H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 i_2 \ldots i_k}/\boldsymbol{K})$, et nous devons évaluer la caractéristique d'Euler-Poincaré des morphismes :

$$\Theta_k : \prod_{i_1 i_2 \cdots i_k} H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 i_2 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}) \to \prod_{i_1 i_2 \cdots i_k} H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 i_2 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}),$$

où nous avons noté $\Theta_k := \prod_{i_1 i_2 \cdots i_k} \theta^*_{i_1 i_2 \cdots i_k}$. En considérant les orbites de l'action de θ sur l'ensemble $\mathbb{I}_k$ de multi-indices non ordonnés $\{i_1 \ldots i_k\}$ avec $i_j \in [1, \ldots, \beta]$, on décompose les termes de $\mathbb{E}_2$ suivant l'égalité

$$\prod_{i_1 i_2 \cdots i_k} H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 i_2 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}) = \prod_{I \in \mathbb{I}_k/\boldsymbol{G}} \left(\prod_{\{i_1 \ldots i_k\} \in I} H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}) \right),$$

qui induit la décomposition des morphismes Θ_k :

$$\Theta_k = \prod_{I \in \mathbb{I}_k/\boldsymbol{G}} \Theta_I \,, \quad \text{avec} \quad \Theta_I := \prod_{\{i_1 \ldots i_k\} \in I} \theta_{i_1 \ldots i_k} \,.$$

Nous sommes ainsi emmenés à considérer pour chaque $I \in \mathbb{I}_k/\boldsymbol{G}$, le morphisme

$$\Theta_I : \prod_{\{i_1 i_2 \cdots i_k\} \in I} H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 i_2 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}) \to \prod_{\{i_1 i_2 \cdots i_k\} \in I} H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 i_2 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}).$$

Lorsque $I \in \mathbb{I}_k/\boldsymbol{G}$ n'est pas une orbite ponctuelle, *i.e.* lorsque $\theta\{i_1 \ldots i_k\} \neq \{i_1 \ldots i_k\}$, la trace de Θ_I agissant en chaque degré cohomologique i :

$$\Theta_I : \sum_{\{i_1 \ldots i_k\} \in I} H^i_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}) \to \sum_{\{i_1 \ldots i_k\} \in I} H^i_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 \ldots i_k}/\boldsymbol{K})$$

est déjà nulle, et la caractéristique d'Euler-Poincaré est donc, *a fortiori*, nulle.

Conclusion :

"La nullité de $\chi(\theta : H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K}))$ résulte de la nullité de $\chi(\theta : H^*_{\mathrm{DR}}(U_{i_1 \ldots i_k}/\boldsymbol{K}))$ lorsque $\theta\{i_1 \ldots i_k\} = \{i_1 \ldots i_k\}$, cas où l'ouvert $U_{i_1 \ldots i_k}$ est affine et θ-stable."

On comprend ainsi qu'il suffit de prouver le Théorème **1** pour les variétés affines pour l'avoir en toute généralité.

§ 4) **Réduction au cas des actions libres** Pour tout idéal $\mathfrak{P} \subseteq \boldsymbol{A}$, on appelle ([1])

- « *groupe de décomposition de* $\mathfrak{P}$ », le groupe $\boldsymbol{G}_d(\mathfrak{P}) := \{g \in \boldsymbol{G} \mid g(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\}$,

[1] Voir [SGA-1] § 2 de l'exposé V, et § 6.3 de [Mo].

- «*groupe d'inertie de* $\mathfrak{P}$», le groupe $\boldsymbol{G}_i(\mathfrak{P}) := \{g \in \boldsymbol{G}_d(\mathfrak{P}) \mid g = \mathbf{id} \pmod{\mathfrak{P}}\}$.

L'action de $\boldsymbol{G}$ sur $\boldsymbol{X}$ est dite «*libre*» lorsque les groupes d'inertie des idéaux premiers sont tous réduits à l'identité. Dans ce cas, le morphisme canonique $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}/\boldsymbol{G} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{G}})$ est étale d'après un théorème de Grothendieck (*loc.cit.* corollaire 2.3). De même, mais ceci est trivial, l'action ensembliste de $\boldsymbol{G}$ sur l'ensemble des points fermés de $\overline{\boldsymbol{X}}$ est libre, *i.e.* $\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(x) = \{\mathbf{id}\}$ pour tout $x \in \overline{\boldsymbol{X}}$.

Dans le Théorème **1**, le morphisme θ agit sans point fixe sur $\boldsymbol{X}$, mais il est possible que certains des itérés $\theta^s \neq \mathbf{id}$ ne vérifient pas cette condition, autrement dit, il se peut que le groupe $\boldsymbol{G} := \langle\theta\rangle$ n'agisse pas librement sur $\boldsymbol{X}$.

Monsky montre dans la preuve du théorème 6.3 de [Mo], l'existence d'une stratification algébrique de $\overline{\boldsymbol{X}}$ telle que θ agit librement sur chaque strate. On a donc une partition finie de $\overline{\boldsymbol{X}}$ en parties localement fermées $\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_N$ de codimensions dans $\overline{\boldsymbol{X}}$ respectivement $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_N$, telles que $\boldsymbol{Y}_i$ est une variété non singulière, définie sur une extension finie $\boldsymbol{k}_i$ de $\boldsymbol{k}$, et stable sous θ dont l'action est *libre*.

Quitte à remplacer $\boldsymbol{k}$ par une extension finie convenable nous pouvons supposer dans ce qui précède que $\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{k}$, cela n'affecte pas la validité du Théorème.

Si nous supposons maintenant le Théorème **1** démontré pour toute les variétés affines non singulières sur $\boldsymbol{k}$ munies d'une action libre, il sera automatiquement vérifié par chaque $\boldsymbol{Y}_i$ grâce à la conclusion du § (3). Le Théorème est donc vérifié par $U_0 := \boldsymbol{Y}_0$, et s'il est vérifié par l'un des ouverts $\boldsymbol{U}_i := \boldsymbol{Y}_0 \cup \cdots \cup \boldsymbol{Y}_i$, on pose $\boldsymbol{U}_{i+1} = \boldsymbol{U}_i \cup \boldsymbol{Y}_{i+1}$ et à l'aide de la suite exacte longue de Gysin ([A-M] § 14.2) pour la paire $(\boldsymbol{Y}_{i+1} \subseteq \boldsymbol{U}_{i+1})$:

$$\to H_{\mathrm{DR}}^{\bullet - 2\,\mathrm{codim}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y}_{i+1}}(\boldsymbol{Y}_{i+1}/\boldsymbol{K}) \to H_{\mathrm{DR}}^{\bullet}(\boldsymbol{U}_{i+1}/\boldsymbol{K}) \to H_{\mathrm{DR}}^{\bullet}(\boldsymbol{U}_i/\boldsymbol{K}) \to ,$$

on conclut que le théorème est aussi vérifié par $\boldsymbol{U}_{i+1}$, et, par récurrence, par $\boldsymbol{U}_N = \boldsymbol{X}$.

§ 5) Comme conséquence de § (3) et § (4), le cas critique à considérer est celui où $\boldsymbol{X}$ est un schéma affine lisse sur $\boldsymbol{k}$, muni d'un automorphisme d'ordre fini L, dont l'action est libre. Nous sommes donc emmenés à prouver théorème suivant.

Théorème 1′. *Soit* $\boldsymbol{X}$ *un schéma affine lisse défini sur un corps fini* $\boldsymbol{k}$ *de cardinal* q. *Soit* $\theta : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ *un automorphisme d'ordre fini* $L \neq 1$, *relativement premier à* q, *tel que le groupe* $\boldsymbol{G} := \langle\theta\rangle$ *agit librement sur* $\boldsymbol{X}$. *Alors*

$$0 = \chi(\theta : H_{\mathrm{DR}}^*(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})) := \sum\nolimits_k (-1)^k \,\mathrm{tr}_{\boldsymbol{K}} \big(\theta : H_{\mathrm{DR}}^k(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K}) \to H_{\mathrm{DR}}^k(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})\big).$$

§ 6) **Une première équivalence**

Notons

- $\boldsymbol{A}$ l'algèbre des fonctions régulières de $\boldsymbol{X}$;
- $\theta : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ l'automorphisme d'ordre $L \neq 1$ de l'énoncé du théorème ;
- $\boldsymbol{G} := \langle\theta\rangle$ le groupe d'automorphismes de $\boldsymbol{A}$ engendré par θ.
- $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{k}$ (resp. $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{K}$) racine L-ième primitive de 1, fixée une fois pour toutes ;
- $\boldsymbol{A}_m$ le sous-$\boldsymbol{k}[\boldsymbol{G}]$-module des fonctions de poids m ;
- $\boldsymbol{\mathcal{F}} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$, $x \mapsto x^q$, le morphisme de Frobenius relatif à $\boldsymbol{k}$.

Comme le groupe $\boldsymbol{G}$ opère naturellement sur la cohomologie de de Rham †-adique de $\boldsymbol{A}$, celle-ci se décompose en sous-espaces de poids :

$$H_{\mathrm{DR}}^*(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K}) = H_{\mathrm{DR}}^*(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_0 \oplus \cdots \oplus H_{\mathrm{DR}}^*(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_{L-1}, \qquad \text{(Eq.1)}$$

où $H_{\mathrm{DR}}^*(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_m = h^*\big(\Omega^*(\widetilde{\boldsymbol{A}}^\dagger/\boldsymbol{K})_m, d\big)$ est de dimension finie car $\boldsymbol{K}$-sous-espace vectoriel de $H_{\mathrm{DR}}^*(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})$, lui-même de dimension finie.

Notons pour $m = 0, 1 \ldots, L-1$:

$$\chi_m(\boldsymbol{A}) := \sum_k (-1)^k \dim_{\boldsymbol{K}} \left(H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_m \right),$$

et pour tout morphisme de $\boldsymbol{k}$-algèbre $\phi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$:

$$\chi(\phi) := \sum_k (-1)^k \operatorname{tr}_{\boldsymbol{K}} \left(\phi_* : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K}) \to H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K}) \right).$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} \chi(\theta^0) \\ \chi(\theta^1) \\ \chi(\theta^2) \\ \vdots \\ \chi(\theta^{L-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & (\boldsymbol{u}) & (\boldsymbol{u})^2 & \ldots & (\boldsymbol{u})^{L-1} \\ 1 & (\boldsymbol{u}^2) & (\boldsymbol{u}^2)^2 & \ldots & (\boldsymbol{u}^2)^{L-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (\boldsymbol{u}^{L-1}) & (\boldsymbol{u}^{L-1})^2 & \ldots & (\boldsymbol{u}^{L-1})^{L-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_0(\boldsymbol{A}) \\ \chi_1(\boldsymbol{A}) \\ \chi_2(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \chi_{L-1}(\boldsymbol{A}) \end{pmatrix} \tag{Eq.2}$$

Où la matrice de Vandermonde, qui à la forme particulière

$$W(\boldsymbol{u}) := (\boldsymbol{u}^{(i-1)(j-1)})_{1 \leqslant i \leqslant L, 1 \leqslant j \leqslant L}, \tag{Eq.3}$$

est inversible d'inverse la matrice $\frac{1}{L} W(\boldsymbol{v})$ avec $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{u}^{-1}$. Par conséquent,

$$\begin{pmatrix} \chi_0(\boldsymbol{A}) \\ \chi_1(\boldsymbol{A}) \\ \chi_2(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \chi_{L-1}(\boldsymbol{A}) \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & (\boldsymbol{v}) & (\boldsymbol{v})^2 & \ldots & (\boldsymbol{v})^{L-1} \\ 1 & (\boldsymbol{v}^2) & (\boldsymbol{v}^2)^2 & \ldots & (\boldsymbol{v}^2)^{L-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (\boldsymbol{v}^{L-1}) & (\boldsymbol{v}^{L-1})^2 & \ldots & (\boldsymbol{v}^{L-1})^{L-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi(\theta^0) \\ \chi(\theta^1) \\ \chi(\theta^2) \\ \vdots \\ \chi(\theta^{L-1}) \end{pmatrix}.$$

On en déduit aussitôt le lemme suivant.

Lemme B. *Sous les hypothèses en cours, les assertions suivantes sont équivalentes.*

$$\begin{aligned} &\text{a)} \qquad 0 = \chi(\theta^1) = \chi(\theta^2) = \cdots = \chi(\theta^{L-1}); \\ &\text{b)} \ \chi_0(\boldsymbol{A}) = \chi_1(\boldsymbol{A}) = \chi_2(\boldsymbol{A}) = \cdots = \chi_{L-1}(\boldsymbol{A}). \end{aligned}$$

auquel cas $\chi_m(\boldsymbol{A}) = \chi(\theta^0)/L$.

Indication. Les sommes $1 + (\boldsymbol{u}^j) + \cdots + (\boldsymbol{u}^j)^{L-1}$ sont nulles lorsque $j \neq 0 \pmod{L}$, car $\left(1 + (\boldsymbol{u}^j) + \cdots + (\boldsymbol{u}^j)^{L-1}\right)(1 - \boldsymbol{u}^j) = 1 - \boldsymbol{u}^{jL} = 0$, alors que $(1 - \boldsymbol{u}^j) \neq 0$. ∎

Le dernier lemme affirme que le **Théorème 1′** équivaut au théorème suivant.

Théorème 2. *Sous les hypothèses du Théorème* **1′**, *soit*

$$H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K}) = H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_0 \oplus \cdots \oplus H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_{L-1}, \tag{Eq.4}$$

la décomposition de la cohomologie de $\boldsymbol{X}$ *en sous-espaces de poids, et notons pour* $m = 0, \ldots, L-1$,

$$\chi(H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_m) := \textstyle\sum_k (-1)^k \dim_{\boldsymbol{K}} \left(H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_m \right).$$

Alors,

$$\begin{cases} \chi\big(H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_0\big) = \chi\big(H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_1\big) = \cdots = \chi\big(H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_{L-1}\big) \\ \chi\big(H_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})\big) = L \cdot \chi\big(H_{\mathrm{DR}}((\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G})/\boldsymbol{K})\big). \end{cases}$$

§7) Commentaire sur le cas $\dim(\boldsymbol{X}) = 0$

Lorsque $\dim(\boldsymbol{X})=0$, la cohomologie de de Rham †-adique est concentrée en degré 0 et c'est une somme directe de copies de $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{G}]$, la représentation régulière gauche de $\boldsymbol{G}$. Le théorème **2** est alors une simple reformulation de l'assertion (b) du lemme **A** du paragraphe § (2).

§ 8) Une deuxième équivalence

Notons suivant [Mo]-§ 6, pour tous $j=0,1\dots,L-1$ et $r\in\mathbb{N}$ donnés

$$\begin{cases} J(j,r) := \text{ idéal de } \boldsymbol{A} \text{ engendré par les différences } \theta^j(a)-\mathfrak{F}^r(a), \text{ où } a\in\boldsymbol{A},\\ N(j,r) := \dim_{\boldsymbol{k}}\big(\boldsymbol{A}/J(j,r)\big),\\ L(j,r) := \sum_k (-1)^k\operatorname{tr}_{\boldsymbol{K}}\big(\theta_*^j(q^n\mathfrak{F}_*^{-r}) : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})\to H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})\big),\end{cases}$$

où $n:=\dim\boldsymbol{X}$.

Monsky démontre (*loc.cit.*, § 6.1) l'égalité

$$\boxed{N(j,r)=L(j,r)} \tag{Eq.5}$$

avec comme seules hypothèses le fait que $\boldsymbol{A}$ est lisse équidimensionnelle de dimension n et que $\boldsymbol{G}$ est fini (de cardinal L quelconque !) opérant librement sur $\boldsymbol{X}$.

Dans le paragraphe § (6) nous avons noté, pour chaque poids $m=0,1\dots,L-1$ et pour tout $r\in\mathbb{N}$:

$$\chi_m(\mathfrak{F}_*^{-r}) := \sum\nolimits_k (-1)^k\operatorname{tr}_{\boldsymbol{K}}\big(q^n\mathfrak{F}_*^{-r} : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_m\to H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_m\big).$$

L'égalité de Monsky (Eq.5), s'écrit alors :

$$N(j,r)=L(j,r):=\chi_0(\mathfrak{F}_*^{-r})+(\boldsymbol{u}^j)\chi_1(\mathfrak{F}_*^{-r})+(\boldsymbol{u}^j)^2\chi_2(\mathfrak{F}_*^{-r})+\cdots+(\boldsymbol{u}^j)^{(L-1)}\chi_{L-1}(\mathfrak{F}_*^{-r}),$$

soit

$$\begin{pmatrix} N(0,r)\\ N(1,r)\\ N(2,r)\\ \vdots\\ N(L-1,r)\end{pmatrix} = W(\boldsymbol{u})\begin{pmatrix}\chi_0(\mathfrak{F}_*^{-r})\\ \chi_1(\mathfrak{F}_*^{-r})\\ \chi_2(\mathfrak{F}_*^{-r})\\ \vdots\\ \chi_{L-1}(\mathfrak{F}_*^{-r})\end{pmatrix} \tag{Eq.6}$$

où $W(\boldsymbol{u})$ est a matrice de Vandermonde introduite dans (6)-(Eq.3).

On en déduit l'égalité de séries formelles

$$\begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant1} N(0,r)\frac{t^r}{r}\\ \sum_{r\geqslant1} N(1,r)\frac{t^r}{r}\\ \sum_{r\geqslant1} N(2,r)\frac{t^r}{r}\\ \vdots\\ \sum_{r\geqslant1} N(L-1,r)\frac{t^r}{r}\end{pmatrix} = W(\boldsymbol{u})\begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant1}\chi_0(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r}\\ \sum_{r\geqslant1}\chi_1(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r}\\ \sum_{r\geqslant1}\chi_2(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r}\\ \vdots\\ \sum_{r\geqslant1}\chi_{L-1}(\mathfrak{F}_*^{-r})\frac{t^r}{r}\end{pmatrix} = W(\boldsymbol{u})\begin{pmatrix}\operatorname{Log}\big(\zeta_0(\boldsymbol{X},t)\big)\\ \operatorname{Log}\big(\zeta_1(\boldsymbol{X},t)\big)\\ \operatorname{Log}\big(\zeta_2(\boldsymbol{X},t)\big)\\ \vdots\\ \operatorname{Log}\big(\zeta_{L-1}(\boldsymbol{X},t)\big)\end{pmatrix}$$

où $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$ est *la fraction rationnelle de* $\boldsymbol{K}(t)$ *:*

$$\zeta_m(\boldsymbol{X},t) := \exp\Big(\sum_{r\geqslant1}\chi_m(\mathfrak{F}_*^{-r})\,\frac{t^r}{r}\Big) = \frac{\prod_{k\text{ impair}}\det\big(1-q^n\mathfrak{F}_*^{-1}t : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_m\big)}{\prod_{k\text{ pair}}\det\big(1-q^n\mathfrak{F}_*^{-1}t : H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_m\big)}, \tag{Eq.7}$$

qui participe à la factorisation de la fonction Zêta de $\boldsymbol{X}$ suivante :

$$\begin{aligned}\zeta(\boldsymbol{X},t) &= \exp\Big(\sum\nolimits_{r\geqslant 1}\chi(q^n\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\,\frac{t^r}{r}\Big)\\ &= \exp\Big(\sum\nolimits_{r\geqslant 1}\chi_0(q^n\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\,\frac{t^r}{r}\Big)\times\cdots\times\exp\Big(\sum\nolimits_{r\geqslant 1}\chi_{L-1}(q^n\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\,\frac{t^r}{r}\Big)\\ &= \zeta_0(\boldsymbol{X},t)\times\cdots\times\zeta_{L-1}(\boldsymbol{X},t)\,. \end{aligned}\qquad\text{(Eq.8)}$$

Si nous notons maintenant

$$\eta_j(\boldsymbol{X},t) := \exp\Big(\sum\nolimits_{r\geqslant 1}N(j,r)\,\frac{t^r}{r}\Big), \qquad\text{(Eq.9)}$$

nous avons pour $m,j=0,\ldots,L-1$:

$$\left\{\begin{aligned}\eta_j(\boldsymbol{X},t)\ &= \zeta_0(\boldsymbol{X},t)\ \zeta_1(\boldsymbol{X},t)^{\boldsymbol{u}^j}\ \zeta_2(\boldsymbol{X},t)^{\boldsymbol{u}^{2j}}\ \cdots\ \zeta_{L-1}(\boldsymbol{X},t)^{\boldsymbol{u}^{(L-1)j}}\\ \zeta_m(\boldsymbol{X},t)^L &= \eta_0(\boldsymbol{X},t)\ \eta_1(\boldsymbol{X},t)^{\boldsymbol{v}^m}\ \eta_2(\boldsymbol{X},t)^{\boldsymbol{v}^{2m}}\ \cdots\ \eta_{L-1}(\boldsymbol{X},t)^{\boldsymbol{v}^{(L-1)m}}\end{aligned}\right.\qquad\text{(Eq.10)}$$

où $\boldsymbol{v}:=\boldsymbol{u}^{-1}$.

Les séries formelles qui définissent $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$ et $\eta_j(\boldsymbol{X},t)$ valent 1 pour $t=0$ et convergent uniformément sur un disque $\mathbb{D}(0,\epsilon)\subseteq\mathbb{C}$ de rayon $\epsilon>0$, assez petit. Les fonctions $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$ et $\eta_j(\boldsymbol{X},t)$ sont donc holomorphes sur ce disque, de même que leurs puissances aux exposants complexes $\boldsymbol{u}^\star$ et $\boldsymbol{v}^\star$, quitte à réduire le rayon ϵ si nécessaire. On sait que les fonctions ζ_m se prolongent en des fonctions rationnelles sur $\mathbb{C}$ de sorte que l'on peut écrire d'un manière unique $\zeta_m(\boldsymbol{X},1/z)=\phi_m(z)/z^d$, où $d\in\mathbb{Z}$ et où $\phi_m(z)$ est holomorphe sur un voisinage de 0 et vérifie $\phi_m(0)\neq 0$. En particulier, pour tout nombre complexe $\boldsymbol{w}$, on peut écrire $\zeta_m(\boldsymbol{X},z)^{\boldsymbol{w}}=\phi_m(z)^{\boldsymbol{w}}/z^{d\boldsymbol{w}}$, où, si la fonction $\phi_m(z)^{\boldsymbol{w}}$ n'est pas unique (car elle dépend d'une détermination du Log), le dénominateur $x^{d\boldsymbol{w}}$ l'est.

Notation. Pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, l'exposant « $d\alpha$ » dans l'écriture $\zeta_m(\boldsymbol{X},z)^\alpha=\phi_m(z)^\alpha/z^{d\alpha}$, sera appelé l'« *ordre à l'infini* » de $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)^\alpha$, on le notera $\mathrm{ord}_\infty(\zeta_m(\boldsymbol{X},t)^\alpha)$. Lorsque $\alpha\in\mathbb{Z}$, on a clairement $\mathrm{ord}_\infty(\zeta_m(\boldsymbol{X},t)^\alpha)=-\deg(\zeta_m(\boldsymbol{X},t)^\alpha)$

Quant aux fonctions $\eta_i(\boldsymbol{X},t)$, elles admettent aussi des prolongements analytiques au voisinage de l'infini (pas nécessairement méromorphes) et l'on peut donner un sens aux nombres $\mathrm{ord}_\infty(\eta_j(\boldsymbol{X},t))$ tout comme pour les fonctions $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$. En procédant ainsi, les formules (Eq.10) donnent

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{ord}_\infty(\eta_j(\boldsymbol{X},t)) &= \sum\nolimits_{m=0,\ldots,L-1}\boldsymbol{u}^{mj}\,\mathrm{ord}_\infty(\zeta_m(\boldsymbol{X},t))\\ L\cdot\mathrm{ord}_\infty(\zeta_m(\boldsymbol{X},t)) &= \sum\nolimits_{j=0,\ldots,L-1}\boldsymbol{v}^{mj}\,\mathrm{ord}_\infty(\eta_j(\boldsymbol{X},t))\end{aligned}\right.$$

et comme d'autre part $\mathrm{ord}_\infty(\zeta_m(\boldsymbol{X},t))=\chi_m(\boldsymbol{X})$, on obtient le système

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{ord}_\infty(\eta_j(\boldsymbol{X},t)) &= \sum\nolimits_{m=0,\ldots,L-1}\boldsymbol{u}^{mj}\chi_m(\boldsymbol{X})\\ L\cdot\chi_m(\boldsymbol{X}) &= \sum\nolimits_{j=0,\ldots,L-1}\boldsymbol{v}^{mj}\,\mathrm{ord}_\infty(\eta_j(\boldsymbol{X},t))\end{aligned}\right.\qquad\text{(Eq.11)}$$

dont on déduit aussitôt le lemme suivant.

Lemme C. *Il y a équivalence entre*

a) $\chi_0(\boldsymbol{X})=\chi_1(\boldsymbol{X})=\cdots=\chi_{L-1}(\boldsymbol{X})$;

b) $\deg(\zeta_0(\boldsymbol{X},t))=\deg(\zeta_1(\boldsymbol{X},t))=\deg(\zeta_2(\boldsymbol{X},t))=\cdots=\deg(\zeta_{L-1}(\boldsymbol{X},t))$;

c) $0=\mathrm{ord}_\infty(\eta_1(\boldsymbol{X},t))=\mathrm{ord}_\infty(\eta_2(\boldsymbol{X},t))=\cdots=\mathrm{ord}_\infty(\eta_{L-1}(\boldsymbol{X},t))$.

Ce lemme affirme donc que le **Théorème 2** équivaut au théorème suivant.

Théorème 3. *Sous les hypothèses du Théorème* **1′**, *posons pour* $j=1,\dots,L-1$

$$\eta_j(\boldsymbol{X},t):=\exp\Big(\sum\nolimits_{r\geqslant 1}N(j,r)\,\frac{t^r}{r}\Big),$$

Alors,

$$0=\mathrm{ord}_\infty(\eta_1(\boldsymbol{X},t))=\mathrm{ord}_\infty(\eta_2(\boldsymbol{X},t))=\cdots=\mathrm{ord}_\infty(\eta_{L-1}(\boldsymbol{X},t))$$

§ 9) **À propos des fonctions $\boldsymbol{\zeta_m(X,t)}$.** Leur définition dans le paragraphe précédent (Eq.7), à savoir,

$$\zeta_m(\boldsymbol{X},t):=\exp\Big(\sum_{r\geqslant 1}\chi_m(\boldsymbol{\mathfrak{F}}_*^{-r})\,\frac{t^r}{r}\Big)=\frac{\prod_{k\text{ impair}}\det\big(1-q^n\boldsymbol{\mathfrak{F}}_*^{-1}t\colon H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_m\big)}{\prod_{k\text{ pair}}\det\big(1-q^n\boldsymbol{\mathfrak{F}}_*^{-1}t\colon H^k_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_m\big)},\tag{Eq.12}$$

les fait apparaître d'emblée comme fraction rationnelle de $\boldsymbol{K}(t)$, mais, d'autre part, en inversant l'égalité (Eq.6), on a

$$\begin{pmatrix}\chi_0(\boldsymbol{\mathfrak{F}}_*^{-r})\\ \chi_1(\boldsymbol{\mathfrak{F}}_*^{-r})\\ \chi_2(\boldsymbol{\mathfrak{F}}_*^{-r})\\ \vdots\\ \chi_{L-1}(\boldsymbol{\mathfrak{F}}_*^{-r})\end{pmatrix}=\frac{1}{L}W(\boldsymbol{v})\begin{pmatrix}N(0,r)\\ N(1,r)\\ N(2,r)\\ \vdots\\ N(L-1,r)\end{pmatrix}\tag{Eq.13}$$

où $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^{-1}$ et $N(j,r)\in\mathbb{N}$ ([2]), et alors

$$\zeta_m(\boldsymbol{X},t)=\exp\Bigg(\sum_{j=0,\dots,L-1}\boldsymbol{v}^j\Big(\sum_{r\geqslant 1}\frac{N(j,r)}{L}\,\frac{t^r}{r}\Big)\Bigg),\tag{Eq.14}$$

de sorte que $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)\in\mathbb{Q}[\boldsymbol{u}][\![t]\!]$, où $\mathbb{Q}[u]$ désigne le sous-corps de $\mathbb{C}$ de décomposition de X^L-1.

Lemme D. *On a* $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)\in\mathbb{Z}[\boldsymbol{u}](t)$.

Preuve. On applique le critère de rationalité des déterminants de Hankel à la série formelle (Eq.14) dont les coefficients appartiennent clairement à $\mathbb{Q}[u]$. ∎

§ 10) **La stratégie à suivre**

Nous allons montrer que l'ordre à l'infini des fractions rationnelles $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)/\zeta_0(\boldsymbol{X},t)$ est toujours nul, ce qui équivaut à prouver le Théorème **2** (donc **1′** et **3**).

Pour ce faire, on va s'aider de l'égalité (Eq.13), qui nous donne

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Log}(\zeta_0(\boldsymbol{X},t))\\ \mathrm{Log}(\zeta_1(\boldsymbol{X},t))\\ \mathrm{Log}(\zeta_2(\boldsymbol{X},t))\\ \vdots\\ \mathrm{Log}(\zeta_{L-1}(\boldsymbol{X},t))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{r\geqslant 1}\chi_0(\boldsymbol{\mathfrak{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r}\\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_1(\boldsymbol{\mathfrak{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r}\\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_2(\boldsymbol{\mathfrak{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r}\\ \vdots\\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_{L-1}(\boldsymbol{\mathfrak{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r}\end{pmatrix}=\frac{1}{L}W(\boldsymbol{v})\begin{pmatrix}\sum_{r\geqslant 1}N(0,r)\frac{t^r}{r}\\ \sum_{r\geqslant 1}N(1,r)\frac{t^r}{r}\\ \sum_{r\geqslant 1}N(2,r)\frac{t^r}{r}\\ \vdots\\ \sum_{r\geqslant 1}N(L-1,r)\frac{t^r}{r}\end{pmatrix},\tag{Eq.15}$$

où $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^{-1}$ et où $N(j,r)$ est le cardinal de l'ensemble

$$\boldsymbol{X}(j,r):=\big\{x\in\overline{\boldsymbol{X}}\;\big|\;\theta^j(x)=\boldsymbol{\mathfrak{F}}^r(x)\big\}.$$

[2] En fait, $N(j,r)\in L\cdot\mathbb{N}$ puisque $\boldsymbol{G}$ opère librement sur $\boldsymbol{X}$

Dans le paragraphe § 12, nous allons faire un décompte différent des nombres $N(j,r)$ donnant lieu dans le paragraphe (13), à une décomposition canonique des séries $\sum_{r\geqslant 1}\chi_m(\boldsymbol{\mathscr{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r}$ comme somme infinie de séries $-\mathrm{Log}(1-\boldsymbol{u}^\star t^d)$ avec $d\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$, mais où seulement un nombre fini de telles séries intervient pour un d donné (*cf.* paragraphe § 14, lemme **G**). Ce même lemme donnera des décompositions eulériennes explicites des fonctions rationnelles $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$, qui permettront ensuite, dans le paragraphe § 17, l'étude des quotients $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)/\zeta_0(\boldsymbol{X},t)$.

§ 11) Les $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbites

Le morphisme de Frobenius $\boldsymbol{\mathscr{F}}$ est bijectif sur l'ensemble des points fermés de $\overline{\boldsymbol{X}}$, ses orbites seront appelées les « $\boldsymbol{\mathscr{F}}$*-orbites* ». On note $\boldsymbol{X}(\!(r)\!)$ l'ensemble des points fermés de $\overline{\boldsymbol{X}}$ fixés par $\boldsymbol{\mathscr{F}}^r$, on a $\overline{\boldsymbol{X}}=\bigcup_{r\geqslant 1}\boldsymbol{X}(\!(r)\!)$. Les cardinaux des $\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbites dans $\boldsymbol{X}(\!(r)\!)$ sont donc des diviseurs de r. La $\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbite contenant $x\in\overline{\boldsymbol{X}}$ sera notée $\langle\boldsymbol{\mathscr{F}}\rangle\cdot x$.

Le groupe $\boldsymbol{G}$ agit *librement* sur l'ensemble des points fermés de $\overline{\boldsymbol{X}}$. Ses orbites, les « $\boldsymbol{G}$*-orbites* », sont de cardinal $L:=|\boldsymbol{G}|$.

Une « $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathscr{F}}$*-orbite* » est un ensemble de points fermés de $\overline{\boldsymbol{X}}$ non vide, stable sous l'action de $\boldsymbol{G}$ et de $\boldsymbol{\mathscr{F}}$ et minimal pour ces propriétés. La $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbite contenant $x\in\overline{\boldsymbol{X}}$ sera notée $\langle\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathscr{F}}\rangle\cdot x$. Comme l'action de $\boldsymbol{G}$ commute à celle de $\boldsymbol{\mathscr{F}}$, le groupe $\boldsymbol{G}$ opère sur l'ensemble des $\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbites et vice-versa. Il est alors clair que la donnée d'une $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbite est équivalente à la donnée d'une $\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbite saturée par l'action de $\boldsymbol{G}$, c'est donc l'ensemble des points sous-jacents à la $\boldsymbol{G}$-orbite d'une $\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbite.

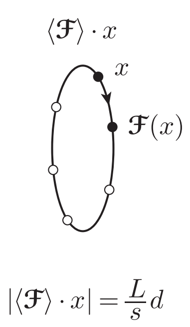
Soit $\boldsymbol{O}$ une $\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbite. On a $\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{O})=\langle\theta^s\rangle$ pour un unique diviseur s de L, et comme $\langle\theta^s\rangle$ opère librement sur $\boldsymbol{O}$, on a $|\boldsymbol{O}|=\frac{L}{s}d$ pour un unique $d\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$.

Supposons $s\neq L$. Pour chaque $x\in\boldsymbol{O}$, il existe un unique $\epsilon_x=0,\ldots,\frac{L}{s}d-1$, tel que $\theta^s(x)=\boldsymbol{\mathscr{F}}^{\epsilon_x}(x)$. On a $\epsilon_x\neq 0$ puisque $\theta^s(x)\neq x$, et l'on a aussi $\epsilon_x=\epsilon_{\boldsymbol{\mathscr{F}}(x)}$, de sorte que le nombre ϵ_x est indépendant de $x\in\boldsymbol{O}$, notons-le ϵ. Alors, $\boldsymbol{\mathscr{F}}^\epsilon=\theta^s$ sur $\boldsymbol{O}$ et $\boldsymbol{\mathscr{F}}^\epsilon$ est d'ordre $\frac{L}{s}$, donc $\epsilon=ed$ pour un unique $e\in\{1,\ldots,\frac{L}{s}-1\}$ relativement premier à $\frac{L}{s}$. On a ainsi associé à la $\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbite $\boldsymbol{O}$ le triplet (s,e,d). Enfin, on a

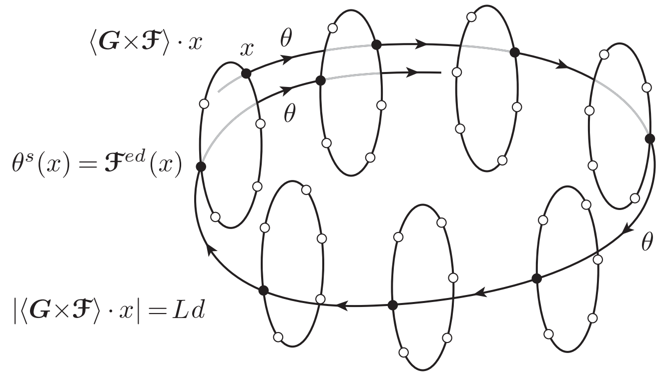
$$\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}\amalg\theta(\boldsymbol{O})\amalg\cdots\amalg\theta^{s-1}(\boldsymbol{O}),$$

où les $\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbites $\theta^i(\boldsymbol{O})$ ont toutes le même triplet (s,e,d) associé. L'ensemble $\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{O}$, dont le cardinal est Ld, est une $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbite, elle sera dite « *de type* (s,e,d) ».

Lorsque $s=L$, les $\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbites $\boldsymbol{O},\theta(\boldsymbol{O}),\ldots,\theta^{L-1}(\boldsymbol{O})$ sont deux à deux disjointes et l'équation $\theta^L(x)=\boldsymbol{\mathscr{F}}^f(x)$ admet comme solution $f=0$, on a donc $(s,e,d)=(L,0,d)$. L'ensemble $\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{O}$, de cardinal Ld, est une $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbite « *de type* $(L,0,d)$ ».



$\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbite



$\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathscr{F}}$-orbite contenant x

Définitions. *Un triplet d'entiers naturels* (s,e,d) *où*

$$\begin{cases} s\in\{1,\dots,L\} \text{ est un diviseur de } L\,; \\ e\in\{0,1,\dots,\frac{L}{s}\} \text{ est } \begin{cases} 0, \text{ si } s=L \\ \neq 0 \text{ et relativement premier à } \frac{L}{s}, \text{ si } s\neq L \end{cases} \\ d \text{ est un entier positif}\,; \end{cases}$$

est un «type de $\boldsymbol{G}{\times}\boldsymbol{\mathfrak{F}}$*-orbite». On notera* $\boldsymbol{X}(s,e,d)$ *l'ensemble des points de* $\overline{\boldsymbol{X}}$ *qui appartiennent à des* $\boldsymbol{G}{\times}\boldsymbol{\mathfrak{F}}$*-orbites de type* (s,e,d)*, et* $N(s,e,d):=|\boldsymbol{X}(s,e,d)|$.

Lemme E

a) *Deux* $\boldsymbol{G}{\times}\boldsymbol{\mathfrak{F}}$*-orbites dans* $\overline{\boldsymbol{X}}$ *sont isomorphes en tant que* $\boldsymbol{G}{\times}\boldsymbol{\mathfrak{F}}$*-ensembles si, et seulement si, elles ont le même type. En particulier,* $\boldsymbol{X}(s,e,d)\cap\boldsymbol{X}(s',e',d')=\varnothing$ *si* $(s,e,d)\neq(s',e',d')$.

b) *L'ensemble* $\boldsymbol{X}(s,e,d)$ *est une réunion finie de* $\boldsymbol{G}{\times}\boldsymbol{\mathfrak{F}}$*-orbites. Ces orbites sont de cardinal égal à* Ld*. On a* $\boldsymbol{X}(s,e,d)\subseteq\boldsymbol{X}(\!(\frac{L}{s}d)\!)$ *et* $N(s,e,d)\leqslant N(\frac{L}{s}d)<\infty$.

c) *Pour tous* $j=1,\dots,L-1$*, et* $r\geqslant 1$*, l'ensemble* $\boldsymbol{X}(j,r)$ *est une réunion disjointe d'ensembles* $\boldsymbol{X}(s,e,d)$ *avec* $s\neq L$*. Les conditions suivantes sont équivalentes*

$$\text{(i) } \boldsymbol{X}(s,e,d)\subseteq\boldsymbol{X}(j,r)\,,\quad \textit{et}\quad \text{(ii) } s\div j \textit{ et } r\in d\big(e\tfrac{j}{s}+\tfrac{L}{s}\,\mathbb{Z}\big)\,.$$

d) *On a aussi*

i) $\boldsymbol{X}(s,e,d)\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}\big(as,(ea+\frac{L}{s})d\big)$*, pour tout* (s,e,d) *et tout* $a\in\mathbb{N}$ *;*

ii) $\coprod_{\text{finie}}\Big\{\boldsymbol{X}(s,e,d)\;\Big|\;\frac{L}{s}d\div r\Big\}=\boldsymbol{X}(0,r)=\overline{\boldsymbol{X}}(\!(r)\!)$ *;*

iii) $\coprod_{\text{finie}}\Big\{\boldsymbol{X}(s,e,d)\;\Big|\;s\div j\,,\ r=de\frac{j}{s}\pmod{d\frac{L}{s}}\Big\}=\boldsymbol{X}(j,r)$*, pour* $j=1,\dots,L-1$ *;*

iv) $\coprod\Big\{\boldsymbol{X}(s,e,d)\;\Big|\;s\neq L\Big\}=\bigcup\Big\{\boldsymbol{X}(j,r)\;\Big|\;j\neq 0\Big\}$ *et* $\coprod\Big\{\boldsymbol{X}(s,e,d)\Big\}=\overline{\boldsymbol{X}}$.

où "$\coprod_{\text{finie}}$" *indique que la famille d'ensembles concernée est une partition finie.*

Indications

a,b) Clairs.

c) Un point $x\in\boldsymbol{X}(j,r)$ vérifie $\theta^j(x)=\boldsymbol{\mathfrak{F}}^r(r)$, de sorte que la $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$-orbite $\langle\boldsymbol{\mathfrak{F}}\rangle\cdot x$ est stabilisée par θ^j qui est $\neq\mathbf{id}$ par hypothèse. Il s'ensuit que $\langle\boldsymbol{G}{\times}\boldsymbol{\mathfrak{F}}\rangle\cdot x$ est d'un certain type (s,e,d) avec $s\neq L$ mais aussi avec $s\div j$ puisque $\theta^j\in\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{G}}(\langle\boldsymbol{\mathfrak{F}}\rangle\cdot x)=\langle\theta^s\rangle$. Or, de l'égalité $\theta^s(x)=\boldsymbol{\mathfrak{F}}^{(e+\lambda\frac{L}{s})d}$, on déduit

$$\theta^j(x)=\boldsymbol{\mathfrak{F}}^{(e\frac{j}{s}+\lambda\frac{L}{s})d},$$

ce qui justifie l'équivalence $\big(\boldsymbol{X}(s,e,d)\subseteq\boldsymbol{X}(j,r)\big)\;\Leftrightarrow\;\big(s\div j \text{ et } r\in d\big(e\frac{j}{s}+\frac{L}{s}\,\mathbb{Z}\big)\big)$.

d) Résultent d'appliquer (c). ∎

§12) **Recomposition des séries** $\sum_{r\geqslant 1}\boldsymbol{N(j,r)t^r/r}$**.** Le lemme **E**, notamment par l'assertion (c) et par les partitions (d)-(ii)(iii), donne une nouvelle approche pour des nombres $N(j,r)$. Il permet aussitôt la réécriture suivante

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{r\geqslant 1}N(0,r)\frac{t^r}{r}=\sum_{(s,e,d)}\left(N(s,e,d)\sum_{\lambda\geqslant 1}\frac{t^{\frac{L}{s}\lambda}}{d\frac{L}{s}\lambda}\right), \\ \displaystyle\sum_{r\geqslant 1}N(j,r)\frac{t^r}{r}=\sum_{\substack{(s,e,d)\\ s\div j}}\left(N(s,e,d)\sum_{\lambda\geqslant 0}\frac{t^{d(e\frac{j}{s}+\frac{L}{s}\lambda)}}{d(e\frac{j}{s}+\frac{L}{s}\lambda)}\right),\ \forall j\in\big\{s,2s\dots,\big(\frac{L}{s}-1\big)s\big\}. \end{cases}\tag{Eq.16}$$

Il est important de souligner que dans les membres de droite de cette égalité, chacun des monômes $t^{d\frac{L}{s}\lambda}$ et $t^{d(e\frac{j}{s}+\frac{L}{s}\lambda)}$ apparaît uniquement dans un nombre **fini** de termes (s,e,d) d'après la finitude des partitions (d)-(ii)(iii), ceci justifie que l'égalité en question a bien un sens dans $\mathbb{Q}[\![t]\!]$.

Lemme F. *Pour tout type de $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathfrak{F}}$-orbite (s,e,d), notons*

$$\begin{cases} S(s,e,d)_0 := \displaystyle\sum_{\lambda\geqslant 1} \frac{t^{d\frac{L}{s}\lambda}}{d\frac{L}{s}\lambda}\,, \\ S(s,e,d)_j := \displaystyle\sum_{\lambda\geqslant 0} \frac{t^{d(e\frac{j}{s}+\frac{L}{s}\lambda)}}{d(e\frac{j}{s}+\frac{L}{s}\lambda)}\,, \ \text{si } j\in\{s,2s,\dots,(\tfrac{L}{s}-1)s\} \\ S(s,e,d)_j := 0\,, \ \text{si } j\neq 0 \pmod{s} \end{cases}$$

Alors, suite à la définition (Eq.9), on a

$$\begin{pmatrix} \eta_0(\boldsymbol{X},t) \\ \eta_1(\boldsymbol{X},t) \\ \eta_2(\boldsymbol{X},t) \\ \vdots \\ \eta_{L-1}(\boldsymbol{X},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant 1} N(0,r)\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1} N(1,r)\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1} N(2,r)\frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r\geqslant 1} N(L-1,r)\frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = \sum_{(s,e,d)} N(s,e,d) \begin{pmatrix} S(s,e,d)_0 \\ S(s,e,d)_1 \\ S(s,e,d)_2 \\ \vdots \\ S(s,e,d)_{L-1} \end{pmatrix}. \qquad \text{(Eq.17)}$$

§ 13) **Étude des termes des séries $\boldsymbol{S(s,e,d)_j}$**

Pour toute racine Ld-ième primitive de 1, notée $\boldsymbol{w}$, l'élément $\boldsymbol{w}^{-sed}$ est une racine $\frac{L}{s}$-ième primitive de 1. On choisit alors $\boldsymbol{w}$ telle que

$$\boxed{\boldsymbol{w}^{-sed} = \boldsymbol{u}^s} \qquad \text{(Eq.18)}$$

On a

$$1+(\boldsymbol{w}^{1\cdot s})^{(r-de\frac{j}{s})}+(\boldsymbol{w}^{2\cdot s})^{(r-de\frac{j}{s})}+\cdots+(\boldsymbol{w}^{(d\frac{L}{s}-1)\cdot s})^{(r-de\frac{j}{s})} = \begin{cases} d\,\frac{L}{s}\,, \text{ si } r{=}de\frac{j}{s} \pmod{d\,\frac{L}{s}}, \\ 0\,, \text{ si non,} \end{cases}$$

de sorte que, quel que soit j, *nul ou non*, nous avons :

$$d\frac{L}{s}\ S(s,e,d)_j = \sum_{r\geqslant 1}\sum_{a=0}^{d\frac{L}{s}-1} (\boldsymbol{w}^{as})^{(r-de\frac{j}{s})}\frac{t^r}{r} = \sum_{r\geqslant 1}\sum_{a=0}^{d\frac{L}{s}-1} \boldsymbol{w}^{a(-sde)\frac{j}{s}}\ \frac{(\boldsymbol{w}^{as}t)^r}{r}$$
$$= \sum_{a=0}^{d\frac{L}{s}-1}\left(\boldsymbol{u}^{aj}\sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{as}t)^r}{r}\right),$$

grâce au choix de $\boldsymbol{w}$. On a donc

$$d\frac{L}{s}\begin{pmatrix} S(s,e,d)_{0\cdot s} \\ S(s,e,d)_{1\cdot s} \\ \vdots \\ S(s,e,d)_{(\frac{L}{s}-1)s} \end{pmatrix} = \underbrace{\Big(W(\boldsymbol{u}^s)\Big|\cdots\cdots\Big|W(\boldsymbol{u}^s)\Big)}_{d \text{ colonnes de blocs } \frac{L}{s}\times\frac{L}{s}} \begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{0\cdot s}t)^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{1\cdot s}t)^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{(d\frac{L}{s}-1)\cdot s}t)^r}{r} \end{pmatrix} \qquad \text{(Eq.19)}$$

où $W(\boldsymbol{u}^s)$ désigne la matrice de Vandermonde (Eq.3) de $\frac{L}{s}\times\frac{L}{s}$ lignes et colonnes :

$$
W(\boldsymbol{u}^s) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (\boldsymbol{u}^s) & (\boldsymbol{u}^s)^2 & \dots & (\boldsymbol{u}^s)^{\frac{L}{s}-1} \\ 1 & (\boldsymbol{u}^{2s}) & (\boldsymbol{u}^{2s})^2 & \dots & (\boldsymbol{u}^{2s})^{\frac{L}{s}-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (\boldsymbol{u}^{(\frac{L}{s}-1)s}) & (\boldsymbol{u}^{(\frac{L}{s}-1)s})^2 & \dots & (\boldsymbol{u}^{(\frac{L}{s}-1)s})^{\frac{L}{s}-1} \end{pmatrix} \tag{Eq.20}
$$

§14) **Décomposition eulérienne des fonctions $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$**

Il s'agit maintenant d'expliciter l'égalité (Eq.15) au vu de la recomposition (Eq.17) (lemme **F**), ce qui nous emmène à considérer l'égalité

$$
\begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant 1}\chi_0(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_1(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_2(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_{L-1}(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = \sum_{s\div L}\sum_{(s,e,d)} N(s,e,d)\ \frac{1}{L}\ W(\boldsymbol{v}) \begin{pmatrix} S(s,e,d)_0 \\ S(s,e,d)_1 \\ S(s,e,d)_2 \\ \vdots \\ S(s,e,d)_{L-1} \end{pmatrix} \tag{Eq.21}
$$

où l'on voit apparaître les séries $S(s,e,d)$ avec tous les indices $i\in\{0,\dots,L-1\}$, alors que par la définition dans lemme **F**, on a

$$
S(s,e,d)_i = 0\,,\ \text{si } i\neq 0 \pmod{s}\,.
$$

En enlevant ces termes parasites, l'égalité (Eq.21) se réécrit sous la forme

$$
\begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant 1}\chi_0(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_1(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_2(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_{L-1}(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = \sum_{s\div L}\sum_{(s,e,d)} N(s,e,d)\ \frac{1}{L}\ \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{W(\boldsymbol{v}^s)} \\ \vdots \\ \overline{W(\boldsymbol{v}^s)} \end{pmatrix}}_{s \text{ lignes de blocs } \frac{L}{s}\times\frac{L}{s}} \begin{pmatrix} S(s,e,d)_{0\cdot s} \\ S(s,e,d)_{1\cdot s} \\ \vdots \\ S(s,e,d)_{(\frac{L}{s}-1)s} \end{pmatrix} \tag{Eq.22}
$$

où $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^{-1}$ et $W(\boldsymbol{v}^s)$ est l'analogue de $W(\boldsymbol{u}^s)$ (Eq.20) et vérifie

$$
W(\boldsymbol{v}^s)W(\boldsymbol{u}^s) = \frac{L}{s}\mathbf{id}_{\frac{L}{s}}\,,
$$

de sorte que si nous reportons l'égalité (Eq.19) dans (Eq.22), on obtient

$$
\begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant 1}\chi_0(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_1(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_2(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r\geqslant 1}\chi_{L-1}(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = \sum_{s\div L}\sum_{(s,e,d)} \frac{N(s,e,d)}{Ld} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{id}_{\frac{L}{s}} & \cdots\cdots & \mathbf{id}_{\frac{L}{s}} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{id}_{\frac{L}{s}} & & \mathbf{id}_{\frac{L}{s}} \end{array}\right)}_{s \text{ lignes et d colonnes de blocs } \frac{L}{s}\times\frac{L}{s}} \begin{pmatrix} \sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{0\cdot s}t)^r}{r} \\ \sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{1\cdot s}t)^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{(d\frac{L}{s}-1)\cdot s}t)^r}{r} \end{pmatrix} \tag{Eq.23}
$$

où les nombres $N(s,e,d)/Ld$ sont entiers d'après lemme **E**-(b).

Ces calculs donnent le développement eulérien des fonctions $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$, à savoir :

Lemme G. *Pour $m=0,\dots,L-1$, on a*

$$
\sum_{r\geqslant 1}\chi_m(\boldsymbol{\mathcal{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} = \sum_{(s,e,d)} \operatorname{Log}\left(\left(\frac{1}{1-\boldsymbol{u}^{sfm}t^d}\right)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}\right);
$$

soit

$$\boxed{\zeta_m(\boldsymbol{X},t) = \prod_{(s,e,d)} \Big(\frac{1}{1-\boldsymbol{u}^{sfm}t^d}\Big)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}} \tag{Eq.24}$$

où nous avons posé $f = -e^{-1} \pmod{\frac{L}{s}}$, *et où les indices* (s,e,d) *parcourent l'ensemble de tous les types de* $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathfrak{F}}$*-orbites de* $\overline{\boldsymbol{X}}$.

Preuve. En appliquant la formule (Eq.23), on a pour chaque m donné

$$\begin{aligned}\sum_{r\geqslant 1}\chi_m(\boldsymbol{\mathfrak{F}}_*^{-r})\frac{t^r}{r} &= \sum_{s\div L}\sum_{(s,e,d)}\frac{N(s,e,d)}{Ld}\sum_{a=0}^{d-1}\sum_{r\geqslant 1}\boldsymbol{w}^{rLa}\frac{(\boldsymbol{w}^{(m \pmod{\frac{L}{s}})s}\,t)^r}{r}\\ &= \sum_{s\div L}\sum_{(s,e,d)}\frac{N(s,e,d)}{Ld}\Big(\sum_{a=0}^{d-1}\boldsymbol{w}^{rLa}\Big)\sum_{r\geqslant 1}\frac{(\boldsymbol{w}^{(m \pmod{\frac{L}{s}})s}\,t)^r}{r}\\ &= \sum_{(s,e,d)}\frac{N(s,e,d)}{Ld}\frac{(\boldsymbol{w}^{ms}\,t)^{dr}}{r} = \sum_{(s,e,d)}\mathrm{Log}\bigg(\Big(\frac{1}{1-\boldsymbol{w}^{msd}t^d}\Big)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}\bigg)\end{aligned}$$

où $\boldsymbol{w}^{msd} = \boldsymbol{w}^{(-sed)(-e^{-1}m)} = \boldsymbol{u}^{sf}$, d'après nos conventions (*cf.* (Eq.18)). ■

§ 15) Rapport eulérien entre $\boldsymbol{\zeta(X,t)}$ et $\boldsymbol{\zeta_0(X,t)}$

Ce paragraphe n'est pas indispensable pour la preuve des théorèmes, mais il trouve sa place naturelle à cet endroit. Il s'agit de comprendre le rapport entre les fonctions Zêta de $\boldsymbol{X}$ et de $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}$, dont le lemme **B** nous indiquait déjà que le degré de la première devrait être L-fois celui de la seconde. Notons $\pi : \overline{\boldsymbol{X}} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{X}}/\boldsymbol{G}$ la projection canonique. Il est clair que l'on a $\boldsymbol{X}(\!(r)\!) \subseteq \pi^{-1}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}(\!(r)\!))$, mais la réciproque n'a aucune raison, à priori, d'être vérifiée.

Lemme H. *Avec les notations en cours.*

a) *On a* $\qquad \pi^{-1}((\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G})(\!(r)\!)) = \boldsymbol{X}(\!(r)\!) \coprod \Big(\coprod_{d\div r,\ \frac{L}{s}\not\div\frac{r}{d}} \boldsymbol{X}(s,e,d)\Big)$,

et donc $\qquad L\cdot N(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},r) = N(\boldsymbol{X},r) + \sum_{\substack{(s,e,d)\\ d\div r,\ \frac{L}{s}d\not\div r}} N(s,e,d).$

b) *On a*

$$\boxed{\frac{\zeta(\boldsymbol{X},t)}{\zeta(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},t)^L} = \prod_{(s,e,d)}\Big(\frac{(1-t^{\frac{L}{s}d})^s}{(1-t^d)^L}\Big)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}} \tag{Eq.25}$$

où le produit peut évidemment se limiter aux types (s,e,d) *tels que* $s \neq L$.

Preuve

a) Soit $y \in \boldsymbol{X}/\boldsymbol{G}$, vérifiant $\boldsymbol{\mathfrak{F}}^r(y) = y$. L'ensemble $\pi^{-1}(y)$ est alors stable sous l'action de $\boldsymbol{G}$ est de $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$, c'est donc une réunion de $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathfrak{F}}$-orbites. Si maintenant $\langle \boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\mathfrak{F}}\rangle \cdot x \subseteq \pi^{-1}(y)$, l'égalité $\boldsymbol{\mathfrak{F}}^{aed+\lambda\frac{L}{s}d}(x) = \theta^{as}(x)$, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, donne l'ensemble de toutes les solutions à l'équation $\boldsymbol{\mathfrak{F}}^{\alpha}(x) = \theta^{\beta}(x)$. Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour avoir $\boldsymbol{\mathfrak{F}}^r(y) = y$ est que r soit de la forme $aed + \lambda\frac{L}{s}d$, donc

$$d \div r, \quad \text{et} \quad \frac{r}{d} = ae \pmod{\frac{L}{s}} \text{ pour un certain } a \in \mathbb{Z},$$

où la deuxième condition est toujours vérifiée. Par conséquent,

$$\pi^{-1}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G})(\!(r)\!) = \coprod_{d\div r}\boldsymbol{X}(s,e,d)$$

Or, $\boldsymbol{X}(s,e,d) \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}(\!(r)\!)$ si, et seulement si, $\frac{L}{s}d \div r$, d'où l'assertion (a).

b) On procède comme dans (12). En appliquant (a), on a

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Log}\Big(\frac{\zeta(\boldsymbol{X},t)}{\zeta(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},t)^L}\Big) &= \sum_{r\geqslant 1}\Big(N(\boldsymbol{X},r) - L\cdot N(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},r)\Big)\frac{t^r}{r}\\
&= \sum_{(s,e,d)} N(s,e,d)\Big(\sum_{\lambda\geqslant 1}\frac{t^{d\lambda}}{d\lambda} - \sum_{\lambda\geqslant 1}\frac{t^{\frac{L}{s}d\lambda}}{\frac{L}{s}d\lambda}\Big)\\
&= \operatorname{Log}\Big(\prod_{(s,e,d)}\Big(\frac{(1-t^{\frac{L}{s}d})^s}{(1-t^d)^L}\Big)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}\Big),
\end{aligned}
$$

CQFD. ∎

§16) **A propos de la convergence des séries et produits.** Toutes les séries formelles en la variable t que nous avons considérées sont nulles en $t=0$ et convergent uniformément sur un disque $\mathbb{D}(0,\epsilon)\subseteq\mathbb{C}$ de rayon $\epsilon>0$ assez petit. Voici, en vrac, quelques justifications.

- Les séries $\sum_{r\geqslant 1} N(\boldsymbol{X},r)\frac{t^r}{r}$ et $\sum_{r\geqslant 1} N(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},r)\frac{t^r}{r}$ donnant les fonctions $\zeta(\boldsymbol{X},t)$ et $\zeta(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},t)$, car dominées par des les séries des fonctions $\zeta(\mathbb{A}^N_{\boldsymbol{k}},t)$ des espaces affines dont le rayon de convergence se calcule sans difficulté.
- Les séries $\sum_{r\geqslant 1} N(\boldsymbol{X},j,r)\frac{t^r}{r}$, car respectivement dominées par $\sum_{r\geqslant 1} N(\boldsymbol{X},Lr)\frac{t^r}{r}$.
- Les séries $\sum_{r\geqslant 1}\chi_m(\boldsymbol{\mathcal{F}}_{-r})$, puisqu'elles sont liées aux séries $\sum_{r\geqslant 1} N(\boldsymbol{X},j,r)\frac{t^r}{r}$ par le système d'équations (Eq.15).
- Les séries $S(s,e,d)_m$ du lemme **F**, pour des raisons évidentes (*cf.* (Eq.19)), on peut même préciser que leur rayon de convergence vaut 1.
- Les séries $\sum_{(s,e,d)} N(s,e,d)S(s;e;d)_j$, car respectivement dominées par les séries $\sum_{r\geqslant 1} N(\boldsymbol{X},j,r)\frac{t^r}{r}$ (*cf.* (Eq.17)).
- Les produits eulériens des lemmes **G** et **H**, car exponentiels de séries convergentes, nulles en $t=0$.

§17) **Comparaison des degrés de $\boldsymbol{\zeta_m(X,t)}$ et $\boldsymbol{\zeta_0(X,t)}$ et $\boldsymbol{\zeta(X,t)}$.**

Lemme I. *On a* $\deg\big(\zeta_0(\boldsymbol{X},t)\big)=\cdots=\deg\big(\zeta_m(\boldsymbol{X},t)\big)=\deg\big(\zeta(\boldsymbol{X},t)\big)/L$. *En particulier, les théorèmes* **1′**, **2**, **3**, *et donc aussi* **1**, *sont vérifiés.*

Preuve. Les décompositions eulériennes (Eq.24) donnent l'égalité

$$
\frac{\zeta_m(\boldsymbol{X},t)}{\zeta_0(\boldsymbol{X},t)} = \prod_{(s,e,d)}\Big(\frac{1-t^d}{1-\boldsymbol{u}^{sfm}\,t^d}\Big)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}, \tag{$*$}
$$

où la fraction de gauche appartient à $\mathbb{Z}[\boldsymbol{u}](t)$ (lemme **D**).

Comme $\zeta_m(\boldsymbol{X},0)=\zeta_0(\boldsymbol{X},0)=1$, les deux membres de $(*)$ peuvent se développer en série formelle à coefficients dans $\mathbb{Z}[\boldsymbol{u}][t]$, obtenant la même série formelle. On en déduit que pour montrer que la fraction $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)/\zeta_0(\boldsymbol{X},t)$ est de degré nul, nous pouvons aussi bien la considérer comme fraction rationnelle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (quitte à fixer un plongement $\mathbb{Z}[\boldsymbol{u}]\subseteq\overline{\mathbb{Q}}_\ell$), et ceci pour n'importe quel nombre premier ℓ. L'égalité $(*)$ continue alors d'avoir une sens dans l'anneau des séries formelles $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\![t]\!]$.

Posons maintenant

$$
\frac{\zeta_m(\boldsymbol{X},t)}{\zeta_0(\boldsymbol{X},t)} = \frac{A_m(t)}{B_m(t)}, \tag{$*'$}
$$

avec $A_m(t), B_m(t) \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[t]$ sans facteur commun et termes constants égaux à 1. On considère alors l'égalité

$$\begin{aligned} A_m(t) &= B_m(t) \prod_{(s,e,d)} \left(\frac{1-t^d}{1-\boldsymbol{u}^{sfm}\,t^d} \right)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}} \\ &= B_m(t) \prod_{(s,e,d)} \left((1-t^d) \sum_{k\geqslant 0} (\boldsymbol{u}^{sfm}\,t^d)^k \right)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}} \end{aligned} \tag{$**$}$$

dans l'anneau des séries formelles $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[[t]]$.

Notons $\mathfrak{A} := \{\mathfrak{a}_i\}$ (resp. $\mathfrak{B} := \{\mathfrak{b}_i\}$) la famille des *inverses* des racines, avec leur multiplicité, de $A_m(t)$ (resp. $B_m(t)$). Comme le produit eulérien dans $(**)$ est bien défini et non nul dans le disque ouvert de rayon 1 de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, les inverses de racines en question sont de valuation ℓ-adique positive ou nulle. Pour $d \in \mathbb{N}$, notons

$$A_{m,d}(t) := \prod_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A} \\ \mathrm{val}_\ell(\mathfrak{a})=d}} \Big(1 - \frac{\mathfrak{a}}{\ell^d}t\Big), \quad \text{et} \quad B_{m,d}(t) := \prod_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{B} \\ \mathrm{val}_\ell(\mathfrak{b})=d}} \Big(1 - \frac{\mathfrak{b}}{\ell^d}t\Big)$$

et remarquons que les coefficients de $A_{m,d}(t)$ et $B_{m,d}(t)$ sont de valuation ℓ-adique positive ou nulle, et que leurs coefficients constant et dominant sont de valuation nulle. On a alors les factorisations

$$\begin{cases} A_m(t) = A_{m,0}(t)\cdot A_{m,1}(\ell t)\cdots A_{m,\mu-1}(\ell^{\mu-1}t)\cdot A_{m,\mu}(\ell^\mu t) \\ B_m(t) = B_{m,0}(t)\cdot B_{m,1}(\ell t)\cdots B_{m,\mu-1}(\ell^{\mu-1}t)\cdot B_{m,\mu}(\ell^\mu t) \end{cases}$$

où $\mu \in \mathbb{N}$ est tel que $A_{m,d}(t) = B_{m,d}(t) = 1$ pour tout $d > \mu$.

L'égalité $(**)$ se réécrit

$$\prod_{d=0,\dots,\mu} A_{m,d}(\ell^d t) = \Bigg[\prod_{d=0,\dots,\mu} B_{m,d}(\ell^d t)\Bigg]\Bigg[\prod_{(s,e,d)} \left((1-t^d) \sum_{k\geqslant 0} (\boldsymbol{u}^{sfm}\,t^d)^k \right)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}\Bigg], \tag{$\diamond$}$$

ce qui est une égalité de séries formelles dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[[t]]$ dont les coefficients sont des *entiers* de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. En comparant l'expression $(\diamond)$ avec celle correspondant à 'ℓm' à la place de 'm', on obtient l'égalité :

$$\big(A_{m,0}(t)\big)^\ell \cdot B_{0,\ell m}(t^\ell) = \big(B_{m,0}(t)\big)^\ell \cdot A_{0,\ell m}(t^\ell) \pmod{\ell},$$

et donc

$$\ell \cdot \deg\Big(\frac{A_{m,0}(t)}{B_{m,0}(t)}\Big) = \deg\Big(\frac{A_{\ell m,0}(t^\ell)}{B_{\ell m,0}(t^\ell)}\Big). \tag{$\star_0$}$$

Notons maintenant $A'_{m,0}(\ell t) := A_m(t)/A_{m,0}(t)$ (resp. pour $B'_{m,0}(\ell t)$) et considérons les égalités suivantes issues de $(\diamond)$ où l'on a remplacé t par t/ℓ :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{A'_{m,0}(t)}{B'_{m,0}(t)}\right)^\ell = \left(\dfrac{B_{m,0}(t/\ell)}{A_{m,0}(t/\ell)}\right)^\ell \cdot \displaystyle\prod_{(s,e,d)} \left(\dfrac{\ell^d - t^d}{\ell^d - \boldsymbol{u}^{sfm}\,t^d}\right)^{\ell\,\frac{N(s,e,d)}{Ld}} \\ \dfrac{A'_{\ell m,0}(t^\ell)}{B'_{\ell m,0}(t^\ell)} = \dfrac{B_{\ell m,0}((t/\ell)^\ell)}{A_{\ell m,0}((t/\ell)^\ell)} \cdot \displaystyle\prod_{(s,e,d)} \left(\dfrac{\ell^{\ell d} - (t^\ell)^d}{\ell^{\ell d} - \boldsymbol{u}^{sf\ell m}\,(t^\ell)^d}\right)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}. \end{cases}$$

Les membres de gauche ont des développements en série formelle à coefficients *entiers* dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, de même donc que les membres de droite qui sont, en plus de même degré modulo ℓ d'après les raisonnements précédents.

En considérant le quotient des membres de droite, on peut voir que

$$\ell\cdot\deg\Big(\frac{A_{m,1}(t)}{B_{m,1}(t)}\Big)=\deg\Big(\frac{A_{\ell m,1}(t^\ell)}{B_{\ell m,1}(t^\ell)}\Big)\,. \tag{$\star_1$}$$

L'itération de ces idées nous permet de montrer, de proche en proche, que

$$\ell\cdot\deg\Big(\frac{A_{m,d}(t)}{B_{m,d}(t)}\Big)=\deg\Big(\frac{A_{\ell m,d}(t^\ell)}{B_{\ell m,d}(t^\ell)}\Big)\,. \tag{$\star_d$}$$

pour tout $d\in\mathbb{N}$, et par $(*')$, que l'on a

$$\ell\cdot\deg\Big(\frac{\zeta_m(\boldsymbol{X},t)}{\zeta_0(\boldsymbol{X},t)}\Big)=\deg\Big(\frac{\zeta_{\ell m}(\boldsymbol{X},t)}{\zeta_0(\boldsymbol{X},t)}\Big)\,. \tag{$\star\star$}$$

Cette égalité, maintenant indépendante du contexte ℓ-adique, mais valable pour tout nombre premier ℓ, s'itère de manière évidente et donne :

$$L\cdot\deg\Big(\frac{\zeta_m(\boldsymbol{X},t)}{\zeta_0(\boldsymbol{X},t)}\Big)=\deg\Big(\frac{\zeta_{Lm}(\boldsymbol{X},t^L)}{\zeta_0(\boldsymbol{X},t^L)}\Big)=\deg(1)=0\,,$$

pour tout $m=1,\dots,L-1$, CQFD.

L'égalité $L\cdot\deg\big(\zeta_0(\boldsymbol{X},t)\big)=\deg\big(\zeta(\boldsymbol{X},t)\big)$ est maintenant immédiate d'après la factorisation de la fonction Zêta (Eq.8) qui donne alors

$$\deg\big(\zeta(\boldsymbol{X},t)\big)=\sum_{m=0,\dots,L-1}\deg\big(\zeta_m(\boldsymbol{X},t)\big)=L\cdot\deg\big(\zeta_0(\boldsymbol{X},t)\big)\,,$$

d'après ce qui précède. ∎

§18) **À propos du rapport $\boldsymbol{\zeta(X,t)/\zeta(X/G,t)^L}$**

Dans la preuve du lemme **I**, le rapport entre les degrés de $\zeta(\boldsymbol{X},t)$ et $\zeta(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},t)$ est conséquence de l'égalité des degrés des fonctions rationnelles $\zeta_m(\boldsymbol{X},t)$, mais une démarche directe est aussi possible grâce au produit eulérien (Eq.25) (lemme **H**) :

$$\frac{\zeta(\boldsymbol{X},t)}{\zeta(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},t)^L}=\prod_{(s,e,d)}\Big(\frac{(1-t^{\frac{L}{s}d})^s}{(1-t^d)^L}\Big)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}}=\prod_{(s,e,d)}\Big(\prod\nolimits_{\alpha=0,\dots,\frac{L}{s}-1}\frac{\boldsymbol{u}^{s\alpha}-t^d}{1-t^d}\Big)^{s\frac{N(s,e,d)}{Ld}}$$

à partir duquel, la preuve de l'égalité $\deg(\zeta_m(\boldsymbol{X},t))=\deg(\zeta_0(\boldsymbol{X},t))$, s'applique presque inchangée pour montrer que $\deg\big(\zeta(\boldsymbol{X},t)\big)=\deg\big(\zeta(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{G},t)^L\big)$.

§19) **A propos de la preuve du lemme I**

Dans la présentation

$$\frac{\zeta_m(\boldsymbol{X},t)}{\zeta_0(\boldsymbol{X},t)}=\frac{A_m(t)}{B_m(t)}\,, \tag{$\star$}$$

avec $A_m(t),B_m(t)\in\overline{\mathbb{Q}}_\ell[t]$, une partie importante de la preuve du lemme concerne la valuation ℓ-adique des racines de ces polynômes. Or, les zéros de $A_m(t)$ et $B_m(t)$ sont aussi des valeurs propres de l'action du Frobenius sur la cohomologie étale ℓ-adique de $\boldsymbol{X}$, dont on sait qu'il s'agit des unités ℓ-adiques ([3]). Bien que cela simplifie beaucoup les raisonnements, puisqu'alors $A_{m,d}(t)=B_{m,d}(t)=1$ pour tout $d>0$, nous avons préféré ignorer ce résultat et donner une démonstration indépendante.

[3] Voir le corollaire 5.5.3, p. 31, de l'appendice §5 Théorèmes d'intégralité par P. Deligne, de l'article de N. Katz [K].

Quelques commentaires

- L'hypothèse sur l'ordre de θ est importante. Par exemple, sur la droite affine, l'automorphisme $\theta : \mathbb{A}^1(\boldsymbol{k}) \to \mathbb{A}^1(\boldsymbol{k}),\ x \mapsto x+1$, est d'ordre p, n'a pas de point fixe, et sa trace en cohomologie vaut 1.
- Il est intéressant de remarquer que les égalités du Théorème **2**

$$\chi(H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_0) = \chi(H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_1) = \cdots = \chi(H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_L)\,,$$

ne résultent pas de l'existence d'isomorphismes entre $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_0$ et $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{K})_i$. En effet, l'exemple

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{k}[X, X^{-1}]\,, \quad \boldsymbol{A} := \frac{\boldsymbol{k}[X, X^{-1}][T]}{(T^L - X)}\,, \quad \theta(T) = \boldsymbol{u}T\,,$$

montre par un calcul simple que l'on a

$$\begin{cases} H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_0 = \boldsymbol{K} \\ H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_0 = \boldsymbol{K} \end{cases} \quad \text{mais} \quad \begin{cases} H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_1 = \mathbf{0} \\ H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{K})_1 = \mathbf{0} \end{cases}$$

§ 1. Références bibliographiques

[A-M] A. Arabia, Z. Mebkhout. Sur le Topos infinitésimal p-adique dun schéma lisse I ; Ann. Inst. Fourier (Grenoble) Vol. 60 no. 6, p. 1905–2094, (2010).

[SGA-1] A. Grothendieck. Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1) ; Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–61. Lecture Notes in Mathematics **224**. Springer-Verlag (1971).

[K] N. Katz. Le niveau de la cohomologie des intersections completes ; avec un appendice par P. Deligne, exposé XXI, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–69, "Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique" (SGA 7 II). Lecture Notes in Mathematics **340** (1973).

[Mo] P. Monsky. Formal cohomology : III. Fixed point theorems ; Ann. of Math. (2) **93**, p. 315–343 (1971).