Appendice à l'article de M.-F. Vignéras
Induced R-representations of p-adic reductive groups

Selecta Mathematica, new series, 4 (1998) 549-623.

Appendice. Objets quasi-projectifs (Par Alberto Arabia)

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne vérifiant:

($\mathcal{C}$-a) Tout système inductif de $\mathcal{C}$ possède une limite inductive dans $\mathcal{C}$.

($\mathcal{C}$-b) Pour tout ensemble partiellement ordonné et filtrant supérieurement $\mathcal{A} := (\mathfrak{A}, \preceq)$, le foncteur $\varinjlim$ de la catégorie des systèmes inductifs de $\mathcal{C}$ paramétrés par $\mathcal{A}$ vers la catégorie $\mathcal{C}$, est exact.

($\mathcal{C}$-c) Les classes d'isomorphie des sous-objets de chaque objet de $\mathcal{C}$ constituent un ensemble.

Remarques, notations et rappels.

- Les propriétés ($\mathcal{C}$-$*$) sont vérifiées lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie de modules.
- La propriété ($\mathcal{C}$-a) est équivalente à l'existence de sommes directes arbitraires.
- La propriété ($\mathcal{C}$-b) concerne uniquement l'exactitude à gauche du foncteur $\varinjlim$ qui est toujours exact à droite. Les morphismes canoniques $\mathcal{M}_\alpha \longrightarrow$

$\varinjlim \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ des objets d'un système inductif filtrant de monomorphismes $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} := \{\mathcal{M}_\alpha \xrightarrow{\varphi_{\beta,\alpha}} \mathcal{M}_\beta\}_{\alpha \preceq \beta \in \mathfrak{A}}$ vers une limite inductive de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, sont donc des *monomorphismes*. De même, une limite inductive d'un système inductif filtrant de sous-objets d'un objet $\mathcal{M}$ est un sous-objet de $\mathcal{M}$.

- Pour $\mathcal{Q} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, on notera $E_{\mathcal{Q}} := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{Q})$ et Mod-$E_{\mathcal{Q}}$ la catégorie des $E_{\mathcal{Q}}$-modules à droite. Le foncteur $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \_) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \text{Mod-}E_{\mathcal{Q}}$ admet un adjoint à gauche que nous noterons $(\_) \otimes \mathcal{Q} : \text{Mod-}E_{\mathcal{Q}} \rightsquigarrow \mathcal{C}$; c'est un foncteur exact à droite qui commute aux limites inductives et vérifie $E_{\mathcal{Q}} \otimes \mathcal{Q} = \mathcal{Q}$.
- L'objet $\mathcal{Q}$ est dit *de type fini dans* $\mathcal{C}$ si pour tout système inductif filtrant de monomorphismes $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ (*cf.* ci-dessus) l'application canonique

$$\varinjlim_{\alpha} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{M}_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \varinjlim_{\alpha} \mathcal{M}_\alpha)$$

est *bijective*.

En particulier, $\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{M}_\alpha) \equiv \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{M}_\alpha)$, pour toute famille $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ d'objets.

Un quotient d'un objet de type fini est de type fini.

A.1. $\mathcal{Q}$-torsion

Définition. Soient $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{M}$ deux objets de $\mathcal{C}$. On dira que $\mathcal{M}$ *est de $\mathcal{Q}$-torsion* si $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) = \mathbf{0}$; et que $\mathcal{M}$ *possède de la $\mathcal{Q}$-torsion*, s'il existe un sous-objet non nul de $\mathcal{M}$ qui est de $\mathcal{Q}$-torsion.

On notera $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}\{\mathcal{M}\}$ la famille des sous-objets de $\mathcal{Q}$-torsion de $\mathcal{M}$ ordonnée par la relation d'ordre partiel "sous-objet de".

Proposition 1. *Soit $\mathcal{Q}$ un objet de type fini dans $\mathcal{C}$.*

(a) *Pour tout objet $\mathcal{M}$, la famille $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}\{\mathcal{M}\}$ possède des éléments maximaux.*

(b) *Soit $\mathcal{N}$ un élément maximal de $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}\{\mathcal{M}\}$ de conoyau $\nu : \mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathcal{M}'$, alors $\mathcal{M}'$ est sans $\mathcal{Q}$-torsion et* $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \nu)$ *est injective.*

Supposons que $\mathcal{Q}$ est un objet projectif d'une sous-catégorie pleine $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$ de $\mathcal{C}$, qui est stable par sommes directes et par sous-quotients dans $\mathcal{C}$.

(c) *Pour chaque objet $\mathcal{M}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$, la famille $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}\{\mathcal{M}\}$ possède un unique objet maximal qu'on notera $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M})$.*

(d) *Soient $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}})$ et $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, on a $\varphi(\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_1)) \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_2)$ d'où un morphisme induit $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}(\varphi) : \mathcal{T}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_1) \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_2)$. La correspondance $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}} : \mathcal{D}_{\mathcal{Q}} \rightsquigarrow \mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$ qui associe $\mathcal{M} \rightsquigarrow \mathcal{T}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M})$ et $\varphi \rightsquigarrow \mathcal{T}_{\mathcal{Q}}(\varphi)$ est fonctorielle.*

(e) *Un conoyau $\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}$ de la transformation naturelle de foncteurs $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}(\_) \hookrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}}$ est un adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\mathcal{D}'_{\mathcal{Q}} \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$, où $\mathcal{D}'_{\mathcal{Q}}$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$ des objets sans $\mathcal{Q}$-torsion.*

Démonstration.

(a) Lemme de Zorn.

(b) Pour $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}'$ de $\mathcal{Q}$-torsion, on a une suite exacte courte:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{N} \xhookrightarrow{\jmath} \nu^{-1}(\mathcal{R}) \twoheadrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{0}$$

où $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \jmath)$ est bijectif. Par conséquent, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \nu^{-1}(\mathcal{R})) = \mathbf{0}$, et par la maximalité de $\mathcal{N}$, $\jmath$ est un isomorphisme et $\mathcal{R} = \mathbf{0}$.

(c) La catégorie $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$ est abélienne et donc stable par limites inductives dans $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{Q}$ est projectif la somme de deux sous-objets de $\mathcal{Q}$-torsion de $\mathcal{M}$ est encore de $\mathcal{Q}$-torsion, la famille $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}\{\mathcal{M}\}$ est alors filtrante et sa limite est le sous-objet de $\mathcal{M}$ noté $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M})$.

(d) Il suffit de montrer que pour tout épimorphisme $p : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{N}'$ dans $\mathcal{C}$, où $\mathcal{N}$ est un objet de $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$ de $\mathcal{Q}$-torsion, l'objet $\mathcal{N}'$ est encore de $\mathcal{Q}$-torsion. Ceci résulte du fait que $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$ est stable par quotient et que par la projectivité de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, p)$ est surjective.

(e) Pour tous $\mathcal{N} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}'_{\mathcal{Q}})$ et $\mathcal{M} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}})$, on a l'épimorphisme $\nu : \mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M})$ et l'application naturelle:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}), \mathcal{N}) \xrightarrow{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\nu, \mathcal{N})} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$$

est trivialement bijective. □

A.2. Catégories $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},*}$ et $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q},*}$

Définitions.

- On note $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ dont les objets sont les quotients des sommes directes de copies de $\mathcal{Q}$. La catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ est stable par limite inductive et par quotients dans $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ des objets sans $\mathcal{Q}$-torsion.
- Un objet $\mathcal{M}$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ sera dit $\mathcal{Q}$-*fini*, s'il est quotient d'une somme *finie* de copies de $\mathcal{Q}$. Plus généralement, $\mathcal{M} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\mathcal{Q}})$ sera dit $\mathcal{Q}$-*quasi-cohérent* (resp. $\mathcal{Q}$-*cohérent*), s'il est le but d'un conoyau d'un morphisme entre sommes directes (resp. finies) de copies de $\mathcal{Q}$.
- On notera $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},\mathrm{coh}}, \mathcal{C}_{\mathcal{Q},\text{q-coh}}, \mathcal{C}_{\mathcal{Q},\mathrm{f.}}, \mathcal{C}'_{\mathcal{Q},\mathrm{f.}}$ les sous-catégories pleines de $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ des objets respectivement $\mathcal{Q}$-cohérents, $\mathcal{Q}$-quasi-cohérents, $\mathcal{Q}$-finis et $\mathcal{Q}$-finis sans $\mathcal{Q}$-torsion.
- Les notations $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}\text{-}E_{\mathcal{Q}}$, $\mathrm{Mod}_{\mathrm{t.f.}}\text{-}E_{\mathcal{Q}}$ désigneront, les sous-catégories pleines de $\mathrm{Mod}\text{-}E_{\mathcal{Q}}$ des $E_{\mathcal{Q}}$-modules respectivement cohérents et de type fini.

On a les égalités d'image essentielle:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{\mathcal{Q},\text{q-coh}} = \big(\mathrm{Mod}\text{-}E_{\mathcal{Q}}\big) \otimes \mathcal{Q}\,; \\ \mathcal{C}_{\mathcal{Q},\mathrm{coh}} = \big(\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}\text{-}E_{\mathcal{Q}}\big) \otimes \mathcal{Q}\,. \end{cases}$$

Proposition 2.

1) *Si* $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ *est stable par "sous-objets dans* $\mathcal{C}$*", on a*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{Q}} = \mathcal{C}_{\mathcal{Q},\text{q-coh}} = \mathcal{C}'_{\mathcal{Q}}\,.$$

2) *Lorsque* $\mathcal{Q}$ *de type fini dans* $\mathcal{C}$*, il y a équivalence entre:*
   (a) *Les quotients de* $\mathcal{Q}$ *dans* $\mathcal{C}$ *sont sans* $\mathcal{Q}$*-torsion.*
   (b) $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}} = \mathcal{C}'_{\mathcal{Q}}$.

Démonstration.

1) Lorsque les sous-objet dans $\mathcal{C}$ des objets de $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ sont dans $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$, le noyau de tout épimorphisme $\bigoplus_{\mathfrak{A}} \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$ est un quotient d'une somme de copies de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}} = \mathcal{C}_{\mathcal{Q},\text{q-coh}}$; d'autre part, tout sous-objet $\mathcal{N}$ de $\mathcal{Q}$-torsion de $\mathcal{M}$ est quotient d'une somme de copies de $\mathcal{Q}$ ce qui n'est possible que si $\mathcal{N} = \mathbf{0}$, donc $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}} = \mathcal{C}'_{\mathcal{Q}}$.
2) (a) $\Rightarrow$ (b). Soit un épimorphisme $p : \bigoplus_{\mathfrak{A}} \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$, et supposons qu'il existe un sous-objet $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ *non nul* de $\mathcal{Q}$-torsion. Il existe alors une partie finie $F \subseteq \mathfrak{A}$ telle que $p(\bigoplus_F \mathcal{Q})$ rencontre $\mathcal{N}$. En effet, autrement pour tout conoyau $\nu : \mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathcal{R}$ de $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, les restrictions de ν aux images $p(\bigoplus_F \mathcal{Q})$ seraient des monomorphismes et comme $\mathcal{M}$ est la limite inductive du système (filtrant) défini par ces images, il en résulterait que ν est lui-même un monomorphisme et alors $\mathcal{N} = \mathbf{0}$. Soit donc $F \subseteq \mathfrak{A}$ de cardinal minimum tel que $p(\bigoplus_F \mathcal{Q})$ rencontre $\mathcal{N}$; notons $F := \{1, \dots, r\}$ et $\mu : \mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathcal{M}'$ un conoyau pour $p(\bigoplus_{i=2,\dots,r} \mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{M}$. Comme $p(\bigoplus_{i=2,\dots,r} \mathcal{Q})$ ne rencontre pas $\mathcal{N}$, la restriction de μ à $\mathcal{N}$ est un monomorphisme et $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mu(\mathcal{N})) = \mathbf{0}$. Le morphisme $\mu \circ p : \bigoplus_{i=1,\dots,r} \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{M}'$ se restreint au premier facteur de la somme en question, d'où un morphisme $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{M}'$ dont l'image rencontre $\mu(\mathcal{N})$ et comme $\mu(\mathcal{N}) \neq \mathbf{0}$, l'objet $\mathcal{Q}$ à un quotient qui possède de la $\mathcal{Q}$-torsion.
   L'implication (b)$\Rightarrow$(a) est triviale. □

A.3. Objets quasi-projectifs

Un objet $\mathcal{Q}$ sera dit *quasi-projectif* si pour tout épimorphisme $p : \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$, l'application

$$\boxed{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, p) : E_{\mathcal{Q}} \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{M})}$$

est *surjective*. Il sera dit *quasi-projectif de type fini*, si de plus $\mathcal{Q}$ est de type fini dans $\mathcal{C}$.

Catégorie $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$

Pour tout objet $\mathcal{Q}$, on note $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ des objets $\mathcal{M}$ tels que, pour *tout* épimorphisme $p : \mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathcal{M}'$, l'application canonique:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, p) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{M}')$$

est *surjective*.

Proposition 3. *Pour tout objet $\mathcal{Q}$, on a:*

1) *Tout sous-quotient dans $\mathcal{C}$ d'un objet de $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$ est un objet de $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$.*
2) *$\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$ est une sous-catégorie abélienne de $\mathcal{C}$ et l'inclusion $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}} \subseteq \mathcal{C}$ est un foncteur exact.*

Supposons en plus $\mathcal{Q}$ de type fini dans $\mathcal{C}$, alors:

3) *$\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$ est stable par limites inductives et sommes directes dans $\mathcal{C}$.*

Démonstration.

1) Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$ et considérons une suite exacte courte dans $\mathcal{C}$:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M} \xrightarrow{\beta} \mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Pour $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, notons $\mathcal{M}' = \beta^{-1}(\mathcal{L}')$. Le morphisme β induit alors un isomorphisme $\bar{\beta} : \mathcal{M}/\mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{L}/\mathcal{L}'$ et chaque morphisme $\varphi : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{L}/\mathcal{L}' \equiv \mathcal{M}/\mathcal{M}'$ se relève en un morphisme $\psi : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{M}$. Le morphisme $\tilde{\varphi} := \beta \circ \psi : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{L}$ relève φ. Donc $\mathcal{L} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}})$.

Pour chaque $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ on a un diagramme commutatif de lignes et colonnes exactes:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] & & \\
 & \mathcal{N}' \arrow[r, "\equiv"] \arrow[d] & \mathcal{N}' \arrow[d] & & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \mathcal{M} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d, "\equiv"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}'} \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d] & \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}'} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{coker}(\bar{\alpha}) \arrow[r] & \mathbf{0} \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & &
\end{tikzcd}$$

d'où un morphisme de suites exactes à gauche:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}) \arrow[r, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q},\alpha)"] \arrow[d] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) \arrow[r, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q},\beta)"] \arrow[d] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{L}) \arrow[d, "\equiv"] \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}\left(\mathcal{Q}, \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}'}\right) \arrow[r, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q},\bar{\alpha})"] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}\left(\mathcal{Q}, \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}'}\right) \arrow[r] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathrm{coker}(\bar{\alpha}))
\end{tikzcd}$$

dans lequel le morphisme vertical central est surjectif puisque $\mathcal{M}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}})$; la surjectivité de la première flèche verticale en découle et $\mathcal{N}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}})$.

2) Soient $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}})$. Pour chaque $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2$ on a un diagramme de lignes et colonnes exactes:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & i_1^{-1}(\mathcal{N}) \arrow[r, "i_1'"] \arrow[d] & \mathcal{N} \arrow[r, "\pi_2'"] \arrow[d] & \pi_2(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathcal{M}_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & \mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d] & \mathcal{M}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \dfrac{\mathcal{M}_1}{i_1^{-1}(\mathcal{N})} \arrow[r, "\bar{\imath}_1"] \arrow[d] & \dfrac{\mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2}{\mathcal{N}} \arrow[r, "\bar{\pi}_2"] \arrow[d] & \dfrac{\mathcal{M}_2}{\pi_2(\mathcal{N})} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} &
\end{tikzcd}$$

où i_1 est l'injection canonique sur $\mathcal{M}_1\otimes\mathbf{0}$, et π_2 est la projection canonique sur le second facteur de $\mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2$. On a noté π_2' la restriction de π_2 à $\mathcal{N}$ et i_1' la restriction de i_1 à $i_1^{-1}(\mathcal{N})$. Le foncteur $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q},\_)$, appliqué au deux dernières lignes, donne un diagramme commutatif de lignes exactes à gauche:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q},\mathcal{M}_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q},\mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q},\mathcal{M}_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}\Big(\mathcal{Q},\dfrac{\mathcal{M}_1}{i_1^{-1}(\mathcal{N})}\Big) \arrow[r] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}\Big(\mathcal{Q},\dfrac{\mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2}{\mathcal{N}}\Big) \arrow[r] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}\Big(\mathcal{Q},\dfrac{\mathcal{M}_2}{\pi_2(\mathcal{N})}\Big) \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

où la première ligne est exacte puisque scindée et les morphismes verticaux de gauche et de droite sont surjectifs puisque $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}})$. Il s'ensuit que la deuxième ligne est exacte, puis que le morphisme central est surjectif. Par conséquent $\mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}})$ et la catégorie $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$ est additive.

La fin de la preuve de (2) est alors conséquence immédiate de (1).

3) Soient $\mathcal{A}=(\mathfrak{A},\preceq)$ un ensemble partiellement ordonné filtrant supérieurement et $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}:=\{\psi_{\beta,\alpha}:\mathcal{M}_\alpha\longrightarrow\mathcal{M}_\beta\}_{\alpha\preceq\beta\in\mathfrak{A}}$ un système inductif d'objets de $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$. Notons $\jmath_\alpha:\mathcal{M}_\alpha\longrightarrow\varinjlim\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ le morphisme canonique. Pour tout épimorphisme $p:\varinjlim\mathcal{M}_{\mathcal{A}}\twoheadrightarrow\mathcal{N}$ dans $\mathcal{C}$, l'objet $\mathcal{N}$ est limite inductive filtrante des sous-objets $p(\jmath_\alpha(\mathcal{M}_\alpha))$ et pour chaque $\varphi\in\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q},\mathcal{N})$, il

existe un indice α tel que $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq p(\jmath_\alpha(\mathcal{M}_\alpha))$; comme $\mathcal{M}_\alpha \in \mathcal{D}_\mathcal{Q}$, le morphisme φ se relève en un morphisme $\psi_\alpha : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{M}_\alpha$ et la composée $\jmath_\alpha \circ \psi_\alpha$ relève φ à $\varinjlim \mathcal{M}_\mathcal{A}$.

On en déduit la stabilité de $\mathcal{D}_\mathcal{Q}$ par sommes directes, puis, à l'aide de (1), la stabilité par limites inductives arbitraires. □

Théorème 4.

1) *Pour tout objet $\mathcal{Q}$ quasi-projectif, le foncteur*

$$\mathrm{Mor}_\mathcal{C}(\mathcal{Q}, \_) : \mathcal{C}_{\mathcal{Q},\mathrm{coh}} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}\text{-}E_\mathcal{Q}$$

est une équivalence de catégories.

2) *Pour tout objet $\mathcal{Q}$ quasi-projectif de type fini, les foncteurs*

$$\begin{cases} \text{(b-1)}\ \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(\mathcal{Q}, \_) : \mathcal{C}_{\mathcal{Q},\text{q-coh}} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}\text{-}E_\mathcal{Q}\,, \\ \text{(b-2)}\ \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(\mathcal{Q}, \_) : \mathcal{C}'_\mathcal{Q} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}\text{-}E_\mathcal{Q}\,, \\ \text{(b-3)}\ \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(\mathcal{Q}, \_) : \mathcal{C}'_{\mathcal{Q},\mathrm{f.}} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{t.f.}}\text{-}E_\mathcal{Q}\,, \end{cases}$$

sont des équivalences de catégories.

Démonstration.

1) $\mathcal{Q}$ est un objet de $\mathcal{D}_\mathcal{Q}$ puisque quasi-projectif et alors $\mathcal{C}_{\mathcal{Q},\mathrm{coh}} \subseteq \mathcal{D}_\mathcal{Q}$ (prop. 3).

Pour tout objet $\mathcal{M}$ de $\mathcal{D}_\mathcal{Q}$ la transformation naturelle:

$$\Phi(\_, \mathcal{M}) : \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(\_, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E_\mathcal{Q}}(\mathrm{Mor}_\mathcal{C}(\mathcal{Q}, \_), \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(\mathcal{Q}, \mathcal{M}))$$

relie deux foncteurs exacts à droite sur $\mathcal{D}_\mathcal{Q}$ puisque $\mathcal{Q}$ y est projectif. Il s'ensuit que $\Phi(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ sera bijective pour tout $\mathcal{N} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\mathcal{Q},\mathrm{coh}})$, si $\Phi(\bigoplus_F \mathcal{Q}, \mathcal{M})$ est bijective pour tout ensemble F, c'est-à-dire, si $\Phi(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ est bijective pour tout $\mathcal{M}$, ce qui est tautologique. Enfin, il est clair par la projectivité de $\mathcal{Q}$ que tout $E_\mathcal{Q}$-module cohérent est de la forme $\mathrm{Mor}_\mathcal{C}(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ avec $\mathcal{M} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\mathcal{Q},\mathrm{coh}})$.

2) Comme $\mathcal{Q}$ est quasi-projectif de type fini la catégorie $\mathcal{C}_\mathcal{Q}$ est contenue dans $\mathcal{D}_\mathcal{Q}$ où $\mathcal{Q}$ est projectif (prop. 3).

La preuve de (1) montre également que $\mathrm{Mor}_\mathcal{C}(\mathcal{Q}, \_) : \mathcal{C}_{\mathcal{Q},\text{q-coh}} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}\text{-}E_\mathcal{Q}$ est une équivalence de catégories d'inverse son adjoint à gauche: $(\_) \otimes \mathcal{Q}$. Les morphismes d'adjonction:

$$\begin{aligned} &\Theta_\mathcal{Q}(\mathcal{M}) : \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) \otimes \mathcal{Q} \xrightarrow{\equiv} \mathcal{M} \qquad \text{et} \\ &\Xi_\mathcal{Q}(W) : W \xrightarrow{\equiv} \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(\mathcal{Q}, W \otimes \mathcal{Q}) \end{aligned} \tag{$*$}$$

associés à la paire de foncteurs adjoints $\big((\_) \otimes \mathcal{Q}, \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(\mathcal{Q}, \_)\big)$, sont des isomorphismes pour tous $\mathcal{M} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\mathcal{Q},\text{q-coh}})$ et $W \in \mathrm{Mod}\text{-}E_\mathcal{Q}$.

Ceci étant, le foncteur $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \_) : \mathcal{C}'_{\mathcal{Q}} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}\text{-}E_{\mathcal{Q}}$ se factorise en l'inclusion de catégories $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ suivie de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \_) : \mathcal{C}_{\mathcal{Q}} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}\text{-}E_{\mathcal{Q}}$. La composition d'adjoints à gauche $\mathcal{L}_{\mathcal{Q}} \circ (\_ \otimes \mathcal{Q})$ est donc un adjoint à gauche de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \_) : \mathcal{C}'_{\mathcal{Q}} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}\text{-}E_{\mathcal{Q}}$. La composition

$$W \xrightarrow[\equiv]{\Xi_{\mathcal{Q}}(W)} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, W \otimes \mathcal{Q}) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(W \otimes \mathcal{Q}))$$

est clairement bijective et le foncteur $\mathcal{L}_{\mathcal{Q}} \circ (\_ \otimes \mathcal{Q}) : \mathrm{Mod}\text{-}E_{\mathcal{Q}} \rightsquigarrow \mathcal{C}'_{\mathcal{Q}}$ est pleinement fidèle. Montrons qu'il est essentiellement surjectif.

Pour chaque objet $\mathcal{N}$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$, on définit $p(\mathcal{N}) : \bigoplus_{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q},\mathcal{M})} \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{N}$ comme le morphisme dont la restriction $p(\mathcal{N})_{\varphi} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{N}$, correspondante au facteur de la somme indexé par $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$, vérifie $p(\mathcal{N})_{\varphi} = \varphi$. Le morphisme $p(\mathcal{N})$ factorise (par définition) tout épimorphisme $p : \bigoplus_{\mathfrak{A}} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$. On en déduit tautologiquement que $p(\mathcal{N})$ est un épimorphisme, que $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, p(\mathcal{N}))$ est surjectif et que $\Theta_{\mathcal{Q}}(\mathcal{N}) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}) \otimes \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{N}$ factorise $p(\mathcal{N})$ (c'est donc un épimorphisme) et son noyau est de $\mathcal{Q}$-torsion. Par conséquent, le morphisme:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}\Big(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}) \otimes \mathcal{Q}\Big) \xrightarrow[\equiv]{\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\Theta_{\mathcal{Q}}(\mathcal{N}))} \mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{N}) \qquad (**)$$

est un isomorphisme pour tout $\mathcal{N} \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$.

En particulier tout $\mathcal{N} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}})$ est dans l'image essentielle du foncteur $\mathcal{L}_{\mathcal{Q}} \circ (\_ \otimes \mathcal{Q})$. $\square$

Dans la démonstration précédente nous avons prouvé le résultat suivant.

Proposition 5. *Soit $\mathcal{Q}$ un objet quasi-projectif de type fini. Pour tout objet $\mathcal{M}$ de $\mathcal{C}$ le morphisme:*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}\Big(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) \otimes \mathcal{Q}\Big) \xrightarrow[\subseteq]{\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\Theta_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}))} \mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M})$$

est un monomorphisme. De plus,

$$\begin{cases} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\Theta_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}))) \textit{ est bijectif, et} \\ \mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\Theta_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M})) \textit{ est nul, si et seulement si, } \mathcal{M} \textit{ est de } \mathcal{Q}\textit{-torsion.} \end{cases}$$

A.4. Objets presque-projectifs

Chaque épimorphisme $\pi : \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ donne lieu au morphismes :

$$\begin{tikzcd} & E_{\mathcal{Q}} = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}) \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\pi, \mathcal{Q})"] & \\ E_{\mathcal{P}} = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}, \mathcal{P}) \arrow[r, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}, \pi)"] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \arrow[r] & \mathbf{0} \end{tikzcd} \qquad (\ddagger)$$

où $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\pi, \mathcal{Q})$ est toujours injective, et la ligne sera exacte si $\mathcal{P}$ est projectif.

Définition. Un objet $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{C}$ sera dit *presque-projectif*, lorsque il existe un objet projectif $\mathcal{P}$, et un épimorphisme $\pi : \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$, tels que dans (‡), l'image de $E_{\mathcal{Q}}$ et l'image de $E_{\mathcal{P}}$ dans $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ coïncident. Lorsque, dans ces données, $\mathcal{P}$ est en plus de type fini (auquel cas $\mathcal{Q}$ l'est également), on dira que $\mathcal{Q}$ est *presque-projectif de type fini*.

On a un isomorphisme et une surjection canoniques:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\pi, \mathcal{Q}) : E_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{\equiv} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) , \qquad \xi : E_{\mathcal{P}} \twoheadrightarrow E_{\mathcal{Q}} ,$$

où $\xi = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\pi, \mathcal{Q})^{-1} \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}, \pi)$ est un homomorphisme d'anneaux. Un épimorphisme π vérifiant les conditions ci-dessus sera appelé *une présentation* de $\mathcal{Q}$.

Lemme 6. *Soient $\mathcal{P}$ un objet projectif, et $\pi : \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ un épimorphisme. Il y a équivalence entre:*

(a) *Le noyau de $\pi : \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ est stable sous l'action de $E_{\mathcal{P}}$.*
(b) *$\mathcal{Q}$ est presque-projectif et π est une présentation de $\mathcal{Q}$.*

En particulier, si $\mathcal{Q}$ est presque-projectif (de type fini) et si $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Q}$ est un sous-objet stable par $E_{\mathcal{Q}}$, pour tout conoyau $\nu : \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}'$ de $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ est presque-projectif (de type fini) et $\nu \circ \pi$ est une présentation de $\mathcal{Q}'$ pour chaque présentation π de $\mathcal{Q}$.

Démonstration. Notons $\kappa : \mathcal{K} \rightarrowtail \mathcal{P}$ un noyau pour π. On a

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K}, \pi) \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\kappa, \mathcal{P}) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\kappa, \mathcal{Q}) \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}, \pi)$$

et (a) équivaut à l'annulation du membre de gauche et (b) à celle du membre de droite.

La dernière partie du lemme résulte alors de vérifier que pour toute présentation $\pi : \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$, $\pi^{-1}(\mathcal{N})$ est $E_{\mathcal{P}}$-stable. Or, pour tout $\varphi \in E_{\mathcal{P}}$ il existe $\bar{\varphi} \in E_{\mathcal{Q}}$ tel que $\pi \circ \varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$, par conséquent $\pi\big(\varphi(\pi^{-1}(\mathcal{N}))\big) = \bar{\varphi}\big(\pi(\pi^{-1}(\mathcal{N}))\big) = \bar{\varphi}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ et donc $\varphi(\pi^{-1}(\mathcal{N})) \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{N})$.

Proposition 7.

(a) *Un objet presque-projectif est quasi-projectif.*
(b) *Soient $\mathcal{Q}$ un objet quasi-projectif, et $\pi : \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}'$ un épimorphisme de noyau stable sous l'action de $E_{\mathcal{Q}}$. Alors $\mathcal{Q}'$ est quasi-projectif.*

Démonstration.

(a) Soient $\pi : \mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ une présentation de l'objet presque-projectif $\mathcal{Q}$. Pour tout épimorphisme $p : \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}'$, la surjectivité de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, p)$ résulte immédiatement du diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}) \arrow[r, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q},p)"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\pi,\mathcal{Q})"', "="] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}') \arrow[d, "\subseteq"', "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\pi,\mathcal{Q}')"] \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \arrow[r, two heads, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P},p)"] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}'). \end{tikzcd}$$

(b) Comme $\mathcal{Q}$ est projectif dans la catégorie abélienne $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$ qui est stable par sous-quotients dans $\mathcal{C}$, l'objet $\mathcal{Q}'$ est presque-projectif d'après le lemme précédent, et est donc quasi-projectif d'après (a). □

Corollarie 8. *Soit $\mathcal{Q}$ un objet quasi-projectif de type fini. On a des équivalences de catégories:*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{Q},\text{q-coh}} \sim \mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q}),\text{q-coh}}, \qquad \mathcal{C}_{\mathcal{Q},\text{coh}} \sim \mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q}),\text{coh}},$$

et des égalités $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}} = \mathcal{C}'_{\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q})}$ et $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q},\text{f.}} = \mathcal{C}'_{\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q}),\text{f.}}$.

Démonstration. En effet, comme $\mathcal{Q}$ est supposé de type fini la torsion $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q})$ est bien définie et est clairement stable sous l'action de $E_{\mathcal{Q}}$. La proposition précédente affirme alors que $\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q})$ est quasi-projectif et comme $E_{\mathcal{Q}} = E_{\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q})}$, le théorème 4 prouve les équivalences. Enfin, on vérifie aisément l'inclusion $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}} \subseteq \mathcal{C}'_{\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q})}$ et comme $\operatorname{Mor}(\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q}), \_)$ coïncide avec $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \_)$ sur ces catégories, l'équivalence de catégories sur $\operatorname{Mod}\text{-}E_{\mathcal{Q}}$ prouve les égalités. □

Théorème 9. *Soit $\mathcal{Q}$ un objet de $\mathcal{C}$ sans $\mathcal{Q}$-torsion et de type fini. Il y a équivalence entre:*

(a) *$\mathcal{Q}$ est quasi-projectif de type fini.*
(b) *$\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \_) : \mathcal{C}'_{\mathcal{Q}} \rightsquigarrow \operatorname{Mod}\text{-}E_{\mathcal{Q}}$ est une équivalence de catégories.*

Démonstration. L'implication (a)⇒(b) est dans le théorème 4; pour prouver la réciproque considérons un épimorphisme $p : \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}'$ dans $\mathcal{C}$ et montrons que $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, p)$ est surjective.

D'après (b) de la proposition 1, il existe un épimorphisme $\nu : \mathcal{Q}' \twoheadrightarrow \mathcal{Q}''$ tel que $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \nu)$ est injectif et tel que $\mathcal{Q}''$ est sans $\mathcal{Q}$-torsion. Le morphisme $\nu \circ p : \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}''$ est alors tel que $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \nu \circ p)$ est *surjectif*. En effet, comme $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}''$ sont tous les deux dans $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}}$, il existe d'après l'équivalence de catégories (b) un objet $\mathcal{Q}'''$ de $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}}$ et un morphisme $\mu : \mathcal{Q}'' \longrightarrow \mathcal{Q}'''$ tels que $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mu)$ est un conoyau pour $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \nu \circ p)$. En particulier $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mu \circ (\nu \circ p)) = 0$ et donc $\mu \circ (\nu \circ p) = 0$; or, $\nu \circ p$ est un épimorphisme de $\mathcal{C}$ et alors $\mu = 0$.

Soit maintenant $\varphi : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}'$ un morphisme quelconque. Comme $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \nu \circ p)$ est surjective, il existe $\psi \in E_{\mathcal{Q}}$ vérifiant $(\nu \circ p) \circ \psi = \nu \circ \varphi$, et alors $p \circ \psi = \varphi$ puisque $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \nu)$ est injective.

A.5. Objets simples

Rappelons qu'un objet $\mathcal{S}$ d'une catégorie abélienne est dit *simple* s'il n'est pas nul et si tout monomorphisme non nul $\mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{S}$ est un isomorphisme.

Théorème 10. *Soit $\mathcal{Q}$ un objet quasi-projectif de type fini de $\mathcal{C}$.*

1) *Les classes d'isomorphie des objets simples de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas de $\mathcal{Q}$-torsion sont les classes d'isomorphie d'objets simples de la catégorie abélienne $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}}$.*

2) *Le foncteur* $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \_) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}\text{-}E_{\mathcal{Q}}$ *induit une bijection entre les classes d'isomorphie des objets simples de* $\mathcal{C}$ *qui ne sont pas de* $\mathcal{Q}$*-torsion et les classes d'isomorphie des* $E_{\mathcal{Q}}$*-modules à droite simples.*

Démonstration. On utilisera constamment l'équivalence de catégories $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}} \sim \mathrm{Mod}\text{-}E_{\mathcal{Q}}$ du théorème 4.

1) *Un objet simple de* $\mathcal{C}$ *qui n'est pas de* $\mathcal{Q}$*-torsion est un objet simple de* $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}}$.

En effet, un objet $\mathcal{S}$ simple dans $\mathcal{C}$ et tel que $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{S}) \neq \mathbf{0}$ est sans $\mathcal{Q}$-torsion et vérifie $\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{S}) \otimes \mathcal{Q}) \equiv \mathcal{S}$ grâce à la proposition 5, donc $\mathcal{S} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}})$. D'autre part, un sous-objet de $\mathcal{S}$ *dans* $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}}$ est la donnée d'un objet $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}}$ et d'un morphisme $\nu : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}$ tels que $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \nu)$ est injectif; mais alors $\ker(\nu)$ est de $\mathcal{Q}$-torsion et est nécessairement nul. Par conséquent $\mathcal{S}'$ est un sous-objet de $\mathcal{S}$ *dans* $\mathcal{C}$ et la simplicité de $\mathcal{S}$ *dans* $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}}$ en résulte.

Un objet simple de $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}}$ *est simple dans* $\mathcal{C}$. En effet, pour tout $\mathcal{S} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}})$, on a $\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{S}) \otimes \mathcal{Q}) \equiv \mathcal{S}$ (prop. 5), et pour tout monomorphisme non nul $\eta : \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{S}$, on a $\mathbf{0} \subsetneqq \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{S})$ puisque $\mathcal{N}$ est sans $\mathcal{Q}$-torsion. Or, $\mathcal{S}$ est simple *dans* $\mathcal{C}'_{\mathcal{Q}}$, si et seulement si, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{S})$ est simple dans $\mathrm{Mod}\text{-}E_{\mathcal{Q}}$; dans ce cas, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \eta) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}, \mathcal{S})$ est bijective et tout épimorphisme $p : \bigoplus_{\mathfrak{A}} \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{S}$ se factorise par η qui est donc un isomorphisme.

2) Conséquence immédiate de (1). □

References

[Ariki] S. Ariki. On the decomposition number of the Hecke algebra of $G(m, 1, n)$. Preprint 1996.

[BM] D. Barbasch and A. Moy. Local characters expansions. Preprint 1995.

[BD] J. Bernstein. Le centre de Bernstein (written by Deligne). *Représentations des groupes réductifs sur un corps local.* Bernstein, Deligne, Kazhdan, Vignéras. Travaux en cours. Hermann, Paris, 1984.

[BT] F. Bruhat and J. Tits. Groupes réductifs sur un corps local II. *Publications Mathématiques I.H.E.S.* **41** (1972).

[Borel] A. Borel. Admissible representations of a semisimple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup. *Invent. Math.* **35** (1976), 233–259.

[Bki] N. Bourbaki. *Algèbre.* Chapitres 1 à 3. Hermann, Paris, 1970.

[B] C. Bushnell. Induced representations of locally profinite groups. *J. of Algebra* **134** (1990), 104–114.

[BK1] C. Bushnell and Ph. Kutzko. The admissible dual of $GL(N)$ via open compact subgroups. *Annals of Math. Studies* **129**, Princeton University Press, 1993.

[BK2] C. Bushnell and Ph. Kutzko. Semisimple types in GL_n. Preprint 1996.

[BK3] C. Bushnell and Ph. Kutzko. Smooth representations of reductive p-adic groups. Preprint 1996.

[BZ] J. Bernstein and A. Zelevinski. Induced representations of reductive p-adic groups. *Ann. scient. E.N.S.* **10** (1977), 441–472.

[Carter] R. Carter. *Simple groups of Lie type.* Wiley, 1985.

[CR] C. Curtis and I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associated algebras.* Wiley Interscience, 1988.

[Dipper] R. Dipper. On quotients of Hom-functors and representations of general linear groups I. *J. of Algebra* **130** (1990), 254–259.

[DJ] R. Dipper and G. James. Identification of the irreducible modular representations of $GL_n(q)$. *J. of Algebra* **104** (1986), 266-288.

[GHM] M. Geck, G. Hiss and G. Malle. Towards a classification of the irreducible representations in non-describing characteristic of a finite group of Lie type. *Math. Z.* **221** (1996), 353–386.

[Gro] I. Grojnowski. Representations of affine Hecke algebras (and affine quantum GL_n) at roots of unity. *Internat. math. res. notices* 1994, n^{o}5, 215ff *(electronic).*

[HL] R.B. Howlett and G.I. Lehrer. Induced cuspidal representations and generalized Hecke rings. *J. of Algebra* **165** (1994), 172–183.

[IM] N. Iwahori and H. Matsumoto. On some Bruhat decompositions and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups. *Publ. Math. I.H.E.S.* **25** (1965), 5–48.

[K] S.-I. Kato. Duality for representations of a Hecke algebra. *Proceedings of the A.M.S.* **119** (1993), 941–946.

[J] G. James. The irreducible representations of the finite general linear groups. *Proc. London Math. Soc.* **52** (1986), 236–268.

[MW] C. Moeglin and J.-L. Waldspurger. Modèles de Whittaker dégénérées pour des groupes p-adiques. *Math. Z.* **196** (1987), 427–452.

[MW2] C. Moeglin and J.-L. Waldspurger. Sur l'involution de Zelevinski. *J. für die reine und angew. Math.* **372** (1986), 136–177.

[M] L. Morris. Tamely ramified intertwining algebras. *Invent. math.* **114** (1993), 1–54.

[Reiner] I. Reiner. *Maximal orders.* Academic Press, 1975.

[Tits] J. Tits. Reductive groups over local fields. *Proceedings A.M.S.* **XXXIII,** n^{o} I, 29–70.

[Vig0] M.-F. Vignéras. Banal characteristic for reductive p-adic groups. *J. of Number Theory* **47:3** (1994), 378–397.

[Vig1] M.-F. Vignéras. Représentations ℓ-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $\ell \neq p$. Progress in Mathematics 137. Birkhäuser, 1996.

[Vig2] M.-F. Vignéras. A propos d'une conjecture de Langlands modulaire. *Finite reductive groups.* Progress in Mathematics 141 (M. Cabannes, ed.). Birkhäuser, 1997.

[Vig3] M.-F. Vignéras. Cohomology of sheaves on the building and R-representations. *Inventiones mathematicae* **127** (1997), 349–373.

[Vig4] M.-F. Vignéras. Modular representations of level 0. Preprint 1996.

[Vig5] M.-F. Vignéras. Extensions between irreducible representations of a p-adic $GL(n)$. Pacific Journal, 1998. Olga Taussky-Todd memorial issue.

[Z] A. Zelevinski. Induced representations of reductive p-adic groups II. *Ann. scient. Ecole Norm. Sup.* **13** (1980), 165–210.

M.-F. Vignéras and A. Arabia
Université de Paris 7
UFR de Mathématiques
2 place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 05
France
e-mail: vigneras@math.jussieu.fr
arabia@math.jussieu.fr