L'INVOLUTION DE ZELEVINSKI MODULO ℓ

par

Alberto Mínguez & Vincent Sécherre

Abstract. — Let F be a non-Archimedean locally compact field with residual characteristic p, let G be an inner form of $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, $n \geqslant 1$ and let R be an algebraically closed field of characteristic different from p. When R has characteristic $\ell > 0$, the image of an irreducible smooth R-representation π of G by the Aubert involution need not be irreducible. We prove that this image (in the Grothendieck group of G) contains a unique irreducible term $\pi^\star$ with the same cuspidal support as π. This defines an involution $\pi \mapsto \pi^\star$ on the set of isomorphism classes of irreducible R-representations of G, that coincides with the Zelevinski involution when R is the field of complex numbers. The method we use also works for F a finite field of characteristic p, in which case we get a similar result.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E50, 20G40
Keywords and Phrases: Modular representations, p-adic reductive groups, finite reductive groups, Zelevinski involution, Alvis-Curtis duality, type theory

Introduction

1. Soit F un corps localement compact non archimédien, de caractéristique résiduelle p. Zelevinski [37] a défini une involution sur le groupe de Grothendieck des représentations complexes de longueur finie de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, pour $n \geqslant 1$, et a conjecturé que cette involution préserve l'irréductibilité. Moeglin et Waldspurger [25] ont prouvé cette conjecture pour les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ possédant un vecteur non nul invariant par un sous-groupe d'Iwahori. Précisément, ils ont montré que, si l'on applique le foncteur des invariants par un sous-groupe d'Iwahori, l'involution de Zelevinski se transforme, pour les modules sur l'algèbre de Hecke-Iwahori, en la torsion par une involution de cette algèbre.

2. En s'inspirant de la dualité d'Alvis-Curtis [2, 3, 13], S.-I. Kato [19] a défini une involution sur le groupe de Grothendieck des représentations complexes de longueur finie (et engendrées par leurs vecteurs invariants sous un sous-groupe d'Iwahori) d'un groupe réductif p-adique déployé. Comme dans [25], il utilise les propriétés du foncteur des invariants par un sous-groupe d'Iwahori [9] pour prouver que cette involution préserve l'irréductibilité à un signe près.

3. Aubert [5] a montré que la définition de Kato permet d'obtenir une involution sur le groupe de Grothendieck des représentations complexes de longueur finie de n'importe quel groupe réductif p-adique, et a prouvé que cette involution préserve l'irréductibilité à un signe près. Dans le cas du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, elle coïncide avec l'involution de Zelevinski à un signe près, ce qui prouve la conjecture d'irréductibilité de Zelevinski pour toutes les représentations irréductibles complexes de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$. Procter [27] avait déjà prouvé cette conjecture peu de temps auparavant au moyen de la théorie des types de Bushnell-Kutzko [12], ce qu'on peut voir comme une généralisation de l'approche de Moeglin et Waldspurger à n'importe quel bloc de Bernstein de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$.

4. Au moyen de la théorie des systèmes de coefficients sur l'immeuble de Bruhat-Tits, Schneider et Stuhler [28] ont défini eux aussi une dualité pour les représentations complexes de longueur finie d'un groupe réductif p-adique. Ils prouvent qu'elle préserve l'irréductibilité et qu'elle coïncide à un signe près, au niveau des groupes de Grothendieck, avec l'involution d'Aubert. On trouve une autre approche dans Bezrukavnikov [8], esquissée dans Bernstein [7, IV.5.1].

5. Vignéras [36] étend la question aux représentations des groupes réductifs p-adiques à coefficients dans un corps de caractéristique ℓ différente de p. Dans ce contexte, la définition d'Aubert a toujours un sens et, pourvu que le groupe ait des sous-groupes discrets cocompacts (auquel cas la conjecture d'irréductibilité générique est prouvée [16]), elle définit toujours une involution [21]. En revanche, quand ℓ est un nombre premier non banal, il est facile de voir que cette involution ne préserve pas l'irréductibilité, même à un signe près. Quant à la définition de Zelevinski pour $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, elle a toujours un sens elle aussi [21] mais ne définit pas un automorphisme involutif ni ne préserve l'irréductibilité dans le cas non banal (remarque 4.6). Dans le cas banal par contre, voir [21] où l'on traite le cas de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ et de ses formes intérieures.

6. Reprenant l'approche de Schneider-Stuhler dans le contexte modulaire, Vignéras [36] prouve – au moins lorsque le groupe a des sous-groupes discrets cocompacts – que l'involution d'Aubert et celle de Schneider-Stuhler coïncident à un signe près au niveau des groupes de Grothendieck et que, si π est une représentation irréductible d'un groupe réductif p-adique, son image par cette involution possède un seul terme irréductible de même support cuspidal que π. En outre, elle montre que ce terme irréductible est caractérisé comme étant l'unique quotient irréductible d'un certain espace de cohomologie associé à π (voir [36, Theorem 4.6]).

7. Dans cet article, nous donnons une autre preuve du résultat de Vignéras pour $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, $n \geqslant 1$ et ses formes intérieures, suivant une approche fondée sur la théorie des types de Bushnell-Kutzko dans l'esprit de [27]. Ce travail se situe dans la continuité de nos travaux sur les représentations modulaires des formes intérieures de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ dans lesquels la théorie des types [23] jour l'un des rôles principaux. Il forme avec [21, 22, 23] un ensemble homogène décrivant de façon cohérente la théorie des représentations modulo $\ell \neq p$ des formes intérieures de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$. Dans le cas des représentations complexes, les liens unissant la théorie des systèmes de coefficients et la théorie des types ont été explorés dans [10, 11]. Nous décrivons notre stratégie ci-dessous.

8. Soit G une forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, c'est-à-dire un groupe de la forme $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ où m est un diviseur de n et D une F-algèbre à division centrale de degré réduit d tels que $md = n$, soit R un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p et soit $\mathbf{D}$ l'involution d'Aubert (voir le paragraphe 2.1) sur le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie de G à coefficients dans R. Notre résultat principal est le suivant (théorème 2.5).

Théorème . — *Soit π une* R*-représentation irréductible de* G*, et soit $r(\pi)$ le nombre de termes de son support cuspidal. Il y a une unique représentation irréductible $\pi^\star$ de* G*, de même support cuspidal que π, telle que la quantité :*

$$\mathbf{D}(\pi) - (-1)^{r(\pi)} \cdot \pi^\star$$

dans le groupe de Grothendieck de G *ne contienne pas de terme irréductible de même support cuspidal que π.*

9. La première étape de notre démonstration consiste à se ramener – par des raisonnements sur les supports cuspidal et supercuspidal – au cas d'une représentation irréductible dont le support cuspidal est de la forme $\sigma_1 + \cdots + \sigma_r$, où $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ sont des représentations irréductibles supercuspidales inertiellement équivalentes à une même représentation irréductible supercuspidale σ de $\mathrm{GL}_k(\mathrm{D})$ avec $kr = m$. Dans cette situation, la théorie des types de Bushnell-Kutzko fournit un foncteur $\mathbf{F}$ de la catégorie des R-représentations de G vers celle des modules à droite sur une algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\sigma, r)$. Contrairement à ce qui se passe en caractéristique nulle (voir [**12, 29**]) ce foncteur n'est en général pas exact quand R est de caractéristique $\ell > 0$. Il est représentable par une représentation de type fini Q de G qui n'est en général pas projective dans la catégorie des R-représentations de G, mais qui est quasi-projective, ce qui entraîne les propriétés suivantes (voir [**23**] et le paragraphe 1.4) :

(1) $\mathbf{F}$ induit une bijection entre les classes de représentations irréductibles de G dont le support cuspidal est de la forme :

$$\sigma_1 + \cdots + \sigma_r, \quad \sigma_1, \ldots, \sigma_r \text{ supercuspidales et inertiellement équivalentes à } \sigma \tag{0.1}$$

et les $\mathcal{H}(\sigma, r)$-modules à droite simples ;

(2) $\mathbf{F}$ est exact sur la sous-catégorie pleine $\mathscr{E}(\sigma, r)$ dont les objets sont les sous-quotients de sommes directes arbitraires de copies de Q.

10. Soit $\mathcal{R}_{\sigma,r}$ le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie de $\mathscr{E}(\sigma, r)$, c'est-à-dire le groupe abélien libre engendré par les classes de représentations irréductibles de G dont le support supercuspidal est de la forme (0.1). Le foncteur $\mathbf{F}$ induit un morphisme de $\mathcal{R}_{\sigma,r}$ vers le groupe abélien libre $\mathcal{M}_{\sigma,r}$ engendré par les $\mathcal{H}(\sigma, r)$-modules à droite simples. Notant $\mathcal{R}_\sigma$ la somme directe des $\mathcal{R}_{\sigma,r}$, $r \geqslant 0$ et définissant $\mathcal{M}_\sigma$ de façon analogue, on obtient un morphisme de groupes de $\mathcal{R}_\sigma$ vers $\mathcal{M}_\sigma$, que l'on note encore $\mathbf{F}$. Son noyau, noté $\mathcal{J}_\sigma$, est engendré par les classes de représentations irréductibles dans $\mathcal{R}_\sigma$ dont le support supercuspidal est différent du support cuspidal. Ainsi, le théorème principal du paragraphe 7 ci-dessus peut être reformulé comme suit (voir le paragraphe 2.3).

Théorème. — *Soit π une R-représentation irréductible dont le support supercuspidal est de la forme* (0.1). *Alors $(-1)^r \cdot \mathbf{F}(\mathbf{D}(\pi))$ est un module simple dans $\mathcal{M}_\sigma$.*

La représentation irréductible $\pi^\star$ correspondant bijectivement par $\mathbf{F}$ à ce module simple est l'unique représentation irréductible de même support cuspidal que π telle que $\mathbf{D}(\pi) - (-1)^r \cdot \pi^\star$ ne contienne pas de terme irréductible de même support cuspidal que π.

11. Passant maintenant au quotient, $\mathbf{F}$ induit un isomorphisme de groupes $\mathbf{f}$ de $\mathcal{A}_\sigma$, le quotient de $\mathcal{R}_\sigma$ par $\mathcal{J}_\sigma$, vers $\mathcal{M}_\sigma$. L'involution $\mathbf{D}$, laissant stable $\mathcal{R}_\sigma$ et $\mathcal{J}_\sigma$ d'après le corollaire 2.8, induit une involution $\mathbf{d}$ sur $\mathcal{A}_\sigma$. Pour prouver le théorème du paragraphe 10, il s'agit de calculer l'isomorphisme $\mathbf{f} \circ \mathbf{d}$ et pour cela de déterminer le comportement du foncteur $\mathbf{F}$ vis-à-vis de l'induction et de la restriction paraboliques : c'est ce que nous faisons dans la section 3 (voir le corollaire 3.4 et la remarque 3.5). Nous y montrons aussi que, pour sous-groupe parabolique P de G et tout facteur de Levi M de P, le foncteur $\boldsymbol{i}_{\mathrm{M,P}} \circ \boldsymbol{r}_{\mathrm{M,P}}$ composé de l'induction et de la restriction paraboliques de M à G le long de P laisse stable la sous-catégorie $\mathscr{E}(\sigma, r)$ sur laquelle le foncteur $\mathbf{F}$ est exact. L'involution $\mathbf{D}$ étant définie comme une somme alternée de tels foncteurs (dans le groupe de Grothendieck), ceci nous permet d'obtenir une formule pour $\mathbf{f} \circ \mathbf{d}$ du côté de $\mathcal{M}_\sigma$, ne dépendant que d'un invariant $q_\sigma \in \mathrm{R}$ associé à la représentation supercuspidale σ (voir (1.3) et le paragraphe 3.4). Grâce au principe du changement de groupe, cette formule permet de réduire le problème au cas où σ est le caractère trivial de $\mathrm{GL}_1(\mathrm{F}')$ pour une extension finie convenable F' de F, ce que nous faisons au paragraphe 4.1.

12. Il ne reste maintenant plus qu'à prouver le théorème du paragraphe 10 dans le cas où σ est le caractère trivial de $\mathrm{GL}_1(\mathrm{F})$ pour un corps localement compact non archimédien F quelconque, noté simplement 1. L'induction parabolique définit une multiplication sur $\mathcal{A}_\sigma$, ce qui en fait une $\mathbf{Z}$-algèbre commutative (§1.1). On a une structure analogue de $\mathbf{Z}$-algèbre commutative sur $\mathcal{M}_\sigma$, et les résultats de la section 3 montrent que $\mathbf{f}$ est alors un isomorphisme d'algèbres. D'autre part l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\sigma,r)$ est une algèbre de Hecke affine de type A naturellement munie d'un automorphisme involutif d'algèbre $\boldsymbol{\tau}$ (voir le paragraphe 1.3). La torsion des modules par cette involution définit une involution sur $\mathcal{M}_\sigma$, encore notée $\boldsymbol{\tau}$. Leclerc, Thibon et Vasserot [20] ont établi un algorithme permettant de calculer l'image par $\boldsymbol{\tau}$ d'un module simple en déterminant le multisegment apériodique lui correspondant. Nous prouvons le résultat suivant, qui implique et précise le théorème du paragraphe 10.

Théorème . — *Soit π une* R*-représentation irréductible dont le support supercuspidal est de la forme* (0.1)*. Alors $(-1)^r\cdot\mathbf{F}(\mathbf{D}(\pi))$ est égal au module simple $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{F}(\pi))$.*

13. Pour tout $\mathcal{H}(\sigma,r)$-module simple $\mathfrak{m}$, posons $\mathbf{t}(\mathfrak{m})=(-1)^r\cdot\boldsymbol{\tau}(\mathfrak{m})$. Prolongeant par linéarité, on obtient un automorphisme involutif d'algèbre sur $\mathcal{M}_\sigma$. Pour prouver que les isomorphismes d'algèbres $\mathbf{f}\circ\mathbf{d}$ et $\mathbf{t}\circ\mathbf{f}$ sont égaux, il suffit de prouver qu'ils coïncident sur un système générateur de $\mathcal{A}_\sigma$. Un système générateur bien adapté au problème est fourni par la base standard (voir le théorème 4.5 ou [22, Lemme 9.41]). Grâce à la propriété de multiplicativité de la base standard, il suffit de comparer $\mathbf{f}\circ\mathbf{d}$ et $\mathbf{t}\circ\mathbf{f}$ sur les représentations $\mathrm{Z}(\sigma,r)$ associées à des segments (voir le paragraphe 4.2).

14. Le calcul de $\mathbf{f}\circ\mathbf{d}(\mathrm{Z}(\sigma,r))$ se fait d'abord quand σ est le caractère trivial de $\mathrm{F}^\times$ – auquel cas $\mathrm{Z}(1,r)$ n'est autre que le caractère trivial de $\mathrm{GL}_r(\mathrm{F})$ – grâce à un argument de relèvement à la caractéristique nulle (voir les paragraphes 4.3 et 4.4). Ceci implique le théorème du paragraphe 12 pour σ trivial, lui-même impliquant (grâce à la méthode de changement de groupe) ce même théorème pour σ quelconque. Ceci enfin implique en retour le théorème du paragraphe 12 pour σ quelconque (voir le paragraphe 4.5).

15. Terminons cette introduction par trois remarques. D'abord, notre méthode fonctionne aussi bien pour un corps F localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p que pour un corps fini de caractéristique p. De fait, l'article est rédigé de façon uniforme en F, qu'il soit fini ou p-adique. Le seul passage où le cas fini nécessite d'être traité avant le cas p-adique est le début de la section 3 où nous étudions le comportement du foncteur $\mathbf{F}$ vis-à-vis de l'induction et de la restriction paraboliques. Dans le cas où F est fini, nos résultats généralisent un résultat de Ackermann et Schroll [1] qui traitent le cas unipotent, c'est-à-dire le cas où σ est trivial.

16. La seconde remarque concerne la section 3 dont l'intérêt, du point de vue de la théorie des types, dépasse le cadre de cet article. Le calcul des coinvariants de Q relativement au radical unipotent d'un sous-groupe parabolique effectué au paragraphe 3.2 éclaire certaines questions soulevées ou partiellement résolues dans la section 4 de [23]. Notamment, le corollaire 3.4 étend le domaine de validité de [23, Corollaire 4.31] et le corollaire 3.6 (qu'on pourrait raffiner en définissant une structure de bigèbre au moyen de la restriction parabolique) montre qu'un certain nombre de résultats impliquant induction et restriction paraboliques peuvent être transportés –

via la méthode de changement de groupe – d'un σ à un autre de même invariant q_σ. Ceci sera utile dans des travaux ultérieurs.

17. Notre troisième et dernière remarque porte sur le calcul des multiplicités des représentations irréductibles dans les représentations standards (4.1). Si π est une R-représentation irréductible dont le support cuspidal est de la forme (0.1), nous montrons que sa multiplicité dans une représentation standard ne dépend de σ que par le biais de q_σ. Il s'ensuit grâce à [**15**, 4] que cette multiplicité ne dépend de σ que par le biais de l'entier $e(\sigma)$ défini par (1.4). Le fait était bien connu – au moins dans le cas complexe – mais n'était à notre connaissance écrit nulle part dans la littérature. Nous avons profité de l'appareil technique mis en place dans cet article pour le faire. Nous remercions P. Boyer, E. Lapid, B. Leclerc et M. Tadić de nous y avoir incité.

Notations et conventions

1. On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs.

2. Une *composition* d'un entier $n \geqslant 1$ est une famille finie d'entiers > 0 de somme n.

3. Pour un ensemble X, on note $\mathbf{Z}(\mathrm{X})$ le groupe abélien libre de base X constitué des applications de X dans $\mathbf{Z}$ à support fini et $\mathbf{N}(\mathrm{X})$ le sous-ensemble de $\mathbf{Z}(\mathrm{X})$ constitué des applications à valeurs dans $\mathbf{N}$. Si $f, g \in \mathbf{Z}(\mathrm{X})$, on note $f \leqslant g$ si $g - f \in \mathbf{N}(\mathrm{X})$, ce qui définit une relation d'ordre partiel sur $\mathbf{Z}(\mathrm{X})$.

4. Dans tout cet article, p est un nombre premier et R un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p.

5. Une R-*représentation lisse* d'un groupe localement profini G est un morphisme de groupes de G dans GL(V), où V est un espace vectoriel sur R, tel que tout vecteur de V ait un stabilisateur ouvert dans G. Dans cet article, toutes les représentations sont des R-représentations lisses. Un R-*caractère* de G est un morphisme de G vers $\mathrm{R}^\times$ de noyau ouvert. Si aucune confusion n'est à craindre, on écrira *caractère* et *représentation* plutôt que R-caractère et R-représentation.

6. Si π est une représentation et si χ est un caractère de G, on note $\pi\chi$ la représentation tordue définie par $g \mapsto \chi(g)\pi(g)$.

7. On note $\mathrm{Irr}(\mathrm{G}, \mathrm{R})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de G et $\mathcal{R}(\mathrm{G}, \mathrm{R})$ le groupe de Grothendieck de ses représentations de longueur finie, qui s'identifie au groupe abélien libre $\mathbf{Z}(\mathrm{Irr}(\mathrm{G}, \mathrm{R}))$. Le plus souvent, on omettra R dans les notations.

8. Si π est une représentation de longueur finie de G, on désigne par $[\pi]$ son image dans $\mathcal{R}(\mathrm{G})$. En particulier, si π est irréductible, $[\pi]$ désigne sa classe d'isomorphisme. Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, il nous arrivera d'identifier une représentation avec sa classe d'isomorphisme.

9. Dans cet article, F désigne :

– ou bien un corps fini de caractéristique p, de cardinal noté $q = p^r$, $r \geqslant 1$, (et on dira qu'on est dans le *cas fini*);

– ou bien un corps localement compact non archimédien de corps résiduel de cardinal $q = p^r$, $r \geqslant 1$ (et on dira qu'on est dans le *cas p-adique*).

10. On fixe une F-algèbre à division centrale de dimension finie D, de degré réduit noté d. Dans le cas fini, on a $d = 1$ et D est égale à F. Pour tout entier $m \geqslant 1$, on note $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ la F-algèbre des matrices carrées de taille m à coefficients dans D, et on note G_m le groupe $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ de ses éléments inversibles. Il est commode de convenir que G_0 est le groupe trivial. La topologie sur F induit sur G_m une topologie en faisant un groupe localement profini. (Dans le cas fini, c'est la topologie discrète.)

11. On note $|\ |_{\mathrm{F}}$ la valeur absolue normalisée sur F. Dans le cas p-adique, c'est la valeur absolue donnant à une uniformisante de F la valeur q^{-1}. Dans le cas fini, c'est la valeur absolue triviale. Comme l'image de q dans R est inversible, elle définit un R-caractère de $\mathrm{F}^{\times}$ noté $|\ |_{\mathrm{F,R}}$. Si l'on note N_m la norme réduite de $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ sur F, l'application $g \mapsto |\mathrm{N}_m(g)|_{\mathrm{F,R}}$ est un R-caractère de G_m, qu'on notera simplement ν. Dans le cas fini, ν est donc le caractère trivial de G_m.

12. On note Irr la réunion des $\mathrm{Irr}(\mathrm{G}_m)$ et $\mathcal{R}$ la somme directe des $\mathcal{R}(\mathrm{G}_m)$, pour $m \geqslant 0$. Celle-ci s'identifie au groupe abélien $\mathbf{Z}(\mathrm{Irr})$. Pour une représentation de longueur finie π de G_m, on pose $\deg(\pi) = m$, qu'on appelle le *degré* de π. L'application deg fait de $\mathcal{R}$ un $\mathbf{Z}$-module gradué.

1. Préliminaires

Pour plus de détails sur les résultats de cette section nous renvoyons le lecteur à [22] dans le cas p-adique et à [24] dans le cas fini.

1.1. Induction et restriction paraboliques

Si $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ est une composition de m, il lui correspond le sous-groupe de Levi standard M_α de G_m constitué des matrices diagonales par blocs de tailles $m_1, \dots, m_r$ respectivement, que l'on identifie naturellement au produit $\mathrm{G}_{m_1} \times \dots \times \mathrm{G}_{m_r}$. On note P_α le sous-groupe parabolique de G_m de facteur de Levi M_α formé des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles $m_1, \dots, m_r$ respectivement, et on note U_α son radical unipotent.

On fixe une racine carrée de q dans R. On note $\boldsymbol{i}_\alpha$ le foncteur d'induction parabolique (normalisé, dans le cas p-adique, relativement au choix de cette racine) de M_α à G_m le long de P_α, et on note $\boldsymbol{r}_\alpha$ son adjoint à gauche, c'est-à-dire le foncteur de restriction parabolique lui correspondant. Ces foncteurs sont exacts, et préservent l'admissibilité et le fait d'être de longueur finie.

Si, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, on a une représentation π_i de G_{m_i}, on note :

$$\pi_1 \times \dots \times \pi_r = \boldsymbol{i}_\alpha(\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r). \tag{1.1}$$

Si les π_i sont de longueur finie, la représentation semi-simplifiée $[\pi_1 \times \dots \times \pi_r]$ ne dépend que de $[\pi_1], \dots, [\pi_r]$. L'application :

$$([\pi_1], \dots, [\pi_r]) \mapsto [\pi_1 \times \dots \times \pi_r]$$

induit par linéarité une application linéaire de $\mathcal{R}(\mathrm{G}_{m_1}) \times \dots \times \mathcal{R}(\mathrm{G}_{m_r})$ dans $\mathcal{R}(\mathrm{G}_m)$, faisant de $\mathcal{R}$ une $\mathbf{Z}$-algèbre commutative (voir [22, Proposition 2.6] dans le cas p-adique) graduée.

1.2. Représentations cuspidales et supercuspidales

Une représentation irréductible de G_m, $m \geqslant 1$, est dite *cuspidale* si elle n'apparaît comme sous-représentation d'aucune induite de la forme (1.1) avec $r \geqslant 2$, et elle est dite *supercuspidale* si elle n'apparaît comme sous-quotient d'aucune induite de la forme (1.1) avec $\pi_1, \dots, \pi_r$ irréductibles et $r \geqslant 2$. (Il n'est pas nécessaire de supposer que $\pi_1, \dots, \pi_r$ sont irréductibles dans la définition précédente ; voir [31, Proposition 11.1].)

On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de Irr formé des classes de représentations irréductibles cuspidales, et $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ formé des classes de représentations supercuspidales.

Pour le résultat suivant, on renvoie à [22] théorèmes 2.1 et 8.16 dans le cas p-adique, et à [24] théorèmes 2.2 et 2.5 dans le cas fini.

Proposition 1.1. — *Soit une représentation irréductible $\pi \in \mathrm{Irr}$.*

(1) *Il existe une unique somme $\mathrm{cusp}(\pi) = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r \in \mathbf{N}(\mathcal{C})$, appelée support cuspidal de π, telle que π soit isomorphe à un quotient de $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_r$.*

(2) *Il existe une unique somme $\mathrm{scusp}(\pi) = \omega_1 + \cdots + \omega_n \in \mathbf{N}(\mathcal{S})$, appelée support supercuspidal de π, telle que π soit isomorphe à un sous-quotient de $\omega_1 \times \cdots \times \omega_n$.*

Soit σ une représentation irréductible cuspidale, de degré $m \geqslant 1$. Dans le cas p-adique, il lui correspond (via la théorie des types) deux entiers $f(\sigma), s(\sigma) \geqslant 1$ (voir [23, 3.4]). On pose :

$$\nu_\sigma = \begin{cases} \nu^{s(\sigma)} & \text{dans le cas } p\text{-adique,} \\ \text{le caractère trivial} & \text{dans le cas fini,} \end{cases} \tag{1.2}$$

$$q_\sigma = \begin{cases} q^{f(\sigma)} & \text{dans le cas } p\text{-adique,} \\ q^{\deg(\sigma)} & \text{dans le cas fini.} \end{cases} \tag{1.3}$$

Pour harmoniser les notations, on pose $f(\sigma) = \deg(\sigma)$ dans le cas fini, de sorte qu'on a $q_\sigma = q^{f(\sigma)}$ dans tous les cas. Enfin on pose :

$$e(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si R est de caractéristique nulle,} \\ \text{le plus petit } k \geqslant 2 \text{ tel que } 1 + q_\sigma + \cdots + q_\sigma^{k-1} = 0 \text{ dans R sinon.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Pour tout entier $n \geqslant 2$, l'induite :

$$\sigma \times \sigma\nu_\sigma \times \cdots \times \sigma\nu_\sigma^{n-1}$$

contient un sous-quotient irréductible cuspidal si et seulement si R est de caractéristique $\ell > 0$ et s'il existe $r \geqslant 0$ tel que $n = e(\sigma)\ell^r$ (voir [22, Proposition 6.4] et [24, Paragraphe 1.4]). Dans ce cas, le sous-quotient cuspidal est unique, et il apparaît avec multiplicité 1 dans l'induite. On le note :

$$\mathrm{st}_r(\sigma).$$

Le théorème ci-dessous donne une classification des représentations irréductibles cuspidales en fonction des supercuspidales (voir [22, Théorème 6.14] et [24, Théorème 1.4]).

Théorème 1.2. — (1) *L'application :*

$$(\sigma, r) \mapsto \mathrm{st}_r(\sigma)$$

est une surjection de $\mathcal{S} \times \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ sur $\mathcal{C} \smallsetminus \mathcal{S}$.

(2) *Pour que deux couples $(\sigma, r), (\sigma', r') \in \mathcal{S} \times \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ aient la même image par cette application, il faut et il suffit que $r' = r$ et qu'il existe un entier $i \in \mathbf{Z}$ tel que σ' soit isomorphe à $\sigma\nu_\sigma^i$.*

Etant donnée une représentation irréductible cuspidale σ, on pose :

$$\Omega_\sigma = \begin{cases} \{[\sigma]\} & \text{dans le cas fini,} \\ \{[\sigma\chi] \mid \chi \text{ caractère non ramifié de } \mathrm{G}_{\deg(\sigma)}\} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.5}$$

Dans le cas p-adique, deux représentations irréductibles cuspidales σ, σ' telles que $\Omega_\sigma = \Omega_{\sigma'}$ sont dites *inertiellement équivalentes*. Par commodité, nous étendrons cette définition au cas fini.

Théorème 1.3 ([23, Théorème 4.18], [24, Proposition 3.3]). — *Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ des représentations cuspidales deux à deux non inertiellement équivalentes. Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, on fixe un support cuspidal $\mathfrak{s}_i$ formé de représentations inertiellement équivalentes à σ_i.*

(1) *Pour chaque entier i, soit π_i une représentation irréductible de support cuspidal $\mathfrak{s}_i$. Alors l'induite $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ est irréductible.*

(2) *Soit π une représentation irréductible de support cuspidal $\mathfrak{s}_1 + \cdots + \mathfrak{s}_r$. Alors il existe des représentations $\pi_1, \dots, \pi_r$, uniques à isomorphisme près, telles que π_i soit de support cuspidal $\mathfrak{s}_i$ pour chaque i et telles que $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ soit isomorphe à π.*

On a aussi un variante supercuspidale de ce théorème.

Théorème 1.4 ([22, Théorème 8.19], [24, Proposition 1.8]). — *On reprend les hypothèses du théorème 1.3, en supposant en outre que $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ sont supercuspidales.*

(1) *Pour chaque entier i, soit π_i une représentation irréductible de support supercuspidal $\mathfrak{s}_i$. Alors l'induite $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ est irréductible.*

(2) *Soit π une représentation irréductible de support supercuspidal $\mathfrak{s}_1 + \cdots + \mathfrak{s}_r$. Il existe des représentations $\pi_1, \dots, \pi_r$, uniques à isomorphisme près, telles que π_i soit de support supercuspidal $\mathfrak{s}_i$ pour chaque i et telles que $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ soit isomorphe à π.*

1.3. L'algèbre de Hecke

Soient $n \geqslant 1$ et $u \in \mathrm{R}^\times$. On note $\mathcal{H}(n,u)$ la R-algèbre engendrée par les symboles $\mathrm{S}_1, \dots, \mathrm{S}_{n-1}$ avec les relations :

$$(\mathrm{S}_i + 1)(\mathrm{S}_i - u) = 0, \qquad i \in \{1, \dots, n-1\}, \tag{1.6}$$

$$\mathrm{S}_i\mathrm{S}_j = \mathrm{S}_j\mathrm{S}_i, \qquad |i-j| \geqslant 2, \tag{1.7}$$

$$\mathrm{S}_i\mathrm{S}_{i+1}\mathrm{S}_i = \mathrm{S}_{i+1}\mathrm{S}_i\mathrm{S}_{i+1}, \qquad i \in \{1, \dots, n-2\}. \tag{1.8}$$

Il y a donc une involution $\boldsymbol{\tau}$ de $\mathcal{H}(n,u)$ définie par :

$$\mathrm{S}_i \mapsto -\mathrm{S}_{n-i} + u - 1 \quad i \in \{1, \dots, n-1\}. \tag{1.9}$$

Puis on note $\widetilde{\mathcal{H}}(n,u)$ la R-algèbre engendrée par les symboles $\mathrm{S}_1, \dots, \mathrm{S}_{n-1}$ et $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ et leurs inverses avec les relations (1.6) à (1.8) auxquelles s'ajoutent les relations :

$$\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j = \mathrm{X}_j\mathrm{X}_i, \qquad i,j \in \{1, \dots, n\}, \tag{1.10}$$

$$\mathrm{X}_j\mathrm{S}_i = \mathrm{S}_i\mathrm{X}_j, \qquad i \notin \{j, j-1\}, \tag{1.11}$$

$$\mathrm{S}_i\mathrm{X}_i\mathrm{S}_i = u\mathrm{X}_{i+1}, \qquad i \in \{1, \dots, n-1\}. \tag{1.12}$$

La première s'identifie à une sous-algèbre de la seconde ; on note $\boldsymbol{\tau}$ l'involution de $\widetilde{\mathcal{H}}(n,u)$ définie par (1.9) et :

$$\mathrm{X}_j \mapsto \mathrm{X}_{n+1-j}, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \tag{1.13}$$

Soit σ une représentation irréductible cuspidale de degré $m \geqslant 1$, et soit $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$. Fixons un entier $n \geqslant 1$.

Dans le cas p-adique, d'après [23, Théorème 3.11], il existe un sous-groupe ouvert compact J de G et une représentation irréductible λ de J tels que les représentations irréductibles de G dont la restriction à J admette λ comme sous-représentation sont exactement les $\sigma\chi$ pour χ décrivant les caractères non ramifiés de G. Un tel couple (J, λ) est appelé un type simple (maximal) pour σ. On note :

$$\Sigma = \mathrm{ind}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{G}}(\lambda)$$

l'induite compacte de λ à G. Dans le cas fini, on pose simplement $\Sigma = \sigma$.

On note $\mathcal{H}(\sigma, n)$ l'algèbre des endomorphismes de l'induite $\Sigma^{\times n} = \Sigma \times \cdots \times \Sigma$, le produit de n copies de Σ. D'après [23, Proposition 4.18] dans le cas p-adique et [18, §5] dans le cas fini, il y a un isomorphisme naturel :

$$\Psi_{\sigma,n} : \mathcal{H}(\sigma, n) \to \begin{cases} \widetilde{\mathcal{H}}(n, q_\sigma) & \text{dans le cas } p\text{-adique,} \\ \mathcal{H}(n, q_\sigma) & \text{dans le cas fini.} \end{cases} \tag{1.14}$$

Dans les deux cas, on a défini une représentation Σ de G et, pour tout entier $n \geqslant 1$, une algèbre $\mathcal{H}(\sigma, n)$, isomorphe à une algèbre de Hecke de paramètre q_σ, et munie d'une involution $\boldsymbol{\tau}$.

Si $\mathfrak{m}$ est un $\mathcal{H}(\sigma, n)$-module à droite, on note $\boldsymbol{\tau}(\mathfrak{m})$ le R-espace vectoriel $\mathfrak{m}$ muni d'une structure de $\mathcal{H}(\sigma, n)$-module à droite par :

$$(x, h) \mapsto x * \boldsymbol{\tau}(h)$$

pour tous $x \in \mathfrak{m}$ et $h \in \mathcal{H}(\sigma, n)$, où $*$ désigne l'action de $\mathcal{H}(\sigma, n)$ sur le module $\mathfrak{m}$.

Notons $\mathcal{M}_\sigma$ la somme directe, portant sur $n \geqslant 0$, des groupes de Grothendieck des catégories des $\mathcal{H}(\sigma, n)$-modules à droite de dimension finie.

Pour toute composition $\alpha = (n_1, \ldots, n_r)$ de n, on note $\mathcal{H}(\sigma, \alpha)$ la sous-R-algèbre de $\mathcal{H}(\sigma, n)$ engendrée par les S_i tels que $i \notin \{n_1 + n_2 + \cdots + n_k \mid 1 \leqslant k \leqslant r-1\}$ — auxquels on ajoute tous les X_j dans le cas p-adique. On note $\mathbf{r}_\alpha$ le foncteur de restriction de $\mathcal{H}(\sigma, n)$ à $\mathcal{H}(\sigma, \alpha)$ et $\mathbf{i}_\alpha$ son adjoint à droite. Ces deux foncteurs sont exacts.

De façon analogue au paragraphe 1.1, on munit $\mathcal{M}_\sigma$ d'une structure de $\mathbf{Z}$-algèbre commutative graduée : si, pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$, on a un $\mathcal{H}(\sigma, n_i)$-module à droite de dimension finie $\mathfrak{m}_i$, on pose :

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_1 \times \cdots \times \mathfrak{m}_r &= \mathbf{i}_\alpha(\mathfrak{m}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{m}_r) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\sigma,\alpha)}(\mathcal{H}(\sigma, n), \mathfrak{m}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{m}_r). \end{aligned}$$

La sous-algèbre $\mathcal{H}(\sigma, \alpha)$ n'est en général pas stable par $\boldsymbol{\tau}$: son image est $\mathcal{H}(\sigma, \alpha')$, où α' est la composition $(n_r, \ldots, n_1)$. Par conséquent, on a un isomorphisme fonctoriel de $\mathcal{H}(\sigma, n)$-modules entre $\boldsymbol{\tau}(\mathfrak{m}_1 \times \cdots \times \mathfrak{m}_r)$ et $\boldsymbol{\tau}(\mathfrak{m}_r) \times \cdots \times \boldsymbol{\tau}(\mathfrak{m}_1)$ qui, après semi-simplification, donne l'égalité :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathfrak{m}_1 \times \cdots \times \mathfrak{m}_r) = \boldsymbol{\tau}(\mathfrak{m}_1) \times \cdots \times \boldsymbol{\tau}(\mathfrak{m}_r)$$

dans $\mathcal{M}_\sigma$, faisant de $\boldsymbol{\tau}$ une involution de $\mathbf{Z}$-algèbre de $\mathcal{M}_\sigma$.

1.4. Représentations et modules

On reprend les notations du paragraphe précédent. Soit $\mathscr{E}(\sigma, n)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des représentations de G_{mn} dont les objets sont les sous-quotients de sommes arbitraires de copies de $\Sigma^{\times n}$. Pour le résultat suivant, on renvoie à [23, §4.1] et [24, §3].

Théorème 1.5. — (1) *La représentation $\Sigma^{\times n}$ est quasi-projective* [35, 23].

(2) *Le foncteur :*

$$\mathsf{F} : \pi \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\Sigma^{\times n}, \pi) \tag{1.15}$$

est un foncteur exact de $\mathscr{E}(\sigma, n)$ dans la catégorie des $\mathcal{H}(\sigma, n)$-modules à droite.

(3) *Ce foncteur induit une bijection entre les classes de représentations irréductibles de* G_{mn} *dont le support cuspidal appartient à* $\mathbf{N}(\Omega_\sigma)$ *et les* $\mathcal{H}(\sigma,n)$*-modules à droite simples.*

On pose :

$$\begin{aligned}\mathrm{Irr}_{\sigma,n} &= \{\pi\in\mathrm{Irr}\mid \pi \text{ est un sous-quotient de } \sigma_1\times\cdots\times\sigma_n \text{ avec } \sigma_1,\dots,\sigma_n\in\Omega_\sigma\},\\ \mathrm{Irr}^*_{\sigma,n} &= \{\pi\in\mathrm{Irr}\mid \pi \text{ est un quotient de } \sigma_1\times\cdots\times\sigma_n \text{ avec } \sigma_1,\dots,\sigma_n\in\Omega_\sigma\}.\end{aligned}$$

On note Irr_σ la réunion des $\mathrm{Irr}_{\sigma,n}$ pour $n\geqslant 0$, et on définit Irr^*_σ de façon analogue. On note $\mathcal{R}_\sigma$ la sous-$\mathbf{Z}$-algèbre de $\mathcal{R}$ engendrée par Irr_σ, et on note $\mathcal{J}_\sigma$ l'idéal de $\mathcal{R}_\sigma$ engendré par les $\pi\in\mathrm{Irr}_\sigma$ tels que $\pi\notin\mathrm{Irr}^*_\sigma$ (c'est-à-dire tels que $\mathrm{cusp}(\pi)\notin\mathbf{N}(\Omega_\sigma)$).

Les foncteurs définis pour tout $n\geqslant 0$ par (1.15) induisent un morphisme surjectif de groupes :

$$\mathsf{F}:\mathcal{R}_\sigma\to\mathcal{M}_\sigma \tag{1.16}$$

(encore noté F par abus de notation) de noyau $\mathcal{J}_\sigma$.

Remarque 1.6. — On verra plus loin (voir proposition 3.6) que F est un morphisme d'algèbres. Après avoir défini dans la section 2 une involution D sur $\mathcal{R}_\sigma$, on verra dans la section 4 que c'est même — *à un signe près* — un morphisme d'algèbres à involution lorsqu'on munit $\mathcal{M}_\sigma$ de $\boldsymbol{\tau}$.

2. Dualité

Dans cette section, on introduit un automorphisme involutif d'algèbre de $\mathcal{R}$, noté D et appelé involution d'Aubert. Il ne préserve pas l'irréductibilité (même au signe près) mais on montre au théorème 2.5 que, pour toute représentation irréductible π, son image $\mathsf{D}(\pi)$ est une combinaison linéaire de représentations irréductibles dont une seule, notée $\pi^\star$, a le même support cuspidal que π.

2.1. L'involution D de $\mathcal{R}$

On définit un endomorphisme de groupe de $\mathcal{R}$ en associant à toute représentation irréductible $\pi\in\mathrm{Irr}$ la représentation virtuelle dans $\mathcal{R}$:

$$\mathsf{D}(\pi)=\sum_\alpha(-1)^{r(\alpha)}\cdot\boldsymbol{i}_\alpha\circ\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)$$

où α décrit l'ensemble des compositions de $\deg(\pi)$ et où $r(\alpha)$ est le nombre de termes de α.

Proposition 2.1. — *L'application* D *est un automorphisme involutif de* $\mathbf{Z}$*-algèbre de* $\mathcal{R}$.

Démonstration. — La preuve donnée dans [17, §8] dans le cas fini pour les représentations complexes est encore valable pour les représentations modulaires.

Dans le cas p-adique, voir [5, Théorème 1.7] et [21, Proposition A.2]. □

Définition 2.2. — Pour toute représentation irréductible $\pi\in\mathrm{Irr}$, on note $r(\pi)$ le nombre de termes du support cuspidal de π.

Remarque 2.3. — Dans le cas fini, cette dualité a été introduite simultanément par Alvis et Curtis (voir [2, 13] et [17, §8]) pour les représentations complexes de groupes plus généraux. Elle préserve l'irréductibilité à un signe près, c'est-à-dire que, pour toute représentation irréductible complexe $\pi\in\mathrm{Irr}$, on a :

$$(-1)^{r(\pi)}\cdot\mathsf{D}(\pi)\in\mathrm{Irr}.$$

La dualité a été étendue par Cabanes et Rickard [14] à des représentations à coefficients dans un anneau commutatif quelconque dans lequel p est inversible.

Dans le cas p-adique, $\mathbf{D}$ a été introduite par Aubert [5] pour les représentations complexes de groupes réductifs p-adiques (voir aussi [37, 32, 6] pour le cas du groupe $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$). Elle préserve aussi l'irréductibilité à un signe près. Voir [21, Appendice A] dans le cas modulaire banal.

Dans le cas modulaire, $\mathbf{D}$ ne préserve plus l'irréductibilité, pas même à un signe près.

Exemple 2.4. — On suppose que la caractéristique ℓ de R divise $q+1$. On note 1 le caractère trivial de $\mathrm{F}^\times$ (on a donc $e(\sigma)=2$ quand σ est le caractère 1). On note 1_2 le caractère trivial de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F})$ et ν_2 le caractère $g \mapsto |\det(g)|_{\mathrm{F},\mathrm{R}}$. Soit π la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F})$ sur l'espace des fonctions localement constantes sur la droite projective sur F, à valeurs dans R. On a :

$$[\pi] = 1_2 + \mathrm{st}_0(1) + \nu_2$$

dans $\mathcal{R}$, et $\mathrm{st}_0(1)$ est cuspidale [34] (voir aussi le théorème 1.2). On a ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(1_2) &= \nu_2 + \mathrm{st}_0(1), \\ \mathbf{D}(\mathrm{st}_0(1)) &= -\mathrm{st}_0(1). \end{aligned}$$

Le but de cet article est de montrer le théorème suivant.

Théorème 2.5. — *Soit $\pi \in \mathrm{Irr}$. Alors il y a une unique représentation irréductible $\pi^\star$ de même support cuspidal que π telle que :*

$$\mathbf{D}(\pi) - (-1)^{r(\pi)} \cdot \pi^\star \in \mathcal{R}$$

ne contienne pas de terme irréductible de même support cuspidal que π.

Remarque 2.6. — Il est clair que tous les sous-quotients irréductibles de $\mathbf{D}(\pi)$ ont même support supercuspidal que π. Le problème est de montrer qu'un seul parmi eux a le même support cuspidal que π.

2.2. Premières réductions du problème

Soit σ une représentation irréductible cuspidale. On rappelle que $\mathcal{R}_\sigma$ est la sous-algèbre de $\mathcal{R}$ engendrée par Irr_σ, et que $\mathcal{J}_\sigma$ est l'idéal de $\mathcal{R}_\sigma$ engendré par les $\pi \in \mathrm{Irr}_\sigma$ telles que $\pi \notin \mathrm{Irr}^*_\sigma$. On note aussi $\mathcal{I}_\sigma$ l'idéal de $\mathcal{R}_\sigma$ engendré par l'ensemble Irr_σ privé du caractère trivial de G_0.

On renvoie au paragraphe 1.2 pour la définition de la notation $\mathrm{st}_r(\sigma)$, $r \geqslant 0$. Par commodité, on pose aussi $\mathrm{st}_{-1}(\sigma) = \sigma$.

Lemme 2.7. — *Soit π une représentation irréductible telle que* $\mathrm{cusp}(\pi) \in \mathbf{N}(\Omega_\sigma)$. *Si τ est un terme irréductible de $\mathbf{D}(\pi)$, alors :*

$$\mathrm{cusp}(\tau) \in \mathbf{N}(\Omega_\sigma) + \mathbf{N}(\Omega_{\mathrm{st}_0(\sigma)}) + \mathbf{N}(\Omega_{\mathrm{st}_1(\sigma)}) + \mathbf{N}(\Omega_{\mathrm{st}_2(\sigma)}) + \dots$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer que le support cuspidal d'un sous-quotient irréductible d'une représentation de la forme $\boldsymbol{i}_\alpha \circ \boldsymbol{r}_\alpha(\pi)$, où α est une composition de $\deg(\pi)$, n'est composé que de représentations dans :

$$\Omega_\sigma \cup \Omega_{\mathrm{st}_0(\sigma)} \cup \Omega_{\mathrm{st}_1(\sigma)} \cup \Omega_{\mathrm{st}_2(\sigma)} \cup \dots \tag{2.1}$$

Soient $\sigma' \in \mathcal{S}$ et $u \geqslant -1$ tels que $\sigma = \mathrm{st}_u(\sigma')$. Comme le support supercuspidal de π est formé de représentations dans $\Omega_{\sigma'}$, le support cuspidal de τ est composé de représentations dans :

$$\Omega_{\sigma'} \cup \Omega_{\mathrm{st}_0(\sigma')} \cup \Omega_{\mathrm{st}_1(\sigma')} \cup \Omega_{\mathrm{st}_2(\sigma')} \cup \dots$$

Supposons qu'il y ait dans $\mathrm{cusp}(\tau)$ un terme inertiellement équivalent à $\mathrm{st}_i(\sigma')$, $i \geqslant -1$, tel que $\deg(\mathrm{st}_i(\sigma')) < \deg(\sigma)$. Fixons une paire $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ avec $\beta_1 = \deg(\mathrm{st}_i(\sigma'))$ telle que $\boldsymbol{r}_\beta(\tau)$ soit non nulle. Si l'on calcule la restriction parabolique $\boldsymbol{r}_\beta(\boldsymbol{i}_\alpha \circ \boldsymbol{r}_\alpha(\pi))$, on trouve, grâce au Lemme Géométrique [22, 1.1.2] dans le cas p-adique et à la formule de Mackey [24, §1.2] dans le cas fini, une composition $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ plus fine que β telle que $\boldsymbol{r}_\gamma(\pi)$ soit non nulle. En particulier, on a :

$$\gamma_1 \leqslant \beta_1 < \deg(\sigma).$$

Mais, par hypothèse sur le support cuspidal de π, la composition γ doit être formée de multiples de l'entier $\deg(\sigma)$, ce qui nous donne une contradiction. □

Le lemme 2.7 peut être reformulé ainsi : si $\pi \in \mathrm{Irr}_\sigma$ et $\pi \notin \mathrm{Irr}^*_\sigma$, alors $\mathbf{D}(\pi) \in \mathcal{I}_\sigma$.

Corollaire 2.8. — *L'algèbre $\mathcal{R}_\sigma$ et ses idéaux $\mathcal{I}_\sigma$, $\mathcal{J}_\sigma$ sont stables par l'automorphisme $\mathbf{D}$.*

Démonstration. — D'après le théorème 1.3, toute représentation irréductible $\pi \in \mathrm{Irr}_\sigma$ se décompose sous la forme :

$$\pi = \pi_{-1} \times \pi_0 \times \pi_1 \times \pi_2 \times \dots$$

où, pour tout $i \geqslant -1$, la représentation π_i est irréductible et de support cuspidal dans $\mathbf{N}(\Omega_{\mathrm{st}_i(\sigma)})$. Si l'on applique le lemme 2.7 à $\mathrm{st}_i(\sigma)$ et π_i pour un $i \geqslant -1$, on trouve que $\mathbf{D}(\pi_i)$ appartient à l'idéal $\mathcal{I}_{\mathrm{st}_i(\sigma)}$. Comme on a :

$$\mathbf{D}(\pi) = \mathbf{D}(\pi_{-1}) \times \mathbf{D}(\pi_0) \times \mathbf{D}(\pi_1) \times \mathbf{D}(\pi_2) \times \dots \tag{2.2}$$

et comme la famille des $\mathcal{I}_{\mathrm{st}_i(\sigma)}$, $i \geqslant -1$, est décroissante, on en déduit que $\mathbf{D}(\pi)$ appartient à $\mathcal{I}_\sigma$. Comme $\mathcal{R}_\sigma$ est égal à $\mathrm{R} \oplus \mathcal{I}_\sigma$, on en déduit aussi que $\mathcal{R}_\sigma$ est stable par $\mathbf{D}$.

Si maintenant $\pi \in \mathrm{Irr}_\sigma \cap \mathcal{J}_\sigma$, cela signifie que $\pi \neq \pi_{-1}$. Posons :

$$\pi_+ = \pi_0 \times \pi_1 \times \pi_2 \times \dots \in \mathrm{Irr}_{\mathrm{st}_0(\sigma)}.$$

On a donc $\pi = \pi_{-1} \times \pi_+$ avec $\mathbf{D}(\pi_{-1}) \in \mathcal{I}_\sigma$ et $\mathbf{D}(\pi_+) \in \mathcal{I}_{\mathrm{st}_0(\sigma)}$. Comme $\mathcal{I}_{\mathrm{st}_0(\sigma)}$ est inclus dans $\mathcal{J}_\sigma$, on en déduit que $\mathbf{D}(\pi) \in \mathcal{J}_\sigma$. □

Corollaire 2.9. — *Soit $\pi \in \mathrm{Irr}_\sigma$ une représentation irréductible qu'on écrit :*

$$\pi = \pi_{-1} \times \pi_0 \times \pi_1 \times \pi_2 \times \dots$$

où, pour tout $i \geqslant -1$, la représentation π_i est irréductible et de support cuspidal dans $\mathbf{N}(\Omega_{\mathrm{st}_i(\sigma)})$. Si le théorème 2.5 est vrai pour chacun des π_i avec $i \geqslant -1$, alors il est vrai pour π.

Démonstration. — Tout terme irréductible τ de (2.2) apparaît comme sous-quotient d'un produit $\tau_1 \times \dots \times \tau_r$ où τ_i est un terme irréductible de $\mathbf{D}(\pi_i)$, pour chaque i.

Supposons que $\tau_i \in \mathcal{J}_{\mathrm{st}_i(\sigma)}$ pour au moins un i. Comme $\mathcal{J}_{\mathrm{st}_i(\sigma)}$ est inclus dans $\mathcal{J}_\sigma$ et que celui-ci est un idéal de $\mathcal{R}_\sigma$, on en déduit que $\tau \in \mathcal{J}_\sigma$.

Inversement, supposons que $\tau_i \notin \mathcal{J}_{\mathrm{st}_i(\sigma)}$ pour tout i. Par hypothèse, ceci ne se produit que si $\tau_i = \pi_i^\star$ pour tout i, c'est-à-dire si et seulement si τ est égal à :

$$\pi^\star = \pi_1^\star \times \dots \times \pi_r^\star.$$

Ceci prouve que le théorème est vrai pour π. □

Proposition 2.10. — *Supposons que, pour toute représentation irréductible supercuspidale σ, le théorème 2.5 soit vrai pour toute représentation $\pi \in \mathrm{Irr}$ dont le support supercuspidal est dans $\mathbf{N}(\Omega_\sigma)$. Alors le théorème 2.5 est vrai.*

Démonstration. — Soit $\pi \in \mathrm{Irr}$. D'après le théorème 1.4, il y a des représentations irréductibles supercuspidales $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ non inertiellement équivalentes deux à deux et des représentations irréductibles $\pi_1, \dots, \pi_r$ telles que :

$$\pi = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$$

et $\mathrm{scusp}(\pi_i) \in \mathbf{N}(\Omega_{\sigma_i})$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. On a :

$$\mathbf{D}(\pi) = \mathbf{D}(\pi_1) \times \cdots \times \mathbf{D}(\pi_r) \tag{2.3}$$

donc tout terme irréductible τ de (2.3) apparaît comme sous-quotient d'un produit $\tau_1 \times \cdots \times \tau_r$ où τ_i est un terme irréductible de $\mathbf{D}(\pi_i)$. Comme $\mathrm{scusp}(\tau_i) = \mathrm{scusp}(\pi_i)$, le théorème 1.4 implique que le produit $\tau_1 \times \cdots \times \tau_r$ est irréductible, donc égal à τ. Ainsi :

$$\mathrm{cusp}(\tau) = \mathrm{cusp}(\tau_1) + \cdots + \mathrm{cusp}(\tau_r),$$

qui n'est égal à $\mathrm{cusp}(\pi)$ que si $\mathrm{cusp}(\tau_i) = \mathrm{cusp}(\pi_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. Par hypothèse, ceci ne se produit que si $\tau_i = \pi_i^\star$ pour tout i, c'est-à-dire si et seulement si τ est égal à :

$$\pi^\star = \pi_1^\star \times \cdots \times \pi_r^\star.$$

Ceci prouve que le théorème est vrai pour π. □

Proposition 2.11. — *Supposons que, pour toute représentation supercuspidale σ, le théorème 2.5 soit vrai pour toute représentation $\pi \in \mathrm{Irr}$ telle que $\mathrm{cusp}(\pi) \in \mathbf{N}(\Omega_\sigma)$. Alors le théorème 2.5 est vrai.*

Démonstration. — Par conjonction du corollaire 2.9 et de la proposition 2.10. □

Pour la définition de la notation $\mathbf{F}$ dans l'énoncé suivant, on renvoie à (1.16).

Proposition 2.12. — *Soit σ une représentation cuspidale, et soit un entier $n \geqslant 1$. Le théorème 2.5 est vrai pour toute représentation $\pi \in \mathrm{Irr}^*_{\sigma,n}$ si et seulement si :*

$$(-1)^n \cdot \mathbf{F}(\mathbf{D}(\pi)) \in \mathcal{M}_\sigma \tag{2.4}$$

est un $\mathcal{H}(\sigma, n)$-module simple.

Démonstration. — Rappelons que le théorème 2.5 est vrai pour π si et seulement s'il existe une représentation irréductible $\pi^\star$ de même support cuspidal que π telle que :

$$\mathbf{D}(\pi) - (-1)^{r(\pi)} \cdot \pi^\star \in \mathcal{J}_\sigma.$$

Comme $\pi \in \mathrm{Irr}^*_{\sigma,n}$, on a $r(\pi) = n$. Comme $\mathcal{J}_\sigma$ est le noyau de $\mathbf{F}$, cette condition s'écrit :

$$(-1)^n \cdot \mathbf{F}(\mathbf{D}(\pi)) = \mathbf{F}(\pi^\star).$$

Comme $\mathbf{F}$ induit une bijection entre $\mathrm{Irr}^*_{\sigma,n}$ et les modules à droite simples sur $\mathcal{H}(\sigma, n)$ (théorème 1.5), il s'ensuit que le théorème 2.5 est vrai pour π si et seulement si (2.4) est un module à droite simple dont l'antécédent par $\mathbf{F}$ dans $\mathrm{Irr}^*_{\sigma,n}$ a le même support cuspidal que π.

Supposons simplement que (2.4) est un module à droite simple, et notons $\pi^\star$ l'unique élément de $\mathrm{Irr}^*_{\sigma,n}$ lui correspondant par $\mathbf{F}$. Ecrivons $\mathrm{cusp}(\pi) = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n$ avec $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Omega_\sigma$. Alors $\pi^\star$ est un sous-quotient irréductible de $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n$ dont le support cuspidal est formé de termes inertiellement équivalents à σ. On a donc $\mathrm{cusp}(\pi^\star) = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n = \mathrm{cusp}(\pi)$, ce qui met fin à la démonstration. □

Remarque 2.13. — Dans le cas où F est fini et σ est le caractère trivial de $F^\times$, la proposition 2.11 et le lien avec l'algèbre de Hecke sont prouvés par Ackermann et Schroll (voir [1], notamment le théorème 4.1).

2.3. Conclusion partielle

Si l'on joint les propositions 2.11 et 2.12, on voit que, pour prouver le théorème 2.5, il suffit de prouver que, pour toute représentation supercuspidale $\sigma \in \mathcal{S}$, tout $n \geqslant 1$ et toute représentation irréductible $\pi \in \mathrm{Irr}^*_{\sigma,n}$, la quantité :

$$(-1)^n \cdot \mathsf{F}(\mathsf{D}(\pi))$$

dans $\mathcal{M}_\sigma$ est un $\mathcal{H}(\sigma,n)$-module simple.

3. Un calcul de coinvariants

On fixe une représentation irréductible cuspidale σ de degré m et un entier $n \geqslant 1$, et on pose $\mathrm{Q} = \Sigma^{\times n}$ et $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\sigma,n)$ (voir le paragraphe 1.3 pour les notations).

On fixe une composition $(n_1,\dots,n_r)$ de n, et on pose :

$$\mathrm{M} = \mathrm{GL}_{mn_1}(\mathrm{D}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{mn_r}(\mathrm{D}) \subseteq \mathrm{GL}_{mn}(\mathrm{D}) = \mathrm{G}.$$

On note P le sous-groupe parabolique de G engendré par M et les matrices triangulaires supérieures, et on note N son radical unipotent. On pose $\mathrm{Q_M} = \Sigma^{\times n_1} \otimes \cdots \otimes \Sigma^{\times n_r}$, et on note $\mathcal{H}_\mathrm{M}$ son algèbre d'endomorphismes.

La représentation Q s'identifie à l'induite parabolique de $\mathrm{Q_M}$ à G le long de P. Par fonctorialité, on en déduit un morphisme (injectif) d'algèbres :

$$j : \mathcal{H}_\mathrm{M} \to \mathcal{H}$$

faisant de $\mathcal{H}$ un $\mathcal{H}_\mathrm{M}$-module à droite.

3.1. Le cas fini

Dans ce paragraphe, on suppose qu'on est dans le cas fini. Comme N est un p-groupe fini et que p est inversible dans R, les N-coinvariants $\mathrm{Q_N}$ sont canoniquement isomorphes aux N-invariants $\mathrm{Q^N}$.

Proposition 3.1. — *On a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Q^N} \simeq \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{H}_\mathrm{M}} \mathrm{Q_M}$$

de représentations de M *et de* $\mathcal{H}$*-modules à droite.*

Démonstration. — On note i le plongement canonique de $\mathrm{Q_M}$ dans Q, défini, pour tout $f \in \mathrm{Q_M}$, par :

$$i(f) : g \mapsto \begin{cases} f(m) & \text{si } g = mn \text{ avec } m \in \mathrm{M},\ n \in \mathrm{N}, \\ 0 & \text{si } g \notin \mathrm{P}, \end{cases}$$

C'est un morphisme injectif de représentations de M, tel que $i \circ k = j(k) \circ i$ pour tout $k \in \mathcal{H}_\mathrm{M}$. Son image est le sous-espace des fonctions de support inclus dans P ; elle est invariante par N. On note ξ l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{H}_\mathrm{M}} \mathrm{Q_M} & \to & \mathrm{Q} \\ h \otimes f & \mapsto & h(i(f)). \end{array}$$

On note W le sous-groupe des matrices de permutation de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ (naturellement plongé dans G) et S l'ensemble des matrices des transpositions $i \leftrightarrow i+1$. On note W_M le sous-groupe de W correspondant à M.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des représentants distingués de $\mathrm{W}/\mathrm{W}_\mathrm{M}$ dans W, c'est-à-dire que, pour tout $d \in \mathcal{D}$, l'unique élément de longueur minimale dans $d\mathrm{W}_\mathrm{M}$ est d. Fixons pour tout élément $d \in \mathcal{D}$ un élément $t_d \in \mathcal{H}$ de support $\mathrm{P}d\mathrm{P}$. Alors $\mathcal{H}$ est un $\mathcal{H}_\mathrm{M}$-module à droite libre de base $(t_d)_{d\in\mathcal{D}}$. Le morphisme $t_d \circ i$ est injectif, et il a pour image le sous-espace de Q^N formé des fonctions de support inclus dans $\mathrm{P}d\mathrm{N}$. Ainsi ξ est bijectif.

Pour plus de détails, on pourra consulter [26], paragraphes 4.2 et 4.3. □

Appliquant le foncteur d'induction parabolique de M à G le long de P, on obtient un isomorphisme :

$$\mathrm{Ind}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\mathrm{Q}^\mathrm{N}) \simeq \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{H}_\mathrm{M}} \mathrm{Q} \tag{3.1}$$

de représentations de G.

Corollaire 3.2. — (1) *Pour toute représentation ϱ de* M, *on a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\mathrm{Q}, \mathrm{Ind}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\varrho)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\mathrm{M}}(\mathcal{H}, \mathrm{Hom}_\mathrm{M}(\mathrm{Q}_\mathrm{M}, \varrho))$$

de $\mathcal{H}$-modules à droite.

(2) *Le foncteur exact $\pi \mapsto \mathrm{Ind}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\pi^\mathrm{N})$ préserve la sous-catégorie $\mathscr{E}(\sigma, n)$ (voir le* §1.3*).*

Démonstration. — On obtient (1) par adjonction, grâce à la proposition 3.1. Pour obtenir (2), il suffit prouver que l'image de Q par ce foncteur est dans $\mathscr{E}(\sigma, n)$, ce qui suit de (3.1). □

3.2. Le cas p-adique

Dans ce paragraphe, on suppose qu'on est dans le cas p-adique. On fixe, comme au paragraphe 1.3, un type simple maximal (J, λ) contenu dans σ. Ce type simple maximal admet une décomposition (non canonique) :

$$\lambda = \kappa \otimes \sigma^{\mathrm{fin}}$$

où κ est une β-extension au sens de [23, §2.4] et σ^{fin} une représentation irréductible de J triviale sur un sous-groupe ouvert distingué J^1 de J. Le quotient J/J^1 s'identifie (non canoniquement) à un groupe fini $\mathrm{GL}_f(\boldsymbol{k})$ où $\boldsymbol{k}$ est un corps fini de caractéristique p et f un entier, et σ^{fin} s'identifie à une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_f(\boldsymbol{k})$.

On note $\mathscr{G}$ le groupe $\mathrm{GL}_{fn}(\boldsymbol{k})$. L'induite parabolique $\sigma^{\mathrm{fin}} \times \cdots \times \sigma^{\mathrm{fin}}$ est une représentation de $\mathscr{G}$ notée $\mathrm{Q}^{\mathrm{fin}}$ et son algèbre d'endomorphismes est notée $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$. Comme au début de la section 3, on a aussi une représentation $\mathrm{Q}^{\mathrm{fin}}_\mathrm{M}$ du sous-groupe de Levi $\mathscr{M} = \mathrm{GL}_{fn_1}(\boldsymbol{k}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{fn_r}(\boldsymbol{k})$ et une sous-algèbre $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}_\mathrm{M}$ de $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$. D'après le corollaire 3.2, on a un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{fin}}, \mathrm{Ind}_{\mathscr{P}}^{\mathscr{G}}(\varrho)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}_\mathrm{M}}(\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}, \mathrm{Hom}_\mathrm{M}(\mathrm{Q}^{\mathrm{fin}}_\mathrm{M}, \varrho))$$

de $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$-modules à droite, pour toute représentation ϱ de $\mathscr{M}$.

D'après [23], sections 2 et 5, il existe :

(1) un sous-groupe ouvert compact $\mathbf{J}$ de G et un sous-groupe ouvert distingué $\mathbf{J}^1$ tels que le quotient $\mathbf{J}/\mathbf{J}^1$ s'identifie au groupe $\mathscr{G}$;

(2) une représentation irréductible $\boldsymbol{\kappa}$ de $\mathbf{J}$ telle qu'on ait un isomorphisme de représentations :

$$\mathrm{Q} \simeq \mathrm{ind}_{\mathbf{J}}^{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\kappa} \otimes \mathrm{Q}^{\mathrm{fin}}) \tag{3.2}$$

où $\mathrm{Q}^{\mathrm{fin}}$ est vue, par inflation, comme une représentation de $\mathbf{J}$ triviale sur $\mathbf{J}^1$.

(Dans la section 5 de [23], ces groupes et cette représentation sont notés $\mathbf{J}_{\max}$, $\mathbf{J}^1_{\max}$ et $\boldsymbol{\kappa}_{\max}$.)

L'isomorphisme (3.2) induit un morphisme fonctoriel d'algèbres de $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$ dans $\mathcal{H}$. Si l'on définit le foncteur exact :

$$\mathbf{K} : \pi \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\boldsymbol{\kappa}, \pi)$$

de la catégorie des représentations de G vers celle des représentations de $\mathscr{G}$, on a un isomorphisme de $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$-modules à droite :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{fin}}, \mathbf{K}(\pi)) \tag{3.3}$$

pour toute représentation lisse π de G.

De façon analogue, il y a un foncteur $\mathbf{K}_{\mathrm{M}}$ de la catégorie des représentations de M vers celle des représentations de $\mathscr{M}$ possédant les propriétés suivantes :

(1) on a un isomorphisme de $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{M}}$-modules à droite :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\mathrm{Q}_{\mathrm{M}}, \varrho) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{M}}, \mathbf{K}_{\mathrm{M}}(\varrho)) \tag{3.4}$$

pour toute représentation lisse ϱ de M ;

(2) si $\mathscr{P}$ est le sous-groupe parabolique standard de $\mathscr{G}$ correspondant au sous-groupe de Levi $\mathscr{M}$, alors pour toute représentation ϱ de M on a ([31, Proposition 5.6]) un isomorphisme :

$$\mathbf{K}(\mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\varrho)) \simeq \mathrm{Ind}_{\mathscr{P}}^{\mathscr{G}}(\mathbf{K}_{\mathrm{M}}(\varrho)) \tag{3.5}$$

de représentations de $\mathscr{G}$.

Proposition 3.3. — *On a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Q}_{\mathrm{N}} \simeq \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}} \mathrm{Q}_{\mathrm{M}}$$

de $\mathcal{H}$-modules à gauche et de représentations de M.

Démonstration. — Appliquons (3.3) à la représentation $\mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\varrho)$ où ϱ est une R-représentation lisse de M. Compte tenu de (3.5), on a des isomorphismes de $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$-modules à droite :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}, \mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\varrho)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{fin}}, \mathbf{K}(\mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\varrho))) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{fin}}, \mathrm{Ind}_{\mathscr{P}}^{\mathscr{G}}(\mathbf{K}_{\mathrm{M}}(\varrho))).$$

D'après le corollaire 3.2 et (3.4), on a des isomorphismes de $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$-modules à droite :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{fin}}, \mathrm{Ind}_{\mathscr{P}}^{\mathscr{G}}(\mathbf{K}_{\mathrm{M}}(\varrho))) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{M}}}(\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}, \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{M}}, \mathbf{K}_{\mathrm{M}}(\varrho)))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{M}}}(\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\mathrm{Q}_{\mathrm{M}}, \varrho))\end{aligned}$$

et ce dernier est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\mathcal{H}^{\mathrm{fin}} \otimes_{\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{M}}} \mathrm{Q}_{\mathrm{M}}, \varrho)$. Ceci étant valable pour toute représentation lisse ϱ de M, on en déduit un isomorphisme :

$$\mathrm{Q}_{\mathrm{N}} \simeq \mathcal{H}^{\mathrm{fin}} \otimes_{\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{M}}} \mathrm{Q}_{\mathrm{M}} \tag{3.6}$$

de $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$-modules à gauche et de représentations de M.

Avec les notations du paragraphe 1.3, et compte tenu de l'isomorphisme (1.14), le $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{fin}}$-module à gauche $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$ est libre de base $(\mathrm{X}^{\alpha})_{\alpha\in\mathbf{Z}^n}$ avec $\mathrm{X}^{\alpha} = \mathrm{X}_1^{\alpha_1}\dots\mathrm{X}_n^{\alpha_n}$ pour $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbf{Z}^n$, et c'est aussi une base du $\mathcal{H}^{\mathrm{fin}}$-module à droite $\mathcal{H}$. Ainsi l'application naturelle :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}^{\mathrm{fin}} \otimes_{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{fin}}} \mathcal{H}_{\mathrm{M}} & \to & \mathcal{H} \\ (h,k) & \mapsto & h * k \end{array}$$

(où $*$ désigne la multiplication dans $\mathcal{H}$) est un isomorphisme de $(\mathcal{H}^{\mathrm{fin}},\mathcal{H}_{\mathrm{M}})$-bimodules. Comme Q_{M} est un $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$-module à gauche, on obtient, grâce à (3.6), l'isomorphisme annoncé. □

Comme dans le cas fini, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.4. — (1) *Pour toute représentation ϱ de* M*, on a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q},\mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\varrho)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}}(\mathcal{H},\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\mathrm{Q}_{\mathrm{M}},\varrho))$$

de $\mathcal{H}$-modules à droite.

(2) *Le foncteur exact $\pi \mapsto \mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\pi_{\mathrm{N}})$ préserve la sous-catégorie $\mathscr{E}(\sigma,n)$ (voir le §1.3).*

Remarque 3.5. — D'après [23], la représentation Q s'identifie à l'induite compacte d'un type semi-simple (*ibid.*, §2.8-2.9). D'après la propriété de paire couvrante de ces types semi-simples (*ibid.*, §2.7), on a un isomorphisme de $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$-modules à droite :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q},\pi) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\mathrm{Q}_{\mathrm{M}},\pi_{\mathrm{N}})$$

pour toute représentation π de G, où π_{N} désigne la restriction parabolique (normalisée) de π.

3.3. Un corollaire

On suppose à nouveau qu'on est, indistinctement, dans le cas fini ou p-adique. Des corollaires 3.2 et 3.4 on déduit le résultat suivant.

Corollaire 3.6. — *Le morphisme de groupes $\mathbf{F} : \mathcal{R}_\sigma \to \mathcal{M}_\sigma$ défini en* (1.16) *est un morphisme d'algèbres.*

Si l'on note $\mathcal{A}_\sigma$ la $\mathbf{Z}$-algèbre quotient de $\mathcal{R}_\sigma$ par $\mathcal{J}_\sigma$, le morphisme $\mathbf{F}$ induit un isomorphisme :

$$\mathbf{f} : \mathcal{A}_\sigma \to \mathcal{M}_\sigma \tag{3.7}$$

de $\mathbf{Z}$-algèbres. D'après le corollaire 2.8, l'involution $\mathbf{D}$ induit une involution sur $\mathcal{A}_\sigma$, notée $\mathbf{d}$. On a défini une involution $\boldsymbol{\tau}$ sur $\mathcal{M}_\sigma$ au paragraphe 1.3. Nous étudions maintenant le comportement de $\mathbf{f}$ vis-à-vis de ces deux involutions. Plus précisément, nous avons deux isomorphismes d'algèbres $\mathbf{f}\circ\mathbf{d}$ et $\boldsymbol{\tau}\circ\mathbf{f}$ de $\mathcal{A}_\sigma$ dans $\mathcal{M}_\sigma$, que nous allons comparer.

3.4. Une formule pour $\mathbf{F}\circ\mathbf{D}$

Lemme 3.7. — *Soit α une composition de mn.*

(1) *Si α n'est pas de la forme $(mn_1,\dots,mn_r)$ où $(n_1,\dots,n_r)$ est une composition de n, alors le foncteur $\boldsymbol{i}_\alpha\circ\boldsymbol{r}_\alpha$ est nul sur la sous-catégorie $\mathscr{E}(\sigma,n)$.*

(2) *Dans tous les cas, le foncteur $\boldsymbol{i}_\alpha\circ\boldsymbol{r}_\alpha$ préserve la sous-catégorie $\mathscr{E}(\sigma,n)$.*

Démonstration. — Si α est de la forme $(mn_1,\dots,mn_r)$, c'est une conséquence des corollaires 3.2 et 3.4. Sinon, la restriction de $\boldsymbol{i}_\alpha\circ\boldsymbol{r}_\alpha$ à $\mathscr{E}(\sigma,n)$ est le foncteur nul, car le support cuspidal d'une représentation irréductible dans $\mathscr{E}(\sigma,n)$ n'est composé que de représentations dans (2.1). □

Rappelons que, pour toute composition $\gamma = (n_1, \dots, n_r)$ de n, on a défini des foncteurs $\mathbf{r}_\gamma$ et $\mathbf{i}_\gamma$ au paragraphe 1.3. Leur composé $\mathbf{i}_\gamma \circ \mathbf{r}_\gamma$ définit donc un endomorphisme de groupe de $\mathcal{M}_\sigma$.

Ecrivons $m \cdot \gamma = (mn_1, \dots, mn_r)$, qui est une composition de mn.

Lemme 3.8. — (1) *Pour toute composition γ de n et toute représentation $\pi \in \mathrm{Irr}_{\sigma,n}$, on a :*

$$\mathsf{F}(\boldsymbol{i}_{m\cdot\gamma} \circ \boldsymbol{r}_{m\cdot\gamma}(\pi)) \simeq \mathbf{i}_\gamma \circ \mathbf{r}_\gamma(\mathsf{F}(\pi))$$

dans la catégorie des $\mathcal{H}(\sigma, n)$-modules à droite.

(2) *Pour toute représentation $\pi \in \mathrm{Irr}_{\sigma,n}$, on a :*

$$\mathsf{F}(\mathsf{D}(\pi)) = \sum_{\gamma} (-1)^{r(\gamma)} \cdot \mathbf{i}_\gamma \circ \mathbf{r}_\gamma(\mathsf{F}(\pi))$$

dans $\mathcal{M}_\sigma$, où γ décrit les compositions de n.

Démonstration. — La partie (2) est une conséquence du lemme 3.7 et de la partie (1).

D'après le corollaire 3.4, on a un isomorphisme de $\mathcal{H}$-modules à droite :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}, \boldsymbol{i}_{m\cdot\gamma}(\varrho)) \simeq \mathbf{i}_\gamma(\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\mathrm{Q}_{\mathrm{M}}, \varrho))$$

pour toute représentation ϱ de M. D'après la remarque 3.5, on a également un isomorphisme de $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$-modules à droite :

$$\mathbf{r}_\gamma(\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}, \pi)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\mathrm{Q}_{\mathrm{M}}, \boldsymbol{r}_{m\cdot\gamma}(\pi)) \tag{3.8}$$

pour toute représentation π de G. En composant les deux, on obtient l'identité voulue. □

4. Preuve du théorème 2.5

Les notations σ et m, n ont le même sens qu'au début de la section 3.

4.1. Changement de groupe

On permet maintenant de changer le corps F fixé dans l'introduction : fixons un corps F′ de même nature que F, c'est-à-dire fini de caractéristique p dans le cas fini, et localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p dans le cas p-adique. On fixe une représentation irréductible cuspidale σ' d'un groupe $\mathrm{GL}_{m'}(\mathrm{D}')$, où D′ est une F′-algèbre à division centrale et $m' \geqslant 1$, telle que $q_{\sigma'} = q_\sigma$ dans R. Comme en (1.16), on associe à σ' un morphisme d'algèbres :

$$\mathsf{F}' : \mathcal{R}_{\sigma'} \to \mathcal{M}_{\sigma'}.$$

Cette dernière est égale à $\mathcal{M}_\sigma$ (que l'on note donc $\mathcal{M}$) puisque $q_{\sigma'} = q_\sigma$. Le morphisme F' induit une bijection entre $\mathrm{Irr}^*_{\sigma'}$ et l'ensemble des objets simples de $\mathcal{M}$. On note D' l'involution sur $\mathcal{R}_{\sigma'}$.

D'après [23] (voir aussi [22, §5.2]), il y a pour tout entier $n \geqslant 0$ une bijection :

$$\boldsymbol{\Phi}_n : \mathrm{Irr}^*_{\sigma,n} \to \mathrm{Irr}^*_{\sigma',n}$$

compatible au support cuspidal. En prenant la réunion sur n, on obtient une bijection $\boldsymbol{\Phi}$ de Irr^*_σ dans $\mathrm{Irr}^*_{\sigma'}$. Pour toute représentation irréductible $\pi \in \mathrm{Irr}^*_\sigma$, on a l'identité $\mathsf{F}'(\boldsymbol{\Phi}(\pi)) = \mathsf{F}(\pi)$.

Proposition 4.1. — *Etant donnée $\pi \in \mathrm{Irr}^*_\sigma$, notons π' son image par $\boldsymbol{\Phi}$. On a l'identité :*

$$\mathsf{F}'(\mathsf{D}'(\pi')) = \mathsf{F}(\mathsf{D}(\pi)).$$

Démonstration. — D'après le lemme 3.8, on a :

$$\begin{aligned}\mathsf{F}'(\mathsf{D}'(\pi')) &= \sum_{\gamma}(-1)^{r(\gamma)}\cdot \mathbf{i}_{\gamma}\circ \mathbf{r}_{\gamma}(\mathsf{F}'(\pi')) \\ &= \sum_{\gamma}(-1)^{r(\gamma)}\cdot \mathbf{i}_{\gamma}\circ \mathbf{r}_{\gamma}(\mathsf{F}(\pi))\end{aligned}$$

(où γ décrit les compositions de n) et cette dernière somme est égale à $\mathsf{F}(\mathsf{D}(\pi))$. □

Corollaire 4.2. — *Si le théorème 2.5 est vrai pour toute représentation $\pi' \in \mathrm{Irr}^*_{\sigma'}$, alors il est vrai pour toute représentation $\pi \in \mathrm{Irr}^*_{\sigma}$.*

Démonstration. — Soit $\pi \in \mathrm{Irr}^*_{\sigma,n}$ pour un $n \geqslant 1$, et posons $\pi' = \mathbf{\Phi}(\pi)$, qui appartient à $\mathrm{Irr}^*_{\sigma',n}$. D'après la proposition 4.1, on a :

$$(-1)^n\cdot \mathsf{F}'(\mathsf{D}'(\pi')) = (-1)^n\cdot \mathsf{F}(\mathsf{D}(\pi)).$$

Par hypothèse, le théorème 2.5 est vrai pour π', donc le membre de gauche est un module simple dans $\mathcal{M}$ d'après la proposition 2.12. Le membre droite l'est donc aussi, et il s'ensuit (à nouveau grâce à la proposition 2.12) que le théorème 2.5 est vrai pour π. □

4.2. La théorie des segments

On rappelle maintenant la notion de segment introduite dans [22]. Rappelons que nous avons défini au paragraphe 1.2, pour toute représentation cuspidale σ, un caractère ν_σ (voir aussi [23, §4.5]).

Définition 4.3. — Un *segment* est un couple $[\sigma, n]$ formé d'une classe de représentation irréductible cuspidale $\sigma \in \mathcal{C}$ et d'un entier $n \geqslant 1$.

Soit un segment $[\sigma, n]$. On note $\mathcal{Z}(\sigma, n)$ le caractère de $\mathcal{H}(\sigma, n)$ défini par :

$$\mathrm{S}_i \mapsto q_\sigma,\ i \in \{1,\dots,n-1\},\quad \mathrm{X}_j \mapsto q_\sigma^{j-1},\ j \in \{1,\dots,n\},$$

et on note $\mathcal{L}(\sigma, n)$ le caractère de $\mathcal{H}(\sigma, n)$ défini par :

$$\mathrm{S}_i \mapsto -1,\ i \in \{1,\dots,n-1\},\quad \mathrm{X}_j \mapsto q_\sigma^{n-j},\ j \in \{1,\dots,n\}.$$

On remarque que ces deux caractères sont échangés par l'involution $\boldsymbol{\tau}$ définie au paragraphe 1.3.

On associe au segment $[\sigma, n]$ deux représentations irréductibles de G_{mn}.

Définition 4.4 **(**[22, §7.2], [24, §3]**).** — Soit un segment $[\sigma, n]$.

(1) On note $\mathrm{Z}(\sigma, n)$ l'unique sous-représentation irréductible de $\sigma \times \sigma\nu_\sigma \times \cdots \times \sigma\nu_\sigma^{n-1}$ correspondant par (1.15) au caractère $\mathcal{Z}(\sigma, n)$.

(2) On note $\mathrm{L}(\sigma, n)$ l'unique quotient irréductible de $\sigma \times \sigma\nu_\sigma \times \cdots \times \sigma\nu_\sigma^{n-1}$ correspondant par (1.15) au caractère $\mathcal{L}(\sigma, n)$.

Nous aurons besoin de la propriété suivante.

Théorème 4.5 **(**[22, Lemme 9.41], [24, Lemme 4.8]**).** — *Supposons que σ est supercuspidale, et notons $\mathcal{D}_\sigma$ l'ensemble des segments $[\sigma', n]$ tels que $\sigma' \in \Omega_\sigma$ et $n \geqslant 1$. Les produits :*

$$\mathrm{Z}(\sigma_1, n_1) \times \cdots \times \mathrm{Z}(\sigma_r, n_r), \tag{4.1}$$

lorsque $[\sigma_1, n_1] + \cdots + [\sigma_r, n_r]$ décrit $\mathbf{N}(\mathcal{D}_\sigma)$, forment une base du $\mathbf{Z}$-module libre $\mathcal{R}_\sigma$.

Pour comparer les morphismes d'algèbres $\mathbf{f} \circ \mathbf{d}$ et $\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{f}$ il suffit de les comparer sur une base de $\mathcal{A}_\sigma$. D'après le théorème 4.5, il suffit de le faire pour les représentations $\mathrm{Z}(\sigma', n)$ avec $[\sigma', n] \in \mathcal{D}_\sigma$ et σ supercuspidale.

Remarque 4.6. — Grâce au théorème 4.5 (voir aussi la remarque A.6 de [21]), il y a un unique automorphisme de $\mathbf{Z}$-algèbre $\mathbf{E}$ de $\mathcal{R}_\sigma$ tel que :

$$\mathbf{E}(\mathrm{Z}(\sigma', n)) = \mathrm{L}(\sigma', n) \quad \text{pour tout} \quad [\sigma', n] \in \mathcal{D}_\sigma.$$

Dans le cas banal, $\mathbf{E}$ est involutif et coïncide à un signe près avec l'involution d'Aubert (appendice de [21]). Dans le cas non banal, $\mathbf{E}$ n'est pas toujours involutif, comme le montre l'exemple suivant. Supposons que la caractéristique ℓ de R divise $q^2 + q + 1$ et que σ est le caractère trivial de $\mathrm{F}^\times$, noté 1. Alors on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathrm{Z}(1,3)) &= \mathrm{L}(1,3), \\ \mathbf{E}(\mathrm{L}(1,3)) &= \mathrm{Z}(1,3) + \mathrm{st}_0(1), \\ \mathbf{E}(\mathrm{st}_0(1)) &= -2 \cdot \mathrm{st}_0(1), \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathbf{E}$ n'est pas involutif, ne préserve pas l'irréductibilité à un signe près et n'est pas égal à $\mathbf{D}$.

4.3. Une formule pour $\mathbf{D}(\mathrm{Z}(\sigma, n))$

Dans ce paragraphe et le suivant, R est une clôture algébrique $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ d'un corps fini de caractéristique $\ell \neq p$. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ du corps des nombres ℓ-adiques. On note :

$$\mathbf{r}_\ell : \widetilde{\mathcal{R}}^{\mathrm{ent}} \to \mathcal{R}$$

le morphisme de réduction modulo ℓ, où $\widetilde{\mathcal{R}}$ désigne le groupe abélien libre engendré par les classes de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentations irréductibles des G_m, $m \geqslant 0$ et $\widetilde{\mathcal{R}}^{\mathrm{ent}}$ le sous-groupe de $\widetilde{\mathcal{R}}$ engendré par les classes de représentations irréductibles entières (voir [22, §1.2]).

Lemme 4.7. — *Soit σ une $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale. Supposons qu'il existe une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière $\widetilde{\sigma}$ dont la réduction mod ℓ est égale à σ. Alors :*

$$\mathbf{D}(\mathrm{Z}(\sigma, n)) = (-1)^n \cdot \mathbf{r}_\ell(\mathrm{L}(\widetilde{\sigma}, n))$$

pour tout $n \geqslant 1$.

Démonstration. — Notons $\widetilde{\mathbf{D}}$ l'involution sur $\widetilde{\mathcal{R}}$. Comme $\mathbf{r}_\ell$ commute à l'induction et à la restriction paraboliques (voir [22, §1.2]), on a l'égalité :

$$\mathbf{D} \circ \mathbf{r}_\ell = \mathbf{r}_\ell \circ \widetilde{\mathbf{D}}.$$

D'après [22, Théorème 9.39] dans le cas p-adique et [24, Lemme 5.9] dans le cas fini, la réduction mod ℓ de $\mathrm{Z}(\widetilde{\sigma}, n)$ est égale à $\mathrm{Z}(\sigma, n)$. En réalité, les preuves de ces deux résultats comportent une omission, que nous allons corriger ici. Ces preuves montrent toutes les deux que la réduction mod ℓ de $\mathrm{Z}(\widetilde{\sigma}, n)$ est irréductible (notons-la π) et que, pour toute composition $\alpha = (mk, m(n-k))$ avec $m = \deg(\sigma)$ et $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on a $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi) = \mathrm{Z}(\sigma, k) \otimes \mathrm{Z}(\sigma\nu_\sigma^k, m-k)$. Mais ceci ne suffit pas (lorsque q_σ est congru à 1 modulo ℓ) pour en déduire que π est égale à $\mathrm{Z}(\sigma, n)$. Expliquons, dans le cas fini, pourquoi on a cette égalité ; l'argument est similaire dans le cas p-adique.

Soit L un $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$-réseau de $\mathrm{Z}(\widetilde{\sigma}, n)$ stable par G, et soit $\mathrm{L}_{\widetilde{\sigma}}$ un $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$-réseau de $\widetilde{\sigma}$ stable par G_m. La réduction de $\mathrm{L}_{\widetilde{\sigma}}$ étant isomorphe à σ et celle de L étant isomorphe à π, on obtient un morphisme naturel :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L}_{\widetilde{\sigma}}^{\times n}, \mathrm{L}) \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\sigma^{\times n}, \pi)$$

de $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-espaces vectoriels. C'est même un morphisme de $\mathcal{H}(\sigma, n)$-modules, si le membre de gauche est muni d'une structure de $\mathcal{H}(\sigma, n)$-modules grâce à l'isomorphisme naturel d'algèbres :

$$\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L}_{\widetilde{\sigma}}^{\times n}) \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \to \mathcal{H}(\sigma, n).$$

On voit ainsi que $\mathsf{F}(\pi)$ contient la réduction mod ℓ du caractère $\mathcal{Z}(\widetilde{\sigma}, n)$ de $\mathcal{H}(\widetilde{\sigma}, n)$, qui est égal à $\mathcal{Z}(\sigma, n)$. On en déduit que π contient (donc est isomorphe à) $\mathrm{Z}(\sigma, n)$.

Reprenons la preuve du lemme 4.7. D'après ce qu'on sait en caractéristique nulle, $\widetilde{\mathsf{D}}(\mathrm{Z}(\widetilde{\sigma}, n))$ est égal à $(-1)^n \cdot \mathrm{L}(\widetilde{\sigma}, n)$. On en déduit le résultat voulu en appliquant $\mathbf{r}_\ell$. □

4.4. Le cas unipotent

Dans ce paragraphe, on suppose que σ est un caractère non ramifié de $\mathrm{F}^\times$, noté χ. Pour tout $n \geqslant 1$, la représentation $\mathrm{Z}(\chi, n)$ est donc le $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-caractère non ramifié $\chi \circ \det$ de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$.

Lemme 4.8. — *Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\mathsf{F}(\mathsf{D}(\mathrm{Z}(\chi, n))) = (-1)^n \cdot \mathcal{L}(\chi, n)$.*

Démonstration. — Quitte à tordre par χ, on peut supposer que χ est le caractère trivial de $\mathrm{F}^\times$, noté 1. Soit V la $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation de Steinberg de G. D'après le lemme 4.7, il suffit de montrer que $\mathsf{F}(\mathbf{r}_\ell(\mathrm{V}))$ est égal à $\mathcal{L}(1, n)$. Fixons un $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$-réseau L de V stable par G. On a une suite exacte de $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$G-modules :

$$0 \to \mathfrak{p}\mathrm{L} \to \mathrm{L} \to \overline{\mathrm{L}} = \mathrm{L} \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \to 0 \tag{4.2}$$

où $\mathfrak{p}$ désigne l'idéal maximal de $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$. Notons I le sous-groupe d'Iwahori standard de G, et notons I_1 son radical pro-unipotent, qui est un pro-p-sous-groupe distingué de I. Ainsi F est le foncteur des vecteurs I-invariants. En l'appliquant à (4.2), on trouve une suite exacte :

$$0 \to (\mathfrak{p}\mathrm{L})^{\mathrm{I}} \to \mathrm{L}^{\mathrm{I}} \to \overline{\mathrm{L}}^{\mathrm{I}} \to \mathrm{H}^1(\mathrm{I}, \mathfrak{p}\mathrm{L})$$

où $\mathrm{H}^1(\mathrm{I}, \mathfrak{p}\mathrm{L})$ désigne le premier groupe de cohomologie continue de I à coefficients dans $\mathfrak{p}\mathrm{L}$. On va montrer qu'il est nul. Comme I_1 est un pro-p-sous-groupe distingué de I, la suite d'inflation-restriction induit un isomorphisme :

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{I}, \mathfrak{p}\mathrm{L}) \simeq \mathrm{H}^1(\mathrm{I}/\mathrm{I}_1, (\mathfrak{p}\mathrm{L})^{\mathrm{I}_1})$$

de $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$-modules. Appliquant le foncteur exact des I_1-invariants à (4.2), on trouve que $(\mathfrak{p}\mathrm{L})^{\mathrm{I}_1}$ est égal à $\mathfrak{p}\mathrm{L}^{\mathrm{I}_1}$, qui est un $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$-réseau de $\mathrm{V}^{\mathrm{I}_1}$. Mais $\mathrm{V}^{\mathrm{I}_1}$ est de dimension 1 sur $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ et le groupe I agit trivialement dessus. Ainsi, on a :

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{I}/\mathrm{I}_1, (\mathfrak{p}\mathrm{L})^{\mathrm{I}_1}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{I}/\mathrm{I}_1, \mathfrak{p}\mathrm{L}^{\mathrm{I}_1})$$

qui est trivial car le quotient I/I_1 est un groupe abélien fini et $\mathfrak{p}\mathrm{L}^{\mathrm{I}_1}$ un $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$-module libre. Finalement, comme on a aussi $(\mathfrak{p}\mathrm{L})^{\mathrm{I}} = \mathfrak{p}\mathrm{L}^{\mathrm{I}}$, on obtient un isomorphisme naturel :

$$\mathrm{L}^{\mathrm{I}} \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \simeq \overline{\mathrm{L}}^{\mathrm{I}}$$

de $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-espaces vectoriels, et même de $\mathcal{H}(1, n)$-modules. Le membre de gauche étant la réduction mod ℓ du $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-caractère $\mathcal{L}(\widetilde{1}, n)$, où $\widetilde{1}$ désigne le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-caractère trivial de $\mathrm{F}^\times$, le résultat s'ensuit. □

4.5. Le cas général

Le corps R est à nouveau quelconque, de caractéristique $\ell \neq p$. Le théorème suivant implique et précise le théorème 2.5.

Théorème 4.9. — *Soit σ une représentation irréductible cuspidale de degré $m \geqslant 1$. Soit $n \geqslant 1$ et soit $\pi \in \mathrm{Irr}^*_{\sigma,n}$. Il y a une unique représentation irréductible $\pi^\star$ de même support cuspidal que π telle que :*

$$\mathsf{D}(\pi) - (-1)^n \cdot \pi^\star$$

ne contienne pas de terme irréductible de même support cuspidal que π ; le module simple $\mathsf{F}(\pi^\star)$ est égal à $\boldsymbol{\tau}(\mathsf{F}(\pi))$.

Démonstration. — Pour $n \geqslant 1$ et tout $\mathcal{H}(\sigma,n)$-module simple $\mathfrak{m}$, posons $\mathbf{t}(\mathfrak{m}) = (-1)^n \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathfrak{m})$. Prolongeant par linéarité, on obtient un automorphisme involutif d'algèbre sur $\mathcal{M}_\sigma$, encore noté $\mathbf{t}$. Pour prouver que les isomorphismes d'algèbres $\mathbf{f} \circ \mathbf{d}$ et $\mathbf{t} \circ \mathbf{f}$ sont égaux, il suffit de prouver qu'ils coïncident sur un système générateur de $\mathcal{A}_\sigma$.

Supposons d'abord que σ est le $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-caractère trivial de $\mathrm{F}^\times$. D'après le lemme 4.8, le théorème 4.5 et le fait que $\mathbf{f} \circ \mathbf{d}$ et $\mathbf{t} \circ \mathbf{f}$ sont des morphismes d'algèbres, on a :

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{d}(\pi) = \mathbf{t} \circ \mathbf{f}(\pi)$$

pour tout $n \geqslant 1$ et tout $\pi \in \mathrm{Irr}^*_{1,n}$. Par extension des scalaires de $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ à R, on a le même résultat quand σ est le R-caractère trivial de $\mathrm{F}^\times$. Par conséquent, le théorème 4.9 est vrai lorsque σ est le R-caractère trivial de $\mathrm{F}^\times$, et la représentation $\mathrm{Z}(1,n)^\star$ est égale à $\mathrm{L}(1,n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

Passons maintenant au cas général. Fixons une extension finie F' de F dont le cardinal (celui du corps résiduel dans le cas p-adique) est égal à q_σ et notons σ' le caractère trivial de $\mathrm{F}'^\times$. On a donc $q_{\sigma'} = q_\sigma$, c'est-à-dire qu'on est dans les conditions du paragraphe 4.1. D'après le corollaire 4.2 et ce qui précède, la première partie du théorème 4.9 est donc vraie. Soit maintenant π dans $\mathrm{Irr}^*_{\sigma,n}$ et notons π' son image par $\boldsymbol{\Phi}$ (paragraphe 4.1). D'après la proposition 4.1, on a :

$$\mathsf{F}(\pi^\star) = (-1)^n \cdot \mathsf{F}(\mathsf{D}(\pi)) = (-1)^n \cdot \mathsf{F}'(\mathsf{D}'(\pi')) = \mathsf{F}'(\pi'^\star).$$

Ce dernier est égal à $\boldsymbol{\tau}(\mathsf{F}'(\pi'))$ d'après le théorème 4.9 appliqué à σ', et le résultat suit du fait que $\mathsf{F}'(\pi')$ est égal à $\mathsf{F}(\pi)$. □

Proposition 4.10. — *Soit σ une représentation irréductible cuspidale, et soit $n \geqslant 1$.*

(1) *On a $\mathrm{Z}(\sigma,n)^\star = \mathrm{L}(\sigma,n)$.*

(2) *Supposons que R soit égal à $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ et qu'il y ait une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière $\widetilde{\sigma}$ dont la réduction mod ℓ soit égale à σ. Alors $\mathbf{r}_\ell(\mathrm{L}(\widetilde{\sigma},n)) - \mathrm{L}(\sigma,n)$ appartient à $\mathcal{J}_\sigma$, c'est-à-dire qu'il ne contient aucun terme irréductible de support cuspidal $\sigma + \sigma\nu_\sigma + \dots + \sigma\nu_\sigma^{n-1}$.*

Démonstration. — Le $\mathcal{H}(\sigma,n)$-module $\boldsymbol{\tau}(\mathcal{Z}(\sigma,n))$ étant égal à $\mathcal{L}(\sigma,n)$ et compte tenu de la définition de $\mathrm{Z}(\sigma,n)$ et $\mathrm{L}(\sigma,n)$, le théorème 4.9 implique que $\mathrm{Z}(\sigma,n)^\star$ est égal à $\mathrm{L}(\sigma,n)$. La seconde partie de la proposition suit de la conjonction du lemme 4.7 et du théorème 4.9. □

Remarque 4.11. — D'après [24, Remarque 2.10], toute $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale se relève à $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ dans le cas fini, c'est-à-dire que la condition de la proposition 4.10 est toujours remplie dans ce cas. Dans le cas p-adique en revanche, il y a des $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentations irréductibles cuspidales qui ne se relèvent pas à $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ (voir [23, Exemple 3.31]). Cependant :

(1) toute $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentation irréductible supercuspidale se relève ([22, Théorème 6.11]) ;

(2) toute $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale se relève quand D = F ([23, Section 3]).

Dans un article ultérieur [30], on donnera une condition nécessaire et suffisante de relèvement en termes d'invariants numériques attachés à σ.

La proposition suivante est un cas particulier – le cas des algèbres de Hecke affines de type A – d'une formule de Kato [19, Theorem 2].

Proposition 4.12. — *Soit σ une représentation irréductible cuspidale et soit $n \geqslant 1$. Pour tout $\mathcal{H}(\sigma,n)$-module $\mathfrak{m}$ de longueur finie, on a l'égalité :*

$$\sum_{\gamma}(-1)^{n-r(\gamma)}\cdot \mathbf{i}_{\gamma}\circ\mathbf{r}_{\gamma}(\mathfrak{m}) = \boldsymbol{\tau}(\mathfrak{m})$$

dans le groupe de Grothendieck $\mathcal{M}_{\sigma}$, où γ décrit les compositions de n.

Démonstration. — C'est une conséquence du lemme 3.8 et du théorème 4.9. □

Remarque 4.13. — On reprend les notations de la section 3. Le foncteur $\boldsymbol{\tau}\circ\mathsf{F}$ s'identifie à :

$$\pi \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}^{\boldsymbol{\tau}},\pi)$$

où $\mathrm{Q}^{\boldsymbol{\tau}}$ est égal à Q en tant que représentation de G, et au $\mathcal{H}$-module à gauche Q tordu par $\boldsymbol{\tau}$ en tant que $\mathcal{H}$-module à gauche. Peut-on déterminer explicitement la structure du bimodule $\mathrm{Q}^{\boldsymbol{\tau}}$?

4.6. Complément

Nous profitons de l'appareil technique mis en place dans cet article pour répondre à une question de B. Leclerc concernant les multiplicités des représentations irréductibles dans les représentations standard du théorème 4.5.

Supposons dans ce paragraphe qu'on est dans le cas p-adique. Un *segment formel* est une paire $[a,b]$ formée de deux entiers $a,b \in \mathbf{Z}$ tels que $a \leqslant b$. L'entier $b-a+1$ est appelé la *longueur* de ce segment formel. Si $[a,b]$ est un segment formel et si σ est une représentation irréductible cuspidale, on pose :

$$[a,b]\boxtimes\sigma = [\sigma\nu_{\sigma}^{a}, b-a+1]$$

qui est un segment au sens de la définition 4.3. Notant $\mathcal{D}$ l'ensemble des segments formels, on obtient par linéarité une application $\mu \mapsto \mu\boxtimes\sigma$ de $\mathbf{N}(\mathcal{D})$ dans $\mathbf{N}(\mathcal{D}_{\sigma})$. Etant donné :

$$\mu = [a_1,b_1]+\cdots+[a_r,b_r] \in \mathbf{N}(\mathcal{D}), \tag{4.3}$$

le mutisegment $\mu\boxtimes\sigma$ est dit *apériodique* si R est de caractéristique 0 ou si, pour tout $n \geqslant 1$, il y a un $k \in \mathbf{Z}$ tel que le segment $[\sigma\nu_{\sigma}^{k}, n]$ n'apparaît pas dans $\mu\boxtimes\sigma$ (voir [22, Définition 9.7]).

Nous avons construit dans [22] une application surjective Z de $\mathbf{N}(\mathcal{D}_{\sigma})$ dans Irr_{σ}, qui est bijective quand σ est supercuspidale et qui coïncide avec la classification de Zelevinski quand R est le corps des nombres complexes. Pour $\mu,\nu \in \mathbf{N}(\mathcal{D})$, notons $\mathsf{m}(\mu,\nu,\sigma)$ la multiplicité de $\mathrm{Z}(\nu\boxtimes\sigma)$ dans la représentation standard :

$$\mathrm{Z}([a_1,b_1]\boxtimes\sigma)\times\cdots\times\mathrm{Z}([a_r,b_r]\boxtimes\sigma) \tag{4.4}$$

où l'on écrit μ comme en (4.3). D'après [22, Théorème 9.36], on a $\mathrm{Z}(\nu\boxtimes\sigma) \in \mathrm{Irr}_{\sigma}^{*}$ si et seulement si $\nu\boxtimes\sigma$ est apériodique.

Soient μ comme en (4.3) et $\nu = [c_1,d_1]+\cdots+[c_s,d_s] \in \mathbf{N}(\mathcal{D})$, dont les segments formels sont supposés être rangés par longueur décroissante. On écrit $\mu \trianglelefteq \nu$ lorsque :

$$\sum_{i\leqslant k}(b_i-a_i+1) \leqslant \sum_{i\leqslant k}(d_i-c_i+1)$$

pour tout $k \geqslant 1$. Ceci définit une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathbf{N}(\mathcal{D})$.

Proposition 4.14. — *On a* $\mathsf{m}(\mu,\mu,\sigma) = 1$ *et, si* $\mathsf{m}(\mu,\nu,\sigma) \neq 0$ *alors* $\mu \trianglelefteq \nu$.

Démonstration. — C'est une conséquence de [22, Proposition 9.19]. □

Comme au paragraphe 4.1, on fixe un corps F′ localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p, une F′-algèbre à division centrale D′ et un entier $m' \geqslant 1$.

Proposition 4.15. — *Soient* σ *et* σ' *des représentations irréductibles cuspidales de* $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ *et* $\mathrm{GL}_{m'}(\mathrm{D}')$ *respectivement, telles que* $q_{\sigma'} = q_\sigma$ *dans* R. *Alors :*

$$\mathsf{m}(\mu,\nu,\sigma') = \mathsf{m}(\mu,\nu,\sigma)$$

pour tous $\mu,\nu \in \mathbf{N}(\mathcal{D})$ *tels que* $\nu \boxtimes \sigma$ *– ou de façon équivalente* $\nu \boxtimes \sigma'$ *– soit apériodique.*

Démonstration. — On vérifie d'abord, grâce à [23, Lemme 4.45] et à l'égalité $q_{\sigma'} = q_\sigma$ dans R, que $\nu \boxtimes \sigma$ est apériodique si et seulement si $\nu \boxtimes \sigma'$ l'est. Soit $\nu \in \mathbf{N}(\mathcal{D})$, et supposons que $\nu \boxtimes \sigma$ est apériodique. Alors :

$$\mathrm{L}_\nu^\sigma = \mathsf{F}(\mathrm{Z}(\nu \boxtimes \sigma))$$

est un module simple. On pose :

$$\mathrm{M}_\mu = \mathsf{F}(\mathrm{Z}([a_1,b_1] \boxtimes \sigma) \times \cdots \times \mathrm{Z}([a_r,b_r] \boxtimes \sigma)) = \mathcal{Z}(\sigma,n_1) \times \cdots \times \mathcal{Z}(\sigma,n_r)$$

avec $n_i = b_i - a_i + 1$ pour $i \in \{1,\dots,r\}$, qui ne dépend que de μ (et de q_σ). On a donc :

$$\mathsf{m}(\mu,\nu,\sigma) = [\mathrm{M}_\mu : \mathrm{L}_\nu^\sigma] \tag{4.5}$$

où le membre de droite désigne la multiplicité de L_ν^σ dans M_μ.

Lemme 4.16. — *Le module* L_ν^σ *est l'unique module simple vérifiant les conditions suivantes :*

(1) *Il apparaît avec multiplicité* 1 *dans* M_ν.
(2) *S'il apparaît dans* M_μ, *alors* $\mu \trianglelefteq \nu$.

Démonstration. — Appliquant F, la proposition 4.14 implique que L_ν^σ apparaît avec multiplicité 1 dans M_ν. Ensuite, supposons que L_ν^σ apparaît dans M_μ avec multiplicité $k \geqslant 1$. Alors $\mathrm{Z}(\nu\boxtimes\sigma)$ apparaît dans (4.4) avec multiplicité k, c'est-à-dire que $\mathsf{m}(\mu,\nu,\sigma) = k$. De la proposition 4.14, on déduit que $\mu \trianglelefteq \nu$.

Soit maintenant L un module simple vérifiant les conditions en question. D'après le théorème 1.5, il existe une représentation irréductible $\pi \in \mathrm{Irr}_\sigma^*$ telle que $\mathsf{F}(\pi)$ soit égal à L. Ensuite, d'après [22, Théorème 9.36], il existe un $\lambda \in \mathbf{N}(\mathcal{D})$ tel que $\mathrm{Z}(\lambda \boxtimes \sigma)$ soit égal à π. Par conséquent, on a $\mathrm{L} = \mathrm{L}_\lambda^\sigma$. Les conditions 1 et 2 impliquent que $\nu \trianglelefteq \lambda$. Comme L apparaît dans M_λ, la condition 2 implique que $\lambda \trianglelefteq \nu$. Par conséquent, on a $\lambda = \nu$ et le résultat s'ensuit. □

Il s'ensuit que L_ν^σ est égal à $\mathrm{L}_\nu^{\sigma'}$ (qu'on note L_ν), ce qui met fin à la preuve de la proposition. □

Remarque 4.17. — La proposition 4.15 reste sans doute vraie sans l'hypothèse d'apériodicité, mais ceci nécessite d'autres méthodes car $\mathsf{F}(\mathrm{Z}(\nu\boxtimes\sigma))$ est nul quand $\nu\boxtimes\sigma$ n'est pas apériodique.

Remarque 4.18. — Compte tenu de [15] et de [4], on en déduit que les multiplicités (4.5) ne dépendent que de μ,ν et de l'entier $e(\sigma)$ défini par (1.4). En particulier, dans le cas complexe, les multiplicités ne dépendent que de μ et ν.

Références

[1] B. Ackermann & S. Schroll – "On decomposition numbers and Alvis-Curtis duality", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **143** (2007), no. 3, 509–520.

[2] D. Alvis – "The duality operation in the character ring of a finite Chevalley group", *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) **1** (1979), no. 6, 907–911.

[3] ———, "Duality and character values of finite groups of Lie type", *J. Algebra* **74** (1982), no. 1, 211–222.

[4] S. Ariki & A. Mathas – "The number of simple modules of the Hecke algebras of type $G(r,1,n)$", *Math. Z.* **233** (2000), 601–623.

[5] A.-M. Aubert – "Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p-adique", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347**, no. 6 (1995).

[6] A. I. Badulescu & D. Renard – "Zelevinsky involution and Moeglin-Waldspurger algorithm for $\mathrm{GL}_n(D)$", *Functional analysis IX*, **48** (2007), 9–15.

[7] J. Bernstein – "Representations of p-adic groups", Lectures at Harvard University, 1992. Written by K. E. Rumelhart.

[8] R. Bezrukavnikov – "Homological properties of representations of p-adic groups related to the geometry of the group at infinity", prépublication (2004).

[9] A. Borel – "Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup", *Inventiones Math.* **35** (1976), 233–259.

[10] P. Broussous – "Acyclicity of Schneider and Stuhler's coefficient systems: another approah in the level 0 case", *J. Algebra* **279** (2004), 737–748.

[11] P. Broussous & P. Schneider – "Simple characters and coefficient systems on the building", prépublication (2014). Disponible à l'adresse `http://arxiv.org/abs/1402.2501`.

[12] C. J. Bushnell & P. C. Kutzko – *The admissible dual of* GL(N) *via compact open subgroups*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[13] C. Curtis – "Truncation and duality in the character ring of a finite group of Lie type", *J. Algebra* **62** (1980), no. 2, 320–332.

[14] M. Cabanes & J. Rickard – "Alvis-Curtis duality as an equivalence of derived categories", Modular representation theory of finite groups (de Gruyter, 2001), 157–174.

[15] N. Chriss & V. Ginzburg – *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997.

[16] J.-F. Dat – "Finitude pour les représentations lisses de groupes p-adiques", *J. Inst. Math. Jussieu* **8** (2009), no. 2, p. 261–333.

[17] F. Digne & J. Michel – *Representations of finite groups of Lie type*, London Math. Soc. Student Texts vol. 21; Cambridge University Press, 1991.

[18] R. Dipper & P. Fleischmann – "Modular Harish-Chandra theory. I", *Math. Z.* **211** (1992), no. 1, 49–71.

[19] S.-I. Kato – "Duality for representations of a Hecke algebra", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **119**, no. 3 (1993), 941–946.

[20] B. Leclerc, J.-Y. Thibon & E. Vasserot – "Zelevinsky's involution at roots of unity", *J. Reine Angew. Math.* **513** (1999), 33–51.

[21] A. Mínguez & V. Sécherre – "Représentations banales de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$", *Compos. Math.* **149** (2013), 679–704.

[22] ———, "Représentations lisses modulo ℓ de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$", *Duke Math. J.* **163** (2014), 795–887.

[23] ———, "Types modulo ℓ pour les formes intérieures de GL_n sur un corps local non archimédien". Avec un appendice par V. Sécherre et S. Stevens. A paraître dans *Proc. Lond. Math. Soc.*

[24] ——, "Représentations modulaires de $\mathrm{GL}_n(q)$ en caractéristique non naturelle", prépublication (2014). Disponible à l'adresse `http://lmv.math.cnrs.fr/annuaire/vincent-secherre/`.

[25] C. Moeglin & J.-L. Waldspurger – "Sur l'involution de Zelevinski", *J. Reine Angew. Math.* **372** (1986), 136–177.

[26] R. Ollivier & V. Sécherre – "Modules universels en caractéristique naturelle pour un groupe réductif fini". A paraître dans *Ann. Inst. Fourier.*

[27] K. Procter – "Parabolic induction via Hecke algebras and the Zelevinsky duality conjecture", *Proc. London Math. Soc. (3)* **77** (1998), n°1, 79–116.

[28] P. Schneider & U. Stuhler – "Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building", *Publ. Math. IHES* **85** p. 97–191 (1997).

[29] V. Sécherre – "Représentations lisses de $\mathrm{GL}(m, D)$, III : types simples", *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **38** (2005), 951–977.

[30] ——, "Comptage de représentations cuspidales congruentes". En préparation.

[31] V. Sécherre & S. Stevens – "Block decomposition of the category of ℓ-modular smooth representations of $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ and its inner forms", prépublication (2014).
Disponible à l'adresse `http://lmv.math.cnrs.fr/annuaire/vincent-secherre/`.

[32] M. Tadić – "Induced representations of $\mathrm{GL}(n, A)$ for p-adic division algebras A", *J. Reine Angew. Math.* **405** (1990), 48–77.

[33] M.-F. Vignéras – *Représentations ℓ-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $\ell \neq p$*, Progress in Mathematics, vol. 137, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

[34] ——, "Représentations de $\mathrm{GL}(2, F)$ en caractéristique ℓ, F corps p-adique, $p \neq \ell$", *Compos. Math.* **72**, 1989, 33-66.

[35] ——, "Induced R-representations of p-adic reductive groups", *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), no. 4, 549–623. With an appendix by Alberto Arabia.

[36] ——, "Cohomology of sheaves on the building and R-representations", *Invent. Math.* **127** (1997), n°2, 349–373.

[37] A. Zelevinski – "Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. II. On irreducible representations of $\mathrm{GL}(n)$", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **13** (1980), no. 2, 165–210.

Alberto Mínguez, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 6, 4 place Jussieu, 75005, Paris, France. URL: http://www.math.jussieu.fr/~minguez/ • *E-mail :* `minguez@math.jussieu.fr`

Vincent Sécherre, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, 45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles cedex, France
E-mail : `vincent.secherre@math.uvsq.fr`