Université Pierre et Marie Curie
Certificat 1M002 - L1 - 2013/14
Suites et intégrales - Algèbre linéaire
Section renforcée

Correction du partiel du 3 mars 2014

Questions de cours

1) L'assertion s'exprime comme suit :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geq p \quad \text{et} \quad |u_n - \ell| \geq \varepsilon\big).$$

2.1) La famille $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre si pour tout $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K^n$, on a l'implication

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

2.2) La famille $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice si tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs v_i, autrement dit, si pour tout $x \in E$, il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que l'on ait

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

3.1) L'application f est linéaire, si pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les égalités $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

3.2) On a $f(0) = 0$, donc 0 est dans $\operatorname{Ker} f$, le noyau de f. Si x et y sont dans $\operatorname{Ker} f$, on a $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$, donc $x - y$ l'est aussi. Ainsi $(\operatorname{Ker} f, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$. Par ailleurs, soient x un élément de $\operatorname{Ker} f$ et λ un scalaire. On a $f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0$, donc λx appartient à $\operatorname{Ker} f$, d'où l'assertion.

Exercice 1

1) Le module de $\frac{2+i}{2-i}$ vaut 1. Pour tout $n \geq 1$, on a donc

$$|u_n| = \Big|\frac{\sin n}{n}\Big|.$$

Par ailleurs, on a l'inégalité

$$\Big|\frac{\sin n}{n}\Big| \leq \frac{1}{n}.$$

La suite de terme général $\frac{1}{n}$ étant convergente de limite nulle, on en déduit qu'il en est de même de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 2

1) La fonction f étant continue sur $[1,6]$, elle est bornée sur cet intervalle. De plus, en notant m et M respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de $f\big([1,6]\big)$, on a

$$f\big([1,6]\big) = [m, M].$$

La fonction f est croissante sur $[1,6]$. On a donc $m = 2$ et $M = 3$, d'où l'assertion car $[2,3]$ est contenu dans $[1,6]$.

2) Si x un nombre réel positif tel que $f(x) = x$, on a $x^2 - x - 3 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\sqrt{13}$ (la racine carrée positive de 13), d'où le résultat, avec

$$\ell = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

3.1) La fonction f est dérivable sur $[1,6]$ et pour tout x dans cet intervalle, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}.$$

L'ensemble des $f'(x)$ pour $x \in [1,6]$ est borné, et sa borne supérieure est $\frac{1}{4}$. En utilisant le théorème des accroissement finis, on en déduit que pour tous x et y dans $[1,6]$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{4}.$$

Le nombre réel ℓ est dans $[1,6]$ et on a $f(\ell) = \ell$. On a donc pour tout x dans $[1,6]$,

$$|f(x) - \ell| \leq \frac{|x-\ell|}{4}.$$

D'après la première question, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartient à $[1,6]$, d'où l'inégalité annoncée.

3.2) La question précédente suggère que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n - \ell| \leq \frac{|u_0 - \ell|}{4^n}.$$

On le vérifie par récurrence : cette inégalité est vraie si $n = 0$, et si elle est satisfaite pour un entier $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi pour l'entier $n+1$ d'après la question 3.1. Parce que la suite de terme général $\frac{1}{4^n}$ est convergente de limite nulle, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

Exercice 3

1) On vérifie que l'on a

$$A^2 - 3A = -2I.$$

2) On a $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. Les racines de ce polynôme sont donc 1 et 2.

3) Compte tenu du rappel et de la question précédente, on a pour tout $n \geq 1$,

$$1 = \alpha_n + \beta_n \quad \text{et} \quad 2^n = 2\alpha_n + \beta_n.$$

On en déduit que l'on a

$$\alpha_n = 2^n - 1 \quad \text{et} \quad \beta_n = 2 - 2^n.$$

4) D'après la première question et le rappel, on a pour tout $n \geq 1$,

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n I.$$

On obtient l'égalité

$$A^n = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & 6(2^n - 1) \\ 1 - 2^n & 3 - 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

La matrice associée au système linéaire considéré est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de A, on transforme A en une matrice triangulaire supérieure A' n'ayant que des 1 sur sa diagonale. Notons encore L_i les lignes des matrices déduites de A après chaque opération élémentaire.

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+2 \\ 0 & 1 & -(a+3) \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+2 \\ 0 & 1 & -(a+3) \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix}.$$

On est amené à distinguer deux cas.

1) Supposons $a \neq 0$. On effectue alors la dilatation

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{2a} L_3 : \ A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+2 \\ 0 & 1 & -(a+3) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice déduite de $B = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ par la même suite d'opérations élémentaires que celle effectuée sur les lignes de A est $B' = \begin{pmatrix} a \\ -(1+a) \\ \frac{1+a}{a} \end{pmatrix}$. On a $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ si et seulement si $A' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B'$. Si a n'est pas nul, le système a donc une unique solution (x, y, z), qui est

$$(x, y, z) = \left(-\frac{6a+5}{a}, \frac{3(1+a)}{a}, \frac{1+a}{a} \right).$$

2) Supposons $a = 0$. Dans ce cas, le système n'a pas de solution, comme on le constate en considérant la première et la troisième de ses équations.

La seule valeur de a pour laquelle le système n'a pas de solution est donc $a = 0$.
