Devoir du 17/02/2016

Tout appareil électronique (calculatrices, téléphones portables, etc.) est interdit

Exercice 1. Quelles sont, parmi l'ensemble des matrices suivantes, les couples dont je peux faire le produit ? Lorsque cela est possible calculer les produits en question.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soient I l'intervalle $[-1, 1]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et à valeurs réelles. Nier l'assertion suivante :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant 0 \Rightarrow x < 0$$

Dans le cas où f est la fonction $x \mapsto -x$, l'assertion précédente est-elle vraie ?

Problème. Soit

$$x_0 \in [0,1] \quad ; \quad f : x \mapsto 1 - \lambda x^2$$

avec $\lambda \in]0, 1[$ un paramètre fixé.

Le but de cet exercice est de comprendre un bout du comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec condition initiale $u_0 = x_0$

1. (a) **Pour cette section seulement on suppose** $\lambda = \dfrac{1}{2}$. Dessiner dans le plan la droite $y = x$ ainsi que la courbe $y = 1 - \lambda x^2$. Sur le graphique identifier l'intervalle $f([0, 1])$.
   (b) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est laissé stable par f.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n est bien défini et appartient à $[0, 1]$.
   (d) Montrer que sur l'intervalle $[0, 1]$, f n'a qu'un seul point fixe. On le note ℓ dans la suite.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$.
   (a) Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites récurrentes et donner la fonction définissant leur relation de récurrence.
   (b) Montrer en utilisant la question 1.(b) que $f \circ f$ est croissante sur $[0, 1]$.
   (c) En déduire que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. À quelle condition sur u_2 et u_0 (resp. u_3 et u_1) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$) est-elle croissante ? décroissante ?

(d) Montrer, à partir de la question précédente, que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites respectivement notées x_∞ et y_∞, et que x_∞ et y_∞ sont des points fixes de $f \circ f$ dans $[0, 1]$.

(e) (BONUS, à ne faire que si vous avez fini le reste) On suppose de plus que $f \circ f$ n'a **qu'un unique point fixe sur [0,1]** que peut-on dire du comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?