**L1 - 1M002 – Corrigé du partiel du 7 Mars 2014**

**Durée : 2 H 30 - Sans documents ni calculatrice**

***L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé***

## I. Première partie (sur environ 16 points)

***La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont pris en compte pour une part importante dans l'appréciation des copies.***

1. (a) *Rappeler la définition d'une suite de Cauchy.*
   (b) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et soit* $0 < k < 1$ *tels que* $\forall n \geqslant 1$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant k|u_n - u_{n-1}|.$$

*Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy.*

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ssi $\forall\epsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \geqslant n_0 \quad : \quad |u_n - u_m| \leqslant \epsilon$$

ou équivalent $\forall n \geqslant n_0$ et $\forall p \in \mathbb{N}$ : $|u_{n+p} - u_n| \leqslant \epsilon$.
Pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donné on démontre par récurrence que

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n|u_1 - u_0|.$$

Grâce a l'inégalité triangulaire on a, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant 1$ :

$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant \sum_{j=0}^{p-1} |u_{n+j+1} - u_{n+j}| \leqslant \sum_{j=0}^{p-1} k^{n+j}|u_1 - u_0| = k^n \frac{1-k^p}{1-k}|u_1 - u_0| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|.$$

Comme $0 < k < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$. De plus le produit d'une suite qui converge vers 0 avec une constante est une suite qui converge vers 0. Donc $\forall\epsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0| \leqslant \epsilon$ et la conclusion s'en suit.

2. *On considère le système linéaire suivant, d'inconnues réelles $x, y, z$ et pour lequel $p$ est un paramètre réel :*

$$\begin{cases} py + (p-1)z = p+1 \\ x - y - pz = 1 \\ px - z = p^2 + p + 1 \end{cases}$$

*Donner l'ensemble des solutions du système en fonction du paramètre $p$.*

On résout [1] en utilisant la matrice augmentée et en procédant par pivot de Gauss sur les lignes (ce n'est pas la seule méthode possible !).

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & p & p-1 & p+1 \\ 1 & -1 & -p & 1 \\ p & 0 & -1 & p^2+p+1 \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -p & 1 \\ 0 & p & p-1 & p+1 \\ p & 0 & -1 & p^2+p+1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - pL_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -p & 1 \\ 0 & p & p-1 & p+1 \\ 0 & p & p^2-1 & p^2+1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -p & 1 \\ 0 & p & p-1 & p+1 \\ 0 & 0 & p^2-p & p^2-p \end{pmatrix}$$

On voit apparaitre deux valeurs critiques : $p = 0$ et $p = 1$.

**Cas** $p = 0$ :

$A^+ \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où l'ensemble des solutions $Sol_{p=0} = \{\ (1+y, y, -1),\ y \in \mathbb{R}\}$.

**Cas** $p = 1$ :

$A^+ \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où l'ensemble des solutions $Sol_{p=1} = \{\ (3+z, 2, z),\ z \in \mathbb{R}\}$.

**Cas** $p \neq 0$, $p \neq 1$ : on peut diviser par $p$ et par $p-1$.

$$A^+ \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -p & 1 \\ 0 & 1 & \frac{p-1}{p} & \frac{p+1}{p} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + pL_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{p-1}{p} L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1+p \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{p} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2+p+p^2}{p} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{p} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où une unique solution (dépendant de $p$), $Sol_{p \neq 0,1} = \{\ (\frac{2+p+p^2}{p}, \frac{2}{p}, 1)\ \}$.

3. *Soit $a$ et $b$ deux réels quelconques. On considère le déterminant suivant :*

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & & 1 & a+b \end{vmatrix},\ n \geqslant 1,$$

*de la matrice de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sur la sous-diagonale valent 1, tous les coefficients sur la diagonale valent $a+b$, tous les coefficients sur la surdiagonale valent $ab$, et tous les autres coefficients sont nuls. En particulier, on a $D_1 = a+b$.*

(a) *Calculer $D_2$ et $D_3$*

(b) *En faisant des développements successifs par rapport à des lignes ou colonnes bien choisies, établir une relation entre $D_{n+1}$, $D_n$ et $D_{n-1}$.*

(c) *En déduire une expression pour $D_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.*

1. Conjugaison du verbe résoudre : je résous, tu résous, il/elle **résout**... avec un T, et non un D.

(a) $D_2 = a^2 + ab + b^2$, $D_3 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$.

(b) On développe par rapport à la première colonne de $D_{n+1}$ :

$$D_{n+1} = (a+b)\underbrace{\begin{vmatrix} a+b & ab & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & & 1 & a+b \end{vmatrix}}_{n\times n} - \underbrace{\begin{vmatrix} ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \\ 0 & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & & 1 & a+b \end{vmatrix}}_{n\times n},$$

on reconnait $D_n$ dans le premier terme, et on développe par rapport à la première ligne dans le deuxième terme :

$$D_{n+1} = (a+b)D_n - ab\underbrace{\begin{vmatrix} a+b & ab & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & & 1 & a+b \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} = (a+b)D_n - abD_{n-1}.$$

(c) $(D_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite satisfaisant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. L'equation caractéristique associée est $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ de solution $x = a$ et $x = b$.
**Cas** $a = b$ : La suite $D_n$ est de la forme $D_n = (\lambda + \mu n)a^n$ avec $\lambda$ et $\mu$ que l'on peut déterminer en utilisant les valeurs de $D_1$ et $D_2$. Dans ce cas on obtient :

$$D_n = (1+n)a^n, \quad \forall n \geqslant 1.$$

**Cas** $a \neq b$ : La suite $D_n$ est de la forme $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$ avec $\lambda$ et $\mu$ que l'on peut déterminer en utilisant les valeurs de $D_1$ et $D_2$. Dans ce cas on obtient :

$$D_n = \frac{a}{a-b}a^n - \frac{b}{a-b}b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n, \quad \forall n \geqslant 1.$$

4.

*(a) Soient $a, b \in I\!R$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Montrer que*

$$2\sqrt{ab} \leqslant a + b.$$

*(b) On considère les suites de réels positifs $(u_n)_{n\in I\!N}$ et $(v_n)_{n\in I\!N}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall n \in I\!N$*

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

*Montrer que $(u_n)_{n\in I\!N}$ est croissante et $(v_n)_{n\in I\!N}$ est décroissante.*

*(c) Montrer que $(u_n)_{n\in I\!N}$ et $(v_n)_{n\in I\!N}$ convergent vers la même limite.*

(a) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0$.

(b) On remarque que $\forall n \in N$ on a $u_n \leqslant v_n$ grâce à la question précédente et de plus $u_n \geqslant 0$. Donc

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geqslant \sqrt{u_n^2} = u_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leqslant v_n.$$

(c) On a $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ $\forall n \in N$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $v_0 = b$, donc elle converge vers $l_u$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $u_0 = a$, donc elle converge vers $l_v$. En passant à la limite dans la relation de récurrence $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ on obtient $l_v = \frac{l_u+l_v}{2}$, qui implique $l_u = l_v$.

5. *Donner un exemple de matrices $A$, $B$, $C$ telles que $AB = AC$ mais $B \neq C$.*

Nécessairement $A$ ne doit pas être inversible. Par exemple on peut penser à la matrice nulle. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a bien $AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mais $B \neq C$. Ce n'est pas le seul exemple...

6. *Soient $A$, $B$, $C$ trois matrices carrées de taille $n$ ($n \geqslant 1$), telles que $AB = CA = I_n$.*
   (a) *Montrer que $B = C$.*
   (b) *Quel est le rang de $B$ ?*

(a) On a $I_n = AB$. En multipliant à gauche par $C$ on obtient $C = C(AB)$. Mais le produit de matrice est associatif : $C(AB) = (CA)B$, et $CA = I_n$, donc au final on a bien $C = B$.
(b) Puisque on a $AB = BA = I_n$, les matrices $A$ et $B$ sont inversibles (et inverses l'une de l'autre), elles sont donc de rang maximal. D'où $\mathrm{rg}(B) = n$.

7. **(Bonus)** *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ et soit $a_n$ l'unique racine positive de l'équation*

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = 1.$$

   (a) *Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{2} < a_n \leqslant 1$.*
   (b) *Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*
   (c) *Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.*

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k - 1$. C'est une fonction dérivable telle que $f_n'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} \geqslant 1 > 0$, $\forall x \geqslant 0$, donc $f_n$ est strictement croissante. On calcule $f_n(0) = -1$, $f_n(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^n}$ et $f_n(1) = n - 1 \geqslant 0$. Comme $f_n$ est strictement croissante, il existe une unique racine positive $a_n$ de $f_n$ et de plus $\frac{1}{2} < a_n \leqslant 1$.
2. On calcule
$$f_{n+1}(a_n) = \sum_{k=1}^{n+1} a_n^k - 1 = a_n + a_n \left( \sum_{k=1}^{n} a_n^k \right) - 1 = 2a_n - 1 > 0.$$
Comme $f_{n+1}$ est strictement croissante et $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$ on a $a_{n+1} < a_n$, càd $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.
3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée, elle est convergente vers $l < 1$. On voudrait passer à la limite dans la rélation qui définit $a_n$ :
$$1 = \sum_{k=1}^{n} a_n = a_n \frac{1 - a_n^n}{1 - a_n}.$$
La limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant $l < 1$ il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \leqslant \rho < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. (On peut aussi dire que $a_n \leqslant a_2 < 1$ $\forall n \geqslant 2$.) Donc $0 \leqslant a_n^n \leqslant \rho^n \to 0$, donc par le théorème des gendarmes $\lim a_n^n = 0$. A la limite on obtient
$$1 = \frac{l}{1 - l}$$
donc $l = \frac{1}{2}$.