UPMC-Paris 6 **Année universitaire 2013-2014**

L1 - 1M002 – Partiel du 7 Mars 2014
Durée : 2 H 30 - Sans documents ni calculatrice

L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

Dans la partie visible du cahier, inscrire son numéro de section (par exemple MIPI 24).

I. Première partie (sur environ 16 points)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

1. (a) Rappeler la définition d'une suite de Cauchy.

   (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $0 < k < 1$ tels que $\forall n \geqslant 1$,
$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant k|u_n - u_{n-1}|.$$
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

2. On considère le système linéaire suivant, d'inconnues réelles x, y, z et pour lequel p est un paramètre réel :
$$\begin{cases} py + (p-1)z = p+1 \\ x - y - pz \quad = 1 \\ px - z \quad = p^2 + p + 1 \end{cases}$$
   Donner l'ensemble des solutions du système en fonction du paramètre p.

3. Soit a et b deux réels quelconques. On considère le déterminant suivant :
$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & & 1 & a+b \end{vmatrix}, \ n \geqslant 1,$$
   de la matrice de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sur la sous-diagonale valent 1, tous les coefficients sur la diagonale valent $a+b$, tous les coefficients sur la surdiagonale valent ab, et tous les autres coefficients sont nuls. En particulier, on a $D_1 = a + b$.

   (a) Calculer D_2 et D_3

   (b) En faisant des développements successifs par rapport à des lignes ou colonnes bien choisies, établir une relation entre D_{n+1}, D_n et D_{n-1}.

   (c) En déduire une expression pour D_n pour tout entier $n \geqslant 1$.

4. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Montrer que

$$2\sqrt{ab} \leqslant a + b.$$

(b) On considère les suites de réels positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

5. Donner un exemple de matrices A, B, C telles que $AB = AC$ mais $B \neq C$.

6. Soient A, B, C trois matrices carrées de taille n ($n \geqslant 1$), telles que $AB = CA = I_n$.

(a) Montrer que $B = C$.

(b) Quel est le rang de B ?

7. **(Bonus)** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ et soit a_n l'unique racine positive de l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = 1.$$

(a) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{2} < a_n \leqslant 1$.

(b) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

II. Calculs (sur environ 10 points)

Un questionnaire est à rendre sur une feuille séparée.