L1 - 1M002 – Partiel du 2 Mai 2014

Durée : 3 H - Sans documents ni calculatrice

L'utilisation de tout appareil électronique et des téléphones portables est interdite. Pendant l'épreuve, les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Le total des points est volontairement supérieur à 30 et les notes > 30 seront ramenées à 30.

Attention ! Partie II (environ 12 pts) à rendre sur une feuille séparée.

Questions de cours (environ 4 pts)

1. Enoncer le théorème du changement de variable pour une intégrale, en précisant soigneusement les hypothèses sur les fonctions considérées.

2. Etant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de l'espace $V = \mathbb{R}^n$; P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
   (a) Que représentent les vecteurs colonnes de P ?
   (b) Étant donné un vecteur u de V, on note X (respectivement X') le vecteur colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$). Donner une formule reliant X, X' et P.

Partie I (environ 5 + 10 + 5 = 20 pts)

Exercice 1 On note ln la fonction logarithme népérien et $e = \exp(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n dx$. On rappelle que, pour tout réel a : $a^0 = 1$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} + (n+1)\, I_n = e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout entier naturel n, montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.
4. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et préciser sa limite.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = n\, I_n$. En utilisant la question 2, montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et préciser sa limite.

Exercice 2 Soient u_0, v_0 deux réels. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout entier naturel n, par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - 3v_n + 10 \\ v_{n+1} & = & -3u_n + v_n + 14 \end{array}\right. \qquad (\star)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On désigne par I_2 la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une matrice A de $M_2(\mathbb{R})$ et un vecteur colonne Y de $\mathbb{R}^2$ tels que, pour tout entier naturel n, la relation $(\star)$ s'écrive sous la forme : $Z_{n+1} = A\,Z_n + Y$.
2. Déterminer les valeurs propres de A, et les sous-espaces propres associés.

Dans ce qui suit, on désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$.

3. Déterminer une base $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de f dans cette base soit $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, et où e_1' et e_2' sont respectivement de la forme $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
4. Donner la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, puis calculer P^{-1}.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer A^n en fonction de D^n, P et P^{-1}, puis calculer explicitement A^n.
6. Montrer que la matrice $A - I_2$ est inversible et calculer son inverse.
7. Montrer qu'il existe une unique solution X de l'équation $A\,X + Y = X$ et la déterminer.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Z_n en fonction de A^n, X et Z_0. *Indication :* on pourra considérer la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par : $W_n = Z_n - X$.
9. Exprimer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{4^n}$ en fonction de u_0 et v_0.

Exercice 3 [$*$] <u>(cet exercice est plus difficile)</u>

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout réel x de $[a, b]$ on pose : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. On note $I = F(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

1. En se référant à un théorème du cours, que l'on énoncera, montrer que F est dérivable sur $[a, b]$, et expliciter sa dérivée.
2. En déduire que F est monotone et réalise une bijection de $[a, b]$ sur l'intervalle $[F(a), F(b)] = [0, I]$.
   Dans ce qui suit, on désigne par G : $[0, I] \to [a, b]$ la fonction réciproque de F.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $k = 0, 1, \ldots, n-1$ on ait : $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt$.
   Indication : on pourra montrer que ceci équivaut à ce que, pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$, on ait $F(x_k) = \dfrac{k\,I}{n}$, c'est-à-dire $x_k = G\left(\dfrac{k\,I}{n}\right)$.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \int_0^I f(G(y))dy$.
5. À l'aide d'un changement de variable $y = \varphi(x)$ judicieux, montrer que la limite précédente vaut $\displaystyle\int_a^b f(x)^2 dx$.