L1 - 1M002 – Corrigé du partiel du 20 Février 2014

Durée : 2 H 30 - Sans documents ni calculatrice

L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

I. Première partie (sur environ 16 points)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont pris en compte pour une part importante dans l'appréciation des copies.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, convergente. Montrons que sa limite est unique.

   On démontre ce résultat par l'absurde, dans le cas d'une suite réelle convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On suppose qu'il existe deux réels ℓ_1 et ℓ_2 tels que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2.
   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors deux entiers n_1 et n_2 tels que :

   $$\forall\, n \geqslant n_1 \,:\, |u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

   $$\forall\, n \geqslant n_2 \,:\, |u_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

   On a alors, pour tout $n \geqslant max(n_1, n_2)$:

   $$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \leqslant |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \leqslant 2\,\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   ε étant quelconque, on obtient, pour $\varepsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$:

   $$|\ell_1 - \ell_2| \leqslant \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$$

   Si $\ell_1 \neq \ell_2$, c'est impossible. Il en résulte :

   $$\ell_1 = \ell_2$$

2. Etant donnée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *déterminant* de la matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n\,,\,1\leqslant j\leqslant n}$ le nombre, noté $\det A$, qui peut être calculé par un ***développement suivant la ligne*** i, $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \Delta_{ij}(A) \qquad (1)$$

où, pour tout couple d'indices $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $\Delta_{ij}(A)$, ***mineur d'indice*** (i,j), est le déterminant, noté $\Delta_{ij}(A)$, de la matrice obtenue en enlevant à A la ligne i et la colonne j.

3. Déterminons l'ensemble des réels x tels que la matrice

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2\,x & -x^2 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

soit inversible.

A cet effet, on calcule :

$$\begin{aligned}
\det A_x &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2\,x & -x^2 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2\,x-2 & -x^2-3 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \qquad (\mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1,\, \mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) \\
&= \begin{vmatrix} 2\,x-2 & -x^2-3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 3\,(2\,x-2) - 3\,(-x^2-3) \\
&= 3\,(x^2+2\,x+1) \\
&= 3\,(x+1)^2
\end{aligned}$$

Une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de A_x étant $\det A_x \neq 0$, l'ensemble des réels cherchés est donc

$$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite réelle, convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite réelle, à termes strictement positifs, divergente, de limite $+\infty$. Déterminons la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telle que, pour tout entier naturel non nul n :

$$w_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\, u_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

Par analogie avec le théorème de Cesàro (il s'agit, ici, du théorème de Cesàro généralisé), montrons que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers ℓ.

Pour tout entier naturel non nul n :

$$\begin{aligned}
|w_n-\ell| &= \left|\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\,u_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}-\ell\right| \\
&= \left|\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\,u_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}-\frac{\ell\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}\right| \\
&= \left|\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\,(u_k-\ell)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}\right|
\end{aligned}$$

Soit ε un réel strictement positif. Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers ℓ, il existe un rang n_0 tel que, pour tout entier $n\geqslant n_0$:

$$|u_n-\ell|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

On a alors, pour tout entier $n\geqslant n_0$:

$$\begin{aligned}
|w_n-\ell| &\leqslant \left|\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k\,(u_k-\ell)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}\right|+\left|\frac{\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} a_k\,(u_k-\ell)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}\right| \\
&\leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k\,|u_k-\ell|}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}+\frac{\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} a_k\,|u_k-\ell|}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k} \\
&\leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k\,|u_k-\ell|}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}+\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} a_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k} \\
&\leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k\,|u_k-\ell|}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}+\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k \, |u_k - \ell|}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k} = 0$$

il existe un rang n_1 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_1$:

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k \, |u_k - \ell|}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On a alors, pour tout entier $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$:

$$|w_n - \ell| \quad \leqslant \quad \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui conduit au résultat cherché.

5. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et a, b et c trois réels deux à deux distincts. On considère la matrice carrée d'ordre n :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ c & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ c & \dots & \dots & c & a \end{pmatrix}$$

Une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de A étant $\det A \neq 0$, on pose

$$D_n = \det A$$

et on calcule :

$$\begin{aligned} D_n \quad &= \quad \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ c & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ c & \dots & \dots & c & a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b & b \\ c-a & a-b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c-a & a-b & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c-a & a-b \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(à chaque ligne, on a retranché la précédente)

En développant suivant la dernière colonne, on en déduit :

$$
\begin{array}{rcl}
D_n & = & (-1)^{n+1}\,b \begin{vmatrix} c-a & a-b & 0 & \dots & \dots \\ 0 & c-a & a-b & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c-a & a-b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c-a \end{vmatrix} + (a-b) \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ c-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c-a & a-b & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c-a & a-b \end{vmatrix} \\
& = & (-1)^{n+1}\,b\,(c-a)^{n-1} + (a-b)\,D_{n-1} \\
& = & (-1)^{n+1}\,b\,(-1)^{n-1}\,(a-c)^{n-1} + (a-b)\,D_{n-1} \\
& = & b\,(a-c)^{n-1} + (a-b)\,D_{n-1}
\end{array}
$$

On en déduit alors, par récurrence :

$$
\begin{array}{rcl}
D_n & = & b\,(a-c)^{n-1} + (a-b)\,\left\{b\,(a-c)^{n-2} + (a-b)\,D_{n-2}\right\} \\
& = & b\,(a-c)^{n-1} + b\,(a-b)\,(a-c)^{n-2} + (a-b)^2\,D_{n-2} \\
& = & b\,(a-c)^{n-1} + b\,(a-b)\,(a-c)^{n-2} + (a-b)^2\,\left\{b\,(a-c)^{n-3} + (a-b)\,D_{n-3}\right\} \\
& = & b\,(a-c)^{n-1} + b\,(a-b)\,(a-c)^{n-2} + b^2\,(a-b)^2\,(a-c)^{n-3} + (a-b)^3\,D_{n-3} \\
& = & \dots\dots\dots \\
& = & b\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}(a-c)^{n-k-1}\,(a-b)^k + (a-b)^{n-1}\,D_1 \\
& = & b\,(a-c)^{n-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{a-b}{a-c}\right)^k + (a-b)^{n-1}\,a \\
& = & b\,(a-c)^{n-1}\,\dfrac{1-\left(\dfrac{a-b}{a-c}\right)^{n-1}}{1-\frac{a-b}{a-c}} + (a-b)^{n-1}\,a \\
& = & b\,(a-c)\,\dfrac{(a-c)^{n-1}-(a-b)^{n-1}}{b-c} + (a-b)^{n-1}\,a \\
& = & \dfrac{b\,(a-c)^n - c\,(a-b)^n}{b-c}
\end{array}
$$

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc :

$$b\,(a-c)^n - c\,(a-b)^n \neq 0$$

On aurait pu, aussi, calculer le déterminant de la matrice en considérant, pour x dans $\mathbb{R}$, le déterminant :

$$\det(A + x\,J) = \begin{vmatrix} a+x & b+x & \dots & \dots & b+x \\ c+x & a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x & b+x \\ c+x & \dots & \dots & c+x & a+x \end{vmatrix}$$

qui est affine en x, et donc de la forme $\lambda\,x + \mu$, où λ et μ sont deux constantes réelles (Cf le déterminant d'Hürwitz). On détermine λ et μ en remarquant que, pour $x = -b$ et $x = -c$, on se ramène à des déterminants de matrices triangulaires.

6. ***Questions BONUS :***

i. Soit n un entier naturel non nul, et A et B dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
A et B étant dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, leurs déterminants respectifs sont non nuls.
Il en résulte :

$$\det(A\,B) = \det A\,\det B \neq 0$$

La matrice produit AB est donc inversible.
Sa matrice inverse $(A\,B)^{-1}$ est telle que :

$$AB\,(A\,B)^{-1} = I_n$$

En multipliant à gauche par A^{-1}, on en déduit :

$$A^{-1}\,A\,B\,(A\,B)^{-1} = B\,(A\,B)^{-1} = A^{-1}$$

De même, en multipliant à gauche par B^{-1}, on en déduit :

$$B^{-1}\,B\,(A\,B)^{-1} = (A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

On vérifie sans peine que :

$$(A\,B)\,B^{-1}\,A^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}\,A\,B = I_n$$

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

ii. Soit n un entier naturel non nul, et A dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
A étant dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, son déterminant est non nul. Il en résulte :

$$\frac{1}{\det A}\,A\cdot{}^t\mathrm{Com}\,A = \frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{Com}\,A\cdot A = I_n$$

La transposée de la Comatrice de A est donc inversible, de matrice inverse

$$\frac{1}{\det A}\,A$$

et :

$$(\mathrm{Com}\,A)^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^tA$$