L1 - 1M002 – Partiel du 20 Février 2014

Durée : 2 H 30 - Sans documents ni calculatrice

L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

Dans la partie visible du cahier, inscrire son numéro de section (par exemple MIPI 25).

I. Première partie (sur environ 16 points)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, convergente. Montrer que sa limite est unique.

2. Rappeler la formule donnant le développement suivant une ligne du déterminant, pour une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$, $A = [a_{i,j}]_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$, à coefficients réels. Toutes les notations utilisées sont à redéfinir.

3. Déterminer l'ensemble des réels x tels que la matrice
$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2\,x & -x^2 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
soit inversible.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite réelle, convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite réelle, à termes strictement positifs, divergente, de limite $+\infty$. Déterminer la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telle que, pour tout entier naturel non nul n :
$$w_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\, u_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

5. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et a, b et c trois réels deux à deux distincts. On considère la matrice carrée d'ordre n :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ c & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ c & \dots & \dots & c & a \end{pmatrix}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que la matrice A soit inversible.

6. ***Questions BONUS :***

   i. Soit n un entier naturel non nul, et A et B dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que :

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

   ii. Soit n un entier naturel non nul, et A dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que la Comatrice de A est inversible, et donner l'expression de sa matrice inverse.

II. Calculs (sur environ 10 points)

Un questionnaire est à rendre sur une feuille séparée.