L1 - 1M002 – Corrigé de l'examen du 10 Juin 2014

Durée : 3 H - Sans documents ni calculatrice

L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

I. Première partie

Questions de cours

1. Dire que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la limite $\ell \in \mathbb{R}$ signifie que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall\, n \geqslant n_0 \,:\, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

2. Etant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de l'espace $V = \mathbb{R}^n$; P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
   Les vecteurs colonnes de P représentent les *coordonnées* (ou *composantes*) des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

   La formule de changement de base pour un vecteur, dont on désignera par $(\vec{u})_{\mathcal{B}}$ les coordonnées dans $\mathcal{B}$, et $(\vec{u})_{\mathcal{B}'}$ les coordonnées dans $\mathcal{B}'$, est :

$$(\vec{u})_{\mathcal{B}} = P\;(\vec{u})_{\mathcal{B}'}$$

Exercices

1. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout réel x de $[0,+\infty[$ par l'égalité

$$f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$$

L'objectif de cet exercice est l'étude de cette fonction.
Notons $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout t de $\in [0,+\infty[$, par :

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$$

(a) La fonction g est continue sur $[0,+\infty[$. Pour tout $x \geqslant 0$, elle est donc intégrable sur l'intervalle $[0,x]$.

(b) Parce que g est continue sur $[0,+\infty[$, la fonction f est une primitive de g sur $[0,+\infty[$. Ainsi, f dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

(c) Pour tout $x \geqslant 0$: $f'(x) > 0$, ce qui conduit au résultat cherché.

(d) Pour tout $t \geqslant 0$: $g(t) \leqslant 1$. D'après la question c., on a donc pour tout x de $[0,1]$:

$$f(x) \leqslant f(1) \leqslant \int_0^1 \mathrm{d}t = 1$$

(e) Pour tout $t > 0$:

$$g(t) \leqslant \frac{1}{t^2}$$

On en déduit que, pour tout $x \geqslant 1$:

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1$$

(f) Soit x un nombre réel positif. D'après la question d., on a l'inégalité annoncée si $x \in [0,1]$. Supposons $x \geqslant 1$. D'après la relation de Chasles, on a

$$f(x) = f(1) + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$$

Par suite :

$$f(x) \leqslant 1 - \frac{1}{x} + 1 \leqslant 2$$

(g) L'image de f est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure ℓ. Puisque 2 est un majorant de cette image, on a $\ell \leqslant 2$.

(h) Soit ε un nombre réel strictement positif. Parce que $\ell - \varepsilon$ ne majore par l'image de f, il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que l'on ait

$$\ell - \varepsilon < f(x_0) \leqslant \ell$$

La fonction f étant croissante sur $[0,+\infty[$, on a donc, pour tout $x \geqslant x_0$, les inégalités

$$\ell - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant \ell$$

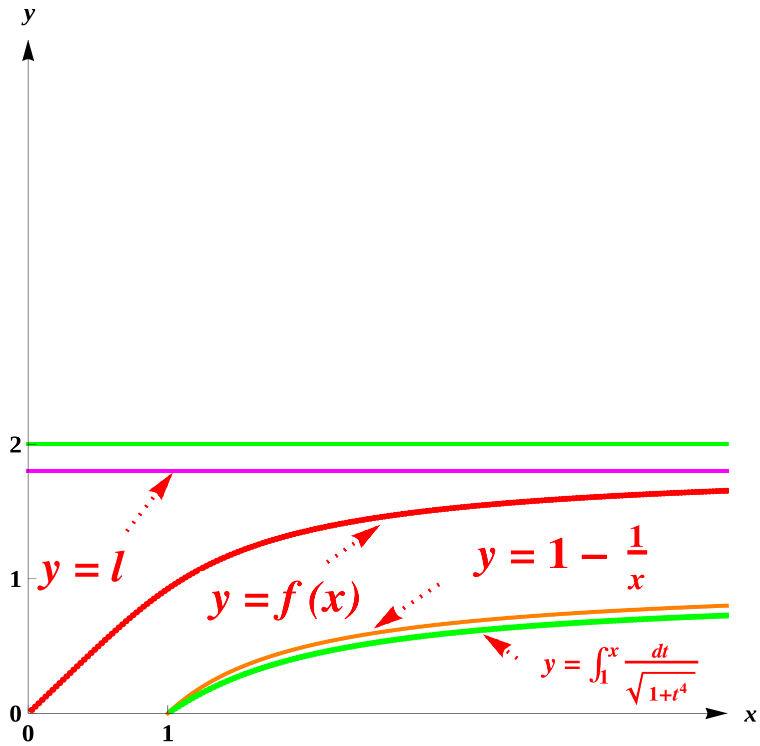
D'où :

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

et le résultat.

(i) On a $f(0) = 0$ et le coefficient directeur de la tangente au graphe de f en 0 est $f'(0)$, qui vaut 1.

(j) La droite d'équation $y = \ell$ est asymptote au graphe de f quand x tend vers $+\infty$ et f est croissante sur $[0,+\infty[$. On peut alors donner l'allure de la courbe représentative de f.



◇ ◇ ◇

2. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

On rappelle que :

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Pour montrer que la famille de vecteurs $(e_1 + e_2, e_3 + e_4)$ est une base de

$$\mathcal{I}m\, A = \left\{ A\, X,\ X \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

il faut montrer que :

i. Vect $\{e_1 + e_2, e_3 + e_4\} \subset \mathcal{I}m\, A$;

ii. $\mathcal{I}m\, A \subset$ Vect $\{e_1 + e_2, e_3 + e_4\}$;

iii. la famille de vecteurs $(e_1 + e_2, e_3 + e_4)$ est une famille libre.

Pour tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x - y + 2\,z + 2\,t \\ x - y + 2\,z + 2\,t \\ 4\,z + 4\,t \\ 4\,z + 4\,t \end{pmatrix} \\ &= (x - y + 2\,z + 2\,t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\,(z + t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (x - y + 2\,z + 2\,t)\ (e_1 + e_2) + 4\,(z + t)\ (e_3 + e_4) \end{aligned}$$

Il apparaît donc que :

i. Déjà :

$$e_1 + e_2 = A\, e_1 \quad , \quad e_3 + e_4 = A \left(\frac{e_2}{2} + \frac{e_3 + e_4}{8} \right)$$

Ainsi :

$$\text{Vect } \{e_1 + e_2, e_3 + e_4\} \subset \mathcal{I}m\, A$$

ii. $\mathcal{I}m\, A \subset \text{Vect } \{e_1 + e_2, e_3 + e_4\}$.

De plus, la famille de vecteurs $(e_1 + e_2, e_3 + e_4)$ est une famille libre.

La famille de vecteurs $(e_1 + e_2, e_3 + e_4)$ est donc une base de $\mathcal{I}m\, A$.

On a donc bien, finalement,

$$\mathcal{I}m\, A = \text{Vect } \{e_1 + e_2, e_3 + e_4\}$$

(b) Le théorème du rang conduit à :

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker A + \dim \mathcal{I}m\, A$$

Ainsi :

$$\dim \ker A = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathcal{I}m\, A = 4 - 2 = 2$$

(c) Déterminons une base du noyau de A.

Ce noyau est l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, tels que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} x - y + 2\, z + 2\, t \\ x - y + 2\, z + 2\, t \\ 4\, z + 4\, t \\ 4\, z + 4\, t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y + 2\,z + 2\,t & = & 0 \\ x - y + 2\,z + 2\,t & = & 0 \\ 4\,z + 4\,t & = & 0 \\ 4\,z + 4\,t & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y + 2\,z + 2\,t & = & 0 \\ z + t & = & 0 \end{array}\right.$$

Il en résulte :

$$z = -t \quad , \quad x = y$$

On vérifie que, réciproquement, tout vecteur de la forme

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2$$

convient.

Il apparaît donc que $e_1 + e_2$ et $e_3 - e_4$ sont des vecteurs du noyau de A.

Ainsi :

$$\text{Vect}\,\{e_1 + e_2,\, e_3 - e_4\} \subset \ker\, A$$

On vérifie que $(e_1 + e_2,\, e_3 - e_4)\,e$ est une famille libre (de deux vecteurs). D'après ce qui précède, le noyau de A est de dimension 2. L'inclusion précédente, entre deux sous-espaces de même dimension, prouve que ceux-ci sont égaux :

$$\text{Vect}\,\{e_1 + e_2,\, e_3 - e_4\} = \ker\, A$$

soit :

$$\ker\, A = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect}\,\{e_1 + e_2,\, e_3 - e_4\}$$

(d) Considérons une matrice M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad , \quad (B, C, D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

On montre, en développant son déterminant par rapport à la première colonne, que :

$$\det M = \det B \times \det D$$

(e) Le polynôme caractéristique de A est :

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda\, I_4) \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \left((1-\lambda)(-1-\lambda)+1\right)\left((4-\lambda)^2-16\right) \\
&= \left(-(1-\lambda)(1+\lambda)+1\right)\left((4-\lambda)^2-16\right) \\
&= \left(-1+\lambda^2+1\right)\left(16-8\,\lambda+\lambda^2-16\right) \\
&= \lambda^2\left(\lambda^2-8\,\lambda\right) \\
&= \lambda^3\,(\lambda-8)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont donc zéro, qui est valeur propre triple, et 8, qui est valeur propre simple (d'ordre 1).

(f) Grâce aux questions précédentes, on connaît déjà l'espace propre associé à la valeur propre zéro :

$$E_0 = \ker A = \text{Vect}\,\{e_1 + e_2, e_3 - e_4\}$$

qui est donc de dimension 2.

Le sous-espace propre E_8 associé à la valeur propre 8 est l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, tels que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 8 \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\,x \\ 8\,y \\ 8\,z \\ 8\,t \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} x - y + 2\,z + 2\,t \\ x - y + 2\,z + 2\,t \\ 4\,z + 4\,t \\ 4\,z + 4\,t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\,x \\ 8\,y \\ 8\,z \\ 8\,t \end{pmatrix}$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -7\,x - y + 2\,z + 2\,t & = & 0 \\ x - 9\,y + 2\,z + 2\,t & = & 0 \\ -4\,z + 4\,t & = & 0 \\ 4\,z - 4\,t & = & 0 \end{array} \right.$$

ce qui est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -7\,x - y + 2\,z + 2\,t & = & 0 \\ x - 9\,y + 2\,z + 2\,t & = & 0 \\ z & = & t \end{array} \right.$$

Il en résulte :

$$z = t = 2\,x \quad , \quad x = y$$

On vérifie que, réciproquement, tout vecteur de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ 2\,x \\ 2\,x \end{pmatrix} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

convient.

E_8 est l'ensemble des vecteurs de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ 2\,x \\ 2\,x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

où x peut prendre n'importe quelle valeur réelle. Il en résulte :

$$E_8 = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect}\ \{e_1 + e_2 + 2\,(e_3 + e_4)\}$$

Le sous-espace propre E_8 est donc de dimension 1.

(g) La matrice A n'est donc pas diagonalisable, puisque la dimension du sous-espace propre E_0 n'est pas égale à la multiplicité de la valeur propre zéro.

(h) La matrice A n'est pas la matrice d'un projecteur, puisque :

$$A^2 \neq A$$

$\diamond \quad \diamond \quad \diamond$

3. ***Question BONUS :***

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et D une matrice diagonale d'ordre n, de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On suppose que les λ_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, sont deux à deux distincts.

Soit $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant n}$ une matrice commutant avec D. On a alors, pour tout couple d'indices $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$:

$$(M\,D)_{ij} = (D\,M)_{ij}$$

ce qui conduit à :

$$\sum_{k=1}^{n} m_{ik}\, d_{kj} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}\, m_{kj}$$

soit :

$$\sum_{k=1}^{n} m_{ik}\, \lambda_k\, \delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i\, \delta_{ik}\, m_{kj}$$

soit :

$$m_{ij}\, \lambda_j = \lambda_i\, m_{ij} \Rightarrow m_{ij}\, (\lambda_j - \lambda_i) = 0$$

(le seul terme non nul du membre de gauche est obtenu pour $k = j$; de même, le seul terme non nul du membre de droite est obtenu pour $k = i$)
Ainsi, les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, étant deux à deux distincts, il en résulte, pour $i \neq j$:

$$m_{ij} = 0$$

Les termes non diagonaux de la matrice M sont donc nuls : c'est une matrice diagonale.

◇ ◇ ◇