
L1 - 1M002 – Corrigé du partiel du 2 Mai 2014

Durée : 3 H - Sans documents ni calculatrice

L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

I. Première partie

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont pris en compte pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Questions de cours

1. **Théorème du changement de variable pour une intégrale :**

   Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ telle que :

   $$\varphi(J) \subseteq I$$

   Alors, pour tout couple de réels $(\alpha, \beta) \in J^2$:

   $$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ dt$$

◇ ◇ ◇

2. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$, et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Les vecteurs colonnes de P représentent les *coordonnées* (ou *composantes*) des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

   La formule de changement de base pour un vecteur u de $\mathbb{R}^n$, dont on désignera par $X = (u)_{\mathcal{B}}$ les coordonnées dans $\mathcal{B}$, et $X' = (u)_{\mathcal{B}'}$ les coordonnées dans $\mathcal{B}'$, est :

$$(\vec{u})_{\mathcal{B}} = P\;(\vec{u})_{\mathcal{B}'}$$

   ou encore :

$$X = P\,X'$$

◇ ◇ ◇

Partie I

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n\,dx,$$

1. On calcule :

$$U_0 = e - 1$$

   En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$I_1 = \left[x\,\ln x\right]_1^e - \int_1^e x\,\frac{1}{x}\,dx = \left[x\,\ln x\right]_1^e - \int_1^e dx = 1$$

2. Soit n un entier naturel. En effectuant de nouveau une intégration par parties (essentiellement la même que celle de la première question), on obtient :

$$I_{n+1} = \left[x\,(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - (n+1)\,I_n = e - (n+1)\,I_n.$$

3. Pour tout entier naturel n, la fonction définie sur $[1, e]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui à tout réel x de $[1, e]$, associe $(\ln x)^n$, est continue et positive. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc positive.
   Il en résulte, pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} \geqslant 0$$

   puis :

$$e - (n+1)\,I_n \geqslant 0$$

   et donc :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

4. Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$$

la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente de limite nulle (théorème des gendarmes).

5. Comme

$$I_{n+1} = e - (n+1)\, I_n \quad \forall\, n \,\in\, \mathbb{N}$$

on en déduit :

$$I_{n+1} = e - n\, I_n - I_n \quad \forall\, n \,\in\, \mathbb{N}$$

Les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergentes, chacune de limite nulle, la suite $(n\, I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc aussi convergente, de limite e.

$\diamond \quad \diamond \quad \diamond$

Exercice 2

Soient u_0, v_0 deux réels. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout entier naturel n, par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - 3v_n + 10 \\ v_{n+1} & = & -3u_n + v_n + 14 \end{array} \right. \qquad (\star)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On désigne par I_2 la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminons une matrice A de $M_2(\mathbb{R})$ et un vecteur colonne Y de $\mathbb{R}^2$ tels que, pour tout entier naturel n, la relation $(\star)$ s'écrive sous la forme : $Z_{n+1} = A\, Z_n + Y$.

   Le choix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

   conduit à :

$$Z_{n+1} = A\, Z_n + Y$$

2. $\rightsquigarrow$ **Pour déterminer les valeurs propres de A, on calcule son polynôme caractéristique :**

$$\begin{array}{rcl}\chi_A(\lambda) & = & \det(A-\lambda\, I_2) \\ & = & \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ & = & (1-\lambda)^2-9 \\ & = & (1-\lambda-3)\,(1-\lambda+3) \\ & = & (-2-\lambda)\,(4-\lambda)\end{array}$$

Le spectre de la matrice A est donc $\{-2,4\}$.

On peut aisément vérifier la cohérence de ce résultat en remarquant que la somme des valeurs propres obtenues, i.e.

$$-2+4=2$$

est bien égale à la trace de la matrice, qui vaut aussi 2.
Le produit des valeurs propres obtenues, i.e.

$$-2\times 4=-8$$

est bien égal au déterminant de la matrice, qui vaut aussi -8.

On peut, aussi, déjà remarquer que la matrice A est diagonalisable, puisque l'on est en dimension 2, et qu'elle admet deux valeurs propres distinctes.

$\rightsquigarrow$ **Déterminons les sous-espaces propres de A.**

Le sous-espace propre E_{-2} associé à la valeur propre -2 est l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, tels que

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-2\times\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\,x \\ -2\,y \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} x-3\,y \\ -3\,x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\,x \\ -2\,y \end{pmatrix}$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\,x-3\,y & = & 0 \\ -3\,x+3\,y & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui est équivalent à

$$x = y$$

E_{-2} est l'ensemble des vecteurs de la forme

$$\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où y peut prendre n'importe quelle valeur réelle. Il en résulte :

$$E_{-2} = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Le sous-espace propre E_4 associé à la valeur propre 4 est l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tels que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,x \\ 4\,y \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} x - 3\,y \\ -3\,x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,x \\ 4\,y \end{pmatrix}$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -3\,x - 3\,y & = & 0 \\ -3\,x - 3y & = & 0 \end{array} \right.$$

ce qui est équivalent à

$$y = -x$$

E_4 est l'ensemble des vecteurs de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où x peut prendre n'importe quelle valeur réelle. Il en résulte :

$$E_4 = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

E_{-2} est de dimension 1, qui est la multiplicité de la valeur propre -2 ; E_4 est de dimension 1, qui est la multiplicité de la valeur propre 4 : A est diagonalisable.

On aurait pu conclure directement à la diagonalisabilité de A en remarquant que A est symétrique réelle.

Dans ce qui suit, on désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$.

3. D'après ce qui précède, la matrice de l'application linéaire f associée à A, exprimée dans la base de diagonalisation

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathrm{Com}(P)$ la comatrice de P, et ${}^t\mathrm{Com}(P)$ sa transposée. On calcule alors :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det\, P}\, {}^t\mathrm{Com}(P) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Comme :

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

on en déduit, pour tout entier naturel non nul n :

$$\begin{aligned} A^n &= P\,D\,P^{-1}\,P\,D\,P^{-1} \ldots P\,D\,P^{-1} \\ &= P\,D^n\,P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + (-2)^n & -4^n + (-2)^n \\ -4^n + (-2)^n & 4^n + (-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Comme 1 n'est pas valeur propre de la matrice A, la matrice $A - I_2$ est inversible.
Soit $\mathrm{Com}\,(A - I_2)$ la comatrice de P, et ${}^t\mathrm{Com}\,(A - I_2)$ sa transposée. On calcule alors :

$$\begin{aligned} (A - I_2)^{-1} &= \frac{1}{\det\,(A - I_2)}\, {}^t\mathrm{Com}\,(A - I_2) \\ &= -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. Dans $\mathbb{R}^2$, l'équation $A\,X + Y = X$ s'écrit aussi :

$$(A - I_2)\,X = -Y$$

ce qui conduit à :

$$\begin{array}{rcl} X & = & -(A - I_2)^{-1}\,Y \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix} \\ & = & \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

8. Pour tout entier naturel non nul n :

$$Z_n = A\,Z_{n-1} + Y$$

et donc :

$$\begin{array}{rcl} Z_n - X & = & A\,Z_{n-1} + Y - X \\ & = & A\,Z_{n-1} - (A - I_2)\,X - X \\ & = & A\,Z_{n-1} - A\,X + X - X \\ & = & A\,Z_{n-1} - A\,X \\ & = & A\,(Z_{n-1} - X) \end{array}$$

On en déduit, par récurrence :

$$Z_n - X = A\,(Z_{n-1} - X) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^\star$$

$$Z_{n-1} - X = A\,(Z_{n-2} - X) \quad \text{pour } n \geqslant 2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z_n - X = A^n\,(Z_0 - X) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{array}{rcl}
Z_n & = & A^n\,(Z_0 - X) + X \\
& = & \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^n + (-2)^n & -4^n + (-2)^n \\ -4^n + (-2)^n & 4^n + (-2)^n \end{pmatrix}(Z_0 - X) + X \\
& = & \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^n + (-2)^n & -4^n + (-2)^n \\ -4^n + (-2)^n & 4^n + (-2)^n \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix}\right] + \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix} \\
& = & \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} (4^n + (-2)^n)\,u_0 + (-4^n + (-2)^n)\,v_0 \\ (-4^n + (-2)^n)\,u_0 + (4^n + (-2)^n)\,v_0 \end{pmatrix} \\
& & -\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 14\,(4^n + (-2)^n) + 10\,(-4^n + (-2)^n) \\ 14\,(-4^n + (-2)^n) + 10\,(4^n + (-2)^n) \end{pmatrix} + \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix}
\end{array}$$

9. Comme, pour tout entier naturel n :

$$Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

en en déduit, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{2}\,\left((4^n + (-2)^n)\,u_0 + (-4^n + (-2)^n)\,v_0\right) - \frac{1}{6}\,\left(14\,(4^n + (-2)^n) + 10\,(-4^n + (-2)^n)\right) + \frac{14}{3}$$

puis :

$$\frac{u_n}{4^n} = \frac{1}{2}\left((1 + \frac{(-2)^n}{4^n})\,u_0 + (-1 + (-2)^n)\,v_0\right) - \frac{1}{6}\left(14\left(1 + \frac{(-2)^n}{4^n}\right) + 10\left(-1 + \frac{(-2)^n}{4^n}\right)\right) + \frac{14}{3 \times 4^n}$$

ce qui conduit à :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{4^n} = \frac{u_0 - v_0}{2} - \frac{14}{6} + \frac{10}{6} = \frac{u_0 - v_0}{2} - \frac{4}{6} = \frac{u_0 - v_0}{2} - \frac{2}{3}$$

$\diamond \quad \diamond \quad \diamond$

Exercice 3

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout réel x de $[a, b]$ on pose : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. On note $I = F(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

1. D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est une primitive de f sur $[a, b]$; F est donc dérivable sur $[a, b]$, de dérivée égale à f :

$$\forall x \in [a, b] \ : \ F'(x) = f(x)$$

2. La fonction f étant à valeurs strictement positives sur $[a, b]$, F est strictement croissante sur $[a, b]$, et donc injective. La fonction F réalise donc une bijection de $[a, b]$ sur son image

$$F([a, b]) = [0, I]$$

Dans ce qui suit, on désigne par G : $[0, I] \to [a, b]$ la fonction réciproque de F.

3. On construit la subdivision cherchée par récurrence. La fonction F est croissante et de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$.

$\rightsquigarrow$ Posons :

$$x_0 = a$$

L'existence de x_1 dans $]a, b[$ tel que :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt = \int_a^{x_1} f(t)\,dt = \frac{1}{n} \int_a^b f(t)dt$$

est assurée par le fait que F est une bijection de $[a, b]$ sur $[0, I]$.

$\rightsquigarrow$ Supposons qu'il existe des réels $x_1 < \ldots < x_j$, $1 \leqslant j < n$, de $]a, b[$, qui vérifient la condition donnée.

L'existence de x_{j+1} dans $]a, b[$ tel que :

$$F(x_{j+1}) = \frac{(j+1)\,I}{n}$$

est assurée par le fait que F est une bijection de $[a, b]$ sur $[0, I]$.

Pour $j = n-1$, on choisit $x_n = b$, ce qui achève la construction de la subdivision, et la récurrence.

La rélation de Chasles conduit alors à :

$$F(x_k) = \frac{k\,I}{n}$$

Ainsi :

$$x_k = G\left(\frac{k\,I}{n}\right)$$

4. On a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(G\left(\frac{k\,I}{n}\right)\right)$$

On reconnaît alors une une somme de Riemann :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(G\left(\frac{k\,I}{n}\right)\right) = \frac{1}{I}\int_0^I f(G(y))\,dy$$

ce qui conduit à :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \int_0^I f(G(y))\,dy$$

5. On effectue le changement de variable :

$$y = F(x)$$

ce qui, compte tenu de $x = G(y)$, conduit à :

$$\int_0^I f(G(y))\,dy = \int_a^b f(x)\,F'(x)dx = \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Il en résulte :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{1}{I}\int_0^I f(G(y))\,dy = \frac{1}{I}\int_a^b f^2(x)\,dx$$

◇ ◇ ◇