L1 1M002 - Partiel du 2 Mai 2014 - Deuxième partie - Corrigé

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n.

Equation caractéristique : $r^2 + r + 1 = 0$ $\sim$ Racines : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

$$u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

Déterminer une base du noyau de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\ker \mathrm{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{t^2}{t^4-1} = \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{2(t^2+1)}$$

Primitive de la fonction $t > 1 \mapsto \dfrac{t^2}{t^4-1}$:

$$\frac{1}{4}\ln|1-t| - \frac{1}{4}\ln|t+1| + \frac{1}{2}\arctan t$$

Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2\frac{k}{n}}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2t}\,dt = \frac{\ln 3}{2}$$

Calculer : $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin t\,dt$.

$$\pi$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Polynôme caractéristique de A :

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 10\,\lambda - 8 = (2-\lambda)\,(\lambda-1)\,(\lambda+4)$$

Valeurs propres de A :

$$-4 \quad , \quad 2 \quad , \quad 1$$

Sous-espaces propres de A :

de dimension 1